Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Žan Jernejčič in Ines Šilc

Reševanje problema trgovskega potnika s k-optimalnim in Lin-Kernighanovim algoritmom

Ljubljana, 2020

1 Definiranje problema

V projektni nalogi bova reševala Problem trgovskega potnika s pomočjo k-optimalnega in Lin-Kernighanovega algoritma.

Problem trgovskega potnika oziroma Travelling salesman problem (krajše TSP) je problem, kjer imamo podanih n mest in razdalje med vsemi (za vsak par mest imamo torej podano, koliko sta si oddaljeni). Zanima nas, ali lahko obiščemo vsako mesto in se na koncu vrnemo v prvotno mesto. Če označimo $d_{i,j}$ kot razdaljo mad i-tim in j-tim mestom, iščemo torej:

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi(i),\pi(i+1)} + d_{\pi(n),\pi(1)}$$

kjer je S_n množica vseh permutacij danih n mest.

Naivna rešitev je očitna, pogledamo $(n-1)!$ kombinacij, torej iz vsakega mesta v vsako drugo mesto, si zapišemo vse kombinacije in kakšno razdaljo smo prepotovali, ter izberemo tisto možnost, kjer je bila razdalja najkrajša.

Pred začetkom se lahko vprašamo kakšen mora biti graf, da lahko na njem izvajamo sledeča algoritma. Graf **ne sme** imeti **negativnih ciklov**, saj je najcenejši cikel potem očiten, in ustvarimo neskončno zanko, saj bo imela najboljša rešitev ceno -∞. Ker imamo opravka s cikli, lahko cikel začnemo v kateremkoli vozlišču, zato lahko vedno gledamo možne poti od začetka.

Za projekt sva uporabila programski jezik `python`. Uporabljala sva naslednje pakete:

- `networkx`: za definiranje in generiranje grafov
- `random`: za generiranje naključnih števil in seznamov
- `matplotlib`: za izrisovanje grafov
- `timeit`: za mertive časovne zahtevnosti
- `itertools`: za generiranje prvotne permutacije

Za preverjanje veljavnosti poti v grafu za problem potujočega trgovca, morava vedeti:

- Vsaka pot trgovca bo morala imeti vsa vozlišča primarnega grafa
- Vsaka pot trgovca bo morala imeti točno toliko povezav kot vozlišč
- Dolžina poti bo morala biti enaka številu vozlišč -1

2 k-optimalni algoritmi

K-optimalni algoritem, je lokalni algoritem, kjer iščemo rešitev Problema trgovskega potnika in sorodnih problemov. Algoritem deluje tako, da zmanjša dolžino trenutnega potovanja, dokler ne dosežemo poti, katere dolžine ne moremo izboljšati.

Poznamo več različic k-opt algoritma. V tej projektni nalogi se bova osredotočila na dve glavni različici k-opt algoritma, to sta 2-Opt in 3-Opt algoritem. 2-Opt algoritem deluje tako, da odstrani dve vozlišči grafa (dve mesti), tako razdeli pot na dva dela, poišče najboljšo rešitev podproblema, in nato poveže nazaj mesti na najboljši možen način. 3-Opt algoritem odstrani tri povezave ali vozlišča, tako dobimo 3 podomrežja mest. V naslednjem koraku analiziramo najboljšo pot med temi tremi podomrežji. To ponavljamo za druge tri povezave, dokler nismo poskusili vseh možnih poti v danem omrežju.

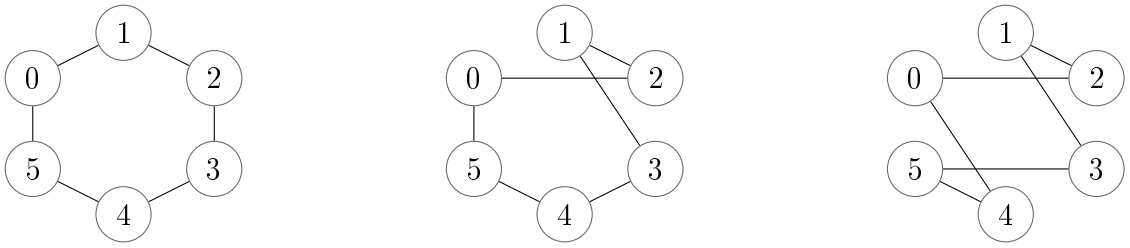
2.1 2-opt algoritem

Za začetek 2-opt postopka potrebujemo poln graf z utežmi na vsaki povezavi in danim začetnim ciklom po tem grafu. Postopoma odstranjujemo po dve vozlišči in ju povežemo drugače, nato preverimo, ali je novonastali cikel cenejši. Če je novi cikel cenejši, potem ga vzamemo za boljšo rešitev. Ta postopek nadaljujemo, dokler ne pridemo do konca poti in se moramo vrniti na začetek.

Za algoritem potrebujemo še dodatno funkcijo, ki nam izračuna ceno poti, ta prejme vhodne podatke graf in pot in sešteje uteži poti v grafu. Dejanski postopek 2-opt algoritma izgleda takole:

```
def dva_opt(graf, pot):

    najboljsa_pot = pot

    izboljsanje = True
    while izboljsanje:
        izboljsanje = False
        for i in range(1, len(pot) - 2):

            for j in range(i + 1, len(pot)):

                if j - i == 1: continue
                nova_pot = pot
                nova_pot[i:j] = pot[j - 1:i - 1:-1]

                if cena_poti(graf, nova_pot) < cena_poti(graf, najboljsa_pot):
                    najboljsa_pot = nova_pot
                    izboljsanje = True
        pot = najboljsa_pot

    return (pot, cena_poti(graf, pot))
```

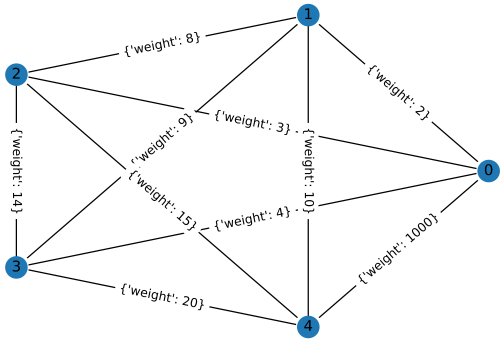
Algoritem gre postopoma po poti in zamenja zaporedje vozlišč, če je le tako bolj optimalno. Dva koraka 2-opt algoritma bi izgledala takole:



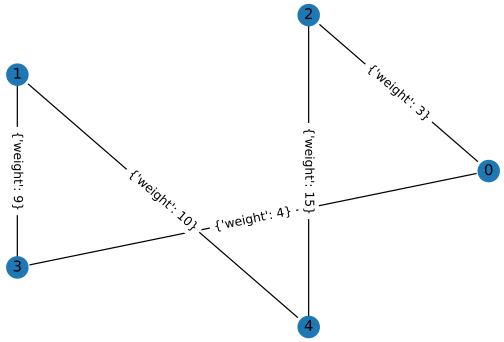
Za primer delovanja si oglejmo preprosto matriko, ki predstavlja graf. Na (i, j)-tem mestu matrike je cena med mestoma i in j. Dana je matrika (1) in njen graf je narisan na sliki **??**

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 1000 \\ 2 & 0 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 0 & 14 & 15 \\ 4 & 9 & 14 & 0 & 20 \\ 1000 & 10 & 15 & 20 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Rešitev, ki nam jo poda 2-opt algoritem je na sliki 2:



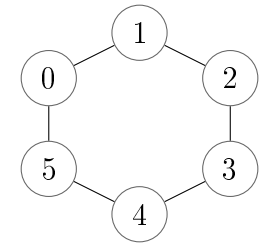
Slika 1: Primer grafa

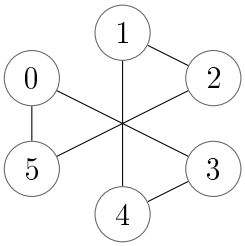


Slika 2: Rešitev primera z 2-opt

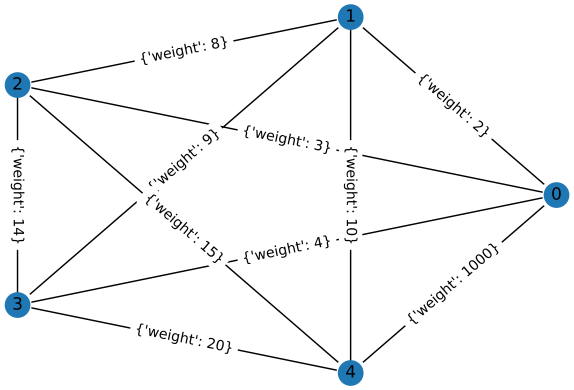
Še en primer:

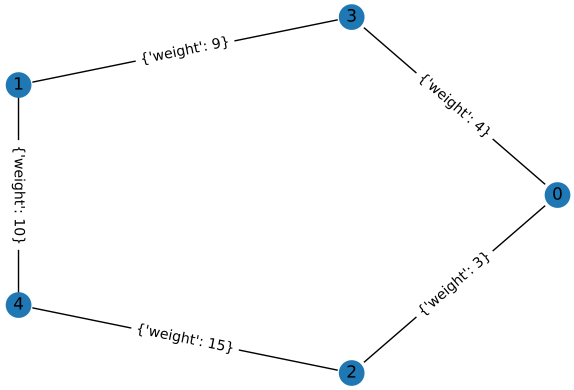
2.2 3-opt algoritem





Slika 3: Primer grafa



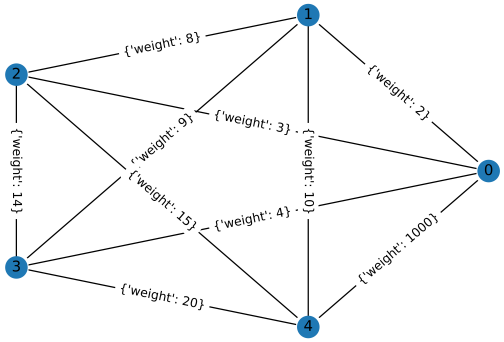


Slika 4: Rešitev primera s 3-opt

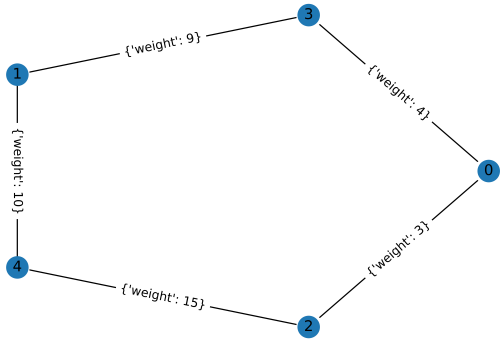
3 Lin-Kernighanov algoritem

K-Opt algoritmi so vezani na fiksen k. Lin-Kernighanov algoritem pa na vsakem koraku preveri katero vrednost k se nam splača uporabiti. Začnemo s $k = 2$ in naslednja vrednost je za 1 večja. Vrednost k-ja se povečuje doker ne najde zamenjave, ki izboljšata obhod, v tem primeru ponastavi k na 2. Če take zamenjave ne najdemo potem k povečamo za 1. Če take zamenjave ne najdemo in preizkusimo vse dovoljene zamenjave, potem je dobljena rešitev lokalni ali pa celo globalni minimum. Običajno Lin-Kernighanov algoritem ne vzame k-ja večjega od 3.

Primer grafa s5 in 10 vozlišči in končne rešitve.



Slika 5: Primer grafa s 5 vozlišči



Slika 6: Rešitev primera z LK algoritmom

4 Časovna zahtevnost

V projektni nalogi sva še praktično analizirala časovno zahtevnost vsakega od treh algoritmov. To sva naredila tako, da sva merila, koliko časa vsak algoritem porabi za poln graf v odvisnosti od n. Izračunala sva čase za n = 5, 10, 100... in dobila naslednje rezultate[1]:

1. n = 5: Cena začetne poti: 49
    - 2 opt: 0,0007491000000072745 sekunde, cena poti: 41
    - 3 opt: 0,00027590000001964654 sekunde, cena poti: 41
    - LK: 0,00015439999998534404 sekunde, cena poti: 41
2. n = 10: Cena začetne poti: 4903
    - 2 opt: 0,0016875000000027285 sekunde, cena poti: 3863
    - 3 opt: 0,0005999999999630745 sekunde, cena poti: 1484
    - LK: 0,0005700000000388172 sekunde, cena poti: 1484
3. n = 20: Cena začetne poti: 9047
    - 2 opt: 0.004272000000128173 sekunde, cena poti: 9650
    - 3 opt: 0.009910499999932654 sekunde, cena poti: 1555
    - LK: 0.019950500000049942 sekunde, cena poti: 1517
4. n = 100: Cena začetne poti: 46984
    - 2 opt: 0,2495525000000498 sekunde, cena poti: 51366
    - 3 opt: 2,2223871999999574 sekunde, cena poti: 2446
    - LK: 3,5075004999998782 sekunde, cena poti: 2235
5. n = 1000: Cena začetne poti: 483979
    - 2 opt: 278,793 sekund, cena poti: 504514
    - 3 opt: sekunde, cena poti:
    - LK: sekunde, cena poti:

[1]Pri merjenju časovne zahtevnosti je pomembno, meriva samo časovno zahtevnost algoritma in ne ostalih stvari, kot so preurejanje in izrisovanje grafa.

n	cena začetne	2-opt	cena 2-opt	3-opt	cena 3-opt	LK	cena LK
5	49	0,000749	41	0,000276	41	0,000154	41
10	4903	0,001687	3863	0,000600	1484	0,000570	1484
20	9047	0,004272	9650	0,009911	1555	0,0199505	1517
30	13715	0,012635	13715	0,022197	1907	0,052624	1729
50	23556	0.055628	30135	0.186868	2496	0,191449	2319
100	46984	0,249553	51366	2,222387	2446	3,507500	2235
200	98344	2,48095	94915	31,0363	3007	18.4228	2832
300	156543	9,17178	149098	172,005	2986	114,826	2630
500	244733	44,0965	252385	622,974	3328	748,263	2900
1000	483979	278,793	504514	8915,71	4249	7167,39	3755
2000	997884	3321,24	1008459				
3000	1464708	12130,2	1522475				
5000							
10000							
20000							
30000							

5 Viri

1. A. Hagberg, D. Schult, P. Swart:*NetworkX Refrence, Release 2.4*, [ogled 2. 1. 2020], dostopno na `https://networkx.github.io/documentation/stable/_downloads/networkx_reference.pdf`

2. *Optimization with 2-OPT - Part 1*, [ogled 3. 1. 2020], dostopno na `http://pedrohfsd.com/2017/08/09/2opt-part1.html`

3. *2-opt*, [ogled 3. 1. 2020], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/2-opt`

4. *3-opt*, [ogled 4. 1. 2020], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/3-opt`

5. *3-opt: basic algorithm*, [ogled 4. 1. 2020], dostopno na `https://tsp-basics.blogspot.com/2017/03/3-opt-iterative-basic-algorithm.html`