Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

Kazalo

1 Besedilo naloge

Igralec M ima m enot denarja, igralec N pa n enot premoženja, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec M zmaga vsakič z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo T število iger, ki so potrebne, da eden od igralcev bankrotira.

(i) Določi verjetnost, da bankrotira igralec M. Zakaj je $T < \infty$ s.g.?

(ii) Predpostavi, da je $E[T] < \infty$ (za vsako izbiro m in n). Določi $E[T]$. *Ali znaš utemeljiti, da je $E[T] < \infty$?

2 Rešitev

2.1 Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M

Če je verjetnost, da zmaga igralec M, enaka p, potem je verjetnost, da zmaga igralec N, enaka $1-p$. Naj bo A_a dogodek, da bankrotira igralec M, če začne z a denarja, nasprotnik pa z $m+n-a$ denarja, kjer je $a \in \{0, \dots, m+n\}$. Za vsako število a, kjer je $a \in \{0, \dots, m+n\}$, definiramo $p_a = P(A_a)$. Poiskati želimo p_m, torej verjetnost, da propade igralec M, če ima m denarja.

Naši hipotezi sta:
H - igralec M v prvem krogu zmaga (torej dobi 1 od igralca N)
H^C - igralec M v prvem krogu izgubi (torej da 1 igralcu N).

Verjetnost, da igralec M propade, če ima a denarja je enaka:

$$P(A_a) = P(A_a|H) \cdot P(H) + P(A_a|H^C) \cdot P(H^C),$$

iz česar sledi, za $a \in \{1, \dots, m+n-1\}$,

$$\begin{aligned}
p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1-p) \;\Rightarrow \\
(p+1-p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1-p) \;\Rightarrow \\
p \cdot p_a + (1-p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1-p) \;\Rightarrow \\
p \cdot p_a - p_{a+1} \cdot p &= (1-p) \cdot p_{a-1} - (1-p) \cdot p_a \;\Rightarrow \\
p \cdot (p_a - p_{a+1}) &= (1-p) \cdot (p_{a-1} - p_a).
\end{aligned}$$

Sedaj uvedemo novo oznako: $u_a = p_a - p_{a+1}$, za $a \in \{0, \dots, m+n-1\}$. Torej velja tudi $u_{a-1} = p_{a-1} - p_a$, za $a \in \{1, \dots, m+n-1\}$, zato sledi, da je:

$$p \cdot u_a = (1-p) \cdot u_{a-1},$$

za $a \in \{1, \dots, m+n-1\}$. Torej:

$$u_a = \frac{1-p}{p} \cdot u_{a-1},$$

za $a \in \{1, \dots, m+n-1\}$.
Če sedaj uvedemo še oznako $r := \frac{1-p}{p}$, dobimo:

$$u_a = r \cdot u_{a-1}, \text{ za } a \in \{1, \dots, m+n-1\}.$$

Od tod lahko izrazimo vse člene z začetnim (torej z u_0):

$$u_1 = r \cdot u_0$$

$$u_2 = r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 \cdot u_0$$
$$\cdots$$
$$u_a = r^a \cdot u_0$$

za $a \in \{0, \dots, m+n-1\}$.
Vemo, da če ima eden od igralcev ves denar, potem gotovo zmaga, če pa ga nima nič, potem gotovo izgubi, zato je:

$$p_c = 0, \text{ kjer je } c := m+n, \text{ in } p_0 = 1.$$

Sedaj lahko najprej u_0 izrazimo z začetnimi podatki[1]:

$$\begin{aligned}
1 = p_0 - p_c &= (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + (p_{c-1} - p_c) \\
&= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{c-1} \\
&= u_0 + r \cdot u_0 + r^2 \cdot u_0 + \cdots + r^{c-1} \cdot u_0 \\
&= u_0 \cdot (1 + r + r^2 + \cdots + r^{c-1}) \\
&= u_o \cdot \frac{r^c - 1}{r - 1}.
\end{aligned}$$

Iz tega sledi:

$$u_0 = \frac{r-1}{r^c - 1}.$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnost za propad prvega igralca (vemo, da je $u_m = p_m - p_{m+1}$):

$$\begin{aligned}
p_m &= u_m + p_{m+1} = u_m + u_{m+1} + p_{m+2} \\
&= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots + u_{m+n-1} + p_{m+n} \\
&= u_m + u_m \cdot r + u_m \cdot r^2 + \cdots + u_m \cdot r^{n-1} + 0 \\
&= u_m + u_m \cdot \frac{1-p}{p} + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 + \cdots + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} \\
&= u_m \cdot \left(1 + \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\right) = u_m \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} \\
&= r^m \cdot u_0 \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^m \cdot \frac{\frac{1-p}{p} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} \\
&= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^m = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \\
&= \frac{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - (1-p)^m}{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - p^m} = \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}.
\end{aligned}$$

[1]Predpostavimo, da je $r \neq 1$, to je $p \neq \frac{1}{2}$ do 2.1.1.

Torej, dobili smo verjetnost za propad igralca M.
Da se bo igra skoraj gotovo končala je ekvivalentno temu, da je vsota verjetnosti, da bankrotira igralec M, in verjetnosti, da bankrotira igralec N, enaka 1:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}+\frac{p^{m+n}-p^m(1-p)^n}{p^{m+n}-(1-p)^{m+n}}\\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}-\frac{p^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}\\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n-p^{m+n}+p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}\\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}\\
&=1.
\end{aligned}$$

2.1.1 Poseben primer

Vprašanje se pojavi, kaj se zgodi, če imata oba igralca enako verjetnost za zmago, torej $p = 1 - p = \frac{1}{2}$. Takrat namreč zgornji izračun ni mogoč, saj bi prišlo do deljenja z 0. Naj bo torej $p = \frac{1}{2}$. Vidimo, da je:

$$r = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

V tem primeru so torej $u_0, u_1, \ldots, u_n$ med seboj enaki:

$$u_k = r^k \cdot u_0 = u_0.$$

Posledično še lažje izrazimo u_0, na način: $1 = c \cdot u_0$, torej $u_0 = \frac{1}{c}$, in naša iskana verjetnost za igralca M je enaka

$$\begin{aligned}
p_m = u_0 \cdot (c-m) &= \frac{c-m}{c}\\
&= \frac{m+n-m}{m+n} = \frac{n}{m+n}.
\end{aligned}$$

Ponovno se igra skoraj gotovo konča natanko tedaj, ko je vsota verjetnosti, da bankrotira igralec M, in da bankrotira igralec N, enaka 1, je pa izračun v tem primeru veliko krajši. Torej:

$$\frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = \frac{n+m}{m+n} = 1.$$

2.2 Računanje $E[T]$

2.2.1 Predpostavka, da je $E[T] < \infty$

Razmislimo najprej, zakaj je $E[T] < \infty$. Če lahko čas T, ko se igra konča, navzgor omejimo s časom $\widetilde{T}$, katerega upanje lahko lažje izračunamo, in dokažemo, da je končno, bo sledilo, da je tudi $E[T]$ končno. Vsakič, ko vidimo $m + n - 1$ zaporednih dobitkov igralca M, se je igra gotovo končala, saj je v najslabšem primeru začel z 1 enoto denarja in je blo potrebnih $m + n - 1$ iger, da se je tekma zaključila.

Definirajmo:

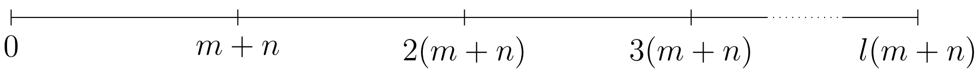
$$X_k := \begin{cases} 1; & \text{če zmaga igralec M v } k\text{-ti igri} \\ 0; & \text{če zmaga igralec N v } k\text{-ti igri} \end{cases}$$

Tako lahko navzgor ocenimo T:

$$T \leq \inf\{l \in \mathbb{N} : \text{v zaporedju } X_1, \ldots, X_l \text{ smo videli } m+n \text{ zaporednih enic}\} \leq$$

$$\begin{array}{lll} \leq (m+n) \cdot \inf\{l \in \mathbb{N} : & X_1, \ldots, X_{m+n}; & \text{vsebuje same enice, ali} \\ & X_{m+n+1}, \ldots, X_{2(m+n)}; & \text{vsebuje same enice, ali} \\ & \ldots & \\ & X_{(l-1)(m+n)+1}, \ldots, X_{l(m+n)}; & \text{vsebuje same enice}\} = \\ =: (m+n) \cdot G =: \widetilde{T} & & \end{array}$$

Časovno os razdelimo na intervale dolžine $m+n$, znotraj katerih čakamo, da zaporedje $\{X_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ vsebuje same enice:



V $\widetilde{T}$ vidimo čas prvega uspeha v Bernoullijevem zaporedju neodvisnih dogodkov, v katerem ima vsak dogodek verjetnost uspeha p^{m+n}, medtem ko je zaporedje $\{X_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ porazdeljeno geometrijsko, torej $G \sim \text{Geom}(p^{m+n})$, saj čakamo, da se dogodek, ko zaporedje vsebuje same enice, zgodi natanko enkrat.

Sledi:

$$E[G] = \frac{1}{p^{(m+n)}} \Longrightarrow E[\widetilde{T}] = \frac{m+n}{p^{(m+n)}} < \infty$$

.

2.2.2 Računanje $E[T]$

Rešujemo enačbo oblike:

$$E[T|M=x] = p \cdot E[T|M=x+1] + (1-p) \cdot E[T|M=x-1] + 1,$$

kjer je $M :=$ premoženje igralca M, enako $x \in \{1, \ldots, m+n-1\}$ in premoženje igralca N, enako $m+n-x$. Robni pogoj je $E[T|M=0] = E[M|M=m+n] = 0$, s čimer omejimo pričakovano število iger. Zaradi lažjega zapisa prevedemo enačbo na obliko $f(x) = p \cdot f(x+1) + (1-p) \cdot f(x-1) + 1$ oziroma

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = -1, \tag{1}$$

kjer je $f(x) := E[T|M=x]$ in $x \in \{0, \ldots, m+n-2\}$. Tu smo upoštevali, da je $E[T] < \infty$. Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo, katere rešitev je vsota homogene in ene partikularne rešitve.

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = 0. \tag{2}$$

S pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Dobimo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$. Splošna rešitev enačbe (2) je[2] oblike $f(x) = A \cdot 1^x + B(\frac{1-p}{p})^x$, oziroma:

$$f(x) = A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = Cx$. Vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$\begin{aligned}
&pC(x+2) - C(x+1) + (1-p)Cx = -1 \\
\Leftarrow\ &Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx = -1 \\
\Leftarrow\ &C(2p-1) = -1 \\
\Leftarrow\ &C = \frac{-1}{2p-1} = \frac{1}{1-2p}.
\end{aligned}$$

[2] Razen, ko je $p = \frac{1}{2}$. Do 2.2.3 predpostavimo, da je $p \neq \frac{1}{2}$

Partikularna rešitev je:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p}.$$

Splošna rešitev enačbe (1) je:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^x + \frac{x}{1-2p}.$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja, je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=0] = f(0) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^0 = 0, \quad A = -B.$$

2. Pričakovano število iger, če imamo $m+n$ denarja, je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=m+n] = f(m+n) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} + \frac{m+n}{1-2p} = 0$$

$$B = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}} \Rightarrow A = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}-1}.$$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja, je:

$$E[T|M=x] = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}-1} + \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}\left(\frac{1-p}{p}\right)^x + \frac{x}{1-2p}.$$

Zanima nas $E[T|M=m]$, vstavimo $x=m$ v zgornjo enačbo in dobimo, da je pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja, enako:

$$E[T|M=m] = \frac{(m+n)\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^m\right)}{(1-2p)\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}-1\right)} + \frac{m}{1-2p}.$$

2.2.3 Poseben primer

Formula ne drži, če je $p = \frac{1}{2}$, saj pride do deljenja z 0, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = -1. \tag{3}$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = 0. \tag{4}$$

S pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0.$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Splošna rešitev enačbe (4) je oblike:

$$(Ax+B) \cdot 1^x = Ax + B.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$. Vstavimo v enačbo (3) in dobimo:

$$\begin{aligned} & C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 = -2 \\ \Leftarrow\ & C(x^2+4x+4) - 2C(x^2+2x+1) + Cx^2 = -2 \\ \Leftarrow\ & C = -1. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev enačbe (3) pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2.$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2. $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m + n$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja in je verjetnost za zmago $p = \frac{1}{2}$, je:

$$E[T|M = x] = (m+n)x - x^2.$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M = m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m.$$

3 Analiza verjetnosti bankrota

1. Najprej nas zanima primer, ko je $m = n$, torej, ko imata oba igralca na začetku enako premoženja. V tem primeru bo naša iskana verjetnost za $p \neq \frac{1}{2}$ enaka:
$$p_m = \frac{(1-p)^m}{p^m + (1-p)^m}.$$
V primeru, da je $p = \frac{1}{2}$, dobimo:
$$p_m = \frac{m}{m+m} = \frac{1}{2}.$$

2. Če obe premoženji pomnožimo s konstanto $c \in \mathbb{N}$, za $p \neq \frac{1}{2}$ dobimo:
$$p_m = \frac{(1-p)^{\mathrm{cm+cn}} - (1-p)^{\mathrm{cm}} p^{\mathrm{cn}}}{(1-p)^{\mathrm{cm+cn}} - p^{\mathrm{cm+cn}}}.$$
V primeru $p = \frac{1}{2}$ torej dobimo: $p_m = \frac{cn}{cm+cn} = \frac{cn}{c(m+n)} = \frac{n}{m+n}$, torej ugotovimo, da se iskana verjetnost ne spremeni, kar pa ni res za $p \neq \frac{1}{2}$.

3. Zanima pa nas tudi, kaj se zgodi, če m ali n pošljemo v neskončno.
   - Naj bo najprej $p = \frac{1}{2}$. Če pošljemo premoženje igralca M proti neskončno, potem gre verjetnost, da igralec M bankrotira, proti 0. V nasprotnem primeru, ko pošljemo premoženje igralca N proti neskončno, gre verjetnost, da bankrotira igralec M, proti 1.
   - Če je $p > \frac{1}{2}$, potem je
   $$\lim_{m \to \infty} p_m = 0.$$
   - Če je $p < \frac{1}{2}$, potem je
   $$\lim_{m \to \infty} p_m = 1 - \left(\frac{p}{1-p} \right)^n.$$

4. Kot zadnje nas zanima še kaj se zgodi v limiti $p \to \frac{1}{2}$:
$$\lim_{p \to 1/2} \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \frac{n}{m+n}.$$

4 Viri

- L. Tehovnik, *Markovske verige*, naloga pri predmetu Seminar 1, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2013.
- T. Primožič, *Problem kockarjevega propada*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2010.
- *The Gambler's Ruin*, v: MathPages, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na `https://www.mathpages.com/home/kmath084/kmath084.htm`.
- *Recurrence relation*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na `https://en.m.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation`.
- P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne matematike 1*, 1. izdaja, 2011, [ogled 15. 3. 2019], dostopno na `https://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf`.
- *Back to the basics — gambler's ruin*, v: Random Determinism, [ogled 18. 3. 2019], dostopno na `https://randomdeterminism.wordpress.com/2010/07/07/gamblers-ruin/`.