

Kockarjev propad

Gambler's ruin

Eva Deželak in Ines Šilc

Fakulteta za matematiko in fiziko

25. marec 2019

Vsota verjetnostii, da bankrotira igralec M , in da bankrotira igralec N :

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} + \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{p^{m+n} - (1-p)^{m+n}} = \\
 = & \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} - \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \\
 = & \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n - p^{m+n} + p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \\
 = & \frac{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

Poseben primer za $p = \frac{1}{2}$

Dobimo

$$r = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

V tem primeru so u_0, u_1, \dots, u_n med seboj enaki, torej:

$$u_k = r^k \cdot u_0 = u_0.$$

Posledično še lažje izrazimo u_0 , na način: $1 = c \cdot u_0$, torej $u_0 = \frac{1}{c}$. V tem primeru je naša iskana verjetnost za igralca M enaka

$$\begin{aligned} p_m &= u_0 \cdot (c - m) = \frac{c - m}{c} = \\ &= \frac{m + n - m}{m + n} = \frac{n}{m + n}. \end{aligned}$$

Matematično upanje za $p = \frac{1}{2}$

$$E[T|M=x] = \frac{1}{2} \cdot E[T|M=x+1] + \frac{1}{2} \cdot E[T|M=x-1] + 1,$$

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = -1 \quad (1)$$

Homogeni del:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = 0$$

Karakteristični polinom:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0 \quad (2)$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Rešitev enačbe (1) je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = Ax + B$$

Nastavek za iskanje partikularne rešitve: $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$ Vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$\begin{aligned} C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 &= -2 \\ \Leftrightarrow C(x^2 + 4x + 4) - 2C(x^2 + 2x + 1) + Cx^2 &= -2 \\ \Leftrightarrow C &= -1 \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev enačbe (1) pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

- 1 $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
- 2 $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$

Rešitev:

$$E[T|M=x] = (m+n)x - x^2$$

Če začnemo z m enotami denarja:

$$E[T|M=m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m$$

Posebni primeri

- 1 V primeru, da velja $m = n$:

$$p_m = \frac{(1-p)^m}{p^m + (1-p)^m}.$$

V primeru, da je $p = \frac{1}{2}$, dobimo: $p_m = \frac{m}{m+m} = \frac{1}{m}$.

- 2 V primeru, da premoženje enega igralca pomnožimo s konstanto, dobimo:

$$p_m = \frac{(1-p)^{cm+n} - p^n(1-p)^{cm}}{(1-p)^{cm+n} - p^{cm+n}} \text{ in } p_n = \frac{p^{cn+m} - p^m(1-p)^{cn}}{p^{cn+m} - (1-p)^{cn+m}}.$$

V primeru, da je $p = \frac{1}{2}$, dobimo: $p_m = \frac{n}{cm+n}$, $p_n = \frac{m}{cn+m}$.

- 3 Če gledamo limito, ko gresta m in n proti ∞ ugotovimo, da limita ne obstaja.

4

$$p_m = \lim_{p \rightarrow 1/2} \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \frac{n}{m+n}.$$