Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

Kazalo

1 Besedilo naloge

Igralec M ima m enot denarja, igralec N pa n enot premoženja, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec M zmaga vsakič z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo T število iger, ki so potrebne, da eden od igralcev bankrotira.

(i) Določi verjetnost, da bankrotira igralec M. Zakaj je $T < \infty$ s.g.?

(ii) Predpostavi, da je $E[T] < \infty$ (za vsako izbiro m in n). Določi $E[T]$. *Ali znaš utemeljiti, da je $E[T] < \infty$?

2 Rešitev

2.1 Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M

Če je verjetnost, da zmaga igralec M enaka p, potem je verjetnost, da zmaga igralec N enaka $1-p$. Naj bo A_a dogodek, da bankrotira igralec M, če začne z a denarja, nasprotnik pa z $m+n-a$ denarja, kjer je $a \in \{0, \dots, m+n\}$. Za vsako število a, kjer je $a \in \{0, \dots, m+n\}$, definiramo $p_a = P(A_a)$. Poiskati želimo p_m, torej verjetnost, da propade igralec M, če ima m denarja.

Naši hipotezi sta:
H - igralec M v prvem krogu zmaga (torej dobi 1 od igralca N)
H^C - igralec M v naslednjem krogu izgubi (torej da 1 igralcu N)

Verjetnost, da igralec M propade, če ima a denarja je enaka

$$P(A_a) = P(A_a|H) \cdot P(H) + P(A_a|H^C) \cdot P(H^C),$$

iz česar sledi, za $a \in \{0, \dots, m+n\}$,

$$\begin{aligned}
p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1-p) \;\Rightarrow \\
(p+1-p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1-p) \;\Rightarrow \\
p \cdot p_a + (1-p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1-p) \;\Rightarrow \\
p \cdot p_a - p_{a+1} \cdot p &= (1-p) \cdot p_{a-1} - (1-p) \cdot p_a \;\Rightarrow \\
p \cdot (p_a - p_{a+1}) &= (1-p) \cdot (p_{a-1} - p_a).
\end{aligned}$$

Sedaj uvedemo novo oznako: $u_a = p_a - p_{a+1}$, za $a \in \{0, \dots, m+n\}$. Torej velja tudi $u_{a-1} = p_{a-1} - p_a$, zato sledi, da je

$$p \cdot u_a = (1-p) \cdot u_{a-1}.$$

Torej

$$u_a = \frac{1-p}{p} \cdot u_{a-1}.$$

Če sedaj uvedemo še oznako $r := \frac{1-p}{p}$, dobimo

$$u_a = r \cdot u_{a-1}.$$

Od tod lahko izrazimo vse člene z začetnim (torej z u_0):

$$u_1 = r \cdot u_0$$

$$u_2 = r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 \cdot u_0$$

$$\cdots$$

$$u_a = r^a \cdot u_0$$

za $a \in \{0, \ldots, m+n\}$.
Vemo, da če ima eden od igralcev ves denar, potem gotovo zmaga, če pa ga nima nič, potem gotovo izgubi, zato je:

$$p_c = 0, \text{ kjer je } c := m+n \text{ in } p_0 = 1.$$

Sedaj lahko najprej u_0 izrazimo z začetnimi podatki [1] :

$$\begin{aligned}
1 = p_0 - p_c = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + (p_{c-1} - p_c) = \\
&= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{c-1} = \\
&= u_0 + r \cdot u_0 + r^2 \cdot u_0 + \cdots + r^{c-1} \cdot u_0 = \\
&= u_0 \cdot (1 + r + r^2 + \cdots + r^{c-1}) = \\
&= u_o \cdot \frac{r^c - 1}{r - 1}
\end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$u_0 = \frac{r-1}{r^c - 1}.$$

[1] Razen, ko je $r = 1$, glej posebni primer 2.1.1

Sedaj lahko izračunamo verjetnost za propad prvega igralca (vemo, da je $u_m = p_m - p_{m+1}$):

$$\begin{aligned}
p_m &= u_m + p_{m+1} = u_m + u_{m+1} + p_{m+2} = \\
&= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots + u_{m+n-1} + p_{m+n} = \\
&= u_m + u_m \cdot r + u_m \cdot r^2 + \cdots + u_m \cdot r^{n-1} + 0 = \\
&= u_m + u_m \cdot \frac{1-p}{p} + u_m \cdot (\frac{1-p}{p})^2 + u_m \cdot (\frac{1-p}{p})^3 + \cdots + u_m \cdot (\frac{1-p}{p})^{n-1} = \\
&= u_m \cdot (1 + \frac{1-p}{p} + (\frac{1-p}{p})^2 + \cdots + (\frac{1-p}{p})^{n-1}) = u_m \cdot \frac{(\frac{1-p}{p})^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\
&= r^m \cdot u_0 \cdot \frac{(\frac{1-p}{p})^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = (\frac{1-p}{p})^m \cdot \frac{\frac{1-p}{p} - 1}{(\frac{1-p}{p})^{m+n} - 1} \cdot \frac{(\frac{1-p}{p})^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\
&= \frac{(\frac{1-p}{p})^n - 1}{(\frac{1-p}{p})^{m+n} - 1} \cdot (\frac{1-p}{p})^m = \frac{(\frac{1-p}{p})^{m+n} - (\frac{1-p}{p})^m}{(\frac{1-p}{p})^{m+n} - 1} = \\
&= \frac{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - (1-p)^m}{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - p^m} = \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}.
\end{aligned}$$

Torej dobili smo verjetnost za propad igralca M.
Vemo, da mora biti vsota verjetnosti, da bankrotira igralec M, in da bankrotira igralec N, enaka 1:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} + \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{p^{m+n} - (1-p)^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} - \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n - p^{m+n} + p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2.1.1 Poseben primer

Vprašanje se pojavi, kaj se zgodi, če imata oba igralca enako verjetnost za zmago, torej $p = 1 - p = \frac{1}{2}$. Takrat namreč zgornji izračun ni mogoč, saj bi prišlo do deljenja z 0. Iz tega dobimo, da je

$$r = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

V tem primeru so $u_0, u_1, \ldots, u_n$ med seboj enaki, torej:

$$u_k = r^k \cdot u_0 = u_0.$$

Posledično še lažje izrazimo u_0, na način: $1 = c \cdot u_0$, torej $u_0 = \frac{1}{c}$.
V tem primeru je naša iskana verjetnost za igralca M enaka

$$\begin{aligned} p_m = u_0 \cdot (c - m) &= \frac{c - m}{c} = \\ = \frac{m + n - m}{m + n} &= \frac{n}{m + n}. \end{aligned}$$

Ponovno mora veljati, da je vsota verjetnosti, da bankrotira igralec M in, da bankrotira igralec N enaka 1, je pa izračun v tem primeru veliko krajši. Torej:

$$\frac{n}{m + n} + \frac{m}{m + n} = \frac{n + m}{m + n} = 1.$$

2.2 Računanje $E[T]$

Rešujemo enačbo oblike

$$E[T|M = x] = p \cdot E[T|M = x + 1] + (1 - p) \cdot E[T|M = x - 1] + 1,$$

kjer je prvotno premoženje igralca M enako x, kar zaradi lažjega zapisa prevedemo na obliko $f(x) = p \cdot f(x + 1) + (1 - p) \cdot f(x - 1) + 1$ oziroma

$$p \cdot f(x + 2) - f(x + 1) + (1 - p) \cdot f(x) = -1, \tag{1}$$

kjer je $f(x) := E[T|M = x]$ in $x \in \mathbb{N}$. Tu smo predpostavili, da je $E[T] < \infty$, da lahko enolično zadostimo rekurzivni enačbi. Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo [2] , katero rešitev je vsota homogene in ene partikularne

[2] Razen, ko je $p = \frac{1}{2}$, glej posebni primer 2.2.1

rešitve.

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = 0. \tag{2}$$

S pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Dobimo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$. Rešitev enačbe (2) je oblike $A \cdot 1^x + B(\frac{1-p}{p})^x$, oziroma:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = Cx1^x$ oziroma $f(x) = Cx$. Vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$\begin{aligned}
&pC(x+2) - C(x+1) + (1-p)Cx = -1 \\
\Leftarrow\ &Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx = -1 \\
\Leftarrow\ &C(2p-1) = -1 \\
\Leftarrow\ &C = \frac{-1}{2p-1} = \frac{1}{1-2p}.
\end{aligned}$$

Partikularna rešitev je:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p}.$$

Splošna rešitev[3] enačbe (1) je:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^x + \frac{x}{1-2p}.$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=0] = f(0) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^0 = 0, \quad A = -B.$$

[3]Razen, ko je $p = \frac{1}{2}$, glej posebni primer 2.2.1

2. Pričakovano število iger, če imamo $m+n$ denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=m+n]=f(m+n)=0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B+B\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}+\frac{m+n}{1-2p}=0$$

$$B=\frac{\frac{m+n}{1-2p}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}\Rightarrow A=\frac{\frac{m+n}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}-1}.$$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja je:

$$E[T|M=x]=\frac{\frac{m+n}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}-1}+\frac{\frac{m+n}{1-2p}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x}+\frac{x}{1-2p}.$$

Zanima nas $E[T|M=m]$, vstavimo $x=m$ v zgornjo enačbo in dobimo, da je pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja enako:

$$E[T|M=m]=\frac{(m+n)\left(1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m}\right)}{(1-2p)\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}-1\right)}+\frac{m}{1-2p}.$$

2.2.1 Poseben primer

Formula ne drži če je $p=\frac{1}{2}$, saj pride do deljenja z 0, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2)-f(x+1)+\frac{1}{2}f(x)=-1. \tag{3}$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2)-f(x+1)+\frac{1}{2}f(x)=0.$$

S pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2-\lambda+\frac{1}{2}=0. \tag{4}$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2}=1$. Rešitev enačbe (3) je oblike:

$$(Ax+B)\cdot 1^x=Ax+B.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$. Vstavimo v enačbo (3) in dobimo:

$$
\begin{aligned}
& C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 = -2 \\
\Leftarrow\ & C(x^2+4x+4) - 2C(x^2+2x+1) + Cx^2 = -2 \\
\Leftarrow\ & C = -1.
\end{aligned}
$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev enačbe (3) pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2.$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2. $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m + n$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja in je verjetnost za zmago $p = \frac{1}{2}$ je:

$$E[T|M = x] = (m+n)x - x^2.$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M = m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m.$$

3 Posebni primeri

1. Najprej nas zanima primer, ko je $m = n$, torej, ko imata oba igralca na začetku enako premoženja. V tem primeru bo naša iskana verjetnost enaka:
$$p_m = \frac{(1-p)^m}{p^m + (1-p)^m}.$$

2. Kaj pa, če eno izmed premoženj igralcev pomnožimo s konstanto? V tem primeru za igralca M dobimo verjetnost
$$p_m = \frac{(1-p)^{cm+n} - p^n(1-p)^{cm}}{(1-p)^{cm+n} - p^{cm+n}},$$
za igralca N pa verjetnost
$$p_n = \frac{p^{cn+m} - p^m(1-p)^{cn}}{p^{cn+m} - (1-p)^{cn+m}}.$$

3. Zanima pa nas tudi, kaj se zgodi, če m in n pošljemo v neskončno, torej da imata igralca neomejeno premoženja. Če pošljemo oba premoženja naenkrat proti neskončnosti, limita ne bo obstajala, saj se v tem primeru igra nikoli nebi končala, posledično pa ne moremo izračunati verjetnosti, da igralec M propade.

4. Kot zadnji nas zanima še posebni primer, ko gre p iz leve in iz desne proti $\frac{1}{2}$. V obeh primerih dobimo enak rezultat, in sicer:
$$p_m = \lim_{p \to 1/2} \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \frac{n}{m+n}.$$

4 Viri

- L. Tehovnik, *Markovske verige*, naloga pri predmetu Seminar 1, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2013.

- T. Primožič, *Problem kockarjevega propada*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2010.

- *The Gambler's Ruin*, v: MathPages, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na `https://www.mathpages.com/home/kmath084/kmath084.htm`.

- *Recurrence relation*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na `https://en.m.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation`.

- P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne matematike 1*, 1. izdaja, 2011, [ogled 15. 3. 2019], dostopno na `https://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf`.

- *Back to the basics — gambler's ruin*, v: Random Determinism, [ogled 18. 3. 2019], dostopno na `https://randomdeterminism.wordpress.com/2010/07/07/gamblers-ruin/`.