Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

Kazalo

1 Besedilo naloge

Igralec M ima m enot denarja, igralec N pa n enot premoženja, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec M zmaga vsakič z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo T število iger, ki je potrebnih, da eden od igralcev bankrotira.

- Predpostavi, da je $T < \infty$ s.g. (*ali znaš to utemeljiti?). Določi verjetnost, da bankrotira igralec M.
- Predpostavi, da je $E[T] < \infty$. Določi $E[T]$.

2 Rešitev

2.1 Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M

Če je verjetnost, da zmaga igralec M enaka p, potem je verjetnost, da zmaga igralec N enaka $1 - p$. Naj bo A_a dogodek, da bankrotira igralec M, če ima trenutno a denarja. Za vsako naravno ptevilo a definiramo $p_a = P(A_a)$. Poiskati želimo p_m, torej verjetnost, da propade igralec M, če ima m denarja.

Naši hipotezi sta:
H - prvi igralec v naslednjem krogu zmaga (torej dobi 1 od drugega igralca)
H^C - prvi igralec v naslednjem krogu izgubi (torej da 1 drugemu igralcu)

Verjetnost, da igralec M propade, če ima a denarja je enaka:

$$P(A_a) = P(A_a/H) \cdot P(H) + P(A_a/H^C) \cdot P(H^C)$$

iz česar sledi

$$p_a = P_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p)$$
$$(p + 1 - p) \cdot p_a = P_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p)$$
$$p \cdot p_a + (1 - p) \cdot p_a = p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p)$$
$$p \cdot p_a - P_{a+1} \cdot p = p_{a-1} - (1 - p) \cdot p_a$$
$$p \cdot (p_a - p_{a+1}) = (1 - p) \cdot (p_{a-1} - p_a)$$

Sedaj uvedemo novo oznako: $u_a = p_a - p_{a+1}$. Torej velja tudi $u_{a-1} = p_{a-1} - p_a$, zato sledi

$$p \cdot u_a = (1 - p) \cdot u_{a-1}$$

Torej

$$u_a = \frac{1 - p}{p} \cdot u_{a-1}$$

Če sedaj uvedemo še oznako $r = \frac{1-p}{p}$, dobimo

$$u_a = r \cdot u_{a-1}$$

Od tod lahko izrazimo vse člene z začetnim (torej z u_0):

$$u_1 = r \cdot u_0$$
$$u_2 = r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 \cdot u_0$$
$$\cdots$$
$$u_a = r^a \cdot u_0$$

Vemo, da če ima eden od igralcev ves denar, potem gotovo zmaga, če pa ga nima nič, potem gotovo izgubi, zato je:

$$p_c = 0, \text{ kjer je } c = m + n \text{ in } p_0 = 1$$

Sedaj lahko najprej u_0 izrazimo z začetnimi podatki:

$$\begin{aligned}
1 = p_0 - p_c = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + (p_{c-1} - p_c) &= \\
= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{c-1} &= \\
= u_0 + r \cdot u_0 + r^2 \cdot u_0 + \cdots + r^{c-1} \cdot u_0 &= \\
= u_0 \cdot (1 + r + r^2 + \cdots + r^{c-1}) &= \\
= u_o \cdot \frac{r^c - 1}{r - 1}
\end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$u_0 = \frac{r-1}{r^c - 1}$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnost za propad prvega igralca (vemo, da je $u_m = p_m - p_{m+1}$):

$$\begin{aligned}
p_m &= u_m + p_{m+1} = \\
&= u_m + u_{m+1} + p_{m+2} = \\
&= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + p_{m+3} = \\
&= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots + u_{m+n-1} + p_{m+n} = \\
&= u_m + u_m \cdot r + u_m \cdot r^2 + \cdots + u_m \cdot r^{n-1} + 0 = \\
&= u_m + u_m \cdot \frac{1-p}{p} + u_m \cdot (\frac{1-p}{p})^2 + u_m \cdot (\frac{1-p}{p})^3 + \cdots + u_m \cdot (\frac{1-p}{p})^{n-1} = \\
&= u_m \cdot (1 + \frac{1-p}{p} + (\frac{1-p}{p})^2 + \cdots + (\frac{1-p}{p})^{n-1}) = u_m \cdot \frac{(\frac{1-p}{p})^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\
&= r^m \cdot u_0 \cdot \frac{(\frac{1-p}{p})^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = (\frac{1-p}{p})^m \cdot \frac{\frac{1-p}{p} - 1}{(\frac{1-p}{p})^{m+n} - 1} \cdot \frac{(\frac{1-p}{p})^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\
&= \frac{(\frac{1-p}{p})^n - 1}{(\frac{1-p}{p})^{m+n} - 1} \cdot (\frac{1-p}{p})^m = \frac{(\frac{1-p}{p})^{m+n} - (\frac{1-p}{p})^m}{(\frac{1-p}{p})^{m+n} - 1} = \\
&= \frac{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - (1-p)^m}{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - p^m} = \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}
\end{aligned}$$

Torej dobili smo verjetnost za propad igralca M.

2.2 Računanje $E[T]$

Rešujemo enačbo oblike $E[T|M = x] = p \cdot E[T|M = x+1] + (1-p) \cdot E[T|M = x-1] + 1$, kar zaradi lažjega zapisa prevedemo na obliko $f(x) = p \cdot f(x+1) + (1-p) \cdot f(x-1) + 1$ oziroma

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = -1$$

kjer je $f(x) = E[T|M = x]$. Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo, katero rešitev je vsota homogene in partikularne rešitve.
Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = 0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Dobimo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$. Rešitev homogene enačbe je torej oblike $A \cdot 1^x + B(\frac{1-p}{p})^x$, oziroma:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^x$$

Ker imamo homogeno rešitev sestavljeno iz dveh delov, bomo partikularni del prav tako poiskali v dveh delih. Prvi del iščemo z nastavkom $f(x) = Cx1^x$ oziroma $f(x) = Cx$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pC(x+1) - C(x+1) + (1-p)Cx = -1$$

$$Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx = -1$$

$$C(2p-1) = -1$$

$$C = \frac{-1}{2p-1} = \frac{1}{1-2p}$$

Prvi del partikularne enačbe je:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p}$$

Drugi del iščemo z nastavkom $f(x) = Dx(\frac{1-p}{p})^x$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pD(x+2)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+2)} - D(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+1)} + (1-p)Dx\left(\frac{1-p}{p}\right)^x = -1$$

$$D\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^x\cdot\left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2-x\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)+x-px\right)=-1$$

$$D=\frac{-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x\cdot\left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2-x\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)+x-px\right)}$$

Drugi del partikularne enačbe je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x(\frac{1-p}{p})^x}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x\cdot\left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2-x\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)+x-px\right)} \\ &= \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p)+px-1}, \end{aligned}$$

celotna partikularna rešitev pa je vsota homogene in partikularne:

$$f(x)=\frac{x}{1-2p}+\frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p)+px-1}.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je:

$$A+B\left(\frac{1-p}{p}\right)^x+\frac{x}{1-2p}+\frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p)+px-1}$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=0]=f(0)=0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A+B\left(\frac{1-p}{p}\right)^0=0, \quad A=-B$$

2. Pričakovano število iger, če imamo m+n denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=m+n]=f(m+n)=0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B+B\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}+\frac{m+n}{1-2p}+\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}=0$$

$$B=\frac{\frac{m+n}{1-2p}+\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}$$

$$A=\frac{\frac{m+n}{1-2p}+\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}-1}$$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja je:

$$E[T|M=x]=\frac{\frac{m+n}{1-2p}+\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}-1}+$$

$$+\frac{\frac{m+n}{1-2p}+\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}\left(\frac{1-p}{p}\right)^x+$$

$$+\frac{x}{1-2p}+\frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p)+px-1}$$

Zanima nas $E[T|M=m]$, vstavimo $x=m$ v zgornjo enačbo in dobimo, da je pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja enako:

$$E[T|M=m]=\frac{n\left(\left(\frac{1}{p}-1\right)^m-1\right)-m\left(\frac{1}{p}-1\right)^m\left(\left(\frac{1}{p}-1\right)^n-1\right)}{(2p-1)\left(\left(\frac{1}{p}-1\right)^{m+n}-1\right)}$$

Formula ne drži če je $p=\frac{1}{2}$, saj pride do deljenja z 0, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2)-f(x+1)+\frac{1}{2}f(x)=-1$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2)-f(x+1)+\frac{1}{2}f(x)=0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2-\lambda+\frac{1}{2}=0$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Homogena rešitev je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = (Ax + B)$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 = -2$$

$$C(x^2 + 4x + 4) - 2C(x^2 + 2x + 1) + Cx^2 = -2$$

$$2C = -2, \quad C = -1$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2. $f(m + n) = 0 \Rightarrow A = m + n$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja in je verjetnost za zmago $p = \frac{1}{2}$ je:

$$E[T|M = x] = (m + n)x - x^2$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M = m] = (m + n)m - m^2 = n \cdot m$$