Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

Kazalo

1 Besedilo naloge

Igralec M ima m enot denarja, igralec N pa n enot premoženja, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec M zmaga vsakič z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo T število iger, ki je potrebnih, da eden od igralcev bankrotira.

- Predpostavi, da je $T < \inf$ s.g. (*ali znaš to utemeljiti?). Določi verjetnost, da bankrotira igralec M.
- Predpostavi, da je $E[T] < \inf$. Določi $E[T]$.

2 Rešitev

Predpostavi, da je $E[T] < \infty$. Določi $E[T]$.

Rešujemo enačbo oblike $E[T|M = x] = p \cdot E[T|M = x+1] + (1-p) \cdot E[T|M = x-1] + 1$, kar zaradi lažjega zapisa prevedemo na obliko $f(x) = p \cdot f(x+1) + (1-p) \cdot f(x-1) + 1$ oziroma

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = -1$$

kjer je $f(x) = E[T|M = x]$. Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo, katero rešitev je vsota homogene in partikularne rešitve.
Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = 0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Dobimo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$. Rešitev homogene enačbe je torej oblike $A \cdot 1^x + B(\frac{1-p}{p})^x$, oziroma:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^x$$

Ker imamo homogeno rešitev sestavljeno iz dveh delov, bomo partikularni del prav tako poiskali v dveh delih. Prvi del iščemo z nastavkom $f(x) = Cx1^x$ oziroma $f(x) = Cx$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pC(x+1) - C(x+1) + (1-p)Cx = -1$$

$$Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx = -1$$
$$C(2p-1) = -1$$
$$C = \frac{-1}{2p-1} = \frac{1}{1-2p}$$

Prvi del partikularne enačbe je:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p}$$

Drugi del iščemo z nastavkom $f(x) = Dx(\frac{1-p}{p})^x$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pD(x+2)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+2)} - D(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+1)} + (1-p)Dx\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x} = -1$$

$$D\cdot\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x}\cdot\left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2}+2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2}-x\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)+x-px\right) = -1$$
$$D = \frac{-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x}\cdot\left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2} + 2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2} - x\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right)}$$

Drugi del partikularne enačbe je:

$$f(x) = \frac{-x(\frac{1-p}{p})^x}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x}\cdot\left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2} + 2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2} - x\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right)}$$

$$= \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2}(px+2p) + px - 1},$$

celotna partikularna rešitev pa je vstoa homogene in partikularne:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2}(px+2p) + px - 1}.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^x + \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (px+2p) + px - 1}$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=0] = f(0) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^0 = 0, \quad A = -B$$

2. Pričakovano število iger, če imamo m+n denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=m+n] = f(m+n) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B + B\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} + \frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1}$$

$$B = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}$$

$$A = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1}$$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja je:

$$E[T|M=x] = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} +$$

$$+\frac{\frac{m+n}{1-2p}+\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}\left(\frac{1-p}{p}\right)^x+$$

$$+\frac{x}{1-2p}+\frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p)+px-1}$$

Zanima nas $E[T|M=m]$???????????
Formula ne drži če je $p=\frac{1}{2}$, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2)-f(x+1)+\frac{1}{2}f(x)=-1$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2)-f(x+1)+\frac{1}{2}f(x)=0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2-\lambda+\frac{1}{2}=0$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2}=1$. Homogena rešitev je oblike:

$$(Ax+B)\cdot 1^x=(Ax+B)$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x)=C\cdot x^2\cdot 1^x=Cx^2$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$C(x+2)^2-2C(x+1)^2+Cx^2=-2$$

$$C(x^2+4x+4)-2C(x^2+2x+1)+Cx^2=-2$$

$$2C=-2,\quad C=-1$$

Partikularna rešitev je $f(x)=-x^2$, splošna rešitev pa je:

$$f(x)=Ax+B-x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0)=0\Rightarrow B=0$

2. $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja in je verjetnost za zmago $p = \frac{1}{2}$ je:

$$E[T|M = x] = (m+n)x - x^2$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M = m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m$$