

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

# KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Besedilo naloge</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rešitev</b>	<b>2</b>
2.1	Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec $M$ . . . . .	2
2.2	Računanje $E[T]$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Viri</b>	<b>7</b>

## 1 Besedilo naloge

Igralec  $M$  ima  $m$  enot denarja, igralec  $N$  pa  $n$  enot premoženja,  $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ . Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec  $M$  zmaga vsakič z verjetnostjo  $p \in (0, 1)$ , neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo  $T$  število iger, ki je potrebnih, da eden od igralcev bankrotira.

- Predpostavi, da je  $T < \infty$  s.g. (\*ali znaš to utemeljiti?). Določi verjetnost, da bankrotira igralec  $M$ .
- Predpostavi, da je  $E[T] < \infty$ . Določi  $E[T]$ .

## 2 Rešitev

### 2.1 Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M

Če je verjetnost, da zmaga igralec  $M$  enaka  $p$ , potem je verjetnost, da zmaga igralec  $N$  enaka  $1 - p$ . Naj bo  $A_a$  dogodek, da bankrotira igralec  $M$ , če ima trenutno  $a$  denarja. Za vsako naravno ptevilo  $a$  definiramo  $p_a = P(A_a)$ . Poiskati želimo  $p_m$ , torej verjetnost, da propade igralec  $M$ , če ima  $m$  denarja.

Naši hipotezi sta:

$H$  - prvi igralec v naslednjem krogu zmaga (torej dobi 1 od drugega igralca)

$H^C$  - prvi igralec v naslednjem krogu izgubi (torej da 1 drugemu igralcu)

Verjetnost, da igralec  $M$  propade, če ima  $a$  denarja je enaka:

$$P(A_a) = P(A_a/H) \cdot P(H) + P(A_a/H^C) \cdot P(H^C)$$

iz česar sledi

$$\begin{aligned} p_a &= P_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \\ (p + 1 - p) \cdot p_a &= P_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \\ p \cdot p_a + (1 - p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \\ p \cdot p_a - P_{a+1} \cdot p &= p_{a-1} - (1 - p) \cdot p_a \\ p \cdot (p_a - p_{a+1}) &= (1 - p) \cdot (p_{a-1} - p_a) \end{aligned}$$

Sedaj uvedemo novo oznako:  $u_a = p_a - p_{a+1}$ . Torej velja tudi  $u_{a-1} = p_{a-1} - p_a$ , zato sledi

$$p \cdot u_a = (1 - p) \cdot u_{a-1}$$

Torej

$$u_a = \frac{1 - p}{p} \cdot u_{a-1}$$

Če sedaj uvedemo še oznako  $r = \frac{1-p}{p}$ , dobimo

$$u_a = r \cdot u_{a-1}$$

Od tod lahko izrazimo vse člene z začetnim (torej z  $u_0$ ):

$$\begin{aligned} u_1 &= r \cdot u_0 \\ u_2 &= r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 \cdot u_0 \\ &\dots \\ u_a &= r^a \cdot u_0 \end{aligned}$$

Vemo, da če ima eden od igralcev ves denar, potem gotovo zmaga, če pa ga nima nič, potem gotovo izgubi, zato je:

$$p_c = 0, \text{ kjer je } c = m + n \text{ in } p_0 = 1$$

Sedaj lahko najprej  $u_0$  izrazimo z začetnimi podatki:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 - p_c = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + (p_{c-1} - p_c) = \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{c-1} = \\ &= u_0 + r \cdot u_0 + r^2 \cdot u_0 + \cdots + r^{c-1} \cdot u_0 = \\ &= u_0 \cdot (1 + r + r^2 + \cdots + r^{c-1}) = \\ &= u_0 \cdot \frac{r^c - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$u_0 = \frac{r - 1}{r^c - 1}$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnost za propad prvega igralca (vemo, da je  $u_m = p_m - p_{m+1}$ ):

$$\begin{aligned} p_m &= u_m + p_{m+1} = \\ &= u_m + u_{m+1} + p_{m+2} = \\ &= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + p_{m+3} = \\ &= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots + u_{m+n-1} + p_{m+n} = \\ &= u_m + u_m \cdot r + u_m \cdot r^2 + \cdots + u_m \cdot r^{n-1} + 0 = \\ &= u_m + u_m \cdot \frac{1-p}{p} + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 + \cdots + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} = \\ &= u_m \cdot \left(1 + \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\right) = u_m \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\ &= r^m \cdot u_0 \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^m \cdot \frac{\frac{1-p}{p} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\ &= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^m = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} = \\ &= \frac{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - (1-p)^m}{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - p^m} = \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} \end{aligned}$$

Torej dobili smo verjetnost za propad igralca  $M$ .

## 2.2 Računanje $E[T]$

Rešujemo enačbo oblike  $E[T|M=x] = p \cdot E[T|M=x+1] + (1-p) \cdot E[T|M=x-1] + 1$ , kar zaradi lažjega zapisa prevedemo na obliko  $f(x) = p \cdot f(x+1) + (1-p) \cdot f(x-1) + 1$  oziroma

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = -1$$

kjer je  $f(x) = E[T|M=x]$ . Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo, katero rešitev je vsota homogene in partikularne rešitve.

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = 0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Dobimo  $\lambda_1 = 1$  in  $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$ . Rešitev homogene enačbe je torej oblike  $A \cdot 1^x + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^x$ , oziroma:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^x$$

Ker imamo homogeno rešitev sestavljeno iz dveh delov, bomo partikularni del prav tako poiskali v dveh delih. Prvi del iščemo z nastavkom  $f(x) = Cx1^x$  oziroma  $f(x) = Cx$ . Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pC(x+2) - C(x+1) + (1-p)Cx = -1$$

$$Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx = -1$$

$$C(2p-1) = -1$$

$$C = \frac{-1}{2p-1} = \frac{1}{1-2p}$$

Prvi del partikularne enačbe je:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p}$$

Drugi del iščemo z nastavkom  $f(x) = Dx \left(\frac{1-p}{p}\right)^x$ . Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pD(x+2) \left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+2)} - D(x+1) \left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+1)} + (1-p)Dx \left(\frac{1-p}{p}\right)^x = -1$$

$$D \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x \left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right) = -1$$

$$D = \frac{-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x \left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right)}$$

Drugi del partikularne enačbe je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x \left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x \left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right)} \\ &= \frac{x}{(x+1) \left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (px+2p) + px - 1}, \end{aligned}$$

celotna partikularna rešitev pa je vsota homogene in partikularne:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1) \left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (px+2p) + px - 1}.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^x + \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1) \left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (px+2p) + px - 1}$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki  $E[T|M=0] = f(0) = 0$ . Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^0 = 0, \quad A = -B$$

2. Pričakovano število iger, če imamo  $m+n$  denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki  $E[T|M=m+n] = f(m+n) = 0$ . Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} + \frac{m+n}{1-2p} + \frac{\frac{m+n}{2}}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n)-1} = 0$$

$$B = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1}$$

$$A = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}$$

Pričakovano število iger, če imamo  $x$  enot denarja je:

$$E[T|M=x] = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}} +$$

$$+ \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{\frac{m+n}{(m+n+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (p(m+n)+2p)+p(m+n)-1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n}}}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x} +$$

$$+ \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (px+2p)+px-1}$$

Zanima nas  $E[T|M=m]$ , vstavimo  $x=m$  v zgornjo enačbo in dobimo, da je pričakovano število iger, če začnemo z  $m$  enotami denarja enako:

$$E[T|M=m] = \frac{n \left( \left( \frac{1}{p} - 1 \right)^m - 1 \right) - m \left( \frac{1}{p} - 1 \right)^m \left( \left( \frac{1}{p} - 1 \right)^n - 1 \right)}{(2p-1) \left( \left( \frac{1}{p} - 1 \right)^{m+n} - 1 \right)}$$

Formula ne drži če je  $p = \frac{1}{2}$ , saj pride do deljenja z 0, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = -1$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = 0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0$$

Rešitev je dvojna ničla  $\lambda_{1,2} = 1$ . Homogena rešitev je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = (Ax + B)$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom  $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$ . Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 = -2$$

$$C(x^2 + 4x + 4) - 2C(x^2 + 2x + 1) + Cx^2 = -2$$

$$2C = -2, \quad C = -1$$

Partikularna rešitev je  $f(x) = -x^2$ , splošna rešitev pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

$$1. \quad f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$2. \quad f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$$

Pričakovano število iger, če imamo  $x$  enot denarja in je verjetnost za zmago  $p = \frac{1}{2}$  je:

$$E[T|M=x] = (m+n)x - x^2$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z  $m$  enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M=m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m$$

### 3 Viri

- L. Tehovnik, *Markovske verige*, naloga pri predmetu Seminar 1, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2013.
- T. Primožič, *Problem kockarjevega propada*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2019
- *The Gambler's Ruin*, v: MathPages, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na <https://www.mathpages.com/home/kmath084/kmath084.htm>
- *Recurrence relation*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na [https://en.m.wikipedia.org/wiki/Recurrence\\_relation](https://en.m.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation).



- P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne matematike 1*, 1. izdaja, 2011, [ogled 15. 3. 2019], dostopno na <https://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf>.
- *Back to the basics — gambler's ruin*, v: Random Determinism, [ogled 18. 3. 2019], dostopno na <https://randomdeterminism.wordpress.com/2010/07/07/gamblers-ruin/>.