Seminar 1
Markovske verige
16. tema

Lea Tehovnik

16. 4. 2015

1.6. Enokoračni izračuni

V tem poglavju si bomo pogledali način računanja verjetnosti in pričakovanih vrednosti markovskih verig z upoštevanjem, kako se situacija spremeni, ko se veriga premakne za en korak.

Primer 6.1: Kockarjev propad

Zamislimo si igro na srečo, v kateri se lahko v vsaki potezi zgodita dve možnosti: bodisi pridobimo 1$ z verjetnostjo p bodisi izgubimo 1$ z verjetnostjo $1-p$. Predpostavimo, da se igra konča, ko naše premoženje znaša N\$. Prav tako pa se konča tudi, ko izgubimo vse, torej naše stanje znaša 0$. Zaradi razlogov, ki bodo jasni v nadaljevanju, tokrat definiramo

$$V_y = min\{n \geq 0 : X_n = y\}$$

kar je prvi čas obiska y, pri čemer upoštevamo tudi možnost, da smo v y že v času 0.
Naj bo

$$h(x) = P_x(V_N < V_0)$$

verjetnost dogodka, da naš igralec doseže svoj cilj, torej da njegovo premoženje znaša $N, pred dogodkom, da bi bankrotiral. Pri tem smo seveda predpostavili, da njegovo začetno premoženje znaša x\$.Če upoštevamo našo definicijo V_x kot minimum za $n \geq 0$, vidimo, da je $h(0) = 0$ in $h(N) = 1$. Za izračun $h(i)$ za $0 < i < N$ je treba upoštevati, kaj se zgodi v prvem koraku, kar nas privede do

$$h(i) = ph(i+1) + (1-p)h(i-1).$$

Vidimo, da nas ob uspehu zanima verjetnost iz novega nivoja, torej, ko naše premoženje znaša $i+1$, obratno se isto stvar sprašujemo, če izgubimo, samo da z manjšim premoženjem $i-1$. Vidimo torej, da se zopet pokaže markovska lastnost, saj preteklost ni važna, isto vprašanje se vprašamo samo iz drugega nivoja. Enačbo preuredimo in dobimo $p(h(i+1)-h(i)) = (1-p)(h(i)-h(i-1))$. Vidimo, da velja

$$(\star) \qquad h(i+1)-h(i) = \tfrac{1-p}{p} \cdot (h(i)-h(i-1)) \qquad ..$$

Če je $p = 1/2$, potem je $h(i+1)-h(i) = h(i)-h(i-1)$. Kar pomeni, da je naklon h konstanten. Ker sta velja tudi $h(0) = 0$ in $h(N) = 1$, je naklon $1/N$, veljati pa mora $h(x) = x/N$. Da to potrdimo algebraično, lahko vzamemo, da če je $h(i)-h(i-1) = c$ za $1 \leq i \leq N$, potem velja

$$1 = h(N)-h(0) = \sum_{i=1}^{N} h(i)-h(i-1) = Nc.$$

Iz tega sledi, da je $c = 1/N$. Če še enkrat upoštevamo zadnjo enakost z dejstvom, da je h(0) = 0, potem dobimo

$$h(x) = h(x)-h(0) = \sum_{i=1}^{x} h(i)-h(i-1) = x/N.$$

Če se spomnimo definicije $h(x)$, to torej pomeni

$$(6.1) \qquad P_x(V_N < V_0) = x/N \text{ za } 0 \geq x \geq N \qquad .$$

Za lažje razumevanje zadnje formule si bomo pogledali naslednji primer.

Primer 6.2: Ujemanje kovancev. Bob, ki ima 15 penijev, in Charlie, ki ima 10 penijev, se odločita igrati igro. Oba vržeta kovanec. Če se kovanca ujemata, Bob dobi dva penija(torej dobiček znaša 1). Če se kovanca razlikujeta, oba penija dobi Charlie. Igra se konča, ko ima eden od igralcev vse kovance. Kolikšna je verjetnost, da Bob zmaga?

Rešitev: Naj bo X_n število penijev, ki jih ima Bob po n potezah. X_n je veriga kockarjevega propada z $p = 1/2$, $N = 25$, in $X_0 = 15$, zato po (6.1) Bob zmaga z verjetnostjo 15/25. Opazimo, da je odgovor pravzaprav razmerje kovancev Boba in števila celotnih kovancev. Torej je verjetnost, da se eno absorbirajoče stanje zgodi pred drugim, odvisna samo od tega ali smo na začetku bližje enemu ali drugemu. V našem primeru je Bob na začetku bližje zmagi.

$\square$

Ko $p \neq 1/2$ ostane ideja enaka, le malo bolj zahtevna. Če vzamemo $c = h(1) - h(0)$ potem iz $(\star)$ sledi, da za $i \geq 1$ velja

$$h(i) - h(i-1) = c(\frac{1-p}{p})^{i-1}.$$

Če seštejemo od $i = 1$ do N, dobimo

$$1 = h(N) - h(0) = \sum_{i=1}^{N} h(i) - h(i-1) = c\sum_{i=1}^{N}(\frac{1-p}{p})^{i-1}.$$

S θ označimo izraz $(1-p)/p$, torej $\theta = (1-p)/p$. Spomnimo se, da je za $\theta \neq 1$ delna vsota geometirjske vrste enaka

$$\sum_{j=0}^{N-1} \theta^j = \frac{1-\theta^N}{1-\theta},$$

kjer smo upoštevali, da je

$$(1-\theta)(1+\theta+\ldots+\theta^{N-1}) = (1+\theta+\ldots+\theta^{N-1})-(\theta+\theta^2+\ldots+\theta^N) = 1-\theta^N.$$

Vidimo, da je $c = (1-\theta)(1-\theta^N)$. Če vse seštejemo in upoštevamo, da je h(0) = 0, dobimo

$$h(x) = h(x) - h(0) = c\sum_{i=1}^{x} \theta^{i-1} = c \cdot \frac{1-\theta^x}{1-\theta} = \frac{1-\theta^x}{1-\theta^N}.$$

Če upoštevamo definicjo $h(x)$ in preuredimo ulomek, dobimo

$$P_x(V_N < V_0) = \tfrac{\theta^x - 1}{\theta^N - 1} \quad , \tag{6.2}$$

kjer $\theta = (1-p)/p$.

Ugotovimo torej, da je verjetnost odvisna in od tega, s kakšnim premoženjem oz. kje začnemo, in od tega, kakšna je verjetnost, da zmagamo ali izgubimo.

Za lažje razumevanje (6.2) si oglejmo naslednji primer:

Primer 6.3. Ruleta. Imamo ruleto, kjer je 18 rdečih, 18 črnih in 2 zelenih (0 in 00) prostorov. Če stavimo 1\$ na rdeče z verjetnostjo $18/38 = 0,4737$ pridobimo 1\$ in z verjetnostjo $20/38$ izgubimo 1\$. Predpostavimo, da v kazino pridemo z 50\$, s ciljem, da bi naše premoženje znašalo 100\$, še preden bi bankrotirali. Kolikšna je verjetnost, da nam uspe?

Rešitev. $\theta = (1-p)/p = 20/18$, zato po (6.2) velja

$$P_{50}(S_T = 100) = \frac{(\frac{20}{18})^{50} - 1}{(\frac{20}{18})^{100} - 1}.$$

Če upoštevamo, da je $(20/18)^{50} = 194$, dobimo

$$P_{50}(S_T = 100) = \tfrac{194-1}{(194)^2-1} = \tfrac{1}{194+1} = 0,005128. \qquad \square$$

Dodaten primer: limitno obnašanje. Postavimo se spet v vlogo kockarja v igralnici. Verjetnost, da zadane, bo vedno manjša od $1/2$, saj se igralnici drugače ne bi splačalo poslovati, ker bi prišla do izgub. Prav tako je N zelo velik, saj predstavlja željen dobiček igralca, ki je lahko zelo velik, saj ima igralnica velike vsote denarja. Prav tako vemo, da je $N > x$, saj je naše začetno stanje x manjše od željenega oz. N, drugače sploh ne bi igrali.

Če pogledamo stanje, v limiti dobimo

$$\lim_{N\to\infty} P_X(V_N < V_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{\theta^x - 1}{\theta^N - 1}$$

Ker je $p < 1/2$, je $\theta > 1$ lahko izpeljemo

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\theta^x - 1}{\theta^N - 1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\theta^x - 1}{\theta^x \cdot \theta^{N-x} - 1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{\theta^x}}{\theta^{N-x} - \frac{1}{\theta^x}} = 0,$$

saj gre števec v limiti proti 1, imenovalec pa raste čez vse meje.
Obratno : Če se v isti igri postavimo v vlogo igralnice, je naša verjetnost $p = 20/38$. Predpostavimo, da igralnica začne z majhnim kapitalom, ki znaša $x = 100$. Po (6.2) vemo, da bo verjetnost, da bo premoženje znašalo N, preden bi bankrotirali enaka

$$\frac{(9/10)^{100} - 1}{(9/10)^N - 1}.$$

Če gledamo limito, ko gre $N \to \infty$, vidimo, da gre $(9/10)^N \to 0$, torej naš rezultat znaša

$$1 - (9/10)^{100} = 1 - 2.656 \cdot 10^{-5}.$$

To pa nam pove, da bo verjetnost da do bankrota sploh ne pride neko pozitivno število, če je le $p > 1/2$. Kar je smiselno, saj se v primeru, ko bi verjetnost konvergirala proti 0, igralnici ne bi splačalo igrati.

S kockarjevim propadom smo zgoraj pokazali, da ima (6.1) samo eno rešitev. V nekaterih primerih bomo odgovor uganili in preverili. V takih primerih je dobro vedeti, če je rešitev enolična, kar pa bomo dokazali z lemo v nadaljevanju.

1 Literatura

1. R. Durrett, Essentials of stochastic processes, Springer, 2004
2. R. Durrett, Essentials of stochastic processes,Second Edition, Springer, 2012 (E- Knjiga)
3. R. Jamnik, Verjetnostni račun, DMFA Slovenije, 1987