

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

Kazalo

1	Besedilo naloge	2
2	Rešitev	3
2.1	Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M	3
2.1.1	Poseben primer	5
2.2	Računanje $E[T]$	6
2.2.1	Predpostavka, da je $E[T] < \infty$	6
2.2.2	Računanje $E[T]$ za vsak m in n	7
2.2.3	Poseben primer	9
3	Posebni primeri	10
4	Viri	11

1 Besedilo naloge

Igralec M ima m enot denarja, igralec N pa n enot premoženja, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec M zmaga vsakič z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo T število iger, ki so potrebne, da eden od igralcev bankrotira.

- (i) Določi verjetnost, da bankrotira igralec M . Zakaj je $T < \infty$ s.g.?
- (ii) Predpostavi, da je $E[T] < \infty$ (za vsako izbiro m in n). Določi $E[T]$.
*Ali znaš utemeljiti, da je $E[T] < \infty$?

2 Rešitev

2.1 Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M

Če je verjetnost, da zmaga igralec M enaka p , potem je verjetnost, da zmaga igralec N enaka $1 - p$. Naj bo A_a dogodek, da bankrotira igralec M , če začne z a denarja, nasprotnik pa z $m + n - a$ denarja, kjer je $a \in \{0, \dots, m + n\}$. Za vsako število a , kjer je $a \in \{0, \dots, m + n\}$, definiramo $p_a = P(A_a)$. Poiskati želimo p_m , torej verjetnost, da propade igralec M , če ima m denarja.

Naši hipotezi sta:

H - igralec M v prvem krogu zmaga (torej dobi 1 od igralca N)

H^C - igralec M v naslednjem krogu izgubi (torej da 1 igralcu N)

Verjetnost, da igralec M propade, če ima a denarja je enaka

$$P(A_a) = P(A_a|H) \cdot P(H) + P(A_a|H^C) \cdot P(H^C),$$

iz česar sledi, za $a \in \{0, \dots, m + n\}$,

$$\begin{aligned} p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \Rightarrow \\ (p + 1 - p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \Rightarrow \\ p \cdot p_a + (1 - p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \Rightarrow \\ p \cdot p_a - p_{a+1} \cdot p &= (1 - p) \cdot p_{a-1} - (1 - p) \cdot p_a \Rightarrow \\ p \cdot (p_a - p_{a+1}) &= (1 - p) \cdot (p_{a-1} - p_a). \end{aligned}$$

Sedaj uvedemo novo oznako: $u_a = p_a - p_{a+1}$, za $a \in \{0, \dots, m + n\}$. Torej velja tudi $u_{a-1} = p_{a-1} - p_a$, zato sledi, da je

$$p \cdot u_a = (1 - p) \cdot u_{a-1}.$$

Torej

$$u_a = \frac{1 - p}{p} \cdot u_{a-1}.$$

Če sedaj uvedemo še oznako $r := \frac{1-p}{p}$, dobimo

$$u_a = r \cdot u_{a-1}.$$

Od tod lahko izrazimo vse člene z začetnim (torej z u_0):

$$u_1 = r \cdot u_0$$

$$u_2 = r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 \cdot u_0$$

...

$$u_a = r^a \cdot u_0$$

za $a \in \{0, \dots, m+n\}$.

Vemo, da če ima eden od igralcev ves denar, potem gotovo zmaga, če pa ga nima nič, potem gotovo izgubi, zato je:

$$p_c = 0, \text{ kjer je } c := m+n \text{ in } p_0 = 1.$$

Sedaj lahko najprej u_0 izrazimo z začetnimi podatki ¹ :

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 - p_c = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \dots + (p_{c-1} - p_c) = \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{c-1} = \\ &= u_0 + r \cdot u_0 + r^2 \cdot u_0 + \dots + r^{c-1} \cdot u_0 = \\ &= u_0 \cdot (1 + r + r^2 + \dots + r^{c-1}) = \\ &= u_0 \cdot \frac{r^c - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$u_0 = \frac{r - 1}{r^c - 1}.$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnost za propad prvega igralca (vemo, da je $u_m = p_m - p_{m+1}$):

$$\begin{aligned} p_m &= u_m + p_{m+1} = u_m + u_{m+1} + p_{m+2} = \\ &= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \dots + u_{m+n-1} + p_{m+n} = \\ &= u_m + u_m \cdot r + u_m \cdot r^2 + \dots + u_m \cdot r^{n-1} + 0 = \\ &= u_m + u_m \cdot \frac{1-p}{p} + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 + \dots + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} = \\ &= u_m \cdot \left(1 + \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\right) = u_m \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\ &= r^m \cdot u_0 \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^m \cdot \frac{\frac{1-p}{p} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\ &= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^m = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} = \\ &= \frac{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - (1-p)^m}{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - p^m} = \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}. \end{aligned}$$

¹Razen, ko je $r = 1$, glej posebni primer 2.1.1

Torej dobili smo verjetnost za propad igralca M .

Da se bo igra skoraj gotovo končala, mora biti vsota verjetnosti, da bankrotira igralec M , in da bankrotira igralec N , enaka 1:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} + \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{p^{m+n} - (1-p)^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} - \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n - p^{m+n} + p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2.1.1 Poseben primer

Vprašanje se pojavi, kaj se zgodi, če imata oba igralca enako verjetnost za zmago, torej $p = 1 - p = \frac{1}{2}$. Takrat namreč zgornji izračun ni mogoč, saj bi prišlo do deljenja z 0. Iz tega dobimo, da je

$$r = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

V tem primeru so u_0, u_1, \dots, u_n med seboj enaki, torej:

$$u_k = r^k \cdot u_0 = u_0.$$

Posledično še lažje izrazimo u_0 , na način: $1 = c \cdot u_0$, torej $u_0 = \frac{1}{c}$.

V tem primeru je naša iskana verjetnost za igralca M enaka

$$\begin{aligned}
p_m &= u_0 \cdot (c - m) = \frac{c - m}{c} = \\
&= \frac{m + n - m}{m + n} = \frac{n}{m + n}.
\end{aligned}$$

Ponovno mora veljati, da je vsota verjetnosti, da bankrotira igralec M in, da bankrotira igralec N enaka 1, je pa izračun v tem primeru veliko krajši. Torej:

$$\frac{n}{m + n} + \frac{m}{m + n} = \frac{n + m}{m + n} = 1.$$

2.2 Računanje $E[T]$

2.2.1 Predpostavka, da je $E[T] < \infty$

Razmislimo najprej zakaj je $E[T] < \infty$. Če lahko čas T , ko se igra konča navzgor omejimo s časom \tilde{T} , katerega upanje lahko lažje izračunamo in dokažemo, da je končno, bo sledilo, da je tudi $E[T]$ končna. Vsakič, ko vidimo $m + n - 1$ zaporednih dobitkov igralca M se je igra gotovo končala, saj je v najslabšem primeru začel z 1 enoto denarja in je blo potrebnih $m + n - 1$ iger, da se je tekma zaključila.

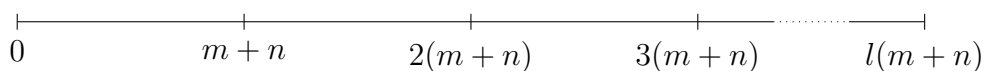
Definirajmo:

$$X_n := \begin{cases} 1; & \text{če zmaga igralec M} \\ 0; & \text{če zmaga igralec N} \end{cases}$$

Tako lahko navzgor ocenimo T :

$$\begin{aligned} T &\leq \inf\{l \in \mathbb{N} : \text{v zaporedju } X_1, \dots, X_l \text{ smo videli } m+n \text{ zaporednih enic} \leq \\ &\leq (m+n) \cdot \inf\{l \in \mathbb{N} : \begin{array}{ll} X_1, \dots, X_{m+n}; & \text{vsebuje same enice, ali} \\ X_{m+n+1}, \dots, X_{2(m+n)}; & \text{vsebuje same enice, ali} \\ \dots & \\ X_{(l-1)(m+n)+1}, \dots, X_{l(m+n)}; & \text{vsebuje same enice} \end{array}\} = \\ &= (m+n) \cdot G_l =: \tilde{T} \end{aligned}$$

Časovno os razdelimo na intervale dolžine $m+n$, znotraj katerih čakamo, da zaporedje $\{X_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ vsebuje same enice:



Vsako zaporedje $\{X_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ v \tilde{T} je zaporedje Bernoullijevih spremenljivk, saj pri upanju računamo verjetnost, da se v $m+n$ ponovitvah dogodek zgodi natanko $m+n$ -krat. Torej $X_l \sim \text{Ber}(p^{m+n})$, medtem ko je zaporedje $\{X_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ porazdeljeno geometrijsko, torej $G_l \sim \text{Geom}(p^{m+n})$, saj čakamo, da se dogodek, ko zaporedje vsebuje same enice, zgodi natanko enkrat. Sledi:

$$E[G_l] = \frac{1}{p^{(m+n)}} \implies E[\tilde{T}] = \frac{m+n}{p^{(m+n)}} < \infty$$

2.2.2 Računanje $E[T]$ za vsak m in n

Za dejanski izračun matematičnega upanje števila iger rešujemo enačbo oblike

$$E[T|M = x] = p \cdot E[T|M = x + 1] + (1 - p) \cdot E[T|M = x - 1] + 1,$$

kjer je prvotno premoženje igralca M enako x , kar zaradi lažjega zapisa prevedemo na obliko $f(x) = p \cdot f(x + 1) + (1 - p) \cdot f(x - 1) + 1$ oziroma

$$p \cdot f(x + 2) - f(x + 1) + (1 - p) \cdot f(x) = -1, \quad (1)$$

kjer je $f(x) := E[T|M = x]$ in $x \in \mathbb{N}$. Tu smo predpostavili, da je $E[T] < \infty$, da lahko enolično zadostimo rekurzivni enačbi. Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo², katero rešitev je vsota homogene in ene partikularne rešitve.

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x + 2) - f(x + 1) + (1 - p) \cdot f(x) = 0. \quad (2)$$

S pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1 - p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1 - p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p - 1)}{2p}.$$

Dobimo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$. Rešitev enačbe (2) je oblike $A \cdot 1^x + B(\frac{1-p}{p})^x$, oziroma:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^x.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = Cx1^x$ oziroma $f(x) = Cx$. Vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$\begin{aligned} pC(x + 2) - C(x + 1) + (1 - p)Cx &= -1 \\ \Leftrightarrow Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx &= -1 \\ \Leftrightarrow C(2p - 1) &= -1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{-1}{2p - 1} = \frac{1}{1 - 2p}. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je:

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2p}.$$

²Razen, ko je $p = \frac{1}{2}$, glej posebni primer 2.2.3

Splošna rešitev³ enačbe (1) je:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^x + \frac{x}{1-2p}.$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=0] = f(0) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^0 = 0, \quad A = -B.$$

2. Pričakovano število iger, če imamo $m+n$ denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=m+n] = f(m+n) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} + \frac{m+n}{1-2p} = 0$$

$$B = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n}} \Rightarrow A = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1}.$$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja je:

$$E[T|M=x] = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1} + \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^x + \frac{x}{1-2p}.$$

Zanima nas $E[T|M=m]$, vstavimo $x=m$ v zgornjo enačbo in dobimo, da je pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja enako:

$$E[T|M=m] = \frac{(m+n) \left(1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^m \right)}{(1-2p) \left(\left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1 \right)} + \frac{m}{1-2p}.$$

³Razen, ko je $p = \frac{1}{2}$, glej posebni primer 2.2.3

2.2.3 Poseben primer

Formula ne drži če je $p = \frac{1}{2}$, saj pride do deljenja z 0, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = -1. \quad (3)$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = 0.$$

S pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0. \quad (4)$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Rešitev enačbe (3) je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = Ax + B.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$. Vstavimo v enačbo (3) in dobimo:

$$\begin{aligned} C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 &= -2 \\ \Leftrightarrow C(x^2 + 4x + 4) - 2C(x^2 + 2x + 1) + Cx^2 &= -2 \\ \Leftrightarrow C &= -1. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev enačbe (3) pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2.$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2. $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja in je verjetnost za zmago $p = \frac{1}{2}$ je:

$$E[T|M=x] = (m+n)x - x^2.$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M=m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m.$$

3 Posebni primeri

1. Najprej nas zanima primer, ko je $m = n$, torej, ko imata oba igralca na začetku enako premoženja. V tem primeru bo naša iskana verjetnost enaka:

$$p_m = \frac{(1-p)^m}{p^m + (1-p)^m}.$$

V primeru, da je $p = \frac{1}{2}$, dobimo:

$$p_m = \frac{m}{m+m} = \frac{1}{2}.$$

2. Kaj pa, če eno izmed premoženj igralcev pomnožimo s konstanto? V tem primeru za igralca M dobimo verjetnost

$$p_m = \frac{(1-p)^{cm+n} - p^n(1-p)^{cm}}{(1-p)^{cm+n} - p^{cm+n}},$$

za igralca N pa verjetnost

$$p_n = \frac{p^{cn+m} - p^m(1-p)^{cn}}{p^{cn+m} - (1-p)^{cn+m}}.$$

V primeru, da je $p = \frac{1}{2}$, dobimo: $p_m = \frac{n}{cm+n}$, $p_n = \frac{m}{cn+m}$.

3. Zanima pa nas tudi, kaj se zgodi, če m in n pošljemo v neskončno, torej da imata igralca neomejeno premoženja. Če pošljemo premoženje igralca M proti neskončno, potem bo naša iskana verjetnost, da igralec M bankrotira, šla proti 0. V nasprotnem primeru, ko pošljemo premoženje igralca N proti neskončno, bo šla verjetnost, da bankrotira igralec M proti 1.
4. Kot zadnji nas zanima še posebni primer, ko gre p iz leve in iz desne proti $\frac{1}{2}$. V obeh primerih dobimo enak rezultat, in sicer:

$$p_m = \lim_{p \rightarrow 1/2} \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \frac{n}{m+n}.$$

4 Viri

- L. Tehovnik, *Markovske verige*, naloga pri predmetu Seminar 1, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2013.
- T. Primožič, *Problem kockarjevega propada*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2010.
- *The Gambler's Ruin*, v: MathPages, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na <https://www.mathpages.com/home/kmath084/kmath084.htm>.
- *Recurrence relation*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na https://en.m.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation.
- P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne matematike 1*, 1. izdaja, 2011, [ogled 15. 3. 2019], dostopno na <https://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf>.
- *Back to the basics — gambler's ruin*, v: Random Determinism, [ogled 18. 3. 2019], dostopno na <https://randomdeterminism.wordpress.com/2010/07/07/gamblers-ruin/>.