UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Tom Primožič

Problem kockarjevega propada

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Roman Drnovšek

Ljubljana, 2010

Kazalo

Povzetek

V tem delu predstavimo tri različice problema kockarjevega propada. Začnemo s klasično igro, kjer igralec v vsakem krogu stavi $1 in lahko svoj vložek bodisi podvoji bodisi izgubi, pri tem pa se trudi doseči ciljno vsoto, preden bankrotira. Nato predstavimo posplošeno različico te igre, kjer igralec še vedno stavi vsakič isto vsoto, vendar pa ima vsak krog igre več različnih možnih izplačil. Nazadnje pa predstavimo še problem nestrpnega kockarja, ki v vsakem krogu stavi vse, kar ima, razen če lahko svoj cilj doseže že z manjšo stavo, v vsakem krogu igre pa prav tako kot pri klasični različici svoj vložek bodisi podvoji bodisi izgubi. Za vsak tip igre se vprašamo, kakšni sta verjetnosti uspeha (kockar doseže svoj cilj) ter propada (kockar bankrotira), ter verjetnosti tudi izračunamo. Poiščemo tudi pričakovano dolžino igre za vsako različico, pri čemer si pomagamo tudi z Waldovima identitetama. Na koncu primerjamo pričakovane dolžine različnih tipov iger in poskušamo najti povezavo med pričakovano dolžino igre ter verjetnostjo uspeha. Izkaže se, da je za igralca, ki igra igro z negativno pričakovano vrednostjo, optimalna taka strategija, da je pričakovana dolžina igre kar najmanjša.

Abstract

In this thesis we present a mathematical treatment of three variants of the gambler's ruin problem. We begin by describing the classical gambler's ruin, where the gambler bets $1 every turn and can either double or loose his bet. The gambler's objective is to reach his chosen goal amount before going bankrupt. Then we present a generalized variant of this problem, where the gambler still always bets the same amount, but where every turn can have many different outcomes. Lastly, we also describe the problem of anxious gambler's ruin. Here, the gambler risks everything he has every turn, unless he can reach his goal with a smaller bet, and can either double or loose the amount staked. We derive the probabilities of success (the gambler reaches his goal) and ruin (the gambler looses all his money) for each type of the game. Using the Wald's identities we are also able find the expected duration of the game for every problem. Finally, we compare the durations of different types of the game and try to find a link between the expected duration and the probability of success. We conclude by pointing out that a gambler playing an unfair game with negative expected value should choose a strategy which minimizes the expected duration of the game.

Math. Subj. Class. (2010): 60G40, 91A60

Ključne besede: igre na srečo, problem kockarjevega propada, problem nestrpnega kockarja, Waldova identiteta

Keywords: gambling, gambler's ruin, anxious gambler's ruin, Wald's identity

1. Uvod

V tem delu diplomskega seminarja obravnavamo problem *kockarjevega propada*[1]. Najprej se osredotočimo na klasični problem kockarjevega propada, kot so ga obravnavali že matematiki 17. stoletja. Tako imenujemo igro, v kateri ima igralec neko začetno vsoto in v vsakem krogu stavi \$1, ki ga ali izgubi (zaigra) ali pa namesto \$1 pridobi \$2. Glavno vprašanje, s katerim se ukvarjamo, je, s kakšno verjetnostjo igralec svoje začetno premoženje poveča do željenega končnega premoženja (to imenujemo *uspeh*), ter s kakšno verjetnostjo propade (zaigra oziroma izgubi svoje celotno začetno premoženje - *neuspeh*). S pomočjo Waldovih identitet lahko izračunamo tudi, kakšna je prčakovana dolžina te igre oz. koliko krogov igralec v povprečju odigra, preden pride do konca in doživi bodisi uspeh bodisi neuspeh.

Nato klasični problem kockarjevega propada razširimo na dva ortogonalna načina. Najprej obravnavamo *splošni problem kockarjevega propada*, kjer je v vsakem krogu igre možnih več izidov in igralec ne le pridobi ali izgubi \$1, ampak lahko v vsakem krogu pridobi ali izgubi več različnih vsot denarja. Tudi tu se ukvarjamo z vprašanji, kakšne so verjetnosti uspeha in neuspeha ter kakšna je pričakovana dolžina igre. Druga razširitev pa je t.i. *problem nestrpnega kockarja*[2], ki je podoben klasičnemu problemu, le da lahko tokrat igralec v posameznem krogu igre stavi in poskuša podvojiti poljubno vsoto, ter svojo strategijo oblikuje tako, da bi čim hitreje dosegel (a ne presegel) svoj cilj.

V drugem razdelku predstavimo klasičen problem kockarjevega propada ter rešitev tega problema. V tretjem razdelku formuliramo in dokažemo prvo in drugo Waldovo identiteto. V četrtem razdelku obravnavamo razširjeni klasični problem z več možnimi izplačili. V petem razdelku predstavimo še eno razširitev klasičnega problema, problem nestrpnega kockarja. Šesti razdelek zaključi.

1.1. **Uporabljena notacija.** V diplomskem seminarju obravnavamo tri različne probleme, ki pa imajo nekaj skupnih točk. Tako uporabljamo enotno notacijo, ki pa jo mestoma prilagodimo danemu problemu.

Igralec začne z začetnim premoženjem $\$N$ in svoje premoženje želi povečati vsaj na $\$M$. Če mu to uspe, govorimo o uspehu, če pa njegovo trenutno premoženje pade na 0, to pomeni neuspeh oz. propad. Izrojenim primerom se izognemo tako, da zahtevamo $M > 0$ in $M \geq N \geq 0$.

V posameznem krogu igre igralec stavi neko vsoto in lahko dobi različna izplačila. Maksimalno izplačilo, ki ga lahko dobi, je $\$u$, minimalno pa $-\$v$, kjer sta $u, v > 0$.

[1]Izraz *kockarjev propad* je naš lasten prevod angleškega izraza *gambler's ruin*. Angleška beseda *gambler* se lahko prevaja tudi kot *hazarder* ali *igralec iger na srečo*, vendar prvi prevod asociira na besedo *hazard*, nevarnost, ki v tem kontekstu ni najbolj primerna, saj igre na srečo niso zares nevarne v osnovnem pomenu te besede, drugi izraz pa ima isti pomen kot beseda *kockar*, a je bolj neroden in predolg za pogosto uporabo v besedilu. Tako smo za besedo *gambler* izbrali prevod *kockar*.

Beseda *propad* morda ni najboljši prevod besede *ruin*, vendar v slovenščini ni nobene besede, ki bi se naravno uporabljala v kontekstu iger na srečo in bi bila tako bolj primerna.

V besedilu pogosto uporabljamo še besedi *uspeh* in *neuspeh*. Beseda *uspeh* je prevod angleške besede *success* in pomeni, da je kockar dosegel želeni cilj, beseda *neuspeh* pa je prevod angleške besede *failure* in označuje dogodek, da je kockar zaigral vse svoje premoženje.

[2]Prevod angleškega izraza *anxious gambler's ruin*. Avtor članka [1] pripomne, da bi bila beseda *desperate*, obupan, morda bolj primerna, saj pri tej različici igre igralec obupano še zadnjič poskusi srečo, igra na vse ali nič in v večini krogov tvega svoje celotno premoženje, vendar se na koncu odloči za besedo *anxious*, nestrpen, saj si v tej igri kockar želi čim prej doseči svoj cilj.

Dopuščamo le celoštevilska izplačila. Verjetnost, da bo igralec v nekem krogu igre dobil izplačilo $\$n$, je p_n, in velja $\sum_{i=-v}^{u} p_i = 1$.

Pri splošnem problemu kockarjevega propada so vsi krogi igre enaki in med sabo neodvisni, zato se verjetnosti p_i ne spreminjajo. Verjetnost uspeha označimo s $P(N, M, p_{-v}, \ldots, p_u)$, verjetnost neuspeha pa s $Q(N, M, p_{-v}, \ldots, p_u)$. Kjer je pomen jasen iz konteksta, uporabljamo tudi krajše oznake P_N in Q_N oziroma P in Q. Pričakovano dolžino igre označimo z $D(N, M, p_{-v}, \ldots, p_u)$, uporabljamo pa tudi oznaki D_N in D.

Klasični problem kockarjevega propada je posebni primer splošnega problema, ki pa ga zaradi preglednosti obravnavamo na začetku. Možni izplačili sta le $\$1$ in $-\$1$, zato je $u = v = 1$. Verjetnost pozitivnega izplačila je $p_1 = p$, verjetnost negativnega izplačila pa je $p_{-1} = 1-p = q$. Verjetnost uspeha označimo z $P = P_N = P(N, M, p)$, verjetnost neuspeha pa z $Q = Q_N = Q(N, M, p)$.

Pri problemu nestrpnega kockarja krogi igre niso več enaki in neodvisni. Kockar si lahko v vsakem krogu izbere vsoto, ki jo bo stavil, in potem lahko to vsoto ali izgubi ali pa podvoji. Če torej stavi $\$n$, potem je $p_n = p$ in $p_{-n} = 1 - p = q$ ter velja $p_i = 0$ za vse ostale i. Nestrpni kockar poskuša kar čimprej doseči premoženje $\$M$, zato vedno stavi vse, kar ima, razen, če lahko $\$M$ doseže že z manjšo stavo. Verjetnost uspeha označimo s $\mathcal{P} = \mathcal{P}_N = \mathcal{P}(N, M, p)$, verjetnost neuspeha s $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_N = \mathcal{Q}(N, M, p)$, pričakovano dolžino igre pa z $\mathcal{D} = \mathcal{D}_N = \mathcal{D}(N, M, p)$.

2. Klasični problem kockarjevega propada

Začnimo s klasičnim problemom kockarjevega propada. Imamo igralca z začetnim premoženjem $\$N$, ki si želi svoje premoženje povečati na $\$M$. V vsakem krogu stavi $\$1$ in z verjetnostjo q izgubi svoj vložek, z verjetnostjo $1 - q = p$ pa ga podvoji (dobi $\$2$). Želimo najti verjetnost uspeha $P = P(N, M, p)$ in verjetnost neuspeha $Q = Q(N, M, p)$.

Pokažimo najprej, da je verjetnost, da se igra nadaljuje v neskončnost, enaka 0, in da nam primera neskončno dolge igre ni potrebno obravnavati. Potem se igra skoraj gotovo konča v končno korakih bodisi z uspehom bodisi s propadom, zato je $P + Q = 1$.

Naj bo L dolžina posamezne igre. Pokazati želimo, da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[L > n] = 0$. Očitno je, da se igra konča, če dosežemo več kot M zaporednih zmag ali porazov. Naj bo A_n^k dogodek, da smo od n-tega kroga igre do vključno k-tega kroga igre vedno zmagali, B_n^k pa naj bo dogodku A_n^k nasprotni dogodek. Potem je verjetnost $\mathbb{P}\left[A_n^k\right] = p^{k-n+1}$ in $\mathbb{P}\left[B_n^k\right] = 1 - p^{k-n+1}$. Verjetnost, da je $L > iM$ lahko ocenimo

$$\mathbb{P}[L > iM] < \mathbb{P}\left[B_1^M\right] \mathbb{P}\left[B_{M+1}^{2M}\right] \cdots \mathbb{P}\left[B_{(i-1)M+1}^{iM}\right] = \left(1 - p^M\right)^i.$$

Ker je $1 - p^M < 1$, velja

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[L > n] = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}[L > iM] \le \lim_{i\to\infty} \left(1 - p^M\right)^i = 0.$$

Torej se igra skoraj gotovo konča v končno korakih in zato je res $P + Q = 1$.

Sedaj se lotimo računanja verjetnosti P in Q. Začnimo z najpreprostejšim primerom, ko je $p = q = \frac{1}{2}$. Potem je vsak krog igre *pošten*, saj je izplačilo posameznega kroga enako $\$1$ ali pa $-\$1$ z enako verjetnostjo in v povprečju ničesar niti ne izgubimo niti ne pridobimo. Intuitivno se nam zdi, da mora biti tedaj tudi celotna igra poštena (to bomo v naslednjem razdelku tudi dokazali). Če Z označuje vrednost igre po koncu in vemo, da je $Z \in \{0, M\}$, je tedaj

$$\mathbb{E}[Z] = P_N M + Q_N 0 = P_N M = N,$$

saj je igra poštena in zato mora biti končna vrednost v povprečju enaka začetni vrednosti. Torej je $P = \frac{N}{M}$, in ker smo že ugotovili, da je $P + Q = 1$, je $Q = 1 - \frac{N}{M}$.

Za računanje verjetnosti P in Q v primeru, ko $p \neq q$, uporabimo enak pristop, kot ga je v svojem dokazu že leta 1711 uporabil de Moivre. Naša igra je ekvivalentna igri z dvema igralcema, ki stavita en proti drugemu. Igralec A začne z N kovanci, igralec B pa z $M - N$ kovanci. Vsak krog stavita po en kovanec. Igralec A zmaga z verjetnostjo p, igralec B pa z verjetnostjo q. Igra se konča, ko enemu od njiju zmanjka kovancev.

Vendar pa nimajo vsi kovanci iste vrednosti. Kovance igralca A zložimo v stolp, in spodnjemu kovancu priredimo vrednost $\frac{q}{p}$, kovancu nad njim vrednost $(\frac{q}{p})^2$, in tako naprej, njegov vrhnji kovanec pa ima vrednost $(\frac{q}{p})^N$. Tudi kovance igralca B zložimo v stolp in vrhnjemu kovancu priredimo vrednost $(\frac{q}{p})^{N+1}$, drugemu najvišjemu vrednost $(\frac{q}{p})^{N+2}$, in tako dalje, spodnjemu kovancu pa vrednost $(\frac{q}{p})^M$. Poraženec posameznega kroga igre zmagovalcu vedno da svoj najvišji kovanec, zmagovalec pa ga vedno položi na vrh svojega stolpa. Potem je pričakovana vrednost posameznega kroga igre za igralca A vedno enaka

$$p\left(\frac{q}{p}\right)^{i+1} - q\left(\frac{q}{p}\right)^{i} = \frac{q^{i+1}}{p^i} - q\frac{q^i}{p^i} = 0.$$

Vidimo, da je igra poštena, zato lahko naredimo isti premislek kot zgoraj za primer $p = q = \frac{1}{2}$. Začetno premoženje N' igralca A je

$$N' = \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^N = \frac{\left(\frac{q}{p}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)^{N+1}}{1 - \frac{q}{p}},$$

končno premoženje M' igralca A v primeru zmage pa

$$M' = \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^M = \frac{\left(\frac{q}{p}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)^{M+1}}{1 - \frac{q}{p}}.$$

Potem je

$$P(N, M, p) = \frac{N'}{M'} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}$$

in

$$Q(N, M, p) = 1 - \frac{N'}{M'} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}.$$

Verjetnosti uspeha in neuspeha za poljubni p sta tako:

$$P(N,M,p) \;=\; \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M} & p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{N}{M} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Q(N,M,p) \;=\; \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N-\left(\frac{q}{p}\right)^M}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M} & p \neq \frac{1}{2} \\ 1-\frac{N}{M} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tako smo z elementarnimi metodami in kančkom intuitivnega premisleka uspeli izračunati verjetnosti uspeha in neuspeha za klasični problem kockarjevega propada za poljubno verjetnost p. V četrtem razdelku se bomo prepričali, da sta izračunani verjetnosti pravi.

3. Waldovi identiteti

V tem razdelku bomo nadaljevali našo obravnavo klasičnega problema kockarjevega propada in se vprašali, kakšna je pričakovana dolžina posamezne igre. To bomo ugotovili s pomočjo prve in druge *Waldove identitete*, ki ju bomo tudi dokazali. Najprej pa moramo našo igro prevesti v matematično obliko z uvedbo slučajnih spremenljivk.

Slučajna spremenljivka X_i naj predstavlja izid i-tega kroga igre, spremenljivka $S_i = X_1 + \ldots + X_i$ pa spremembo premoženja po prvih i krogih igre. Kot prej predpostavimo, da ima kockar na začetku $\$N$, po i krogih pa njegovo premoženje znaša $\$(N+S_i)$. Igra se konča, ko je $N + S_i \in \{0, M\}$, oziroma ekvivalentno $S_i \in \{-N, M-N\}$. Potem lahko definiramo spremenljivko T, ki označuje krog, v katerem se igra konča:

$$T = \min\{k; S_k \in \{-N, M-N\}\}.$$

Vidimo lahko, da je spremenljivka T *neodvisna od prihodnosti* - v vsakem krogu igre n lahko točno povemo, ali je $T \leq n$, oziroma, ali se je dogodek ($S_k \in \{-N, M-N\}$ za $k \leq n$) že zgodil. Celoštevilski slučajni spremenljivki, ki ima to lastnost, rečemo *čas ustavljanja*.

Definicija 3.1. *Slučajna spremenljivka $T \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ je* **čas ustavljanja** *za zaporedje $(X_i)_{i=0}^{\infty}$, če je za poljuben n dogodek $(T = n)$ odvisen le od spremenljivk $X_0, X_1, \ldots, X_n$, in neodvisen od spremenljivk $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$*

Prva Waldova identiteta nam bo pomagala izračunati pričakovano dolžino igre za $p \neq q$, z drugo pa si bomo pomagali, ko bo $p = q = \frac{1}{2}$.

Izrek 3.2. ***(Prva Waldova identiteta)*** *Naj bodo $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke in T čas ustavljanja. Naj velja še $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ in $\mathbb{E}[T] < \infty$. Potem velja*

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[T],$$

kjer je $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ in $S_0 = 0$.

Dokaz. Za poljuben elementarni dogodek $\omega \in \Omega$ velja, da je

$$S_T(\omega) = \sum_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(\omega) \mathbb{1}_{\{T \geq i\}}(\omega),$$

saj za $T(\omega) = k$ velja $\mathbb{1}_{\{T\geq i\}}(\omega) = 1$ le za tiste i, za katere je $i \leq k$. Potem lahko zapišemo

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right]$$

kjer nam zamenjavo neskončne vsote in matematičnega upanja omogoča izrek o dominirani konvergenci[3]. Ker je T čas ustavljanja, je dogodek $(T \leq i-1)$ neodvisen od slučajnih spremenljivk $X_i, X_{i+1}, \ldots$, zato je od teh slučajnih spremenljivk neodvisen tudi njemu nasprotni dogodek $(T \geq i)$. Torej velja $\mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right] = \mathbb{E}\left[X_i\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right]$ in zapišemo lahko

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_i\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_1\right] \mathbb{P}\left[T \geq i\right]$$

Spomnimo se, da za slučajno spremenljivko Y, ki slika v nenegativna cela števila, velja

$$\mathbb{E}\left[Y\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[Y \geq k\right].$$

Ker je $T \in \mathbb{N}_0$ s.g., imamo torej

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right] \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[T \geq i\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right] \mathbb{E}\left[T\right],$$

in s tem smo dokazali izrek. $\square$

S pomočjo prve Waldove identitete lahko izračunamo pričakovano dolžino igre za $p \neq q$. Poznamo namreč porazdelitev spremenljivke S_T:

---

[3] S pomočjo spremenljivk $|X_i|$ in izreka o monotoni konvergenci lahko dobimo dominirajočo spremenljivko M, ki jo potrebujemo za zamenjavo matematičnega upanja (integrala) in neskončne vsote (limite zaporedja delnih vsot) po Lebesgueovem izreku o dominirajoči konvergenci.

Naj bo $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}$. Potem je $S_T = \lim_{n\to\infty} Y_n$ in ta limita (po točkah) s.g. obstaja, saj je $T < \infty$ s.g. in zato skoraj vedno seštejemo le končno mnogo členov. Če obstaja slučajna spremenljivka M, da je $\mathbb{E}\left[M\right] < \infty$, in ki dominira zaporedje $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, torej za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $\omega \in \Omega$ velja $Y_n(\omega) \leq M(\omega)$, potem nam izrek o dominirajoči konvergenci zagotavlja, da je

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} Y_n\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right].$$

Sedaj moramo le še najti dominirajočo spremenljivko M. Naj bo $M = \sum_{i=1}^{\infty} |X_i| \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}$ in $W_n = \sum_{i=1}^{n} |X_i| \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}$. Potem je $M = \lim_{n\to\infty} W_n$. Ker je zaporedje $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ nepadajoče, nam izrek o monotoni konvergenci zagotavlja, da je M merljiva funkcija in da velja

$$\mathbb{E}\left[M\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} W_n\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[W_n\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right]$$

Kot v dokazu izreka je dogodek $(T \geq i)$ neodvisen od spremenljivke X_i in zato tudi od spremenljivke $|X_i|$, torej lahko zapišemo

$$\mathbb{E}\left[M\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[|X_i|\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right] = \mathbb{E}\left[|X_1|\right] \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[T \geq i\right] = \mathbb{E}\left[|X_1|\right] \mathbb{E}\left[T\right] < \infty,$$

kjer zadnja neenakost sledi iz predpostavk izreka. Spremenljivka M je tako merljiva in integrabilna ter očitno dominira zaporedje $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, zato jo lahko uporabimo v izreku o dominirajoči konvergenci.

$$S_T \sim \begin{pmatrix} -N & M-N \\ Q(N,M,p) & P(N,M,p) \end{pmatrix}$$

Iz porazdelitve lahko izračunamo, da je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_T\right] &= (M-N)\ P(N,M,p) - N\ Q(N,M,p) = \\ &= (M-N)\ P(N,M,p) - N\ (1 - P(N,M,p)) = \\ &= M\ P(N,M,p) - N\end{aligned}$$

Prav tako poznamo porazdelitev X_1 in zato vemo, da je $\mathbb{E}\left[X_1\right] = p - q$. Tako lahko s preureditvijo prve Waldove identitete izrazimo $\mathbb{E}\left[T\right]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T\right] = \frac{\mathbb{E}\left[S_T\right]}{\mathbb{E}\left[X_1\right]} &= \frac{M\ P(N,M,p) - N}{p-q} = \\ &= \frac{M - N + N\left(\frac{q}{p}\right)^M - M\left(\frac{q}{p}\right)^N}{(p-q)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^M\right)}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tako smo $\mathbb{E}\left[T\right] = D(N,M,p)$ za $p \neq \frac{1}{2}$ izrazili eksplicitno, kasneje pa nam bo prav prišla tudi oblika (3.1).

V primeru poštene igre, ko je $p = q = \frac{1}{2}$, je $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 0$, zato nam prva Waldova identiteta o $\mathbb{E}\left[T\right]$ ne pove ničesar. Uporabimo pa lahko drugo Waldovo identiteto.

Izrek 3.3. ***(Druga Waldova identiteta)*** *Naj bodo $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke in T čas ustavljanja. Če je $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 0$ in velja še $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \mathrm{Var}\left(X_1\right) < \infty$ ter $\mathbb{E}\left[T\right] < \infty$, potem velja*

$$\mathbb{E}\left[S_T^2\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right]\ \mathbb{E}\left[T\right],$$

kjer je $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ in $S_0 = 0$.

Dokaz. Najprej zapišemo

$$\begin{aligned}S_T^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{1}_{\{T \geq n\}}\right)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_n X_m \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} \mathbb{1}_{\{T \geq m\}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} X_n X_m \mathbb{1}_{\{T \geq m\}},\end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da množimo s.g. končni vsoti. Za $m > n$ sta spremenljivki X_n in X_m neodvisni, in prav tako je X_m neodvisen od $\mathbb{1}_{\{T \geq m\}}$. Zato je X_m neodvisen tudi od produkta $X_n \mathbb{1}_{\{T \geq m\}}$ in velja

$$\mathbb{E}\left[X_m X_n \mathbb{1}_{\{T \geq m\}}\right] = \mathbb{E}\left[X_m\right] \cdot \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{T \geq m\}}\right] = 0 \cdot \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{T \geq m\}}\right] = 0.$$

Ker so X_n^2 nenegativne slučajne spremenljivke, izrek o monotoni konvergenci dopušča zamenjavo dveh limitnih procesov, matematičnega upanja in neskončne vsote:

$$\mathbb{E}\left[S_T^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_n^2 \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}\right] =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_n^2\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T\geq n\}}\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[T \geq n\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] \mathbb{E}\left[T\right].$$

V zadnjem koraku smo zopet uporabili formulo za izračun matematičnega upanja s pomočjo repnih verjetnosti, in tako dokazali izrek. □

Sedaj lahko izračunamo pričakovano dolžino igre $\mathbb{E}[T]$ tudi za primer $p = q = \frac{1}{2}$. V tem primeru je porazdelitev S_T enaka

$$S_T \sim \begin{pmatrix} -N & M-N \\ 1-\frac{N}{M} & \frac{N}{M} \end{pmatrix},$$

zato je

$$\mathbb{E}\left[S_T^2\right] = (M-N)^2\, \mathbb{P}\left[S_T = M-N\right] + N^2\, \mathbb{P}\left[S_T = -N\right] =$$
$$= \frac{(M-N)^2 N + N^2(M-N)}{M} = N(M-N).$$

Ker je sedaj $\mathbb{E}[X_1] = 0$, lahko uporabimo drugo Waldovo identiteto:

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[S_T^2\right]}{\mathbb{E}\left[X_i^2\right]} = \frac{N(M-N)}{1} = N(M-N).$$

Sedaj enačbi za $p = q$ in $p \neq q$ združimo in zapišimo pričakovano trajanje igre:

$$D(N, M, p) = \begin{cases} \dfrac{M - N + N\left(\frac{q}{p}\right)^M - M\left(\frac{q}{p}\right)^N}{(p-q)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^M\right)} & p \neq \frac{1}{2} \\ N(M-N) & p = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

4. Splošni problem kockarjevega propada

V tem razdelku klasični problem razširimo in si ogledamo splošni problem kockarjevega propada. Izplačilo posameznega kroga ni več le $\pm\$1$, ampak so možna tudi drugačna izplačila. Najprej bomo raziskali, kako za poljubno igro poiščemo verjetnosti uspeha in propada, potem pa bomo verjetnosti izračunali za dva konkretna primera.

Podobno kot prej imamo kockarja, ki začne s premoženjem $\$N$ in ga želi povečati vsaj na $\$M$. Vsak krog igre lahko zasluži $\$n$ z verjetnostjo p_n, za poljubno število $n \in \mathbb{Z}$. Predpostavimo, da je neničelnih verjetnosti p_k le končno in z u označimo največje naravno število, da je $p_u \neq 0$, z v pa največje naravno število, da je $p_{-v} \neq 0$. Privzemimo, da je $u > 0$ in $0 < v \leq N$. Kot v prejšnjem razdelku naj X_i označuje izkupiček (ali izgubo) i-tega kroga igre. Vendar pa za razliko od klasične igre tokrat nimamo več le dveh končnih vrednosti, pač pa uspeh označujejo vrednosti M, $M+1$, $\ldots$, $M+u-1$, propad pa vrednosti 0, 1, $\ldots$, $v-1$. Množico končnih vrednosti označimo s K, $K = \{0, 1, \ldots, v-1, M, M+1, \ldots, M+u-1\}$.

Naj bo $P_N^{(k)}$ verjetnost, da končamo pri $\$k$, če začnemo z $\$N$ (k naj bo ena izmed končnih vrednosti, torej $k \in K$). Za vsak k lahko za verjetnost $P_N^{(k)}$ zapišemo rekurzivno zvezo. Po enem krogu je kockarjevo premoženje enako $\$(N+n)$ z verjetnostjo

p_n za vsak $n \in \{-v, -v+1, \dots, u-1, u\}$, zato mora veljati

$$P_N^{(k)} = \sum_{i=-v}^{u} p_i \, P_{N+i}^{(k)}. \tag{4.1}$$

Enačba (4.1) je homogena diferenčna enačba, za katero imamo $u+v$ začetnih pogojev, saj velja $P_N^{(k)} = 1$, če je $N = k$, in $P_N^{(k)} = 0$, če je $N \neq k$, za vse $N \in K$. Ker lahko takšno enačbo zapišemo za vsak $k \in K$, imamo skupaj $u+v$ diferenčnih enačb in $(u+v)^2$ začetnih pogojev.

Karakteristični polinom za vsako od enačb (4.1) je oblike

$$p(\lambda) = \sum_{i=-v}^{u} p_i \, \lambda^{v+i} - \lambda^v.$$

Vidimo lahko, da je

$$p(1) = \sum_{i=-v}^{u} p_i - 1 = 0,$$

torej je 1 ničla karakterističnega polinoma poljubne igre. Poleg tega je

$$p'(1) = \sum_{i=-v}^{u} p_i \, (v+i) - v = v \left(\sum_{i=-v}^{u} p_i \; - 1 \right) + \sum_{i=-v}^{u} i p_i =$$
$$= v \, p(1) + \sum_{i=-v}^{u} i p_i = \sum_{i=-v}^{u} i p_i = \mathbb{E}\left[X_1\right],$$

torej je 1 dvojna ničla, če in samo če je igra poštena ($\mathbb{E}\left[X_1\right] = 0$).

Diferenčne enačbe (4.1) ne moremo rešiti v splošnem, vedno pa jo lahko rešimo numerično, tako da poiščemo ničle karakterističnega polinoma, nastavimo splošno rešitev in nato upoštevamo začetne pogoje ter rešimo sistem linearnih enačb. To naredimo za vsak k in dobimo verjetnosti $P_N^{(k)}$. Iskani verjetnosti uspeha in neuspeha sta tako $P_N = \sum_{k=M}^{M+u-1} P_N^{(k)}$ in $Q_N = \sum_{k=0}^{v-1} P_N^{(k)}$.

Sedaj pa bomo to naredili na konkretnem primeru. Imamo igro, v kateri kockar v vsakem krogu z verjetnostjo $p_2 = 0{,}3$ zasluži \$2, z verjetnostjo $p_{-1} = 0{,}6$ pa izgubi \$1. Potem je $p_0 = 0{,}1$. Ta igra je poštena, saj je $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 2p_2 - p_{-1} = 0$. Kockar začne z začetnim premoženjem $N = 10$ dolarjev in si premoženje želi povečati na $M = 20$ dolarjev. Možne končne vrednosti so tako 0, $M = 20$ in $M + 1 = 21$. Diferenčne enačbe so oblike

$$P_N^{(k)} = \sum_{i=-1}^{2} p_i \, P_{N+i}^{(k)} = p_{-1} \, P_{N-1}^{(k)} + p_0 \, P_N^{(k)} + p_2 \, P_{N+2}^{(k)} =$$
$$= 0{,}6 \, P_{N-1}^{(k)} + 0{,}1 \, P_N^{(k)} + 0{,}3 \, P_{N+2}^{(k)}, \tag{4.2}$$

za $k \in \{0, 20, 21\}$ pa so robni pogoji $P_N^{(k)} = 1$, če $N = k$, in $P_N^{(k)} = 0$, če $N \neq k$ za vse $N \in \{0, 20, 21\}$.

Najprej izračunamo ničle karakterističnega polinoma:

$$3\lambda^3 - 9\lambda + 6 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

Tako ugotovimo, da je splošna rešitev enačbe (4.2) enaka:

$$P_N^{(k)} = a_1 + a_2 N + a_3 (-2)^N$$

To velja za vsak $k \in \{0, 20, 21\}$:

$$\begin{aligned} P_N^{(0)} &= a_{11} + a_{12}N + a_{13}(-2)^N \\ P_N^{(20)} &= a_{21} + a_{22}N + a_{23}(-2)^N \\ P_N^{(21)} &= a_{31} + a_{32}N + a_{33}(-2)^N \end{aligned}$$

Naj bo $A = [a_{ij}]$. Če upoštevamo robne pogoje, dobimo

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 21 \\ 1 & 2^{20} & -2^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema smo tako prevedli na iskanje inverza matrike

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 21 \\ 1 & 2^{20} & -2^{21} \end{bmatrix}.$$

Izračunamo lahko, da je

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{63963136}{63963135} & -\frac{1048576}{21321045} & -\frac{1}{63963135} \\ -\frac{7}{21321045} & \frac{233017}{7107015} & \frac{7}{21321045} \\ \frac{4}{12792627} & \frac{69905}{4264209} & -\frac{4}{12792627} \end{bmatrix}.$$

Tako vidimo, da so verjetnosti $P_N^{(k)}$ enake:

$$\begin{aligned} P_{10}^{(0)} &= \frac{3611648}{7107015} \approx 0{,}508181 \\ P_{10}^{(20)} &= \frac{777519}{2369005} \approx 0{,}328205 \\ P_{10}^{(21)} &= \frac{232562}{1421403} \approx 0{,}163614 \end{aligned}$$

Vidimo, da je verjetnost uspeha $P_{10} = P_{10}^{(20)} + P_{10}^{(21)} \approx 0{,}491819$ in verjetnost neuspeha $Q_{10} = P_{10}^{(0)} = 0{,}508181$. To smo pričakovali, saj je igra poštena, zato se zdi smiselno, da bi bili verjetnosti, da z začetno vsoto 10 dosežemo končni vrednosti 20 ali 0, enaki. Ker pa lahko v našem primeru poleg končne vrednosti 20 dosežemo še končno vrednost 21, in je $21 > 20$, mora biti skupna verjetnost uspeha manjša kot prej ($P < 0{,}5$), saj je igra poštena in mora veljati $\mathbb{E}[igra] = 0$. Res, pričakovan dobiček celotne igre ostaja 0, saj je

$$\mathbb{E}[igra] = 0\, P_{10}^{(0)} + 20\, P_{10}^{(20)} + 21\, P_{10}^{(21)} = 10.$$

Sedaj pa si še enkrat poglejmo klasični problem kockarjevega propada in preverimo, da so rešitve, ki smo jih v drugem razdelku dobili z intuitivnim sklepanjem, pravilne. Igralec z začetnim premoženjem $\$N$ si želi svoje premoženje povečati na $\$M$ tako, da v vsakem krogu stavi $\$1$ in z verjetnostjo p podvoji svoj vložek, z verjetnostjo q pa ga izgubi. Torej je $p_1 = p$ in $p_{-1} = 1 - p = q$, iščemo pa verjetnosti uspeha $P_N = P(N, M, p)$ in propada $Q_N = Q(N, M, p)$.

Rekurzivna zveza za verjetnost neuspeha Q_N je

$$Q_N = q\, Q_{N-1} + p\, Q_{N+1}, \tag{4.3}$$

začetna pogoja pa sta $Q_0 = 1$ in $Q_M = 0$. Karakteristični polinom diferenčne enačbe (4.3) je

$$p\lambda^2 - \lambda + q = 0.$$

Upoštevajoč, da je $q = 1 - p$, lahko ugotovimo, da sta ničli karakterističnega polinoma 1 in $\frac{q}{p}$. Vidimo, da sta ničli različni, če je $p \neq q$ oziroma $p \neq \frac{1}{2}$, sicer pa ničli sovpadata.

Najprej obravnavajmo primer $p \neq q$. V tem primeru je splošna rešitev enaka $Q_N = A + B(\frac{q}{p})^N$ za neki konstanti A in B, začetna pogoja pa sta izpolnjena, če je $A + B = 1$ in $A + B(\frac{q}{p})^M = 0$, torej je $A = -(\frac{q}{p})^M/(1-(\frac{q}{p})^M)$ in $B = (1-(\frac{q}{p})^M)^{-1}$. Rešitev enačbe (4.3) za $p \neq q$ je tako

$$Q_N = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M}.$$

Če pa je $p = q = \frac{1}{2}$, ima enačba (4.3) eno dvojno ničlo v točki 1. Splošna rešitev enačbe je tako $Q_N = A + BN$, iz začetnih pogojev pa dobimo $A = 1$ in $B = -\frac{1}{M}$. Rešitev enačbe (4.3) za $p = q = \frac{1}{2}$ je potem

$$Q_N = 1 - \frac{N}{M}.$$

Če enačbi združimo, dobimo verjetnost propada:

$$Q(N,M,p) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M} & p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] 1 - \dfrac{N}{M} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Verjetnost uspeha P_N izračunamo na podoben način, tako da poiščemo rešitev diferenčne enačbe $P_N = q\,P_{N-1} + p\,P_{N+1}$, ki ustreza začetnim pogojem $P_M = 1$ in $P_0 = 0$. Dobimo

$$P(N,M,p) = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M} & p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{N}{M} & p = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vidimo, da sta formuli $P(N,M,p)$ in $Q(N,M,p)$ enaki kot formuli, ki smo jih dobili v drugem razdelku, torej smo matematično pokazali, da je bilo naše intuitivno razmišljanje pravilno.

5. Problem nestrpnega kockarja

V tem razdelku bomo predstavili še eno različico problema kockarjevega propada, problem nestrpnega kockarja, ter jo rešili. Vendar pa bomo tokrat verjetnosti uspeha in neuspeha ter pričakovano dolžino igre izračunali na povsem drugačen način.

Igra bo podobna, kot je bila v klasični različici problema. Kockar začne z $\$N$ in si želi svoje premoženje povečati na $\$M$. Vendar pa sedaj ne stavi vedno enake vsote denarja, temveč prilagaja svojo stavo tako, da bi kar čim hitreje prišel do cilja. Če je torej manj kot na pol poti do cilja, potem stavi vse, kar ima. Če pa njegovo trenutno premoženje znaša vasj $\$\frac{M}{2}$, stavi natanko toliko, da bo imel v primeru zmage ravno $\$M$. Tako v vsakem krogu stavi $\$n$ in z verjetnostjo p svoj vložek podvoji, z verjetnostjo $q = 1 - p$ pa ga zaigra.

Tudi pri tem problemu nas zanima, kakšna je verjetnost, da bo kockarju uspelo oz. da bo propadel, ter povprečno trajanje igre. Tokrat bomo verjetnost uspeha označili s $\mathcal{P}$, verjetnost neuspeha pa s $\mathcal{Q}$; tako bomo lahko ti dve verjetnosti ločili od verjetnosti pri klasičnem problemu kockarjevega propada, kjer kockar nima posebne strategije in vedno stavi enako vsoto denarja.

Ponovno bomo izkupiček posameznega kroga igre označili z X_i, vendar pa tokrat spremenljivke X_i ne bodo niti neodvisne, niti enako porazdeljene. Kockarjevo trenutno premoženje bomo označili kar z $S_i = X_0 + X_1 + \ldots + X_i$, kjer je $X_0 \equiv N$. Najprej definirajmo novo spremenljivko $R_i = \frac{S_i}{M}$, ki predstavlja delež kockarjevega premoženja v primerjavi z ciljnim premoženjem.

Kockarjevo strategijo in potek igre najlažje opišemo s pomočjo spremenljivke R_i. Če je $R_i < \frac{1}{2}$, potem je R_{i+1} lahko le 0 (z verjetnostjo q), ali pa $2R_i$ (z verjetnostjo p). Če pa je $R_i \geq \frac{1}{2}$, potem je R_{i+1} enak 1 z verjetnostjo p in enak $R_i-(1-R_i) = 2R_i-1$ z verjetnostjo q. Če sedaj zapišemo R_i v binarnem zapisu, $R_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k} = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$, in predpostavimo, da se v i-tem krogu igra še ne konča, potem bo binarni zapis R_{i+1} zgolj binarni zapis R_i, zamaknjen za eno mesto ($R_{i+1} = 0{,}b_2b_3b_4\ldots$). Res, če je $R_i < \frac{1}{2}$, je $b_1 = 0$ in je $R_{i+1} = 2R_i = 2\sum_{k=2}^{\infty} b_k 2^{-k} = \sum_{k=2}^{\infty} b_k 2^{-k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} 2^{-k} = 0{,}b_2b_3b_4\ldots$. Če pa je $R_i \geq \frac{1}{2}$, pa je $b_1 = 1$ in je $R_{i+1} = 2R_i - 1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k+1} - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} b_k 2^{-k+1} = 0{,}b_2b_3b_4\ldots$. Torej je edina možna vrednost za R_n, poleg 0 in 1, takšno število, da je njegov binarni zapis zgolj za n mest zamaknjen binarni zapis števila R_0.

Sedaj z W_i označimo dogodek, da kockar doseže svoj cilj v i-tem krogu. Vidimo, da je W_i presek dogodkov, da je $R_i = 1$ in da R_j niso enaki niti 0 niti 1 za vse $j < i$. Očitno je R_i lahko enak 1 le v primeru, če je $R_{i-1} \geq \frac{1}{2}$, torej mora biti prva cifra v binarnem zapisu R_{i-1} enaka 1. Prva cifra R_{i-1} pa je natanko i-ta cifra števila R_0, ki mora zato prav tako biti 1. Če z (n_k) označimo takšno zaporedje, da je $R_0 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k}$, potem je verjetnost $\mathbb{P}[W_i]$ neničelna le, če je $i = n_m$ za nek m. Če hočemo zadostiti še pogoju, da $R_j \notin \{0, 1\}$ za $j < i$, to pomeni, da je moral kockar zmagati v vseh predhodnih krogih igre, razen v krogih n_k, $k < m$. Tako ugotovimo, da je $\mathbb{P}[W_{n_m}] = p^{n_m-m+1}\, q^{m-1}$. Če verjetnosti seštejemo, dobimo

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[W_i] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}[W_{n_m}] = \sum_{m=1}^{\infty} p^{n_m-m+1}\, q^{m-1}.$$

Ker je verjetnost, da se igra nadaljuje preko i-tega kroga, največ ρ^i, kjer je $\rho = \max\{p, q\}$, je $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = 1$ in igra se skoraj gotovo vedno konča.

Sedaj pa izračunajmo še pričakovano trajanje igre, kjer kockar uporablja nestrpno strategijo. Videli smo že, da so verjetnosti uspeha na i-tem koraku odvisne le od razmerja $R_0 = \frac{N}{M}$, in podobno so tudi verjetnosti neuspeha na i-tem koraku odvisne le od istega razmerja. Domnevamo lahko, da bo tudi pričakovano trajanje igre odvisno od tega razmerja.

Če z $D(i)$ označimo verjetnost, da igra traja vsaj i korakov ($D(i) = \mathbb{P}[T \geq i]$), potem je

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{\infty} D(i).$$

Seveda bo igra daljša od i natanko v primeru, da za vse $j < i-1$ velja, da je *i)* $R_j \neq \frac{1}{2}$, *ii)* če je $R_j < \frac{1}{2}$, v naslednjem krogu kockar zmaga, in *iii)* če je $R_j > \frac{1}{2}$, v naslednjem krogu kockar zgubi. Potem lahko vsoto $\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{\infty} D(i)$ seštejemo po delih:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_1} D(i) &= 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n_1-1} \\
\sum_{i=n_1+1}^{n_2} D(i) &= p^{n_1-1} q (1 + p + p^2 + \ldots + p^{n_2-n_1-1}) \\
&\vdots \\
\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} D(i) &= p^{n_{k-1}-k+1} q^{k-1} (1 + p + p^2 + \ldots + p^{n_k-n_{k-1}-1}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Če ima R_0 končno binarno reprezentacijo $R_0 = \sum_{k=1}^{m} 2^{-n_k}$, potem moramo sešteti zgolj končno členov vsote $\sum_{i=1}^{\infty} D(i)$, in jo lahko poenostavimo v

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} D(i) = \sum_{i=1}^{n_m} D(i) = \frac{1}{q}(1 - p^{n_1}) + \frac{1}{p}(p^{n_1} - p^{n_2}) + \frac{1}{p}\frac{q}{p}(p^{n_2} - p^{n_3}) + \\
+ \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{m-2} (p^{n_{m-1}} - p^{n_m}).
\end{aligned}$$

Če združimo člene z istimi potencami p, dobimo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_m} D(i) = \frac{1}{q} + p^{n_1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + p^{n_2}\left(\frac{q}{p^2} - \frac{1}{p}\right) + p^{n_3}\left(\frac{q^2}{p^3} - \frac{q}{p^2}\right) + \\
+ \ldots + p^{n_{m-1}}\left(\frac{q^{m-2}}{p^{m-1}} - \frac{q^{m-3}}{p^{m-2}}\right) - p^{n_m}\frac{q^{m-2}}{p^{m-3}},
\end{aligned}$$

kar lahko poenostavimo in izpeljemo formulo za $\mathbb{E}[T]$:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{n_m} D(i) = \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} p^{n_k} - \left(\frac{q}{p}\right)^{m-2} p^{n_m-1} \tag{5.1}$$

Če pa ima R_0 neskončen binarni zapis, potem pošljemo m proti ∞, in vidimo, da iz formule (5.1) sledi formula (5.2):

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{\infty} D(i) = \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} p^{n_k}. \tag{5.2}$$

Pri tem smo upoštevali, da je zaradi ocene $n_m \geq m$ zadnji člen formule (5.1) omejen s pq^{m-2} in gre zato proti 0, ko gre m proti ∞.

Sedaj lahko zapišemo izrek, ki nam pove pričakovano trajanje igre $\mathcal{D}(N, M, p)$ kockarja, ki uporablja nestrpno strategijo:

Izrek 5.1. *Naj ima N/M binarni zapis $\sum_{k=1}^{m} 2^{-n_k}$. Če je $m < \infty$, potem je*

$$\mathcal{D}(N, M, p) = \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} p^{n_k} - \left(\frac{q}{p}\right)^{m-2} p^{n_m - 1}.$$

Če pa je binarni zapis števila N/M neskončen, potem velja

$$\mathcal{D}(N, M, p) = \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} p^{n_k}.$$

Opomba. Ker je $\mathcal{D}(N, M, p)$ odvisen le od p in razmerja $r = N/M$, lahko uporabimo notacijo $\mathcal{D}(r, p) = \mathcal{D}(N, M, p)$, kjer je $r \in (0, 1) \subset \mathbb{Q}$. Vedno lahko predpostavimo, da sta N in M tuji, in uporabimo formulo (5.1), če je M enak neki potenci števila 2, sicer pa uporabimo formulo (5.2).

Najprej si oglejmo nekaj lastnosti funkcije $\mathcal{D}(r, p)$, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Če je $p = \frac{1}{2} = q$, so vsi členi vrst v formulah (5.1) in (5.2) enaki 0, saj je $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 0$. Če sta še M in N tuji, je tako $\mathcal{D}(N, M, \frac{1}{2})$ neodvisen od N, in velja $\mathcal{D}(N, M, \frac{1}{2}) = 2 - 2^{-k+1}$, če je $M = 2^k$, oziroma $\mathcal{D}(N, M, \frac{1}{2}) = 2$ sicer.

Za fiksen p je $\mathcal{D}(r, p)$ omejen. Če je $p \leq \frac{1}{2}$, je $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq 0$ in je zato izraz (5.2) največji, če je vsota vrste kar največja. Zato je

$$\sup_r \mathcal{D}(r, p) = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{p}{q}\right) \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{p},$$

saj je $n_m \geq m$, in je zato vrsta omejena z $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$. Če pa je $p \geq \frac{1}{2}$, je $(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq 0$ in je zato

$$\sup_r \mathcal{D}(r, p) = \frac{1}{q}.$$

Naj bo $p < \frac{1}{2}$ in naj bosta $r_1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\alpha_k}$ in $r_2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\beta_k}$ dve števili z neskončnim binarnim zapisom. Naj bo $r_1 > r_2$ in naj se binarna zapisa števil r_1 in r_2 ujemata do j-te enice, torej je $\alpha_k = \beta_k$ za $k \leq j$ in velja $\alpha_{j+1} < \beta_{j+1}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(r_1, p) - \mathcal{D}(r_2, p) &= \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} p^{\alpha_k} - \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} p^{\beta_k} \right) \geq \\
&\geq \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{j} p^{\alpha_{j+1}} - \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} p^{\alpha_{j+1}+k-j} \right) = \\
&= \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{j} p^{\alpha_{j+1}} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} p^{k} \right) = \\
&= \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{j} p^{\alpha_{j+1}} \left(1 - p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \right) = \\
&= \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{j} p^{\alpha_{j+1}} \left(1 - p\, \frac{1}{1-q} \right) = 0,
\end{aligned}$$

torej je $\mathcal{D}(r, p)$ za $p < \frac{1}{2}$ naraščajoča funkcija spremenljivke r za takšne $r \in (0, 1) \subset \mathbb{Q}$, ki imajo neskončno binarno reprezentacijo.

Sedaj pa si poglejmo izrek, ki povezuje pričakovano dolžino igre, če igramo s strategijo nestrpnega kockarja, in pričakovano dolžino igre s klasično strategijo.

Izrek 5.2. *Za vsa naravna števila $N < M$ in poljuben $0 < p < 1$, velja*

$$\mathcal{D}(N, M, p) \leq D(N, M, p).$$

Ta izrek nam pove, da je pričakovana dolžina igre pri strategiji nestrpnega kockarja največ takšna kot pričakovana dolžina igre pri klasični strategiji, kjer so vse stave enake \$1. Na enak način pa lahko obravnavamo tudi igre s fiksnimi stavami poljubne velikosti. Če S deli N in M, potem je igra z začetnim premoženjem $\$N$, ciljnim premoženjem $\$M$ ter s stavami velikosti $\$S$, kjer vsak krog dobimo $\$S$ z verjetnostjo p , z verjetnostjo q pa $\$S$ zgubimo, ekvivalentna igri s stavami velikosti \$1, začetnim premoženjem $\$\frac{N}{S}$ in ciljnim premoženjem $\$\frac{M}{S}$. Hkrati vemo, da je $\mathcal{D}(N, M, p)$ odvisna le od razmerja $\frac{N}{M}$, torej je $\mathcal{D}(N, M, p) = \mathcal{D}(\frac{N}{S}, \frac{M}{S}, p)$. Izrek nam torej pove, da je

$$\mathcal{D}(N, M, p) = \mathcal{D}(\tfrac{N}{S}, \tfrac{M}{S}, p) \leq D(\tfrac{N}{S}, \tfrac{M}{S}, p).$$

To pomeni, da je pričakovana dolžina igre, če igralec uporablja nestrpno strategijo, manjša kot pričakovane dolžina igre z vsako strategijo, ki uporablja fiksne stave poljubne velikosti.

Za dokaz izreka 5.2 potrebujemo naslednji dve lemi.

Lema 5.3. *Za vsak $N \in \mathbb{N}$ in poljuben $0 < p < 1$ velja*

$$P(N, N+1, p) \leq \frac{2Np}{N+1}.$$

Dokaz. Dokaz poteka s pomočjo indukcije na N. Če je $N = 1$, potem bomo odigrali le en krog igre, torej je $P(1, 2, p) = p$ in lema drži. Naj bo $P_k = P(k, k+1, p)$ in privzemimo, da je $P_k \leq \frac{2kp}{k+1}$. Verjetnost $P_{k+1} = P(k+1, k+2, p)$ lahko zapišemo kot

$$P_{k+1} = p + q\ P_k\ P_{k+1},$$

saj začetno premoženje $\$(k+1)$ z verjetnostjo p že v prvem krogu povečamo na $\$(k+2)$, z verjetnostjo q pa v prvem krogu izgubimo in pristanemo na $\$k$, potem pa najprej z verjetnostjo P_k doseżemo premoženje $\$(k+1)$, nato pa z verjetnostjo P_{k+1} še ciljno premoženje $\$(k+2)$. Tedaj je

$$P_{k+1} = \frac{p}{1 - q\ P_k} \leq \frac{p}{1 - q\ \frac{2kp}{k+1}} = \frac{p(k+1)}{k+1-2pqk}.$$

Ker je $p^2 - p + \frac{1}{4} = (p - \frac{1}{2})^2 \geq 0$, je $p - p^2 = p(1-p) = pq \leq \frac{1}{4}$. Zato lahko ocenimo

$$P_{k+1} \leq \frac{p(k+1)}{k+1-2pqk} \leq \frac{p(k+1)}{k+1-\frac{k}{2}} = \frac{2(k+1)p}{k+2}$$

in lema je dokazana. □

Lema 5.4. *Za vsa naravna števila $N < M$ in poljuben $p \leq \frac{1}{2}$ velja*

$$D(N, M, p) \geq N.$$

Dokaz. Če je $p = \frac{1}{2}$, potem je $D(N, M, \frac{1}{2}) = N(M-N) \geq N$. Sicer je $p < \frac{1}{2}$ in uporabimo lahko neenakost

$$D(N, M, p) \geq D(N, N+1, p),$$

saj se dolžina igre ne podaljša, če končamo že pri vrednosti $\$(N+1)$ namesto pri $\$M$. Nato uporabimo formulo (3.1) in vidimo, da je

$$\begin{aligned} D(N, N+1, p) &= \frac{(N+1)\ P(N, N+1, p) - N}{p-q} \geq \\ &\geq \frac{N - (N+1)\frac{2Np}{N+1}}{q-p} = N\ \frac{1-2p}{q-p} = N. \end{aligned}$$

□

Kot smo omenili že v drugem razdelku, je klasična igra ekvivalentna igri dveh igralcev, ki stavita \$1 en proti drugemu. Prvi igralec začne z začetnim premoženjem $\$N$, drugi pa z $\$(M-N)$, igra pa se konča, ko eden od njiju bankrotira. Potem lahko vidimo, da je $D(N, M, p) = D(M-N, M, q)$ in iz leme 5.4 sledi, da za $p \geq \frac{1}{2}$ velja $D(N, M, p) \geq M - N$.

Sedaj se lahko lotimo dokaza izreka 5.2.

Dokaz (izreka 5.2). Če je $M \in \{2, 3\}$, sta klasična in nestrpna strategija ekvivalentni, zato obravnavamo le $M \geq 4$.

Če je $p = \frac{1}{2}$, potem smo pokazali, da je $\mathcal{D}(N, M, \frac{1}{2}) \leq 2$, po drugi strani pa je $D(N, M, \frac{1}{2}) = N(M-N) > 2$, saj je $M \geq 4$, in tako izrek drži.

Videli smo že, da je $D(N, M, p) = D(M-N, M, q)$. Podobno lahko pokažemo tudi, da je $\mathcal{D}(N, M, p) = \mathcal{D}(M-N, M, q)$, zato moramo obravnavati le možnost, da je $p < \frac{1}{2}$. Označimo $r = \frac{N}{M}$. Izrek bomo dokazali postopoma, tako da bomo ločeno obravnavali vrednosti r s treh različnih intervalov, na koncu pa bomo obdelali še posebne primere.

(1) Naj bo $\frac{N}{M} \leq \frac{1}{4}$. Potem je

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(r, p) &\leq \lim_{r \nearrow \frac{1}{4}} \mathcal{D}(r, p) = \mathcal{D}(0{,}00111\ldots_b, p) = \\ &= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p^3 + \left(\frac{q}{p}\right)p^4 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 p^5 + \ldots\right) = \\ &= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p^3 + p^3 q + p^3 q^2 + \ldots\right) = \\ &= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) p^3 \frac{1}{1-q} = \frac{1}{q} + p - \frac{p^2}{q} = \\ &= \frac{1-p^2}{q} + p = 1 + p + p = 1 + 2p. \end{aligned}$$

Ker je $N \leq \frac{M}{4}$, je M vsaj za 3 večji kot N, in je zato $D(N, M, p) \geq D(1, 4, p)$. Če je $N = 1$ in $M = 4$, potem je število krogov enako 1, če prvo stavo izgubimo, če pa prvo stavo dobimo, potem imamo \$2 in je dolžina igre vsaj 3. Zato je $D(1, 4, p) \geq q + 3p = 1 + 2p$. Tako v tem primeru izrek drži, saj je

$$D(N, M, p) \geq D(1, 4, p) \geq 1 + 2p = \lim_{p \nearrow \frac{1}{4}} \mathcal{D}(N, M, p) \geq \mathcal{D}(N, M, p).$$

(2) Če je $\frac{1}{4} < \frac{N}{M} \leq \frac{1}{2}$, potem je

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(r,p) &\leq \lim_{r \nearrow \frac{1}{2}} \mathcal{D}(r,p) = \mathcal{D}(0{,}0111\ldots_b, p) = \\
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p^2 + \left(\frac{q}{p}\right)p^3 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 p^4 + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p^2 + p^2 q + p^2 q^2 + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) p^2 \frac{1}{1-q} = \\
&= \frac{1}{q} + 1 - \frac{p}{q} = \frac{1-p}{q} + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Ker je $M \geq 4$ in $\frac{N}{M} > \frac{1}{4}$, je $N > 1$ oziroma $N \geq 2$, saj je N celo število. Potem lahko po lemi 5.4 ocenimo, da je $D(N,M,p) \geq N \geq 2$, in velja

$$D(N,M,p) \geq N \geq 2 = \lim_{r \nearrow \frac{1}{2}} \mathcal{D}(r,p) \geq \mathcal{D}(N,M,p).$$

(3) Za $\frac{N}{M} > \frac{1}{2}$ je $D(N,M,p) \geq N > \frac{M}{2}$. Če je $M \leq 2^n$, je $\frac{N}{M} \leq \frac{M-1}{M} \leq 1 - 2^{-n}$. Potem je

$$\mathcal{D}(r,p) \leq \lim_{r \nearrow 1-2^{-n}} \mathcal{D}(r,p) = \mathcal{D}(0{,}11\ldots11011\ldots_b, p),$$

kjer je 0 na n-tem mestu binarnega zapisa. Zato je

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(0{,}11\ldots11011\ldots_b, p) = \\
&\quad= \tfrac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\Bigg(p + \left(\tfrac{q}{p}\right)p^2 + \ldots + \left(\tfrac{q}{p}\right)^{n-2} p^{n-1} \\
&\qquad\qquad + \left(\tfrac{q}{p}\right)^{n-1} p^{n+1} + \left(\tfrac{q}{p}\right)^{n} p^{n+2} + \ldots\Bigg) = \\
&\quad= \tfrac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p + pq + \ldots + pq^{n-2} + p^2 q^{n-1} + p^2 q^n + \ldots\right) = \\
&\quad= \tfrac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p\,\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + p^2 q^{n-1}\frac{1}{1-q}\right) = \\
&\quad= \tfrac{1}{q} + \frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} - \tfrac{1}{q} + q^{n-2} - pq^{n-2} = \\
&\quad= 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} + (1-p)q^{n-2} \leq n+1.
\end{aligned}$$

Naj bo $n = \lceil \log_2 M \rceil$. Potem velja $\mathcal{D}(N,M,p) \leq D(N,M,p)$, če je le

$$\lceil \log_2 M \rceil + 1 \leq \frac{M}{2}.$$

Preprosto se prepričamo, da je to res za vse $M \geq 10$ in da velja tudi za $M = 8$. Da bo izrek dokazan, moramo preveriti še za $M \in \{4,5,6,7,9\}$.

(4) Preverimo, da izrek drži tudi za posebne primere. Ker je $\frac{N}{M} > \frac{1}{2}$, moramo preveriti le za pare $(M,N) \in \{(4,3),(5,3),(5,4),(6,4),(6,5),(7,4),(7,5),(7,6),(9,5),(9,6),(9,7),(9,8)\}$.

Naj bo $M = 5$ in $N = 3$. Vemo, da velja $D(N, M, p) \geq N = 3$. Potem je $r = \frac{N}{M} = \frac{3}{5} = 0{,}00110011\ldots_b$ in velja

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(r,p) &= \tfrac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p^3 + \left(\tfrac{q}{p}\right)p^4 + \left(\tfrac{q}{p}\right)^2 p^7 + \left(\tfrac{q}{p}\right)^3 p^8 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\tfrac{q}{p}\right)^4 p^{11} + \left(\tfrac{q}{p}\right)^5 p^{12} + \ldots\right) = \\
&= \tfrac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)(p^3 + p^3 q + p^5 q^2 + p^5 q^3 + p^7 q^4 + p^7 q^5 + \ldots) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p^3(1+q) + p^5 q^2 (1+q) + p^7 q^4 (1+q) + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) p^3 \,(1+q)\left(1 + p^2 q^2 + p^4 q^4 + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) p^3 \,(1+q)\,\frac{1}{1 - p^2 q^2} = \\
&= \frac{1}{1 - p^2 q^2}\left(\frac{1 - p^2 q^2}{q} + p^2 + p^2 q - \frac{p^3}{q} - p^3\right) = \\
&= \frac{1}{1 - p^2 q^2}\left(\frac{1 - p^3}{q} - p^2 q + p^2(1-p) + p^2 q\right) = \\
&= \frac{1}{1 - p^2 q^2}\left(1 + p + p^2 + p^2 q\right) \leq \frac{16}{15}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) < 3,
\end{aligned}$$

saj je $p < \frac{1}{2}$ in je $p^2 q^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. V tem primeru je res $\mathcal{D}(N, M, p) \leq D(N, M, p)$.

Naj bo sedaj $M = 9$ in $N = 6$. Potem je $r = \frac{6}{9} = 0{,}101010\ldots_b$ in ocenimo lahko

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(r,p) &= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p + \left(\frac{q}{p}\right)p^3 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 p^5 + \left(\frac{q}{p}\right)^3 p^7\right) = \\
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right)\left(p + p^2 q + p^3 q^2 + p^4 q^3 + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) p\left(1 + pq + p^2 q^2 + p^3 q^3 + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{q} + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\right) p\,\frac{1}{1 - pq} = \\
&= \frac{1}{1 - pq}\left(\frac{1 - pq}{q} + 1 - \frac{p}{q}\right) = \\
&= \frac{1}{1 - pq}\,(1 + 1 - p) = \frac{1}{1 - pq}\,(1 + q) \leq \frac{4}{3}\,(1 + 1) < 3.
\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je $D(N, M, p) \geq 6$, zato v tem primeru izrek drži.

Za ostale pare (M, N) lahko preverimo na enak način.

$\square$

6. Razprava in zaključek

V tem delu diplomskega seminarja smo si pogledali klasični problem kockarjevega propada, s katerim so se ukvarjali že srednjeveški matematiki, ter raziskali nekatere njegove razširitve in posplošitve. Pokazali smo, kako v splošnem izračunati verjetnosti uspeha in propada za poljubno igro, ki je sestavljena iz več identičnih in neodvisnih podiger (krogov) s celoštevilskimi izplačili. Navedli smo dva izreka, prvo in drugo Waldovo identiteto, ki nam omogočata izračun pričakovane dolžine igre iz verjetnosti uspeha in propada za strategije, kjer so izplačila posameznih krogov neodvisna in enako porazdeljena. Veliko pozornosti smo namenili tudi obravnavi malce drugačne razširitve originalnega problema, in sicer problemu nestrpnega kockarja, kjer izplačila različnih krogov niso enaka, pač pa kockar spreminja svoje stave. Svojo strategijo oblikuje tako, da kar najhitreje pride do željenega ciljnega premoženja. Pri tem problemu za izračun pričakovane dolžine igre nismo mogli uporabiti Waldovih identitet, a nam je pričakovano dolžino igre vseeno uspelo izraziti s pomočjo zapisa razmerja med začetnim in končnim premoženjem v binarnem zapisu. Za konec smo si pogledali pomemben izrek, ki povezuje pričakovano dolžino igre pri klasičnem problemu kockarjevega propada in pričakovano dolžino igre pri problemu nestrpnega kockarja. Dokazali smo, da je pričakovana dolžina igre s strategijo nestrpnega kockarja manjša od pričakovane dolžine igre za vsako strategijo, ki uporablja fiksne stave.

Izkaže se, da obstaja pomembna povezava med pričakovano dolžino igre ter verjetnostjo uspeha. To povezavo lahko za primer preproste igre z izplačili $\$n$ z verjetnostjo p in $-\$n$ z verjetnostjo $q = 1 - p$ raziščemo kar z uporabo prve Waldove identitete. Imamo dve strategiji A in B in pripadajoča časa ustavljanja T_A in T_B za zaporedje spremenljivk $X_0, X_1, X_2, \ldots$, ki predstavljajo izplačila posameznih krogov igre. Naj bo strategija A povprečno krajša od strategije B, torej $\mathbb{E}[T_A] < \mathbb{E}[T_B]$. Privzemimo, da je $p < \frac{1}{2}$, kar ustreza nepoštenim in igralcu nenaklonjenim igram, s katerimi se največkrat srečujemo v realnem svetu. Potem je $\mathbb{E}[X_i] = p - q < 0$ in velja

$$\mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[T_A] > \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[T_B]\,.$$

Prva Waldova identiteta nam tedaj pove, da je $S_{T_A} > S_{T_B}$, torej je krajša strategija A za igralca bolj ugodna kot strategija B.

Pomembna omejitev tega pristopa so predpostavke Waldovih identitet. Slučajne spremenljivke $X_0, X_1, X_2, \ldots$ morajo namreč biti neodvisne in enako porazdeljene, kar pomeni, da morajo biti izplačila posameznega kroga, in s tem stave igralcev, vedno ista. Ta zahteva še vedno dopušča strategije, kot so "končam po 5 krogih igre," "končam, ko prvič izgubim dva kroga zaporedoma", ali pa strategija "končam, ko izgubim začetno premoženje ali pa dosežem $\$M$," ki smo jo uporabljali pri klasičnem problemu kockarjevega propada, izključi pa mnoge druge strategije, med drugim tudi strategijo nestrpnega kockarja. Čeprav lahko primerjamo pričakovani dolžini iger klasične strategije in strategije nestrpnega kockarja, pa s pomočjo Waldovih identitet ne moremo povedati ničesar o izkupičku celotne igre. Vendar pa povezava obstaja in ni presenetljiva - strategija nestrpnega kockarja je boljša[4] od poljubne strategije s fiksnimi stavami. Velja še več - če je $p < \frac{1}{2}$, je verjetnost uspeha pri strategiji nestrpnega kockarja vsaj tako velika kot verjetnost uspeha za katerokoli drugo strategijo, če je le igra oblike, kot je opisano zgoraj, torej da posamezen krog

[4] Dokaz izreka je na voljo v [2] ter v [4].

igre nudi izplačilo $\$n$ z verjetnostjo p in izplačilo $-\$n$ z verjetnostjo $q = 1 - p$. Strategija nestrpnega kockarja je tako ena od optimalnih strategij.

Opazujmo igralca, ki začne z \$1 in si želi doseči \$1000. Igralec igra igro, kjer je verjetnost dobička v posameznem krogu enaka 0,4. Če v vsakem krogu stavi le \$1, potem je verjetnost $P(1, 1000, 0{,}4)$, da doseže svoj cilj, manjša od 10^{-175}. Če pa uporablja strategijo nestrpnega kockarja, potem je verjetnost uspeha $\mathcal{P}(1, 1000, 0{,}4)$ več kot 0,0001. Verjetnost uspeha pa je še skoraj 5-krat večja, če ima igralec možnost izplačila v višini \$1000 z verjetnostjo $\frac{1}{2000}$. Čeprav je ta igra na prvi pogled zanj manj ugodna, saj je pričakovana izguba sedaj enaka $-\mathbb{E}[X_1] = 0.5$ (v primerjavi s pričakovano izgubo \$0.20 pred tem), pa lahko povečanje verjetnosti utemeljimo s tem, da smo pričakovano dolžino igre zmanjšali na najmanjšo možno vrednost, 1.

Povezava med trajanjem igre in verjetnostjo uspeha se pogosto pojavlja tudi v vsakdanjem življenju. Športni privrženci vedo, da je na krajših prvenstvih večja verjetnost, da slaba ekipa doseže nepričakovano dober rezultat. Različne športne organizacije se trudijo kljubovati temu učinku tako, da primerno prilagodijo pravila tekmovanja. Tako so kombinacije v začetnih krogih mnogih prvenstev takšne, da slabše ekipe igrajo z boljšimi ekipami, saj se tako zmanjša možnost, da se slaba ekipa prebije do kasnejših krogov prvenstva. Izkaže se tudi, da se intuicija mnogih ljudi, ki vplačujejo loterijske listke navkljub negativnim pričakovanim dobičkom in izjemno nizkimi možnostimi zadetka, ujema z matematično logiko. Videli smo namreč, da je trajanje igre oziroma število zmag, potrebnih za dosego cilja, bolj pomembno od pričakovane vrednosti posameznega kroga igre, loterija pa je igra, ki ljudem omogoča dosego bogastva že z enim samim dobitkom.

Literatura

[1] J. Bak, *The Anxious Gambler's Ruin*, Mathematics Magazine **74** (2001) 182–193.

[2] L. E. Dubins, L. J. Savage, *Inequalities for Stochastic Processes: How to Gamble If You Must*, McGraw-Hill, New York (1965).

[3] J. D. Harper, K. A. Ross, *Stopping Strategies and Gambler's Ruin*, Mathematics Magazine **78** (2005) 255–268.

[4] K. Siegrist, *How to Gamble If You Must*, (2008) `http://www.maa.org/joma/Volume8/Siegrist/index.html`.