

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

Kazalo

1	Besedilo naloge	1
2	Rešitev	2
2.1	Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M	2
2.1.1	Poseben primer	4
2.2	Računanje $E[T]$	4
3	Viri	8

1 Besedilo naloge

Igralec M ima m enot denarja, igralec N pa n enot premoženja, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec M zmaga vsakič z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo T število iger, ki je potrebnih, da eden od igralcev bankrotira.

- Predpostavi, da je $T < \infty$ s.g. (*ali znaš to utemeljiti?). Določi verjetnost, da bankrotira igralec M .
- Predpostavi, da je $E[T] < \infty$. Določi $E[T]$.

2 Rešitev

2.1 Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M

Če je verjetnost, da zmaga igralec M enaka p , potem je verjetnost, da zmaga igralec N enaka $1 - p$. Naj bo A_a dogodek, da bankrotira igralec M, če ima trenutno a denarja. Za vsako naravno ptevilo a definiramo $p_a = P(A_a)$. Poiskati želimo p_m , torej verjetnost, da propade igralec M , če ima m denarja.

Naši hipotezi sta:

H - prvi igralec v naslednjem krogu zmaga (torej dobi 1 od drugega igralca)

H^C - prvi igralec v naslednjem krogu izgubi (torej da 1 drugemu igralcu)

Verjetnost, da igralec M propade, če ima a denarja je enaka:

$$P(A_a) = P(A_a/H) \cdot P(H) + P(A_a/H^C) \cdot P(H^C)$$

iz česar sledi

$$\begin{aligned} p_a &= P_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \\ (p + 1 - p) \cdot p_a &= P_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \\ p \cdot p_a + (1 - p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \\ p \cdot p_a - P_{a+1} \cdot p &= p_{a-1} - (1 - p) \cdot p_a \\ p \cdot (p_a - p_{a+1}) &= (1 - p) \cdot (p_{a-1} - p_a) \end{aligned}$$

Sedaj uvedemo novo oznako: $u_a = p_a - p_{a+1}$. Torej velja tudi $u_{a-1} = p_{a-1} - p_a$, zato sledi

$$p \cdot u_a = (1 - p) \cdot u_{a-1}$$

Torej

$$u_a = \frac{1 - p}{p} \cdot u_{a-1}$$

Če sedaj uvedemo še oznako $r = \frac{1-p}{p}$, dobimo

$$u_a = r \cdot u_{a-1}$$

Od tod lahko izrazimo vse člene z začetnim (torej z u_0):

$$\begin{aligned} u_1 &= r \cdot u_0 \\ u_2 &= r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 \cdot u_0 \\ &\dots \\ u_a &= r^a \cdot u_0 \end{aligned}$$

Vemo, da če ima eden od igralcev ves denar, potem gotovo zmaga, če pa ga nima nič, potem gotovo izgubi, zato je:

$$p_c = 0, \text{ kjer je } c = m + n \text{ in } p_0 = 1$$

Sedaj lahko najprej u_0 izrazimo z začetnimi podatki:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 - p_c = (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + (p_{c-1} - p_c) = \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{c-1} = \\ &= u_0 + r \cdot u_0 + r^2 \cdot u_0 + \cdots + r^{c-1} \cdot u_0 = \\ &= u_0 \cdot (1 + r + r^2 + \cdots + r^{c-1}) = \\ &= u_0 \cdot \frac{r^c - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$u_0 = \frac{r - 1}{r^c - 1}$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnost za propad prvega igralca (vemo, da je $u_m = p_m - p_{m+1}$):

$$\begin{aligned} p_m &= u_m + p_{m+1} = \\ &= u_m + u_{m+1} + p_{m+2} = \\ &= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + p_{m+3} = \\ &= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots + u_{m+n-1} + p_{m+n} = \\ &= u_m + u_m \cdot r + u_m \cdot r^2 + \cdots + u_m \cdot r^{n-1} + 0 = \\ &= u_m + u_m \cdot \frac{1-p}{p} + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 + \cdots + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} = \\ &= u_m \cdot \left(1 + \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\right) = u_m \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\ &= r^m \cdot u_0 \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^m \cdot \frac{\frac{1-p}{p} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\ &= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^m = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} = \\ &= \frac{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - (1-p)^m}{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - p^m} = \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} \end{aligned}$$

Torej dobili smo verjetnost za propad igralca M .

2.1.1 Poseben primer

Vprašanje se pojavi, kaj se zgodi, če imata oba igralca enako verjetnost za zmago, torej $p = 1 - p = \frac{1}{2}$. Takrat namreč zgornji izračun ni mogoč, saj bi prišlo do deljenja z 0. Iz tega dobimo, da je

$$r = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

V tem primeru so u_0, u_1, \dots, u_n med seboj enaki, torej:

$$u_k = r^k \cdot u_0 = u_0$$

V tem primeru še lažje izrazimo u_0 na način: $1 = c \cdot u_0$, torej $u_0 = \frac{1}{c}$

V tem primeru je naša iskana verjetnost za igralca M enaka

$$\begin{aligned} p_m &= u_0 \cdot (c - m) = \frac{c - m}{c} = \\ &= \frac{m + n - m}{m + n} = \frac{n}{m + n} \end{aligned}$$

2.2 Računanje $E[T]$

Rešujemo enačbo oblike $E[T|M = x] = p \cdot E[T|M = x+1] + (1-p) \cdot E[T|M = x-1] + 1$, kar zaradi lažjega zapisa prevedemo na obliko $f(x) = p \cdot f(x+1) + (1-p) \cdot f(x-1) + 1$ oziroma

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = -1$$

kjer je $f(x) = E[T|M = x]$. Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo, katero rešitev je vsota homogene in partikularne rešitve.

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = 0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Dobimo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$. Rešitev homogene enačbe je torej oblike $A \cdot 1^x + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^x$, oziroma:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^x$$

Ker imamo homogeno rešitev sestavljeno iz dveh delov, bomo partikularni del prav tako poiskali v dveh delih. Prvi del iščemo z nastavkom $f(x) = Cx1^x$ oziroma $f(x) = Cx$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pC(x+2) - C(x+1) + (1-p)Cx = -1$$

$$Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx = -1$$

$$C(2p-1) = -1$$

$$C = \frac{-1}{2p-1} = \frac{1}{1-2p}$$

Prvi del partikularne enačbe je:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p}$$

Drugi del iščemo z nastavkom $f(x) = Dx\left(\frac{1-p}{p}\right)^x$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pD(x+2)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+2)} - D(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+1)} + (1-p)Dx\left(\frac{1-p}{p}\right)^x = -1$$

$$D \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right) = -1$$

$$D = \frac{-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right)}$$

Drugi del partikularne enačbe je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x\left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right)} \\ &= \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p) + px - 1}, \end{aligned}$$

celotna partikularna rešitev pa je vsota homogene in partikularne:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p) + px - 1}.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^x + \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (px+2p) + px - 1}$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=0] = f(0) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^0 = 0, \quad A = -B$$

2. Pričakovano število iger, če imamo $m+n$ denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=m+n] = f(m+n) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} + \frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n)-1} = 0$$

$$B = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n)-1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n}}$$

$$A = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n)-1}}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1}$$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja je:

$$\begin{aligned} E[T|M=x] &= \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n)-1}}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1} + \\ &+ \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n)-1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^x + \\ &+ \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (px+2p) + px - 1} \end{aligned}$$

Zanima nas $E[T|M = m]$, vstavimo $x = m$ v zgornjo enačbo in dobimo, da je pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja enako:

$$E[T|M = m] = \frac{n \left(\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^m - 1 \right) - m \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^m \left(\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^n - 1 \right)}{(2p - 1) \left(\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^{m+n} - 1 \right)}$$

Formula ne drži če je $p = \frac{1}{2}$, saj pride do deljenja z 0, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = -1$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = 0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Homogena rešitev je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = (Ax + B)$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$\begin{aligned} C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 &= -2 \\ C(x^2 + 4x + 4) - 2C(x^2 + 2x + 1) + Cx^2 &= -2 \\ 2C &= -2, \quad C = -1 \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2. $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja in je verjetnost za zmago $p = \frac{1}{2}$ je:

$$E[T|M = x] = (m+n)x - x^2$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M = m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m$$

3 Viri

- L. Tehovnik, *Markovske verige*, naloga pri predmetu Seminar 1, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2013.
- T. Primožič, *Problem kockarjevega propada*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2019
- *The Gambler's Ruin*, v: MathPages, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na <https://www.mathpages.com/home/kmath084/kmath084.htm>
- *Recurrence relation*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na https://en.m.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation.
- P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne matematike 1*, 1. izdaja, 2011, [ogled 15. 3. 2019], dostopno na <https://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf>.
- *Back to the basics — gambler's ruin*, v: Random Determinism, [ogled 18. 3. 2019], dostopno na <https://randomdeterminism.wordpress.com/2010/07/07/gamblers-ruin/>.