

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

# KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Besedilo naloge</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Rešitev</b>	<b>3</b>
2.1	Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M . . . . .	3
2.1.1	Poseben primer . . . . .	5
2.2	Računanje $E[T]$ . . . . .	6
2.2.1	Predpostavka, da je $E[T] < \infty$ . . . . .	6
2.2.2	Računanje $E[T]$ za vsak $m$ in $n$ . . . . .	7
2.2.3	Poseben primer . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Posebni primeri</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Viri</b>	<b>11</b>

# 1 Besedilo naloge

Igralec  $M$  ima  $m$  enot denarja, igralec  $N$  pa  $n$  enot premoženja,  $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$ . Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec  $M$  zmaga vsakič z verjetnostjo  $p \in (0, 1)$ , neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo  $T$  število iger, ki so potrebne, da eden od igralcev bankrotira.

- (i) Določi verjetnost, da bankrotira igralec  $M$ . Zakaj je  $T < \infty$  s.g.?
- (ii) Predpostavi, da je  $E[T] < \infty$  (za vsako izbiro  $m$  in  $n$ ). Določi  $E[T]$ .  
\*Ali znaš utemeljiti, da je  $E[T] < \infty$ ?

## 2 Rešitev

### 2.1 Računanje verjetnosti, da bankrotira igralec M

Če je verjetnost, da zmaga igralec  $M$ , enaka  $p$ , potem je verjetnost, da zmaga igralec  $N$ , enaka  $1 - p$ . Naj bo  $A_a$  dogodek, da bankrotira igralec  $M$ , če začne z  $a$  denarja, nasprotnik pa z  $m + n - a$  denarja, kjer je  $a \in \{0, \dots, m + n\}$ . Za vsako število  $a$ , kjer je  $a \in \{0, \dots, m + n\}$ , definiramo  $p_a = P(A_a)$ . Poiskati želimo  $p_m$ , torej verjetnost, da propade igralec  $M$ , če ima  $m$  denarja.

Naši hipotezi sta:

$H$  - igralec  $M$  v prvem krogu zmaga (torej dobi 1 od igralca  $N$ )

$H^C$  - igralec  $M$  v prvem krogu izgubi (torej da 1 igralcu  $N$ ).

Verjetnost, da igralec  $M$  propade, če ima  $a$  denarja je enaka:

$$P(A_a) = P(A_a|H) \cdot P(H) + P(A_a|H^C) \cdot P(H^C),$$

iz česar sledi, za  $a \in \{0, \dots, m + n\}$ ,

$$\begin{aligned} p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \Rightarrow \\ (p + 1 - p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \Rightarrow \\ p \cdot p_a + (1 - p) \cdot p_a &= p_{a+1} \cdot p + p_{a-1} \cdot (1 - p) \Rightarrow \\ p \cdot p_a - p_{a+1} \cdot p &= (1 - p) \cdot p_{a-1} - (1 - p) \cdot p_a \Rightarrow \\ p \cdot (p_a - p_{a+1}) &= (1 - p) \cdot (p_{a-1} - p_a). \end{aligned}$$

Sedaj uvedemo novo oznako:  $u_a = p_a - p_{a+1}$ , za  $a \in \{0, \dots, m + n\}$ . Torej velja tudi  $u_{a-1} = p_{a-1} - p_a$ , zato sledi, da je:

$$p \cdot u_a = (1 - p) \cdot u_{a-1}.$$

Torej:

$$u_a = \frac{1 - p}{p} \cdot u_{a-1}.$$

Če sedaj uvedemo še oznako  $r := \frac{1-p}{p}$ , dobimo:

$$u_a = r \cdot u_{a-1}.$$

Od tod lahko izrazimo vse člene z začetnim (torej z  $u_0$ ):

$$u_1 = r \cdot u_0$$

$$u_2 = r \cdot u_1 = r \cdot r \cdot u_0 = r^2 \cdot u_0$$

...

$$u_a = r^a \cdot u_0$$

za  $a \in \{0, \dots, m+n\}$ .

Vemo, da če ima eden od igralcev ves denar, potem gotovo zmaga, če pa ga nima nič, potem gotovo izgubi, zato je:

$$p_c = 0, \text{ kjer je } c := m+n \text{ in } p_0 = 1.$$

Sedaj lahko najprej  $u_0$  izrazimo z začetnimi podatki <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} 1 = p_0 - p_c &= (p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \dots + (p_{c-1} - p_c) = \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{c-1} = \\ &= u_0 + r \cdot u_0 + r^2 \cdot u_0 + \dots + r^{c-1} \cdot u_0 = \\ &= u_0 \cdot (1 + r + r^2 + \dots + r^{c-1}) = \\ &= u_0 \cdot \frac{r^c - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Iz tega sledi:

$$u_0 = \frac{r - 1}{r^c - 1}.$$

Sedaj lahko izračunamo verjetnost za propad prvega igralca (vemo, da je  $u_m = p_m - p_{m+1}$ ):

$$\begin{aligned} p_m &= u_m + p_{m+1} = u_m + u_{m+1} + p_{m+2} = \\ &= u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \dots + u_{m+n-1} + p_{m+n} = \\ &= u_m + u_m \cdot r + u_m \cdot r^2 + \dots + u_m \cdot r^{n-1} + 0 = \\ &= u_m + u_m \cdot \frac{1-p}{p} + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 + \dots + u_m \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1} = \\ &= u_m \cdot \left(1 + \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\right) = u_m \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\ &= r^m \cdot u_0 \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^m \cdot \frac{\frac{1-p}{p} - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\frac{1-p}{p} - 1} = \\ &= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^m = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+n} - 1} = \\ &= \frac{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - (1-p)^m}{\frac{(1-p)^{n+m}}{p^n} - p^m} = \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Razen, ko je  $r = 1$ , glej poseben primer 2.1.1

Torej, dobili smo verjetnost za propad igralca  $M$ .

Da se bo igra skoraj gotovo končala, mora biti vsota verjetnosti, da bankrotira igralec  $M$ , in da bankrotira igralec  $N$ , enaka 1:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} + \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{p^{m+n} - (1-p)^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} - \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n - p^{m+n} + p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \\
&= \frac{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

### 2.1.1 Poseben primer

Vprašanje se pojavi, kaj se zgodi, če imata oba igralca enako verjetnost za zmago, torej  $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ . Takrat namreč zgornji izračun ni mogoč, saj bi prišlo do deljenja z 0. Iz tega dobimo, da je

$$r = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

V tem primeru so  $u_0, u_1, \dots, u_n$  med seboj enaki, torej:

$$u_k = r^k \cdot u_0 = u_0.$$

Posledično še lažje izrazimo  $u_0$ , na način:  $1 = c \cdot u_0$ , torej  $u_0 = \frac{1}{c}$ .

V tem primeru je naša iskana verjetnost za igralca  $M$  enaka

$$\begin{aligned}
p_m &= u_0 \cdot (c - m) = \frac{c - m}{c} = \\
&= \frac{m + n - m}{m + n} = \frac{n}{m + n}.
\end{aligned}$$

Ponovno mora veljati, da je vsota verjetnosti, da bankrotira igralec  $M$ , in da bankrotira igralec  $N$ , enaka 1, je pa izračun v tem primeru veliko krajši. Torej:

$$\frac{n}{m + n} + \frac{m}{m + n} = \frac{n + m}{m + n} = 1.$$

## 2.2 Računanje $E[T]$

### 2.2.1 Predpostavka, da je $E[T] < \infty$

Razmislimo najprej, zakaj je  $E[T] < \infty$ . Če lahko čas  $T$ , ko se igra konča, navzgor omejimo s časom  $\tilde{T}$ , katerega upanje lahko lažje izračunamo, in dokažemo, da je končno, bo sledilo, da je tudi  $E[T]$  končna. Vsakič, ko vidimo  $m + n - 1$  zaporednih dobitkov igralca M, se je igra gotovo končala, saj je v najslabšem primeru začel z 1 enoto denarja in je blo potrebnih  $m + n - 1$  iger, da se je tekma zaključila.

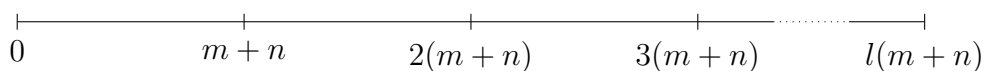
Definirajmo:

$$X_n := \begin{cases} 1; & \text{če zmaga igralec M} \\ 0; & \text{če zmaga igralec N} \end{cases}$$

Tako lahko navzgor ocenimo  $T$ :

$$\begin{aligned} T &\leq \inf\{l \in \mathbb{N} : \text{v zaporedju } X_1, \dots, X_l \text{ smo videli } m+n \text{ zaporednih enic}\} \leq \\ &\leq (m+n) \cdot \inf\{l \in \mathbb{N} : \begin{array}{ll} X_1, \dots, X_{m+n}; & \text{vsebuje same enice, ali} \\ X_{m+n+1}, \dots, X_{2(m+n)}; & \text{vsebuje same enice, ali} \\ \dots & \\ X_{(l-1)(m+n)+1}, \dots, X_{l(m+n)}; & \text{vsebuje same enice} \end{array}\} = \\ &= (m+n) \cdot G_l =: \tilde{T} \end{aligned}$$

Časovno os razdelimo na intervale dolžine  $m+n$ , znotraj katerih čakamo, da zaporedje  $\{X_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  vsebuje same enice:



Vsako zaporedje  $\{X_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  v  $\tilde{T}$  je zaporedje Bernoullijevih spremenljivk, saj pri upanju računamo verjetnost, da se v  $m+n$  ponovitvah dogodek zgodi natanko  $m+n$ -krat. Torej  $X_l \sim \text{Ber}(p^{m+n})$ , medtem ko je zaporedje  $\{X_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  porazdeljeno geometrijsko, torej  $G_l \sim \text{Geom}(p^{m+n})$ , saj čakamo, da se dogodek, ko zaporedje vsebuje same enice, zgodi natanko enkrat. Sledi:

$$E[G_l] = \frac{1}{p^{(m+n)}} \implies E[\tilde{T}] = \frac{m+n}{p^{(m+n)}} < \infty$$

### 2.2.2 Računanje $E[T]$ za vsak $m$ in $n$

Za dejanski izračun matematičnega upanja števila iger rešujemo enačbo oblike:

$$E[T|M = x] = p \cdot E[T|M = x + 1] + (1 - p) \cdot E[T|M = x - 1] + 1,$$

kjer je prvotno premoženje igralca  $M$  enako  $x$ , kar zaradi lažjega zapisa prevedemo na obliko  $f(x) = p \cdot f(x + 1) + (1 - p) \cdot f(x - 1) + 1$  oziroma

$$p \cdot f(x + 2) - f(x + 1) + (1 - p) \cdot f(x) = -1, \quad (1)$$

kjer je  $f(x) := E[T|M = x]$  in  $x \in \mathbb{N}$ . Tu smo predpostavili, da je  $E[T] < \infty$ , da lahko enolično zadostimo rekurzivni enačbi. Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo<sup>2</sup>, katere rešitev je vsota homogene in ene partikularne rešitve.

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x + 2) - f(x + 1) + (1 - p) \cdot f(x) = 0. \quad (2)$$

S pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1 - p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1 - p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p - 1)}{2p}.$$

Dobimo  $\lambda_1 = 1$  in  $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$ . Rešitev enačbe (2) je oblike  $A \cdot 1^x + B(\frac{1-p}{p})^x$ , oziroma:

$$A + B \left( \frac{1-p}{p} \right)^x.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom  $f(x) = Cx1^x$  oziroma  $f(x) = Cx$ . Vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$\begin{aligned} pC(x + 2) - C(x + 1) + (1 - p)Cx &= -1 \\ \Leftrightarrow Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx &= -1 \\ \Leftrightarrow C(2p - 1) &= -1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{-1}{2p - 1} = \frac{1}{1 - 2p}. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je:

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2p}.$$

---

<sup>2</sup>Razen, ko je  $p = \frac{1}{2}$ , glej poseben primer 2.2.3



Splošna rešitev<sup>3</sup> enačbe (1) je:

$$A + B \left( \frac{1-p}{p} \right)^x + \frac{x}{1-2p}.$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja, je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki  $E[T|M=0] = f(0) = 0$ . Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A + B \left( \frac{1-p}{p} \right)^0 = 0, \quad A = -B.$$

2. Pričakovano število iger, če imamo  $m+n$  denarja, je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki  $E[T|M=m+n] = f(m+n) = 0$ . Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B + B \left( \frac{1-p}{p} \right)^{m+n} + \frac{m+n}{1-2p} = 0$$

$$B = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^{m+n}} \Rightarrow A = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{\left( \frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1}.$$

Pričakovano število iger, če imamo  $x$  enot denarja, je:

$$E[T|M=x] = \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{\left( \frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1} + \frac{\frac{m+n}{1-2p}}{1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^{m+n}} \left( \frac{1-p}{p} \right)^x + \frac{x}{1-2p}.$$

Zanima nas  $E[T|M=m]$ , vstavimo  $x=m$  v zgornjo enačbo in dobimo, da je pričakovano število iger, če začnemo z  $m$  enotami denarja, enako:

$$E[T|M=m] = \frac{(m+n) \left( 1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^m \right)}{(1-2p) \left( \left( \frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1 \right)} + \frac{m}{1-2p}.$$

---

<sup>3</sup>Razen, ko je  $p = \frac{1}{2}$ , glej poseben primer 2.2.3

### 2.2.3 Poseben primer

Formula ne drži, če je  $p = \frac{1}{2}$ , saj pride do deljenja z 0, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = -1. \quad (3)$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = 0.$$

S pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0. \quad (4)$$

Rešitev je dvojna ničla  $\lambda_{1,2} = 1$ . Rešitev enačbe (3) je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = Ax + B.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom  $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$ . Vstavimo v enačbo (3) in dobimo:

$$\begin{aligned} C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 &= -2 \\ \Leftrightarrow C(x^2 + 4x + 4) - 2C(x^2 + 2x + 1) + Cx^2 &= -2 \\ \Leftrightarrow C &= -1. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je  $f(x) = -x^2$ , splošna rešitev enačbe (3) pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2.$$

Vstavimo robne pogoje:

1.  $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2.  $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$

Pričakovano število iger, če imamo  $x$  enot denarja in je verjetnost za zmago  $p = \frac{1}{2}$ , je:

$$E[T|M=x] = (m+n)x - x^2.$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z  $m$  enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M=m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m.$$

### 3 Posebni primeri

1. Najprej nas zanima primer, ko je  $m = n$ , torej, ko imata oba igralca na začetku enako premoženja. V tem primeru bo naša iskana verjetnost enaka:

$$p_m = \frac{(1-p)^m}{p^m + (1-p)^m}.$$

V primeru, da je  $p = \frac{1}{2}$ , dobimo:

$$p_m = \frac{m}{m+m} = \frac{1}{2}.$$

2. Kaj pa, če eno izmed premoženj igralcev pomnožimo s konstanto? V tem primeru za igralca  $M$  dobimo verjetnost

$$p_m = \frac{(1-p)^{cm+n} - p^n(1-p)^{cm}}{(1-p)^{cm+n} - p^{cm+n}},$$

za igralca  $N$  pa verjetnost

$$p_n = \frac{p^{cn+m} - p^m(1-p)^{cn}}{p^{cn+m} - (1-p)^{cn+m}}.$$

V primeru, da je  $p = \frac{1}{2}$ , dobimo:  $p_m = \frac{n}{cm+n}$ ,  $p_n = \frac{m}{cn+m}$ .

Če pa obe premoženji pomnožimo s konstanto, dobimo:

$$p_m = \frac{(1-p)^{cm+cn} - (1-p)^{cm}p^{cn}}{(1-p)^{cm+cn} - p^{cm+cn}}.$$

V primeru  $p = \frac{1}{2}$  torej dobimo:  $p_m = \frac{cn}{cm+cn} = \frac{cn}{c(m+n)} = \frac{n}{m+n}$ , torej ugotovimo, da se iskana verjetnost ne spremeni.

3. Zanima pa nas tudi, kaj se zgodi, če  $m$  in  $n$  pošljemo v neskončno, torej da imata igralca neomejeno premoženja. Če pošljemo premoženje igralca  $M$  proti neskončno, potem bo naša iskana verjetnost, da igralec  $M$  bankrotira, šla proti 0. V nasprotnem primeru, ko pošljemo premoženje igralca  $N$  proti neskončno, bo šla verjetnost, da bankrotira igralec  $M$ , proti 1.
4. Kot zadnji nas zanima še poseben primer, ko gre  $p$  iz leve in iz desne proti  $\frac{1}{2}$ . V obeh primerih dobimo enak rezultat, in sicer:

$$p_m = \lim_{p \rightarrow 1/2} \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \frac{n}{m+n}.$$

## 4 Viri

- L. Tehovnik, *Markovske verige*, naloga pri predmetu Seminar 1, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2013.
- T. Primožič, *Problem kockarjevega propada*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2010.
- *The Gambler's Ruin*, v: MathPages, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na <https://www.mathpages.com/home/kmath084/kmath084.htm>.
- *Recurrence relation*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 10. 3. 2019], dostopno na [https://en.m.wikipedia.org/wiki/Recurrence\\_relation](https://en.m.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation).
- P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne matematike 1*, 1. izdaja, 2011, [ogled 15. 3. 2019], dostopno na <https://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf>.
- *Back to the basics — gambler's ruin*, v: Random Determinism, [ogled 18. 3. 2019], dostopno na <https://randomdeterminism.wordpress.com/2010/07/07/gamblers-ruin/>.