Kockarjev propad

Gambler's ruin

Eva Deželak in Ines Šilc

Fakulteta za matematiko in fiziko

24. marec 2019

Vsota verjetnostii, da bankrotira igralec M, in da bankrotira igralec N:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}+\frac{p^{m+n}-p^m(1-p)^n}{p^{m+n}-(1-p)^{m+n}}=\\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}-\frac{p^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}=\\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n-p^{m+n}+p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}=\\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}\\
&=1
\end{aligned}
$$

Matematično upanje za $p = \frac{1}{2}$

$$E[T|M = x] = \frac{1}{2} \cdot E[T|M = x+1] + \frac{1}{2} \cdot E[T|M = x-1] + 1,$$

$$\frac{1}{2} f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2} f(x) = -1 \tag{1}$$

Homogeni del:

$$\frac{1}{2} f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2} f(x) = 0$$

Karakteristični polinom:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0 \tag{2}$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Rešitev enačbe (2) je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = Ax + B$$

Nastavek za iskanje partikularne rešitve: $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$ Vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$\begin{aligned} & C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 = -2 \\ \Leftarrow\quad & C(x^2+4x+4) - 2C(x^2+2x+1) + Cx^2 = -2 \\ \Leftarrow\quad & C = -1 \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev enačbe (1) pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2. $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$

Rešitev:

$$E[T|M = x] = (m+n)x - x^2$$

Če začnemo z m enotami denarja:

$$E[T|M = m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m$$