

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Eva Deželak in Ines Šilc

KOCKARJEV PROPAD

Seminar

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2019

Kazalo

1	Besedilo naloge	2
2	Rešitev	2

1 Besedilo naloge

Igralec M ima m enot denarja, igralec N pa n enot premoženja, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec M zmaga vsakič z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo T število iger, ki je potrebnih, da eden od igralcev bankrotira.

- Predpostavi, da je $T < \infty$ s.g. (*ali znaš to utemeljiti?). Določi verjetnost, da bankrotira igralec M .
- Predpostavi, da je $E[T] < \infty$. Določi $E[T]$.

2 Rešitev

Predpostavi, da je $E[T] < \infty$. Določi $E[T]$.

Rešujemo enačbo oblike $E[T|M = x] = p \cdot E[T|M = x+1] + (1-p) \cdot E[T|M = x-1] + 1$, kar zaradi lažjega zapisa prevedemo na obliko $f(x) = p \cdot f(x+1) + (1-p) \cdot f(x-1) + 1$ oziroma

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = -1$$

kjer je $f(x) = E[T|M = x]$. Rešujemo torej nehomogeno rekurzivno enačbo, katero rešitev je vsota homogene in partikularne rešitve.

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$p \cdot f(x+2) - f(x+1) + (1-p) \cdot f(x) = 0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$p \cdot \lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Dobimo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = \frac{1-p}{p}$. Rešitev homogene enačbe je torej oblike $A \cdot 1^x + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^x$, oziroma:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p}\right)^x$$

Ker imamo homogeno rešitev sestavljeno iz dveh delov, bomo partikularni del prav tako poiskali v dveh delih. Prvi del iščemo z nastavkom $f(x) = Cx1^x$ oziroma $f(x) = Cx$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pC(x+1) - C(x+1) + (1-p)Cx = -1$$

$$Cpx + 2Cp - Cx - C + Cx - Cpx = -1$$

$$C(2p-1) = -1$$

$$C = \frac{-1}{2p-1} = \frac{1}{1-2p}$$

Prvi del partikularne enačbe je:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p}$$

Drugi del iščemo z nastavkom $f(x) = Dx\left(\frac{1-p}{p}\right)^x$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$pD(x+2)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+2)} - D(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{(x+1)} + (1-p)Dx\left(\frac{1-p}{p}\right)^x = -1$$

$$D \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right) = -1$$

$$D = \frac{-1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right)}$$

Drugi del partikularne enačbe je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x\left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x \cdot \left(px\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + 2p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - x\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right) + x - px\right)} \\ &= \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p) + px - 1}, \end{aligned}$$

celotna partikularna rešitev pa je vstopa homogene in partikularne:

$$f(x) = \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1)\left(\frac{1-p}{p}\right) - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2(px+2p) + px - 1}.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^x + \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (px+2p) + px - 1}$$

Upoštevamo lahko še robna pogoja:

1. Pričakovano število iger, če smo brez denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=0] = f(0) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$A + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^0 = 0, \quad A = -B$$

2. Pričakovano število iger, če imamo $m+n$ denarja je 0, saj se takrat igra konča. Pogoj zapišemo v obliki $E[T|M=m+n] = f(m+n) = 0$. Vstavimo v splošno rešitev in dobimo:

$$-B + B \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} + \frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1} = 0$$

$$B = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n}}$$

$$A = \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1}}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1}$$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja je:

$$\begin{aligned} E[T|M=x] &= \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1}}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n} - 1} + \\ &+ \frac{\frac{m+n}{1-2p} + \frac{m+n}{(m+n+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (p(m+n)+2p) + p(m+n) - 1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^{m+n}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^x + \\ &+ \frac{x}{1-2p} + \frac{x}{(x+1) \left(\frac{1-p}{p} \right) - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 (px+2p) + px - 1} \end{aligned}$$

kar lahko poenostavimo na Zanima nas $E[T|M = m]$, vstavimo $x = m$ v zgornjo enačbo in dobimo, da je pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja enako:

$$E[T|M = m] = \frac{n \left(\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^m - 1 \right) - m \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^m \left(\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^n - 1 \right)}{(2p - 1) \left(\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^{m+n} - 1 \right)}$$

Formula ne drži če je $p = \frac{1}{2}$, saj pride do deljenja z 0, zato moramo to izračunati posebej. Prav tako rešujemo nehomogeno rekurzivno enačbo, ki jo zapišemo kot:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = -1$$

Rešimo najprej homogeni del. Rešujemo enačbo:

$$\frac{1}{2}f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2}f(x) = 0$$

s pomočjo karakterističnega polinoma dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Homogena rešitev je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = (Ax + B)$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 = -2$$

$$C(x^2 + 4x + 4) - 2C(x^2 + 2x + 1) + Cx^2 = -2$$

$$2C = -2, \quad C = -1$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

$$1. \quad f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$2. \quad f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$$

Pričakovano število iger, če imamo x enot denarja in je verjetnost za zmago $p = \frac{1}{2}$ je:

$$E[T|M = x] = (m + n)x - x^2$$

Zanima nas pričakovano število iger, če začnemo z m enotami denarja. Odgovor je:

$$E[T|M = m] = (m + n)m - m^2 = n \cdot m$$