Kockarjev propad

Gambler's ruin

Eva Deželak in Ines Šilc

Fakulteta za matematiko in fiziko

25. marec 2019

Vsota verjetnostii, da bankrotira igralec M, in da bankrotira igralec N:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}+\frac{p^{m+n}-p^m(1-p)^n}{p^{m+n}-(1-p)^{m+n}}= \\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}-\frac{p^{m+n}-p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}= \\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^m(1-p)^n-p^{m+n}+p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}= \\
&=\frac{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}}{(1-p)^{m+n}-p^{m+n}} \\
&=1
\end{aligned}
$$

Poseben primer za $p = \frac{1}{2}$

Dobimo

$$r = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

V tem primeru so $u_0, u_1, \ldots, u_n$ med seboj enaki, torej:

$$u_k = r^k \cdot u_0 = u_0.$$

Posledično še lažje izrazimo u_0, na način: $1 = c \cdot u_0$, torej $u_0 = \frac{1}{c}$. V tem primeru je naša iskana verjetnost za igralca M enaka

$$p_m = u_0 \cdot (c - m) = \frac{c - m}{c} =$$
$$= \frac{m + n - m}{m + n} = \frac{n}{m + n}.$$

Matematično upanje za $p = \frac{1}{2}$

$$E[T|M = x] = \frac{1}{2} \cdot E[T|M = x+1] + \frac{1}{2} \cdot E[T|M = x-1] + 1,$$

$$\frac{1}{2} f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2} f(x) = -1 \tag{1}$$

Homogeni del:

$$\frac{1}{2} f(x+2) - f(x+1) + \frac{1}{2} f(x) = 0$$

Karakteristični polinom:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0 \tag{2}$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Rešitev enačbe (1) je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = Ax + B$$

Nastavek za iskanje partikularne rešitve: $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$ Vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$
\begin{aligned}
& C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 = -2 \\
\Leftarrow\quad & C(x^2+4x+4) - 2C(x^2+2x+1) + Cx^2 = -2 \\
\Leftarrow\quad & C = -1
\end{aligned}
$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev enačbe (1) pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2. $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$

Rešitev:

$$E[T|M = x] = (m+n)x - x^2$$

Če začnemo z m enotami denarja:

$$E[T|M = m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m$$

Posebni primeri

1. V primeru, da velja $m = n$:
$$p_m = \frac{(1-p)^m}{p^m + (1-p)^m}.$$
V primeru, da je $p = \frac{1}{2}$, dobimo: $p_m = \frac{m}{m+m} = \frac{1}{m}$.
2. V primeru, da premoženje obeh igralcev pomnožimo s konstanto, dobimo:
$$p_m = \frac{(1-p)^{\mathrm{cm+cn}} - (1-p)^{\mathrm{cm}} p^{\mathrm{cn}}}{(1-p)^{\mathrm{cm+cn}} - p^{\mathrm{cm+cn}}}.$$
V primeru $p = \frac{1}{2}$ torej dobimo: $p_m = \frac{cn}{cm+cn} = \frac{cn}{c(m+n)} = \frac{n}{m+n}$, torej ugotovimo, da se iskana verjetnost ne spremeni.
3. Če gledamo limito, ko gresta m in n proti ∞ ugotovimo, da limita ne obstaja.
4. $$p_m = \lim_{p \to 1/2} \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \frac{n}{m+n}.$$