Kockarjev propad

Gambler's ruin

Eva Deželak in Ines Šilc

Fakulteta za matematiko in fiziko

3. april 2019

Navodilo

Igralec M ima m enot denarja, igralec N pa n enot premoženja, $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Zapored igrata igro na srečo v kateri ni neodločenih izidov; v vsaki igri dobi zmagovalec eno denarno enoto od poraženca; igralec M zmaga vsakič z verjetnostjo $p \in (0, 1)$, neodvisno od preteklosti. Igranje se konča, ko eden od igralcev bankrotira. Naj bo T število iger, ki so potrebne, da eden od igralcev bankrotira.

- (i) Določi verjetnost, da bankrotira igralec M. Zakaj je $T < \infty$ s.g.?
- (ii) Predpostavi, da je $E[T] < \infty$ (za vsako izbiro m in n). Določi $E[T]$. *Ali znaš utemeljiti, da je $E[T] < \infty$?

Končnost igre

Vsota verjetnostii, da bankrotira igralec M, in da bankrotira igralec N:

$$\frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} + \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{p^{m+n} - (1-p)^{m+n}} =$$

$$= \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} - \frac{p^{m+n} - p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} =$$

$$= \frac{(1-p)^{m+n} - p^m(1-p)^n - p^{m+n} + p^m(1-p)^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} =$$

$$= \frac{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}}$$

$$= 1$$

Poseben primer za $p = \frac{1}{2}$

Dobimo

$$r = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

V tem primeru so $u_0, u_1, \ldots, u_n$ med seboj enaki, torej:

$$u_k = r^k \cdot u_0 = u_0.$$

Posledično še lažje izrazimo u_0, na način: $1 = c \cdot u_0$, torej $u_0 = \frac{1}{c}$. V tem primeru je naša iskana verjetnost za igralca M enaka:

$$\begin{aligned} p_m &= u_m + u_{m+1} + \cdots u_{m+n-1} = \\ &= u_m \cdot n = \frac{n}{c} = \frac{n}{m+n}. \end{aligned}$$

Matematično upanje za $p = \frac{1}{2}$

$$E[T|M = x] = \frac{1}{2} \cdot E[T|M = x + 1] + \frac{1}{2} \cdot E[T|M = x - 1] + 1,$$

$$\frac{1}{2} f(x + 2) - f(x + 1) + \frac{1}{2} f(x) = -1 \tag{1}$$

Homogeni del:

$$\frac{1}{2} f(x + 2) - f(x + 1) + \frac{1}{2} f(x) = 0$$

Karakteristični polinom:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0 \tag{2}$$

Rešitev je dvojna ničla $\lambda_{1,2} = 1$. Rešitev enačbe (1) je oblike:

$$(Ax + B) \cdot 1^x = Ax + B$$

Nastavek za iskanje partikularne rešitve: $f(x) = C \cdot x^2 \cdot 1^x = Cx^2$ Vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$\begin{aligned} & C(x+2)^2 - 2C(x+1)^2 + Cx^2 = -2 \\ \Leftarrow\quad & C(x^2+4x+4) - 2C(x^2+2x+1) + Cx^2 = -2 \\ \Leftarrow\quad & C = -1 \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je $f(x) = -x^2$, splošna rešitev enačbe (1) pa je:

$$f(x) = Ax + B - x^2$$

Vstavimo robne pogoje:

1. $f(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
2. $f(m+n) = 0 \Rightarrow A = m+n$

Rešitev:

$$E[T|M = x] = (m+n)x - x^2$$

Če začnemo z m enotami denarja:

$$E[T|M = m] = (m+n)m - m^2 = n \cdot m$$

Posebni primeri

1. V primeru, da velja $m = n$:
$$p_m = \frac{(1-p)^m}{p^m + (1-p)^m}.$$
V primeru, da je $p = \frac{1}{2}$, dobimo: $p_m = \frac{m}{m+m} = \frac{1}{m}$.
2. V primeru, da premoženje obeh igralcev pomnožimo s konstanto, dobimo:
$$p_m = \frac{(1-p)^{\mathrm{cm+cn}} - (1-p)^{\mathrm{cm}} p^{\mathrm{cn}}}{(1-p)^{\mathrm{cm+cn}} - p^{\mathrm{cm+cn}}}.$$
V primeru $p = \frac{1}{2}$ torej dobimo: $p_m = \frac{cn}{cm+cn} = \frac{cn}{c(m+n)} = \frac{n}{m+n}$, torej ugotovimo, da se iskana verjetnost ne spremeni.
3. $$m \to \infty \Rightarrow p_m \to 0$$
$$n \to \infty \Rightarrow p_m \to 1$$
4. $$p_m = \lim_{p \to 1/2} \frac{(1-p)^{n+m} - (1-p)^m \cdot p^n}{(1-p)^{m+n} - p^{m+n}} = \frac{n}{m+n}.$$

Dokaz $E[T]<\infty$

Definirajmo:

$$X_n := \begin{cases} 1; & \text{če zmaga igralec M} \\ 0; & \text{če zmaga igralec N} \end{cases}$$

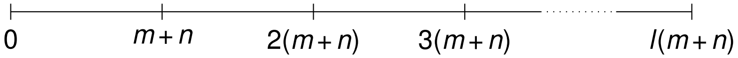
Tako lahko navzgor ocenimo T:

$$T \leq inf\{l \in \mathbb{N} : \text{v zaporedju } X_1, \ldots, X_l \text{ smo videli } m+n \text{ zaporednih enic} \leq$$

$$\leq (m+n) \cdot inf\{l \in \mathbb{N} : \begin{array}{ll} X_1, \ldots, X_{m+n}; & \text{vsebuje same enice, ali} \\ X_{m+n+1}, \ldots, X_{2(m+n)}; & \text{vsebuje same enice, ali} \\ \ldots & \\ X_{(l-1)(m+n)+1}, \ldots, X_{l(m+n)}; & \text{vsebuje same enice}\} = \end{array}$$

$$= (m+n) \cdot G_l =: \widetilde{T}$$

Časovno os razdelimo na intervale dolžine $m+n$, znotraj katerih čakamo, da zaporedje $\{X_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ vsebuje same enice:



Vsako zaporedje $\{X_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ v $\widetilde{T}$ je zaporedje Bernoullijevih spremenljivk, saj pri upanju računamo verjetnost, da se v $m+n$ ponovitvah dogodek zgodi natanko $m+n$-krat. Torej $X_l \sim Ber(p^{m+n})$, medtem ko je zaporedje $\{X_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ porazdeljeno geometrijsko, torej $G_l \sim Geom(p^{m+n})$, saj čakamo, da se dogodek, ko zaporedje vsebuje same enice, zgodi natanko enkrat. Sledi:

$$E[G_l] = \frac{1}{p^{(m+n)}} \Longrightarrow E[\widetilde{T}] = \frac{m+n}{p^{(m+n)}} < \infty$$