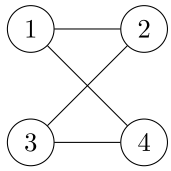
DM8 : Dessine moi un graphe... si tu peux

Ce DM est facultatif. Il est à rendre pour le lundi 25/04/2022 à 14h.

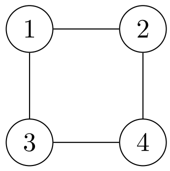
Dans cet énoncé, on ne considèrera que des graphes non orientés.

Définition : Un *isomorphisme* entre les graphes G et G' est une bijection f allant de l'ensemble des sommets de G vers l'ensemble des sommets de G' telle qu'une paire $\{u, v\}$ de sommets est une arête dans G si et seulement si $\{f(u), f(v)\}$ est une arête dans G'. Si une telle bijection existe, on dit que G et G' sont isomorphes et il est fréquent dans ce cas qu'on dise qu'ils sont "les mêmes".

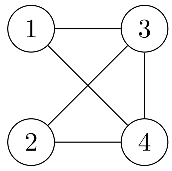
Autrement dit, G et G' sont isomorphes si et seulement si ils ont le même nombre de sommets et ces derniers sont connectés de la même façon. Par exemple, les graphes G_1 et G_2 ci-dessous sont isomorphes (la bijection $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 3$ convient) mais aucun des deux n'est isomorphe à G_3 :



G_1



G_2



G_3

Partie 1 *Suites graphiques*

Une suite finie décroissante (au sens large) d'entiers positifs est dite *graphique* s'il existe un graphe sans boucle dont les degrés des sommets correspondent à cette suite. Par exemple, le graphe G_3 est associé à la suite graphique $(3, 3, 2, 2)$.

1. La suite $(3, 3, 1, 1)$ est-elle graphique ? Et la suite $(3, 3, 2, 1, 1)$? Justifier.
2. Montrer qu'il existe deux graphes non isomorphes correspondants à la suite $(3, 2, 2, 2, 1)$.
3. Soit $n \geq 2$ et $(d_1, d_2, ..., d_n)$ une suite décroissante d'entiers. Montrer que la suite $(d_1, d_2, ..., d_n)$ est graphique si et seulement si la suite $(d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, ..., d_n)$ est graphique.

   Indication : Pour le sens direct, montrer que si $(d_1, ...d_n)$ est graphique, il existe un graphe dont les sommets sont $v_1, ..., v_n$, tel que $\deg(v_i) = d_i$ et tel que v_1 soit adjacent aux sommets $v_2, v_3, ..., v_{d_1+1}$.

Remarque : Cette dernière propriété est au coeur de l'algorithme de Havel-Hakimi qui résout le problème de la réalisation d'un graphe : il prend en entrée une suite finie d'entiers positifs et construit un graphe dont les degrés sont exactement ceux de cette suite si c'est possible et prouve qu'il n'en existe pas sinon.

4. Montrer que la suite $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$ est graphique et déduire de cette preuve une façon de construire un graphe qui lui est associé. Est-il possible que les sommets de degré 2 soient voisins dans ce graphe ?

De manière générale, savoir si deux graphes sont isomorphes est un problème intrigant (et important pour de nombreux domaines allant de la théorie des groupes à la classification des molécules en chimie). Plus exactement, on sait que ce problème est dans la classe de problèmes NP mais on ne connaît ni un algorithme polynomial permettant de le résoudre ni une preuve de sa NP-complétude. Pour certaines classes de graphes en revanche, on sait décider efficacement si deux graphes sont isomorphes ; c'est le cas des graphes planaires.

Partie 2 *Graphes planaires*

Un graphe non orienté est dit *planaire* s'il admet au moins une *représentation planaire* c'est-à-dire s'il existe au moins une façon de le dessiner sans que ses arêtes se croisent. Par exemple, le graphe G_1 est planaire puisqu'il est isomorphe au graphe G_2 dans lequel il n'y a aucun croisement d'arêtes.

Si G est un graphe planaire, ses arêtes dans une représentation planaire délimitent des régions du plan qu'on appelle des *faces*. Par exemple, le graphe G_2 a deux faces : une face bornée (le carré intérieur) et une face non bornée (tout le reste du plan).

0. Le graphe G_3 est-il planaire ? Si oui, combien de faces a la représentation planaire trouvée ?

On cherche à montrer le théorème suivant (la formule proposée est une des formules d'Euler) : Soit G un graphe planaire simple (sans boucle ni arête multiple) avec k composantes connexes dont une représentation planaire possède s sommets, a arêtes et f faces. Alors :

$$s - a + f = 1 + k$$

1. Montrer que le théorème précédent est vrai lorsque G est un arbre.
2. En déduire qu'il est vrai lorsque G est connexe.
3. Prouver enfin la formule d'Euler en toute généralité.

Remarquons que cette formule assure que toutes les représentations planaires d'un graphe planaire connexe auront le même nombre de faces. Il fait donc sens de parler du nombre de faces d'un graphe planaire connexe sans s'attacher à une représentation planaire particulière.

4. Montrer que, si G est un graphe planaire simple à $s \geq 3$ sommets et a arêtes, alors $a \leq 3s - 6$. Commenter.
5. Le graphe complet à 5 sommets, noté K_5, est-il planaire ?
6. Le problème des trois maisons demande de résoudre le problème suivant. Trois maisons doivent être rattachées à l'aide de conduites à trois entreprises différents, l'une fournissant du gaz, la deuxième de l'eau et la troisième de l'électricité. Est-il possible de faire ces 9 connections sans qu'elle se croisent ?

Problème bonus : Ce problème est complètement indépendant des parties précédentes (mais reste en rapport étroit avec les graphes) et est volontairement non guidé.

On considère une grille carrée de taille $n \times n$ où $n \in \mathbb{N}^\star$. Deux cases de la grille sont considérées comme adjacentes si elle partagent un côté en commun. Chacune des n^2 cases de la grille peut être soit vide, soit occupée par un jeton. Le positionnement des jetons obéit aux règles suivantes :

(1) Si une case est vide, alors au moins une des cases qui lui est adjacente contient un jeton.

(2) Pour toute paire $\{c, c'\}$ de cases contenant un jeton, il existe une suite de cases contenant un jeton commençant à c, finissant à c' et telle que deux cases consécutives de la suite sont adjacentes.

Montrer qu'il y au moins $\frac{n^2-2}{3}$ jetons sur la grille.