3.) $P_1 \times P_2$ Polytop

z.z. $P_1 \times P_2 = \mathrm{conv}\{z_{11}, \ldots, z_{1m}, \ldots, z_{n1}, \ldots, z_{nm}\}$

$\cancel{z_{ij} = (x_i, y_j) \in P_1 \times P_2}$ $\quad P_1 = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$

$P_2 = \mathrm{conv}\{y_1, \ldots, y_M\}$

$\cancel{\text{„}\supseteq\text{" } z \in P_1 \times P_2 \text{ mit } z = (z_1, z_2) \quad z_1 = \sum \lambda \ldots \quad z_2 = \sum_{j=1}^{M+1} \mu_j \, y_j}$

$P_1 \times P_2 = \mathrm{conv}\{(x_i, y_j) \mid 1 \le i \le N \quad 1 \le j \le M\}$

„$\subseteq$" $p \in P_1 \times P_2$

$\Rightarrow \exists \lambda_i \ge 0, \ \mu_j \ge 0 : \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \quad \sum_{j=1}^{M} \mu_j = 1$

$p = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \\ \sum_{j=1}^{M} \mu_j y_j \end{pmatrix}; \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \lambda_i \mu_j \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{j=1}^{M} \mu_j}_{=1} + \sum_{j=1}^{M} \mu_j \begin{pmatrix} 0 \\ y_j \end{pmatrix} \underbrace{\sum \lambda_i}_{=1}$

$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sum \mu_j y_j \end{pmatrix} = p \ \square$

$p \in \mathrm{conv}\{(x_i, y_j) \ldots\}$

„$\supseteq$" $p \in \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \exists \beta_{ij} \quad p = \sum_{i,j=1}^{N,M} \beta_{ij} \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{j=1}^{M} \beta_{ij}}_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{M} \begin{pmatrix} 0 \\ y_j \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \beta_{ij}}_{\alpha_j}$

$= \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} \alpha_i x_i \\ \cancel{\alpha_j y_j} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix} + \sum \alpha_j \begin{pmatrix} 0 \\ y_j \end{pmatrix} \in P_1 \times P_2$

ii) Induktion

$n=1$ $\quad P = [-a, a] \quad a > 0 \Rightarrow 3$ Seiten $\{a\}\ \{-a\}\ [-a, a]$

$n \to n+1$ $\quad P$ Hanner Polytop

$\Rightarrow P^* = P_1 \times P_2$ od. $P = P_1 \times P_2$ $\quad f.\ P_1, P_2$ Han. P.

$\Rightarrow \underline{d_1 = m} \quad \underline{d_2 = n+1-m =: k}$

nach IV $F_1, \ldots, F_{3^m}$ Seiten von P_1 und $G_1, \ldots, G_{3^k}$ Seiten von P_2

Beh. $S = \{F_i \times G_j\}_{i,j}$ Seiten von $P_1 \times P_2$

Bew: $F \times G \in S$ mit Stützhyperebene $H(a, \alpha), H(b, \beta)$

$c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = \langle f, a \rangle + \langle g, b \rangle = \alpha + \beta =: \gamma \quad (f, g) \in F \times G$

$\cancel{f \in x \in F \text{ beliebt}}$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = \quad < \alpha + \beta = \gamma \quad (x, y) \in \cancel{\text{beliebt}}\ (P_1 \times P_2) \setminus (F \times G)$

$\Rightarrow P_1 \times P_2 \subseteq H^-(c, \gamma) \quad H(c, \gamma) \cap P_1 \times P_2 \supseteq F \times G$

$\Rightarrow H(c, \gamma)$ Stützhyperebene von $P_1 \times P_2 \Rightarrow F \times G$ ist Seite von $P_1 \times P_2$

z.z. $\nexists$ weitere Seite.

IA: Sei L eine weitere Seite mit S.H. $H(c, \gamma)$ mit $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$

Es gilt $L \notin S \Rightarrow \nexists \gamma_1, \gamma_2$ s.d. $H(c_1, \gamma_1), H(c_2, \gamma_2)$ S.H. von $P_1 \times P_2$ an den Seiten $F \in P_1 \quad G \subseteq P_2$

oBdA $\Rightarrow \exists$ Seite F von P_1 mit $x \in F$: $\langle x, c_1 \rangle \ \cancel{>} < \langle y_1, c_1 \rangle$ mit $(y_1, y_2) \in L$ $\quad \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$

und

$\Rightarrow \gamma = \langle y, c \rangle = \langle y_1, c_1 \rangle + \langle y_2, c_2 \rangle \ \overset{(*)}{>} \ \langle x, c_1 \rangle + \langle y_2, c_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

aber $\begin{pmatrix} x \\ y_2 \end{pmatrix} \in P \quad x \in F, y_2 \in L|_{P_2} \Rightarrow H(c, \gamma)$ keine SH von $L \Rightarrow L$ keine Seite.

4)) $K^* \cap L = (K|L)^*$, oBdA $0 \in \mathrm{int}\, P$ (4.1. ii2)

iii) P Polytop, $\Rightarrow P^*$ Nach Blatt $\exists$ Simplex $T \in \mathbb{R}^N$

oBdA und $L \subseteq \mathbb{R}^N \cup \mathbb{R}$ s.d. $P^* = T | L$ (Untergraum)

$\Rightarrow P = (P^*)^* = (T|L)^* \underset{T^* \text{ ist Simplex}}{\overset{(i)}{=}} T^* | L$, da T^*

$\square$