WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Diskretisierung elliptischer Steuerungsprobleme

Seminar *Fortgeschrittene Themen der Optimierung*

Sommersemester 2015

Ausarbeitung von Pascal Barallon

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Thema dieser Ausarbeitung ist die Diskretisierung von Optimierungsproblemen, bei denen partielle Differentialgleichungen die Nebenbedingungen bilden. Wir benötigen eine Diskretisierung, um unendlich-dimensionale Optimierungsprobleme numerisch lösen zu können. Wir werden uns bei unserer Betrachtung auf elliptische partielle Differentialgleichungen beschränken, da diese, von einem analytischen Gesichtspunkt betrachtet, hinreichend gut verstanden sind, bzw. die Regularität ihrer Lösung hinreichend gut untersucht ist. Dies erlaubt uns, den Fokus auf die verschiedenen strukturellen Aspekte bei der Diskretisierung zu legen. Grundlage dieser Ausarbeitung bildet im wesentlichen [Hinze u. a. (2009)]. Wir werden im weiterem Verlauf diesen Ausführungen folgen und sie um einige Details ergänzen.

Ein Beispiel für ein elliptisches Steuerungsproblem ist die folgende Situation, die beispielsweise bei der Erwärmung eines Gegenstands mittels elektrischer Induktion oder Mikrowellen auftritt: Wir betrachten eine zu optimierende Temperaturverteilung $y = y(x)$ in Ω, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Ortsgebiet mit Rand $\partial\Omega$ bezeichnet. In diesem Gebiet Ω befindet sich eine Temperaturquelle $u = u(x)$ mit deren Hilfe wir eine vorgegebene stationäre Temperaturverteilung $y_\Omega = y_\Omega(x)$ bestmöglich approximieren wollen; die Temperatur auf dem Rand $\partial\Omega$ sei null. Wir erhalten das Optimierungsproblem

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (y(x) - y_\Omega(x))^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u(x)^2 \mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{rrcll} \text{u.d.N} & -\Delta y & = & \beta u & \text{in } \Omega, \\ & y & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

$$\text{und } u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \text{ in } \Omega.$$

Hierbei ist λ ein Maß für die Kosten der Steuerung und $\beta = \beta(x)$ ein vorgegebener Koeffizient. Durch die Wahl von $\beta = \chi_{\Omega_c}$, wobei χ_{Ω_c} die charakteristischen Funktion auf Ω_c bezeichnet, kann man u auch nur auf einem Teilgebiet $\Omega_c \subset \Omega$ wirken lassen.

Aufgrund des quadratischen Zielfunktionals, der linearen elliptischen partiellen Differentialgleichung in den Nebenbedingungen und der im Ortsgebiet Ω

verteilten Steuerung, bezeichnet man dieses Problem als *linear-quadratisches elliptisches Steuerungsproblem mit verteilter Steuerung.*

2 Theoretische Vorarbeit

Das allgemeinere Steuerungsproblem, welches in dieser Ausarbeitung behandelt wird, lautet

$$(\mathbb{P}) \quad \begin{cases} \min\limits_{(y,u)\in Y\times U} J(y,u) := \frac{1}{2}\|y-z\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2 \\ \\ \text{u.d.N} \quad -\Delta y = Bu \quad \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\quad y = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \text{und} \quad u \in U_{\text{ad}} \subseteq U, \end{cases} \tag{1}$$

mit $\alpha > 0$ konstant, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offene, beschränkte und hinreichend glatte (oder konvexe und polyedrische) Teilmenge, $Y := H_0^1(\Omega)$, dem linearen und stetigen Kontroll-Operator $B : U \to H^{-1}(\Omega) \equiv Y^*$ und der abgeschlossenen und konvexen Teilmenge $U_{ad} \subset U$ des Hilbertraumes U.

Beispiel 2.1 (Beispiel für den Raum der Kontrolle und Kontrolloperator)**.**
$U := L^2(\Omega),\ B : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ Injektion, $U_{\text{ad}} := \{v \in L^2(\Omega); a \le v(x) \le b$ f.ü. in $\Omega\},\ a, b \in L^\infty(\Omega)$.

Probleme der Art (1) haben wir bereits kennengelernt in der Form

$$\begin{aligned} \min_{(y,u)\in Y\times U} \quad & J(y,u) := \frac{1}{2}\|Qy - q_d\|_H^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2 \\ \text{u.d.N} \quad & Ay + Bu = g,\ u \in U_{\text{ad}},\ y \in Y_{\text{ad}}, \end{aligned} \tag{2}$$

mit H, U Hilberträume, Y, Z Banachräume und $q_d \in H$, $g \in Z$, $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $B \in \mathcal{L}(U, Z)$ und $Q \in \mathcal{L}(Y, H)$.

Wir werden nun zwei für das Problem (2) gezeigte Resultate in Erinnerung rufen, die wir Anschluss auf unser Problem (1) anwenden. In Klammern stehen die ursprünglich im Buch [Hinze u. a. (2009)] benutzten Bezeichnungen.

Theorem 2.2 (Theorem 1.43). *Sei das Problem* (2) *gegeben und*

1. $\alpha \geq 0$, $U_{\mathrm{ad}} \subset U$ *konvex, abgeschlossen und im Fall* $\alpha = 0$ *beschränkt,*

2. $Y_{\mathrm{ad}} \subset Y$ *konvex, abgeschlossen und nichtleer,*

3. $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ *habe eine beschränkte Inverse,*

dann besitzt das Problem (2) *eine optimale Lösung* $(\bar{y}, \bar{u})$. *Im Fall* $\alpha > 0$ *ist die Lösung eindeutig.*

Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2 gilt die folgende Bemerkung:

Bemerkung 2.3 (Remark 1.18). $Ay + Bu = g$ impliziert $y = A^{-1}(g - Bu)$ und demnach ist Problem (2) äquivalent zu

$$\min_{u \in U} \hat{J}(u) \quad \text{u.d.N.} \quad u \in \hat{U}_{\mathrm{ad}}$$

mit $\hat{J}(u) = J(A^{-1}(g - Bu), u)$, $\hat{U}_{\mathrm{ad}} = \{u \in U : u \in U_{\mathrm{ad}},\ A^{-1}(g - Bu) \in Y_{\mathrm{ad}}\}$. Dieses Problem hat eine optimale Lösung $\bar{u}$. Setzen wir $\bar{y} = A^{-1}(g - B\bar{u})$, so erhalten wir eine Lösung $(\bar{y}, \bar{u})$ von (2).

Wenden wir diese beiden Resultate auf unser Problem (1) an, so liefert Theorem 2.2 eine eindeutige Lösung $(y, u) \in Y \times U_{\mathrm{ad}}$ und nach Bemerkung 2.3 erhalten wir das äquivalente reduzierte Problem

$$\min_{u \in U_{\mathrm{ad}}} \hat{J}(u), \tag{3}$$

für das reduzierte Funktional

$$\hat{J}(u) := J(y(u), u) \equiv J(SBu, u) \quad \text{für alle } u \in U_{\mathrm{ad}}$$

und dem mit $-\Delta$ assoziiertem Lösungsoperator $S : Y^* \to Y$.
Es gilt

$$J(SBu, u) = \frac{1}{2} \|SBu - z\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \|u\|_U^2, \tag{4}$$

die notwendige Bedingung 1. Ordnung für ein Optimum lautet demzufolge

$$\left\langle \hat{J}'(u), v - u \right\rangle_{U^*,U} \geq 0 \quad \text{für alle } v \in U_{\mathrm{ad}}. \tag{5}$$

Diese Bedingung ist in unserem Fall auch die hinreichende Bedingung, da wir ein konvexes Funktional betrachten. Mit Hilfe der Kettenregel bestimmen wir $\hat{J}'(u)$ als

$$\hat{J}'(u) = \alpha u + B^* S^* (SBu - z) \equiv \alpha u + B^* p \in U^*, \tag{6}$$

mit der adjungierten Variable $p := S^*(SBu - z) \in Y^{**}$. Da Y als H_0^1-Raum reflexiv ist, erfüllt p die adjungierten Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \quad y - z \quad in\ \Omega, \\ p &= \quad 0 \qquad\quad auf\ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{7}$$

3 Angewandte Diskretisierungskonzepte

3.1 Finite-Elemente-Ansatz

Wir werden nun drei verschiedene Diskretisierungskonzepte vorstellen, die das Problem (1) numerisch lösbar machen. Sie alle benutzen einen Finite-Elemente-Ansatz, der auf der folgenden Überlegung beruht:

- Wir zerlegen unser Gebiet Ω in endlich viele Teilgebiete (Elemente), bei ebenen Problemen können dies Dreiecke oder Vierecke sein, bei dreidimensionalen Problemen kommen Tetraeder, Würfel, Quader u.a. in Frage.
- Wir wollen eine Degenerierungen der Struktur für immer kleinere Durchmesser der Gebiete verhindern.
- Wir approximieren dann unsere ursprünglichen Funktionen durch Funktionen, die auf jedem Teilgebiet Polynome sind.

Die ersten zwei Punkte führen nun zu der folgenden Annahme:

Annahme 3.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes, hinreichend glattes Gebiet (oder konvexes und polygonales Gebiet, wenn nur dies erforderlich ist). Es gelte $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{nt} \bar{T}_j$ für eine zulässige quasi-uniforme Folge der Partition $\{T_j\}_{j=1}^{nt}$ von Ω. Quasi-uniform bedeutet in diesem Zusammenhang, dass für $h_{nt} := \max_j \operatorname{diam} T_j$ und $\sigma_{nt} := min_j\{\sup \operatorname{diam} K; K \subseteq Z_j\}$ die Ungleichungen $c \leq \frac{h_{nt}}{\sigma_{nt}} \leq C$ mit positiven Konstanten $0 < c \leq C < \infty$ gelten. Wir setzen zur Abkürzung im weiteren Verlauf $h = h_{nt}$.

Auf Grundlage dieser Annahme werden wir nun mit unseren Diskretisierungkonzepten beginnen.

3.2 Erst Diskretisieren, dann Optimieren

Wir werden nun alle in (1) auftretenden Menge diskretisieren, indem wir sie durch endlich dimensionale Räume ersetzen und die Funktionale, Integrale und Dualitäten entsprechen anpassen. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} W_h :=& \quad \{v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_{T_j} \in \mathbb{P}_k(T_j) \text{ für alle } 1 \leq j \leq nt\} =: \langle \phi_1, \dots, \phi_{ng} \rangle, \\ Y_h :=& \quad \{v \in W_h, v|_{\partial\Omega} = 0\} =: \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle \subseteq Y, \text{ mit } 0 < n < ng, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{P}_k$ den Raum der Polynome bis zum Grad k bezeichnet. Als Approximation für y wählen wir den Ansatz $y_h(x) = \sum_{i=1}^n y_i \phi_i$. Seien $u^1, \dots, u^m \in U$, wir setzten $U_d := \langle u^1, \dots, u^m \rangle$ und $U_{\text{ad}}^d := U_{\text{ad}} \bigcap U_d$. Wir nehmen an, dass U_{ad}^d in der Form

$$U_{ad}^d = \left\{ u \in U; u = \sum_{i=1}^m s_i u^i, s \in S \right\}$$

dargestellt werden kann, wobei $S \subset \mathbb{R}^m$ eine abgeschlossene konvexe Menge bezeichnet. Abschließend definieren wir

$$z_h := I_h z = \sum_{i=1}^{ng} z_i \phi_i$$

mit einem stetigen Interpolationsoperator $I_h : L^2(\Omega) \to W_h$. Wir erhalten unter Benutzung der schwachen Formulierung der Nebenbedingung und der Wahl von Y_h als Testfunktionenraum das Problem

$$
\left(\mathbb{P}_{(h,d)}\right) \quad \begin{cases} \min\limits_{(y_h,u_d)\in Y_h\times U_d} J_{(h,d)}(y,u) := \frac{1}{2}\left\|y_h - z_h\right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\left\|u_d\right\|_U^2 \\ \text{u.d.N} \quad a(y_h, v_h) = \langle Bu_d, v_h\rangle_{Y^*,Y} \quad \text{für alle } v_h \in Y_h, \\ \text{und} \qquad u_d \in U_{\text{ad}}^d \subseteq U_d, \end{cases} \tag{8}
$$

mit $a(y,v) := \int_\Omega \nabla y \nabla v \mathrm{d}x$. Damit die Nebenbedingung für alle Funktionen aus Y_h erfüllt ist, muss sie für alle Basisfunktionen ϕ erfüllt sein. Wir erhalten

$$
a(y_h, \phi_j) = a(\sum_{i=1}^n y_i\phi_i, \phi_j) = \sum_{i=1}^n y_i \underbrace{a(\phi_i, \phi_j)}_{=:a_{ij}},
$$

$$
\langle Bu_d, \phi_j\rangle_{Y^*,Y} = \langle B \textstyle\sum_{i=1}^m s_i u^i, \phi_j\rangle_{Y^*,Y} = \textstyle\sum_{i=1}^m s_i \underbrace{\langle Bu^i, \phi_j\rangle_{Y^*,Y}}_{=:e_{ij}}
$$

und somit für $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ und $s = (s_1, \ldots, s_m)^T$ die Gleichungssysteme

$$
Ay = Es
$$

mit der Steifheitsmatrix $A := (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und der Matrix $E := (e_{i,j})_{i=1,\ldots,n;j=1,\cdots,m}$.

Mit der Finite-Elemente-Masse-Matrix $M := (m_{ij})_{i,j=1}^{ng}$, $m_{ij} := \int_\Omega \phi_i\phi_j \,\mathrm{d}x$ und der Steuerungs-Masse-Matrix $F := (f_{ij})_{i,j=1}^m$, $f_{ij} := (u^i, u^j)_U$ erhalten wir aus (8) das endlich dimensionale Optimierungsproblem mit quadratischer Zielfunktion und linearer Gleichheitsrestriktion

$$
\left(\mathbb{P}_{(n,m)}\right) \quad \begin{cases} \min\limits_{(y,s)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \mathfrak{J}_{(y,s)}(y,u) := \frac{1}{2}(y-z)^t M(y-z) + \frac{\alpha}{2}s^t F s, \\ \text{u.d.N } Ay = Es \text{ und } s \in S, \end{cases} \tag{9}
$$

bei der die Zulässigkeit durch die abgeschlossene, konvexe Menge $S \in \mathbb{R}^m$ bestimmt wird. Hierbei ist die Matrix A symmetrisch, positiv definit und somit invertierbar. Wir können demzufolge äquivalent zu $(\mathbb{P}_{(n,m)})$ das reduzierte Funktional $\hat{\mathfrak{J}}(s) := \mathfrak{J}(A^{-1}Es, s)$ auf der Menge S minimieren. Wir erhalten eine eindeutige Lösung $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times S$, die durch die endlich-dimensionale

Variationsungleichung

$$(\hat{\mathfrak{J}}(s), t - s)_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \text{für alle } t \in S \tag{10}$$

mit $\hat{\mathfrak{J}}'(s) = \alpha F s + E^t A^{-t} M(A^{-1}Es - z) \equiv \alpha F s + E^t p$ beschrieben wird. $p := A^{-t}M(A^{-1}Es - z)$ beschreibt hier den diskreten adjungierten Vektor, welchen wir mit der Variablen $p_h := \sum_{i=1}^{n} p_i \phi_i$ assoziieren. Das Problem $(\mathbb{P}_{(n,m)})$ kann nun numerisch gelöst werden, indem die bereits vorgestellten Verfahren angewandt werden.

Bemerkung 3.2. Bei der *Erst Diskretisieren, dann Optimieren* Methode ist die Diskretisierung der adjungierten Variablen p vorgegeben durch den Ansatz für den diskretisierten Zustand y_h.

3.3 Erst Optimieren, dann Diskretisieren

Eine alternative Methode benutzt die notwendige Bedingung erster Ordnung (5) und die adjungierten Gleichungen (7) als Ausgangspunkt für die Diskretisierung des Problems (1). Wir erhalten

$$(\mathbb{OS}) \begin{cases} -\Delta y = Bu & \text{in } \Omega, \\ y = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ -\Delta p = y - z & \text{in } \Omega, \\ p = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \\ \langle \alpha u + B^* p, v - u \rangle_{U^*,U} \geq 0 & \text{für alle } v \in U_a d. \end{cases} \tag{11}$$

Wir nutzen die gleiche Diskretisierung des Zustandes y, der Kontrolle u und der Funktionale, Integrale und Dualitäten wie im vorherigen Abschnitt. Aber im Unterschied zu der *Erst Diskretisieren, dann Optimieren* ist nun die Diskretisierung der adjungierten Variablen p frei wählbar.Wir wählen stetige Finite-Elemente der Ordnung l,

$$p_h(x) = \sum_{i=1}^{q} p_i \chi_i(x),$$

mit $\langle \chi_1, \ldots, \chi_q \rangle \subset Y$.

Das diskretisierte Problem lautet nun

$$(\mathbb{OS})_{(n,q,m)} \begin{cases} Ay = Es, \\ \tilde{A}p = T(y - z), \\ (\alpha Fs + \tilde{E}^t p, t - s)_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \text{für alle } t \in S, \end{cases} \tag{12}$$

mit der adjungierten Steifheitsmatrix

$$\tilde{A} := (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^q, \ \tilde{a}_{ij} := a(\chi_i, \chi_j),$$

der Matrix

$$\tilde{E} := (\tilde{e}_{ij})_{i=1,\ldots,q; j=1,\ldots,m}, \ \tilde{e}_{ij} = \langle Bu^j, \chi_i \rangle_{Y^*, Y},$$

und der Matrix

$$T := (t_{i,j})_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,q}, t_{ij} := \int_\Omega \phi_i \chi_j \mathrm{d}x.$$

Da die Matrizen A und $\tilde{A}$ positiv definit sind, ergibt sich wiederum eine eindeutige Lösung, die durch die Variationsungleichung

$$(\alpha Fs + \tilde{E}^t \tilde{A}^{-1} T(A^{-1}Es - z), t - s)_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \text{ für alle } t \in S, \tag{13}$$

beschrieben wird.

Ein Beispiel für die Diskretisierung mit der *Erst Optimieren, dann Diskretisieren* Methode ist das folgende

Beispiel 3.3. $U := L^2(\Omega), B : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ injektiv, $U_{\text{ad}} := \{v \in L^2(\Omega); a \leq v(x) \leq b \textit{ f. ü. in } \Omega\}$, $a, b \in L^\infty(\Omega)$. Sei $k = l = 1$ (lineare Finite-Elemente für y und p),$U_d := \langle u^1, \ldots, u^{nt} \rangle$, wobei $u^k|_{T_j} = \delta_{ki}(k, i = 1, \ldots, nt)$ stückweise konstante Funktionen, $S := \prod_{i=1}^{nt} [a_i, b_i]$ wobei $a_i := a(barycenter(t_i))$; $b_i := b(barycenter(T_i))$.

Es gibt kein generelles Konzept, welches der beiden vorgestellten Verfahren zu bevorzugen ist, jedoch kann man sagen, dass die Kontrollen konservativ diskretisiert werden sollten. Die Relation zwischen dem adjungiertem Zustand und der Kontrolle, gegeben durch die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung, muss beachtet werden. Dies kann man anhand der folgenden Überlegung sehen: Setzen wir in Problem (1) $U_{\text{ad}} \equiv U$, betrachten also ein Optimierungsproblem ohne Bedingungen an die Kontrolle, dann lautet die notwendige Bedingung erster Ordnung

$$\hat{J}'(u) = \alpha u + B^* S^* (SBu - z) \equiv \alpha u + B^* p = 0 \quad \text{in } U^*. \tag{14}$$

Wählen wir nun unsere Räume und Operatoren wie im folgenden Beispiel,

Beispiel 3.4. $U := L^2(\Omega)$, $B : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $U_{\text{ad}} := \{v \in L^2(\Omega);\ a \leq v(x) \leq b \text{ f.ü. in } \Omega\}$, $a, b \in L^\infty(\Omega)$,

dann gilt $B^* : H^{-1}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ und somit für (14)

$$\hat{J}'(u) = \alpha u + p = 0 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Diese Identität soll auch auf dem diskreten Level erhalten bleiben. Die gleiche Argumentation behält auch bei Bedingungen an die Kontrolle ihre Gültigkeit. Um dies zu sehen, führen wir das folgende Lemma ein:

Lemma 3.5 (Lemma 1.11)**.** *Sei W ein Hilbertraum, $C \subset W$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Sei P die Projektion auf C. Dann sind für alle $y \in W$ und alle $\gamma > 0$, die folgenden Bedingungen äquivalent:*

$$\begin{aligned} w \in C, \qquad (y, v - w)_W &\geq 0 \quad \forall v \in C. \\ w - P(w - \gamma y) &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten als notwendige Bedingung erster Ordnung für unser Problem (1) in der Situation von Beispiel 3.4

$$\begin{aligned} (\hat{J}'(u), v - u)_{L^2(\Omega)} &\geq 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega), \\ \Leftrightarrow \quad u - P_{U_{ad}}(u - \sigma \hat{J}'(u)) &= 0, \\ \Leftrightarrow \quad u - P_{U_{ad}}(u - \sigma(\alpha u + p)) &= 0. \end{aligned}$$

Für $\sigma = \frac{1}{\alpha}$ ergibt

$$u = P_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\alpha} p\right) \quad \text{in } L^2(\Omega), \tag{15}$$

mit der orthogonalen Projektion in U (hier = $L^2(\Omega)$) auf die zulässige Kontrollmenge.

3.4 Das variationelle Diskretisierungskonzept

Ausgangspunkt für unser drittes Konzept ist die folgende Beobachtung: Ersetzen wir in Gleichung (15) die adjungierte Variable p durch seine Finite-Elemente-Approximation p_h, so erhalten wir, unter der Voraussetzung, dass sich die orthogonale Projektion $P_{U_{ad}}$ exakt am Computer bestimmen lässt, einen Ausdruck für u, ohne die Kontrolle explizit zu diskretisieren.

Wir definieren das diskrete reduzierte Funktional

$$\hat{J}_h(h) := J(S_h Bu, u), \quad u \in U, \tag{16}$$

und betrachten das unendlich dimensinale Optimierungsproblem

$$(\mathbb{P}_h) \quad = \min_{u \in U_{\mathrm{ad}}} \hat{J}_h(u). \tag{17}$$

Wie unser reduziertes Ausgangsproblem (3) besitzt auch dieses Problem eine eindeutige Lösung $u_h \in U_{\mathrm{ad}}$, welche durch die Variationsungleichung

$$\langle \hat{J}_h'(u_h), v - u_h \rangle_{U^*,U} \geq 0 \quad \text{für alle } v \in U_{\mathrm{ad}} \tag{18}$$

charakterisiert wird. Wir verwenden nun die durch den Darstellungssatz von Riesz gegebene Inverse $R : U^* \to U$ des Isomorphismus zwischen U und U^* zusammen mit Lemma 3.5 und erhalten die äquivalente Gleichung

$$G_h(u) := u - P_{U_{\mathrm{ad}}}(u - \sigma R \hat{J}_h'(u) = 0 \ \text{ in } U, \tag{19}$$

mit

$$\hat{J}_h'(u) = \alpha u + B^* S_h^*(S_h Bu - z) \equiv \alpha u + B^* p_h(u).$$

Damit folgt

$$u - P_{U_{\mathrm{ad}}}(u - \sigma(\alpha u + RB^* p_h) = 0 \ \text{ in } U$$

und wir erhalten für $\sigma = \frac{1}{\alpha}$ die Gleichung

$$0 = G_h(u) = u - P_{U_{\mathrm{ad}}}\left(-\frac{1}{\alpha} RB^* p_h\right) \quad \text{in } U. \tag{20}$$

Wir können dies als Fixpunktiteration mit folgendem Algorithmus auffassen:

Algorithmus 3.6.

- $u \in U$ gegeben,
- do $u^+ = P_{U_{\mathrm{ad}}}\left(-\frac{1}{\alpha} RB^* p_h(u)\right)$, $u = u^+$ bis zur Konvergenz

mit $p_h(u) = S_h^*(S_h Bu - z)$.

Bemerkung 3.7. In diesem Algorithmus werden der Zustand und der adjungierte Zustand diskretisiert, nicht aber die Kontrolle. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von Algorithmus 3.6 ist gegeben durch $\alpha > \left\| B^* S_h^* S_h B \right\|_{\mathcal{L}(U,U^*)}$.

Abschließend betrachten wir nun die folgende Fehlerabschätzung für das variationelle Diskretisierungskonzept:

Theorem 3.8 (Theorem 3.4)**.** *Sei u die eindeutige Lösung des reduzierten Problems* (3) *und u_h die eindeutige Lösung des Problems* (17)*. Dann gilt die Abschätzung*

$$\begin{aligned}\alpha \left\| u - u_h \right\|_U^2 + \tfrac{1}{2} \left\| y(u) - y_h(u_h) \right\|_{L^2}^2 \leq\ & \langle B^*(p(u) - \bar{p}_h(u)), u_h - u \rangle_{U^*,U} \\ & + \tfrac{1}{2} \left\| y(u) - y_h(u) \right\|_{L_2}^2,\end{aligned}$$

mit $\bar{p}_h(u) := S_h^*(SBu - z)$, $y_h := S_h Bu$ und $y(u) := SBu$.

Beweis. Das Optmierungsproblem (17) ist definiert auf U_{ad}, somit stellt die eindeutige Lösung u von (3) eine zulässige Testfunktion in der Variationsungleichung (18) dar. Dies ist anders, wenn der Krontrollraum U expliziert diskretisiert wird. Wir können dann nur erwarten, dass u_h eine zulässige Testfunktion für das stetige Problem ist. Testen wir (18) mit u und (5) mit u_h und addieren die beiden Variationsungleichungen, dann erhalten wir

$$\langle \alpha(u-u_h) + B^* \underbrace{S^*(SBu-z)}_{=p(u)} - B^* \underbrace{S_h^*(S_hBu_h-z)}_{=p_h(u_h)},\ u_h-u\rangle_{U^*,U} \geq 0.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\alpha \|u-u_h\|_U^2 \leq \langle B^*(p(u)-\bar{p}_h(u)) + B^*(\bar{p}_h(u)-p_h(u_h)), u_h-u\rangle_{U^*,U},$$

wobei wir hier eine Null addiert haben. Wir konzentrieren uns nun auf den zweiten Teil auf der rechten Seite, $\langle B^*(\bar{p}_h(u)-p_h(u_h)), u_h-u\rangle_{U^*,U}$, benutzen im zweiten Schritt die Zustandsgleichungen $a(y_h(u_h),\vartheta) = \langle Bu_h,\vartheta\rangle$, $a(y_h(u),\vartheta) = \langle Bu,\vartheta\rangle$ und im dritten die adjungierten Gleichungen $a(\vartheta,\bar{p}_h(u)) = \int_\Omega \nabla\vartheta\nabla\bar{p}_h(u)\mathrm{d}x = \int_\Omega \vartheta(y(u)-z)\mathrm{d}x$ und $a(\vartheta,p_h(u_h)) = \int_\Omega \nabla\vartheta\nabla p_h(u_h)\mathrm{d}x = \int_\Omega \vartheta(y_h(u_h)-z)\mathrm{d}x$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\langle B^*(\bar{p}_h(u)-p_h(u_h)), u_h-u\rangle_{U^*,U}\\
&\quad= \langle \bar{p}_h(u)-p_h(u_h), B(u_h-u)\rangle_{Y,Y^*}\\
&\quad= a(y_h(u_h)-y_h(u), \bar{p}_h(u)-p_h(u_h))\\
&\quad= \int_\Omega (y_h(u_h)-y_h(u))(y(u)-y_h(u_h))\mathrm{d}x\\
&\quad= \int_\Omega (y_h(u_h)-y_h(u))(y(u)-y_h(u_h)) - y(u)^2 + y(u)^2\mathrm{d}x\\
&\quad= -\|y_h(u_h)\|_{L^2}^2 + \underbrace{\int_\Omega (y(u)-Y_h(u_h))(y(u)-y_h(u))\mathrm{d}x}_{\leq \frac{1}{2}\|y(u)-y_h(u_h)\|_{L^2}+\frac{1}{2}\|y(u)-y_h(u)\|_{L^2}}\\
&\quad\leq -\frac{1}{2}\|y_h(u_h)-y(u)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|y(u)-y_h(u)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.9. Theorem 3.8 liefert uns eine Fehlerabschätzung $\|u-u_h\|_U$ für den Fall, dass eine Fehlerabschätzung für $\|RB^*(p(u)-\bar{p}_h(u))\|_U$ und für den Finite-Elemente-Fehler $\|y(u)-y_h(u)\|_{L^2(\Omega)}$ vorhanden ist.

Literatur

[Braess 2007] Braess, D.: *Finite Elemente - Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie.* 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin u.a. : Springer, 2007

[Hinze 2003] Hinze, M.: *A generalized discretization concept for optimal control problems with control constraints.* Preprint MATH-NM-02-2003. Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden, 2003

[Hinze u. a. 2009] Hinze, M. ; Pinnau, R. ; Ulbrich, M. ; Ulbrich, S: *Optimization with PDE Constraints.* Dordrecht u.a. : Springer, 2009

[Tröltzsch 2009] Tröltzsch, F.: *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen - Theorie, Verfahren und Anwendungen.* 2. überarbeitete Auflage. Wiesbaden : Vieweg-Teubner, 2009