

MOR - Verständniszusammenfassung

9. März 2016

1 Einführung

Das Ziel von MOR ist es, Systeme großer Ordnung zu reduzieren. Wir wollen zum Originalsystem ähnliche Systeme finden, die fast die gleichen Eigenschaften haben, wie das Originalsystem. Das neue System soll von niedriger Ordnung sein und ist deshalb einfacher zu berechnen. Auch die Lösung, also die Zustandsfunktion und der gesuchte Output, sollen sehr ähnlich sein.

Dazu betrachten wir zunächst die explizite Lösung des Originalsystems. Sowohl die Zustandsfunktion als auch der Output enthalten Matrixexponentiale. Diese brauchen gerade bei großer Ordnung sehr lange in der Berechnung. Nun probieren wir das System anders darzustellen, damit wir kein Matrixexponential mehr berechnen müssen.

1.1 Impulse Response

In diesem Kapitel betrachten wir als Input die Dirac Delta Funktion und fordern eine 0 Anfangsbedingung. Dabei finden wir heraus, dass die explizite Lösung für den Output sehr viel einfacher ist und nun kein Integral mehr enthält. Außerdem finden wir heraus, dass die Lösung dieses Systems mit Lösungen beliebiger Input Funktionen zusammenhängt: Die Faltung von „Impulseresponse“ mit dem auf 0 fortgesetzten Input ergibt die Lösung für das LTI System mit beliebigen Input.

1.2 Frequency domain

Wir wenden auf das LTI System die Laplace Transformation an und erhalten eine andere explizite Lösung, die nun ohne Matrixexponential auskommt. Da wir von jetzt an nur Systeme mit 0 Anfangsdaten betrachten, ist der Laplace transformierte Output die sogenannte Transfer Funktion mit dem laplace transformierten Input. Um nachher zu überprüfen, ob unser neues reduziertes System gut ist, müssen wir daher ab jetzt immer die Transfer Funktion betrachten. Aus dem Laplace transformierten System können wir den Output des original Systems ablesen. Dieses ist einfach die Transfer Funktion mal dem Input.

1.3 realization

Dieses Kapitel setzt sich mit der Transfer Funktion und deren Realisierung auseinander. Realisierungen sind unterschiedliche Darstellungen von einer Transfer Funktion. Falls zwei Realisierungen gleich sind, haben sie die gleiche Transfer Funktion. Die Eigenschaften einer Transfer Funktion sind:

- die Transfer Funktion ist proper d.h. der Limes gegen unendlich existiert
- jeder Pol der Transfer Funktion ist ein Eigenwert von der Matrix A
- äquivalente Realisierungen haben die selbe Transfer Funktion
- jede rationale Matrix Funktion, die proper ist, hat eine Realisierung.

1.4 Controlability and observability

Zunächst wird der Begriff controlable eingeführt. Dieser besagt, dass für jeden Anfangs- und Endzustand eine Input Funktion gefunden werden kann, die das LTI System erfüllt. Controlability hängt nur von den Matrizen A und B der Transfer Funktion ab.

Nun wollen wir herausfinden, ob das gegebene System controlable ist. Dazu gibt es viele unterschiedliche Methoden u.a. den Hautustest oder das Kalman Kriterien.

Eine andere Eigenschaft von einem LTI System ist es, observable zu sein. Dieses mal haben wir den Input festgelegt und betrachten das System mit unterschiedlichen State, Output und Anfangszuständen. Observable besagt nun, dass wenn beide System den gleichen Output liefern, muss auch schon der Anfangszustand gleich gewesen sein. Observability hängt nur von den Matrizen A und C ab.

Diese beiden Eigenschaften sind später sehr wichtig, wenn wir ein System reduzieren wollen. Das grundlegende Verfahren wird es sein, nicht controlable/observable states zu streichen und später sogar welche, die nur schwer zu observable oder reachable sind.

1.5 Uniqueness of realizations and the relation between controlability, observability and minimal realizations

Zunächst stellen wir fest, dass die Realisierung eines Systems minimal ist, gdw es observable und controlable ist.

Da wir ein Minimales System erhalten wollen (wir wollen es ja in der Ordnung reduzieren) und observable und controlable sehr gute Eigenschaften für unser System sind, wollen wir das System in unterschiedliche Teile (die observable/ controlable bzw. dies nicht sind) trennen.

Die Kalman controlable Komposition besagt, dass wir das System in einem controlable und nicht controlable teil aufspalten können, indem wir die Matrizen des LTI Systems mit einer orthogonalen Matrix multiplizieren. A wird eine

untere Dreiecksmatrix und B hat unten eine 0 Matrix. Nun hat die Matrix A einen controlable Teil und einen nicht controlable Teil

Durch das Gleiche Vorgehen erhalten wir auch einen observable und nicht observablen Teil. Hier wird natürlich nicht B sondern C verändert.

Vereinigt man beide compositions, kommt man zur Kalman decomposition. Dadurch können wir explizit in der Matrix A aufteilen, welcher Teil (nicht) controlable bzw (nicht) observable ist.

Als letzten Schritt wollen wir die nicht observable und nicht controlablen Teile des Systems loswerden. Dies passiert später.

Die letzte Eigenschaft ist, dass zwei minimale Realisierungen äquivalent sind.

1.6 Stability

Der Begriff Lyapunov stabil besagt, dass falls von einem System die Anfangswerte nicht zu weit voneinander entfernt sind, auch für jeden weiteren Zeitpunkt die Werte nicht stark voneinander abweichen.

Asymptotisch stabil heißt, dass das System Lyapunov stabil ist und zusätzlich für $t \rightarrow \infty$ die Systeme gleich werden.

Wir wollen, dass Systeme stabil sind. Um herauszufinden, ob sie es sind, gibt es ein Eigenwert Kriterium. Da früher (heute nicht mehr) es sehr schwierig war, Eigenwerte zu berechnen, wollte man ein anderes Kriterium haben.

Dazu ist die Lyapunov Gleichung sehr nützlich. Sie lautet: $A^T X + X A = -W$. Die Matrix A ist a-stabil gdw ein spd W existiert, sodass die Lyapunov Gleichung eine spd Lösung hat. Also kann man durch lösen der Lyapunov Gleichung herausfinden, ob ein System A stabil ist.

Betrachten wir nun eine besondere Lyapunov Gleichung. Statt W setzen wir $C^T C$ ein. Falls es so ein C gibt, sodass das System eine Spd Lösung hat, ist A L-Stabil. In diesem Fall ist A sogar a-stabil gdw (A,C) controlable ist.

1.7 Norms

Wir wollen die H_∞ Norm von der Transfer Funktion herausfinden. Warum? Damit wir das reduzierte System mit dem nicht reduzierten System vergleichen können. Warum H_∞ Norm? Dieses lässt sich darstellen mit dem State und dem Input., bzw mit der observability Grammian und B oder mit der controlability Grammian Q und C. Eine Abschätzung für die Norm liefert die Norm von der Matrix D.

2 Modal truncation

Wir suchen eine Modal truncation. Dazu müssen wir die Matrix A diagonalisieren und können dann mittels eines äquivalenten Systems das reduzierte System finden. Dieses hat die gleichen Eigenschaften bzg Stabilität, observability und controlability.

Nun ist wichtig, wie gut diese Reduktion ist. Der Abstand beider Systeme hängt von dem Realteil der Eigenwerte und den reduzierten Matrizen B und C ab.

Leider gibt es bei diesem Vorgehen ein paar Probleme: Das System könnte komplex werden, was nicht gewünscht ist. Außerdem kann es gut sein, dass das neue System nicht viel kleiner ist, als das ursprüngliche, falls nur ein kleiner Fehlerterm gewünscht ist.

3 Balancing

3.1 Energy considerations

Also brauchen wir eine neue Idee: Es werden nicht die states weggeworfen, die nicht observable/ controlable sind, sondern solche, die nur schwer controlable / observable sind. Dazu definieren wir uns die Input/ Output Energie:

Die Input Energie beschreibt die minimale Energie, die benötigt wird, um das LTI System vom Status 0 (bei $-\infty$) auf dem Status x_0 (bei 0) zu bringen.

Die Output Energie beschreibt, wie viel Output über der gesamten Zeit bei einem Input von 0 herauskommt.

Damit wir die Input Energie besser berechnen können, suchen wir eine neue Darstellung. Dieses lässt sich durch den Anfangszustand und der controllability grammian beschreiben. Für den Output das gleiche, nur mit observability grammian.

Durch diese Beschreibung finden wir heraus, dass der Vektor, der am einfachsten to reach ist, der Eigenvektor von P zum größten Eigenwert ist. Genau das gleiche für einfach zu observe.

Die Idee für die truncation ist es nun, den Stat in der Eigenvektorbasis vom controllability grammian P darzustellen und dann die schwierig reach states wegzuworfen. Das gleiche für schwer zu observe.

Das Problem ist, dass teilweise Gegensätzliche Ergebnisse dabei herauskommen. Das ganze wäre einfacher, falls $P=Q$ gelten würde. Dazu betrachten wir Balanced Systems.

3.2 Balanced Systems

Bei einem balanced System sind controllability und observability grammian identisch und diagonal. Jedes System, das a-stabil, observable und controlable ist, ist äquivalent zu einem balanced System.