Gâteaux- und Fréchet Differenzierbarkeit

Grunddefinitionen

Definition 1.29

Sei $F : U \subset X \to Y$ ein Operator mit Banachräumen X, Y und $U \neq \emptyset$ offen.

1. Gerichtet differenzierbar in x:
   Der Limes $dF(x,h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(x+th)-F(x)}{t} \in Y$ existiert $\forall h \in X$.
2. Gâteaux Differenzierbar in x: Gerichtet Differenzierbar und die gerichtete Ableitung $F'(x) : X \ni h \mapsto dF(x,h) \in Y$ ist beschränkt und linear.
3. Fréchet Differenzierbar in x: Gâteaux Differenzierbar und $\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y = o(\|h\|_X)$ für $\|h\|_X \to 0$.
4. F wird gerichtet-/F-/G-Differenzierbar auf $V \subset U$ offen genannt, falls F gerichtet-/F-/G-Differenzierbar ist in jedem $x \in V$.

Falls F G-Differenzierbar ist in einer Umgebung V von x und $F' : V \to \mathcal{L}(X,Y)$ auch G-Differenzierbar ist in x, dann nennt man F zweimal differenzierbar in x. Man schreibt $F''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$.
Ist F F-Differenzierbar in x, dann ist F stetig in x.

Regeln zu Gâteaux- und Fréchet Differenzierbarkeit

1. Die Ketten- und Produktregel gilt sowohl für Gâteaux- als auch für Fréchet Differenzierbare Funktionen.
2. Sei F G-Differenzierbar in einer Umgebung von x und F' stetig in x, dann ist F F-Differenzierbar in x.
3. Sei $F : X \times Y \to Z$ F-Differenzierbar in (x,y), dann sind $F(.,y)$ und $F(x,.)$ F-Differenzierbar in x und y. Diese Ableitungen heißen partielle Ableitungen und man bezeichnet sie mit $F_x(x,y)$ und $F_y(x,y)$. Dabei gilt $F'(x,y)(h_x,h_y) = F_x(x,y)h_x + F_y(x,y)h_y$.
4. Sei F G-Differenzierbar in einer Umgebung V von x, dann gilt für alle $h \in X$ mit $\{x+th : t \in [0,1]\} \subset V$:
   $$\|F(x+h) - F(x)\|_Y \leq \sup_{0<t<1} \|F'(x+th)h\|_Y$$
   Sei $t \in [0,1] \mapsto F'(x+th)h \in Y$ stetig, dann gilt: $F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th)hdx$.

Satz über implizite Funktionen

Für Optimierungs-Probleme mit der Bedingung $e(y,u) = 0$ ist es häufig so, dass $e : Y \times U \to Z$ stetig F-Differenzierbar ist und $e_y(y,u) \in \mathcal{L}(Y,Z)$ ein beschränktes Inverses hat.

Satz über implizite Funktionen

Seien X, Y, Z Banachräume und sei $F : G \to Z$ eine stetig F-Differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge $G \subset X \times Y$ nach Z. Sei $(\bar{x}, \bar{y}) \in G$ sodass $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ und dass $F_y(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{L}(Y, Z)$ ein beschränktes Inverses hat. Dann existiert eine offene Umgebung $U_X(\bar{x}) \times U_Y(\bar{y}) \subset G$ von $(\bar{x}, \bar{y})$ und eine eindeutige stetige Funktion $\omega : U_X(\bar{x}) \to Y$, sodass

1. $\omega(\bar{x}) = \bar{y}$
2. $\forall x \in U_X(\bar{x}) \exists! y \in U_Y(\bar{y}$ mit $F(x, y) = 0$, genannt $y = \omega(x)$

Zudem ist die Abbildung $\omega : U_X(\bar{x}) \to Y$ stetig F-Differenzierbar mit der Ableitung $\omega'(x) = F_y(x, \omega(x))^{-1} F_x(x, \omega(x))$. Falls $F : G \to Z$ m-mal stetig F-Differenzierbar ist, so ist auch $\omega : U_X(\bar{x}) \to Y$ m-mal stetig F-Differenzierbar.

1.3.1.1 Schwache Lösungen der Poissongleichung

$$\begin{aligned} \text{Poissongleichung:} \quad & -\Delta y = f \quad \text{auf } \Omega \\ \text{Dirichletbedingung:} \quad & y = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

Problem: f muss nicht stetig sein, aber eine klassische Lösung $y \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ existiert bisher nur für stetige f.

$$\begin{aligned} -\Delta y = f \quad & | \text{ multipliziert mit } v \in C_c^\infty(\Omega) \\ \Leftrightarrow -\Delta y v = f v \forall v \in C_c^\infty(\Omega) \quad & | \text{ integriert über } \Omega \\ \Leftrightarrow -\int_\Omega \Delta y v dx = \int_\Omega f v dx \forall v \in C_c^\infty(\Omega) & \end{aligned}$$

1. Greensche Formel: $-\int_\Omega y_{x_i x_i} v dx = \int_\Omega y_{x_i} v_{x_i} dx - \int_{\partial\Omega} y_{x_i} v \nu_i dS(x)$.
Da $v \mid_{\partial\Omega} = 0$ ist $\int_{\partial\Omega} y_{x_i} v \nu_i dS(x) = 0$, also $-\int_\Omega y_{x_i x_i} v dx = \int_\Omega y_{x_i} v_{x_i} dx$ und somit $-\int_\Omega \Delta y v dx = \int_\Omega \nabla y \nabla v dx$.
Also gilt $\int_\Omega \nabla y \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$.

Lemma 1.7

Die Abbildung $g : (y, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto a(y, v) := \int_\Omega \nabla y \nabla v dx \in \mathbb{R}$ ist bilinear und beschränkt.
Die Abbildung $\bar{g} : v \in H_0^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega f v dx \in \mathbb{R}$ ist für $f \in L^2(\Omega)$ linear und beschränkt.

Beweis:

g ist bilinear: Seien $v, y, z \in H_0^1(\Omega^2), b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (by + cz, v) \mapsto a(by + cz, v) &= \int_\Omega \nabla(by + cz) \nabla v dx \\ = \int_\Omega (\nabla by + \nabla cz) \nabla v dx &= b \int_\Omega \nabla y \nabla v dx + c \int_\Omega \nabla z \nabla v dx \\ b(y, v) + c(z, v) \mapsto ba(y, v) + ca(z, v) &= b \int_\Omega \nabla y \nabla v dx + c \int_\Omega \nabla z \nabla v dx \end{aligned}$$

g ist beschränkt:

$$|a(y,v)| \le \int_\Omega |\nabla y(x) \nabla v(x)| dx \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \int_\Omega \|\nabla y\|_2 \|\nabla v\|_2 dx$$
$$\le \| \|\nabla y\|_2 \|_{L^2} \| \|\nabla v\|_2 \|_{L^2} = |y|_{H^1} |v|_{H^1} \le \|y\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$\bar{g}$ ist linear: Seien $v, w \in H_0^1$.

$$(av + bw) \mapsto \int_\Omega f(av + bw) dx = a \int_\Omega fv dx + b \int_\Omega fw dx$$
$$av + bw \mapsto a \int_\Omega fv dx + b \int_\Omega fw dx$$

$\bar{g}$ ist beschränkt:

$$|g'(v)| \le \int_\Omega |fv| dx \le \|fv\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Schwache Lösung der Poissongleichung mit Dirichletbedingung

Eine Schwache Lösung der Poissongleichung mit Dirichletbedingung ist eine Funktion $y \in H_0^1(\Omega)$ die der Gleichung $\int_\Omega \nabla y \nabla v dx = \int_\Omega fv dx \forall v \in H_0^1(\Omega)$ genügt.

Im Folgenden sei:

$$V = H_0^1(\Omega)$$
$$a(y,v) = \int_\Omega \nabla v \nabla y dx$$
$$F(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}$$

Also gilt $\quad a(y,v) = F(v) \forall v \in V$.

Bemerkung 1.10

Da $a(y,.) \in V^* \forall y \in V$ und $y \mapsto a(y,.) \in V^*$ stetig und linear ist, existiert ein beschränkter linearer Operator $A : V \to V^*$ mit
$a(y,v) = \langle Ay, v \rangle_{V^*,V} (= (Ay)(v)) \forall y, v \in V$.

Lax-Milgram-Lemma

Sei a ein reeller Hilbertraum mit dem inneren Produkt $(.,.)_V$. Dann hat für jede beschränkte lineare Funktion $F \in V^*$ die Gleichung $a(y,v) = F(v)$ eine eindeutige Lösung $y \in V$. Zudem genügt y $\|y\|_V \le \frac{1}{\beta_0} \|F\|_{V^*}$. Insbesondere genügt A aus Bemerkung 1.10 $A \in L(V, V^*), A^{-1} \in L(V^*, V), \|A^{-1}\|_{V^*,V} \le \frac{1}{\beta_0}$.

Existenz und Eindeutigkeit des Dirichletproblems

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist a beschränkt und $H_0^1(\Omega)$-koerziv und A hat ein beschränktes Inverses. Insbesondere hat die Poissongleichung eine eindeutige schwache Lösung gegeben durch $a(y,v) = F(v) \forall v \in V$, welche $\|y\|_H^1(\Omega) \le C_D \|f\|_{L^2(\Omega)}$ genügt, wobei C_D von Ω, aber nicht von f abhängt.

1.3.1.2 Schwache Lösung mit RobinBedingung

$$-\Delta y + c_0 y = f \quad \text{auf } \Omega \tag{1}$$

$$\text{Robin-Bedingung: } \frac{\partial y}{\partial \nu} + \alpha y = g \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{2}$$

Wobei $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$ gegeben sind und $c_0 \in L^\infty(\Omega), \alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$ nicht negativ.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (-\Delta y + c_0 y) v dx \\ &\overset{1. Greensche Formel}{=} \int_\Omega \nabla y \nabla v dx + (c_0 y, v)_{L^2(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \nu} dS(x) \\ &\overset{Robin-Bedingung}{=} \int_\Omega \nabla y \nabla v dx + (c_0 y, v)_{L^2(\Omega)} + (ay, v)_{L^2(\Omega)} - (g, v)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Also:

$$\int_\Omega \nabla y \nabla v dx + (c_0 y, v)_{L^2(\Omega)} + (ay, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} + (g, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

Schwache Lösung mit Robin-Bedingung

Eine schwache Lösung der Robinbedingung ist eine Funktion $y \in H^1(\Omega)$, die (1) genügt.

Im Folgenden sei:

$$V = H^1(\Omega)$$

$$a(y, v) = \int_\Omega \nabla y \nabla v dx + (c_0 y, v)_{L^2(\Omega)} + (ay, v)_{L^2(\Omega)} \quad y, v \in V$$

$$F(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} + (g, v)_{L^2(\Omega)} \quad v \in V$$

Existenz und Eindeutigkeit für die Robin-Bedingung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitzrand und seien $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$ nicht negativ mit $\|c_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)} > 0$. Dann ist a beschränkt und $H_0^1(\Omega)$-koerziv und A hat ein beschränktes Inverses. Insbesondere hat die Diffusionsgleichung für $f \in L^r(\Omega)$ und $g \in L^s(\partial\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $y \in H^1(\Omega)$ gegeben durch (3), welche $\|y\|_H^1(\Omega) \leq C_R(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)})$ genügt, wobei C_R von Ω, α, c_0, aber nicht von f, g abhängt.

Beschränkheit und Stetigkeit für die Robinbedingung

Sei zusätzlich zu den Bedingungen von dem vorherigen Satz $r > \frac{n}{2}$,$s > n - 1$ und $n \geq 2$. Dann existiert für jedes $f \in L^r(\Omega)$ und $g \in L^s(\partial\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $y \in V \cap C(\bar{\Omega})$ von (1) und (2). Es existiert eine Konstante $C_\infty > 0$ mit $\|y\|_V + \|y\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_\infty(\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\partial\Omega)})$, wobei C_∞ von Ω, α, c_0, aber nicht von f und g abhängt.

Für elliptische partielle Differentialgleichungen löst man diese Probleme analog.

1.3.2 Schwache Lösungen parabolischer partieller Differentialgleichungen

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und wir definieren den Zylinder $\Omega_t := (0,T) \times \Omega$ für manche $T > 0$.

$$\begin{aligned} y_t + Ly = f \quad \text{auf } \Omega_t \\ y = 0 \quad \text{auf } [0,T] \times \partial\Omega \\ y(0,.) = y_0 \quad \text{auf } \Omega \end{aligned} \tag{4}$$

Wobei $f : \Omega_t \to \mathbb{R}$, $y_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben und $y : \bar{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ unbekannt.
L bezeichnet für jede Zeit t einen partiellen Differentialoperator zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} Ly := -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}(t,x) y_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) y_{x_i} + c_0(t,x) y \\ = -\mathrm{div}(A\nabla y) + b\nabla y + cy \\ \text{Zum Beispiel: } A = I, b = c = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

1.3.2.1 Gleichmäßige parabolische Gleichungen

gleichmäßiger parabolischer Operator

Der partiell Differenzialoperator $\frac{\partial}{\partial t} + L$, wobei L wie in (5) ist, heißt gleichmäßig parabolisch, falls eine Konstante $\Theta > 0$ existiert, sodass
$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \leq \Theta\|\xi\|^2$ für fast alle $(t,x) \in \Omega_T$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Einfache Funktion

Eine Funktion $s : [0,T] \to X$ wird einfach genannt, wenn sie von der Form $s(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{E_i}(t) y_i$ ist, mit $E_i \subset [0,T]$ lebesguemessbar und $y_i \in [0,T]$.

Stark messbar

Eine Funktion $f : t \in [0,T] \mapsto f(t) \in X$ heißt stark messbar, wenn einfache Funktionen $s_k : [0,T] \to X$ existieren, sodass $s_k(t) \to f(t)$ für fast alle $t \in [0,T]$.

Definition 1.24

Sei X ein separabler Banachraum, $1 \leq p < \infty$.
Wir definieren den Raum

$$\mathcal{L}^p(0,T;X) := \{y : [0,T] \to X \text{ stark messbar } : \|y\|_{\mathcal{L}^p(0,T;X)} := (\int_0^T \|y(t)\|_X^p dt)^{1/p} < \infty\}$$

Zudem sei

$$\mathcal{L}^\infty(0,T;X) := \{y : [0,T] \to X \text{ stark messbar } : \|y\|_{\mathcal{L}^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \|y(t)\|_X < \infty\}$$

Der Raum $C^k([0,T];X) k \in \mathbb{N}_0$ ist definiert als der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,T]$.

Schwache Ableitung in der Zeit

Sei $y \in \mathcal{L}^1(0,T;X)$. Wir nennen $v \in \mathcal{L}^1(0,T;X)$ schwache Ableitung von y, geschrieben $y_t = v$, falls $\int_0^T \varphi'(t)y(t)dt = -\int_0^T \varphi(t)v(t)dt \forall \varphi \in C_c^\infty((0,T))$.

Satz 1.31

Sei X ein separabler Banachraum. Für $1 \leq p < \infty$ kann der Dualraum von $\mathcal{L}^p(0,T;X)$ isometrisch identifiziert werden mit $\mathcal{L}^q(0,T;X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ durch das Mittel des Paares $\langle v, y\rangle_{\mathcal{L}^q(0,T;X^*),\mathcal{L}^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), y(t)\rangle_{X^*,X} dt$.

Satz 1.32

Seien H, V separable Hilberträume mit der stetigen und dichten Einbettung $V \hookrightarrow H$. Zudem sei $W(0,T;H,V) := \{y : y \in \mathcal{L}^2(0,T;V), y \in \mathcal{L}^2(0,T;V^*)\}$ mit der Norm $\|y\|_{W(0,T;H,V)} := \|y\|^2_{\mathcal{L}^2(0,T;V)} + \|y_t\|_{\mathcal{L}^2(0,T;V^*)}$.
Dann ist $W(0,T;H,V)$ ein Hilbertraum und wir haben die stetige Einbettung $W(0,T;H,V) \hookrightarrow C([0,T];H)$.
Zudem ergibt die partielle Integration für alle $y, v \in W(0,T;H,V)$
$(y(t), v(t))_H - (y(s), v(s))_H = \int_s^t (\langle y_t(\tau), v(\tau)\rangle_{V^*,V} + \langle v_t(\tau), y(t)\rangle_{V^*,V}) d\tau$.

Schwache Lösungen gleichmäßiger parabolischer Gleichungen

Schwache Lösungen

Wir betrachten das Problem (4) für Operatoren L der Form (5). Wir nehmen an, dass die Koeffizienten $a_{i,j} b_i, c_0 \in \mathcal{L}^\infty(\Omega_T)$ genügen und dass der Quellterm und der Anfangswert $f \in \mathcal{L}^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), y_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ genügt, wobei $H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$.
Wir setzen $H := \mathcal{L}^2(\Omega)$, $V := H_0^1(\Omega)$.
Für eine schwache Formulierung von (4) denken wir uns eine Funktion $y \in W(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega), H_0^1(\Omega)) = W(0,T;H,V)$.
Für fast alle $t \in [0,T]$ gilt $a_{ij}(t,.), b_i(t,.), c_0(t,.) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega), f(t,.) \in H^1(\Omega)$ und der Operator $L(t)$ ist ein Operator zweiter Ordnung in Divergenzform.
Nun liefert (4) das Grenzwertproblem $L(t)y(t) = f(t) - y_t(t), y(t)_{\partial\Omega} = 0$. Da $f(t) - y_t(t) \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$, führt der elliptische Fall zu der Annahme, dass für nahezu alle $t \in [0,T]$ die Variationsgleichung $a(y(t), v; t) = \langle f(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} - \langle y_t(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \forall v \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt wird mit der assoziierten Bilinearform

$$\begin{aligned} a(y,v;t) &:= \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) y_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t) y_{x_i} v + c_0(t) yv) dx, y, v \in H_0^1(\Omega) \\ &= \int_\Omega (A\nabla y \nabla v + b\nabla y v + cyv) dxy, v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Schwache Lösungen parabolischer partieller Differentialgleichungen

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Die Koeffizienten sollen $a_{i,j} b_i, c_0 \in \mathcal{L}^\infty(\Omega_T)$ genügen.

Sei $H := \mathcal{L}^2(\Omega)$ und $V := H_0^1(\Omega)$ mit der stetigen und dichten Einbettung $H \hookrightarrow V$.
Dann ist für $f \in \mathcal{L}^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), y_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ eine Funktion
$y \in W(0,T;\mathcal{L}^2, H_0^1)$ eine schwache Lösung von (4), wenn y für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und für alle $t \in [0,T]$ der Gleichung

$$\langle y_t(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} + \alpha(y(t),v;t) = \langle f(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \tag{6}$$

genügt und der Anfangsbedingung

$$y(0) = y_0, \tag{7}$$

wobei die Bilinearform $a(.,.,t)$ gegeben ist durch
$a(y,v;t) := \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t) y_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t) y_{x_i} v + c_0(t) y u) dx, y, v \in H_0^1(\Omega)$.

Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Sei $H := \mathcal{L}^2(\Omega)$ und $V := H_0^1(\Omega)$ mit der stetigen und dichten Einbettung $H \hookrightarrow V$.

Abstraktes parabolisches Evolutionsproblem

Wir suchen ein $y \in W(0,T;H,V)$, sodass

$$\langle y_t(t), v\rangle_{V^*,V} + a(y(t),v;t) = \langle f(t), v\rangle_{V^*,V} \forall v \in V \text{ und in allen } t \in [0,T] \tag{8}$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = y_0. \tag{9}$$

Wir arbeiten unter den folgenden Annahmen.

Annahme 1.34

1. Seien H und V separable Hilberträume mit der stetigen und dichten Einbettung $V \hookrightarrow H$.

2. $a(.,.;t) : V \times V \to \mathbb{R}$ ist für fast alle $t \in (0,T)$ eine Bilinearform und es gibt $\alpha, \beta > 0$ und $\gamma \geq 0$ mit $|a(v,w;t)| \leq \alpha \|v\|_V \|w\|_V \forall v, w \in V$ und in allen $t \in (0,T)$, $a(u,v;t) + \gamma \|u\|_H^2 \geq \beta \|v\|_V^2 \forall v \in V$ und in allen $t \in (0,T)$. Die Abbildungen $t \mapsto a(v,w;t) \in \mathbb{R}$ sind messbar für alle $v, w \in V$.

3. $y_0 \in H, f \in L^2(0,T;V^*)$

Energie-Abschätzung und Eindeutigkeit

Sei Annahme 1.34 erfüllt.
Dann hat das abstrakte parabolische Evolutionsproblem höchstens eine Lösung $y \in W(0,T;H,V)$ und es genügt der Energie-Abschätzung

$$\|y(t)\|_H^2 + \|y\|_{L^2(0,t;V)}^2 + \|y_t\|_{L^2(0,t;V^*)}^2 \leq C(\|y_0\|_H^2 + \|f\|_{L^2(0,t;V^*)}^2) \forall t \in (0,T] \tag{10}$$

wobei $C > 0$ nur von β und γ aus Annahme 1.34 genügt.

Existenz durch die Galerkin-Methode

Da V separabel ist, gibt es eine abzählbare Menge $\{v_k : k \in \mathbb{N}\} \subset V$ linear unabhängiger $v_k \in V$, sodass $V_k := \text{span}\{v_1, ..., v_k\}$ dicht in V liegt. Da V dicht in H liegt, finden wir $y_{0,k} = \sum_{i=1}^{k} a_{ik} v_i \in V_k$ mit $y_{0,k} \to y_0$ in H.
Die Funktion

$$y_k(t) := \sum_{i=1}^{k} \varphi_{ik}(t) v_i, \varphi_{ik} \in H^1(0,T) \tag{11}$$

genügt der Galerkin-
Approximation von (8),(9)

$$\begin{aligned} \langle (y_k)_t(t), v\rangle_{V*,V} + a(y_k(t), v; t) = \langle f(t), v\rangle_{V^*,V} \\ \forall v \in V_k \text{ und in allen } t \in [0,T] \end{aligned} \tag{12}$$

$$y(0) = y_{0,k}. \tag{13}$$

Dieses y_k ist in $W(0,T;H,V)$.

Satz 1.36

Sei Annahme 1.34 erfüllt. Dann hat die Galerkin-Methode (12),(13) eine eindeutige Lösung $y_k \in W(0,T;H,V)$ der Form (11) und y_k genügt der Energie-Abschätzung

$$\|y_k(t)\|_H^2 + \|y_k\|^2_{L^2(0,t;V)} + \|(y_k)_t\|^2_{L^2(0,t;V^*)} \le C(\|y_0, k\|_H^2 + \|f\|^2_{L^2(0,t;V^*)}) \quad \forall t \in (0,T],$$

wobei $C > 0$ nur von β und γ aus Annahme 1.34 abhängt.

Satz 1.37

Sei Annahme 1.34 erfüllt. Dann hat das abstrakte parabolische Evolutionsproblem (8),(9) eine eindeutige Lösung $y \in W(0,T;H,V)$.

Korollar 1.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\frac{\partial}{\partial t} + L$ mit L aus (5) gleichmäßig parabolisch, wobei $a_{ij}, b_i, c_0 \in L^\infty(\Omega_T)$. Dann hat (4) für jedes
$f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ und $y_0 \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $y \in W(0,T;L^2,H_0^1)$ und es genügt der Energieabschätzung (10) mit $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $V^* = H^{-1}(\Omega)$.

Formulierung des Operators

Für die Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c_0 \in L^\infty(\Omega_T)$ definiert die schwache Formulierung (6),(7) einen beschränkten lineaen Operator

$$A : y \in W(0,T;L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)) \mapsto \begin{pmatrix} y_t + Ly \\ y(0,.) \end{pmatrix} \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^*) \times L^2(\Omega),$$

sodass für alle $(f, y_0) \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^*) \times L^2(\Omega)$:

$$\begin{pmatrix} y_t + Ly \\ y(0,.) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (6),(7) \text{ ist erfüllt}$$

1.3.2.5 Regularität

Annahme 1.38

Zusätzlich zu den Bedingungen aus Annahme 1.34 fordern wir, dass:

$$a(v,w;.) \in C^1([0,T]), \quad a_t(v,w;t) \leq \alpha_1 \|v\|_V \|w\|_V \forall v,w \in V, , \alpha_1 \in \mathbb{R}$$
$$y_0 \in \{w \in V : a(w,.;0) \in H^*\},$$
$$f \in W(0,T;H,V).$$

Satz 1.39

Sei Annahme 1.38 erfüllt. Dann genügt die Lösung (8) sowohl
$y_t \in W(0,T;H,V)$ als auch

$$\langle y_{tt}(t)), w\rangle_{V^*,V} + a(y_t(t),w;t) = \langle f_t(t), w\rangle_{V^*,V} - a_t(y(t),w;t),$$
$$\langle y_t(0), w\rangle_{V^*,V} = (f(0),w)_H - a(y_0,w;0) \forall w \in V.$$

Für semilineare parabolische Gleichungen geht man analog vor.