TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BERLIN

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

3. Übungsblatt

Abgabe am 03.11.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 3.1 (2+2 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

i) Beweisen Sie die folgende Variante von Farkas Lemma: Es gibt ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ genau dann, wenn $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle \geq \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ mit $A^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

ii) Bestimmen Sie den Rezessionskegel und den Linealitätsraum von $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$.

Aufgabe 3.2 (2+2 Punkte).

i) Seien $K_1, \cdots, K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere konvexe Mengen, so dass auch $K_1 \cup \cdots \cup K_m$ konvex ist. Beschreiben Sie die Stützfunktionen von $K_1 + \cdots + K_m$ und $K_1 \cup \cdots \cup K_m$ in Abhängigkeit von den Stützfunktionen $h(K_i, \cdot)$.

ii) Seien $B_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ und $B_n^1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$. Berechnen Sie die Stützfunktionen von B_n und B_n^1.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte). Beweisen Sie Theorem 2.6 aus der Vorlesung: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \mathbb{R}^n$, konvex und abgeschlossen sowie $\dim K = n$. Dann gilt

$$K = \bigcap_{\substack{H(\boldsymbol{a},\alpha) \text{ Stütz-} \\ \text{hyperebene von } K}} H^-(\boldsymbol{a}, \alpha).$$

Aufgabe 3.4 (2+2 Punkte).

i) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\inf_{\boldsymbol{x} \in X} T(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in \operatorname{conv}(X)} T(\boldsymbol{x}).$$

ii) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ das Hexagon mit Ecken $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie K^* als die konvexe Hülle endlich vieler Punkte.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

2. Übungsblatt

Abgabe am 27.10.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 2.1 (1+1+1+1 Punkte).

i) Seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte, deren euklidischer Abstand zu $\boldsymbol{a}$ nicht größer ist als zu $\boldsymbol{b}$, ein abgeschlossener Halbraum ist.

ii) Zeigen Sie, dass ein abgeschlossener Halbraum Durchschnitt von offenen Halbräumen ist.

iii) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{int}(B_n) \subseteq K \subseteq B_n$. Zeigen Sie, dass K konvex ist.

iv) Zeigen Sie, dass $K = \operatorname{int}[0,1]^2 \cup \operatorname{conv}\{(1/4,0)^\intercal, (3/4,0)^\intercal\}$ eine konvexe Menge ist, die kein Durchschnitt von offenen Halbräumen ist.

Aufgabe 2.2 (1+1+1+1 Punkte).

i) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f\colon K \to \mathbb{R}$. Die Menge $\Gamma_f = \left\{(\boldsymbol{x}^T, x_{n+1})^T : \boldsymbol{x} \in K, x_{n+1} \geq f(\boldsymbol{x})\right\}$ heißt Epigraph von f. Zeigen Sie: Γ_f ist genau dann konvex, wenn f konvex ist.

ii) Set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin. Zeigen Sie, dass jedes lokale Maximum (Minimum) von f ein globales Maximum (Minimum) ist.

iii) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Funktion. Zeigen Sie: $f(X)$ ist konvex.

iv) Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Man zeige: $K_1 + K_2$ ist konvex.

Aufgabe 2.3 (2+2 Punkte).

i) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Man zeige: $\operatorname{conv} X$ ist kompakt.

ii) Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen sowie K_1 kompakt, K_2 abgeschlossen und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Man zeige, dass es eine streng trennende Hyperebene von K_1 und K_2 gibt, d.h. es gibt ein $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $K_1 \subset \operatorname{int} H^-(\boldsymbol{a}, \alpha)$ und $K_2 \subset \operatorname{int} H^+(\boldsymbol{a}, \alpha)$.

Aufgabe 2.4 (2+2 Punkte).

i) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, und sei $\mathcal{X}$ eine endliche Familie konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass für je $n+1$ Mengen $X_1, \ldots, X_{n+1} \in \mathcal{X}$ ein $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $(\boldsymbol{t} + C) \subseteq \cap_{i=1}^{n+1} X_i$. Zeigen Sie, dass es dann auch ein $\bar{\boldsymbol{t}} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $(\bar{\boldsymbol{t}} + C) \subseteq \cap_{X \in \mathcal{X}} X$.

ii) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $\mathcal{H}$ eine endliche Familie von Halbräumen, die C überdeckt, d.h. $C \subseteq \cup_{H \in \mathcal{H}} H$. Zeigen Sie, dass es $n+1$ Halbräume in $\mathcal{H}$ gibt, die C überdecken.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BERLIN

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

WS 2015

1. Übungsblatt

Abgabe am 20.10.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 1.1 (4 Punkte). Sei $m \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ genau dann affin unabhängig sind, wenn für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ die Vektoren $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k$, $1 \leq i \neq k \leq m$, linear unabhängig sind.

Aufgabe 1.2 (1+2+1 Punkte). Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$. C heißt Kegel, falls für jedes $\boldsymbol{x} \in C$ gilt $\{\lambda \boldsymbol{x} : \lambda \geq 0\} \subseteq C$.

i) Geben Sie ein Beispiel für einen nicht konvexen Kegel an.

ii) Sei C ein Kegel. Zeigen Sie, dass C genau dann ein konvexer Kegel ist, wenn $C + C = C$.

iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}\} \quad \text{und} \quad \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \colon M \text{ ist positiv semidefinit}\}$$

konvexe Kegel sind.

Aufgabe 1.3 (3+1 Punkte). Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ gelte $\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2} \in C$.

i) Beweisen Sie, dass C konvex ist.

ii) Kann auf die Abgeschlossenheit von C verzichtet werden? Geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 1.4 (1+1+1+1 Punkte). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Falls $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, dann ist auch $\operatorname{conv} X$ abgeschlossen.

ii) Falls X konvex, dann ist auch $\operatorname{cl} X$ konvex.

iii) Falls $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist auch $\operatorname{conv} X$ offen.

iv) Seien $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$. Es gilt $\operatorname{conv}\{X_1 + X_2\} = \operatorname{conv} X_1 + \operatorname{conv} X_2$.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

0. Übungsblatt

Besprechung in den Tutorien vom 19.10.-20.10.2015

Aufgabe 0.1. Eine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt affin, falls es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und ein $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{t}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

i) g ist genau dann affin, wenn $g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{0})$ linear ist.

ii) Bild(g) ist ein affiner Unterraum.

iii) Ist g injektiv und $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^m$ affin unabhängig, dann sind auch $g(\boldsymbol{x}_1), \ldots, g(\boldsymbol{x}_k)$ affin unabhängig.

Aufgabe 0.2. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ affine Unterräume. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Dimensionsformel für lineare Unterräume:

$$\dim(A) + \dim(B) - \dim(A + B) \begin{cases} = \dim(A \cap B), & \text{falls } A \cap B \neq \emptyset \\ \geq -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 0.3. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eine lineare Abbildung $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $P(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$, heißt *orthogonale Projektion*, falls es einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für alle $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{v} \in U^\perp$ gilt: $P(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ und $P(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$.
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

i) P ist eine Projektion.

ii) Es gibt einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$P(\boldsymbol{x}) \in U, \quad \boldsymbol{x} - P(\boldsymbol{x}) \in U^\perp$$

für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii) $P \circ P = P$ und $\ker(P) \perp \text{Bild}(P)$.

iv) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$, so dass $XX^\intercal = M$ und $X^\intercal X = I_k$.

v) M ist symmetrisch und besitzt nur die Eigenwerte 0 und 1.