Simulation und Modellierung

Zusammenfassung der Vorlesung

Technische Universität Berlin
Fakultät II: Mathematik
Fortgeschrittene Themen der Numerik

Dozent:

Dr. Konstantin Fackaldey

Geschrieben von:

Ines Ahrens

Berlin, Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Spieltheorie

Beispiel 1.0.1 (Gefangenendilemma). *Bankräuber A und B sind verhaftet. Ohne Geständnis kriegen beide 3 Jahre haft, gesteht einer, bekommt er nur 1 Jahr, der andere 9. Falls beide gestehen bekommen beide 7 Jahre Haft*

Beispiel 1.0.2 (Geschlechterkampf). *Die Frau möchte zum Fußball Spiel, der Mann zum Helene Fischer Konzert. Sie können nicht miteinander kommunizieren und sie haben sich nicht abgesprochen, wo sie sich treffen. Beide wollen sich am liebsten treffen.*

1.1 Spiele in Strategischer Normalform

Definition 1.1.1 (Spieler). *Ein Spieler ist ein Beteiligter in einem Spiel. Er wird mit $X \in M$ bezeichnet, wobei M die Menge aller Spieler ist.*

Definition 1.1.2 (Strategie). *Strategien sind die Handlungen, die die Spieler ausführen. Dabei bezeichnet S_X die Menge der Strategien von Spieler X.*

Theorem 1.1.3. *Falls ein Spiel nur zwei Spieler X und Y hat, gilt*

$$S_Y = S_{-X}$$

Definition 1.1.4 (endliches Spiel). *ein Spiel heißt endlich, falls jeder Spieler nur endlich viele Strategien hat. Es gilt $n_X = |S_X|$*

Definition 1.1.5 (Menge aller Strategiepaare). *Sei ein Spiel mit zwei Spielern A und B gegeben. Dann ist die Menge aller Strategiepaare $S := S_A \times S_B$*

Definition 1.1.6 (Auszahlungsfunktion).

$$U_X : S \to \mathbb{R}$$

beschreibt den Nutzen.

Definition 1.1.7 (Nutzenmatrix). *Betrachte ein zwei Spieler Spiel mit die Spielern A und B. Sei $S_A = \{a_1, \cdots, a_{n_A}\}$ und $S_B = \{b_1, \cdots, b_{n_B}\}$. Dann wird die Nutzenmatrix*

U definiert durch

$$U \in \mathbb{R}^{n_A \times n_B}, \quad U_{ij} := \left(U_{ij}^A, U_{ij}^B\right), \quad i \in \{1, \ldots, n_A\} \; j \in \{1, \ldots, n_B\}$$

wobei $U_{ij}^A := U_A(a_j, b_j)$ *mit der Nutzenfunktion* U_A.

eigene Notiz 1.1.8. *A ist der Zeilenspieler und B ist der Spaltenspieler.*

Beispiel 1.1.9 (Gefangenendilemma)**.** *Die Spieler sind die Gefangenen A und B. Die Strategien sind Schweigen und Gestehen, also* $S_A = S_B = \{S, G\}$. *Die Auszahlungsfunktionen werden definiert durch*

$$\begin{aligned} &U_A : S \to \mathbb{R} \\ &U_A(S,S) = -3 \quad U_A(S,G) = -9 \\ &U_A(G,S) = -1 \quad U_A(G,G) = -7 \end{aligned}$$

U_B *analog, nur gespiegelt an der Diagonalen. Dadurch ergibt sich eine Nutzenmatrix*

$$U^{AB} = \begin{pmatrix} (-7,-7) & (-1,-9) \\ (-9,-1) & (-3,-3) \end{pmatrix}$$

Definition 1.1.10 (Nullsummenspiel)**.** *Ein Spiel mit zwei Spieler X und Y heißt Nullsummenspiel, falls gilt*

$$U_A(S) = -U_B(S)$$

Definition 1.1.11 (Strategische Normalform)**.** *Eine strategische Normalform ist die Darstellung eines Spiels mit Strategiemengen und Auszahlungsfunktion.*

Definition 1.1.12 (vollständige Information)**.** *Beiden Spielern ist die komplette Auszahlungsfunktion bekannt.*

1.2 Spiele ohne Annahmen über den Gegner

Betrachten wir hier zwei Spieler Spiele, in denen B seine Entscheidungen unabhängig vom Spieler A trifft. A ist das bekannt. Es reicht, sich nur die Auszahlungsfunktion U_A anzusehen.

Beispiel 1.2.1. *A ist eine Person mit oder ohne Regenschirm und B ist das Wetter.*

Es gibt hier zwei Arten von Spielen: Das Spiel mit Gewissheit und das mit Risiko.

1.2.1 Spiel mit Gewissheit

A kennt die Strategie b_j von Spieler B und maximiert seinen Nutzen. Wähle

$$\tilde{i} \in \{1, \dots n_A\} \text{ mit } U_{\tilde{i}j} = \max_{1 \leq i \leq n_A} U_{ij}$$

1.2.2 Spiel mit Risiko

A hat keine Information über die Wahl der Strategie von B.

Risikobereiter Spieler

Zunächst wählt A das eigene Maximum und geht davon aus, dass B auch das Maximum gewählt hat. Das heißt: Wähle

$$\tilde{i} \in \{1, \dots, n_A\} \text{ mit } \max_{1 \leq j \leq n_B} U_{\tilde{i}j} = \max_{1 \leq i \leq n_A} \max_{1 \leq j \leq n_B} U_{ij}$$

Vorsichtiger Spieler

Der vorsichtige Spieler probiert den garantierten Gewinn zu maximieren. Das heißt: Wähle

$$\tilde{i} \in \{1, \dots, n_A\} \text{ mit } \min_{1 \leq j \leq n_B} U_{\tilde{i}j} = \max_{1 \leq i \leq n_A} \min_{1 \leq j \leq n_B} U_{ij}$$

Beispiel 1.2.2 (Regenschirm?)**.**

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Der vorsichtige Spieler wählt die zweite Zeile und der risikofreudige Spieler die erste Zeile.

1.3 Reaktionsabbildungen

Beide Spieler versuchen gleichzeitig ihren Gewinn zu maximieren. Es müssen also Annahmen über den Gegner gemacht werden. Was muss man also tun, wenn man wüsste,

dass der Gegner eine bestimmte Wahl $y \in S_{-X}$ trifft?
Definition 1.3.1 (Reaktionsabbildung). *Eine Reaktionsabbildung r_X bildet $y \in S_{-X}$ auf die Menge aller $s \in S_X$ ab, die optimal sind, wenn der andere Spieler y wählt.*

$$\begin{aligned} r_X : S_{-X} &\to P(S_X) \\ y &\mapsto \{\tilde{x} \in S_X | U_X(\tilde{x}, y) = \max_{x \in S_X} U_X(x, y)\end{aligned}$$

Definition 1.3.2 (Gesamtreaktionsabbildung). *Die Gesamtreaktionsabbildung r für ein zwei Spieler Spiel bildet ein Strategiepaar (a, b) auf alle Strategiepaare ab, bei denen Spieler A eine optimale Antwort auf b gibt und Spieler B eine optimale Antwort auf a wählt.*

$$\begin{aligned} r : &S \to P(S) \\ &(a, b) \mapsto r_A(b) \times r_B(a)\end{aligned}$$

In Nutzenmatrix kann man diese optimale Antwort markieren: in jeder Spalte j die U_{ij} markiert, für die $a_i \in r_A(b_j)$, also die optimale Antort auf b_j ist. (analog Zeile).
Beispiel 1.3.3.

$$U^{AB} = \begin{pmatrix} (0, 20) & (30, 20) \\ (10, 0) & (10, 10) \end{pmatrix}$$

wobeib_i die Spalten und a_i die Spalten darstellen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} r_B(a_1) = \{b_1, b_2\} r_B(a_2) = \{b_2\} \\ r_A(b_1) = \{a_2\} r_A(b_2) = \{a_1\}\end{aligned}$$

1.4 Dominante Strategien

Betrachte Spiele, bei denen beide Spieler gleichzeitig agieren, aber die Überlegung, die der jeweilige andere Spieler vermutlich anstellt ih ihrer Überlegung mit einbezieht.

Einfacher Fall Spieler X besitzt die Strategie x, die für alle $y \in S_{-X}$ die beste antwort ist ($x \in r_x(y)$ f.a. y), kann er ohne weitere Überlegung diese Strategie wählen. Diese Strategie nennt man dominante Strategie.

Beispiel 1.4.1 (Gefangenendilemma).

$$U^{AB} = \begin{pmatrix} (-7,-7) & (-1,-9) \\ (-9,-1) & (-3,-3) \end{pmatrix}$$

Hier ist „gestehen “die dominate Strategie für beide Spieler, denn unabhängig von der Strategie, die der andere wählt, ist das leugnen niemals günstiger als das gestehen. „Ich wähle etwas, das mich unabhängig vom anderen Spieler macht.“

Eine Strategie für alle Spieler A heißt redundat, wenn sie durch eine andere Zeile dominiert wird.
Beispiel 1.4.2 (Stein,Papier,Schere,Brunnen).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Brunnen dominiert den Stein, also lässt Spieler A den Stein weg

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Sicht von Spieler B ($u_A = -u_B$) dominiert Brunnen den Stein. Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5 Nash-Gleichgewichte

Betrachte

2 Hauptteil der Arbeit I

3 Hauptteil der Arbeit II

4 Fazit und Ausblick