Simulation und Modellierung

Zusammenfassung der Vorlesung

Technische Universität Berlin
Fakultät II: Mathematik
Fortgeschrittene Themen der Numerik

Dozent:
Dr. Konstantin Fackaldey

Geschrieben von:
Ines Ahrens

Berlin, Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Spieltheorie

Beispiel 1.0.1 (Gefangenendilemma). *Bankräuber A und B sind verhaftet. Ohne Geständnis kriegen beide 3 Jahre haft, gesteht einer, bekommt er nur 1 Jahr, der andere 9. Falls beide gestehen bekommen beide 7 Jahre Haft*

Beispiel 1.0.2 (Geschlechterkampf). *Die Frau möchte zum Fußball Spiel, der Mann zum Helene Fischer Konzert. Sie können nicht miteinander kommunizieren und sie haben sich nicht abgesprochen, wo sie sich treffen. Beide wollen sich am liebsten treffen.*

1.1 Spiele in Strategischer Normalform

Definition 1.1.1 (Spieler). *Ein Spieler ist ein Beteiligter in einem Spiel. Er wird mit $X \in M$ bezeichnet, wobei M die Menge aller Spieler ist.*

Definition 1.1.2 (Strategie). *Strategien sind die Handlungen, die die Spieler ausführen. Dabei bezeichnet S_X die Menge der Strategien von Spieler X.*

Theorem 1.1.3. *Falls ein Spiel nur zwei Spieler X und Y hat, gilt*

$$S_Y = S_{-X}$$

Definition 1.1.4 (endliches Spiel). *ein Spiel heißt endlich, falls jeder Spieler nur endlich viele Strategien hat. Es gilt $n_X = |S_X|$*

Definition 1.1.5 (Menge aller Strategiepaare). *Sei ein Spiel mit zwei Spielern A und B gegeben. Dann ist die Menge aller Strategiepaare $S := S_A \times S_B$*

Definition 1.1.6 (Auszahlungsfunktion).

$$U_X : S \to \mathbb{R}$$

beschreibt den Nutzen.

Definition 1.1.7 (Nutzenmatrix). *Betrachte ein zwei Spieler Spiel mit die Spielern A und B. Sei $S_A = \{a_1, \cdots, a_{n_A}\}$ und $S_B = \{b_1, \cdots, b_{n_B}\}$. Dann wird die Nutzenmatrix*

U definiert durch

$$U \in \mathbb{R}^{n_A \times n_B}, \quad U_{ij} := \left(U_{ij}^A, U_{ij}^B\right), \quad i \in \{1, \ldots, n_A\}\ j \in \{1, \ldots, n_B\}$$

wobei $U_{ij}^A := U_A(a_j, b_j)$ mit der Nutzenfunktion U_A.
eigene Notiz 1.1.8. *A ist der Zeilenspieler und B ist der Spaltenspieler.*
Beispiel 1.1.9 (Gefangenendilemma)**.** *Die Spieler sind die Gefangenen A und B. Die Strategien sind Schweigen und Gestehen, also $S_A = S_B = \{S, G\}$. Die Auszahlungsfunktionen werden definiert durch*

$$\begin{aligned} &U_A : S \to \mathbb{R} \\ &U_A(S,S) = -3 \quad U_A(S,G) = -9 \\ &U_A(G,S) = -1 \quad U_A(G,G) = -7 \end{aligned}$$

U_B analog, nur gespiegelt an der Diagonalen. Dadurch ergibt sich eine Nutzenmatrix

$$U^{AB} = \begin{pmatrix} (-7,-7) & (-1,-9) \\ (-9,-1) & (-3,-3) \end{pmatrix}$$

Definition 1.1.10 (Nullsummenspiel)**.** *Ein Spiel mit zwei Spieler X und Y heißt Nullsummenspiel, falls gilt*

$$U_A(S) = -U_B(S)$$

Definition 1.1.11 (Strategische Normalform)**.** *Eine strategische Normalform ist die Darstellung eines Spiels mit Strategiemengen und Auszahlungsfunktion.*
Definition 1.1.12 (vollständige Information)**.** *Beiden Spielern ist die komplette Auszahlungsfunktion bekannt.*

1.2 Spiele ohne Annahmen über den Gegner

Betrachten wir hier zwei Spieler Spiele, in denen B seine Entscheidungen unabhängig vom Spieler A trifft. A ist das bekannt. Es reicht, sich nur die Auszahlungsfunktion U_A anzusehen.
Beispiel 1.2.1. *A ist eine Person mit oder ohne Regenschirm und B ist das Wetter.*

Es gibt hier zwei Arten von Spielen: Das Spiel mit Gewissheit und das mit Risiko.

1.2.1 Spiel mit Gewissheit

A kennt die Strategie b_j von Spieler B und maximiert seinen Nutzen. Wähle

$$\tilde{i} \in \{1, \dots n_A\} \text{ mit } U_{\tilde{i}j} = \max_{1 \leq i \leq n_A} U_{ij}$$

1.2.2 Spiel mit Risiko

A hat keine Information über die Wahl der Strategie von B.

Risikobereiter Spieler

Zunächst wählt A das eigene Maximum und geht davon aus, dass B auch das Maximum gewählt hat. Das heißt: Wähle

$$\tilde{i} \in \{1, \dots, n_A\} \text{ mit } \max_{1 \leq j \leq n_B} U_{\tilde{i}j} = \max_{1 \leq i \leq n_A} \max_{1 \leq j \leq n_B} U_{ij}$$

Vorsichtiger Spieler

Der vorsichtige Spieler probiert den garantierten Gewinn zu maximieren. Das heißt: Wähle

$$\tilde{i} \in \{1, \dots, n_A\} \text{ mit } \min_{1 \leq j \leq n_B} U_{\tilde{i}j} = \max_{1 \leq i \leq n_A} \min_{1 \leq j \leq n_B} U_{ij}$$

Beispiel 1.2.2 (Regenschirm?).

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Der vorsichtige Spieler wählt die zweite Zeile und der risikofreudige Spieler die erste Zeile.

1.3 Reaktionsabbildungen

Beide Spieler versuchen gleichzeitig ihren Gewinn zu maximieren. Es müssen also Annahmen über den Gegner gemacht werden. Was muss man also tun, wenn man wüsste, dass der Gegner eine bestimmte Wahl $y \in S_{-X}$ trifft?

Definition 1.3.1 (Reaktionsabbildung)**.** *Eine Reaktionsabbildung r_X bildet $y \in S_{-X}$ auf die Menge aller $s \in S_X$ ab, die optimal sind, wenn der andere Spieler y wählt.*

$$\begin{aligned} r_X : S_{-X} &\to P(S_X) \\ y &\mapsto \{\tilde{x} \in S_X | U_X(\tilde{x}, y) = \max_{x \in S_X} U_X(x, y) \end{aligned}$$

Definition 1.3.2 (Gesamtreaktionsabbildung)**.** *Die Gesamtreaktionsabbildung r für ein zwei Spieler Spiel bildet ein Strategiepaar (a, b) auf alle Strategiepaare ab, bei denen Spieler A eine optimale Antwort auf b gibt und Spieler B eine optimale Antwort auf a wählt.*

$$\begin{aligned} r :& S \to P(S) \\ &(a, b) \mapsto r_A(b) \times r_B(a) \end{aligned}$$

In Nutzenmatrix kann man diese optimale Antwort markieren: in jeder Spalte j die U_{ij} markiert, für die $a_i \in r_A(b_j)$, also die optimale Antort auf b_j ist. (analog Zeile).

Beispiel 1.3.3.

$$U^{AB} = \begin{pmatrix} (0, 20) & (30, 20) \\ (10, 0) & (10, 10) \end{pmatrix}$$

wobeib_i die Spalten und a_i die Spalten darstellen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} r_B(a_1) &= \{b_1, b_2\} r_B(a_2) = \{b_2\} \\ r_A(b_1) &= \{a_2\} r_A(b_2) = \{a_1\} \end{aligned}$$

1.4 Dominante Strategien

Betrachte Spiele, bei denen beide Spieler gleichzeitig agieren, aber die Überlegung, die der jeweilige andere Spieler vermutlich anstellt ih ihrer Überlegung mit einbezieht.

Einfacher Fall Spieler X besitzt die Strategie x, die für alle $y \in S_{-X}$ die beste antwort ist ($x \in r_x(y)$ f.a. y), kann er ohne weitere Überlegung diese Strategie wählen. Diese Strategie nennt man dominante Strategie.

Beispiel 1.4.1 (Gefangenendilemma).

$$U^{AB} = \begin{pmatrix} (-7,-7) & (-1,-9) \\ (-9,-1) & (-3,-3) \end{pmatrix}$$

Hier ist „gestehen“die dominate Strategie für beide Spieler, denn unabhängig von der Strategie, die der andere wählt, ist das leugnen niemals günstiger als das gestehen. „Ich wähle etwas, das mich unabhängig vom anderen Spieler macht.“

Eine Strategie für alle Spieler A heißt redundat, wenn sie durch eine andere Zeile dominiert wird.

Beispiel 1.4.2 (Stein,Papier,Schere,Brunnen).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Brunnen dominiert den Stein, also lässt Spieler A den Stein weg

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Sicht von Spieler B ($u_A = -u_B$) dominiert Brunnen den Stein. Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5 Nash-Gleichgewichte

Betrachte

$$U^{AB} = \begin{pmatrix} (30,10) & (20,20) & (10,0) \\ (40,30) & (0,0) & (0,40) \end{pmatrix} \hat{s} = (a_1, b_2), U^{AB} = (20,20)$$

sowohl a_1 ist die optimale Antwort auf b_2 als auch b_2 die optimale Antwort auf a_1 ist: $a_1 \in r_A(b_2)$ und $b_2 \in r_B(a_1)$. Vereinbaren beide Spieler $\hat{s}$, dann hat A keinen

Grund in eine andere Strategie zu wechseln. Er würde sich dadurch nur verschlechtern (Vorausgesetzt, B hält sich an der Vereinbarung)

ein Strategiepaar mit dieser Eigenschaft heißt Nash-Gleichgewicht.
Definition 1.5.1 (Nash-Gleichgewichtspunkt)**.** $(\hat{a}, \hat{b})$ *ist NGP, falls*

$$\forall b \in S_B : u_B(\hat{a}, \hat{b}) \geq u_B(\hat{a}, b) \text{ und} \tag{1.1}$$
$$\forall a \in S_A : u_A(\hat{a}, \hat{b}) \geq u_B(a, \hat{b}) \tag{1.2}$$

Im Falle eines Nullsummenspiels kann man 1.1 umschreiben zu

$$\forall b \in S_B : u_A(\hat{a}, b) \geq u_A(\hat{a}, \hat{b}) \tag{1.3}$$

(1.1) and (1.3) zusammen ergeben

$$\forall a \in S_A, b \in S_B : u_A(\hat{a}, b) \geq u_A(\hat{a}, \hat{b}) \geq u_A(a, \hat{b})$$

daher nennt man dieses Gleichgewicht auch Sattelpunkt.
Remarks and Extensions.

- Ein Strategiepaar aus dominanten Strategien st offenbar immer ein Gleichgewichtspunkt.
- Durch eleiminieren von diminanten Strategien könnnen keine neuen Gleichgewichtspunkte entstehen.

Der Wunsch ist, dass jedes Spiel genau einen Gleichgewichtspunkt besitzt. Das ist jedoch nicht der Fall.

1.6 Gemischte Strategien

Betrachte Nullsummenspiel.

Annahme: Mehrere Parteien und die Spieler wählen jede ihrer Strategien mit einer W-keit p_j bzw. q_k, für $j \in \{1, \ldots, m\}, k \in \{1, \ldots, n\}$ wobei $p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^n$. Diese gewählten W-keiten nennt man gemischte Strategien. Man kann dann die Auszahlung berechnen.

$$E(U^*, p, q) = \sum_{k=1}^{n} (U^A)_{j,k} p_j q_k = p^T U^* q$$

Spieler A versucht nun den Wkeits Vektor p so zu wählen, dass der Erwartungsweert maximal wird. Spieler B analog mit q.

Extrema von $E(U^*, \cdot, q)$ leigt entweder auf dem Rand ($p_j = 0$ für mind. ein j) oder der Gradient wird 0.

$$0 = U^* q = E(U^*, p, q) \text{ f.a.} p$$

Interessante Beobachtung: Wenn U^* nicht invertierbar ist und es $q \geq 0$ oder $p \geq 0$ gibt, s.d. $p^T U^* = 0$ od $U^* q = 0$, wählt dann der entsprechende Spieler diese Strategie völlig unabhängig.

1.7 Ausblick

- Konzept des Gleichgewichts lässt sich mathematisch gut fassen
- Die Wahl der Auswertungsfkt ist sehr wichtig. Das steht auch in Zusammenhang mit derFrage, ob das Modell stimmt.

2 Gruppenentscheidungen

2.1 Individualpräferenz und Gruppenentscheidungen

Sei A eine endliche Menge von Kandidaten.

Definition 2.1.1 (Präferenz)**.** *Sei A eine endliche Menge von Kandidaten. Einr Präferenz entsteht, wenn jeder Wähler jeden Kandidaten* $x \in A$ *eine natürliche Zahl als Rang* $r(x)$ *zuordnet. Bei zwei Kandidaten* $x, y \in A$ *bedeutet* $r(x) < r(y)$*, dass* X *gegenüber* y *bevorzugt wird.*

Definition 2.1.2 (Rangabbildung)**.** *Eine Rangabbildung ist eine surjektive Abbildung* r *von der Kandidaten Menge* A *auf einen Abschnitt* $\{1, \ldots, k\} \subset \mathbb{N}$

$$r : A \to \{1, \ldots, k\}$$

Definition 2.1.3 (Relation)**.** *Eine Relation* R *auf der Menge* A *heißt* $\forall x, y, z \in A$

- *transitiv, falls* $xRy, yRz \Rightarrow xRz$
- *symmetrisch, falls* $xRy \Rightarrow yRx$
- *reflexiv* xRx
- *Quasiordnung* R *ist reflexiv und transitiv*
- *asymetrisch* $xRy \Rightarrow\neq (yRx)$
- *konvex: jede zwei Elemente sind vergleichbar:*$xRy \vee yRx$

Definition 2.1.4 (Präferenzrelation)**.** *Die Rangabbildung* r *definiert eine Präferenzrelation* $\rho \subset A \times A$ *über*

$$x\rho y :\Leftrightarrow r(x) < r(y) \tag{2.1}$$

ρ ist transitiv und asymetrisch.

Definition 2.1.5. *Sei ρ die durch der Rangabbildung r definierte Präferenzrelation. Die Menge aller so darstellbaren Relationen nennen wir*

$$\mathcal{P}_A := \{\rho \subset A \times A | \rho \text{ erfüllt (2.1) für eine Rangabbildung } r\}$$

Wir können auch noch Paare hinzunehmen, die beide den gleichen Rang haben:

$$x\rho * y :\Leftrightarrow r(x) \leq r(y) \tag{2.2}$$

$\rho*$ ist transitiv, reflexiv und konvex. Es gilt $\rho \subset \rho* \subset A \times A$ und damit definieren wir

$$\mathcal{P}_A^* := \{\rho^* \subset A \times A | \rho^* \text{ erfüllt (2.2) für eine Rangabbildung } r\}$$

Theorem 2.1.6. *Sei ρ die Präferenzrelation und $\rho*$ zugehörig. Dann gilt:*

$$x\rho y \Leftrightarrow \neq (x\rho * y)$$

eigene Notiz 2.1.7. *in Vorlesung ohne Beweis. Vll selber machen*

Mit diesem Theorem kann man auch ohne die Rangabbildung r zu kennen, aus gegebenen ρ das zugehörige $\rho*$ bestimmen.

Die Relationen sind also zueinander invers komplementär.

Definition 2.1.8 (Kollektive Auswahlfunktion)**.** *Sei $I = \{1, \ldots, n\}$ eine Wählermenge und $\mathcal{P}_A$ wie oben definiert. Die kollektive Auswahlfunktion ist gegeben durch*

$$K : \mathcal{P}_A^n \to \mathcal{P}_A$$

Dabei repräsentiert jedes $\mathcal{P}_A$ aus der Eingabemenge eine Präferenz eines Wählers. Die Kollektive Auswahlfunktion berechnet die Präferenz der Gesamtheit.

Wir haben zwei wesentliche Bedingungen an die Entscheidungsfunktion

- Die Abbildung K muss total sein, d.h. jedem Element des Definitionsbereiches muss ein Bild zugeordnet werden.
- Das Ergebnis der Wahl muss ebenfalls in $\mathcal{P}_A$ sein.

2.2 Beispiele für Entscheidungsverfahren

Das Ziel dieses Kapitels ist es, eine kollektive auswahlfunktion zu konstruieren, die besonders gerecht ist. Sei in diesem Kapitel $I = \{1, \ldots, n\}$ die Menge von Wählern mit den Präferenzrelationen $\rho_i \ \forall i \in I$.

2.2.1 externer Diktator

Es gilt für beliebiges aber festes ρ_E:

$$K^E_{\rho_E}(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \rho_E$$

Die ist offfensichtlich eine Abbildung

2.2.2 interner Diktator

Es gibt beim externen Diktator einen Wähler $d \in I$ mit

$$K^D_d(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \rho_d$$

2.2.3 Rangaddition

Zu jeder Individualpräferenz ρ_i gibt es eine Rangabbildung r. Bei der Rangaddition werden die Kandidaten nach der Summe ihrer Rangzahlen bewertet. Es ist $K^A(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ die Relation ρ mit

$$x\rho y :\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i(x) < \sum_{i=1}^{n} r_i(y)$$

Das Problem ist, dass dies i.A. keine Rangabbildung ist, da die Abbildung nicht surjektiv sein muss (z.B. kein Kandidat hat genau 5 Punkte). Eine mögliche Lösung ist es, die nicht erreichten Punkte zu streichen und die anderen Kandidaten aufrücken zu lassen.

2.2.4 Cordocct Verfahren

Dieses Verfahren vergleicht die Kandidaten paarweise miteinander. Die kollektive Präferenzrelation lautet damit:

$$x\rho y :\Leftrightarrow |\{i \in I | x\rho_i y\}| > |\{i \in I | y\rho_i x\}|$$

2.2.5 Einstimmigkeit

Setze Kandidat x vor y, falls alle Wähler x vor y setzen. Die Kollektive Auswahlpräferenz lautet:

$$x\rho y :\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \cdots n\} x\rho_i y$$

Falls nur ein Wähler x genau so schätzt wie y,gilt $y\rho^* x$. Deshalb ist dieses Verfahren in der Praxis kaum anwendbar. Außerdem muss das Ergebnis für die Kandidatenmenge A mit $|A| > 2$ nicht unbedingt in $\mathcal{P}_A$ sein, da nicht unbedingt jeder Kandidat plaziert werden kann.

2.2.6 Borda-Wahl

Jeder Wähler gibt den k Kandidaten Punkten. Der erst präferierte von Wähler i erhält k Punkte, der letzte 1 Pkt. Der Kandidat mit den meisten Punkten gewinnt.

2.3 Bedingungen an die Auswahlfkt und Satz von Arrow

Wir wollen zwei Bedingungen an ein gerechtes Verfahren stellen.

Parteo Bedingung: Die Gesamtheit für einen beliebigen Kandidaten kann durch eine Einstimmigkeit jede gewünschte Richtung erreichen.

Unabhängigkeit von irrelevanten Ereignisssen: Die Reihung zwischen zwei Kandidaten kann nicht dadurch geändert werdne, dass Wähler ihre Präferenz bzgl. eines dritten Kandidaten verändern.

Definition 2.3.1 (Pareto Bedingung). *Eine kollektive Auswahlfunktion* $K : \mathcal{P}_A^n \to \mathcal{P}_A$ *erfüllt die Pareto Bedingung, falls für alle* $\rho_i \in \mathcal{P}_A, i \in I$ *mit* $\rho = K(\rho_1, \dots, \rho_n)$ *und für alle Kandidaten* $x, y \in A$ *gilt:*

$$(\forall i \in O : x\rho_i y) \Rightarrow x\rho y$$

Die Pareto Bedingung kann auch für ρ^* definiert werden, nur ein Verfahren, das jeden Kandidaten immer gleich bewertet, würde die Bedingung auch erfüllen.

Definition 2.3.2 (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen/Ereignissen). *Eine kollektive Auswahlfkt* $K : \mathcal{P}_A^n \to \mathcal{P}_A$ *erfüllt die unabhängigkeit von irrelevanten Ereignissen, wenn*

$$\forall \rho_i, \rho_i' \in \mathcal{P}_A, i \in I$$

mit $\rho = K(\rho_1, \dots, \rho_n)$ *und* $\rho' = K(\rho_1', \dots, \rho_n')$ *und für alle* $x, y \in A$ *gilt:*

$$(\forall i \in I \text{ mit } x\rho_i y \Leftrightarrow x\rho_i' y) \Rightarrow (x\rho y \Rightarrow x\rho' y)$$

In Worten bedeutet das: Wenn kein Wähler seine Meinung bzgl x und y ändert, dann solte auch im Ergebnis die Reihung von x und y gleich bleiben.

Nur noch der interne Diktator erfüllt alle Bedingungen einschließlich der Pareto Bedingung und der unabhängigkeit von irrelevanten Ereignissen.

Theorem 2.3.3 (Satz von Arrow). *Es sei* A *mit* $|A| > 2$ *eine Kandidatenmenge und* $K : \mathcal{P}_A^n \to \mathcal{P}_A$ *eine kollektive Auswahlfkt, die die Pareto Bedingung erfüllt und die Unabhängigkeit von irrelevanten Ereignissen erfüllt. Dann gilt es einen internen Diktator. D.h.*

$$\exists d \in I : \forall (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathcal{P}_A^n : \forall (x, y) \in A \times A \ x\rho_d y \Rightarrow x\rho y$$

mit $\rho = K(\rho_1, \dots, \rho_n)$

Beweis. Seehr lang □

Lemma 2.3.4 (Extremallemma). *Für jede Alternative* y *gilt: Wenn jeder Wähler die Alternative* y *als bester („Top ") oder als letzter („Flop ") gewählt hat, dann muss die kollektive Auswahlfkt die Alternative* y *ebenfalls als „Top "oder „Flop "setzen.*

Remarks and Extensions (Alternative Formulierung des Satzes von Arrow). **demokratische Grundregeln:**

- Auswahlfkt K muss auf ganz $\mathcal{P}_A$ formuliert sein
- Ergebnis von K muss in $\mathcal{P}_A$ liegen
- Die Pareto Bedingung muss erfüllt sein
- die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen muss erfüllt sein
- es gibt keinen Diktator

Eine Alternative Formulierung von dem Satz von Arrow ist nun: Es kann keine kollektive Auswahlfunktion geben, die alle demoktratischen Grundregeln erfüllt.

2.4 Nicht-Manipulierbkeit von Wahlen

Das Problem beim Satz von Arrow ist es, dass das Einfügen von irrelevcanten Alternativen zwischen bevorzugten Kandidaten und Hauptkonkurrenten kann das Ergebnis beeinflussen.

Definition 2.4.1 (soziale Entscheidungsfkt). $e : \mathcal{P}_A^n \to A$

Definition 2.4.2 (Strategische Manipulation/ Anreizkompatibel). *Eine soziale Entscheidungsfunktion $e : \mathcal{P}_A^n \to A$ kann durch Wähler strategisch manipuliert werden, falls es Präferenzen $\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n, \rho_i' \in \mathcal{P}_A$ gibt, sodass $\rho_i \neq \rho_i'$*

$$a\rho_i b \text{ gilt für } a = e(\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n), b = e(\rho_1, \dots, \rho_i', \dots, \rho_n)$$

Die Fkt e heißt Anzeizkompatibel, falls e nicht strategisch manipulierbar ist.

Remarks and Extensions (zu definition Strategische Manipulation). e-manipulierbar, falls ein Wähler i, der b vor a präferiert, b erzwingen kann, wenn er statt seiner Präferenz ρ_i eine Präferenz $\rho_i' \neq \rho_i$ angibt.

Definition 2.4.3 (Monotonie). *Eine soziale Entscheidungsfkt e heißt monoton, falls aus $a = e(\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n), b = e(\rho_1, \dots, \rho_i', \dots, \rho_n)$ mit $a \neq b$ folgt, dass $a\rho_i b$ und $a_i' b$ gilt.*

Theorem 2.4.4. *Eine soziale Entscheidungsfunktion ist genau dann monoton, wenn sie Anreizkompatibel ist.*

Definition 2.4.5 (Diktator eine Entscheidungsfkt). *Wähler i heißt Diktator einer sozialen Entscheidungsfkt, falls für alle $\rho_1, \dots \rho_n \in \mathcal{P}_A$ gilt, dass $a = e(\rho_1, \dots, \rho_n)$,* *wobei a der eindeutig bestimmte Kandidat mit $a\rho_i b$ für alle $b \neq a$ ist. Die Fkt e heißt diktatorisch, falls er einen Diktator besitzt.*

Definition 2.4.6 (Top Menge). *Sei $S \subset A$ und $\rho \in \mathcal{P}_A$. Wir führen eine Präferenzrelation ρ^S ein. für*

$$\begin{aligned} a, b \in S &: a\rho^s b \Leftrightarrow s\rho b \\ a, b \notin S &: a\rho^s b \Leftrightarrow s\rho b \\ a \in S, b \notin S &; a\rho^S b \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass ρ^s dadurch eindeutig bestimmt ist.

Lemma 2.4.7 (Top Präferenz). *Sei e eine Anreizkompatible und surjektive Entscheidungsfkt. Dann gilt:*

$$\forall \rho_i, \dots \rho_n \in \mathcal{P}_A \text{ und } S \subset A, S \neq \emptyset \text{ gilt: } e(\rho_q^S, \dots, \rho_n^S) \in S$$

Definition 2.4.8 (Erweiterung der Entscheidungsfkt). *Die Funktion $E : \mathcal{P}_A^n \to \mathcal{P}_A$ ist die Erweiterung der sozialen Entscheidungsfkt e und ist definiert durch $E(\rho_1, \dots, \rho_n)$ wobei*

$$a\rho b :\Leftrightarrow e(\rho_1^{\{a,b\}}, \dots, \rho_n^{\{a,b\}}) = a \forall a, b \in A$$

Lemma 2.4.9. *Falls e eine Anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfkt ist, dann ist ihre Erweiterung eine kollektive Auswahlfkt.*