Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

12. Übungsblatt

Abgabe am 19.01.2016 vor der Vorlesung

Aufgabe 12.1 (3+2 Punkte). Gegeben sei ein Minimalkostenflussproblem auf dem Digraphen $D = (V, A)$ mit Kantenkapazitäten $u(a) \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$, Kosten $c(a) \in \mathbb{R}$, $a \in A$, und Knotenbalancen $b(v) \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Zeigen Sie:

i) Wenn das zugehörige LP zulässig ist, dann ist das LP genau dann unbeschränkt, wenn D einen unbeschränkten (bzgl. Kantenkapazitäten), gerichteten Kreis mit negativen Kosten enthält.

ii) Es sei $l(a) \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq l(a) < u(a)$, $a \in A$. Betrachte das Minimalkostenflussproblem mit der zusätzlichen Einschränkung $l(a) \leq x(a)$, $a \in A$. Dann gibt es ein äquivalentes Minimalkostenflussproblem, bei dem die Variablen nur durch Nichtnegativitätsbedingungen nach unten beschränkt sind.

Aufgabe 12.2 (2+3+3+3 Punkte). Gegeben sei ein Lineares Programm in Standardform. Die Restriktionsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ habe vollen Zeilenrang. Für ein $\varepsilon > 0$ definiere

$$\boldsymbol{b}(\varepsilon) := \boldsymbol{b} + (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m)^T.$$

Ersetzt man in dem Linearen Programm die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ durch $\boldsymbol{b}(\varepsilon)$, so erhält man das sogenannte ε-gestörte Problem. Es sei B eine Basismatrix.

i) Zeigen Sie, dass die zugehörige Basislösung $\boldsymbol{x}_B(\varepsilon)$ des ε-gestörten Problems durch

$$B^{-1} \cdot (\boldsymbol{b}|I_m) \cdot (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m)^T$$

gegeben ist.

ii) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon^* > 0$ gibt, so dass für $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ alle Basislösungen des ε-gestörten Problems nicht-degeneriert sind.

iii) Angenommen jede Zeile der Matrix $B^{-1} \cdot (\boldsymbol{b}|I_m)$ ist lexikographisch positiv. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein $\boldsymbol{x}_B(\varepsilon)$ eine zulässige Basislösung des ε-gestörten Problems ist.

(Bitte umblättern!)

iv) Angenommen B ist eine zulässige Basis des originalen Problems und jede Zeile von $B^{-1} \cdot (\boldsymbol{b}|I_m)$ ist lexikographisch positiv. Es sei x_j eine Nichtbasisvariable, die in die Basis aufgenommen wird. Die Variable, die die Basis verlässt, werde durch die lexikographische Pivotregel bestimmt. Zeigen Sie, dass die gleiche Variable die Basis verlässt wie beim analogen Pivotschritt des ε-gestörten Problems, vorausgesetzt $\varepsilon > 0$ ist hinreichend klein.

Programmieraufgabe 2. Implementieren Sie den Netzwerk-Simplex-Algorithmus in Python oder Java. Ihr Programm soll in der Lage sein, Minimalkostenflussprobleme mit nach oben beschränkten Kapazitäten zu lösen. Eine Menge von Beispielinstanzen und Informationen zum Datenformat werden auf der ISIS-Seite der Vorlesung zur Verfügung gestellt. Implementieren Sie die in der Übung vorgestellte Datenstruktur für Bäume. Pakete, die der Repräsentation von Graphen dienen, werden nicht benötigt und dürfen nicht benutzt werden.
Dokumentieren Sie Ihren Quellcode ausführlich und stellen Sie sicher, dass Ihr Programm mit einem einzelnen Aufruf mit einer Netzwerkinstanz als Parameter gestartet werden kann. Im Anschluss an die Berechnungen soll eine Ausgabe erfolgen, die mindestens den erreichten Zielfunktionswert und die benötigte Rechenzeit umfasst bzw. die Unzulässigkeit der Instanz. Sie dürfen annehmen, dass die Knoten des Netzwerks durchgehend nummeriert sind und alle Kapazitäten, Kosten etc. ganzzahlig sind.
Die Programmieraufgabe ist in den gleichen Gruppen zu bearbeiten wie die Hausaufgaben. Senden Sie alle Dateien, die zur Ausführung Ihres Programms nötig sind, bis zum **02.02.2016** an die E-Mailadresse Ihres Tutors. Weitere Details zur Implementierung finden Sie beispielsweise in

- *Ahuja, Magnanti, Orlin*, **Network Flows**, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1993

oder auf der ISIS-Seite.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

11. Übungsblatt

Abgabe am 12.01.2016 <u>vor</u> der Vorlesung

Aufgabe 11.1 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende LP mit der Tableau-Methode ausgehend von der initialen Basis $B(1) = 3$, $B(2) = 4$, $B(3) = 5$.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 5x_1 & + & 4x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 12 \\
& 4x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 16 \\
& x_1 & + & x_2 & & & & & & x_5 & = & 6 \\
& & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Aufgabe 11.2 (1+1+1+1+1+1 Punkte). Sofern nicht anders angegeben, betrachten wir ein LP in Standardform $\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$, s.t. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. Beweisen Sie jeweils die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:

i) Eine Basislösung $\boldsymbol{x}_B$ ist genau dann optimal, wenn die reduzierten Kosten $\bar{\boldsymbol{c}}$ positiv sind.

ii) Sei B eine optimale Basis. Erhöhen wir den Wert einer Nichtbasisvariablen auf größer Null und bestimmen $\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} - \sum_{j \neq B(1),\ldots,B(m)} B^{-1}A_j x_j$, so erhöht sich der Zielfunktionswert des LPs.

iii) Die Anzahl der positiven Einträge von $\boldsymbol{x}$ einer zulässigen Basislösung ist durch den Rang von A nach oben beschränkt.

iv) Zu jedem LP mit n unbeschränkten Variablen gibt es ein äquivalentes LP mit $n + 1$ nicht-negativen Variablen.

Im Folgenden nehmen wir an, dass A vollen Rang hat.

v) Eine Variable, die in die Basis aufgenommen wurde, kann in der nächsten Iteration nicht aus der Basis entfernt werden.

vi) Es sei $\boldsymbol{x}^*$ eine Optimallösung zu der Basis B. Angenommen es gibt eine zweitbeste zulässige Basislösung $\bar{\boldsymbol{x}}$ zur Basis $\bar{B}$, d.h. $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* < \boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ für alle zulässigen Basislösungen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$. Dann sind B und $\bar{B}$ adjazent.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 11.3 (2+4 Punkte). Gegeben sei das LP

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & -2x_1 & - & x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & -4x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

i) Bestimmen Sie ein äquivalentes LP in Standardform und bestimmen Sie eine zulässige Basislösung mit $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

ii) Bestimmen Sie eine Optimallösung des äquivalenten LPs mit dem Simplex-Algorithmus (Tableau oder revidierter Simplex) ausgehend von der in i) berechneten Basislösung.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

10. Übungsblatt

Abgabe am 05.01.2016 vor der Vorlesung

Aufgabe 10.1 (1+1+1+1+1 Punkte). Es sei $D = (V, A)$ ein (schwach) zusammenhängender Digraph mit $n = |V|$ Knoten und $m = |A|$ Kanten, Kantenkapazitäten $u_a > 0$, $a \in A$, und Knotenbalancen $b(v) \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Betrachten Sie die in der Vorlesung (Folie 9) diskutierte LP-Formulierung des Minimalkostenflussproblems und nehmen Sie an, dass $\sum_{v \in V} b(v) = 0$. Zeigen Sie:

i) Für die Matrix $M \in \{-1, 0, 1\}^{n \times m}$ der durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebenen Gleichheitsrestriktionen $Mx = b$ gilt $\operatorname{rank}(M) = n - 1$. Durch Streichen einer beliebigen Zeile von M ändert sich weder der Rang von M noch die Menge der zulässigen Lösungen.

Wir nehmen daher im Folgenden an, dass in unserem linearen Programm eine Zeile von $Mx = b$ gestrichen wurde, so dass die Matrix $\bar{M}$ des resultierenden linearen Gleichungssystems $\bar{M} \cdot x = \bar{b}$ vollen Zeilenrang besitzt.

ii) $x \in \mathbb{R}^A$ mit $\bar{M} \cdot x = \bar{b}$ ist genau dann eine Basislösung, wenn die Kantenmengen $A_x := \{a \in A \mid x_a \neq 0 \wedge x_a \neq u_a\}$ keinen (ungerichteten) Kreis enthält.

iii) Eine Basislösung $x \in \mathbb{R}^A$ ist genau dann nicht-degeneriert, wenn die Kantenmenge A_x einen aufspannenden Baum in dem D zugrunde liegenden ungerichteten Graph bildet.

iv) Für zwei adjazente Basislösungen $x, y \in \mathbb{R}^A$ bildet die Kantenmenge $\{a \in A \colon x_a \neq y_a\}$ einen ungerichteten Kreis.

v) Für zwei nicht-degenerierte adjazente Basislösungen $x, y \in \mathbb{R}^A$ ist $|A_x \cap A_y| \geq n - 2$.

Aufgabe 10.2 (2+2+2 Punkte). Gegeben sei das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie eine grafische Repräsentation von P und bestimmen Sie alle Ecken.

(Bitte umblättern!)

ii) Bestimmen Sie ein zu dem LP $\min\{c^T \cdot x \mid A \cdot x \leq b\}$ äquivalentes lineares Programm in Standardform. Ermitteln Sie alle Basismatrizen des LPs in Standardform.

iii) Geben Sie alle Basislösungen des LPs in Standardform an. Welche sind degeneriert und welche zulässig? Bestimmen Sie die zugehörigen Ecken des Polyeders P.

Aufgabe 10.3 (5 Punkte). Gegeben sei ein Polyeder durch die Ungleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & -2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 \\ 12x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 26 \\ -6x_1 & - & 9x_2 & + & 7x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 20 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die Punkte $(-8, 10, -13)^T$ und $(2, 0, 2)^T$ degenerierte, zulässige Basislösungen sind. Untersuchen Sie jeweils, aus welchem Grund Degeneriertheit vorliegt (siehe Folie 41) und ob die Basislösungen nach Entfernen einer redundanten Ungleichung nicht-degeneriert sind.

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

9. Übungsblatt

Abgabe am 15.12.2015 <u>vor</u> der Vorlesung

Aufgabe 9.1 (1+1+1+1 Punkte). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Beweisen Sie jeweils die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:

i) Eine konvexe Funktion $f_1 \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

ii) Eine konvexe Funktion $f_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig.

iii) Eine konvexe Funktion $f_3 \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

iv) Das Produkt $f_4 \cdot f_5$ zwei konvexer Funktionen $f_4, f_5 \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ ist konvex.

Aufgabe 9.2 (1+1+1+1 Punkte). Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Charakterisieren Sie, für welche Paare (s, t) das lineare Programm

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

i) mindestens eine Optimallösung hat,

ii) genau eine Optimallösung hat,

iii) unzulässig ist,

iv) unbeschränkt ist.

Aufgabe 9.3 (1+1+2 Punkte). Ein ganzzahliges lineares Programm ist ein lineares Programm mit der zusätzlichen Nebenbedingung, dass alle Variablen ganzzahlig sein müssen. Formulieren Sie die folgenden Probleme als ganzzahlige lineare Programme.

i) Gegeben seien zwei ganze Zahlen a und b. Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler von a und b.

ii) Gegeben seien N Gegenstände, wobei der i-te Gegenstand das Gewicht w_i und einen Wert v_i hat, $v_i, w_i \in \mathbb{N}$, sowie ein Rucksack, der höchstens das Gewicht c tragen kann. Der Rucksack soll so mit einer Auswahl der Gegenstände gepackt werden, dass der Wert der gepackten Gegenstände maximal ist, ohne dass das Gesamtgewicht c überschreitet.

(Bitte umblättern!)

iii) Gegeben sei eine Menge von Klauseln $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ in den Literalen $x_1, \ldots, x_n$, d.h. x_i ist eine Boole'sche Variable, $1 \leq i \leq n$, und ϕ_j ist von der Form

$$A_{k_1} \vee \ldots \vee A_{k_l},$$

wobei $A_i \in \{x_i, \neg x_i\}$, $1 \leq j \leq m$. Gesucht ist die maximale Anzahl gleichzeitig erfüllbarer Klauseln ϕ_j.

Aufgabe 9.4 (1+1+2 Punkte). Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Gesucht ist eine kardinalitätsmaximale Teilmenge $W \subseteq V$, so dass keine zwei Knoten in W durch eine Kante von G verbunden sind.

i) Formulieren Sie das Problem als ganzzahliges lineares Programm.

ii) Bestimmen Sie das ganzzahlige lineare Programm für den Graphen G in Abbildung 1 und geben Sie je eine Belegung Ihrer Variablen für eine zulässige, eine optimale und eine unzulässige Lösung an (falls möglich).

iii) Streichen Sie alle Integralitätsbedingungen und bestimmen Sie eine Optimallösung des resultierenden linearen Programms.

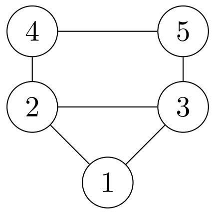

Abbildung 1: Der Graph G.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

8. Übungsblatt

Abgabe am 08.12.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 8.1 (4 Punkte). Seien $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, $1 \leq i \leq m$, und $P = H^-(\boldsymbol{a}_1, 1) \cap \ldots \cap H^-(\boldsymbol{a}_m, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ein n-Polytop. Zeigen Sie, dass diese Darstellung von P genau dann irredundant ist, wenn es für alle $i, j = 1, \ldots, m$ mit $\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{a}_j$ ein $\boldsymbol{x} \in P$ gibt, so dass $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle = 1$ und $\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x} \rangle < 1$.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte). Sei $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } \sum_{j=1}^n x_j \leq 1\}$ der Standardsimplex. Zeigen Sie, dass es n Polynome $p_1, \ldots, p_n$ in n Variablen gibt, so dass

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon p_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Hinweis: Für $n = 2$ ist eine solche Darstellung beispielsweise durch $p_1(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1 - x_2)$ und $p_2(x_1, x_2) = x_2(1 - x_2)$ gegeben.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte). Zwei Polytope $P \subset \mathbb{R}^n$, $Q \subset \mathbb{R}^m$ heißen affin äquivalent, wenn es eine bijektive, affine Abbildung $f \colon \operatorname{aff} P \to \operatorname{aff} Q$ gibt, so dass $f(P) = Q$.
Beweisen oder widerlegen Sie: Zwei affin äquivalente Polytope sind auch kombinatorisch äquivalent.

Aufgabe 8.4 (4 Punkte). Beweisen Sie die Monotonie des kombinatorischen Durchmessers, d.h. für $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, gilt

$$\Delta(n, m) \leq \Delta(n, m + 1).$$

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

WS 2015

7. Übungsblatt

Abgabe am 01.12.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 7.1 (3+1 Punkte).

i) Seien $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Momentkurve, $t_1 < \ldots < t_m$ reelle Zahlen und $C(n,m) = \operatorname{conv}\{\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)\}$ ein zyklisches Polytop. Sei $T = \{t_{i_1}, \ldots, t_{i_{k+1}}\}$, $1 \le k \le n-1$, $1 \le i_1 < \ldots < i_{k+1} \le m$, und
$$T = Y_1 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_l \cup Y_2$$
eine Partition der Form $Y_1 = \{t_1, t_2, \ldots, t_a\}$, $Y_2 = \{t_b, t_{b+1}, \ldots, t_m\}$, $0 \le a, b \le m$, sowie $X_i = \{t_{a_i}, t_{a_i+1}, \ldots, t_{b_i}\}$, $1 < a_i \le b_i < m$, $1 \le i \le l$, mit $b_i + 2 \le a_{i+1}$ für $1 \le i \le l-1$. Beweisen Sie, dass $\gamma(t_{i_1}), \ldots, \gamma(t_{i_{k+1}})$ genau dann die Ecken einer k-Seite sind, wenn
$$\#\{X_i \colon 1 \le i \le l,\ \#X_i \text{ ungerade}\} \le n-k-1.$$

ii) Beweisen Sie, dass je zwei zyklische Polytope P, Q in Dimension n mit m Ecken kombinatorisch äquivalent sind, d.h. es gibt eine Bijektion $f : \operatorname{vert} P \to \operatorname{vert} Q$, so dass $\operatorname{conv} W$ genau dann eine Seite von P ist, wenn $\operatorname{conv} f(W)$ eine Seite von Q ist, für alle $W \subseteq \operatorname{vert} P$.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte). Sei $P(n,m) \subset \mathbb{R}^n$ ein geschachteltes Polytop wie in Theorem 3.34 aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass
$$f_i(P(n,m)) = \begin{cases} m\binom{n}{i} - i\binom{n+1}{i+1}, & 0 \le i \le n-2, \\ n+1+(m-(n+1))(n-1), & i = n-1. \end{cases}$$

Aufgabe 7.3 (4 Punkte). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Ist K die Lösungsmenge eines Systems $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{0}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann heißt K *polyedrisch.* Gilt $K = \operatorname{pos} W$ für eine endliche Menge $W \subset \mathbb{R}^n$, dann ist K *endlich erzeugt.*
Beweisen Sie: Ein Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist.

Aufgabe 7.4 (2+1+1 Punkte). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. K heißt *spitz*, wenn K keine Gerade enthält. Zeigen Sie:

i) Ein abgeschlossener, konvexer Kegel K ist genau dann spitz, wenn $\boldsymbol{0}$ eine Ecke von K ist.

ii) Ein polyedrischer Kegel $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle \le 0, 1 \le i \le m\}$, $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le m$, ist genau dann spitz, wenn $\operatorname{lin}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\} = \mathbb{R}^n$.

iii) Ist $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop, dann ist $\operatorname{pos}(P \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein spitzer Kegel.

(Bitte umblättern!)

Programmieraufgabe 1. Implementieren Sie die Methode der doppelten Beschreibung in homogener Form. Ihr Programm soll in der Lage sein, eine Textdatei im Format

```
m n+1
H
```

einzulesen, wobei jede Zeile $\boldsymbol{h}$ der Matrix $H \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ eine definierende Ungleichung $\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{x} \rangle \geq \mathbf{0}$ repräsentiert, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Benutzen Sie Gleitkommazahlen als Datentyp, um Objekte im Computer darzustellen. Achten Sie darauf, bei Vergleichen und vordefinierten Methoden eine Toleranz von 10^{-12} zu verwenden, um den Effekt von Rundungsfehlern zu minimieren. Als Programmiersprachen sind Python und Java zugelassen. In Python können sie auf die Pakete NumPy (`www.numpy.org`) und SciPy (`scipy.org`) zurückgreifen, die Datentypen und Methoden der numerischen linearen Algebra bereitstellen, sowie auf ein Skript (Link), das den Rang einer Matrix unter Beachtung einer Toleranz berechnet. In Java nutzen Sie die Bibliothek EJML (`ejml.org`). Die Programmieraufgabe ist in den gleichen Gruppen zu bearbeiten wie die Hausaufgaben. Senden Sie alle Dateien, die zur Ausführung Ihres Programms nötig sind, bis zum **15.12.2015** an die E-Mailadresse Ihres Tutors. Auf der ISIS-Seite finden Sie Beispielinstanzen, um Ihre Implementierung zu testen, sowie eine Beschreibung des Algorithmus in Pseudocode.

Technische Universität Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

6. Übungsblatt

Abgabe am 24.11.2015 <u>vor</u> der Vorlesung

Aufgabe 6.1 (2+2 Punkte). Seien $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ und $P = H^-(\boldsymbol{a}_1, 1) \cap \ldots \cap H^-(\boldsymbol{a}_m, 1)$ ein Polytop in irredundanter Darstellung, d.h. $P \cap H(\boldsymbol{a}_i, 1)$ ist eine Facette von P, $1 \leq i \leq m$. Sei $F = P \cap H(\boldsymbol{a}_1, 1) \cap \ldots \cap H(\boldsymbol{a}_k, 1)$. Zeigen Sie:

i) F ist eine Seite von P und $\dim F = \dim(H(\boldsymbol{a}_1, 1) \cap \ldots \cap H(\boldsymbol{a}_k, 1))$.

ii) Ist $F \neq \emptyset$ und $\boldsymbol{a}_1$ eine affine Kombination von $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, dann ist $F = P \cap H(\boldsymbol{a}_2, 1) \cap \ldots \cap H(\boldsymbol{a}_k, 1)$.

Aufgabe 6.2 (2+2 Punkte).

i) Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein einfaches n-Polytop. Zeigen Sie, dass jede j-Seite von P in genau $\binom{n-j}{k-j}$ k-Seiten von P enthalten ist (Theorem 3.23v) aus der Vorlesung).

ii) Sei P ein n-Polytop. Beschreiben Sie $\mathrm{pos}(P \times \{1\}) = \mathrm{pos}\{(\boldsymbol{x}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \boldsymbol{x} \in P\}$ als positive Hülle endlich vieler Vektoren sowie als Schnitt von endlich vielen Halbräumen.

Aufgabe 6.3 (1+3 Punkte). Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $\boldsymbol{0}$-symmetrisch, wenn $X = -X$. Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{0}$-symmetrisch. P heißt *Hanner-Polytop*, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $n = 1$,
- $P = P_1 \times P_2$, wobei P_1, P_2 Hanner-Polytope sind,
- P^* ist ein Hanner-Polytop.

Zeigen Sie:

i) Das kartesische Produkt $P_1 \times P_2$ zweier Polytope P_1 und P_2 ist ein Polytop.

ii) Ein Hanner-Polytop P hat genau $3^{\dim P}$ nicht-leere Seiten.

Aufgabe 6.4 (1+1+2 Punkte). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt mit $\boldsymbol{0} \in \mathrm{int}\, K$, und sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum. Sei $K|L$ die (orthogonale) Projektion von K auf L und $h(K, \cdot)$ die Stützfunktion von K.

i) Zeigen Sie, dass $h(K, \boldsymbol{u}) = h(K|L, \boldsymbol{u})$ für alle $\boldsymbol{u} \in L$ gilt.

ii) Zeigen Sie, dass $K^* \cap L = (K|L)^*$, wobei hier $(K|L)^*$ nur in L berechnet wird, d.h. $(K|L)^* = \{\boldsymbol{y} \in L \colon \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq 1, \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in K|L\}$.

iii) Beweisen oder widerlegen Sie: Ein n-Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ ist der Schnitt eines Simplizes mit einem linearen Unterraum, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, einen Simplex $T \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und einen Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, so dass $P \times \{\boldsymbol{0}\} = T \cap L$.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

5. Übungsblatt

Abgabe am 17.11.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 5.1 (2+2 Punkte). Beweisen Sie:

i) Ein n-dimensioner Simplex hat genau $\binom{n+1}{i+1}$ i-Seiten.

ii) Sei P ein n-Polytop. Dann gilt $f_i(P) \geq \binom{n+1}{i+1}$ mit Gleichheit genau dann, wenn P ein Simplex ist.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte). Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein $(n-1)$-dimensionales Polytop in der Hyperebene H, sowie $\boldsymbol{s}^+ \in \operatorname{int} H^+$, $\boldsymbol{s}^- \in \operatorname{int} H^-$ mit $\operatorname{conv}\{\boldsymbol{s}^-, \boldsymbol{s}^+\} \cap \operatorname{relint} Q \neq \emptyset$. Bestimmen Sie den f-Vektor

i) der Pyramide $\operatorname{conv}\{Q, \boldsymbol{s}^+\}$,

ii) der Doppelpyramide $\operatorname{conv}\{Q, \boldsymbol{s}^+, \boldsymbol{s}^-\}$,

iii) des Prismas $\operatorname{conv}\{Q, \boldsymbol{s}^+ + Q\}$,

in Abhängigkeit des f-Vektors von Q.

Aufgabe 5.3 (1+1+1+1 Punkte). Sei P ein n-Polytop, und sei $k \in \{2, \dots, n\}$. Das Polytop P heißt *k-nachbarschaftlich*, falls jede k-elementige Teilmenge $U \subset \operatorname{vert}(P)$ eine eigentliche Seite von P ist, d.h. $\operatorname{conv} U$ ist Seite von P. Für ein k-nachbarschaftliches Polytop zeige man:

i) Je k Ecken von P sind affin unabhängig.

ii) Jede $(k-1)$-Seite ist ein Simplex.

iii) P ist m-nachbarschaftlich für $1 \leq m \leq k$.

iv) Ist $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, dann ist P ein Simplex.

Aufgabe 5.4 (2+1+1 Punkte). Seien $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a}^{(i)}, \boldsymbol{b}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ und $S_i = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{a}^{(i)}, \boldsymbol{b}^{(i)}\}$, $1 \leq i \leq m$. Die Minkowski-Summe $Z = S_1 + \ldots + S_m$ heißt *Zonotop*. Zeigen Sie:

i) Ein Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein von m Segmenten erzeugtes Zonotop, wenn es eine affine Abbildung $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $T([-1,1]^m) = P$.

ii) Z ist symmetrisch, d.h. es gibt einen Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass $Z = \boldsymbol{x} - Z$.

iii) Die Stützfunktion von Z ist gegeben durch

$$h(Z, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{m} \max\{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}^{(i)} \rangle, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}^{(i)} \rangle\}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

4. Übungsblatt

Abgabe am 10.11.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 4.1 (2+2 Punkte).

i) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale, kompakte, konvexe Menge sowie $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{aff} Q$. Sei $P = \operatorname{conv}\{Q, \boldsymbol{s}\}$ eine Pyramide und h der Abstand zwischen der Spitze $\boldsymbol{s}$ und $\operatorname{aff} Q$. Zeigen Sie
$$\operatorname{vol}_n(P) = \frac{h}{n} \operatorname{vol}_{n-1}(Q).$$

ii) Beweisen Sie, dass jedes n-Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ die (orthogonale) Projektion eines geeignetes Simplex $T \subset \mathbb{R}^N$ mit $N \geq n$ ist.

Aufgabe 4.2 (2+2 Punkte). Seien $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^n$ n-Polytope und $P = P_1 + P_2$. Zeigen Sie:

i) P ist ein Polytop mit $f_0(P) \leq f_0(P_1) \cdot f_0(P_2)$.

ii) Sei F eine Seite von P. Dann gibt es Seiten F_i von P_i, $i = 1, 2$, so dass $F = F_1 + F_2$, und diese Zerlegung ist eindeutig.

Hinweis: Aufgabe 3.2 ist hier nützlich.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte). Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Kegel mit $K_1 \cap K_2 = \{\mathbf{0}\}$ und $\operatorname{int} K_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass es ein $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ gibt, so dass $\boldsymbol{x} \in K_1^* \cap (-K_2^*)$.

Aufgabe 4.4 (1+3 Punkte). Sei $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0\}$.

i) Zeigen Sie, dass K ein konvexer Kegel ist.

ii) Bestimmen Sie K^*.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

3. Übungsblatt

Abgabe am 03.11.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 3.1 (2+2 Punkte). Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

i) Beweisen Sie die folgende Variante von Farkas Lemma: Es gibt ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ genau dann, wenn $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}\rangle \geq \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ mit $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ und $A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

ii) Bestimmen Sie den Rezessionskegel und den Linealitätsraum von $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$.

Aufgabe 3.2 (2+2 Punkte).

i) Seien $K_1, \cdots, K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere konvexe Mengen, so dass auch $K_1 \cup \cdots \cup K_m$ konvex ist. Beschreiben Sie die Stützfunktionen von $K_1 + \cdots + K_m$ und $K_1 \cup \cdots \cup K_m$ in Abhängigkeit von den Stützfunktionen $h(K_i, \cdot)$.

ii) Seien $B_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ und $B_n^1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$. Berechnen Sie die Stützfunktionen von B_n und B_n^1.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte). Beweisen Sie Theorem 2.6 aus der Vorlesung: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \mathbb{R}^n$, konvex und abgeschlossen sowie $\dim K = n$. Dann gilt

$$K = \bigcap_{\substack{H(\boldsymbol{a},\alpha) \text{ Stütz-} \\ \text{hyperebene von } K}} H^-(\boldsymbol{a}, \alpha).$$

Aufgabe 3.4 (2+2 Punkte).

i) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in X} T(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{x}\in \operatorname{conv}(X)} T(\boldsymbol{x}).$$

ii) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ das Hexagon mit Ecken $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie K^* als die konvexe Hülle endlich vieler Punkte.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

2. Übungsblatt

Abgabe am 27.10.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 2.1 (1+1+1+1 Punkte).

i) Seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte, deren euklidischer Abstand zu $\boldsymbol{a}$ nicht größer ist als zu $\boldsymbol{b}$, ein abgeschlossener Halbraum ist.

ii) Zeigen Sie, dass ein abgeschlossener Halbraum Durchschnitt von offenen Halbräumen ist.

iii) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{int}(B_n) \subseteq K \subseteq B_n$. Zeigen Sie, dass K konvex ist.

iv) Zeigen Sie, dass $K = \operatorname{int}[0,1]^2 \cup \operatorname{conv}\{(1/4,0)^\intercal, (3/4,0)^\intercal\}$ eine konvexe Menge ist, die kein Durchschnitt von offenen Halbräumen ist.

Aufgabe 2.2 (1+1+1+1 Punkte).

i) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f\colon K \to \mathbb{R}$. Die Menge $\Gamma_f = \left\{(\boldsymbol{x}^T, x_{n+1})^T : \boldsymbol{x} \in K, x_{n+1} \geq f(\boldsymbol{x})\right\}$ heißt Epigraph von f. Zeigen Sie: Γ_f ist genau dann konvex, wenn f konvex ist.

ii) Set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin. Zeigen Sie, dass jedes lokale Maximum (Minimum) von f ein globales Maximum (Minimum) ist.

iii) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Funktion. Zeigen Sie: $f(X)$ ist konvex.

iv) Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Man zeige: $K_1 + K_2$ ist konvex.

Aufgabe 2.3 (2+2 Punkte).

i) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Man zeige: $\operatorname{conv} X$ ist kompakt.

ii) Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen sowie K_1 kompakt, K_2 abgeschlossen und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Man zeige, dass es eine streng trennende Hyperebene von K_1 und K_2 gibt, d.h. es gibt ein $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $K_1 \subset \operatorname{int} H^-(\boldsymbol{a}, \alpha)$ und $K_2 \subset \operatorname{int} H^+(\boldsymbol{a}, \alpha)$.

Aufgabe 2.4 (2+2 Punkte).

i) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, und sei $\mathcal{X}$ eine endliche Familie konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass für je $n+1$ Mengen $X_1, \ldots, X_{n+1} \in \mathcal{X}$ ein $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $(\boldsymbol{t} + C) \subseteq \cap_{i=1}^{n+1} X_i$. Zeigen Sie, dass es dann auch ein $\bar{\boldsymbol{t}} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $(\bar{\boldsymbol{t}} + C) \subseteq \cap_{X \in \mathcal{X}} X$.

ii) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $\mathcal{H}$ eine endliche Familie von Halbräumen, die C überdeckt, d.h. $C \subseteq \cup_{H \in \mathcal{H}} H$. Zeigen Sie, dass es $n+1$ Halbräume in $\mathcal{H}$ gibt, die C überdecken.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

1. Übungsblatt

Abgabe am 20.10.2015 vor der Vorlesung

Aufgabe 1.1 (4 Punkte). Sei $m \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ genau dann affin unabhängig sind, wenn für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ die Vektoren $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_k$, $1 \leq i \neq k \leq m$, linear unabhängig sind.

Aufgabe 1.2 (1+2+1 Punkte). Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$. C heißt Kegel, falls für jedes $\boldsymbol{x} \in C$ gilt $\{\lambda \boldsymbol{x} : \lambda \geq 0\} \subseteq C$.

i) Geben Sie ein Beispiel für einen nicht konvexen Kegel an.

ii) Sei C ein Kegel. Zeigen Sie, dass C genau dann ein konvexer Kegel ist, wenn $C + C = C$.

iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}\} \quad \text{und} \quad \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \colon M \text{ ist positiv semidefinit}\}$$

konvexe Kegel sind.

Aufgabe 1.3 (3+1 Punkte). Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ gelte $\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2} \in C$.

i) Beweisen Sie, dass C konvex ist.

ii) Kann auf die Abgeschlossenheit von C verzichtet werden? Geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 1.4 (1+1+1+1 Punkte). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Falls $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, dann ist auch $\operatorname{conv} X$ abgeschlossen.

ii) Falls X konvex, dann ist auch $\operatorname{cl} X$ konvex.

iii) Falls $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist auch $\operatorname{conv} X$ offen.

iv) Seien $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$. Es gilt $\operatorname{conv}\{X_1 + X_2\} = \operatorname{conv} X_1 + \operatorname{conv} X_2$.

Technische Universität
Berlin

Prof. Dr. Martin Henk
Prof. Dr. Martin Skutella
Hannes Pollehn

Geometrische Grundlagen der Linearen Optimierung I

WS 2015

0. Übungsblatt

Besprechung in den Tutorien vom 19.10.-20.10.2015

Aufgabe 0.1. Eine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt affin, falls es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und ein $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{t}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

i) g ist genau dann affin, wenn $g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{0})$ linear ist.

ii) $\mathrm{Bild}(g)$ ist ein affiner Unterraum.

iii) Ist g injektiv und $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^m$ affin unabhängig, dann sind auch $g(\boldsymbol{x}_1), \ldots, g(\boldsymbol{x}_k)$ affin unabhängig.

Aufgabe 0.2. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ affine Unterräume. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Dimensionsformel für lineare Unterräume:

$$\dim(A) + \dim(B) - \dim(A + B) \begin{cases} = \dim(A \cap B), & \text{falls } A \cap B \neq \emptyset \\ \geq -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 0.3. Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eine lineare Abbildung $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $P(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$, heißt *orthogonale Projektion*, falls es einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für alle $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{v} \in U^\perp$ gilt: $P(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ und $P(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$.
Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

i) P ist eine Projektion.

ii) Es gibt einen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass

$$P(\boldsymbol{x}) \in U, \quad \boldsymbol{x} - P(\boldsymbol{x}) \in U^\perp$$

für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii) $P \circ P = P$ und $\ker(P) \perp \mathrm{Bild}(P)$.

iv) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$, so dass $XX^\intercal = M$ und $X^\intercal X = I_k$.

v) M ist symmetrisch und besitzt nur die Eigenwerte 0 und 1.