

Simulation und Modellierung - Fragen

10. Februar 2016

1 Spieltheorie

Was ist eine strategische Normalform?

Mit der strategischen Normalform kann ich ein Spiel mathematisch darstellen. Dazu die Strategiemenge, also alle Strategien von allen Spielern und die Auszahlungsfunktion angegeben.

Nutzenmatrix, Auszahlungsfkt, Zeilen/ und Spaltenspieler erklären können

Die Auszahlungsfkt beschreibt den Nutzen eines Strategiepaares für einen Spieler. Der Nutzen ist dabei eine reelle Zahl und beschreibt, wie sehr sich das Strategiepaar für den Spieler lohnt. Das Strategiepaar ist ein Paar aus einer Strategie von Spieler A und Spieler B.

Die Nutzenmatrix hat im ij -ten Eintrag den Nutzen der Strategien von Spieler A und B zu dem Strategiepaar ij .

Der Zeilenspieler ist der Spieler A und der Spaltenspieler der Spieler B?

zu einem gegebenen Bsp Nutzenmatrix aufstellen können

Betrachten wir das Gefangenendilemma. Dabei werden Bankräuber A und B verhaftet. Falls beide nicht gestehen bekommen sie beide 7 Jahre Gefängnis. Falls beide gestehen je 3 Jahre. Falls einer Kronzeuge wird, dieser 1 Jahr und der andere 9.

Die daraus resultierende Nutzenmatrix lautet:

$$\begin{pmatrix} (-7, -7) & (-1, -9) \\ (-9, -1) & (-3, -3) \end{pmatrix}$$

Was ist eine Reaktionsabb?

Bei der Reaktionsabbildung schaut ein Spieler sich jede Strategie vom Gegner an und wählt seine optimalen Antworten aus. Dieses ist das Bild der Reaktions-

abbildung. Mathematisch:

$$r_X : S_{-X} \rightarrow P(S)$$

$$y \mapsto \{\hat{x} \in S_X | U_X(\hat{x}, y) = \max_{x \in S_X} U_X(x, y)\}$$

Anhand einer gegebenen Bsp-Nutzenmatrix die Begriffe dominante Strategie, gemischte Strategie und Nashgleichgewicht erklären

Bei dem Gefangenendilemma ist gestehen die dominante Strategie, da gestehen immer die beste Antwort ist, egal, was der Gegner tut.

Die Dominante Strategie kann man auch gut bei dem Spiel Stein-Schere-Papier-Brunnen erklären. Die Nutzenmatrix hat folgende Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Zeile bzw Spalte 1 ist strikt kleiner als die letzte Zeile/Spalte. Deswegen dominiert der Brunnen den Stein.

Ein Nashgleichgewicht liegt vor, wenn sowohl die Strategie a die optimale Antwort auf Strategie b ist, als auch b die optimale Antwort auf die Strategie a ist. Bei dem Gefangen Dilemma ist dies, wenn beide Spieler gestehen. Falls Der Spieler A gesteht, dann möchte der Spieler B ebenfalls gestehen (andernfalls würde er 9 Jahre bekommen) und andersrum genauso.

Gemischte Strategien hat man, wenn man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eine Strategie wählt z.B. bei Stein-Schere Papier wäre eine gemischte Strategie gleichverteilt zu spielen.

2 Gruppenentscheidungen

Welche Eigenschaften für Relationen haben wir kennengelernt?

Wir haben folgende Eigenschaften kennengelernt:

Reflexiv: jedes Element steht in relation zu sich selbst.

Transitiv: $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

symmetrisch: Falls xRy dann gilt auch yRx

asymmetrisch: Falls xRy so gilt nicht yRx

konvex: Je zwei Elemente müssen in Relation zueinander stehen. Also xRy oder yRx

Was ist eine Rangabbildung?

Eine Rangabbildung spiegelt die Meinung eines Wählers wieder. Eine Kandidatenmenge wird auf einen Abschnitt aus den natürlichen Zahlen abgebildet. Eine Rangabbildung muss surjektiv sein, also jeder Rang muss vergeben werden. Dabei gilt: je kleiner der Rang von einem Kandidaten, desto bevorzugter ist der Kandidat.

Begriffe, wie z.B. externer/ interner Diktator / Einstimmigkeit erklären können

externer Diktator

Ein Mensch, der kein Wähler ist, bestimmt den Ausgang der Wahl. Mathematisch hat die kollektive Auswahl fkt egal bei welcher Eingabe, die Ausgabe, die der Diktator möchte. $K(\rho_1, \dots, \rho_n) = \rho_E$

interner Diktator

Hier bestimmt ein Wähler, welches Ergebnis bei der Wahl rauskommt. Also Der Ausgang ist immer durch den i-ten Wähler genau festgelegt, egal, was die anderen wählen. $K(\rho_1, \dots, \rho_n) = \rho_i$

Einstimmigkeit

Ein Kandidat x wird nur vor y gesetzt, falls alle Wähler x besser finden als y. d.h. $x\rho y \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : x\rho_i y$

Dieses Verfahren ist kaum anwendbar, da sowas eig nie passiert. Außerdem muss das Einstimmigkeitsprinzip keine Relation liefern, da manche Kandidaten keinem Rang zugeordnet werden.

Was ist das Cordocct Verfahren? Am geg. Bsp erklären

In diesem Verfahren vergleicht man immer zwei Kandidaten miteinander. Man nehme zwei Kandidaten und alle Präferenzrelationen der n Wähler und zählt die Vergleiche, die Kandidat A und die Kandidat B gewinnt. Gewinnt A mehr Vergleiche, so ist Kandidat A vor Kandidat B. Dies tut man nun für alle Kandidaten.

Die Formale Definition lautet: $x\rho y \Leftrightarrow |\{i \in J | x\rho_i y\}| > |\{i \in J | y\rho_i x\}|$

Das Problem bei dieser Wahl ist, dass Zykel entstehen können. Es kann passieren, dass Kandidat A von B vor C vor A ist. Das wollen wir natürlich nicht.

Ein Beispiel ist die demokratische Familie.

Was ist die Pareto bedingung? Unabhängig von irrelevanten Alternativen

Pareto bedingung

Die Pareto bedingung besagt, dass falls sich alle Wähler einig sind, jedes mögliche Wahlergebnis erreichbar sein muss.

Formaler: Die kollektive Auswahl fkt $K : P_A^n \rightarrow P_A$ erfüllt die Pareto bedingung, wenn für alle $\rho_i \in P_A, i = 1, \dots, n$ mit $\rho = K(\rho_1, \dots, \rho_n)$ und für alle $x, y \in A$ gilt:

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\} : x \rho_i y) \Rightarrow x \rho y$$

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Die unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen sagt, dass die Reihenfolge von zwei Kandidaten sollte nicht dadurch geändert werden können, dass Wähler ihre Präferenz bzgl eines dritten Kandidaten verändern.

Formal:

Eine kollektive Auswahl funktion $K : P_A^n \rightarrow P_A$ erfüllt die **Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen**, wenn $\forall \rho_i \rho'_i \in P_A \quad i = 1, \dots, n$ mit $\rho = K(\rho_1, \dots, \rho_n), \rho' = K(\rho'_1, \dots, \rho'_n)$ und für alle $x, y \in A$ gilt:

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\} x \rho_i y) \Rightarrow (x \rho y \Leftrightarrow x \rho' y)$$

Satz von Arrow (Satz III.4), Aussage + Beweis können, also auch Lemma III.5

Satz von Arrow

Es zeigt sich im Satz von Arrow, dass kein Verfahren, außer der Interne Diktator alle Bedingungen an ein Verfahren erfüllt.

Formal:

Es sei A mit $|A| > 2$ eine Kantenmenge und $K : P_A^n \rightarrow P_A$ eine kollektive Auswahl funktion, die die Pareto-Bedingung sowie Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt, dann gibt es immer einen (internen) Diktator, das heißt es existiert ein $d \in \{1, \dots, n\}$ sodass für alle $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in P_A^n$ gilt

$$\forall (x, y) \in A \times A : x \rho_d y \Rightarrow x \rho y \text{ mit } \rho = K(\rho_1, \dots, \rho_n)$$

Extremallemma

Es gelten die Annahmen aus dem Satz von Arrow. Dann gilt für jede Alternative y :

Wenn jeder Wähler die Alternative y als beste („Top“) oder als letzte („Flop“) Alternative wählt, dann muss die kollektive Auswahl funktion die Alternative y ebenfalls „Top“ oder „Flop“ setzen.

To do: beide Beweise ansehen

Was ist eine strategische Manipulation, Top Menge, Diktator einer Entscheidungsfkt

Zunächst braucht man die Definition der sozialen Entscheidungsfkt:

Die soziale Entscheidungsfkt bildet die Menge der Präferenzen von den Wählern auf die Menge der Kandidaten ab. Also wird jede Präferenz aller Wähler genau ein Kandidat zugeordnet. Dieser Kandidat ist der Sieger der Wahl. Formale Definition:

Eine Funktion $e : P_A^n \rightarrow A$ heißt **soziale Entscheidungsfunktion**

Strategische Manipulation

Die soziale Entscheidungsfkt heißt strategisch manipulierbar, falls ein Wähler der den Kandidaten B vor den Kandidaten A präferiert, statt seiner Präferenz eine andere angeben kann und damit den Kandidaten B erzwingen kann.

Die soziale Entscheidungsfkt heißt Anreizkompatibel, falls sie nicht manipulierbar ist.

Die formale Definition von strategisch Manipulierbar lautet:

Eine soziale Entscheidungsfunktion $e : P_A^n \rightarrow A$ kann durch den Wähler i **strategisch manipuliert** werden, falls es Präferenzen $\rho_1, \dots, \rho_n, \rho'_i \in P_A$ gibt mit $\rho_i \neq \rho'_i$, sodass

$$b \rho_i a \text{ gilt für } a = e(\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n) \text{ und } b = e(\rho_1, \dots, \rho'_i, \dots, \rho_n)$$

Top Menge

Eine Topmenge ist nicht, wie der Name scheint, durch eine Eigenschaft der Menge definiert, sondern durch die Relation, die auf einer Menge von Kandidaten gebildet wird. Die ursprüngliche Relation wird geändert, falls ein Element aus der Top-Menge ist und eines nicht: Dann gilt dass das Element aus der Topmenge immer in Relation zu dem aus der nicht Topmenge steht und nicht andersherum.

Formaler:

Sei $S \subseteq A$ und $\rho \in P_A$. Wir führen eine weitere Präferenzrelation ρ^S folgendermaßen ein:

- für $a, b \in S$: $a \rho^S b \Leftrightarrow a \rho b$
- für $a, b \notin S$: $a \rho^S b \Leftrightarrow a \rho b$
- für $a \in S, b \notin S$: $a \rho^S b$

Man kann zeigen, dass ρ^S dadurch eindeutig bestimmt ist.

Diktator einer Entscheidungsfkt

Auch hier ist der Diktator, wie schon vorher definiert. Falls es einen Wähler gibt, dessen Wahl immer das Gesamtergebnis ist, dann ist dieser Wähler der Diktator.

Formal:

Wähler i heißt **Diktator in einer sozialen Entscheidungsfunktion**, falls für alle $\rho_1, \dots, \rho_n \in P_A$ gilt, dass

$$e(\rho_1, \dots, \rho_n) = a$$

wobei a der eindeutig bestimmte Kandidat $a\rho_i b$ für alle $b \neq a$ ist. Die Funktion e heißt **diktatorisch**, falls e einen Diktator besitzt.

Satz III.8/ Satz III.10/ Satz III.12/ Satz III.13 und Satz III.14 erklären und beweisen können

Theorem 1. *Eine soziale Entscheidungsfunktion ist genau dann monoton, wenn sie anreizkompatibel ist.*

Proof. Sei e monoton. Wann immer $e(\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n) = a$ und $e(\rho_1, \dots, \rho'_i, \dots, \rho_n) = b$ gilt, dann ist aufgrund der Monotonie $a\rho_i b$ und $b\rho'_i a$. Dann kann es aber auch keine $\rho_1, \dots, \rho_n, \rho'_i \in P_A$, sodass $e(\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n) = a$ und $e(\rho_1, \dots, \rho'_i, \dots, \rho_n) = b$ und $b\rho_i a$ gilt. Also ist keine Manipulation durch i möglich.

Umgekehrt kann man analog zeigen, dass jede Manipulationsmöglichkeit die Monotonie verletzt. \square

Theorem 2 (Top-Präferenz). *Sei e eine anreizkompatible und surjektive Entscheidungsfunktion. Dann gilt für alle $\rho_1, \dots, \rho_n \in P_A$ und für alle $\emptyset \neq S \subseteq A$:*

$$e(\rho_1^S, \dots, \rho_n^S) \in S$$

Proof. Übung. \square

Theorem 3. *Falls e eine anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktion ist, dann ist ihre Erweiterung \mathcal{E} eine kollektiven Auswahlfunktion.*

Proof. zu zeigen ist: $\rho \in P_A$

Asymmetrie: Wegen Lemma 2 gilt mit $e(\rho_1^{\{a,b\}}, \dots, \rho_n^{\{a,b\}}) \in \{a, b\}$ entweder $a\rho b$ oder $b\rho a$.

Transitivität: Angenommen, ρ wäre nicht transitiv, daas heißt es gelte $a\rho b$ und $b\rho c$ aber nicht $a\rho c$. Wegen der Asymmetrie gilt somit $c\rho a$.

Betrachte die Menge $S := \{a, b, c\}$. Dann sei o.b.d.A.:

$$e(\rho_1^{\{a,b,c\}}, \dots, \rho_n^{\{a,b,c\}}) = c$$

Aufgrund der Monotonie gilt

$$e(\rho_1^{\{b,c\}}, \dots, \rho_n^{\{b,c\}}) = c$$

durch schrittweise Änderung von $\rho_i^{\{a,b,c\}}$ auf $\rho_i^{\{b,c\}}$.

Also haben wir dann $c\rho b$ Widerspruch.

□

Theorem 4 (Erweiterungslemma). *Falls e eine anreizkompatible, surjektive und nicht-diktatorische Entscheidungsfunktion ist, so ist ihre Erweiterung \mathcal{E} eine kollektive Auswahlfunktion, die Einstimmigkeit, Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen und nicht-diktatorische Entscheidungen erfüllt.*

Proof.

Einstimmigkeit: Sei $a\rho_i b$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann ist wegen Lemma 2

$$e\left(\rho_1^{\{a,b\}}, \dots, \rho_n^{\{a,b\}}\right) = a$$

und somit $a\rho b$.

Unabhängigkeit irrelevanter Ereignisse: Falls für alle $i = 1, \dots, n$ gilt

$$a\rho_i b \Leftrightarrow a\rho'_i b$$

dann muss

$$e\left(\rho_1^{\{a,b\}}, \dots, \rho_n^{\{a,b\}}\right) = e\left(\rho_1'^{\{a,b\}}, \dots, \rho_n'^{\{a,b\}}\right)$$

gelten, da sich das Ergebnis wegen der Monotonie von e nicht ändert, wenn man $S_i^{\{a,b\}}$ schrittweise zu $S_i'^{\{a,b\}}$ verändert.

Diktator: Übung.

□

Theorem 5 (Satz von Gibbard-Satterthwaite). *Falls e eine surjektive, anreizkompatible Entscheidungsfunktion ist, so dass drei oder mehr Alternativen wählbar sind, dann ist e diktatorisch.*

3 Informationssuche im Netz

Was ist ein Page Rank Vektor, ein Webgraph und eine Hyperlinkmatrix? (auch am geg. Bsp erklären können)

Was ist ein Zufallssurfer?

Was ist eine Markovkette/ Markovprozess?

Was ist eine Übergangsmatrix/ Markoveigenschaft?

Wie kann man eine Markowkette für das Google-Problem benutzen?

Perron Frobenius Theorie erklären können und die entsprechenden Definitionen beherrschen, sowie Satz IV.1, Satz IV.2, Lemma IV.4, Satz IV.5 erklären und beweisen können

Erklären können, wie der Page Rank Vektor mittels Vektoriteration berechnet wird

Konvergenzgeschwindigkeit/ Sensitivitätsanalyse (Satz IV.8 erklären und beweisen können), Satz IV.9/ Satz IV.10 erklären und grobe Beweisskizze

Satz IV.11 und Satz IV.12 erklären und beweisen können

4 Verkehrssimulation

Grundidee der makroskopischen Verkehrssimulation

Begriffe: Fluss, dichte und Fundermentaldiagramm erklären können

Erhaltungssätze herleiten können (Anzahl der Autos)

Modellierung der Geschwindigkeit (über Relativgeschwindigkeit)

lineare DGL erklären (Gleichung für Störung)

Charakteristik erklären können und an einem geg. Bsp berechnen und skizzieren können

Numerische Approximation und CFL Bedingung erklären können

Ungleichförmiger Verkehr/Anfahrvorgang an grüner Ampel/ Anhalten an roter Ampel und unstetige Verkehrsdichte erklären

8

Grundidee Godunov Methode

Grundidee der Mikroskopischen Modellierung mittels Zellularer Automaten

4.1 Stochastische Verkehrssimulation: Wartesystem, exponentielle Verteilung, Poisson Prozess, Ausfallrate erklären und Satz V.1 beweisen können