



NEWTON METHODEN

SEMINARARBEIT
für das Seminar
OPTIMALE STEUERUNG

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Betreuung:

Prof. Dr. Benedikt Wirth

Eingereicht von:

Ines Ahrens

Münster, Mai 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Generalisierte Newton Methoden	2
2.1	Newton Methoden mit einfachen Nebenbedingungen	2
2.1.1	Konvergenz der generalisierten Newton Methode	3
2.1.2	Die klassische Newton Methode	6
2.2	verallgemeinerte Ableitung	6
2.3	semidiffbare Newton Methoden	10
2.3.1	semidiffbare Newtonmethoden für endlich dimensionale KKT Systeme	11
3	semidiffbare Newton Methoden in Funktionsräumen	14
3.1	Punktweise Randbedingungen in L^2	14
3.2	semidiffbarkeit von superpositions Operatoren	15
3.3	Punktweise Randbedingungen in L^2 überarbeitet	17
3.4	Anwendung für optimale Steuerung	18
3.5	Allgemeine Optimierungsprobleme mit Ungleichungsbedingungen in L^2	21
3.6	Anwendung für elliptische optimale Steuerung	22
3.6.1	Verteilte Kontrolle	22
3.6.2	Neumann Rand Bedingungen	25
3.7	Optimale Steuerung der nicht komprimierbaren Navier-Stokes Gleichung	25

1 Einleitung

Mein Vortrag befasst sich mit dem Thema Newton Methoden. Insbesondere möchte ich Verfahren finden, die optimale Steuerungsprobleme lösen. Zu unterscheiden sind dabei endlich und unendlich dimensionale Probleme.

Unser Ziel ist es, Probleme der Form

$$\min_{w \in W} f(w) \quad \text{s.t.} \quad e(w) = 0, \quad c(w) \leq 0 \quad \text{a.e. auf } \Omega$$

mittels Newtonverfahren numerisch zu lösen. Hierbei sind W und Z Banachräume. $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ ist die zu optimierende Funktion. $e : W \rightarrow Z$ und $c : W \rightarrow L^2(\Omega)$ sind zweimal stetig F-diffbar und die Nebenbedingungen. Dabei ist e oftmals eine partielle Differenzialgleichung und c ist zum Beispiel eine Einschränkung auf ein Gebiet. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar und beschränkt und das Gebiet auf dem c gelten soll.

Um das Problem zu lösen, werden wir zunächst ein sehr viel einfacheres Problem betrachten. Dieses analysieren wir solange, bis wir eine gute Darstellung gefunden haben. Zu dieser Darstellung entwickeln wir dann ein Newtonverfahren. Das Vorgehen werden wir einige Male wiederholen, bis wir bei unserem ursprünglichen Problem angelangt sind. Die erste Vereinfachung ist es, das Problem nur im endlichdimensionalen zu betrachten und die Nebenbedingungen wegzulassen. Nach und nach werden wir diese mit hinzunehmen und so ein Newtonverfahren für das endlichdimensionale Problem finden. Im unendlichdimensionalen wenden wir das gleiche Vorgehen an, werden aber nach einigen theoretischen Vorüberlegungen auf ein Problem stoßen, dessen Lösung den Rahmen dieses Vortrages sprengen würde. Auf ein Beispiel lässt sich jedoch die vorherige Theorie anwenden und werden auch ein konkretes Newtonverfahren dazu aufstellen.

2 Generalisierte Newton Methoden

2.1 Newton Methoden mit einfachen Nebenbedingungen

Wir betrachten das Problem

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} f(w) \tag{2.1}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Optimalbedingung zu diesem Problem lautet:

$$\nabla f(w) = 0$$

Nun wollen wir ein numerisches Verfahren für dieses Problem entwickeln. Dazu setzen wir $G := \nabla f$. Da wir ein diskretes Verfahren wollen, setzen wir w_0, w_1, \dots in G ein. Wir erhalten:

$$G(w_{k+1}) = 0$$

Um ein iteratives Verfahren zu erhalten Taylorn wir G ist w_k . Das ergibt:

Theorem 2.1.1 (einfaches Newtonverfahren). *Sei das Problem (2.1) gegeben und $G := \nabla f$. Dann wird das Problem mit folgendem Verfahren gelöst:*

$$\begin{aligned} G(w^k) + G'(w^k)s^k &= 0 \\ w^{k+1} &= w^k + s^k \end{aligned}$$

Das Verfahren konvergiert superlinear falls $G \in C^1$ und G' invertierbar ist.

Das Verfahren dazu lautet:

Data: w^0 (möglichst Nah an der Lösung \bar{w})
for $k = 0, 1, \dots$ **do**
 | Löse $M_k s^k = -G(w^k)$;
 | $w^{k+1} = w^k + s^k$;
end

Algorithm 1: einfache Newton Methode

Hier ist $M^k = G'(w^k)$

Nun wollen wir auch Nebenbedingungen zulassen. Wir haben schon gesehen, dass das Minimierungsproblem

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} f(w) \quad s.t. \quad w \in S$$

äquivalent ist zu

$$w - P_S(w - \theta \nabla f(w)) = 0$$

mit $\theta > 0$ fest. Die Projektion betrachten wir, da das Newtonverfahren sonst auch Werte zulassen würde, die nicht in S liegen. Eine genauere Erklärung war in einem vorherigem Vortrag.

Wir betrachten also die Funktion

$$\phi(w) = w - P_S(w - \theta \nabla f(w))$$

Nun wollen wir also das Newtonverfahren auf ϕ anwenden. Dabei ist ϕ leider nicht differenzierbar. Also müssen wir unser M^k anders wählen. Wie diese Wahl aussieht, lernen wir später. Um über Newtonverfahren sprechen zu können, brauchen wir zunächst einen Begriff für Konvergenz. Diesen werden wir im folgendem Kapitel betrachten

2.1.1 Konvergenz der generalisierten Newton Methode

Zunächst eine kleine Wiederholung des Konvergenzbegriffes:

Definition 2.1.2 (Konvergenzgeschwindigkeit). Sei x_k eine Folge, die \bar{x} approximiert.

- *lineare Konvergenz:* $\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq c \|x_k - \bar{x}\| \quad \forall k > k_0$

- *superlineare Konvergenz*: Sei c_k eine Nullfolge. $\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq c_k \|x_k - \bar{x}\| \quad \forall k > k_0$
- *Konvergenz der Ordnung p* : $\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq c \|x_k - \bar{x}\|^p \quad \forall k > k_0$

Betrachte nun

$$G(x) = 0 \tag{2.2}$$

mit $G : X \rightarrow Y$, wobei X, Y Banachräume sind. Sei \bar{x} die Lösung der Gleichung.

Um eine numerische Lösung von (2.2) zu erhalten, benutzen wir einen ähnlichen Algorithmus, wie den für das einfache Newtonverfahren, nur allgemeiner:

Data: $x^0 \in X$ (möglichst Nah an der Lösung \bar{x})

for $k = 0, 1, \dots$ **do**

Wähle invertierbaren Operator $M_k \in L(X, Y)$;
 Erhalte s_k beim lösen von $M_k s^k = -G(x^k)$;
 $x^{k+1} = x^k + s^k$;

end

Algorithm 2: Generalisierte Newton Methode

Wie dieser Operator M_k sinnvoll zu wählen ist, wird später genauer bestimmt.

Nun untersuchen wir die durch diesen Algorithmus gewonnene Folge x^k in einer Umgebung von \bar{x} . Sei $d^{k+1} = x^{k+1} - \bar{x}$ der Abstand zwischen der Iteration und der Lösung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} M_k d^{k+1} &= M_k(x^{k+1} - \bar{x}) = M_k(x^k + s^k - \bar{x}) = M_k d^k - G(x^k) \\ &= G(\bar{x}) + M_k d^k - G(x^k) \end{aligned}$$

Wir erhalten:

Theorem 2.1.3. *Betrachte (2.2) mit der Lösung \bar{x} . Sei x^k die Folge, die durch den Generalisierten Newton Algorithmus 2 erzeugt wurde. Sei x^0 nah genug an \bar{x} gewählt*

1. *Falls $\exists \gamma \in (0, 1)$ mit*

$$\begin{aligned} \|d^{k+1}\|_X &= \|M_k^{-1} (G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d^k)\|_X \leq \gamma \|d^k\|_X \\ \forall k \text{ mit } \|d_k\|_X &\text{ klein genug} \end{aligned}$$

gilt, dann konvergiert $x^k \rightarrow \bar{x}$ linear mit Konstante γ

2. Falls $\forall \eta \in (0, 1) \quad \exists \delta_\eta > 0$, sodass

$$\|d^{k+1}\|_X = \|M_k^{-1} (G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d^k)\|_X \leq \eta \|d^{k+1}\|_X$$

für $\|d_k\|_X < \delta_\eta$

gilt, dann konvergiert $x^k \rightarrow \bar{x}$ super linear

3. Falls $\exists \gamma \in (0, 1)$ mit

$$\|d^{k+1}\|_X = \|M_k^{-1} (G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d^k)\|_X \leq C \|d^k\|_X^{1+\alpha}$$

für $\|d_k\|_X \rightarrow 0$

gilt, dann konvergiert $x^k \rightarrow \bar{x}$ super linear der Ordnung $\alpha + 1$

Beweis. einfaches nachrechnen, siehe Buch. □

Oft teilt man diese Kleinheitsannahmen in zwei Teile auf:

Definition 2.1.4 (Regularitätsannahme). Sei $M_k \in L(X, Y)$, wobei X, Y Banachräume sind. Dann ist die Regularitätsannahme gegeben durch:

$$\|M_k^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \leq C \quad \forall k \geq 0$$

Bemerkung (Operatornorm). Die Notation für die Operatornorm von einem linearen Operator $f : X \rightarrow Y$, wobei X, Y normierte Vektorräume sind lautet:

$$\|f\|_{X \rightarrow Y} := \sup_{\|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y$$

Definition 2.1.5 (Approximationsannahme). Sei $M_k \in L(X, Y)$, wobei X, Y Banachräume sind, \bar{x} die Lösung von $G(x) = 0$ und $d^k := x^k - \bar{x}$ Sei $\alpha + 1 > 1$ Dann ist die Approximationsannahme gegeben durch:

$$\|G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d^k\|_Y = o(\|d^k\|_X) \text{ für } \|d_k\|_X \rightarrow 0$$

oder

$$\|G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d^k\|_Y = o(\|d^k\|_X^{1+\alpha}) \text{ für } \|d_k\|_X \rightarrow 0$$

Nun probieren wir eine geeignete Wahl für M_k zu finden.

2.1.2 Die klassische Newton Methode

Theorem 2.1.6 (Konvergenz der klassischen Newton Methode). *Sei das Problem (2.2) gegeben mit der Lösung \bar{x} und sei $G : X \rightarrow Y$ mit X, Y Banachräume F -diffbar. Sei außerdem $G'(\bar{x})$ stetig invertierbar. Dann konvergiert die Generalisierte Newton Methode 2 mit $M_k = G'(x^k)$ lokal super linear.*

Falls G' zusätzlich α -Hölderstetig ist, dann konvergiert die klassische Newton Methode von der Ordnung $1 + \alpha$

Beweis. der Beweis ist im Script und nicht schwer nachzurechnen. □

2.2 verallgemeinerte Ableitung

Nun wollen wir auch das Newtonverfahren anwenden können, falls G nicht diffbar ist. Dazu wird der Begriff der verallgemeinerten Ableitung eingeführt. Leider gibt es nicht viel Literatur zu diesem Begriff, sodass ich ihn recht informal einführen muss. Beginnen wir mit einem Beispiel.

Wir betrachten die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto |x|$. Diese ist überall diffbar außer in 0. Nun wollen wir auch hier eine Ableitung finden. Die Ableitung gibt die Steigung der Funktion in einem Punkt an. Unser neuer Begriff der Ableitung soll dieser Eigenschaft genügen. Da aber die Steigung im Punkt 0 nicht eindeutig definiert ist, nimmt man als Ableitung alle möglichen Steigungen in 0. Das ist hier das Intervall $[-1, 1]$, da die Steigung wenigstens -1 aber höchstens 1 ist. Alle Werte dazwischen können aber auch angenommen werden. Also gilt:

$$\partial^{cl} f(x) = \begin{cases} \{-1\} & x \in (-\infty, 0) \\ [-1, 1] & x = 0 \\ \{1\} & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Diese Ableitung nennt sich Clarke Differential.

Definition 2.2.1 (Clarke Differential). *Sei $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitz stetig. Dann wird das Clarke Differential definiert als*

$$\partial^{cl} G(x) := \text{conv} \{ M \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid x^k \rightarrow x, \quad G'(x^k) \rightarrow M, \quad G \text{ ist diffbar in } x^k \}$$

wobei $\text{conv}\{M\}$ die konvexe Hülle von M meint. Dabei zu beachten ist, dass dieses Differenzial keine Funktion, sondern eine Menge ist.

Die Lipschitzstetigkeit wird gebracht, da nach dem Satz von Rademacher eine lipschitzstetige Funktion fast überall differenzierbar ist.

Diese Definition stimmt mit unserer Ableitung der Betragsfunktion überein:

Sei $x \in (-\infty, 0)$ und x^k eine Folge, die gegen x konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(x^k) = -1$$

Sei nun $\bar{x} \in (0, \infty)$ und \bar{x}^k eine Folge, die gegen \bar{x} konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(\bar{x}^k) = 1$$

Nun gilt für $x \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned} \partial^{\text{cl}} f &= \text{conv} \{ M | x^k \rightarrow x, \quad f'(x^k) \rightarrow M, \quad f \text{ ist diffbar in } x^k \} \\ &= \text{conv} \{-1\} = \{-1\} \end{aligned}$$

Für $x \in (0, \infty)$ das Gleiche nur mit 1 statt -1 . Sei $x = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial^{\text{cl}} f &= \text{conv} \{ M | x^k \rightarrow x, \quad f'(x^k) \rightarrow M, \quad f \text{ ist diffbar in } x^k \} \\ &= \text{conv} \{-1, 1\} = [-1, 1] \end{aligned}$$

Theorem 2.2.2. *Sei $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, deren Richtungsableitung existiert und stetig ist. Dann gilt, dass $\{G'\} = \partial^{\text{cl}} G$*

Beweis. Sei $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge, die gegen $x \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. G' bezeichnet die Richtungsableitung. Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G'(x_k) = G'(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = G'(x)$$

Den Limes darf ich reinziehen, da G' stetig ist. Damit ist $\partial^{\text{cl}} G = \{G'\}$. □

Falls die Richtungsableitung existiert und diese nicht stetig ist, stimmen die Differen-

ziale nicht überein!

Dieses Konzept lässt sich noch weiter verallgemeinern auf Banachräume.

Definition 2.2.3 (verallgemeinerte Differentiale). *Seien X, Y Banachräume und $G : X \rightarrow Y$ ein stetiger Operator. Dann ist die Menge der verallgemeinerten Differentiale definiert als*

$$\partial G : X \rightrightarrows L(X, Y)$$

Dabei meint $\rightrightarrows L(X, Y)$, dass ein Punkt $x \in X$ auf eine Menge von linearen Operatoren abgebildet wird (und nicht nur auf einen Operator). Ein Beispiel für ein verallgemeinertes Differenzial ist das Clarke Differenzial. Dies ist jedoch nur für Vektorwertige Funktionen definiert.

Nun können wir, um unser Newtonverfahren umzugestalten $M_k \in \partial G(x^k)$ wählen. Damit unser Verfahren aber super linear konvergiert, muss gelten

$$\sup_{M \in \partial G(\bar{x} + d)} \|G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d\|_Y = o(\|d\|_X) \text{ für } \|d\|_X \rightarrow 0$$

Dieses nennt sich semidiffbar.

Definition 2.2.4 (semidiffbar). *Sei $G : X \rightarrow Y$ ein stetiger Operator zwischen Banachräumen. Sei $\partial G : X \rightrightarrows L(X, Y)$ mit nicht leeren Bildern gegeben wie oben.*

1. *G heißt ∂G semidiffbar in $x \in X$, falls*

$$\sup_{M \in \partial G(x+d)} \|G(x + d^k) - G(x) - M_k d\|_Y = o(\|d\|_X) \text{ für } \|d\|_X \rightarrow 0$$

2. *G heißt ∂G semidiffbar von der Ordnung $\alpha + 1 > 1$ in $x \in X$, falls*

$$\sup_{M \in \partial G(x+d)} \|G(x + d^k) - G(x) - M_k d\|_Y = \mathcal{O}(\|d\|_X^{\alpha+1}) \text{ für } \|d\|_X \rightarrow 0$$

Lemma 2.2.5. *Sei $G : X \rightarrow Y$ ein Operator zwischen Banachräumen und stetig F -diffbar in einer Umgebung von x . Dann ist G $\{G'\}$ -semidiffbar in x . Falls G' α -Hölderstetig in einer Umgebung von x ist, dann ist G $\{G'\}$ -semidiffbar in x von der Ordnung α .*

$\{G'\}$ beschreibt den Operator $\{G'\} : X \rightrightarrows L(X, Y)$ mit $\{G'\}(x) = \{G'(x)\}$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \|G(x + d^k) - G(x) - G'(x + d)d\|_Y \\
& \leq \|G(x + d^k) - G(x) - G'(x)d\|_Y + \|G'(x)d - G'(x + d)d\|_Y \\
& \leq o(\|d\|_X) + \|G'(x) - G'(x + d)\|_{X \rightarrow Y} \|d\|_X = o(\|d\|_X)
\end{aligned}$$

zweiter Teil analog, siehe Buch. □

Beispiel 2.2.6 (Projektion). *Betrachte $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi(x) = P_{[a,b]}(x)$ mit $a < b$. Dann ist das Clarke Differential gegeben durch:*

$$\partial^{cl}\psi(x) = \begin{cases} \{0\} & x < a \text{ oder } x > b \\ \{1\} & a < x < b \\ [0, 1] & x = a \text{ oder } x = b \end{cases}$$

Beweis. Für alle $x \notin \{a, b\}$ gilt, dass ψ stetig diffbar in einer Umgebung von x ist. Mit Lemma 2.2.5 gilt, dass ψ $\partial^{cl}\psi$ - semidiffbar in x ist.

Sei nun $x = a$ Für kleine $d > 0$ ergibt sich, dass $\partial^{cl}\psi(x) = \{\psi'(a + d)\} = \{1\}$ und damit

$$\sup_{M \in \partial^{cl}\psi(x+d)} |\psi(x + d) - \psi(x) - Md| = a + d - a - 1d = 0$$

Für kleine $d < 0$ ergibt sich, dass $\partial^{cl}\psi(x) = \{\psi'(a + d)\} = \{0\}$ und damit

$$\sup_{M \in \partial^{cl}\psi(x+d)} |\psi(x + d) - \psi(x) - Md| = a - a - 0d = 0$$

Somit ist die $\partial^{cl}\psi$ - semidiffbarkeit in $x = a$ gezeigt.

Für $x = b$ dasselbe. □

Theorem 2.2.7 (Rechenregeln semidiffbare Funktionen). *Seien X, Y, Z, X_i, Y_i Banachräume.*

1. *Falls die Operatoren $G_i : X_i \rightarrow Y_i$ ∂G_i -semidiffbar in x sind, dann ist (G_1, G_2) $(\partial G_1, \partial G_2)$ -semidiffbar in x .*
2. *Falls die Operatoren $G_i : X \rightarrow Y$ ∂G_i -semidiffbar in x sind, dann ist $G_1 + G_2$ $(\partial G_1 + \partial G_2)$ -semidiffbar in x .*

3. Seien $G_1 : Y \rightarrow Z$ und $G_2 : X \rightarrow Y$ ∂G_i -semidiffbar in $G_2(x)$ und in x . Sei außerdem ∂G_1 beschränkt in einer Umgebung von $x = G_2(x)$ und G_2 ist Lipschitzstetig in einer Umgebung von x . Dann ist $G = G_1 \circ G_2$ ∂G -semidiffbar mit

$$\partial G(x) = \{M_1 M_2 \mid M_1 \in \partial G_1(\partial G_2(x)), \quad M_2 \in \partial G_2(x)\}$$

Beweis. siehe Buch □

2.3 semidiffbare Newton Methoden

Um Konvergenz zu erhalten muss die Approximationsannahme und die Regularitätsannahme erfüllt sein. Die Approximationsannahme ist durch die Semidiffbarkeit gegeben. Jetzt fehlt noch die Regularitätsannahme.

Definition 2.3.1 (Regularitätsannahme für semidiffbare Newton Verfahren). *Betrachte (2.2) mit der Lösung \bar{x} . Dann lautet die Regularitätsannahme*

$$\exists C > 0, \quad \exists \delta > 0 : \|M^{-1}\|_{X \rightarrow Y} \leq C \quad \forall M \in \partial G(x) \quad \forall x \in X, \quad \|x - \bar{x}\|_X < \delta \quad (2.3)$$

Data: $x^0 \in X$ (möglichst Nah an der Lösung \bar{x})

for $k = 0, 1, \dots$ **do**

Wähle $M_k \in \partial G(x^k)$;
 Erhalte s_k beim lösen von $M_k s^k = -G(x^k)$;
 $x^{k+1} = x^k + s^k$;

end

Algorithm 3: semidiffbare Newton Methode

Theorem 2.3.2 (Konvergenz des semidiffbaren Newton-Verfahrens). *Sei das Problem (2.2) gegeben mit der Lösung \bar{x} . Seien X, Y Banachräume, $G : X \rightarrow Y$ stetig und ∂G semidiffbar und die Regularitätsannahme (2.3) sei gegeben. Dann existiert $\delta > 0$, sodass für alle $x^0 \in X$ mit $\|x^0 - \bar{x}\|_X < \delta$ die semidiffbare Newton Methode super linear gegen \bar{x} konvergiert.*

Falls G ∂G -semidiffbar der Ordnung $\alpha > 0$ in \bar{x} ist, dann ist die Konvergenzordnung $1 + \alpha$

Beweis. 2.1.3 besagt, dass wenn ich ein Newtonverfahren der Form 2 habe, also $M_k \in$

$\mathcal{L}(X, Y)$, M_k invertierbar ist und

$$\|M_k^{-1} (G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d^k)\|_X = o(\|d^k\|_X)$$

gilt, dann konvergiert das Newtonverfahren super linear. Da $M_k \in \partial G$, ist $M_k \in \mathcal{L}(X, Y)$. M_k ist invertierbar, da die Regularitätsannahme gilt. Außerdem gilt mit der Regularitätsannahme und der Semidiffbarkeit:

$$\begin{aligned} & \|M_k^{-1} (G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d^k)\|_X \\ & \leq \|M_k^{-1}\|_X \|G(\bar{x} + d^k) - G(\bar{x}) - M_k d^k\|_X \\ & \leq Co(\|d^k\|_X) = o(\|d^k\|_X) \end{aligned}$$

Also ist 2.1.3 anwendbar. □

2.3.1 semidiffbare Newtonmethoden für endlich dimensionale KKT Systeme

Nun wollen wir die Theorie auf das endlich dimensionale KKT System anwenden.

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die zu optimierende Funktion. $e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems. Wir betrachten das Problem

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} f(w) \quad s.t. \quad e(w) = 0 \quad c(w) \leq 0 \quad (2.4)$$

wobei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $e \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $c \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Sei \bar{w} die Lösung von (2.4). Dann existieren Lagrange Multiplikatoren $\bar{p} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, sodass $(\bar{w}, \bar{p}, \bar{\lambda})$ das folgende KKT System löst:

$$\begin{aligned} \nabla_w L(\bar{w}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= \nabla f(\bar{w}) + c'(\bar{w})^T \bar{\lambda} + e'(\bar{w})^T \bar{\mu} = 0 \\ \bar{\lambda} &\geq 0 \\ \nabla_{\lambda} L(\bar{w}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})(z - \bar{\lambda}) &= c(\bar{w})^T (z - \bar{\lambda}) \leq 0 \quad \forall z \geq 0 \\ \nabla_{\mu} L(\bar{w}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= e(\bar{w}) = 0 \end{aligned}$$

wobei $L(w, \lambda, \mu) := f(w) + \lambda^T c(w) + \mu^T e(w)$ die Lagrangefunktion ist.

Jetzt schreiben wir das KKT zu einer Funktion G um:

$$G(w, \lambda, \mu) := \begin{pmatrix} \nabla_w L(w, \lambda, \mu) \\ \lambda - P_{\mathbb{R}_+^p}(\lambda + c(w)) \\ e(w) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

Damit das Newton Verfahren konvergiert, muss G semidiffbar sein. Das zeigt folgendes Theorem:

Theorem 2.3.3 (semidiffbarkeit des KKT Systems). *Wir betrachten das Problem 2.4. Sei G wie in 2.5 definiert.*

Dann ist G semidiffbar mit

$$\partial G = \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_{ww} L(w, \lambda, \mu) & c'(w)^T & e'(w)^T \\ -D_g c'(w) & I - D_g & 0 \\ e'(w) & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| g_i \in \partial^{cl} \psi(\lambda_i + c_i(w)) \right\}$$

wobei $\psi(t) := P_{\mathbb{R}_+}(t)$ und $D_g = \text{diag}(g_i)$

Beweis. Sei $x = (w, \lambda, \mu)$. Zunächst ist $\nabla_w L$ $\{\nabla_{wx} L\}$ -semidiffbar und e ist $\{e'\}$ -semidiffbar, da L, e zweimal stetig diffbar sind.

Außerdem ist ψ $\partial^{cl} \psi$ -semidiffbar, da wir dies für die Projektion schon gezeigt haben, siehe 2.2.6. Nach Summen und Kettenregel ist

$$\phi_i(w, \lambda_i) := \lambda_i - P_{\mathbb{R}_+}(\lambda_i + c_i(w))$$

semidiffbar mit

$$\partial \phi_i(w, \lambda_i) := \{(-g_i c'_i(w), 1 - g_i) \mid g_i \in \partial^{cl} \psi(\lambda_i c'_i(w))\}$$

wobei die erste Komponente die Ableitung nach w und die zweite Komponente die Ableitung nach λ_i darstellt. Deshalb ist der Operator

$$\phi(w, \lambda) := \lambda - P_{\mathbb{R}_+^p}(\lambda + c(w))$$

semidiffbar mit

$$\partial \phi(w, \lambda) := \{(-D_g c'_i(w), I - D_g) \mid D_g = \text{diag}(g_i), g_i \in \partial^{cl} \psi(\lambda_i c'_i(w))\}$$

Wenn man nun alles ableitet und dabei die Definition von L beachtet, kommt man auf $\partial G(x)$ □

Falls nun auch noch die Regularitätsannahme 2.3.1 erfüllt ist, ist 2.3.2 anwendbar und das semidiffbare Newtonverfahren konvergiert superlinear für das KKT.

Hier haben wir angenommen, dass unsere PDGL Nebenbedingung stetig Differenzierbar ist. Das ist jedoch in der Praxis meist nicht der Fall. Deshalb werden wir uns im Nächsten Kapitel mit L^2 Funktionen befassen und zeigen, dass wir auch hier Semidifferenzierbarkeit haben.

3 semidiffbare Newton Methoden in Funktionsräumen

Bislang nahm unsere Funktion nur Elemente aus dem \mathbb{R}^n entgegen. Da dies für viele Probleme unzureichend ist, befassen wir uns nun auch damit, dass unsere zu optimierende Funktion Funktionen entgegennimmt. Außerdem waren unsere Nebenbedingungen stetig differenzierbar, was auch nicht immer der Fall ist. Wie wir das verändern betrachten wir später. Wir kümmern uns nun um die Funktionen als Eingaben.

3.1 Punktweise Randbedingungen in L^2

Um das Problem einfach zu behalten, betrachten wir nur L^2 und nicht L^p . Die Konzepte können übertragen werden, würden jedoch den Rahmen hier sprengen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $0 \leq |\Omega| \leq \infty$. Wir betrachten das Problem

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} f(u) \quad a \leq u \leq b \quad \text{a.e. auf } \Omega$$

wobei $f : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig F-diffbar ist und $a, b \in L^\infty(\Omega)$ mit $b - a \geq \nu > 0$, wobei $\nu \in L^\infty$. Dieses Problem kann vereinfacht werden, indem wir die Schranken zu konstanten Schranken transformieren. Da $a \leq u$, gilt $0 \leq u - a$. Dann formen sich unsere Schranken um zu $0 \leq u - a \leq b - a$. Dies ist äquivalent zu $0 \leq \frac{u-a}{b-a} \leq 1$. Damit habe ich konstante Grenzen

Nun lautet das Problem

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} f(u) \quad \beta_l \leq u \leq \beta_r \quad \text{a.e. auf } \Omega \tag{3.1}$$

mit $\beta_l < \beta_r$ konstant.

Jetzt können wir, wie vorher schon oft geschehen, unser Minmierungsproblem als nicht-glattes Funktional darstellen. Betrachten wir dazu $S := \{u \in L^2(\Omega) | \beta_l \leq u \leq \beta_r\}$. Da wir in L^2 sind, können wir die Dualpaarung mit dem Skalarprodukt identifizieren $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U^*, U} = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$. Die Optimalitätsbedingung ist also

$$u \in S, \quad (\nabla f(u), v - u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall v \in S$$

Jetzt können wir die Projektion für dieses Problem definieren

$$P_S(v)(x) = P_{[\beta_l, \beta_r]}(v(x))$$

und erhalten damit insgesamt

$$\phi(u)(x) := u - P_{[\beta_l, \beta_r]}(u(x) - \theta \nabla f(u)(x)) \quad (3.2)$$

mit $\theta > 0$ beliebig aber fest.

Unser Ziel ist es, das verallgemeinerte Differenzial $\partial\phi$ von ϕ zu finden, sodass ϕ semidiffbar ist. Mit Kettenregel können wir das Problem vereinfachen, indem wir nur das verallgemeinerte Differenzial von $P_{[\beta_l, \beta_r]}(v(\cdot))$ bestimmen.

3.2 Semidiffbarkeit von Superpositionsoperatoren

Definition 3.2.1. Sei $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitz stetig und $(\partial^{cl}\psi)$ semidiffbar. Für $1 \leq q \leq p \leq \infty$ betrachte

$$\Psi : L^p(\Omega)^m \rightarrow L^q(\Omega), \quad \Psi(w)(x) := \psi(w_1(x), \dots, w_m(x))$$

Wir definieren das Differenzial

$$\begin{aligned} \partial\Psi : L^p(\Omega)^m &\rightrightarrows \mathcal{L}(L^p(\Omega)^m, L^q(\Omega)), \\ \partial\Psi(w) &= \{M | Mv = g^T v, \quad g \in L^\infty(\Omega)^m, g(x) \in \partial^{cl}\psi(w(x)) \quad f.f.a \ x \in \Omega\} \end{aligned}$$

Eigentlich hätten wir gerne, dass $L^2(\Omega) \ni v \mapsto P_{[\beta_l, \beta_r]}(v(\cdot)) \in L^2(\Omega)$ semidiffbar ist. Dies stimmt aber leider nicht.

Lemma 3.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen und beschränkt. Sei $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine

lipschitz stetige, nicht affin lineare Abbildung. Dann ist für alle $q \in [1, \infty)$ der Operator

$$\Psi : L^q(\Omega) \ni u \mapsto \psi(u(\cdot)) \in L^q(\Omega)$$

nicht $\partial\Psi$ -semidiffbar

Beweis. Der Beweis ist zu lang und nicht intuitiv. Allerdings sieht man, dass das Problem die nicht Linearität von ψ ist. \square

Definition 3.2.3. Sei $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitz stetig und $\partial\Psi$ semidiffbar. Sei $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Betrachte

$$\Psi_G : Y \rightarrow L^q(\Omega), \quad \Psi_G(y)(x) = \psi(G(y)(x))$$

wobei $G : Y \rightarrow L^p(\Omega)^m$ stetig F -diffbar und Y Banachraum ist. Wir definieren das Differenzial

$$\begin{aligned} \partial\Psi_G : Y &\rightrightarrows \mathcal{L}(Y, L^q(\Omega)) \\ \partial\Psi_G(y) &= \left\{ M \left| \begin{array}{l} Mv = g^T(G'(y)v), \quad g \in L^\infty(\Omega)^m, \\ g(x) \in \partial^{\text{cl}}\psi(G(y)(x)) \quad \text{f.f.a } x \in \Omega \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Falls wir G als Identität wählen, ist diese Definition die Gleiche die oben. Die Ableitung von G kommt nach Kettenregel mit rein.

Theorem 3.2.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $0 < |\Omega| < \infty$. Sei $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitz stetig und semidiffbar. Sei Y ein Banachraum, $1 \leq q < p \leq \infty$ und sei der Operator $G : Y \rightarrow L^q(\Omega)^m$ stetig F diffbar und lokal lipschitz stetig. Dann ist der Operator

$$\Psi_G : Y \rightarrow L^q(\Omega), \quad \Psi_G(y)(x) = \psi(G(y)(x))$$

$\partial\Psi_G$ semidiffbar.

3.3 Punktweise Randbedingungen in L^2 überarbeitet

Unser Ziel war es, Semidiffbarkeit von ϕ aus (3.2) zu zeigen. Dies können wir nur mit ein paar zusätzlichen Annahmen machen.

Theorem 3.3.1. Betrachte das Problem (3.1) mit $\beta_l < \beta_r$. Es gelte für ∇f , dass

$\exists \alpha > 0, p > 2$ sodass $\nabla f(u) = \alpha u + H(u)$ mit

$$H : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad \text{stetig } F\text{-diffbar}$$

$$H : L^2(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega), \quad \text{lokal lipschitzstetig}$$

Dann ist der Operator ϕ mit $\theta = 1/\alpha$ aus (3.2) $\partial\phi$ semidiffbar mit

$$\begin{aligned} \partial\phi : L^2(\Omega) &\rightrightarrows \mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega)), \\ \partial\phi(x) &= \left\{ M \left| \begin{array}{l} M = I + \frac{g}{\alpha} \cdot H'(u), \quad g \in L^\infty(\Omega), \\ g(x) \in \partial^{cl} P_{[\beta_l, \beta_r]} \left(-\frac{1}{\alpha} H(u)(x) \right) \text{ f.f.a } x \in \Omega \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Hier gilt, dass

$$\partial^{cl} P_{[\beta_l, \beta_r]}(t) = \begin{cases} \{0\}, & t < \beta_l \text{ oder } t > \beta_r \\ \{1\}, & \beta_l < t < \beta_r \\ [0, 1], & t = \beta_l \text{ oder } t = \beta_r \end{cases}$$

Beweis. Es gilt:

$$\phi(u) = u - P_{[\beta_l, \beta_r]} \left(u - \frac{1}{\alpha} (\alpha u + H(u)) \right) = u - P_{[\beta_l, \beta_r]} \left(-\frac{1}{\alpha} H(u) \right)$$

Setze nun $q = 2, \psi = P_{[\beta_l, \beta_r]}$ und $G = -(1/\alpha)H$. Nun können wir 3.2.4 anwenden und erhalten, dass der Operator $\Psi_G : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ Ψ_G -semidiffbar ist. Mit Summenregel folgt, dass $\phi = I - \Psi_G$ ($I - \partial\Psi_G$) semidiffbar ist. Da $\partial\Phi = I - \partial\Psi_G$ ist der Beweis fertig. \square

Wir bräuchten auch noch Regularitätsbedingungen, die werde ich aber hier weglassen, da sie auch nicht im Buch stehen.

3.4 Anwendung für optimale Steuerung

Diese Theorie können wir jetzt anwenden. Dazu betrachten wir das Problem:

$$\begin{aligned} \min_{y \in H_0^1(\Omega), u \in L^2(\Omega)} \quad & J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{s.t.} \quad & Ay = r + Bu, \quad \beta_l \leq u \leq \beta_r \end{aligned}$$

Dabei ist y der Zustand und u die Kontrolle. Der Zustand soll möglichst nah an unserer Vorgabe y_d sein. Also soll dieser Abstand minimiert werden, wodurch aber Kosten entstehen. Diese werden durch den hinteren Term der Gleichung bestraft. Wie stark diese Bestrafung ist, hängt von dem (häufig kleinen) Parameter α ab.

Als Nebenbedingung haben wir einen gleichförmigen linear elliptischen partiellen Differenzialoperator $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ gegeben, der beschreibt wie sich der Zustand verhält. Z.b. kann A eine Darstellung für $-\Delta$ sein. B beschreibt, wie sich unsere Kontrolle verhält. Außerdem können wir die Kontrolle nur in einem gewissen Rahmen regulieren, weshalb $\beta_l \leq u \leq \beta_r$ gelten soll. Zusammengefasst haben wir:

$$\begin{aligned} A : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) && \text{elliptischer Differentialoperator} \\ r &\in H^{-1}(\Omega) && \text{gegeben} \\ B : L^{p'}(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) && \text{stetig und linear} \\ p' &\in [1, 2) && \text{sodass } H_0^1(\Omega) \text{ im Dualraum } L^p(\Omega), p = p'/(p' - 1), \\ &&& \text{von } L^{p'}(\Omega) \text{ stetig eingebettet ist} \\ \beta_l &< \beta_r \end{aligned}$$

Da der Zustand von der Kontrolle abhängt, können wir dies auch ausdrücken mit $y = y(u) = A^{-1}(r + Bu)$. Die Invertierbarkeit von A folgt aus Thm 1.23 aus dem Buch.

Nun erhalten wir das reduzierte Problem

$$\begin{aligned} \min_{u \in L^2(\Omega)} \hat{J}(u) &:= J(y(u), u) = \frac{1}{2} \|y(u) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{s.t. } \beta_l &\leq u \leq \beta_r \end{aligned}$$

Um die Variationsungleichung aufzustellen brauchen wir

$$S := \{u \in L^2(\Omega) \mid \beta_l \leq u \leq \beta_r\}$$

Diese lautet dann:

$$VI(\nabla \hat{J}, S) : \quad u \in S \quad (\nabla \hat{J}(u), v - u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall v \in S$$

Die Variationsungleichung ist eine Optimalitätsbedingung, die schon in einem vorherigen Vortrag eingeführt wurde. Mit der Projektion $P_S(u) = P_{[\beta_l, \beta_r]}(u)$ kann das Problem

neu geschrieben werden als

$$\phi(u) := u - P_{[\beta_l, \beta_r]}(u - \theta \nabla \hat{J}(u)) = 0$$

wobei $\theta > 0$ fest ist. Die Variationsungleichung und $\phi(u) = 0$ sind äquivalente Formulierungen. Wir benötigen die Darstellung mit der Projektion.

Nun berechnen wir den Gradienten:

$$\begin{aligned} \left(\nabla \hat{J}(u), d \right)_{L^2(\Omega)} &= (y(u) - y_d, y'(u)d)_{L^2(\Omega)} + \alpha(u, d)_{L^2(\Omega)} \\ &= (y'(u)^*(y(u) - y_d) + \alpha u, d)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Frage 1. *Wie hängt das genau mit dem p' zusammen? warum soll $p' < 2$ gelten? Dadurch ist gewährleistet, dass $p \in (1, \infty]$. Das müsste irgendwas mit einem Einbettungssatz sein.*

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \nabla \hat{J}(u) &= y'(u)^*(y(u) - y_d) + \alpha u \\ &= B^* (A^{-1})^* (A^{-1}(r + Bu) - y_d) + \alpha u \\ &=: H(u) + \alpha u \end{aligned}$$

Da $B \in L(L^{p'}(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, ist $B^* \in L(H_0^1(\Omega), L^p(\Omega))$ mit $p = p'/(p' - 1) > 2$

Daraus folgt, dass der affin lineare Operator

$$H(u) = B^* (A^{-1})^* (A^{-1}(r + Bu) - y_d)$$

eine stetige, affin lineare Abbildung $L^2(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ ist.

Damit und mit 3.3.1 ist der Operator

$$\phi(u) := u - P_{[\beta_l, \beta_r]}(-\frac{1}{\alpha} H(u)) = 0$$

semidiffbar.

Nun können wir die semidiffbare Newton Methode für unser optimales Steuerungspro-

blem anwenden:

Data: $u^0 \in L^2(\Omega)$ (möglichst Nah an der Lösung \bar{u})

for $k = 0, 1, \dots$ **do**

| Wähle $g^k \in L^\infty(\Omega)$;
 | Erhalte s_k beim lösen von $(I + \frac{1}{\alpha} g^k \cdot H'(u^k)) s^k = -\phi(u^k)$;
 | $u^{k+1} = u^k + s^k$;

end

Algorithm 4: semidiffbare Newton Methode für optimale Steuerung

wobei $g \cdot H'(u)$ für $v \mapsto g \cdot (H'(u)v)$ steht. Hier ist $H'(u^k) = B^* (A^{-1})^* A^{-1} B$ und

$$g^k(x) \begin{cases} = 0, & -(1/\alpha)H(u^k)(x) \notin [\beta_l, \beta_r] \\ = 1, & -(1/\alpha)H(u^k)(x) \in (\beta_l, \beta_r) \\ \in [0, 1] & -(1/\alpha)H(u^k)(x) \in \{\beta_l, \beta_r\} \end{cases}$$

Die Form des Verfahrens entsteht aus dem semidiffbaren Newtonverfahren und 3.3.1.

Die Gleichung im Newtonverfahren wirklich zu lösen ist nicht ganz einfach. Die kann man aber vereinfachen, indem man bemerkt, dass s^k das Newtonverfahren dann und nur dann löst, falls $s^k = d_u^k$ und (d_y^k, d_u^k, d_μ^k) löst

$$\begin{pmatrix} I & 0 & A^* \\ 0 & I & -\frac{1}{\alpha} g^k \cdot B^* \\ A & -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_y^k \\ d_u^k \\ d_\mu^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\phi(u^k) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Äquivalenz kann durch einfaches nachrechnen gezeigt werden.

3.5 Allgemeine Optimierungsprobleme mit Ungleichungsbedingungen in L^2

Nun wollen wir Probleme der Form

$$\min_{w \in W} f(w) \quad \text{s.t.} \quad e(w) = 0, \quad c_j(w) \leq 0 \quad \text{a.e. auf } \Omega_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

lösen, wobei W und Z Banachräume sind, $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, $e : W \rightarrow Z$ und $c_j : W \rightarrow L^2(\Omega_j)$ zweimal stetig F-diffbar sind. $\Omega_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ sind messbar und beschränkt.

Dieses impliziert schon optimale Steuerungsprobleme der Form

$$\min_{w \in W} f(w) \quad \text{s.t.} \quad e(w) = 0, \quad a_i \leq u \leq b_i \quad i = 1, \dots, l$$

wobei $y \in Y$ der Zustand und $u \in L^2(\Omega_1) \times \dots \times L^2(\Omega_l)$ die Kontrollen sind, $a_i, b_i \in L^\infty(\Omega_i)$. Dies geschieht, indem man die Grenzen a_i, b_i durch das $c_j(w) \leq 0$ repräsentiert mit $c_i = a_i - u_i$ bzw $c_j = u_j - b_j$

Um das Problem einfach zu halten, betrachten wir nur den Fall mit $m=1$. Streng genommen repräsentiert das das optimale Steuerungsproblem nicht, da m ungerade ist (bzw nur den Fall mit einer Schranke), aber das lassen wir außer acht.

Durch vorherige Theorie wissen wir, dass wir das Problem mittels der Lagrangefunktion darstellen können. Diese lautet hier:

$$\begin{aligned} L : W \times L^2(\Omega) \times Z^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ L(w, \lambda, \mu) &= f(w) + (\lambda, c(w))_{L^2(\Omega)} + \langle \mu, e(w) \rangle_{Z^*, Z} \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die Nebenbedingungen an der Lösung $\bar{w} \in W$ gelten. Dann kann das KKT System aufgestellt werden: Es existieren $\bar{\lambda} \in L^2(\Omega)$ und $\bar{\mu} \in Z^*$, sodass $(\bar{w}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ folgenden System genügen.

$$\begin{aligned} L_w(\bar{w}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= 0 \\ e(\bar{w}) &= 0 \\ c(\bar{w}) \leq 0, \quad \bar{\lambda} \geq 0, \quad (\bar{\lambda}, c(\bar{w}))_{L^2(\Omega)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die letzte Gleichung kann als Variationsungleichung geschrieben werden, also

$$(-c(w), v - w)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall v \in K$$

mit $K := \{u \in L^2(\Omega) | u \geq 0\}$

Dies kann nun wieder mittels Projektion umgeschrieben werden:

$$\bar{\lambda} - P_K(\bar{\lambda} + \theta c(\bar{w})) = 0$$

mit $\theta > 0$ fest. Da $P_K(u) = P_{[0, \infty)}(u(\cdot))$ gilt, müssen wir wieder mit Superpositionsoperatoren arbeiten. Um das KKT zu einer semidiffbaren Gleichung zu machen,

brauchen wir einen Glättungsoperator innerhalb der Projektion . Dazu brauchen wir mehr Theorie. Aber zuerst ein Motivationsbeispiel.

3.6 Anwendung für elliptische optimale Steuerung

3.6.1 Verteilte Kontrolle

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \min_{y \in H_0^1(\Omega), u \in L^2(\Omega)} \quad & J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{s.t.} \quad & Ay = r + Bu, \quad u \leq b \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} b &\in L^\infty(\Omega) \\ A : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \quad \text{elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung} \\ r &\in H^{-1}(\Omega) \quad \text{gegeben} \\ B : L^{p'}(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \quad \text{stetig und linear} \\ p' &\in [1, 2) \quad \text{sodass } H_0^1(\Omega) \text{ im Dualraum } L^p(\Omega), p = p'/(p' - 1), \\ &\quad \text{von } L^{p'}(\Omega) \text{ stetig eingebettet ist} \\ \beta_l &< \beta_r \end{aligned}$$

Jetzt bringen wir das Problem in die Form (3.3) mit $m = 1$ mit

$$\begin{aligned} w &= (y, u) \quad W = Y \times U \quad Y = H_0^1(\Omega) \quad U = L^2(\Omega) \\ Z &= H^{-1}(\Omega) \quad e(y, u) = Ay - Bu - r \quad c(y, u) = u - b \end{aligned}$$

Dabei sind e und c stetige affin lineare Operatoren. Die Lagrangefunktion dazu lautet:

$$L : Y \times U \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad L(y, u, \lambda, \mu) = J(y, u) + (\lambda, c(y, u))_{L^2(\Omega)} + \langle \mu, e(y, u) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}$$

Dadurch können wir die Optimalitätsbedingungen ausrechnen:

$$\begin{aligned} L_y(y, u, \lambda, \mu) &= J_y(y, u) + c_y(y, u)^* \lambda + e_y(y, u)^* \mu = y - y_d + a^* \mu = 0 \\ L_u(y, u, \lambda, \mu) &= J_u(y, u) + c_u(y, u)^* \lambda + e_u(y, u)^* \mu = \alpha u + \lambda - B^* \mu = 0 \\ \lambda &\geq 0, \quad c(y, u) = u - b \leq 0, \quad (\lambda, c(y, u))_{L^2(\Omega)} = (\lambda, u - b)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ e(y, u) &= Ay - Bu - r = 0 \end{aligned}$$

Diese Bedingungen entsprechen denjenigen von (3.4).

Daraus ergibt sich, dass $\lambda = B^* \mu - \alpha u$. Wenn wir dies einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} A^* \mu &= -(y - y_d) \\ B^* \mu - \alpha u &\geq 0, \quad u \leq b, \quad (B^* \mu - \alpha u, u - b)_{L^2(\Omega)} \\ Ay &= r + Bu \end{aligned}$$

Für die Projektion bedeutet dies, dass

$$b - u - P_{[0, \infty)}(b - u - \theta(B^* \mu - \alpha u)) = 0$$

Für $\theta = 1/\alpha$ führt das zu

$$\Phi(u, \mu) = b - u - P_{[0, \infty)}(b - \frac{1}{\alpha} B^* \mu) = 0$$

Da $B^* \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), L^p(\Omega))$ mit $p = p'/(p' - 1) > 2$ sehen wir, dass

$$(u, \mu) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto b - \frac{1}{\alpha} B^* \mu \in L^p(\Omega)$$

stetig und affin linear ist.

Frage 2. warum können wir jetzt Thm 3.2.4 anwenden? also ist ja nicht R^m (gleiches Problem bei Beweis zu 2.3.2)

Deshalb ist Φ $\partial\Phi$ -semidiffbar mit

$$\begin{aligned} \partial\Phi : L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\rightrightarrows \mathcal{L}(L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) \\ \partial\Phi(u, \mu) &= \left\{ M \left| \begin{array}{l} M = (I, -\frac{g}{\alpha} \cdot B^*), g \in L^\infty(\Omega), \\ g(x) \in \partial^{cl} P_{[0, \infty)}(b(x) - \frac{1}{\alpha}(B^* \mu)(x)) \text{ f.f.a. } x \in \Omega \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Hierbei ist die Projektion gegeben durch:

$$\partial^{cl} P_{[0,\infty)}(t) = \begin{cases} \{0\}, & t < 0 \\ \{1\}, & t > 0 \\ [0, 1], & t = 0 \end{cases}$$

Das semidiffbare Newtonsystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & A^* \\ 0 & I & -\frac{g^k}{\alpha} \cdot B^* \\ A & -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_y \\ s_u \\ s_\mu \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y^k - y_d + A^* \mu^k \\ u^k - b + P_{[0,\infty)}(b - \frac{1}{\alpha} B^* \mu^k) \\ Ay^k - Bu^k - r \end{pmatrix}$$

Frage 3. (hier nochmal genau verstehen. Die zweite Zeile ist nur $M_k s^k = \Phi$. Die anderen Zeilen kann ich nicht genau sagen. Wie sieht dann der Alorithmus dazu aus?)

Bei diesem System ist die linke Seite genau die Gleiche, wie bei dem System davor.