

Implementação da Decomposição Empírica Modal e Exemplos de Aplicação

Instituto Superior Técnico
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica
Física Computacional

Por Ana Filipa Valente (90376) e Inês Alves Ferreira (90395)

31 de Dezembro de 2018

Resumo

Este trabalho compreende o desenvolvimento de uma implementação em C++ (com recurso à biblioteca ROOT) da decomposição empírica modal de um sinal temporal. O texto abaixo encontra-se dividido de tal forma que: **(1)** A Secção 1 introduz o conceito de decomposição empírica modal e propõe um algoritmo para a sua computação. **(2)** A Secção 2 propõe uma implementação para o algoritmo descrito na secção anterior. **(3)** A Secção 4 providencia exemplos de correção do código desenvolvido.

1 Introdução

A decomposição empírica modal (abreviada por *EMD*) pretende aproximar um sinal possível não-estacionário e não-linear por uma sobreposição de sinais que traduzam as suas oscilações rápidas e lentas. Com este objetivo, a técnica *EMD* identifica um conjunto de funções modais intrínsecas (abreviadas por *IMFs*), que capturam localmente as diferentes escalas de variação temporal do sinal original.

Considere um sinal temporal discreto $s(t)$ avaliado em N pontos t_1, \dots, t_N . Como referido acima, a decomposição empírica modal permite aproximar $s(t)$ por um sinal $s'(t)$ tal que

$$s'(t) = r(t) + \sum_{i=1}^m c_i(t),$$

onde $c_i(t)$ é uma de m *IMFs* e $r(t)$ o *resíduo* final do processo de descoberta da *EMD* (a ver).

A extração de uma *IMF* de um sinal, nomeie-se $a(t)$, envolve:

- (1) Calcular os envelopes superior e inferior de $a(t)$, respetivamente $e_{m,\text{sup}}(t)$ e $e_{m,\text{inf}}(t)$. Um envelope (superior ou inferior) corresponde a uma função interpolado a partir de todos os extremos locais (máximos ou mínimos) de um dado sinal. Neste

trabalho, considera-se o uso do interpolador **CubicSpline**.

- (2) Identificar o sinal médio $m(t) = (e_{m,\text{sup}}(t) + e_{m,\text{inf}}(t)) / 2$ entre os envelopes superior e inferior, e o sinal de detalhe $d(t)$, onde $d(t) = m(t) - a(t)$.
- (3) Verificar se $d(t)$ cumpre o **CrITÉrio de Rilling**. Deixe $e_{d,\text{sup}}(t)$ e $e_{d,\text{inf}}(t)$ designar os envelope superior e inferior de $d(t)$. O **CrITÉrio de Rilling** especifica que $d(t)$ é uma *IMF* se a função de variação $\sigma(t) = |d_m(t) d_A(t)|$, onde $d_m(t) = (e_{d,\text{sup}}(t) + e_{d,\text{inf}}(t)) / 2$ e $d_A(t) = (e_{d,\text{sup}}(t) - e_{d,\text{inf}}(t)) / 2$, é tal que: em todos os pontos de amostragem t_i , $\sigma(t_i) < 0.5$, e em 95% dos pontos de amostragem t_i , $\sigma(t_i) < 0.05$.
- (4) Caso $d(t)$ não cumpra o **CrITÉrio de Rilling**, tomar $a(t) = d(t)$ e repetir os passos acima.
- (5) Associar o sinal resíduo, denotado $r(t)$, com $a(t) - d(t)$.

A descoberta da *EMD* de um sinal $s(t)$ implica a extração sucessiva de *IMFs* de $s(t)$ até que o **CrITÉrio de Terminação** seja cumprido. Este impõe que o resíduo da última extração deve: possuir no máximo 3 extremos locais (não incluindo os extremos da função) ou ser de valor aproximadamente constante.

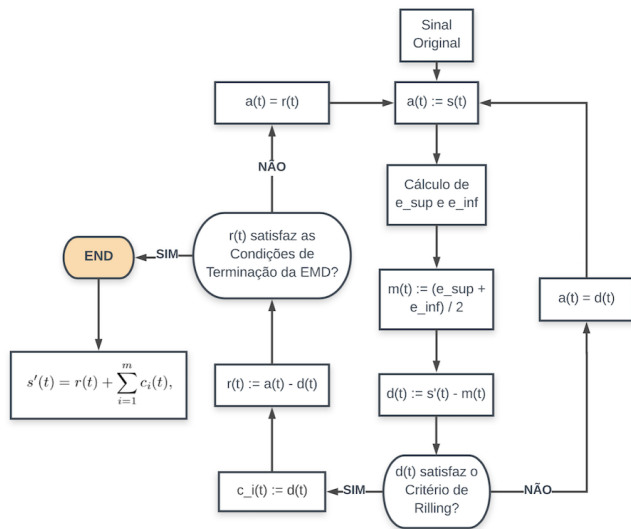


Figura 1: Algoritmo para a descoberta da *EMD* de um dado sinal

2 Implementação

Descreve-se agora a classe *EMD*, desenvolvida para a implementação da *EMD* num dado sinal $s(t)$. Para isto, a classe *EMD*:

1. Agrega os sinais auxiliares $s(t)$, $e_{m,sup}(t)$, $e_{m,inf}(t)$, $m(t)$, $e_{d,sup}(t)$, $e_{d,inf}(t)$, $d(t)$ e $r(t)$ como membros privados, de tal forma que cada sinal é representado por um template `VECTOR< >` com argumentos da classe `POINT`, onde a classe `POINT` designa um par ordenado formado da forma $(t, y(t))$.
2. Implementa um método público `FindIMFs`, que implementa o algoritmo descrito no Diagrama 1 de forma a extrair sucessivas *IMFs* do $s(t)$. Este recorre aos métodos privados mencionados abaixo:
 - (1) `SiftingProcess`, que extrai uma *IMF* $d(t)$ do sinal $s(t)$, com recurso aos métodos, que, a cada iteração:
 - (1) `SetMean`, que determina o sinal $m(t)$. Para isso, calcula os envelopes $e_{m,sup}(t)$ e $e_{m,inf}(t)$, via os métodos `GetMax` e `GetMin`, para cálculo dos extremos locais, e depois os métodos `SetEMin` e `SetEMax`, para sua interpolação, utilizando a classe `SplineInterpolator`.
 - (2) `GetDetail`, que identifica o detalhe.
 - (2) O critério de terminação é implementado no método `ContinueCycle`. Para avaliar se o resíduo é aproximadamente constante,

calcula-se a amplitude média do resíduo e a amplitude média do sinal inicial. Se a distância em todos os pontos do resíduo em relação à amplitude média for inferior a 10% do valor da amplitude média inicial considera-se que o resíduo é constante. Para avaliar o número de extremos utilizam-se novamente os métodos `GetMax` e `GetMin`.

De notar que foram utilizadas diversas as classes desenvolvidas ao longo do semestre de forma a se poder interpolar os extremos com o Cubic Spline tais como: `EQSOLVER`, `FCMATRIX`, `FCMATRIXBANDED`, `VEC`, `FCTOOLS`, `DATAPOINTS`. Também foi utilizada a classe desenvolvida pelos docentes `CFCGRAPHICS` de forma a facilitar o desenho de gráficos usando a biblioteca `ROOT`.

3 Processo de Mirroring

Para permitir um bom comportamento do interpolador nos extremos do intervalo é importante definir uma técnica de Mirroring, ou seja, utilizar pontos extra fora do intervalo em questão. Nos métodos `GetMax` e `GetMin` os extremos do intervalo são considerados como extremos. Como nem sempre devem ser interpolados, foi necessário criar um critério de inclusão ou não destes extremos:

- (1) Se o primeiro máximo for um extremo do intervalo, apenas é utilizado para a interpolação se for superior ou igual ao máximo seguinte. Se o último máximo for um extremo do intervalo, apenas é utilizado para a interpolação se for superior ou igual ao máximo anterior.
- (2) Se o primeiro mínimo for um extremo do intervalo, apenas é utilizado para a interpolação se for inferior ou igual ao mínimo seguinte. Se o último mínimo for um extremo do intervalo, apenas é utilizado para a interpolação se for inferior ou igual ao mínimo anterior.
- (3) Os valores que são espelhados são sempre o primeiro máximo ou mínimo não incluindo os extremos do intervalo.

4 Exemplos de aplicação

4.1 Soma de senos

A seguinte função foi discretizada em 400 pontos no intervalo $[0,4[$ para se poder utilizar o processo de *EMD* para serem obtidas *IMFs*.

$$s(t) = 0.5 \sin(1 \times 2\pi t) + 0.8 \sin(3 \times 2\pi t) + 1.5 \sin(5 \times 2\pi t)$$

4.1.1 Resultados e Análise

Foram obtidas 3 *IMFs* e os dados presentes na tabela 1.

Visto que o sinal original resulta da soma de três funções sinusoidais, é de esperar que o número de *IMFs* seja três, tal como obtido.

A frequência média de cada uma das *IMFs* está de acordo com as frequências das componentes do sinal original 1, 3 e 5 Hz. Por outro lado, apenas duas das amplitudes médias estão de acordo com as esperadas visto que a amplitude média da segunda *IMF* deveria ser 0.8.

No entanto, note-se: ao tornar 10 vezes mais rígidos os critérios para verificar se um detalhe era uma *IMF*, isto é, o critério de Rilling, as amplitudes obtidas foram muito mais exatas, como mostra o espectro de Hilbert abaixo.

Num caso como este, um sinal artificial obtido através de uma função contínua bem conhecida, faz sentido tornar este critério mais rígido. No entanto, esta é uma modificação que foi feita conhecendo o sinal *a priori*. Tornar os critérios mais rígidos desta maneira não faria sentido para analisar um sinal físico do qual não se tem nenhuma informação prévia com um método adaptável como este. Assim, foram mantidos os valores recomendados quando a aplicar o critério de Rilling. Deixei-se a nota, no entanto, que, para analisar diferentes conjuntos de dados, pode ser necessário usar critérios de paragem diferentes,

tanto para acabar de encontrar *IMFs* como para aceitar um detalhe como *IMF*.

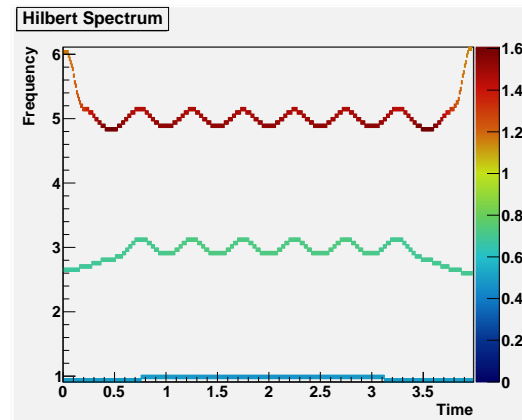


Figura 2: Espectro de Hilbert obtido com um critério de Rilling mais rígido

De acordo com os coeficientes de correlação, nota-se que a primeira *IMF* é a mais significativa. A amplitude da primeira *IMF* é, também, a mais elevada.

Abaixo encontram-se alguns gráficos relevantes obtidos.

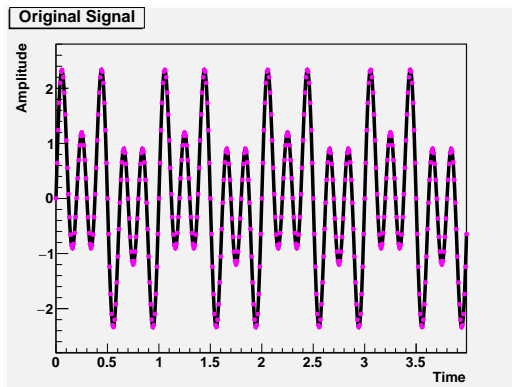


Figura 3: Sinal Original - Função Discreta

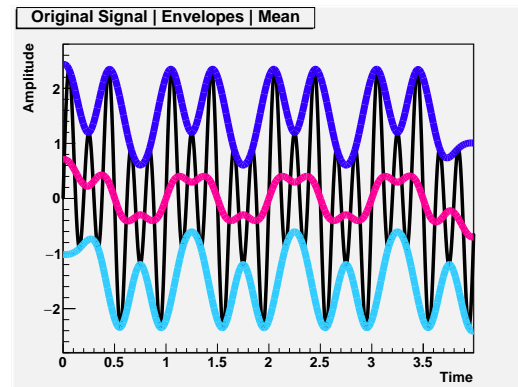


Figura 4: Sinal Original e Respetivos Envelopes

IMF	Nº de Iterações	Coefficiente de Correlação	Amplitude média	Frequência média	Período médio
1	4	0.926	1.48	5.06	0.20
2	2	0.462	0.42	2.91	0.34
3	1	0.325	0.47	0.95	1.05

Tabela 1: Dados obtidos após a análise da discretização da soma de três senos

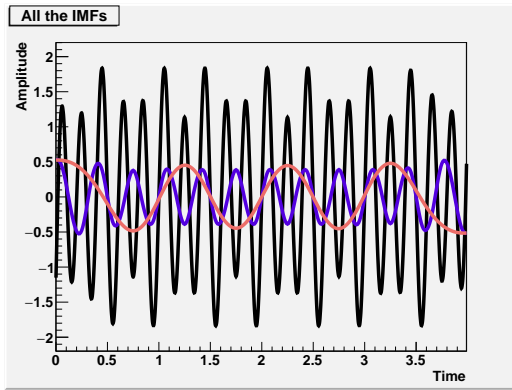


Figura 5: IMF's - Função Discreta

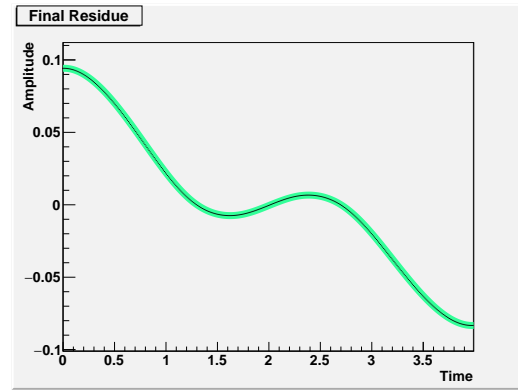


Figura 6: Resíduo Final - Função Discreta

4.2 Número de *sun spots* ao longo dos anos

Depois, foi analisado o número de *sun spots* (zonas da superfície do Sol - fotosfera - com temperaturas mais

baixas) desde 1749 até 2018. Foram obtidos os seguintes resultados:

4.2.1 Resultados e Análise

IMF	Nº de Iterações	Coefficiente de Correlação	Amplitude média	Frequência média	Período médio
1	41	0.13	14.5	4.15	0.24
2	34	0.08	12.9	2.11	0.47
3	24	0.09	11.5	1.13	0.89
4	14	0.07	10.9	0.59	1.70
5	32	0.28	43.4	0.22	4.55
6	6	0.36	51.1	0.09	11.11
7	7	0.12	19.1	0.04	25.00
8	6	0.14	33.3	0.02	50.00
9	9	0.15	11.1	0.01	100.00

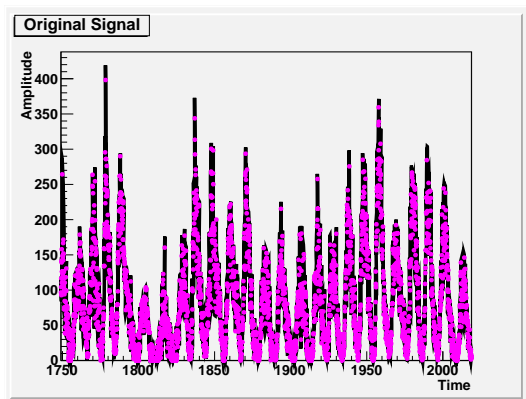
Tabela 2: Dados obtidos após a análise do número de *sun spots* ao longo de 270 anos

Figura 7: Sinal Original

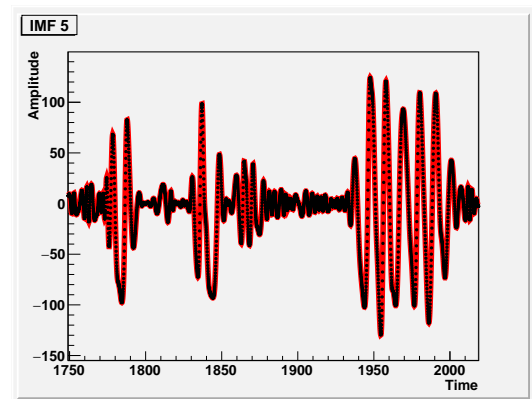


Figura 8: 5ª IMF

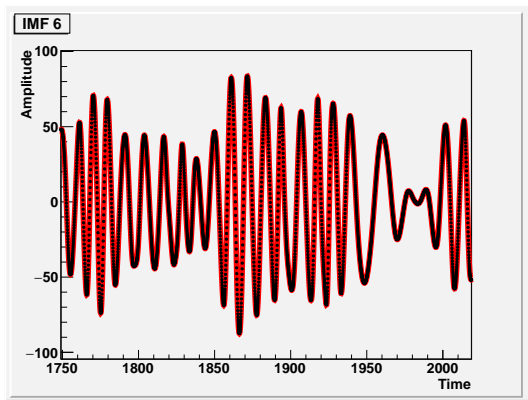


Figura 9: 6ª IMF

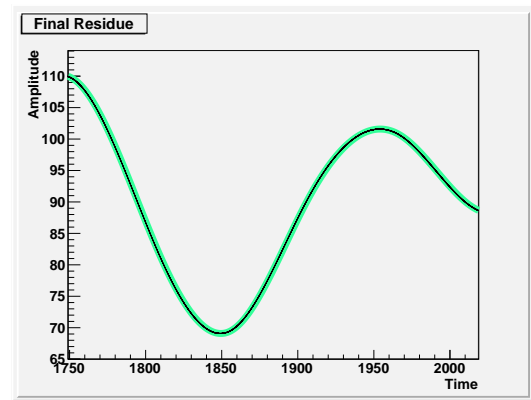


Figura 10: Resíduo Final - Função Discreta

5 Análise Final e Conclusão

Neste trabalho, pretendeu-se, primeiro, validar tanto o método de *EMD* como o algoritmo implementado para o realizar e, depois, aplicar o método e o algoritmo a uma situação real com implicações físicas. A motivação específica para a realização do trabalho é a análise do número de *sun spots* ao longo dos anos.

5.1 Análise do método de *EMD*

Para tal, começou-se por analisar um sinal artificial proveniente da discretização de uma função contínua (a soma de três senos com amplitudes e frequências diferentes). Após a análise por *EMD*, foram obtidas três *IMFs* cuja soma se verificou ser aproximadamente o sinal inicial, com algumas flutuações.

Note-se que a soma das *IMFs* não ser aproximadamente igual ao sinal original não é algo problemático ou que desvalide o método. No primeiro caso analisado, na soma de senos, o resíduo era pouco importante, uma vez que a função oscilava em torno do zero da escala. No entanto, no caso da análise do número de *sun spots* ao longo de vários anos, o resíduo vai ser relevante para comprovar a eficácia do método (ao somá-lo às *IMFs* encontradas e comparar com o sinal original), uma vez que o sinal tem um *offset* do zero que só se propaga para o resíduo (as *IMFs* oscilam em torno do zero).

Após somar o resíduo final a estas três *IMFs*, o resultado pareceu coincidir totalmente com o sinal original. Tal está concordante com a teoria, uma vez que o sinal original é suposto ser aproximadamente igual à soma das suas *IMFs* mais o seu resíduo.

As frequências e as amplitudes destas três *IMFs* eram aproximadamente iguais às dos senos, com algumas flutuações.

Concluiu-se, também, que há uma relação entre a amplitude e a significância das *IMFs*: quanto maior for a amplitude da *IMF*, maior será o seu coeficiente de correlação.

Esta primeira aplicação permite validar tanto o método como o algoritmo: é possível, de facto, decompor um sinal e obter dados significativos para o mesmo. O método de *EMD* é rápido e de fácil implementação que obtém resultados viáveis.

No entanto, tal como é verificável na apresentação de resultados, há que ter em conta que pode ser necessário ajustar os critérios de paragem aos dados do sinal. Afinal de contas, este é um método empírico.

5.2 Análise do número de *sun spots*

Após verificar a validação do método, foi analisado o número de *sun spots* nos últimos 270 anos. Estes *sun spots* são zonas da superfície solar onde o campo magnético é muito mais forte do que em qualquer outra área do Sol. Por causa deste forte campo magnético, a temperatura daquele local diminui (o campo magnético forte inibe o fluxo de gás quente que vem do interior do Sol para a superfície). Estes locais aparecem usualmente aos pares e com polaridade magnética oposta.

O número destes *sun spots* aumenta e diminui de acordo com um ciclo de cerca de 11 anos - o ciclo solar¹. Este intervalo de tempo corresponde ao tempo entre cada mudança de polaridade do campo magnético do Sol (ou seja, a mudança de polaridade tem um período médio de 22 anos).

Embora a razão pela qual os *sun spots* existam e se comportem assim ainda está a ser investigada, parece que estes fenómenos são a consequência visível do facto de tubos de fluxo magnético presentes na zona de convecção solar (a camada solar antes da fotosfera) ficarem "enrolados" por rotação diferencial (diferentes zonas rodarem

¹Desde 1749 até 2018, houve 23 ciclos solares completos.

com velocidades angulares diferentes). Quando a tensão sobre os tubos chega a um certo limite, eles perfuram a superfície solar e impedem a convecção.

A análise feita parece estar em concordância com o ciclo solar: a *IMF* com o maior coeficiente de correlação (*IMF* 6) apresenta um período médio de 11.1 anos, o que coincide com o esperado ciclo solar. A sua amplitude é também a maior (51.1). Podemos concluir, assim, que cerca de 50 *sun spots* aparecem e desaparecem por ciclo solar.

A *IMF* número 5 (com o segundo maior coeficiente de correlação) apresenta um período médio de cerca de 5 anos, aproximadamente metade do ciclo solar, e tem uma amplitude média de cerca de 43 *sun spots*. Pode-se concluir, assim, que o número de *sun spots* oscila, também, com metade do ciclo solar.

As *IMFs* número 1,2,3 e 4, dado o seu muito baixo coeficiente de correlação e alta frequência, podem ser consideradas como irrelevantes para a análise do número de sunspots e ser consideradas ruído.

As *IMFs* número 7,8 e 9 têm um coeficiente de correlação também baixo mas podem ter algum significado físico relevante. Aliás, uma vez que o campo magnético

do sol muda de polaridade a cada 22 anos, faz sentido que uma das *IMFs* tenha um período médio de 25 anos, mesmo que a sua amplitude seja de apenas 19 *sun spots*. A *IMF* número 8 tem uma amplitude já mais elevada (33.3) e um período médio de 50 anos.

Note-se também que o resíduo após o processo de *EMD*² mostra os dois períodos com o menor e o maior número de *sun spots* neste período de tempo: o chamado mínimo de Dalton (1790-1820) e o chamado máximo moderno (1900-presente).

Referências

- [1] Barão, F., Coelho, R., Orcinha, M., Couto, C., Dpt. de Física, IST, acedido a 31 de Dezembro de 2018, <<http://labrc.ist.utl.pt/ComputPhys.web/Projecto/P.html>>
- [2] WDC-SILSO, Observatório Real da Bélgica, Bruxelas, acedido a 25 de Dezembro de 2018, <<http://www.sidc.be/silso/datafiles>>
- [3] National Weather Service, Sioux Falls, SD, EUA, acedido a 31 de Dezembro de 2018, <<https://www.weather.gov/fsd/sunspots>>

6 Anexos

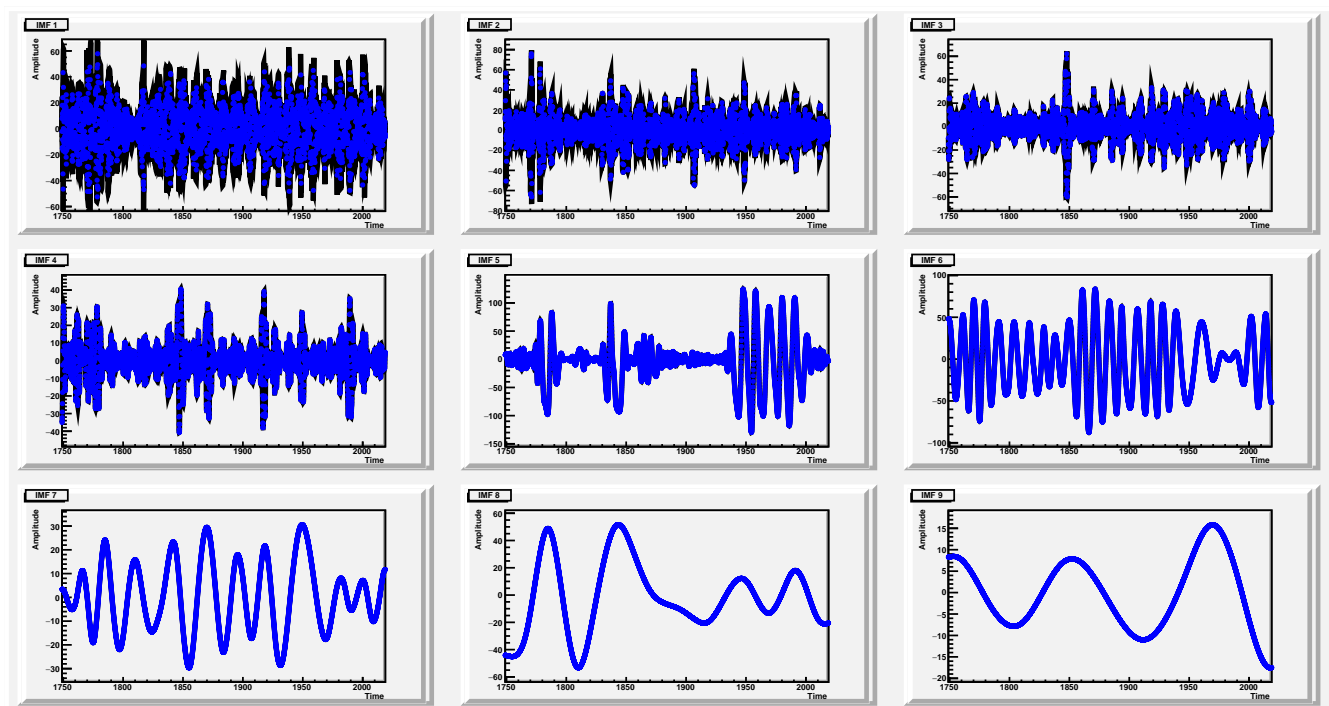


Figura 11: IMF's do segundo exemplo

²O resíduo final mostra a tendência dos dados.