Trabajo Práctico Unidad 6
Probabilidad y Estadística

Alumnas:

Cipullo, Inés

Sullivan, Katherine

Universidad Nacional de Rosario

2021

Ejercicio 1

Sean las siguientes variables aleatorias:

- G_i: "resultado de la apuesta i"
- G_t: "suma de los resultados de las primeras 50 apuestas"

Tenemos que:

- $P(G_i = 0) = 0{,}9$
- $P(G_i = 1) = 0{,}1$
- $G_t = \sum_{i=1}^{50} G_i$

Considerando que el resultado de una apuesta es independiente del resultado del resto de apuestas y que $E(G_i)$ y $V(G_i)$ son finitas para todo $i = 1, ..., 50$ podemos aplicar el teorema central del límite y concluir que la variable G_t tiene una distribución aproximadamente normal de media μ y varainza σ^2, donde:

- $\mu = E(G_t) = 50 \cdot E(G_i) = 50 \cdot 0{,}1 = 5$
- $\sigma^2 = V(G_t) = 50 \cdot V(G_i) = 50 \cdot 0{,}09 = 4{,}5$

Por lo tanto, $G_t \sim N(5, 4{,}5)$

Sea S la cantidad de dinero con que la persona queda luego de las 50 apuestas. Queremos ver que $S \geq 0$.

Recordando que se apuesta una cantidad de dinero c que se pierde en caso de que $G_i = 0$ y que si $G_i = 1$ se ganan $5c$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
S &= 5 \cdot c \cdot G_t - c \cdot (50 - G_t) \\
&= 5 \cdot c \cdot G_t - (c \cdot 50 + c \cdot G_t) \\
&= 5 \cdot c \cdot G_t + c \cdot G_t - c \cdot 50 \\
&= 6 \cdot c \cdot G_t - c \cdot 50
\end{aligned}
$$

Queremos que $S \geq 0 \implies 6c\ G_t - 50c \geq 0 \implies G_t \geq \frac{50}{6}$

Entonces, en síntesis lo que buscamos es $P(G_t \geq 8{,}33)$.

Para obtener este valor estandarizamos la variable

$Z = \frac{G_t - \mu}{\sigma} = \frac{G_t - 5}{\sqrt{4{,}5}} = \frac{G_t - 5}{2{,}12}$

Y por lo tanto,

$P(G_t \geq 8{,}33) = P(Z \geq 1{,}57) = 1 - P(Z < 1{,}57) = 1 - 0{,}9418 = 0{,}0582$

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Sean las variables aleatorias:

- X: "número de defectos tipo D1 que presenta una pieza"
- Y: "número de defectos tipo D2 que presenta una pieza"

Contamos con los siguientes datos:

1. $E(X) = 0{,}3$ y $V(X) = 0{,}21$
2. $E(Y) = 0{,}8$ y $V(Y) = 0{,}56$

3. 20 % de piezas tienen 2 defectos tipo D2
4. 15 % de las piezas tienen 1 defecto tipo D1 y ninguno tipo D2
5. 50 % de las piezas que no tienen defectos tipo D1, tienen 1 defecto tipo D2

a)

X \Y	**0**	**1**	**2**	$p_X(x)$
0	0,25	0,35	0,1	0,7
1	0,15	0,05	0,1	0,3
$p_Y(y)$	0,4	0,4	0,2	1

Cálculos realizados:

- $p(1,0) = 0{,}15$ (por lo especificado en el dato 4)
- $p_Y(2) = 0{,}2$ (por lo especificado en el dato 3)
- $E(X) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) = p_X(1) \implies p_X(1) = 0{,}3$
- $p_X(0) + p_X(1) = p_X(0) + 0{,}3 = 1 \implies p_X(0) = 0{,}7$
- $p(0,1) = p_X(0) \cdot 0{,}5 = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$ (por lo especificado en el dato 5)
- $E(Y) = 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) + 2 \cdot p_Y(2) = p_Y(1) + 2 \cdot 0{,}2 \implies p_Y(1) = 0{,}4$
- $p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = p_Y(0) + 0{,}4 + 0{,}2 = 1 \implies p_Y(0) = 0{,}4$
- $p_Y(0) = p(0,0) + p(1,0) \implies 0{,}4 = p(0,0) + 0{,}15 \implies p(0,0) = 0{,}25$
- $p_X(0) = p(0,0) + p(0,1) + p(0,2) \implies 0{,}7 = 0{,}25 + 0{,}35 + p(0,2) \implies p(0,2) = 0{,}1$
- $p_Y(1) = p(0,1) + p(1,1) \implies 0{,}4 = 0{,}35 + p(1,1) \implies p(1,1) = 0{,}5$

- $p_Y(2) = p(0,2) + p(1,2) \implies 0{,}2 = 0{,}1 + p(1,2) \implies p(1,2) = 0{,}1$

b)

Las variables aleatorias X e Y son independientes si

$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \;\forall\; (x,y) \in R_{(X\times Y)}$$

Notar que en este caso $R_{(X\times Y)} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$.

Pero tenemos que $p(0,0) = 0{,}25$ y $p_X(0) \cdot p_Y(0) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$, por lo tanto X e Y no son independientes.

Calculamos entonces el Coeficiente de Correlación:

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} = \frac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{0{,}25 - 0{,}3\cdot 0{,}8}{\sqrt{0{,}21\cdot 0{,}56}} = 0{,}0292\end{aligned}$$

donde $(*)$ hace referencia al siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}E(X\cdot Y) &= \sum_{(x,y)\in R_{(X\times Y)}} x\cdot y\cdot p(x,y) \\ &= p(1,1) + 2\cdot p(1,2) = 0{,}05 + 2\cdot 0{,}1 = 0{,}25\end{aligned}$$

c)

La fórmula de probabilidad condicional es como sigue:

$$P(Y = y/X = x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$$

Queda entonces que

$$P(Y = 2/X = 0) = \frac{p(0,2)}{p_X(0)} = \frac{0{,}1}{0{,}7} = 0{,}1428$$

Este resultado refleja que dada una pieza que no tiene defectos tipo D1, la probabilidad de que tenga 2 defectos tipo D2 es 0,1428. Otra forma de verlo es pensar que el 14,28 % de las piezas que no tienen defectos D1, tienen 2 defectos D2.

d)

Buscamos la esperanza y la varianza del costo de reparación por pieza, siendo que un defecto tipo D1 tiene un costo de reparación de $3 y uno tipo D2 tiene un costo de reparación de $4.

Definimos una función sobre las variables aleatorias: $Z = H(X,Y)$, donde $H(x,y) = 3 \cdot x + 4 \cdot y$.

Luego, basta con calcular $E(Z)$ y $V(Z)$.

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{(x,y)\in R_{(X\times Y)}} H(x,y) \cdot p(x,y) \\
&= 4 \cdot p(0,1) + 8 \cdot p(0,2) + 3 \cdot p(1,0) + 7 \cdot p(1,1) + 11 \cdot p(1,2) \\
&= 4 \cdot 0{,}35 + 8 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}15 + 7 \cdot 0{,}05 + 11 \cdot 0{,}1 \\
&= 1{,}4 + 0{,}8 + 0{,}45 + 0{,}35 + 1{,}1 = 4{,}1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(Z) &= \sum_{(x,y)\in R_{(X\times Y)}} [H(x,y) - E(Z)]^2 \cdot p(x,y) \\
&= (-4{,}1)^2 \cdot p(0,0) + (-0{,}1)^2 \cdot p(0,1) + 3{,}9^2 \cdot p(0,2) + \\
&\quad + (-1{,}1)^2 \cdot p(1,0) + 2{,}9^2 \cdot p(1,1) + 6{,}9^2 \cdot p(1,2) \\
&= 16{,}81 \cdot 0{,}25 + 0{,}01 \cdot 0{,}35 + 15{,}21 \cdot 0{,}1 + 1{,}21 \cdot 0{,}15 + 8{,}41 \cdot 0{,}05 + 47{,}61 \cdot 0{,}1 \\
&= 4{,}2025 + 0{,}0035 + 1{,}521 + 0{,}1815 + 0{,}4205 + 4{,}761 = 11{,}09
\end{aligned}
$$