

Trabajo Práctico Unidad 6

Probabilidad y Estadística

Alumnas:

Cipullo, Inés

Sullivan, Katherine

Universidad Nacional de Rosario

2021

Ejercicio 1

Sean las siguientes variables aleatorias:

- G_i : “resultado de la apuesta i ”
- G_t : “suma de los resultados de las primeras 50 apuestas”

Tenemos que:

- $P(G_i = 0) = 0,9$
- $P(G_i = 1) = 0,1$
- $G_t = \sum_{i=1}^{50} G_i$

Considerando que el resultado de una apuesta es independiente del resultado del resto de apuestas y que $E(G_i)$

Considerando que la demanda de cada día es independiente de la demanda del resto de los días y que $E(D_i)$ y $V(D_i)$ son finitas para todo $i=1,\dots,90$, podemos aplicar el teorema central del límite y concluir que la variable DT tiene una distribución aproximadamente normal de media y varianza 2.

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Sean las variables aleatorias:

- X : “número de defectos tipo D1 que presenta una pieza”
- Y : “número de defectos tipo D2 que presenta una pieza”

Contamos con los siguientes datos:

1. $E(X) = 0,3$ y $V(X) = 0,21$
2. $E(Y) = 0,8$ y $V(Y) = 0,56$
3. 20 % de piezas tienen 2 defectos tipo D2
4. 15 % de las piezas tienen 1 defecto tipo D1 y ninguno tipo D2
5. 50 % de las piezas que no tienen defectos tipo D1, tienen 1 defecto tipo D2

a)

X \ Y	0	1	2	$p_X(x)$
0	0,25	0,35	0,1	0,7
1	0,15	0,05	0,1	0,3
$p_Y(y)$	0,4	0,4	0,2	1

Cálculos realizados:

- $p(1, 0) = 0,15$ (por lo especificado en el dato 4)
- $p_Y(2) = 0,2$ (por lo especificado en el dato 3)
- $E(X) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) = p_X(1) \implies p_X(1) = 0,3$
- $p_X(0) + p_X(1) = p_X(0) + 0,3 = 1 \implies p_X(0) = 0,7$
- $p(0, 1) = p_X(0) \cdot 0,5 = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$ (por lo especificado en el dato 5)
- $E(Y) = 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) + 2 \cdot p_Y(2) = p_Y(1) + 2 \cdot 0,2 \implies p_Y(1) = 0,4$
- $p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = p_Y(0) + 0,4 + 0,2 = 1 \implies p_Y(0) = 0,4$

- $p_Y(0) = p(0, 0) + p(1, 0) \implies 0,4 = p(0, 0) + 0,15 \implies p(0, 0) = 0,25$
- $p_X(0) = p(0, 0) + p(0, 1) + p(0, 2) \implies 0,7 = 0,25 + 0,35 + p(0, 2) \implies p(0, 2) = 0,1$
- $p_Y(1) = p(0, 1) + p(1, 1) \implies 0,4 = 0,35 + p(1, 1) \implies p(1, 1) = 0,05$
- $p_Y(2) = p(0, 2) + p(1, 2) \implies 0,2 = 0,1 + p(1, 2) \implies p(1, 2) = 0,1$

b)

Las variables aleatorias X e Y son independientes si

$$p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad \forall (x, y) \in R_{(X \times Y)}$$

Notar que en este caso $R_{(X \times Y)} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$.

Pero tenemos que $p(0, 0) = 0,25$ y $p_X(0) \cdot p_Y(0) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$, por lo tanto X e Y no son independientes.

Calculamos entonces el Coeficiente de Correlación:

$$\begin{aligned} \rho_{xy} &= \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{0,25 - 0,3 \cdot 0,8}{\sqrt{0,21 \cdot 0,56}} = 0,0292 \end{aligned}$$

donde $(*)$ hace referencia al siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{(x, y) \in R_{(X \times Y)}} x \cdot y \cdot p(x, y) \\ &= p(1, 1) + 2 \cdot p(1, 2) = 0,05 + 2 \cdot 0,1 = 0,25 \end{aligned}$$

c)

La fórmula de probabilidad condicional es como sigue:

$$P(Y = y/X = x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}$$

Queda entonces que

$$P(Y = 2/X = 0) = \frac{p(0, 2)}{p_X(0)} = \frac{0,1}{0,7} = 0,1428$$

Este resultado refleja que dada una pieza que no tiene defectos tipo D1, la probabilidad de que tenga 2 defectos tipo D2 es 0,1428. Otra forma de verlo es pensar que el 14,28 % de las piezas que no tienen defectos D1, tienen 2 defectos D2.

d)

Buscamos la esperanza y la varianza del costo de reparación por pieza, siendo que un defecto tipo D1 tiene un costo de reparación de \$3 y uno tipo D2 tiene un costo de reparación de \$4.

Definimos una función sobre las variables aleatorias: $Z = H(X, Y)$, donde $H(x, y) = 3 \cdot x + 4 \cdot y$.

Luego, basta con calcular $E(Z)$ y $V(Z)$.

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{(x,y) \in R_{(X \times Y)}} H(x, y) \cdot p(x, y) \\ &= 4 \cdot p(0, 1) + 8 \cdot p(0, 2) + 3 \cdot p(1, 0) + 7 \cdot p(1, 1) + 11 \cdot p(1, 2) \\ &= 4 \cdot 0,35 + 8 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,15 + 7 \cdot 0,05 + 11 \cdot 0,1 \\ &= 1,4 + 0,8 + 0,45 + 0,35 + 1,1 = 4,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(Z) &= \sum_{(x,y) \in R_{(X \times Y)}} [H(x,y) - E(Z)]^2 \cdot p(x,y) \\
 &= (-4,1)^2 \cdot p(0,0) + (-0,1)^2 \cdot p(0,1) + 3,9^2 \cdot p(0,2) + \\
 &\quad + (-1,1)^2 \cdot p(1,0) + 2,9^2 \cdot p(1,1) + 6,9^2 \cdot p(1,2) \\
 &= 16,81 \cdot 0,25 + 0,01 \cdot 0,35 + 15,21 \cdot 0,1 + 1,21 \cdot 0,15 + 8,41 \cdot 0,05 + 47,61 \cdot 0,1 \\
 &= 4,2025 + 0,0035 + 1,521 + 0,1815 + 0,4205 + 4,761 = 11,09
 \end{aligned}$$