Trabajo Práctico Unidad 3
Probabilidad y Estadística

Alumnas:

Cipullo, Inés

Sullivan, Katherine

Universidad Nacional de Rosario

2021

Ejercicio 1

Considerando un canal de comunicación de un bit donde la probabilidad de enviar un 0 o un 1 es la misma, definimos los siguientes sucesos:

- Se emite un 0: A
- Se emite un 1: B
- Se recibe un 0: C
- Se recibe un 1: D

Así, definimos al suceso $Error$ (se comete error en la transmisión) como: que suceda A y D o suceda B y C. Es decir,

$$(A \cap D) \cup (B \cap D).$$

Buscamos entonces, calcular $P(Error) = P((A \cap D) \cup (B \cap D))$.

Por defineción de la probabilidad de la unión,

$$P(Error) = P(A \cap D) + P(B \cap C) - P((A \cap D) \cap (B \cap C))$$

Dado que $A \cap B = \emptyset$, sabemos que $P((A \cap D) \cap (B \cap C)) = 0$.

Entonces, por esto y por el teorema de la multipliación de probabilidades,

$$P(Error) = P(D/A) \cdot P(A) + P(C/B) \cdot P(B) - 0 = P(D/A) \cdot P(A) + P(C/B) \cdot P(B)$$

Por último, sabiendo que $P(A) = P(B) = 0{,}5$, podemos aplicar la propiedad distributiva:

$$P(Error) = 0{,}5 \cdot (P(D/A) + P(C/B))$$

Para poder asignarle un valor a la probabilidad de que ocurra un error, quedaría conocer los valores de $P(D/A)$, que se entiende como la probabilidad de que se cumpla D dado que se sucedió A y $P(C/B)$, que se entinede como la probabilidad de que se cumpla C dado que sucedió B.

Ejercicio 2

a) Se solicita crear una tabla en donde cada celda represente la probabilidad de la intersección de los sucesos de la primera prueba con los de la segunda prueba.

Esta se presenta a continuación.

		Tipo de Error en la Segunda Prueba		
		Importante	Menor	Ninguno
Tipo de error en la Primera Prueba	Importante	0.18	0.3	0.12
	Menor	0.03	0.09	0.18
	Ninguno	0	0.02	0.08

Debe justificar los resultados obtenidos

b) Se indica calcular la probabilidad de un error importante en la segunda prueba.

Primero, otorgémosle nombre a los siguientes sucesos:

- Ocurre un error importante en la segunda prueba: I_2
- Ocurre un error importante en la primera prueba: I_1
- Ocurre un error menor en la primera prueba: M_1
- No ocurre ningún error en la primera prueba: N_1

Definimos S como el espacio muestral asociado a la primera prueba. Es decir,

$$S = \{I_1, M_1, N_1\}$$

Veamos que los sucesos I_1, M_1 y N_1 representan una partición del espacio muestral S, puesto que:

- $I_1 \cap M_1 = \emptyset$, $M_1 \cap N_1 = \emptyset$ y $N_1 \cap I_1 = \emptyset$, ya que solo puede ocurrir uno de los sucesos cuando se corre la primera prueba
- $I_1 \cup M_1 \cup N_1 = S$, y
- $P(I_1) = 0{,}6 > 0$, $P(M_1) = 0{,}3 > 0$ y $P(N_1) = 0{,}1 > 0$.

Luego como los sucesos representan una partición del espacio S podemos descomponer a I_2 como la unión de las intersecciones de I_2 con estos sucesos (resultando una unión de sucesos mutuamente excluyentes)

$$I_2 = (I_2 \cap I_1) \cup (I_2 \cap M_1) \cup (I_2 \cap N_1)$$

Y, entonces, la probabilidad de I_2 queda expresada como:

$$P(I_2) = P(I_2 \cap I_1) + P(I_2 \cap M_1) + P(I_2 \cap N_1) = 0{,}18 + 0{,}03 + 0 = 0{,}21$$

c) Se requiere encontrar la probabilidad de error menor en la primera prueba sabiendo que el error en la segunda prueba es importante.

Manteniendo los nombres otorgados en el inciso anterior lo que se debe encontrar es $P(M_1/I_2)$

Aplicando la definición de probabilidad condicional se tiene que:

$$P(M_1/I_2) = \frac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \frac{0{,}03}{0{,}21} = 0{,}1428$$

d) Se precisa analizar la independencia entre los resultados de la primera prueba y los resultados de la segunda prueba.

Mantenemos los nombres otorgados en el inciso b) y llamamos M_2 a la ocurrencia de un error menor en la segunda prueba y N_2 a la no ocurrencia de un error en la segunda prueba.

Lo que debemos analizar para ver si dos sucesos son independientes es si la probabilidad de su intersección es igual a la multiplicación de sus probabilidades individuales y eso es lo que haremos.

- $\underline{I_2 \text{ con } I_1}$: Como $P(I_2 \cap I_1) = 0{,}18$ y $P(I_2) \cdot P(I_1) = 0{,}21 \cdot 0{,}6 = 0{,}126$ los sucesos no son independientes.
- $\underline{I_2 \text{ con } M_1}$: Como $P(I_2 \cap M_1) = 0{,}03$ y $P(I_2) \cdot P(M_1) = 0{,}21 \cdot 0{,}3 = 0{,}063$ los sucesos no son independientes.
- $\underline{I_2 \text{ con } N_1}$: Como $P(I_2 \cap N_1) = 0$ y $P(I_2) \cdot P(N_1) = 0{,}21 \cdot 0{,}1 = 0{,}021$ los sucesos no son independientes.

Antes de analizar la independencia de los resultados de la primer prueba con M_2 voy a querer analizar cuál es la probabilidad de M_2. Para eso, vamos a valernos de lo que expusimos en el inciso b).

Como I_1, M_1 y N_1 representan una partición del espacio muestral S (definido en el inciso b), podemos descomponer a M_2 como la unión de las intersecciones de M_2 con estos sucesos (resultando una unión de sucesos mutuamente excluyentes)

$$M_2 = (M_2 \cap I_1) \cup (M_2 \cap M_1) \cup (M_2 \cap N_1)$$

Y, entonces, la probabilidad de M_2 queda expresada como:

$P(M_2) = P(M_2 \cap I_1) + P(M_2 \cap M_1) + P(M_2 \cap N_1) = 0{,}3 + 0{,}09 + 0{,}02 = 0{,}41$

Entonces, continuamos con el análisis de independencia,

- $\underline{M_2 \text{ con } I_1}$: Como $P(M_2 \cap I_1) = 0{,}3$ y $P(M_2) \cdot P(I_1) = 0{,}41 \cdot 0{,}6 = 0{,}246$ los sucesos no son independientes.
- $\underline{M_2 \text{ con } M_1}$: Como $P(M_2 \cap M_1) = 0{,}09$ y $P(M_2) \cdot P(M_1) = 0{,}41 \cdot 0{,}3 = 0{,}123$ los sucesos no son independientes.
- $\underline{M_2 \text{ con } N_1}$: Como $P(M_2 \cap N_1) = 0{,}02$ y $P(M_2) \cdot P(N_1) = 0{,}41 \cdot 0{,}1 = 0{,}041$ los sucesos no son independientes.

Y, como hicimos con M_2 antes de analizar la independencia de los resultados de la primer prueba con N_2 voy a querer analizar cuál es la probabilidad de N_2, valiendonos de lo que expusimos en el inciso b).

Como I_1, M_1 y N_1 representan una partición del espacio muestral S (definido en el inciso b), podemos descomponer a N_2 como la unión de las intersecciones de N_2 con estos sucesos (resultando una unión de sucesos mutuamente excluyentes)

$$N_2 = (N_2 \cap I_1) \cup (N_2 \cap M_1) \cup (N_2 \cap N_1)$$

Y, entonces, la probabilidad de N_2 queda expresada como:

$P(N_2) = P(N_2 \cap I_1) + P(N_2 \cap M_1) + P(N_2 \cap N_1) = 0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}38$

Entonces, terminamos con el análisis de independencia,

- N_2 con I_1: Como $P(N_2 \cap I_1) = 0{,}12$ y $P(N_2) \cdot P(I_1) = 0{,}38 \cdot 0{,}6 = 0{,}228$ los sucesos no son independientes.
- N_2 con M_1: Como $P(N_2 \cap M_1) = 0{,}18$ y $P(N_2) \cdot P(M_1) = 0{,}38 \cdot 0{,}3 = 0{,}114$ los sucesos no son independientes.
- N_2 con N_1: Como $P(N_2 \cap N_1) = 0{,}08$ y $P(N_2) \cdot P(N_1) = 0{,}38 \cdot 0{,}1 = 0{,}038$ los sucesos no son independientes.

Ejercicio 3

Tomando una persona de la población, denominamos a los siguientes sucesos:

- La persona padece la enfermedad: E
- La persona no padece la enfermedad: $\overline{E}$
- Le dió positiva la prueba: D
- Le dió negativa la prueba: $\overline{D}$

Se solicita calcular la probabilidad de que una persona a la que la prueba le ha dado positiva, esté sana. Es decir, se busca calcular

$$P(\overline{E}/D).$$

Por definición de probabilidad condicionada,

$$P(\overline{E}/D) = \frac{P(\overline{E} \cap D)}{P(D)}$$

Entonces intentaremos encontrar los valores de $P(D)$ y $P(\overline{E} \cap D)$.

Sabemos que:

- $P(E) = 0{,}12$
- $P(\overline{E}) = 0{,}88$
- $P(D/E) = 0{,}9$
- $P(D/\overline{E}) = 0{,}05$

Primero, vamos a calcular $P(D)$.

Sabiendo que la porbabilidad de la intersección entre dos sucesos es la probabilidad de que ambos ocurran, podemos expresar la probabilidad de D como la probabilidad de la intersección entre D y un suceso que va a pasar sí o sí, por ejemplo, $E \cup \overline{E}$. Es decir,

$$P(D) = P(D \cap (E \cup \overline{E}))$$

A su vez, sabemos que la probabilidad de que E y $\overline{E}$ sucedan juntos es 0, por lo tanto,

$$P(E \cap \overline{E}) = 0$$

y, consecuentemente,

$$P(D \cap (E \cap \overline{E})) = 0$$

Entonces, como esta probabilidad es 0, la podemos aprovechar para la construcción de $P(D)$:

$$P(D) = P(D \cap (E \cup \overline{E})) + P(D \cap (E \cap \overline{E}))$$

Por propiedad de conjuntos, dados A, B y C conjuntos,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Por lo tanto, podemos expandir nuestra expresión de $P(D)$ haciendo uso de esta propiedad y del hecho que la intersección es conmutativa, sumado a que $D \cap D = D$:

$$P(D) = P((D \cap E) \cup (D \cap \overline{E})) + P((D \cap E) \cap (D \cap \overline{E}))$$

Por propiedad, la probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de su intersección. Es decir dados 2 conjuntos A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

pero entonces también resulta que

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \tag{1}$$

Entonces, reemplazando A por $D \cap E$ y B por $D \cap \overline{E}$ en (1) la expresión de $P(D)$ puede resultar como sigue

$$P(D) = P(D \cap E) + P(D \cap \overline{E})$$

Luego, aplicando el teorema de la multiplicación de probabilidades tenemos que:

$$P(D) = P(D/E) \cdot P(E) + P(D/\overline{E}) \cdot P(\overline{E})$$

Dado que ya cuento con los valores del lado izquierdo de la igualdad, concluyo que:

$$P(D) = 0{,}108 + 0{,}044 = 0{,}152$$

Ahora, resta encontrar $P(\overline{E} \cap D)$.

Por teorema de multiplicación de las probabilidades,

Es la definición de probabilidad condicional

$$P(\overline{E} \cap D) = P(D/\overline{E}) \cdot P(\overline{E})$$

Como $P(D/\overline{E})$y $P(\overline{E})$ son valores que ya conozco,

$$P(\overline{E} \cap D) = 0{,}05 \cdot 0{,}88 = 0{,}044$$

Habiendo calculado los 2 datos que necesitabamos resulta que

$$P(\overline{E}/D) = \frac{0{,}044}{0{,}152} = 0{,}2895$$