Trabajo Práctico Unidad 5
Probabilidad y Estadística

Alumnas:

Cipullo, Inés

Sullivan, Katherine

Universidad Nacional de Rosario

2021

Ejercicio 1

Contamos con cierto tipo de marcapasos cuya vida útil sigue una distribución exponencial con media 16 años. Por contar con una distribución exponencial, la media, notada con $E(X)$, se expresa como sigue:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha} = 16 \implies \alpha = \frac{1}{16}$$

Debemos calcular la probabilidad de que un marcapasos dure menos de 20 años. Esto equivale a calcular la función de distribución acumulada en $x = 20$. Dicha función para una distribución queda definida como sigue:

$$F(x) = \int_0^{x} \alpha e^{-\alpha t}dt = 1 - e^{-\alpha x}$$

Por lo tanto, la probabilidad buscada es:

$$F(20) = 1 - e^{-\frac{1}{16}20} = 1 - e^{\frac{-20}{16}} = 0{,}7135$$

Por otro lado, se solicita obtener la probabilidad de que un marcapasos dure menos de 25 años dado que lleva funcionando 5 años.

Por la propiedad de falta de memoria, característica de la distribución exponencial, sabemos que:

$$P(X > 20 + 5/X > 5) = P(X > 20),$$

es decir, la probabilidad de que este marcapasos dure más de 25 años dado que ya duró 5, es igual a la probabilidad de que otro marcapasos cualquiera dure más de 20 años.

Ahora bien, nosotras debemos calcular la probabilidad de que este marcapasos dure menos de 25 años. Esto se reduce a $1 - P(X > 20) = F(20) = 0{,}7135$.

Ejercicio 2

Se cuenta un láser semiconductor a potencia constante cuya duración X tiene una distribución normal con media 7000 horas y desviación típica de 600 horas.

a)

Se solicita calcular la probabilidad de que el láser dure menos de 5000 horas, lo cual es equivalente a evaluar la función de distribución acumulada en $x = 5000$. Para obtener este valor, primero estandarizamos la variable x, siendo ahora nuestra variable de interés $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, y luego buscamos el valor correspondiente a $F(\frac{5000-7000}{600}) = F(3.\widehat{33})$ en la tabla de probabilidades de distribución normal. Llegando al resultado:

$$P(X < 5000) = 0{,}0004$$

b)

Debemos encontrar la duración excedida por el 95 % de los láseres, es decir, debemos encontrar un valor t (en horas) tal que $P(X > t) = 0{,}95$. Sabemos que $P(X > t) = 1 - F(z)$, donde $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$ (variable estandarizada). Entonces si $P(X > t) = 0{,}95$ eso implica que $F(z) = 0{,}05$. Buscamos el valor z dentro de la tabla de probabilidades de la distribución normal tal que $F(z) = 0{,}05$, el cual es $z = -1{,}64$. Luego desestandarizamos la variable z, obteniendo que:

$$z = \frac{t - 7000}{600} = -1{,}64 \implies t = 600z + 7000 = 600 \cdot (-1{,}64) + 7000 = 6016$$

c)

Dados tres láseres que fallan de manera independiente, buscamos la probabilidad de que los tres sigan funcionando luego de 7000 horas. Definimos la variable aleatoria discreta Y: "número de láseres que duran más de 7000 horas de un total de 3 láseres". Sabiendo que la duración de cada láser es independiente, queremos calcular $P(Y = 3)$.

Para realizar esto, primero calculamos $P(X > 7000) = 1 - F(\frac{7000-7000}{600}) = 1 - F(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Como Y cuenta con una distribución binomial con $n = 3$ y la probabilidad asociada al suceso de interés $p = P(X > 7000) = 0{,}5$, obtenemos que:

$$P(Y = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot (1 - 0{,}5)^0 = 0{,}125$$

Ejercicio 3

Tenemos una variable aleatoria continua T_c con distribución uniforme en el intervalo $(15, 21)$, por lo tanto su función de densidad es $f_c(x) = \frac{1}{6}$.

Definimos una nueva variable aleatoria continua $T_f = H(T_c) = \frac{9}{5} \cdot T_c + 32$. Analizamos los valores posibles para T_f a partir de los valores de T_c:

$$15 < T_c < 21 \iff 15 \cdot \frac{9}{5} + 32 < T_c \cdot \frac{9}{5} + 32 < 21 \cdot \frac{9}{5} + 32 \iff 59 < T_f < 69{,}8$$

Al ser una función lineal creciente, podemos afirmar que H es una función monótona y derivable en los reales.

Por lo tanto, la función de densidad de T_f es:

$$f_f(y) = f_c(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

Tenemos que $H^{-1}(y) = (y - 32) \cdot \frac{5}{9}$, por lo que

$$59 < y < 69{,}8 \implies 15 < H^{-1}(y) < 21 \implies f_c(H^{-1}(y)) = \frac{1}{6}$$

Además, $(H^{-1})'(y) = \frac{5}{9}$. Entonces, resulta:

$$f_f(y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{54}$$