Trabajo Práctico Unidad 6
Probabilidad y Estadística

Alumnas:

Cipullo, Inés

Sullivan, Katherine

Universidad Nacional de Rosario

2021

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Sean las variables aleatorias:

- X: "número de defectos tipo D1 que presenta una pieza"
- Y: "número de defectos tipo D2 que presenta una pieza"

Contamos con los siguientes datos:

1. $E(X) = 0{,}3$ y $V(X) = 0{,}21$
2. $E(Y) = 0{,}8$ y $V(Y) = 0{,}56$
3. 20 % de piezas tienen 2 defectos tipo D2
4. 15 % de las piezas tienen 1 defecto tipo D1 y ninguno tipo D2
5. 50 % de las piezas que no tienen defectos tipo D1, tienen 1 defecto tipo D2

a)

X \Y	**0**	**1**	**2**	$p_X(x)$
0	0,25	0,35	0,1	0,7
1	0,15	0,05	0,1	0,3
$p_Y(y)$	0,4	0,4	0,2	1

Calculos realizados:

- $p(1,0) = 0{,}15$ (por lo especificado en el dato 4)
- $p_Y(2) = 0{,}2$ (por lo especificado en el dato 3)
- $E(X) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) = p_X(1) \implies p_X(1) = 0{,}3$
- $p_X(0) + p_X(1) = p_X(0) + 0{,}3 = 1 \implies p_X(0) = 0{,}7$
- $p(0,1) = p_X(0) \cdot 0{,}5 = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$ (por lo especificado en el dato 5)
- $E(Y) = 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) + 2 \cdot p_Y(2) = p_Y(1) + 2 \cdot 0{,}2 \implies p_Y(1) = 0{,}4$
- $p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = p_Y(0) + 0{,}4 + 0{,}2 = 1 \implies p_Y(0) = 0{,}4$
- $p_Y(0) = p(0,0) + p(1,0) \implies 0{,}4 = p(0,0) + 0{,}15 \implies p(0,0) = 0{,}25$
- $p_X(0) = p(0,0) + p(0,1) + p(0,2) \implies 0{,}7 = 0{,}25 + 0{,}35 + p(0,2) \implies p(0,2) = 0{,}1$
- $p_Y(1) = p(0,1) + p(1,1) \implies 0{,}4 = 0{,}35 + p(1,1) \implies p(1,1) = 0{,}5$
- $p_Y(2) = p(0,2) + p(1,2) \implies 0{,}2 = 0{,}1 + p(1,2) \implies p(1,2) = 0{,}1$

b)

Las variables aleatorias X e Y son independientes si

$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \; \forall \; (x,y) \in R_{(X \times Y)}$$

Notar que en este caso $R_{(X \times Y)} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$.

Pero tenemos que $p(0,0) = 0{,}25$ y $p_X(0) \cdot p_Y(0) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$, por lo tanto X e Y no son independientes.

Calculamos entonces el Coeficiente de Correlación:

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{0{,}25 - 0{,}3 \cdot 0{,}8}{\sqrt{0{,}21 \cdot 0{,}56}} = 0{,}0292$$

donde $(*)$ hace referencia al siguiente cálculo:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{(x,y) \in R_{(X \times Y)}} x \cdot y \cdot p(x,y)$$
$$= p(1,1) + 2 \cdot p(1,2) = 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}25$$

c)

La fórmula de probabilidad condicional es como sigue:

$$P(Y = y / X = x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$$

Queda entonces que

$$P(Y = 2 / X = 0) = \frac{p(0,2)}{p_X(0)} = \frac{0{,}1}{0{,}7} = 0{,}1428$$

Este resultado refleja que dada una pieza que no tiene defectos tipo D1, la probabilidad de que tenga 2 defectos tipo D2 es 0,1428. Otra forma de verlo es pensar que el 14,28 % de las piezas que no tienen defectos D1, tienen 2 defectos D2.

d)

Buscamos la esperanza y la varianza del costo de reparación por pieza, siendo que un defecto tipo D1 tiene un costo de reparación de \$3 y uno tipo D2 tiene un costo de reparación de \$4.

Definimos una función sobre las variables aleatorias: $Z = H(X,Y)$, donde $H(x,y) = 3 \cdot x + 4 \cdot y$.

Luego, basta con calcular $E(Z)$ y $V(Z)$.

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{(x,y)\in R_{(X\times Y)}} H(x,y)\cdot p(x,y) \\
&= 4\cdot p(0,1) + 8\cdot p(0,2) + 3\cdot p(1,0) + 7\cdot p(1,1) + 11\cdot p(1,2) \\
&= 4\cdot 0{,}35 + 8\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}15 + 7\cdot 0{,}05 + 11\cdot 0{,}1 \\
&= 1{,}4 + 0{,}8 + 0{,}45 + 0{,}35 + 1{,}1 = 4{,}1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(Z) &= \sum_{(x,y)\in R_{(X\times Y)}} [H(x,y) - E(Z)]^2\cdot p(x,y) \\
&= (-4{,}1)^2\cdot p(0,0) + (-0{,}1)^2\cdot p(0,1) + 3{,}9^2\cdot p(0,2) + \\
&\quad + (-1{,}1)^2\cdot p(1,0) + 2{,}9^2\cdot p(1,1) + 6{,}9^2\cdot p(1,2) \\
&= 16{,}81\cdot 0{,}25 + 0{,}01\cdot 0{,}35 + 15{,}21\cdot 0{,}1 + 1{,}21\cdot 0{,}15 + 8{,}41\cdot 0{,}05 + 47{,}61\cdot 0{,}1 \\
&= 4{,}2025 + 0{,}0035 + 1{,}521 + 0{,}1815 + 0{,}4205 + 4{,}761 = 11{,}09
\end{aligned}$$