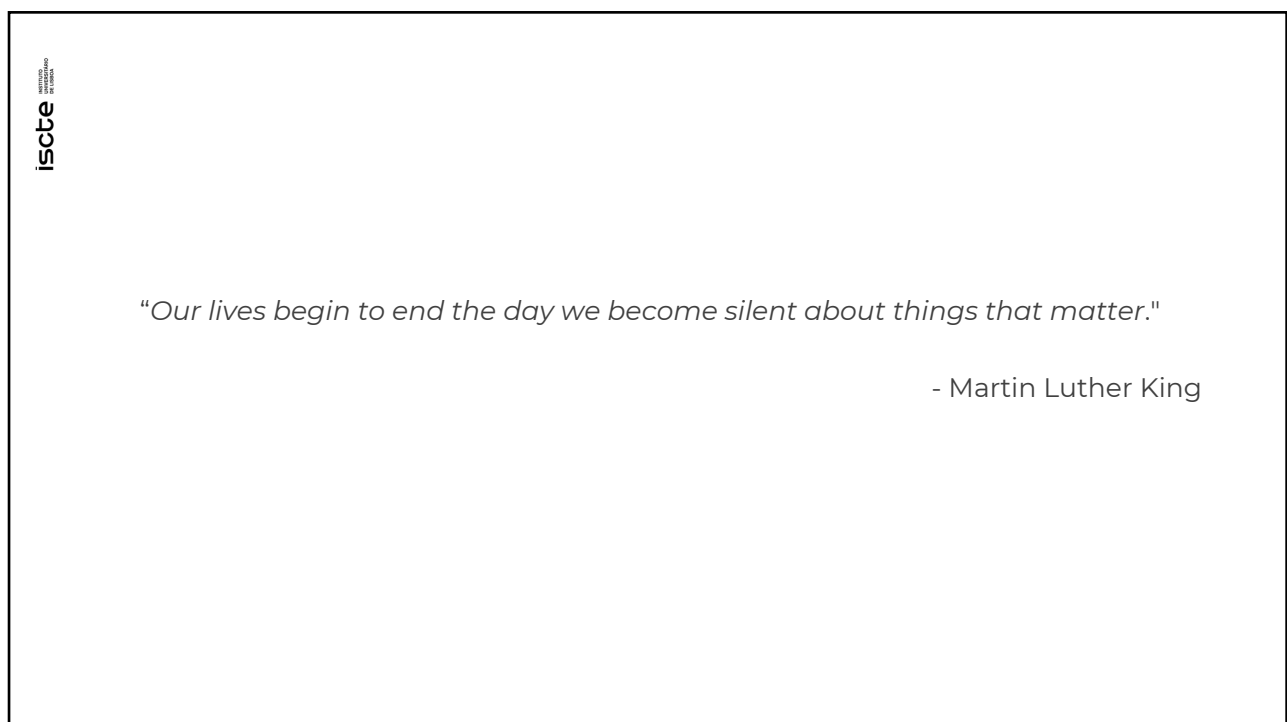




1



2

Plano para esta aula

- Análise de Algoritmos
- Algoritmos recursivos
- Outras estratégias de desenho de algoritmos

2022/2023

3

Nas últimas aulas:

- Introdução à Análise de Algoritmos:
 - as 3 questões essenciais:
 - Correção do algoritmo
 - Ordem de complexidade
 - Melhoramentos
 - análise de complexidade
 - análise no pior dos casos
 - estratégia *dividir-e-conquistar* recursiva
 - limites assintóticos

- **Estratégia dividir-e-conquistar:** esta estratégia recorre a 3 passos em cada nível recorrente:
 1. **Dividir** o problema em **k** subproblemas **iguais mas de menor dimensão**.
 2. **Enquanto não atingir** um **caso base**, resolver cada subproblema através da aplicação recursiva da divisão.
 3. **Combinar** as k soluções dos subproblemas na solução do problema da chamada anterior.

2022/2023

4

Sobre os limites assintóticos (cormen 3.2)

- Limite superior - $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$
- Limite inferior - $f(n) = \Omega(g(n))$
- Limite exato - $f(n) = \Theta(g(n))$

Transitivity:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ and $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$ imply $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$,
 $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ and $g(n) = \Omega(h(n))$ imply $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$,
 $f(n) = \Omega(g(n))$ and $g(n) = \Omega(h(n))$ imply $f(n) = \Omega(h(n))$.

Reflexivity:

$f(n) = \mathcal{O}(f(n))$,
 $f(n) = \mathcal{O}(f(n))$,
 $f(n) = \Omega(f(n))$

Symmetry:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ if and only if $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

Transpose symmetry:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ if and only if $g(n) = \Omega(f(n))$.

2022/2023

Algoritmo: 3 questões essenciais

Relembrar da aula anterior: quando em face de um novo algoritmo, existem 3 questões que qualquer *developer* deve colocar antes de se dar por satisfeito:

1. Este algoritmo está (sempre) correto?
2. Quanto tempo vai demorar a resolver (em função do tamanho do input)?
3. Que podemos fazer para melhorar?

2022/2023

O algoritmo está correto?

- **Problema genérico da ordenação** (ordem crescente):

- Dados: uma sequência de objetos de valor ordenável:
 a_1, a_2, \dots, a_n
- Resultados: a permutação da sequência que os ordena por valor: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

2022/2023

Inserção linear (Insertion sort)

```
Insertionsort(a, n):  
    //Ordena uma sequência por ordem crescente  
    //Input: sequência a ordenar e inteiro não negativo, n  
    //Output: sequência ordenada  
  
    for j = 2, ..., n:  
        este = a[j]  
        i = j-1  
        while i > 0 and a[i] > este:  
            a[i+1] = a[i]  
            i = i-1  
        endwhile  
        a[i+1] = este  
    endfor
```

Análise de correção

- É necessária para exibirmos uma garantia (prova) que o nosso algoritmo vai sempre devolver uma resposta correta para qualquer input.
- Pode ser desafiante, mas é importante como medida de segurança.

Como fazer a correção?

- **Na maioria dos casos**, podemos usar o **método de indução**, que nos permite generalizar um passo/conjunto de passos chave na construção do nosso algoritmo para qualquer input.
- Vamos ilustrar um modo de analisar um algoritmo e detetar o tal “passo chave” usando o método de Inserção Linear.

Análise à construção da resposta de um algoritmo

iscte
INSTITUTO
UNIVERSITÁRIO
DE LISBOA

6 4 3 8 5

O primeiro elemento, 6, sózinho, é uma lista ordenada, [6].

4 6 3 8 5

Logo, inserindo 4 na lista [6] na posição correta torna [4,6] uma lista ordenada.

4 6 3 8 5

Inserir 3 na posição correta em [4,6] torna [3,4,6] uma lista ordenada.

3 4 6 8 5

3 4 6 8 5

A inserção, na posição correta, de 8 na lista [3,4,6] devolve a lista ordenada [3,4,6,8].

3 4 6 8 5

3 4 6 8 5

A inserção, na posição correta, de 5 na lista [3,4,6,8] devolve a lista ordenada [3,4,5,6,8].

3 4 5 6 8

10

Generalizar

iscte
INSTITUTO
UNIVERSITÁRIO
DE LISBOA

- O que acabámos de fazer foi detetar uma propriedade (**invariante**) de construção da resposta final do algoritmo.
- Para generalizar, é necessário formular essa propriedade/invariante matematicamente.
- E usar uma técnica de prova construtiva para mostrar que, para qualquer input, a construção funciona (sempre) corretamente.
- Neste caso, vamos usar a técnica de **Prova por Indução**.

2022/2023

11

Esquema de prova de correção do Insertionsort

iscte
INSTITUTO
UNIVERSITÁRIO
DE LISBOA

Considere que A é uma sequência de tamanho n.

- **Hipótese de Indução:**

No final da i-ésima iteração (*do for exterior*), $A[1..i]$ está ordenada (para $i \geq 1$)

- **Caso Base** ($i=1$, ou seja, considereamos a primeira posição da sequência):

$A[1]$ está ordenada.

- **Passo Indutivo:**

Para todo o $2 < k < n$, se a hipótese de indução é verdadeira até **k-1**, então é verdadeira para **i=k**.

- **Conclusão:**

- A hipótese de indução é verdadeira para $i \geq 1$.
- Em particular, é verdade para $i=n$.
- Logo, no final do algoritmo, a sequência $A[1 .. n]$ está ordenada.

12

Desempenho do InsertionSort: tempo

iscte
INSTITUTO
UNIVERSITÁRIO
DE LISBOA

- Os testes ao tempo de execução são úteis.

- **Contras:**

- O “mesmo” algoritmo pode mostrar-se mais rápido ou mais lento em função da implementação.
- Para a mesma implementação, pode ser mais rápido ou mais lento dependendo do hardware utilizado.

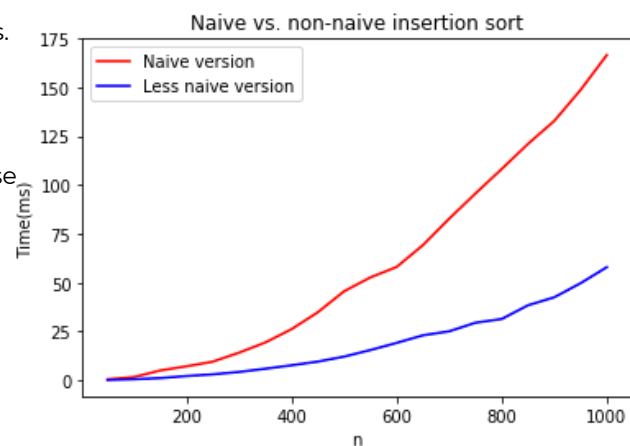


Gráfico do exemplo do notebook da aula anterior

13

Análise assintótica da Inserção Linear

Insertionsort(a, n):

```
//Ordena uma sequência por ordem crescente
//Input: sequência a ordenar e inteiro não negativo n
//Output: sequência ordenada
```

```
for j = 2, ..., n:
```

```
  (i) este = a[j]
```

```
  (ii) i = j-1
```

```
  (iii) while i > 0 and a[i] > este:
```

```
    a[i+1] = a[i]
```

```
    i = i-1
```

```
  endwhile
```

```
  (iv) a[i+1] = este
```

```
endfor
```

passos elementares explícitos:

- (i), (ii), (iii), (iv): uma vez em cada volta do for temos atribuições com acesso à sequência, somas e até comparações
- ainda (iii): seja t_j o número de vezes que o teste do ciclo while é true para o índice j; em cada iteração, temos _____.
- O tempo (ou o número de passos elementares) será:

$$T(n) = 7(n-1) + 3 \times \sum_2^n t_j$$

No que se segue, não usamos as constantes de implementação de operações elementares (K e C) que usámos no exemplo da aula anterior.

14

Análise da Inserção Linear - casos

- **Melhor dos casos (Best case) – $B(n)$:**

a sequência já está ordenada e o corpo do while nunca é executado, ou seja, $t_j = 0$:

$$B(n) = 7(n-1) + 3 \times 0, \text{ logo, } B(n) = O(n)$$

- **Pior dos casos (Worst case) – $W(n)$:**

a sequência está ordenada por ordem inversa, logo, cada novo elemento tem de ser colocado no início (1.ª posição), i.e., $t_j = j$:

$$W(n) = 7(n-1) + 3 \times \sum_2^n j =$$

$$\text{logo, } W(n) = O(n^2)$$

15

Análise da Inserção Linear - casos

- **Caso médio** (*Average case*) – $A(n)$:

Assume-se uma distribuição uniforme, ou seja, a possibilidade de ocorrer desordenamento numa posição é de 50% e, nesse caso, terá de recuar em metade das posições atrás. Por excesso, temos:

$$W(n) = 7(n-1) + 4 \times \sum_{j=2}^n j/2 = 7n - 7 + 4 \times \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}{2} = n^2 + 5n + 5$$

Depois dos cálculos, vê-se que também este caso vai ser : $A(n) = O(n^2)$

Conclusão: A ordem geral do Insertion sort é $O(n^2)$.

De volta às 3 questões essenciais

- **Correção:** “Está correcto?”

Fazer um estudo orientado para a análise do pior dos casos (ou seja, uma análise suficientemente geral para aplicar a qualquer input (ou seja, qualquer caso) - *Worst-case Analysis* – Prova por Indução

- **Análise de eficiência:** “É rápido?”

Fazer a análise assintótica suficientemente geral. i.e., análise do pior dos casos (**se necessário**, estudar cada um dos casos -pior, melhor, médio- em particular)

- **Otimização:** “Podemos melhorar”?

- Otimizar, mas manter o mesmo algoritmo (em geral, não altera a ordem de eficiência, mas torna a execução típica menos pesada ☺)
- Para alterar a ordem assintótica é necessário pensar “fora da caixa”; alterar a estratégia; modificar o fluxo de instruções; ...

Desenho de algoritmos

Estratégias de construção de algoritmos:

- exaustiva
- incremental
- “diminuir-e-conquistar”

19

Estratégia algorítmica: **Pesquisa exaustiva**

- **Pesquisa exaustiva** (“Brute force”): Para alguns (muitos) problemas não triviais, existe um algoritmo de pesquisa de solução simples – procurar **entre todas as soluções possíveis** qual a usar (e devolver).
- Tipicamente, para um input de tamanho n , realiza cerca de 2^n operações (ou mais!).
- O que é, computacionalmente, inaceitável (ou não tratável).



source: Tardos & Kleinberg, cs.princeton.edu.

2022/2023

20

Tempo de execução (da ordem) polinomial

- Na prática, consideramos um algoritmo **eficiente** se tem um **pior dos casos** (limite superior) da **ordem polinomial**.
- Mas polinomial com constantes e expoentes limitados, no pior dos casos.

Map graphs in polynomial time

Mikkel Thorup*
Department of Computer Science, University of Copenhagen
Universitetsparken 1, DK-2100 Copenhagen East, Denmark
mthorup@diku.dk

Abstract

Chen, Grigni, and Papadimitriou (WADS'97 and STOC'98) have introduced a modified notion of planarity, where two faces are considered adjacent if they share at least one point. The corresponding abstract graphs are called map graphs. Chen et al. raised the question of whether map graphs can be recognized in polynomial time. They showed that the decision problem is in NP and presented a polynomial time algorithm for the special case where we allow at most 4 faces to intersect in any point — if only 3 are allowed to intersect in a point, we get the usual planar graphs.

Chen et al. conjectured that map graphs can be recognized in polynomial time, and in this paper, their conjecture is settled affirmatively.

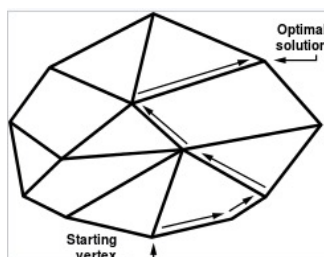
polinomial

algoritmo $O(n^{120})!!!!$

2022/2023

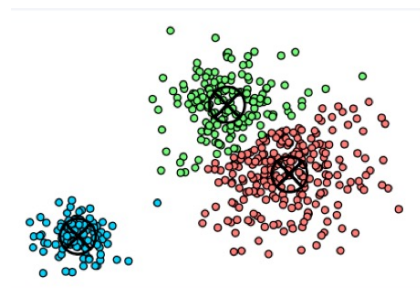
Tempo de execução exponencial no pior dos casos

- Mas existem exceções: alguns algoritmos têm tempo, no pior dos casos, exponencial mas são usados na prática
- Porque as instâncias que levam ao pior dos casos não (se espera que) surjam!



simplex algorithm

https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm



k-means clustering algorithm

https://en.wikipedia.org/wiki/K-means_clustering

2022/2023

Qual é a estratégia algorítmica nestes dois casos?

```
Insertionsort(a, n):
    //Ordena uma sequência por ordem crescente
    //Input: sequência a ordenar e inteiro não
    negativo, n
    //Output: sequência ordenada

    for j = 2, ..., n:
        este = a[j]
        i = j-1
        while i > 0 and a[i] > este:
            a[i+1] = a[i]
            i = i-1
        endwhile
        a[i+1] = este
    endfor
```

Inserção linear (Insertion sort)

```
Selectionsort(a, n):
    //Ordena uma sequência por ordem crescente
    //Input: sequência a ordenar e inteiro não negativo, n
    //Output: sequência ordenada

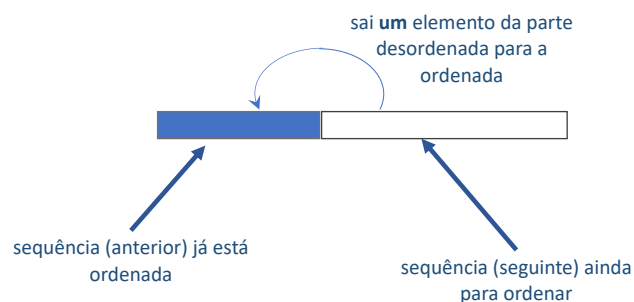
    for i = 1, ..., n:
        minimo = i
        for j = i+1, ..., n:
            if a[j] < a[minimo]
                minimo = j
        endfor
        if i ≠ minimo:
            troca(a[i], a[minimo])
    endfor
```

Seleção linear (Selection sort)

23

Estratégia para desenho de algoritmos: “Diminuir – e – Conquistar”

- Quer a seleção linear, quer a inserção linear, seguem, na construção de solução/resultado, uma **abordagem direta**: a da **estratégia incremental**

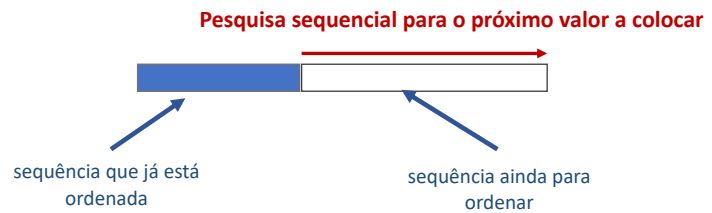


- Ambos os métodos de ordenamento usam a estratégia de resolver um problema, resolvendo instâncias sucessivamente menores num tamanho constante (em ambos os casos, um passo de cada vez)
- Técnica “decrease and conquer”**: usa uma relação que compõe a resolução de um problema de dimensão n usando a solução de um problema de menor dimensão (num valor constante k)

24

Estratégias para desenho de algoritmos: **Pesquisa exaustiva**

- No método da seleção linear, a construção do ordenamento, a **estratégia incremental é conseguida após uma pesquisa sequencial** para determinar qual o elemento a colocar na próxima posição



- Também conhecido por **Método da força bruta!**

Voltando aos **Algoritmos de ordenação**

continuação

Algoritmos de ordenamento: **3.ª questão essencial**

Revimos já o insertionsort e selection sort, que vimos serem ambos da ordem geral de complexidade quadrática.

- **Podemos melhorar?**

27

Mergesort

- Um dos primeiros algoritmos construídos (desenhados/projetados) para computadores generalistas (1945).

Nessa altura, a maioria dos “bons” computadores que já existia eram “bons” porque eram “dedicados” – específicos para executar determinadas tarefas
- Desenvolvido por John von Neuman que, juntamente com Herman Goldstine, publica uma versão não recursiva (em 1947), que é hoje chamada **bottom-up mergesort**.

Este é o mesmo do “Modelo de Von Neuman para representação de um computador digital”

28

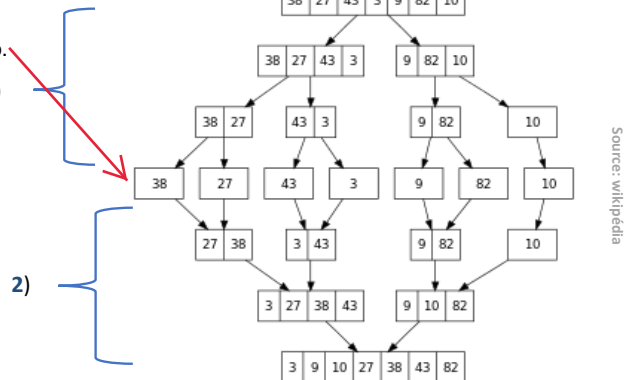
Ordenamento por Fusão: *merge (to) sort*

Este algoritmo trabalha em duas fases:

- 1) **Separar** a sequência em 2 partes (aproximadamente) iguais e **continuar** recursivamente em cada uma das partes até obter chaves individuais

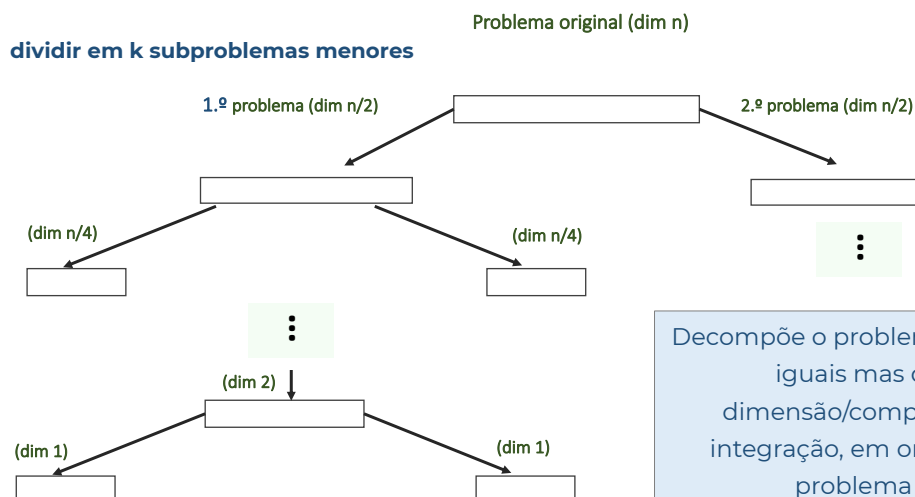
situação de base ou paragem: listas só com um elemento. Agarra em duas listas e ordena, fazendo isto até ter uma lista ordenada de todos os elementos.

- 2) **Fundir** (juntar) **em ordem** cada uma das duas partes já ordenadas



29

O mergesort segue a estratégia recursiva **divide-and-conquer**



Decompõe o problema em problemas iguais mas de menor dimensão/complexidade, cuja integração, em ordem, resolve o problema original

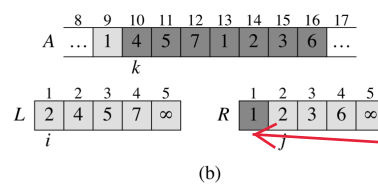
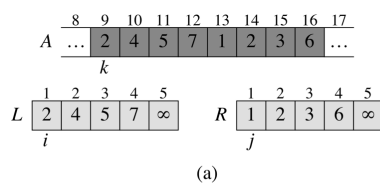
31

Ordenamento por fusão (merge sort)

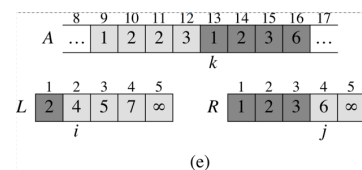
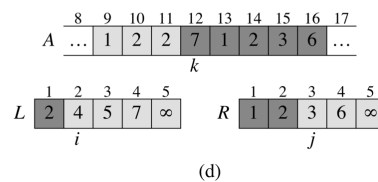
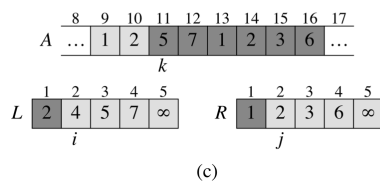
- Baseado no conceito de **fusão ordenada de duas sequências já ordenadas**
- Quando a estrutura de dados subjacente é um array, necessita de armazenamento adicional temporário (outro array) para funcionar (realmente) eficientemente
- Se os elementos a ordenar estiverem numa lista ligada, apenas atualiza ponteiros e não necessita espaço adicional

32

Passo intermédio na fusão



compara-se o primeiro índice de cada lista já ordenada, o que for menor é o primeiro elemento da nova lista.
Neste caso, compara o 1 com o 2



- menor elemento é 1 no array R: coloca e avança em R
- os dois elementos são iguais a 2: coloca e avança em L
- o menor é o 2 em R: coloca e avança em R
- o menor elemento é 3 em R: coloca e avança em R
- ...

33

Ordenação: **ordenamento por Fusão**

iscte

Algoritmo recursivo

merge sort

```
mergesort(a, ini, fim):
    //Ordena uma sequência por ordem crescente
    //Input: sequência a ordenar e posições inicial e final da sequência
    //Output: sequência ordenada

    if ini < fim:
        meio = maior inteiro contido em (ini+fim/2)
        mergesort(a, ini, meio)
        mergesort(a, meio+1, fim)
        merge(a, ini, meio, fim)
    endif
```

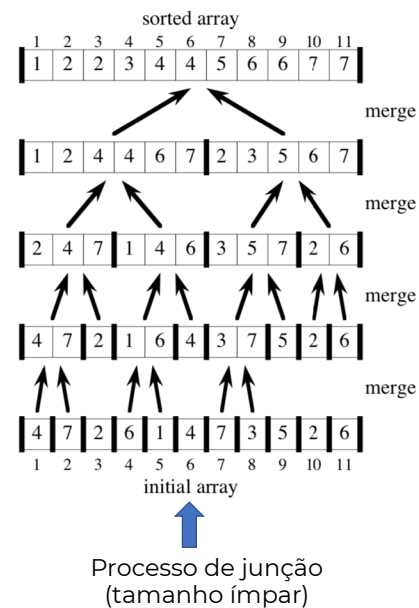
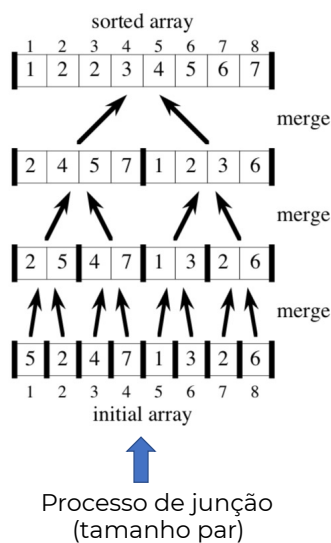
invocação inicial: mergesort(seq, 1, n)

(Sendo 1 a primeira posição na sequência seq)

34

Ordenamento por Fusão: merge - examples

iscte



35

Algoritmo de Fusão (merge)

```
merge(a, ini, meio, fim):  
    // fusão de duas sequências ordenadas:  
    // a[ini .. meio] e a[meio+1 .. fim]  
  
    i ← ini;    j ← meio+1  
    for k = ini ... fim:  
        if j > fim:  
            aux[k] ← a[i]; i←i+1  
        else: if i > meio :  
            aux[k] ← a[j]; j←j+1  
        else: if a[i] < a[j]  
            aux[k] ← a[i]; i←i+1  
        else: aux[k] ← a[j]; j←j+1  
    for k = ini ... fim  
        a[k] ← aux[k]
```

```
mergesort(a, ini, fim):  
    //Ordena uma sequência por ordem crescente  
    //Input: sequência a ordenar e posições inicial e final da sequência  
    //Output: sequência ordenada  
    if ini < fim:  
        meio = maior inteiro contido em (ini+fim/2)  
        mergesort(a, ini, meio)  
        mergesort(a, meio+1, fim)  
        merge(a, ini, meio, fim)  
    endif
```

Algoritmo para efetuar a fusão ordenada

36

Questões essenciais:

1. Funciona?

O ordenamento é feito em em 2 fases:

Fase 1): partição recursiva (top-down) da sequência em duas metades até atingir **casos base** (sequência com um só elemento)

Fase 2) fusão iterativa de baixo para cima (bottom-up) até atingir os n elementos originais e ordenados

Parece funcionar, mas é preciso alguma evidência para afirmar que “está correto”.

37

Correção do Mergesort

- **Hipótese de indução (H.I.):**

“O MERGESORT devolve uma sequência ordenada com i elementos.”

- **Caso Base ($k=1$):**

uma sequência com zero ou com 1 elementos está ordenada, logo a H.I é verdadeira para $i=1$

- **Passo Indutivo:** Mostrar que, assumindo que a H.I. é verdadeira para $k < i$, então é verdadeira para $k=i$.

ou seja, é preciso mostrar que se L (k elementos) e R ($i-k$ elementos) estão ordenados então MERGE(L, R) devolve uma sequência ordenada com i elementos.

- **Conclusão:** MERGESORT devolve uma sequência ordenada para qualquer $i = n \geq 1$.

```
//pseudocódigo simplificado
MERGESORT(A):
  n = length(A)
  if n ≤ 1:
    return A
  L = MERGESORT(A[1 .. n/2])
  R = MERGESORT(A[n/2+1 .. n])
  return MERGE(L, R)
```

38

Análise do Mergesort

- **Merge:**

- o ciclo **for** que efetua um trabalho constante por cada iteração

(3 comparações + 1 soma + 2 atribuição com acesso)

- Logo, é $O(n)$ (com n = tamanho da sequência de input)

- O **mergesort** faz 2 chamadas **recorrentes** para (aprox.) metade dos elementos da entrada: $n/2$ (na verdade, faz $\lfloor n/2 \rfloor$)

- Logo:

```
merge(a, ini, meio, fim):
  // fusão de duas sequências ordenadas:
  // a[ini .. meio] e a[meio+1 .. fim]
  i ← ini; j ← meio+1
  for k = ini ... fim:
    if j > fim:
      aux[k] ← a[i]; i ← i+1
    else: if i > meio:
      aux[k] ← a[j]; j ← j+1
    else: if a[i] < a[j]:
      aux[k] ← a[i]; i ← i+1
    else: aux[k] ← a[j]; j ← j+1
  for k = ini ... fim
    a[k] ← aux[k]
```

Por ser depois do if apenas uma das somas é feita

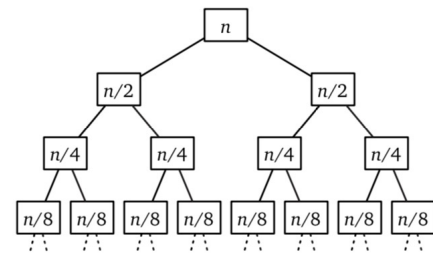
Exercício: Prove, usando indução que $T(n) = O(n \log n)$

40

Análise informal

1. Na fusão em ordem, cada subarray é percorrido na totalidade uma vez, logo, é $O(n)$.
2. No total, a árvore diminui o input em metade e, em cada nível da árvore, existe o dobro de nós que no nível anterior. Então, a altura da árvore é -----
3. Onde, o trabalho para ordenar no mergesort é $O()$

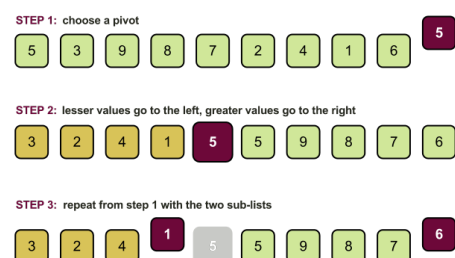
Árvore de recursão do MergeSort



O MergeSort é (assintoticamente) mais eficiente que o InsertionSort ou o SelectionSort

Ordenamento por Partição: *Quicksort*

- Método proposto por C. Hoare em 1961
- Baseado nas ideias seguintes:
 - Para ordenar uma sequência, as trocas mais produtivas são as efetuadas entre elementos mais distantes
 - Se a sequência estiver por ordem inversa, um bom método deve realizar apenas $n/2$ trocas



Quicksort

- **Método de separação** entre maiores e menores
- Processo recorrente: a separação é aplicada recursivamente a cada uma das duas partes

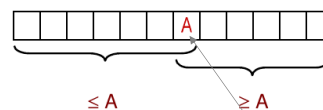
Descrição do algoritmo:

- “colocar” pequenos para a esquerda e grandes para a direita
- Aplicar o algoritmo à esquerda
- Aplicar o algoritmo à direita

44

Separação de elementos à esquerda e à direita

- Para **separar** é necessário um elemento – **pivot** – cujo valor serve para distinguir maiores de menores (relativamente ao valor do pivot)
- O pivot define a **fronteira de separação**:
 - Exemplo: 17 12 6 19 23 8 5 10
 - Pivot = **10**
 - Resultado da separação: **5 8 6 10 23 19 12 17**



*Se o pivot pertence à sequência a ordenar,
fica posicionado na sua posição definitiva*

45

Ordenação: Algoritmo **Quicksort**

Quicksort

```
quicksort(a, ini, fim):
    //Ordena uma sequência por ordem crescente
    //Input: sequência a ordenar e posições inicial e final da sequência
    //Output: sequência ordenada

    if ini < fim:
        partir = partition(ini, fim)
        quicksort(a, ini, partir)
        quicksort(a, partir+1, fim)
    endif
```

invocação inicial: quicksort(seq, 1, n)

(Sendo 1 a primeira posição na sequência seq)

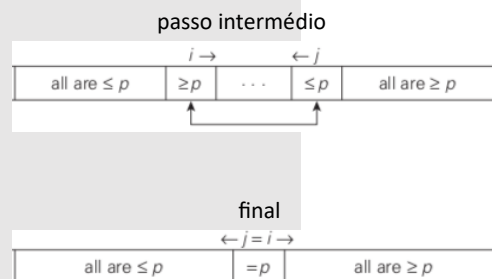
47

Algoritmo de partição do Quicksort

Hoarepartition(a, e, d)

//Partition subarray (Hoare's algorithm) using the first element as a pivot
//Input: array a[e..d], defined by its left (e) and right (d) indices (e < d)
//Output: Partition of a[e..d] (returns the split position)

```
p ← a[e]
i ← e; j ← d
while i < j
    repeat: i ← i + 1 until a[i] ≥ p
    repeat: j ← j - 1 until a[j] ≤ p
    swap(a[i], a[j])
endwhile
return j
```



- No final de uma partição, passámos por todos os elementos do array, logo, é $O(n)$.

Exercício: Mostre que de facto a partição é $O(n)$.

48

Análise do Quicksort

- No final de uma partição, passámos por todos os elementos da sequência, logo, (o algoritmo d)a partição é $O(n)$.
- Mais uma vez, fazemos chamadas recursivas para resolver (ordenar) toda a sequência.
- Sendo r a posição do pivot (ou correspondente à paragem da partição), separámos $r-1$ elementos para o lado esquerdo e $n-r$ para o lado direito, logo,

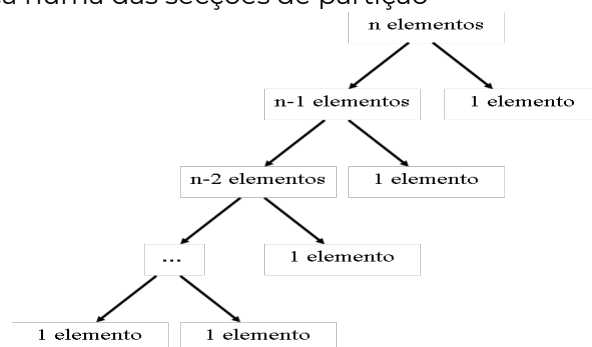
$$T(n) = T(r-1) + T(n-r) + O(n)$$

- Mas ... esta posição “ r ” não é fixa e depende da escolha do pivot

49

Análise de Eficiência do Quicksort no **pior dos casos** (*worst case*)

- O pior dos casos acontece-se quando a separação é o **menos** eficiente possível: a maioria dos elementos fica numa das secções de partição

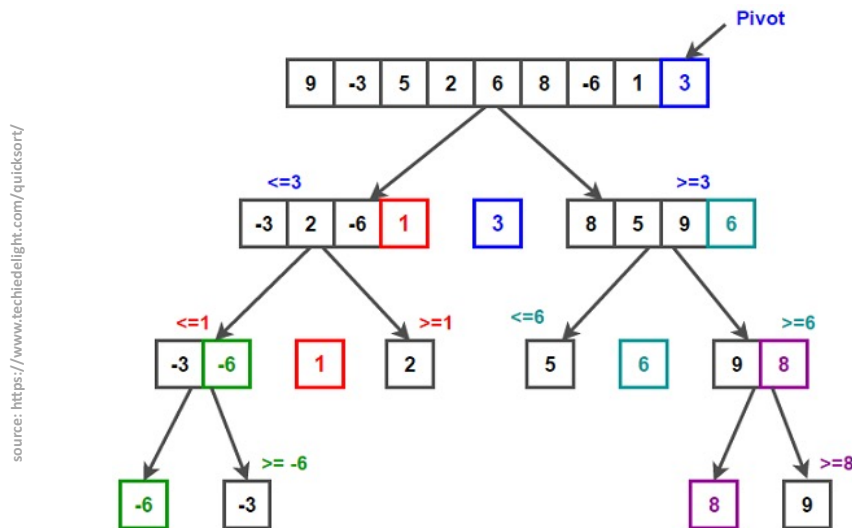


- Como a árvore fica com **$n-1$** níveis, no pior dos casos o Quicksort é **$O(n^2)$** .

50

Quicksort

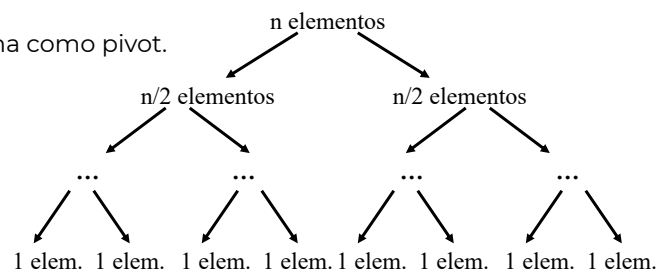
O melhor pivot possível, ou seja, que parte equilibradamente é



51

Análise de Eficiência do Quicksort usando a mediana como pivot

- O melhor caso consiste, em cada passo de separação, conseguir dividir o mais simetricamente possível ($\sim n/2$)
- O que fica garantido se usarmos a mediana como pivot.



- Como a árvore fica com $\log_2 n$ níveis, este caso seria $O(n \log n)$

52

Exemplos de algoritmos que seguem a estratégia **divide-and-conquer**

- Ambos o *mergesort* e o *quicksort* seguem um padrão recursivo de 3 fases do tipo *divide and conquer*:
 - Dividir** (a instância d) o problema em várias instâncias do MESMO problema, mas de dimensão menor, e resolvíveis independentemente umas das outras.
 - Delegar** a resolução de cada uma das instâncias menores recursivamente.
 - Combinar** as soluções das instâncias menores para construir a solução final.

53

Para reter das aulas anteriores

- Análise de algoritmos:
- Alguns algoritmos de ordenação:
 - Algoritmos quadráticos: Selection sort e Insertion sort
 - Algoritmo da fusão ordenada: *merge sort* é $O(n \log n)$
 - Algoritmo *quicksort* é quadrático no pior dos casos e é $O(n \log n)$ no melhor dos casos.
- Estratégias de desenho de algoritmos:
 - Pesquisa Exaustiva
 - Estratégia Incremental (*Decrease-and-Conquer*)
 - Dividir para Conquistar (*Divide-and-Conquer*)

54

Para estudar

- **Cap. 2 e 3 – *Introduction to Algorithms***. Cormen, Leiserson et al., 3rd ed. MIT Press, 2009
- **Cap. 2 – *Algorithm Design***, John Kleinberg, Eva Tàrdos, Addison-Wesley, 2005.