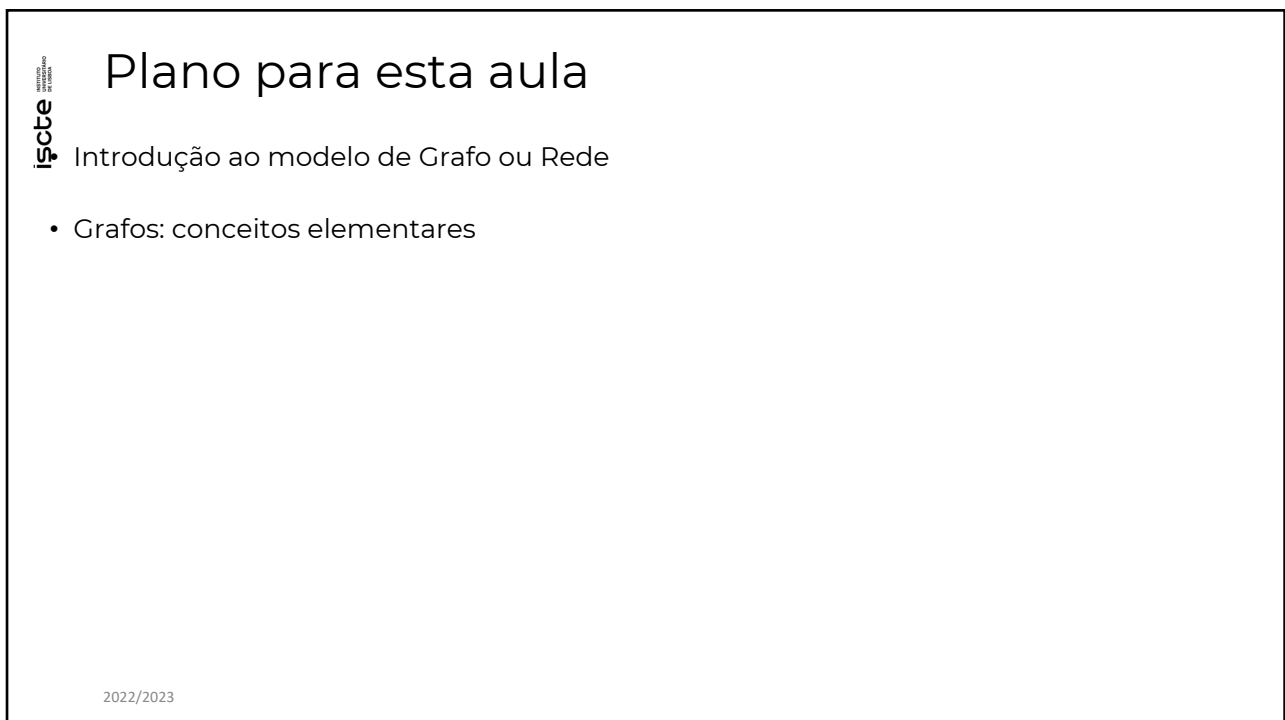
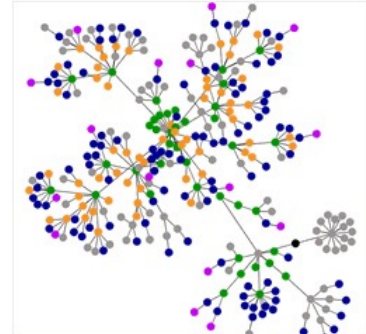


1



4

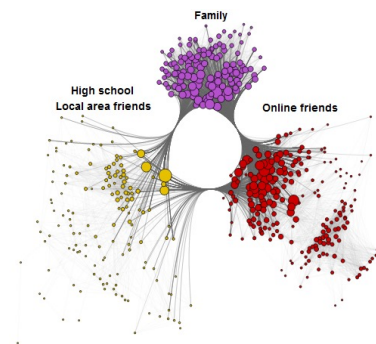


# Grafos e Redes

5

## Breve Introdução – Grafos e Redes

Na sua forma mais simples grafos são representações de objetos que se relacionam entre si. Formalmente a teoria dos grafos é uma área da Matemática discreta, com uma terminologia precisa.



É fácil de ver que uma rede pode ser representada por um grafo: a rede de amigos, da família, das ligações na rede social, das chamadas telefónicas...

Cada um destes exemplos é um grafo, em que os nós e as ligações ganham atributos semânticos, representando objetos reais ou abstratos.

7

Qualquer que seja o sistema considerado, é possível encontrar uma rede (grafo) que define as interações entre os seus componentes.

Source: Albert-Bárábasi: Network Science: Introduction

- O modelo de Grafo, ou Rede, representa conhecimento sobre conectividade e interligações num sistema.
- Por exemplo, a rede elétrica é modelada através de um modelo de grafo, que é necessário para entender, por exemplo, como a **estrutura da rede real** afeta a robustez do sistema.
- O uso de *ferramentas* que avaliem o nível de interação entre estrutura (e os processos dinâmicos que nela ocorrem) e o impacto de um corte na rede é uma área crítica para avaliação da robustez e escalabilidade.
- As “falhas de transporte” em redes (de transportes, de comunicação, infraestruturas) seguem leis que podem ser quantificadas, e até previstas, usando a Teoria de Grafos.

9

- air transportation network
- nodes are world airports
- links show passenger flux

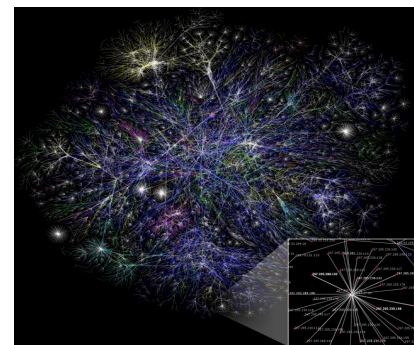


2022/2023

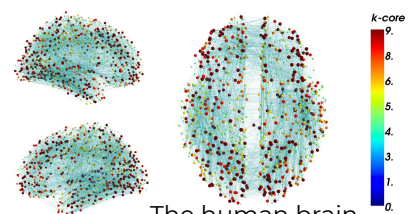
## Algumas aplicações de Grafos



Immigration flows



The INTERNET network



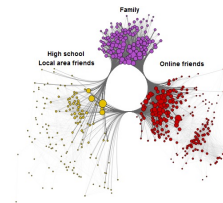
The human brain

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Internet\\_map\\_1024.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Internet_map_1024.jpg)

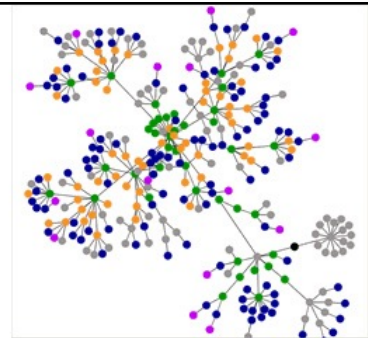
10

O facto de modelar sistemas reais como grafos é extremamente útil. Muitas aplicações necessitam representar conjuntos de ligações/relações entre pares de objetos, de modo a responder a questões tais como:

- Existe um caminho para ir de A para B? E qual o “melhor” caminho?
- Qual a menor distância entre 2 objetos?
- Quantos servidores são alcançáveis a partir deste?
- Qual é a minha rede de amigos?



Com o tipo abstrato de dados **Grafo/Rede**, conseguimos modelar os conjuntos de ligações, de modo a responder a estas e muitas outras situações.



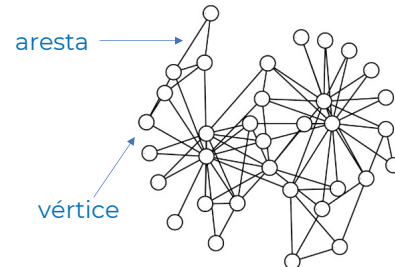
# Grafos - Introdução

Conceitos elementares:

- Definição de grafo e tipos de grafos
- Algumas das principais propriedades dos grafos

## Definição de Grafo

- Um grafo  $G = (V, E)$  é um par ordenado, onde:
  - $V$  é o conjunto dos **vértices** (ou nós)
  - $E$  é o conjunto das **arestas** (ou arcos)
- Os vértices representam os objetos ou entidades que podem estar em ligação.
- As arestas representam a ligação entre os vértices.
- Uma aresta pode ter uma direção, indicando que a ligação se estabelece do nó origem para o nó destino.



2022/2023

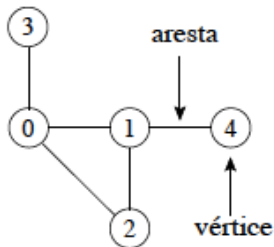
## Exemplos de grafos ou redes reais

source: Cap. 2 – Algorithm Design, John Kleinberg, Eva Tardos, Addison-Wesley, 2005.

graph	node	edge
communication	telephone, computer	fiber optic cable
circuit	gate, register, processor	wire
mechanical	joint	rod, beam, spring
financial	stock, currency	transactions
transportation	street intersection, airport	highway, airway route
internet	class C network	connection
game	board position	legal move
social relationship	person, actor	friendship, movie cast
neural network	neuron	synapse
protein network	protein	protein-protein interaction
molecule	atom	bond

## Definições básicas:

iscte



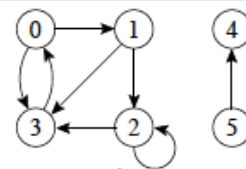
Grafo **não orientado**: todas as ligações -arestas- entre objetos -vértices- são bidirecionais

**Dígrafo**: grafo dirigido ou orientado, ou seja, cada arco tem um nó **origem** e um nó **destino**

dito **sucessor**

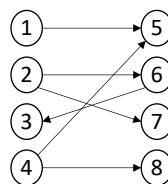
dito **antecessor**

Grafo **orientado** ou **dígrafo**



**laço ou lacete**

- Num dígrafo, uma aresta costuma designar-se por **arco** e um vértice por **nó**.



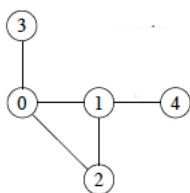
Grafo **bipartido**: constituído dois subconjuntos de nós disjuntos e apenas existem arcos entre nós de subconjuntos diferentes.

17

## Definições básicas

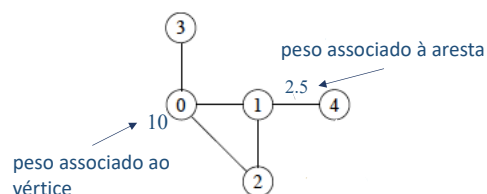
iscte

### • Grafo **não pesado** (*non-weighted*)



- Neste caso, as arestas (ou arcos) podem ser representadas por uma variável lógica (**se não forem permitidas arestas paralelas**)

### • Grafo **pesado** (*weighted*)



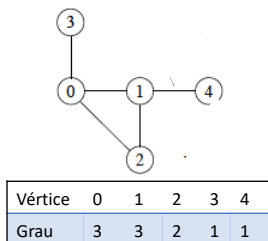
Já neste caso, as arestas/arcos (ou os vértices/nós) podem possuir informação associada, representando um "**peso**" da ligação (ou do nó).

18

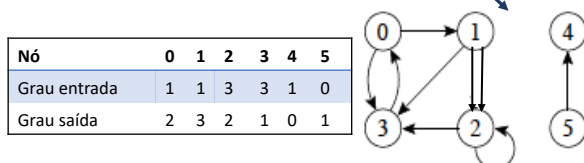


## Definições Básicas

- **Grau de um vértice:** número de arestas incidentes no vértice



- **Adjacência:** o nó  $a$  diz-se **adjacente** ao nó  $b$  sse existe uma aresta  $(a,b)$
- Denomina-se de **laço** ou **lacete** (tadpole ou selfloop) uma aresta com os seus extremos a iniciar e terminar no mesmo nó.
- **Multiarestas:** arestas **paralelas** que ligam **os mesmos vértices** (no mesmo sentido, no caso de um grafo dirigido).
- Um grafo que contém arestas paralelas chama-se um **multigrafo**.

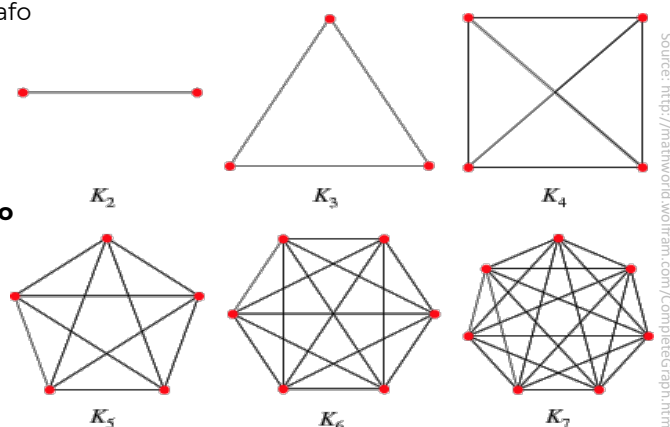


Num grafo orientado, podemos definir **grau de entrada** e **grau de saída**

19

## Conceitos Básicos

- Grafo **completo**: cada vértice está ligado a **todos** os outros
- O **número máximo de arestas** num grafo **não orientado**, sem laços nem arestas paralelas, é  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
- O **número máximo de arcos** num **grafo orientado**, sem laços nem arcos paralelos, é  $n(n-1)$ .



21

## Definições básicas

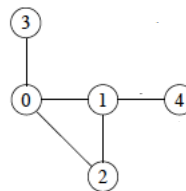
- Em grafos não dirigidos, sem lacetes nem arestas paralelas, a **densidade** é a razão entre o **número real de arestas** e o **número máximo possível de arestas** dado o número de vértices, logo, um valor em  $[0, 1]$ .
- Se  **$n$**  for o número de vértices e  **$m$**  for o número de arestas, a **densidade** de um **grafo não orientado** é dada por:

$$d = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

← quantidade de arestas real

← quantidade máxima de arestas possível

Exemplo:



- $n = 5$
- $m = 5$
- $d = \frac{5}{\frac{5(5-1)}{2}} = 0.5$

## Conceitos importantes

Conetividade, caminhos, ciclos e travessias  
Representações matemáticas



## Conceitos importantes: caminho

- **Caminho**: sequência de vértices

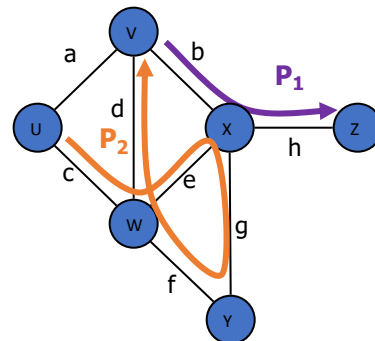
- $P_2 = \{u, w, x, y, w, v\}$

Note que:

- $P_2 = \{u, w, x, y, w, v\} \equiv \{(u,w), (w,x), (x,y), (y,w), (w,v)\}$   
 $\equiv \{c, e, g, f, d\}$

- **Caminho simples**: caminho onde todos os vértices são distintos

- $P_1 = \{v, x, z\}$  é um caminho simples



Grafo  $G=(V, E)$  com:

$$V=\{U, V, X, Y, W, Z\} \text{ e } E=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

27

27

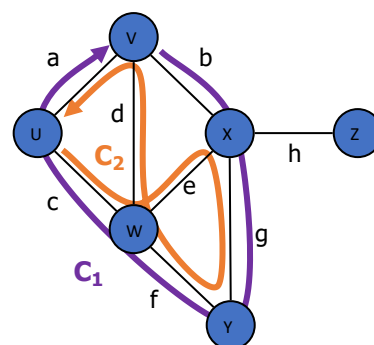
## Conceitos importantes: ciclo

- **Ciclo**: caminho **fechado** (começa e termina no mesmo vértice)

- $C_2 = \{u, w, x, y, w, u\}$

- **Ciclo simples**: ciclo cujos vértices são todos diferentes (à excepção do inicial, que é também o final)

- $C_1 = \{v, x, y, w, u, v\}$



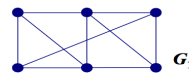
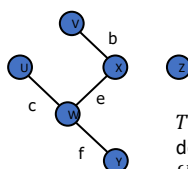
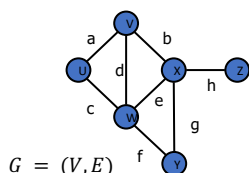
28

28

## Conceitos Básicos: conectividade e árvore

- **Grafo conexo**: grafo **não orientado** onde qualquer vértice é atingível a partir de outro outro (*existe caminho entre qualquer par de nós no grafo*)
- **Árvore**: grafo **conexo** e **acíclico**
- **Subgrafo** de  $G$ : Qualquer grafo  $H = (V', E')$  tal que,

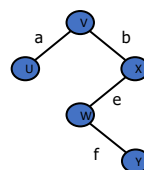
$$V' \subseteq V \text{ e } E' \subseteq E.$$



Grafo **conexo**

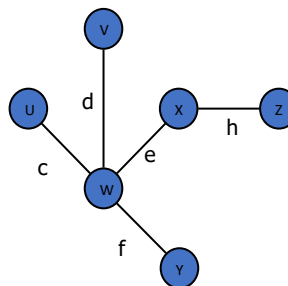
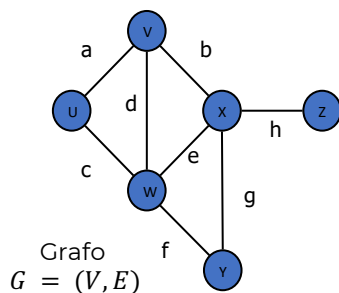


Grafo **desconexo**



30

## Conceitos importantes: **árvore de cobertura**



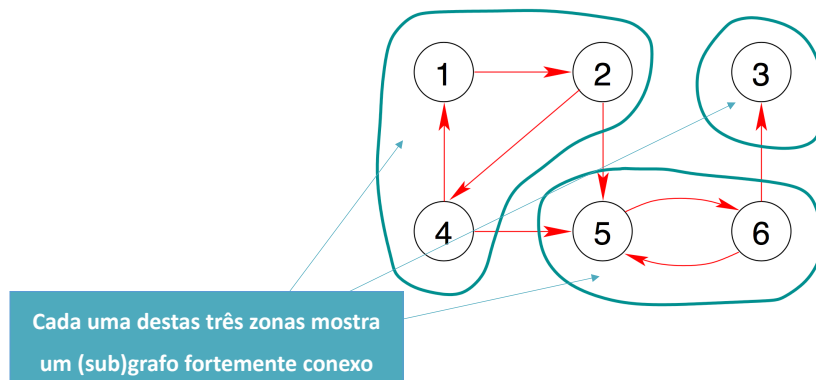
- **Árvore de cobertura do grafo  $G$** : subgrafo **conexo** e **acíclico**, cujo conjunto de vértices contém (**cobre**) todos os vértices do grafo original  $G$

33

33

## Conceitos importantes

- Grafo **fortemente conexo**: grafo **orientado** onde qualquer nó é atingível a partir de outro nó (existe caminho que liga qualquer par de nós no grafo, **nas duas direções**)



<http://www.dl.unhosp.pt/70b/aeC/page/7/files/mp2-2.pdf>