

Ejercicios Recurrencia

1. Un sistema de señales permite emitir ceros, unos y espacios en blanco. Los ceros van de dos en dos y los unos también. Encuentra y resuelve la recurrencia que calcula el número de señales que se pueden emitir de longitud n .
2. El número a_n de euros de activo de una compañía se incrementa cada año cinco veces lo que se incrementó el año anterior. Si $a_0 = 3$ y $a_1 = 7$, calcula a_n .
3. Halla y resuelve una recurrencia a_n el número de secuencias de longitud n en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que tienen un número par de ceros.
4. Sea a_r el número de aristas de un grafo completo de r vértices. Halla una relación de recurrencia para a_r en términos de a_{r-1} y halla su solución.
5. En muchos lenguajes de programación podemos considerar que las expresiones aritméticas válidas, sin paréntesis, están formadas por los dígitos, $0, 1, 2, \dots, 9$ y los símbolos de las operaciones binarias $+$, \cdot y $/$. Por ejemplo, $2 + 3/5$ es una expresión aritmética válida y $8 + \cdot 9$ no lo es. Encuentra una recurrencia para el número de expresiones aritméticas válidas de longitud n .
6. Demuestra, por inducción, que si a_n es la sucesión definida por $a_0 = 3$, $a_1 = 3$ y $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ para $n \geq 0$, entonces se cumple $a_n = (3 - 2n)3^n$ para todo natural n .
7. Demuestra, por inducción, que si a_n es la sucesión definida por $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ y $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ para todo $n \geq 3$, entonces $a_n = 2^n + 1$ para todo natural.
8. Resuelve cada una de las siguientes relaciones de recurrencia lineales homogéneas:
 - $4a_n - 5a_{n-1} = 0$, si $n \geq 1$, y $a_0 = 2$.
 - $2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0$, si $n \geq 0$, $a_0 = 2$ y $a_1 = -8$.
 - $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, si $n \geq 2$, $a_0 = 5$ y $a_1 = 12$.
9. Para cada una de las siguientes relaciones de recurrencia lineales homogéneas, halla una solución general e indica la relación que deben cumplir los coeficientes que aparecen en ella en función de las condiciones iniciales dadas.
 - $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ para $n \geq 3$, sujeta a las condiciones iniciales $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ y $a_2 = 15$ (sus raíces características son $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$).
 - $a_{n+3} - 7a_{n+2} + 16a_{n+1} - 12a_n = 0$ para $n \geq 0$, sujeta a las condiciones iniciales $a_i = i$, $i = 0, 1, 2$ (sus raíces características son $r_1 = r_2 = 2, r_3 = 3$).
 - $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4}$, con las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 28$ y $a_3 = 32$ (sus raíces características son $r_1 = r_2 = 2, r_3 = r_4 = -2$).
10. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia
 - $a_n - 2a_{n-1} = 3^n$ para $n \geq 1$ y $a_0 = 6$.
 - $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n$ para $n \geq 2$ y $a_0 = 5$, $a_1 = 3$.





- $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n$ para $n \geq 2$, con $a_0 = a_1 = 1$.
- $a_n = 2a_{n-1} + n$ para $n \geq 1$ y cierto a_0 .
- $a_n = 4a_{n-1} - 3$ para $n \geq 1$ y con $a_0 = 2$.
- $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - 1$ para $n \geq 2$ y con $a_0 = a_1 = 3$.