Estructuras de datos: Árboles binarios de búsqueda, Montículos

Algoritmos

Dep. de Computación - Fac. de Informática
Universidad de A Coruña

Santiago Jorge
santiago.jorge@udc.es

Table of Contents

Referencias bibliográficas

- M. A. Weiss. Árboles. En *Estructuras de datos y algoritmos*, capítulo 4, páginas 93–154. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- M. A. Weiss. Colas de prioridad (montículos). En *Estructuras de datos y algoritmos*, capítulo 6, páginas 181–220. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- R. Peña Marí. Implementación de estructuras de datos. En *Diseño de Programas. Formalismo y abstracción*, capítulo 7, páginas 257–290. Prentice Hall, segunda edición, 1998.
- G. Brassard y T. Bratley. Estructura de datos. En *Fundamentos de algoritmia*, capítulo 5, páginas 167–210. Prentice Hall, 1997.

Table of Contents

Preliminares

- El camino de un nodo n_1 a otro n_k es la secuencia de nodos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tal que n_i es el padre de n_{i+1}.
- La profundidad de un nodo n es la longitud del camino entre la raíz y n.
  - La raíz tiene profundidad cero.
- Para un árbol binario de búsqueda, el valor medio de la profundidad es $O(\log n)$.
  - Si la inserción en un ABB no es aleatoria, el tiempo computacional aumenta.
    - Para mantener el equilibrio: Árboles AVL, Splay Trees, ...
- La altura de n es el camino más largo de n a una hoja.
  - La altura de un árbol es la altura de la raíz.

Operaciones básicas

- `Buscar`: devuelve la posición del nodo con la clave `x`.
- `Insertar`: coloca la clave `x`. Si ya estuviese, no se hace nada (o se “actualiza” algo).
- `Eliminar`: borra la clave `x`.
  - Si `x` está en una hoja, se elimina de inmediato.
  - Si el nodo tiene un hijo, se ajusta un apuntador antes de eliminarlo.
  - Si el nodo tiene dos hijos, se sustituye `x` por la clave más pequeña, `w`, del subárbol derecho.
    - A continuación se elimina en el subárbol derecho el nodo con `w` (que no tiene hijo izquierdo)

Eliminación perezosa

- Si se espera que el número de eliminaciones sea pequeño, la eliminación perezosa es una buena estrategia.
  - Al eliminar un elemento, se deja en el árbol marcándolo como eliminado.
  - Habiendo claves duplicadas, es posible decrementar el campo con la frecuencia de apariciones.
  - Si una clave eliminada se vuelve a insertar, se evita la sobrecarga de asignar un nodo nuevo.
- Si el número de nodos reales en el árbol es igual al número de nodos "eliminados", se espera que la profundidad del árbol sólo aumente en uno (¿por qué?).
  - La penalización de tiempo es pequeña.

eso es así
porque el
ultimo nivel
tiene mas
nodos que

Implementación de árboles binarios de búsqueda (i)

```
tipo
     PNodo = ^Nodo
     Nodo = registro
              Elemento : TipoElemento
              Izquierdo, Derecho : PNodo
            fin registro
     ABB = PNodo

procedimiento CrearABB (var A)
  A := nil
fin procedimiento
```

Implementación de árboles binarios de búsqueda (ii)

Complejidad computacional: O(1)*profundidad de x, que es el valor medio de la profundidad de los nodos.
o(1)*numero de llamadas recurrentes(mejor caso)
En el peor de los casos O(n) si el árbol degeneró en una lista.

```
función Buscar (x, A) : PNodo
  si A = nil entonces devolver nil
  sino si x = A^.Elemento entonces devolver A
  sino si x < A^.Elemento entonces
        devolver Buscar (x, A^.Izquierdo)
  sino devolver Buscar (x, A^.Derecho)
fin función
```

```
función BuscarMin (A) : PNodo
  si A = nil entonces devolver nil
  sino si A^.Izquierdo = nil entonces devolver A
  sino devolver BuscarMin (A^.Izquierdo)
fin función
```

Complejidad computacional = que en Buscar

Implementación de árboles binarios de búsqueda (iii)

el árbol se pasa por referencia,
sino no funciona

```
procedimiento Insertar (x, var A)
  si A = nil entonces
    nuevo (A);
    si A = nil entonces error ''sin memoria''
    sino
      A^.Elemento := x;
      A^.Izquierdo := nil;
      A^.Derecho := nil
  sino si x < A^.Elemento entonces
          Insertar (x, A^.Izquierdo)
  sino si x > A^.Elemento entonces
          Insertar (x, A^.Derecho)
  { si x = A^.Elemento : nada }
fin procedimiento
```

Complejidad computacional: O()
Primero vemos la complejidad en una sola llamada recursiva, obviándolas.
nº pasos recurrentes=profundidad donde se inserte nuevo nodo.
Igual que en los casos anteriores.

Implementación de árboles binarios de búsqueda (iv)

```
procedimiento Eliminar (x, var A)
  si A = nil entonces error ''no encontrado''
  sino si  x < A^.Elemento entonces
          Eliminar (x, A^.Izquierdo)
  sino si  x > A^.Elemento entonces
          Eliminar (x, A^.Derecho)
  sino    { x = A^.Elemento }
    si A^.Izquierdo = nil entonces
      tmp := A; A := A^.Derecho; liberar (tmp)
    sino si A^.Derecho = nil entonces
      tmp := A; A := A^.Izquierdo; liberar (tmp)
    sino tmp := BuscarMin (A^.Derecho);
          A^.Elemento := tmp^.Elemento;
          Eliminar (A^.Elemento, A^.Derecho)
fin procedimiento
```

Complejidad computacional: O()
Calculamos sin las llamadas recurrentes y la llamada a buscar mínimo.
El resto son en tiempo constante O(1)

Recorridos de un árbol (i)

- En orden: Se procesa el subárbol izquierdo, el nodo actual y, por último, el subárbol derecho. $O(n)$

```
procedimiento Visualizar (A)
  si A <> nil entonces
    Visualizar (A^.Izquierdo);
    Escribir (A^.Elemento);
    Visualizar (A^.Derecho)
fin procedimiento
```

- Post-orden: Ambos subárboles primero. $O(n)$

```
función Altura (A) : número
  si A = nil entonces devolver -1
  sino devolver 1 + max (Altura (A^.Izquierdo),
                                        Altura (A^.Derecho))
fin función
```

Recorridos de un árbol (ii)

ver bien esta parte

- Pre-orden: El nodo se procesa antes. Ej: una función que marcase cada nodo con su profundidad. $O(n)$
- Orden de nivel: Todos los nodos con profundidad p se procesan antes que cualquier nodo con profundidad $p+1$.
  - Se usa una cola en vez de la pila implícita en la recursión. $O(n)$

Table of Contents

Colas de prioridad

- Permiten únicamente el acceso al mínimo (o máximo) elemento.
- Operaciones básicas: `insertar`, `eliminarMin` (`eliminarMax`).
- Implementaciones simples:
  - Listas enlazadas efectuando inserciones al frente, $O(1)$, y recorriendo la lista, $O(n)$, para elminiar el mínimo (máximo).
  - Listas ordenadas: inserciones costosas, $O(n)$, eliminaciones eficientes, $O(1)$.
  - Árboles binarios de búsqueda: tiempo de ejecución medio $O(\log n)$ para ambas operaciones.
    - A pesar de que las eliminaciones no son aleatorias.
    - Se eliminan repetidamente nodos de un subárbol. No obstante, el otro subárbol es aleatorio y tendría a lo sumo el doble de elementos de los que debería. Y esto sólo incrementa en uno la profundidad esperada.
  - Montículos: ambas operaciones se realizan en $O(\log n)$ para el peor caso. No requieren apuntadores.

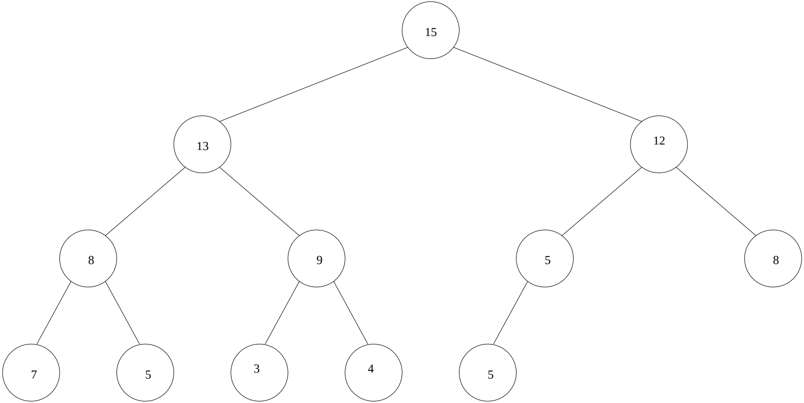
Propiedades estructurales de los montículos

- Un montículo es un árbol binario completo: todos los niveles están llenos con la posible excepción del nivel más bajo, que se llena de izquierda a derecha.
- Un árbol binario completo de altura h tiene entre 2^h y $2^{h+1} - 1$ nodos.
  - Su altura es la parte entera de $\log_2 n$.
- Esta regularidad facilita su representación mediante un vector.
- Para cualquier elemento en la posición i del vector, el hijo izquierdo está en la posición $2i$, el hijo derecho en $2i + 1$, y el padre en $i \div 2$.

Propiedades de orden de los montículos

- El mínimo (o máximo) está en la raíz.
- Y como todo subárbol es también un montículo, todo nodo debe ser menor (mayor) o igual que todos sus descendientes.

Ejemplo de montículo de máximos



15	13	12	8	9	5	8	7	5	3	4	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Implementación de montículos (i)

```
tipo Montículo = registro
    Tamaño_monticulo : 0..Tamaño_máximo
    Vector_montículo : vector [1..Tamaño_máximo]
                             de Tipo_elemento
  fin registro

procedimiento Inicializar_Montículo ( M )
  M.Tamaño_monticulo := 0
fin procedimiento

función Montículo_Vacío ( M ) : test
  return M.Tamaño_monticulo = 0
fin función
```

Implementación de montículos (ii)

```
procedimiento Flotar ( M, i ) { privado }
  mientras i > 1 y
       M.Vector_montículo[i div 2] < M.Vector_montículo[i]
  hacer intercambiar M.Vector_montículo[i div 2] y
                                 M.Vector_montículo[i];
        i := i div 2
  fin mientras
fin procedimiento
procedimiento Insertar ( x, M )
  si M.Tamaño_monticulo = Tamaño_máximo entonces
    error Monticulo lleno
  sino M.Tamaño_monticulo := M.Tamaño_monticulo + 1;
       M.Vector_monticulo[M.Tamaño_monticulo] := x;
       Flotar ( M, M.Tamaño_monticulo )
fin procedimiento
```

Implementación de montículos (iii)

```
procedimiento Hundir ( M, i ) { privado }
  repetir
    HijoIzq := 2*i;
    HijoDer := 2*i+1;
    j := i;
    si HijoDer <= M.Tamaño_monticulo y
       M.Vector_montículo[HijoDer] > M.Vector_montículo[i]
    entonces i := HijoDer;
    si HijoIzq <= M.Tamaño_monticulo y
       M.Vector_montículo[HijoIzq] > M.Vector_montículo[i]
    entonces i := HijoIzq;
    intercambiar M.Vector_montículo[j] y
                 M.Vector_montículo[i];
  hasta j=i {Si j=i el nodo alcanzó su posición final}
fin procedimiento
```

Implementación de montículos (iv)

```
función EliminarMax ( M ) : Tipo_elemento
  si Montículo_Vacío ( M ) entonces
    error Monticulo vacío
  sino
    x := M.Vector_montículo[1];
    M.Vector_montículo[1] :=
        M.Vector_montículo[M.Tamaño_monticulo];
    M.Tamaño_monticulo := M.Tamaño_monticulo - 1;
    si M.Tamaño_monticulo > 0 entonces
        Hundir ( M, 1);
    devolver x
fin función
```

Implementación de montículos (v)

- Creación de montículos en tiempo lineal, $O(n)$:

```
procedimiento Crear_Montículo ( V[1..n], M )
  Copiar V en M.Vector_montículo;
  M.Tamaño_montículo := n;
  para i := M.Tamaño_montículo div 2 hasta 1 paso -1
    Hundir(M, i);
  fin para
fin procedimiento
```

- El número de intercambios está acotado por la suma de las alturas de los nodos.
- Se demuestra mediante un argumento de marcado del árbol.
  - Para cada nodo con altura *h*, marcamos *h* aristas:
    - bajamos por la arista izquierda y después sólo por aristas derechas.
    - Así una arista nunca se marca 2 veces.