UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Ines Meršak

Problem londonskega stolpa

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Ljubljana, 2016

Kazalo

Problem londonskega stolpa

POVZETEK

V povzetku na kratko opiši vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

The Tower of London problem

ABSTRACT

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2010): navedi vsaj eno klasifikacijsko oznako – dostopne so na `www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html`

Ključne besede: navedi nekaj ključnih pojmov, ki nastopajo v delu

Keywords: angleški prevod ključnih besed

1. Uvod

Test londonskega stolpa je ena izmed variacij Hanojskih stolpov. Izumil ga je britanski nevropsiholog Tim Shallice leta 1982. Pogosto je uporabljen v psihologiji, saj s pomočjo te igre ugotavljajo stanje pacientove psihe, opazujejo pa lahko tudi napredek bolezni pri npr. Parkinsonovih bolnikih.

Osnovna verzija londonskega stolpa vsebuje tri enako velike krogle različnih barv in tri palice. Na prvo palico lahko postavimo samo eno kroglo, na drugo le dve krogli, na tretjo pa tri. Cilj igre je priti iz nekega danega stanja v neko drugo želeno stanje s čim manj koraki.

(Viri: wikipedia (TS), KlavžarHinz knjiga)

Vsa možna stanja in prehode med njimi lahko zelo elegantno opišemo s pomočjo grafov, zato si najprej poglejmo nekaj osnovnih pojmov teorije grafov.

2. Osnovni pojmi teorije grafov

Definicija 2.1. *Graf* G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ končna množica *vozlišč*, $E(G)$ pa množica *povezav* grafa. Povezave so predstavljene kot neurejeni pari vozlišč (neusmerjeni grafi).

Obstajajo variacije zgornje definicije, graf je lahko npr. usmerjen (povezave so usmerjeni pari) – tedaj govorimo o *digrafih* – ima neskončno število vozlišč ali pa več povezav med dvema vozliščema.

Vozlišča grafa predstavimo s točkami v ravnini, povezavo med dvema vozliščema pa kot enostavno krivuljo med ustreznima točkama v ravnini.

Slika 1. Možna predstavitev grafa v ravnini.

Če je $e = \{u, v\}$ povezava, tedaj sta u in v *krajišči* povezave e, pišemo tudi $e = uv$; rečemo, da sta u in v *sosednji vozlišči*.

Definicija 2.2. *Soseščina* vozlišča u je množica vseh sosednjih vozlišč vozlišča u:

$$N(u) = \{x \colon ux \in E(G)\}.$$

Stopnja vozlišča u je število vseh vozlišč, ki so mu sosednji: $\deg u = |N(u)|$.

Primer 2.3. Naj bo graf G podan z

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E(G) = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}.$$

Soseščina vozlišča 5 je $N(5) = \{1, 2, 3\}$.

Slika 2. Graf G.

Definicija 2.4. Graf $H = (V(H), E(H))$ je *podgraf* grafa $G = (V(G), E(G))$, če velja

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ in } E(H) \subseteq E(G).$$

Podgraf H grafa G je *inducirani* podgraf, če za vsaki dve vozlišči $x, y \in V(H)$ velja: $xy \in E(G) \implies xy \in E(H)$.

Slika 3. Graf H je induciran podgraf grafa G.

Primer 2.5. Če vzamemo graf G iz prejšnjega primera 2.3, potem je graf H, ki ima

$$V(H) = \{2,3,4,5\}, \quad E(H) = \{\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\}\}$$

induciran podgraf grafa G.

Poglejmo si nekaj razredov grafov, ki nam bodo prišli prav v kasnejših definicijah.

Pot na n vozliščih je graf, ki ima dva vozlišča stopnje 1, medtem ko so preostala vozlišča stopnje 2.

Cikel na n vozliščih (označimo ga s C_n) je graf, ki ga dobimo iz poti na n vozliščih tako, da dodamo povezavo med vozliščema stopnje 1.

Polni graf na n vozliščih (označimo ga s K_n) je graf, za katerega velja

$$uv \in E(K_n) \quad \forall u, v \in V(K_n).$$

Z besedami, vsa vozlišča polnega grafa so med sabo povezana.

Slika 4. Primer poti (levo) in cikla (desno) na šestih vozliščih.

Definicija 2.6. Naj bosta $G = (V(G), E(G))$ in $H = (V(H), E(H))$ grafa. Preslikava $f \colon V(G) \to V(H)$ je *izomorfizem*, če je bijektivna in velja

$$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H), \quad \forall u, v \in E(G).$$

Grafa G in H sta *izomorfna*, če obstaja izomorfizem $G \to H$. Oznaka: $G \cong H$.

Pot v grafu G je podgraf grafa G, ki je izomorfen poti. *Cikel v grafu G* je podgraf grafa G, ki je izomorfen ciklu.

Sprehod v grafu G je zaporedje vozlišč $v_1, v_2, \ldots, v_k$, tako da velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$, pri čemer je $1 \leq i \leq k-1$. Če označimo $x = x_1$ in $y = x_k$, potem takemu sprehodu rečemo x, y-sprehod.

Sprehod je *enostaven*, če so vsa njegova vozlišča različna. Enostaven sprehod inducira podgraf, ki je izomorfen poti.

Slika 5. Enostaven sprehod in pot v grafu, ki jo inducira.

Naj bo G graf in $\sim$ relacija, definirana na kartezičnem produktu $V(G) \times V(G)$:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\equiv} \exists\, x, y\text{-sprehod}.$$

Preprosto lahko preverimo, da je relacija $\sim$ ekvivalenčna. Sledi, da relacija $\sim$ množico vozlišč grafa G razbije na ekvivalenčne razrede. Podgrafi, inducirani s temi razredi, so *komponente* grafa G. Definiramo lahko:

Definicija 2.7. Graf je *povezan*, če ima le eno komponento. Naj bo G povezan graf. Tedaj je *razdalja* $d_G(u,v)$ med vozliščema u in v najmanjše možno število povezav na neki u, v-poti.

Definicija 2.8. Pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča tega grafa, se imenuje *Hamiltonova pot*. *Hamiltonov cikel* nekega grafa G je cikel v G, ki poteka skozi vsa vozlišča tega grafa. Graf je *Hamiltonov*, če vsebuje Hamiltonov cikel.

Izrek 2.9. *Naj bo G Hamiltonov graf. Za vsako podmnožico vozlišč $X \subseteq V(G)$ velja, da ima graf $G - X$ kvečjemu $|X|$ komponent.*

Dokaz. Blabla tukaj je dokaz. Blabla tukaj je dokaz. Blabla tukaj je dokaz. Blabla tukaj je dokaz. Blabla tukaj je dokaz. Blabla tukaj je dokaz. □

Definicija 2.10. Graf je *ravninski*, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne križata.

Definicija 2.11. *Barvanje* grafa $G = (V(G), E(G))G$ je preslikava

$$c \colon V(G) \longrightarrow \mathbb{N}, \text{ tako da velja } av \in E(G) \implies c(a) \neq c(v).$$

Če je $c \colon V(G) \longrightarrow [k]$, rečemo, da je c k-barvanje. *Kromatično število* grafa G, $\mathcal{X}(G)$, je najmanjši k, za katerega obstaja k-barvanje grafa G.

Literatura