Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

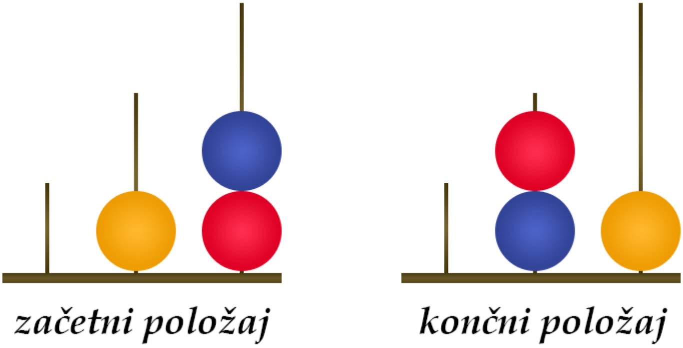
mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

9. 9. 2016

Klasični problem londonskega stolpa (Shallice)

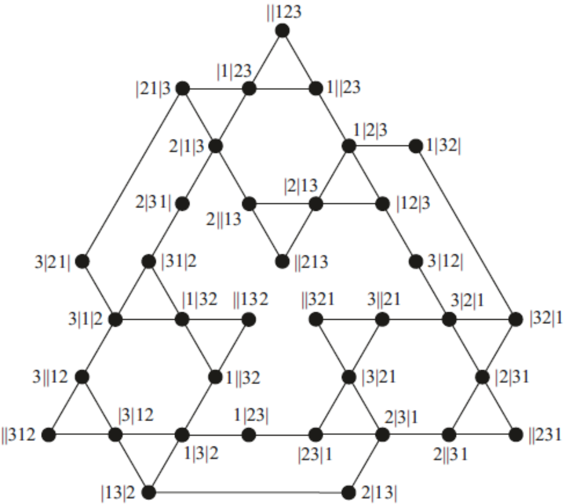
- izumljen leta 1982
- uporabljen predvsem na področju nevropsihologije
- 3 enako velike krogle različnih barv
- 3 palice različnih velikosti
- cilj igre je priti iz trenutnega stanja v neko dano stanje z minimalnim številom potez
- oznake: krogle oštevilčimo, začetek nove palice označimo s $|$

Primer



Slika: Začetni položaj označimo s $|3|12$, končni položaj pa z $|21|3$.

Graf klasičnega problema londonskega stolpa

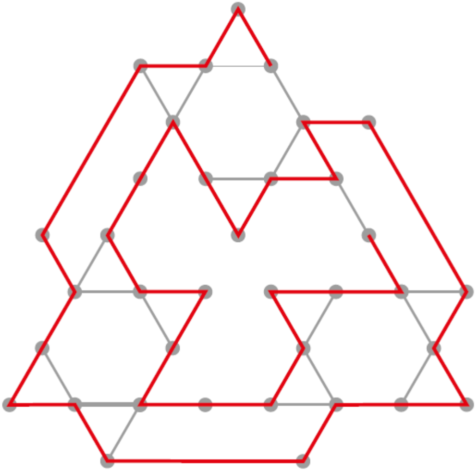


Lastnosti grafa

- 36 vozlišč (36 možnih stanj)
- po 12 vozlišč stopnje 2, 3, 4
- premer grafa je 8
- ravninski

Trditev

Klasični londonski graf vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.



Slika: Ena izmed Hamiltonovih poti v grafu L.

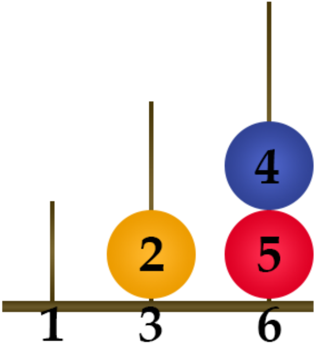
Oznake

- n krogel različnih barv, $n \geq 2$
- p palic, $p \geq 3$
- vsako palico označimo s številom $k \in [p]$, njeno višino pa s h_k
- veljati mora $n \leq \sum_{k=1}^{p} h_k$
- veljavnost poteze
- vsako stanje enolično predstavimo s permutacijo $s \in S_{n+p}$:

$$s = \underbrace{s_1 \ldots s_n}_{\text{položaji krogel}} \quad \underbrace{s_{n+1} \ldots s_{n+p}}_{\text{položaji palic}}$$

- položaje oštevilčimo od leve palice proti desni, z vrha palice proti dnu

Primer



Slika: Prikazano stanje označimo s permutacijo $s = 452136$.

Definicija

Definicija

Londonski graf L_h^n, kjer je $p \geq 3$, $n \geq 2$, $h \in [n]^p$, $\sum_{k=1}^p h_k \geq n$:

- vozlišča: vse permutacije $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p] : \; 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \; s_{n+p} = n + p,$$

- povezave: vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani

Graf klasičnega problema londonskega stolpa torej označimo z L_{123}^3.

Oxfordski graf

Oxfordski graf je poseben primer londonskega grafa, pri katerem so vse palice velikosti n, n ponovno označuje število krogel. Oxfordski graf označimo z O_p^n, zanj torej velja $O_p^n := L_{n^p}^n$.

Lastnosti

Trditev

Število vozlišč oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$n! \cdot \binom{n+p-1}{p-1} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}.$$

Trditev

Število povezav oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$\frac{np}{2} \frac{(p-2+n)!}{(p-2)!}.$$

Povezanost

V nadaljevanju bomo privzeli, da so palice urejene po velikosti naraščajoče, velja torej $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_p$.
Potreben pogoj za povezanost londonskega grafa je

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

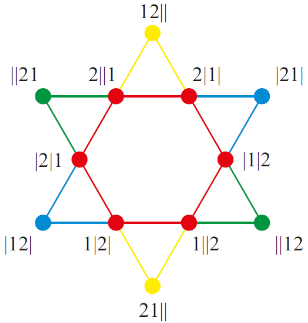
Izrek

Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Ravninskost

Za povezane londonske grafe z dvema kroglama velja $L^2_{111} \subset L^2_{112} \subset L^2_{122} \subset L^2_{222} = O^2_3$.



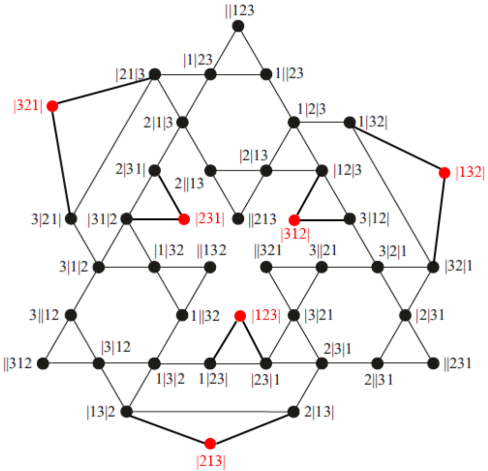
Slika: Vsi londonski grafi s $p = 3$ in $n = 2$ so ravninski. Prikazani so: $L^2_{111} + L^2_{112} + L^2_{122} + L^2_{222}$.

Trditev

Naj bo $p = 3$. Tedaj so ravninski londonski grafi natanko grafi $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3 = L$ in L_{133}^3.

Za povezane londonske grafe s tremi kroglami velja spodnja shema.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & L & & & & \\
 & & \| & & & & \\
L_{122}^3 & \subset & L_{123}^3 & \subset & L_{133}^3 & & \\
\cap & & \cap & & \cap & & \\
L_{222}^3 & \subset & L_{223}^3 & \subset & L_{233}^3 & \subset & L_{333}^3 \\
 & & & & & & \| \\
 & & & & & & O_3^3
\end{array}
$$

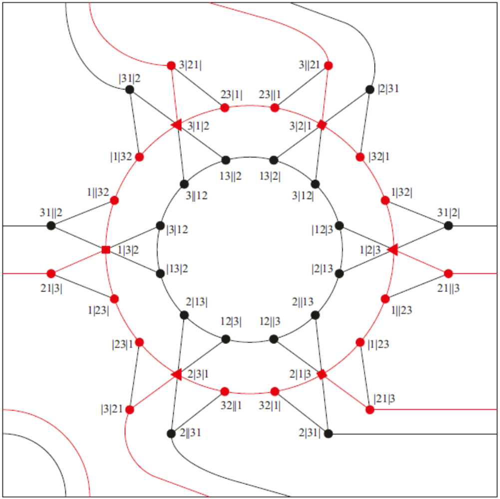


Slika: Graf L^3_{133} je ravninski.

Izrek Kuratowskega

Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & L & & & & \\
 & & \| & & & & \\
L^3_{122} & \subset & L^3_{123} & \subset & L^3_{133} & & \\
\cap & & \cap & & \cap & & \\
L^3_{222} & \subset & L^3_{223} & \subset & L^3_{233} & \subset & L^3_{333} \\
 & & & & & & \| \\
 & & & & & & O^3_3
\end{array}
$$



Slika: Rdeči podgraf grafa L^3_{222} je subdivizija grafa $K_{3,3}$.

Simetrije

Simetrije londonskega grafa so permutacije barv krogel in palic enake višine.

Definirajmo grupo $(\Gamma_{np}, \cdot, 1_{np})$:

- $\Gamma_{np} = S_n \times S_p$,
- $(\chi_1, \pi_1) \cdot (\chi_2, \pi_2) = (\chi_1 \circ \chi_2, \pi_1 \circ \pi_2)$,
- $1_{np} = (\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_p)$.

Sedaj lahko definiramo delovanje te grupe na množici vozlišč (stanj) nekega londonskega grafa $V(L_h^n)$:

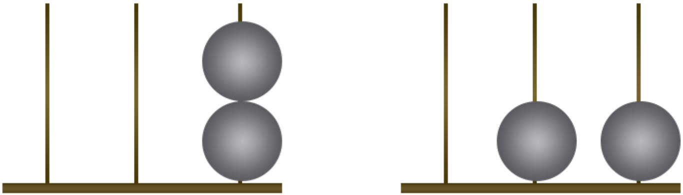
$$(\chi, \pi).s = \mathrm{X}\left(\Sigma_{\pi^{-1}(1)}|\ldots|\Sigma_{\pi^{-1}(p)}\right), s \in V(L_h^n)$$

pri čemer je X preslikava, ki ustrezno permutira barve krogel glede na χ.

Iz teorije grup vemo, da lahko na množici stanj definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ takole:

$$s_1 \sim s_2 \iff \exists(\chi, \pi) \in \Gamma_{np}: \ s_2 = (\chi, \pi).s_1,$$

množica stanj razpade na ekvivalenčne razrede, ki so kar orbite. Ekvivalentna so torej tista stanja krogel, ki so v isti orbiti.



Slika: Na sliki sta prikazani edini dve neekvivalentni stanji problema O_3^2.

Trditev

Množica stanj londonskega grafa L^3_{222}, katere velikost je 42, razpade na 2 ekvivalenčna razreda; prvi je velikosti 6, drugi pa 36. Minimalna stopnja vozlišč tega grafa je 3, maksimalna 6, povprečna pa ≈ 3.43. Premer tega grafa je 5, povprečna razdalja med dvema vozliščema pa ≈ 3.31.