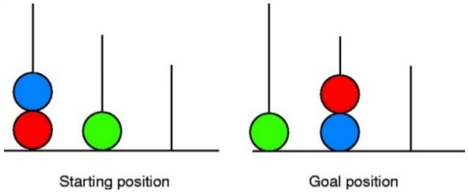
Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

16. 11. 2015

Klasični problem londonskega stolpa (Shallice)



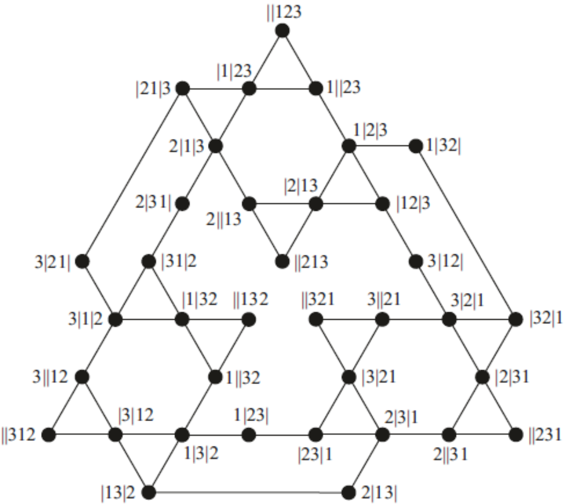
- izumljen leta 1982
- 3 enako velike krogle različnih barv
- 3 palice različnih velikosti
- cilj igre je priti iz trenutnega stanja v neko dano stanje z minimalnim številom potez
- najboljši način za vizualizacijo tega problema je s pomočjo grafov

Osnovne definicije teorije grafov

- graf $G = (V, E)$
- soseščina vozlišča u je $N(u) = \{x \in V;\ ux \in E\}$
- stopnja vozlišča u: $\deg u = |N(u)|$
- sprehod v grafu je zaporedje vozlišč $v_1, \ldots v_k$, da za vsak i velja $v_i v_{i+1} \in E$
- graf je povezan, če za poljuben par vozlišč obstaja sprehod med njima
- diameter grafa je najmanjše maksimalno število povezav, ki jih moramo prepotovati, da pridemo od poljubnega vozlišča do nekega drugega vozlišča v temu grafu

- ravninski graf je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini brez križanja povezav
- pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča, je Hamiltonova pot

Graf klasičnega problema londonskega stolpa



Lastnosti grafa

- 36 vozlišč (36 možnih stanj)
- utežene stopnje vozlišč
- diameter grafa je 8
- ravninski
- vsebuje Hamiltonovo pot

Oznake

Imamo p palic in n krogel različne barve, pri čemer je $p \geq 3$ in $n \geq 2$. Vsako palico označimo s številom $k \in [p]$, pri čemer je h_k višina palice. Veljati mora $n \leq \sum_{k=1}^{p} h_k$. Poteza je veljavna, če vrhnjo kroglo neke palice prestavimo na vrh druge, pod pogojem, da je na tej palici manj kot h_k krogel.
Vsako stanje krogel lahko enolično predstavimo s permutacijo $s \in S_{n+p}$.

Definicija

Definicija

$p \geq 3,\ n \geq 2,\ h \in [n]^p,\ \sum_{k=1}^{p} h_k \geq n.$
Množica vozlišč Londonskega grafa, označimo ga z L_h^n, je sestavljena iz vseh $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p]:\ 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1,\ s_{n+p} = n + p.$$

Vsaka povezava Londonskega grafa je sestavljena iz takega para vozlišč, da lahko s pomočjo ene veljavne poteze pridemo iz stanja, ki pripada prvemu vozlišču, v stanje, ki pripada drugemu vozlišču.

Lastnosti grafa

Potreben pogoj za povezanost Londonskega grafa je

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Izrek

Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Primeri uporabe

- problem londonskega stolpa je bil razvit z namenom merjenja sposobnosti načrtovanja in reševanja problemov v bolnikih s poškodbami čelnega režnja možganov
- slabo reševanje londonskega stolpa se interpretira kot nezmožnost učinkovitega načrtovanja
- uporabljen za ocenjevanje napredka bolezni pri bolnikih z Alzheimerjevo in Parkinsonovo boleznijo
- uporabljen za opazovanje vedenja majhnih otrok pri reševanju problemov