

# Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

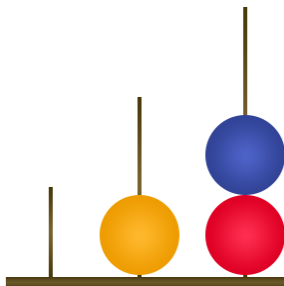
mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

9. 9. 2016

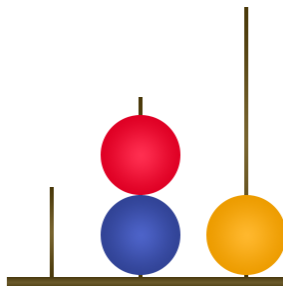
# Klasični problem londonskega stolpa (Shallice)

- izumljen leta 1982
- uporabljen predvsem na področju nevropsihologije
- 3 enako velike kroglice različnih barv
- 3 palice različnih velikosti
- cilj igre je priti iz trenutnega stanja v neko dano stanje z minimalnim številom potez
- oznake: kroglice oštevilčimo, začetek nove palice označimo s |

# Primer



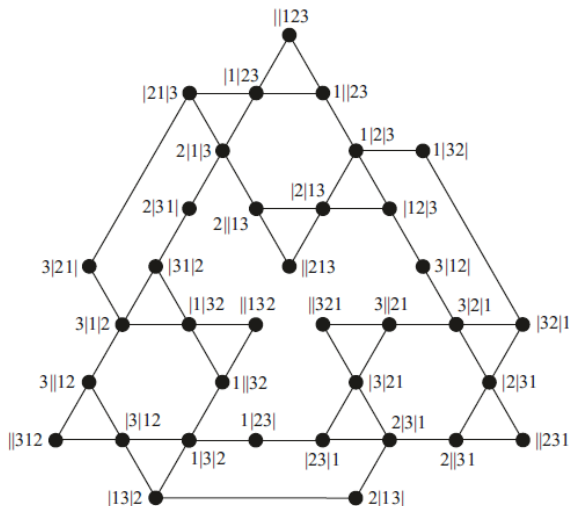
*začetni položaj*



*končni položaj*

**Slika:** Začetni položaj označimo s  $|3|12$ , končni položaj pa z  $|21|3$ .

# Graf klasičnega problema londonskega stolpa

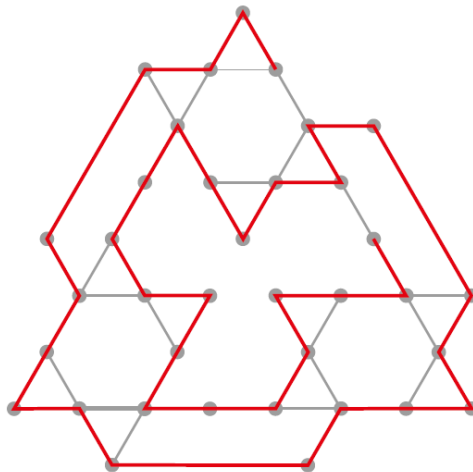


# Lastnosti grafa

- 36 vozlišč (36 možnih stanj)
- po 12 vozlišč stopnje 2, 3, 4
- premer grafa je 8
- ravninski

## Trditev

Klasični londonski graf vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.



Slika: Ena izmed Hamiltonovih poti v grafu  $L$ .

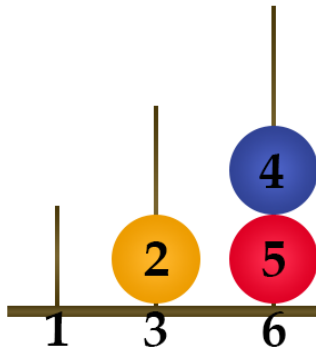
# Oznake

- $n$  krogel različnih barv,  $n \geq 2$
- $p$  palic,  $p \geq 3$
- vsako palico označimo s številom  $k \in [p]$ , njeno višino pa s  $h_k$
- veljati mora  $n \leq \sum_{k=1}^p h_k$
- veljavnost poteze
- vsako stanje enolično predstavimo s permutacijo  $s \in S_{n+p}$ :

$$s = \underbrace{s_1 \dots s_n}_{\text{položaji krogel}} \underbrace{s_{n+1} \dots s_{n+p}}_{\text{položaji palic}}$$

- položaje oštevilčimo od leve palice proti desni, z vrha palice proti dnu

# Primer



**Slika:** Prikazano stanje označimo s permutacijo  $s = 452136$ .



# Definicija

## Definicija

**Londonski graf**  $L_h^n$ , kjer je  $p \geq 3$ ,  $n \geq 2$ ,  $h \in [n]^p$ ,  $\sum_{k=1}^p h_k \geq n$ :

- vozlišča: vse permutacije  $s \in S_{n+p}$ , za katere velja:

$$\forall k \in [p] : 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \quad s_{n+p} = n + p,$$

- povezave: vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani

Graf klasičnega problema londonskega stolpa torej označimo z  $L_{123}^3$ .

# Oxfordski graf

**Oxfordski graf** je poseben primer londonskega grafa, pri katerem so vse palice velikosti  $n$ ,  $n$  ponovno označuje število krogel. Oxfordski graf označimo z  $O_p^n$ , zanj torej velja  $O_p^n := L_{n^p}^n$ .

# Lastnosti

## Trditev

Število vozlišč oxfordskega grafa  $O_p^n$  je enako

$$\frac{(n + p - 1)!}{(p - 1)!}.$$

## Trditev

Število povezav oxfordskega grafa  $O_p^n$  je enako

$$\frac{np}{2} \frac{(p - 2 + n)!}{(p - 2)!}.$$

# Povezanost

V nadaljevanju bomo privzeli, da so palice urejene po velikosti naraščajoče, velja torej  $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_p$ .

Potreben pogoj za povezanost londonskega grafa je

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

## Izrek

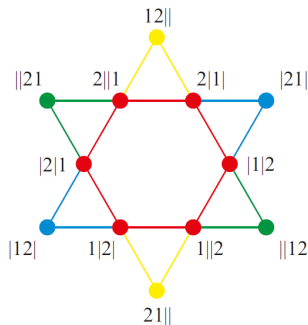
Londonski graf  $L_h^n$  je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

# Ravninskost

Za povezane londonske grafe z dvema kroglama velja

$$L_{111}^2 \subset L_{112}^2 \subset L_{122}^2 \subset L_{222}^2 = O_3^2.$$



**Slika:** Vsi londonski grafi s  $p = 3$  in  $n = 2$  so ravninski. Prikazani so:

$$L_{111}^2 + L_{112}^2 + L_{122}^2 + L_{222}^2.$$

Operacija **subdivizije** ohranja ravninskost.

### Izrek Kuratowskega

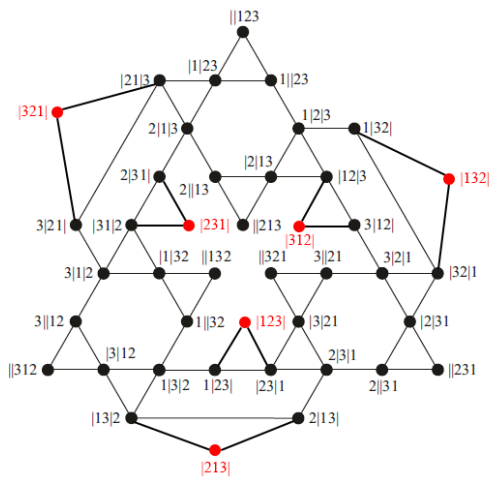
Graf  $G$  je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije  $K_5$  niti subdivizije  $K_{3,3}$ .

### Trditev

Naj bo  $p = 3$ . Tedaj so ravninski londonski grafi natanko grafi  $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3 = L$  in  $L_{133}^3$ .

Za povezane londonske grafe s tremi krogli velja spodnja shema.

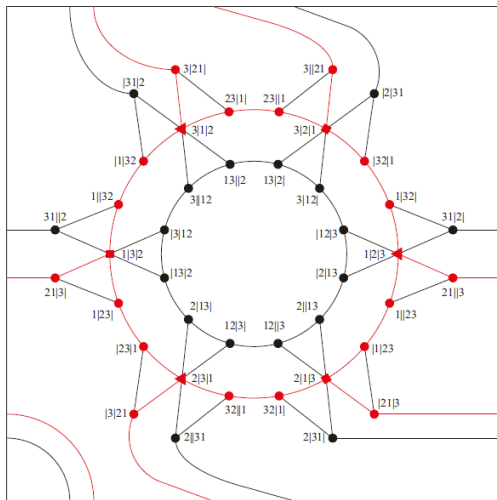
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & L & & & & \\
 & & \parallel & & & & \\
 L_{122}^3 & \subset & L_{123}^3 & \subset & L_{133}^3 & & \\
 \cap & & \cap & & \cap & & \\
 L_{222}^3 & \subset & L_{223}^3 & \subset & L_{233}^3 & \subset & L_{333}^3 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & O_3^3
 \end{array}$$



Slika: Graf  $L^3_{133}$  je ravninski.



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & L & & & & \\
 & & \parallel & & & & \\
 L_{122}^3 & \subset & L_{123}^3 & \subset & L_{133}^3 & & \\
 \cap & & \cap & & \cap & & \\
 L_{222}^3 & \subset & L_{223}^3 & \subset & L_{233}^3 & \subset & L_{333}^3 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & O_3^3
 \end{array}$$



Slika: Rdeči podgraf grafa  $L_{222}^3$  je subdivizija grafa  $K_{3,3}$ .

# Simetrije

Simetrije londonskega grafa so posledica permutacij barv krogel in palic enake višine.

Definirajmo grupo  $(\Gamma_{np}, \cdot, 1_{np})$ :

- $\Gamma_{np} = S_n \times S_p$ ,
- $(\chi_1, \pi_1) \cdot (\chi_2, \pi_2) = (\chi_1 \circ \chi_2, \pi_1 \circ \pi_2)$ ,
- $1_{np} = (\text{id}_n, \text{id}_p)$ .

Sedaj lahko definiramo delovanje te grupe na množici vozlišč (stanj) nekega londonskega grafa  $V(L_h^n)$ :

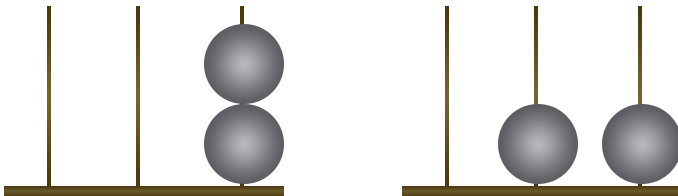
$$(\chi, \pi).s = X \left( \Sigma_{\pi^{-1}(1)} | \dots | \Sigma_{\pi^{-1}(p)} \right), s \in V(L_h^n)$$

pri čemer je  $X$  preslikava, ki ustrezno permutira barve krogel glede na  $\chi$ .

Iz teorije grup vemo, da lahko na množici stanj definiramo ekvivalenčno relacijo  $\sim$  takole:

$$s_1 \sim s_2 \iff \exists (\chi, \pi) \in \Gamma_{np}: s_2 = (\chi, \pi).s_1,$$

množica stanj razpade na ekvivalenčne razrede, ki so kar orbite. Ekvivalentna so torej tista stanja krogel, ki so v isti orbiti.



**Slika:** Na sliki sta prikazani edini dve neekvivalentni stanji problema  $O_3^2$ .

## Trditev

Množica stanj londonskega grafa  $L_{222}^3$ , katere velikost je 42, razpade v 2 ekvivalenčna razreda; prvi je velikosti 6, drugi pa 36. Minimalna stopnja vozlišč tega grafa je 3, maksimalna 6, povprečna pa  $\approx 3.43$ . Premer tega grafa je 5, povprečna razdalja med dvema vozliščema pa  $\approx 3.31$ .

# Primeri uporabe

- Problem londonskega stolpa je bil razvit z namenom merjenja sposobnosti načrtovanja in reševanja problemov pri bolnikih s poškodbami čelnega režnja možganov.
- Slabo reševanje londonskega stolpa se interpretira kot nezmožnost učinkovitega načrtovanja.
- Uporabljen je bil za ocenjevanje napredka bolezni pri bolnikih z Alzheimerjevo in Parkinsonovo boleznijo.
- Uporabljen je bil tudi za opazovanje vedenja majhnih otrok pri reševanju problemov.