

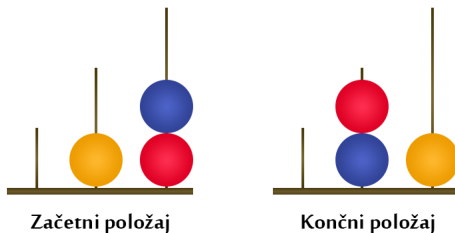
Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

13. 05. 2016

Klasični problem londonskega stolpa (Shallice)



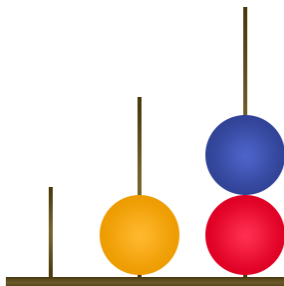
- izumljen leta 1982
- 3 enako velike kroglice različnih barv
- 3 palice različnih velikosti
- cilj igre je priti iz trenutnega stanja v neko dano stanje z minimalnim številom potez

Osnovne definicije teorije grafov

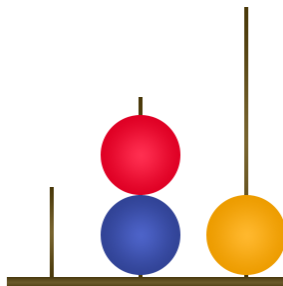
- graf $G = (V, E)$
- **soseščina** vozlišča u : $N(u) = \{x \in V; ux \in E\}$
- **stopnja** vozlišča u : $\deg u = |N(u)|$
- **sprehod** v grafu je zaporedje vozlišč v_1, \dots, v_k , da za vsak i velja $v_i v_{i+1} \in E$
- graf je **povezan**, če za poljuben par vozlišč obstaja sprehod med njima
- **razdalja** $d_G(u, v)$ je najmanjše možno število povezav na nekem sprehodu, ki se začne v vozlišču u in konča v vozlišču v
- **premer** grafa je največja minimalna razdalja med pari vozlišč

- **ravninski** graf je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini brez križanja povezav
- pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča, je **Hamiltonova pot**
- **Hamiltonov cikel** je cikel v grafu, ki poteka skozi vsa vozlišča

Primer

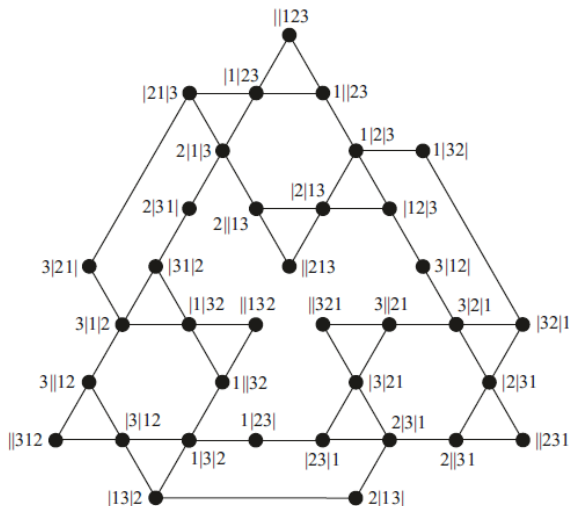


Začetni položaj



Končni položaj

Graf klasičnega problema londonskega stolpa

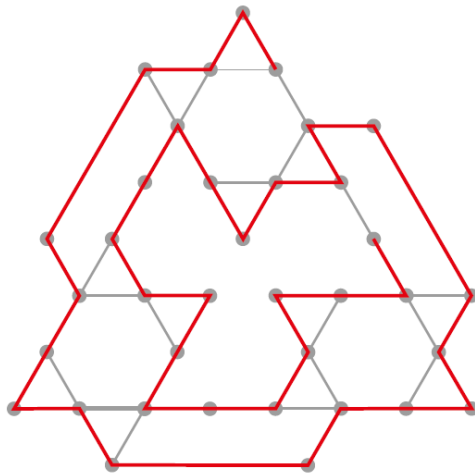


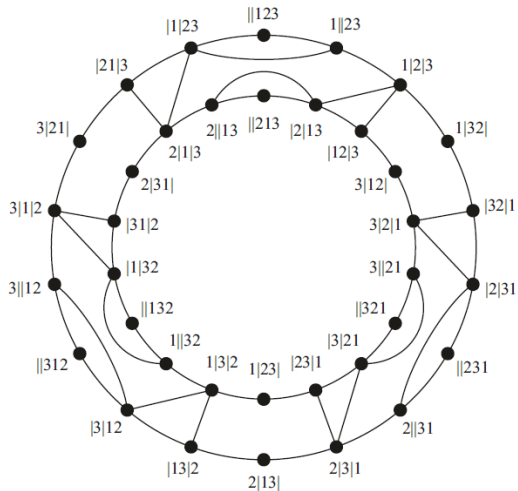
Lastnosti grafa

- 36 vozlišč (36 možnih stanj)
- po 12 vozlišč stopnje 2, 3, 4
- premer grafa je 8
- ravninski

Trditev

Klasični londonski graf vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.

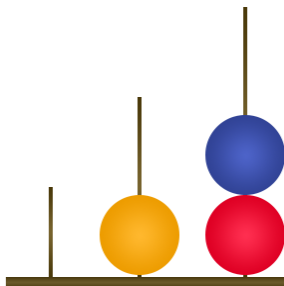




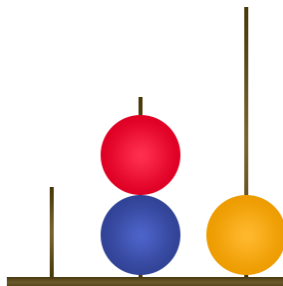
Oznake

- J. R. Tunstall je prva predlagala razširitev na 4 krogle s podaljšanimi palicami
- n krogel različnih barv, $n \geq 2$
- p palic, $p \geq 3$
- vsako palico označimo s številom $k \in [p]$, njeno višino pa s h_k
- veljati mora $n \leq \sum_{k=1}^p h_k$
- veljavnost poteze
- vsako stanje lahko enolično predstavimo s permutacijo $s \in S_{n+p}$
- položaje oštevilčimo od leve palice proti desni, z vrha palice proti dnu

Primer



Začetni položaj



Končni položaj

Definicija

Definicija

Londonski graf L_h^n , kjer je $p \geq 3$, $n \geq 2$, $h \in [n]^p$, $\sum_{k=1}^p h_k \geq n$:

- vozlišča: vse permutacije $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p] : 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \quad s_{n+p} = n + p,$$

- povezave: vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani

Povezanost grafa

V nadaljevanju bomo privzeli, da so palice urejene po velikosti naraščajoče, velja torej $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_p$.

Potreben pogoj za povezanost londonskega grafa je

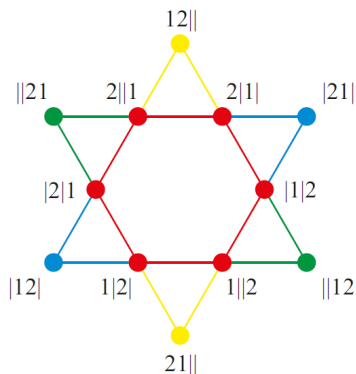
$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Izrek

Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Ravninskost grafa



Slika: Vsi londonski grafi s $p = 3$ in $n = 2$ so ravninski. Prikazani so:

$$L_{111}^2 + L_{112}^2 + L_{122}^2 + L_{222}^2.$$

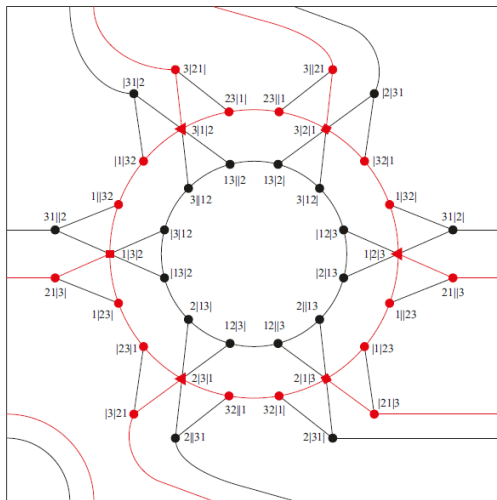
Operacija **subdivizije** ohranja ravninskost.

Izrek Kuratowskega

Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$.

Trditev

Naj bo $p = 3$. Tedaj so ravninski londonski grafi natanko grafi $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3 = L$ in L_{133}^3 .



Slika: Rdeči podgraf grafa L_{222}^3 je subdivizija grafa $K_{3,3}$.

Oxfordski graf

Oxfordski graf je poseben primer londonskega grafa, kjer velja, da so vse palice velikosti n , pri čemer je n število krogel. Oxfordski graf označimo z O_p^n , zanj torej velja $O_p^n := L_{n^p}^n$.

Lastnosti

Trditev

Število vozlišč oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$\frac{(n + p - 1)!}{(p - 1)!}.$$

Trditev

Število povezav oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$\frac{np}{2} \frac{(p - 2 + n)!}{(p - 2)!}.$$

Dokaz formule za število povezav oxfordskega grafa

Lema o rokovanju

Za vsak graf $G = (V(G), E(G))$ velja formula

$$\sum_{u \in V(G)} \deg u = 2 \cdot |E(G)|.$$

Spomnimo se še, da velja formula

$$\binom{b+w}{l} = \sum_{k=0}^l \binom{b}{k} \binom{w}{l-k}$$