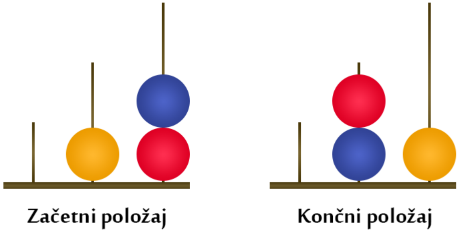
Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

13. 05. 2016

Klasični problem londonskega stolpa (Shallice)



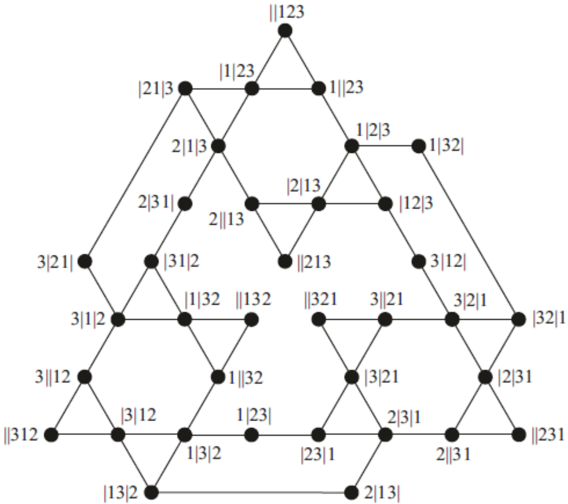
- izumljen leta 1982
- 3 enako velike krogle različnih barv
- 3 palice različnih velikosti
- cilj igre je priti iz trenutnega stanja v neko dano stanje z minimalnim številom potez

Osnovne definicije teorije grafov

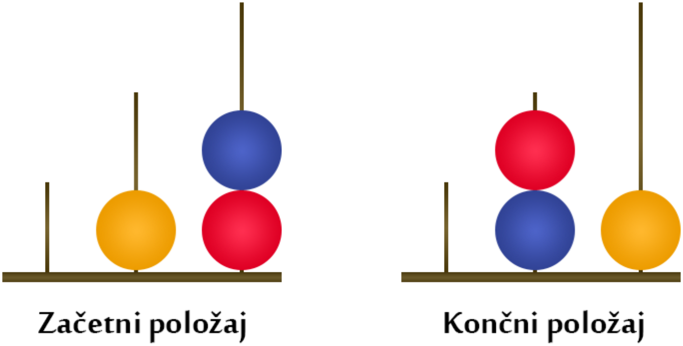
- graf $G = (V, E)$
- soseščina vozlišča u: $N(u) = \{x \in V;\ ux \in E\}$
- stopnja vozlišča u: $\deg u = |N(u)|$
- sprehod v grafu je zaporedje vozlišč $v_1, \ldots, v_k$, da za vsak i velja $v_i v_{i+1} \in E$
- graf je povezan, če za poljuben par vozlišč obstaja sprehod med njima
- razdalja $d_G(u, v)$ je najmanjše možno število povezav na nekem sprehodu, ki se začne v vozlišču u in konča v vozlišču v
- premer grafa je največja minimalna razdalja med pari vozlišč

- ravninski graf je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini brez križanja povezav
- pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča, je Hamiltonova pot
- Hamiltonov cikel je cikel v grafu, ki poteka skozi vsa vozlišča

Graf klasičnega problema londonskega stolpa



Primer

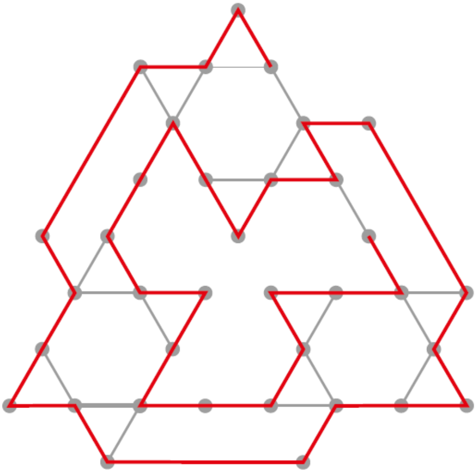


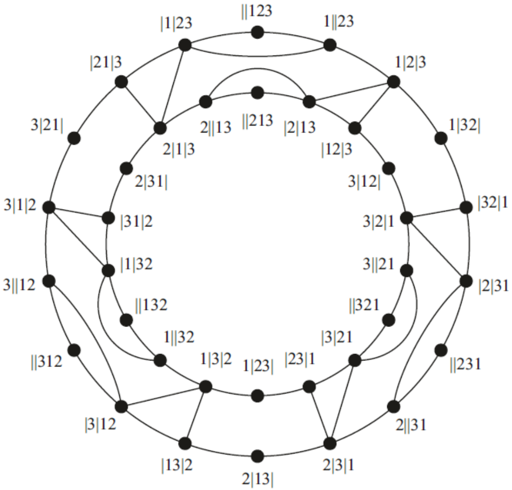
Lastnosti grafa

- 36 vozlišč (36 možnih stanj)
- po 12 vozlišč stopnje 2, 3, 4
- premer grafa je 8
- ravninski

Trditev

Klasični londonski graf vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.

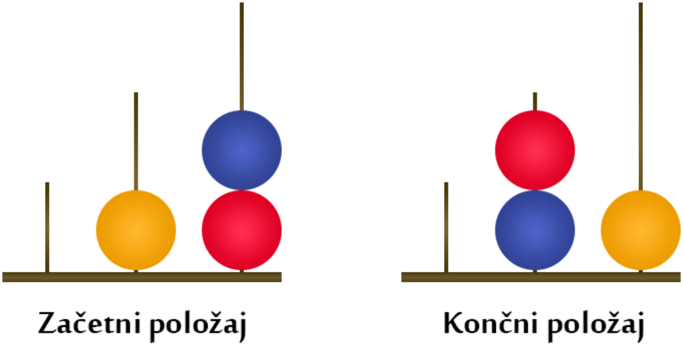



||123
|1|23
1||23
|21|3
1|2|3
3|21|
1|32|
2||13
||213
|2|13
2|1|3
|12|3
2|31|
3|12|
3|1|2
|31|2
|32|1
3|2|1
|1|32
3||21
3||12
|2|31
||132
||321
1||32
|3|21
||312
1|3|2
1|23|
|23|1
||231
|3|12
2||31
|13|2
2|3|1
2|13|

Oznake

- J. R. Tunstall je prva predlagala razširitev na 4 krogle s podaljšanimi palicami
- n krogel različnih barv, $n \geq 2$
- p palic, $p \geq 3$
- vsako palico označimo s številom $k \in [p]$, njeno višino pa s h_k
- veljati mora $n \leq \sum_{k=1}^{p} h_k$
- veljavnost poteze
- vsako stanje lahko enolično predstavimo s permutacijo $s \in S_{n+p}$
- položaje oštevilčimo od leve palice proti desni, z vrha palice proti dnu

Primer



Definicija

Definicija

Londonski graf L_h^n, kjer je $p \geq 3$, $n \geq 2$, $h \in [n]^p$, $\sum_{k=1}^{p} h_k \geq n$:

- vozlišča: vse permutacije $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p]: \ 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \ s_{n+p} = n + p,$$

- povezave: vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani

Povezanost grafa

V nadaljevanju bomo privzeli, da so palice urejene po velikosti naraščajoče, velja torej $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_p$.
Potreben pogoj za povezanost londonskega grafa je

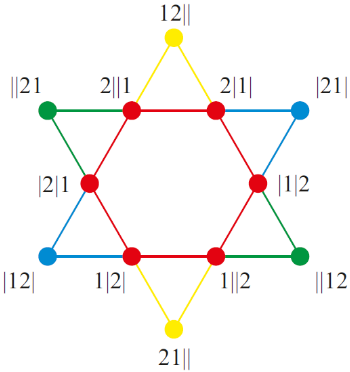
$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Izrek

Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Ravninskost grafa



Slika: Vsi londonski grafi s $p = 3$ in $n = 2$ so ravninski. Prikazani so: $L^2_{111} + L^2_{112} + L^2_{122} + L^2_{222} = O^2_3$.

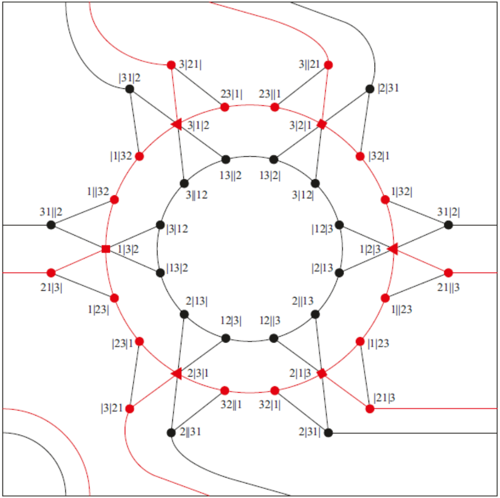
Operacija subdivizije ohranja ravninskost.

Izrek Kuratowskega

Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$.

Trditev

Naj bo $p = 3$. Tedaj so ravninski londonski grafi natanko grafi $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3 = L$ in L_{133}^3.



Slika: Rdeči podgraf grafa L^3_{222} je subdivizija grafa $K_{3,3}$.

Oxfordski graf

Oxfordski graf je poseben primer londonskega grafa, kjer velja, da so vse palice velikosti n, pri čemer je n število krogel. Oxfordski graf označimo z O_p^n, zanj torej velja $O_p^n := L^n_{n^p}$.

Lastnosti

Trditev

Število vozlišč oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}.$$

Trditev

Število povezav oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$\frac{np}{2}\frac{(p-2+n)!}{(p-2)!}.$$

Dokaz formule za število povezav oxfordskega grafa

Lema o rokovanju

Za vsak graf $G = (V(G), E(G))$ velja formula

$$\sum_{u \in V(G)} \deg u = 2 \cdot |E(G)|.$$

Spomnimo se še, da velja formula

$$\binom{b+w}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{b}{k} \binom{w}{l-k}$$