

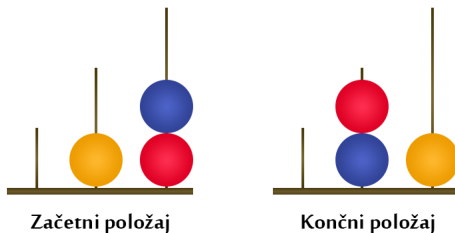
# Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

13. 05. 2016

# Klasični problem londonskega stolpa (Shallice)



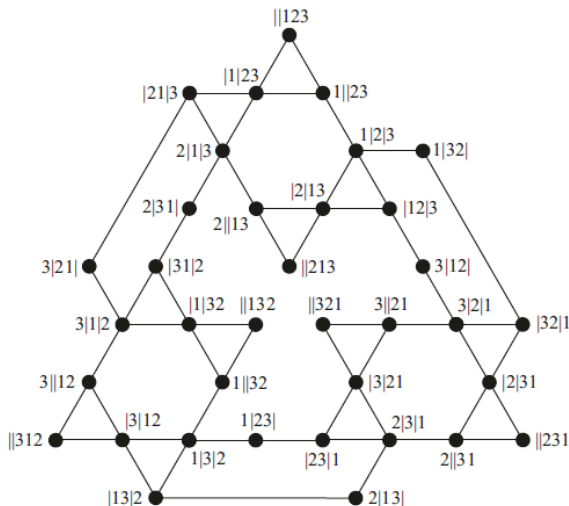
- izumljen leta 1982
- 3 enako velike kroglice različnih barv
- 3 palice različnih velikosti
- cilj igre je priti iz trenutnega stanja v neko dano stanje z minimalnim številom potez

# Osnovne definicije teorije grafov

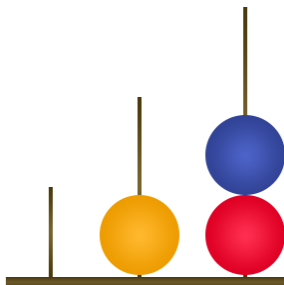
- graf  $G = (V, E)$
- **soseščina** vozlišča  $u$ :  $N(u) = \{x \in V; ux \in E\}$
- **stopnja** vozlišča  $u$ :  $\deg u = |N(u)|$
- **sprehod** v grafu je zaporedje vozlišč  $v_1, \dots, v_k$ , da za vsak  $i$  velja  $v_i v_{i+1} \in E$
- graf je **povezan**, če za poljuben par vozlišč obstaja sprehod med njima
- **razdalja**  $d_G(u, v)$  je najmanjše možno število povezav na nekem sprehodu, ki se začne v vozlišču  $u$  in konča v vozlišču  $v$
- **premer** grafa je največja minimalna razdalja med pari vozlišč

- **ravninski** graf je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini brez križanja povezav
- pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča, je **Hamiltonova pot**
- **Hamiltonov cikel** je cikel v grafu, ki poteka skozi vsa vozlišča

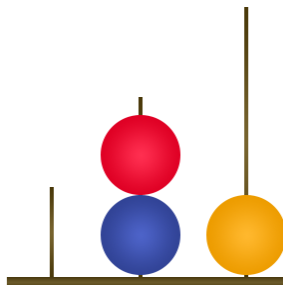
# Graf klasičnega problema londonskega stolpa



# Primer



Začetni položaj



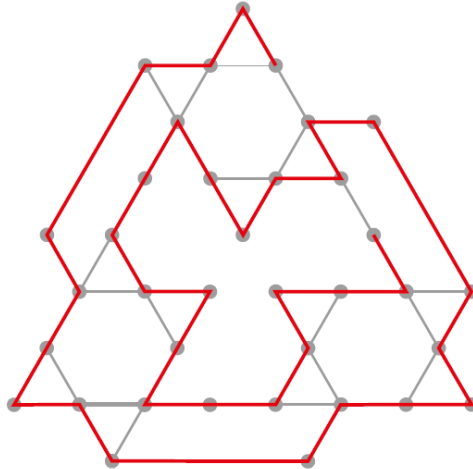
Končni položaj

# Lastnosti grafa

- 36 vozlišč (36 možnih stanj)
- 12 vozlišč stopnje 2, 3, 4
- premer grafa je 8
- ravninski

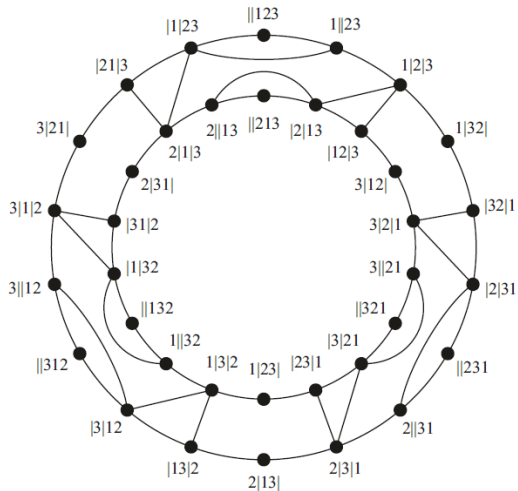
## Trditev

Klasični londonski graf vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.



Slika: Hamiltonova pot v klasičnem londonskem grafu.

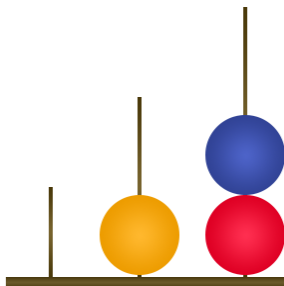




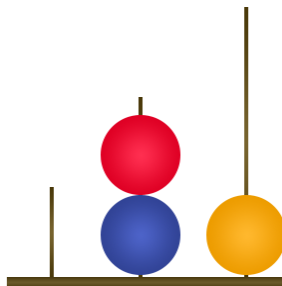
# Oznake

- J. R. Tunstall je prva predlagala razširitev na 4 krogle s podaljšanimi palicami
- $n$  krogel različne barve,  $n \geq 2$
- $p$  palic,  $p \geq 3$
- vsako palico označimo s številom  $k \in [p]$ , njeno višino pa s  $h_k$
- veljati mora  $n \leq \sum_{k=1}^p h_k$
- veljavnost poteze
- vsako stanje lahko enolično predstavimo s permutacijo  $s \in S_{n+p}$
- položaje oštevilčimo od leve palice proti desni, z vrha palice proti dnu

# Primer



Začetni položaj



Končni položaj

# Definicija

## Definicija

**Londonski graf**  $L_h^n$ , kjer je  $p \geq 3$ ,  $n \geq 2$ ,  $h \in [n]^p$ ,  $\sum_{k=1}^p h_k \geq n$ :

- vozlišča: vse permutacije  $s \in S_{n+p}$ , za katere velja:

$$\forall k \in [p] : 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \quad s_{n+p} = n + p,$$

- povezave: vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani

# Povezanost grafa

V nadaljevanju bomo privzeli, da so palice urejene po velikosti naraščajoče, velja torej  $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_p$ .

Potreben pogoj za povezanost Londonskega grafa je

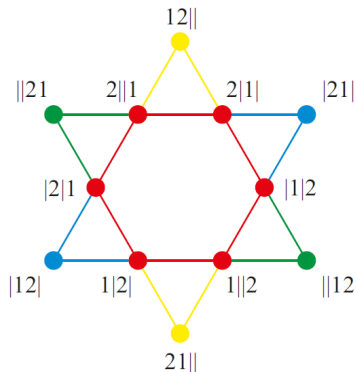
$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

## Izrek

Londonski graf  $L_h^n$  je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

# Ravninskost grafa



**Slika:** Vsi londonski grafi s  $p = 3$  in  $n = 2$  so ravninski. Prikazani so:  $L_{111}^2, L_{112}^2, L_{122}^2$  in  $L_{222}^2 = O_3^2$ .

### Izrek Kuratowskega

Graf  $G$  je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije  $K_5$  niti subdivizije  $K_{3,3}$ .

### Trditev

Naj bo  $p = 3$ . Tedaj so ravninski londonski grafi  $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3 = L$  in  $L_{133}^3$ .

**Slika:** Graf  $K_{3,3}$  je toroidalen.

Slika: Rdeči podgraf grafa  $L_{222}^3$  je subdivizija grafa  $K_{3,3}$ .



# Oxfordski graf

**Oxfordski graf** je poseben primer londonskega grafa, kjer velja, da so vse palice velikosti  $n$ , pri čemer je  $n$  število krogel. Oxfordski graf označimo z  $O_p^n$ , zanj torej velja  $O_p^n := L_{n^p}^n$ .

# Lastnosti

## Trditev

Število vozlišč oxfordskega grafa  $O_p^n$  je enako

$$\frac{(n + p - 1)!}{(p - 1)!}.$$

## Trditev

Število povezav oxfordskega grafa  $O_p^n$  je enako

$$\frac{np}{2} \frac{(p - 2 + n)!}{(p - 2)!}.$$

# Dokaz formule za število povezav oxfordskega grafa

## Lema o rokovanju

Za vsak graf  $G = (V(G), E(G))$  velja formula

$$\sum_{u \in V(G)} \deg u = 2 \cdot |E(G)|.$$

Spomnimo se še, da velja formula

$$\binom{b+w}{l} = \sum_{k=0}^l \binom{b}{k} \binom{w}{l-k}$$