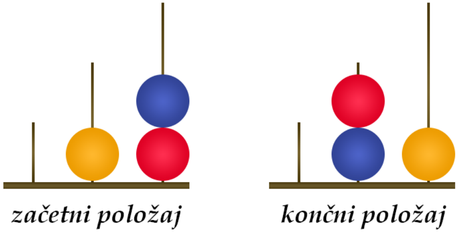
Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

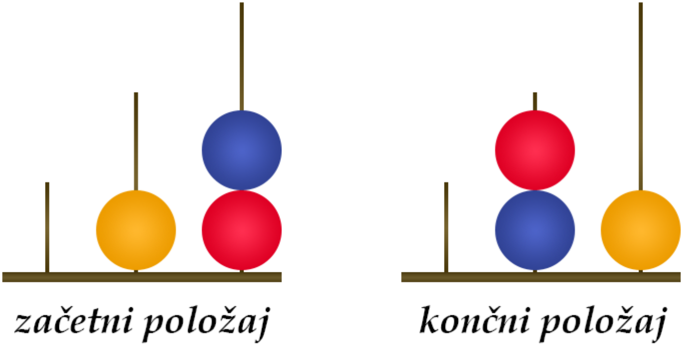
TODO. 2016

Klasični problem londonskega stolpa (Shallice)

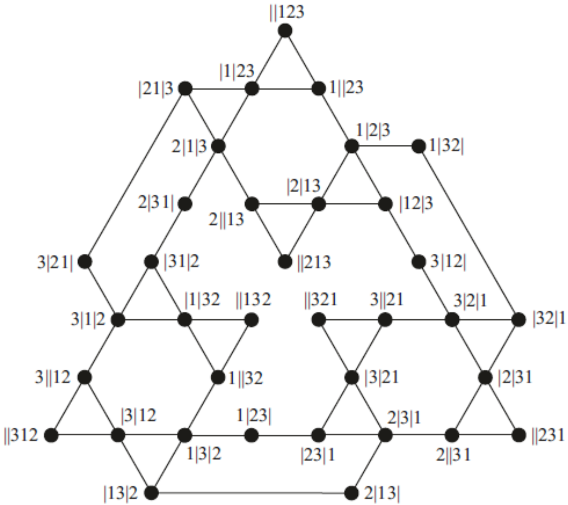


- izumljen leta 1982
- 3 enako velike krogle različnih barv
- 3 palice različnih velikosti
- cilj igre je priti iz trenutnega stanja v neko dano stanje z minimalnim številom potez

Primer



Graf klasičnega problema londonskega stolpa

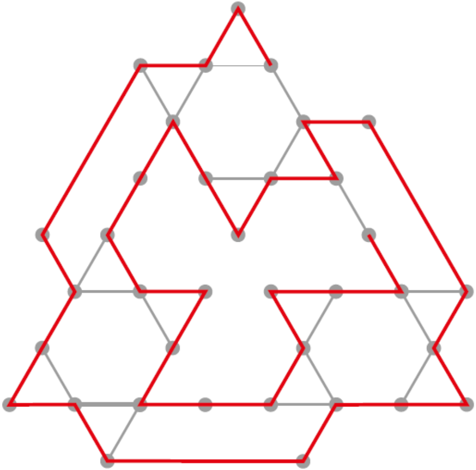


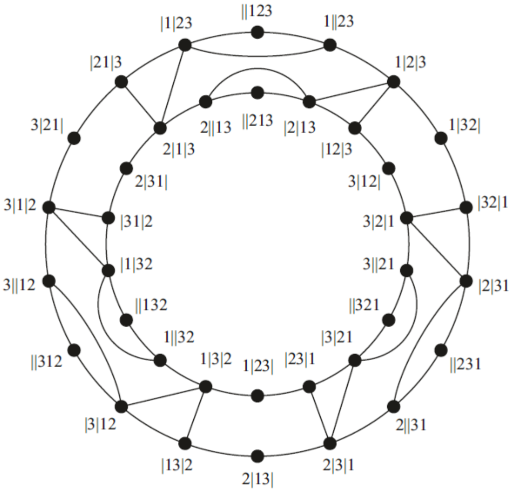
Lastnosti grafa

- 36 vozlišč (36 možnih stanj)
- po 12 vozlišč stopnje 2, 3, 4
- premer grafa je 8
- ravninski

Trditev

Klasični londonski graf vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.

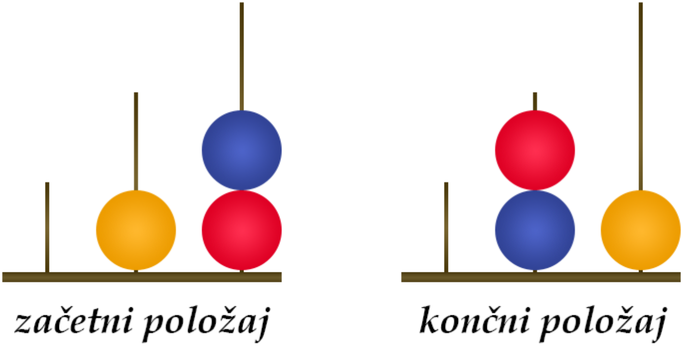



||123
|1|23
1||23
|21|3
1|2|3
3|21|
1|32|
2||13
||213
|2|13
2|1|3
|12|3
2|31|
3|12|
3|1|2
|32|1
|31|2
3|2|1
|1|32
3||21
3||12
|2|31
||132
||321
1||32
|3|21
||312
||231
1|3|2
1|23|
|23|1
|3|12
2||31
|13|2
2|3|1
2|13|

Oznake

- J. R. Tunstall je prva predlagala razširitev na 4 krogle s podaljšanimi palicami
- n krogel različnih barv, $n \geq 2$
- p palic, $p \geq 3$
- vsako palico označimo s številom $k \in [p]$, njeno višino pa s h_k
- veljati mora $n \leq \sum_{k=1}^{p} h_k$
- veljavnost poteze
- vsako stanje lahko enolično predstavimo s permutacijo $s \in S_{n+p}$
- položaje oštevilčimo od leve palice proti desni, z vrha palice proti dnu

Primer



Definicija

Definicija

Londonski graf L_h^n, kjer je $p \geq 3,\ n \geq 2,\ h \in [n]^p,\ \sum_{k=1}^{p} h_k \geq n$:

- vozlišča: vse permutacije $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p]:\ 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1,\ s_{n+p} = n + p,$$

- povezave: vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani

Povezanost grafa

V nadaljevanju bomo privzeli, da so palice urejene po velikosti naraščajoče, velja torej $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_p$.
Potreben pogoj za povezanost londonskega grafa je

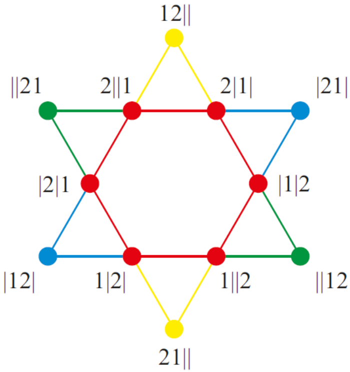
$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Izrek

Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Ravninskost grafa



Slika: Vsi londonski grafi s $p = 3$ in $n = 2$ so ravninski. Prikazani so: $L^2_{111} + L^2_{112} + L^2_{122} + L^2_{222}$.

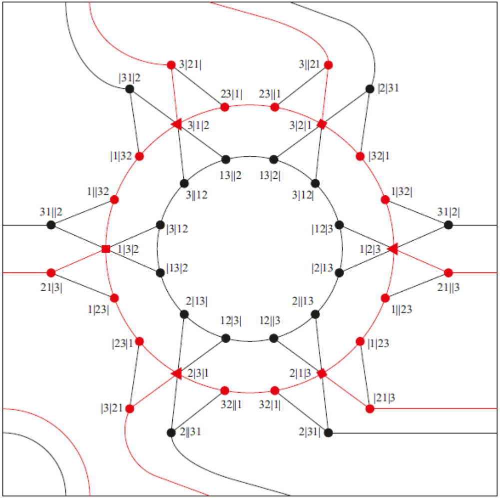
Operacija subdivizije ohranja ravninskost.

Izrek Kuratowskega

Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$.

Trditev

Naj bo $p = 3$. Tedaj so ravninski londonski grafi natanko grafi $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3 = L$ in L_{133}^3.



Slika: Rdeči podgraf grafa L^3_{222} je subdivizija grafa $K_{3,3}$.

Simetrije

TODO

Oxfordski graf

Oxfordski graf je poseben primer londonskega grafa, kjer velja, da so vse palice velikosti n, pri čemer je n število krogel. Oxfordski graf označimo z O_p^n, zanj torej velja $O_p^n := L_{n^p}^n$.

Lastnosti

Trditev

Število vozlišč oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}.$$

Trditev

Število povezav oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$\frac{np}{2}\frac{(p-2+n)!}{(p-2)!}.$$

Dokaz formule za število povezav oxfordskega grafa

Lema o rokovanju

Za vsak graf $G = (V(G), E(G))$ velja formula

$$\sum_{u \in V(G)} \deg u = 2 \cdot |E(G)|.$$

Spomnimo se še, da velja formula

$$\binom{b+w}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{b}{k} \binom{w}{l-k}$$