Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

13. 05. 2016

1 Klasični problem londonskega stolpa

- izumil Tim Shallice, profesor nevropsihologije, leta 1982
- pogosto je uporabljen predvsem na področju nevropsihologije, in sicer za opazovanje sposobnosti načrtovanja ter ugotavljanje napredka nekaterih bolezni
- tri enako velike krogle različnih barv
- tri palice različnih velikosti
- na prvo palico lahko postavimo samo eno kroglo, na drugo le dve krogli, na tretjo pa tri
- cilj igre je priti iz nekega danega stanja v neko drugo želeno stanje z minimalnim številom potez

Označimo krogle s številkami 1, 2, 3, pri čemer je npr. krogla 1 modra, krogla 2 rdeča, krogla 3 pa rumena. Začetek naslednje palice bomo nakazali s $|$, krogle pa bomo naštevali od vrha proti dnu palice. Na primer: stanja na prejšnji sliki so $|3|12$ in $|21|3$.

1.1 Graf klasičnega problema londonskega stolpa

S pomočjo teh oznak lahko opišemo vsako možno stanje in narišemo graf londonskega stolpa, pri čemer so vozlišča stanja, povezave pa so med tistimi stanji, med katerimi lahko prehajamo z eno potezo (enim veljavnim premikom krogle).

- 36 vozlišč (lahko preštejemo)
- po 12 vozlišč stopnje 2, 3, 4
- premer grafa je 8

- ravninski (narisan je v ravnini, povezave se nikjer ne križajo)

Trditev 1.1. *Graf L vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.*

Oris dokaza. Hitro lahko dokažemo, da L vsebuje Hamiltonovo pot: poiščemo jo. Ena izmed Hamiltonovih poti v grafu L je prikazana na sliki.

Da bi dokazali, da graf ni Hamiltonov, najprej opazimo nekaj lastnosti tega grafa, potem pa poskušamo konstruirati tak cikel v grafu, ki bi šel skozi vsa vozlišča natanko enkrat, a vidimo, da takega cikla ne moremo konstruirati.

□

2 Posplošeni londonski stolp

Graf klasičnega problema je majhen, možnih stanj je malo, zato je za testiranje odraslih ljudi naloga včasih prelahka; Jenny R. Tunstall je prva predlagala razširitev na 4 krogle s podaljšanimi palicami (vsaka je podaljšana za eno enoto).

2.1 Definicija

Poglejmo si posplošitev tega problema na p palic in n krogel različne barve, pri čemer je $p \geq 3$ in $n \geq 2$. Vsako palico označimo s številom $k \in [p]$, pri čemer je h_k višina palice (ta predstavlja število krogel, ki jih drži palica). Krogle označimo z 1 do n – te lahko razporejamo na palice. Veljati mora $n \leq \sum_{k=1}^{p} h_k$, torej da lahko vse krogle razporedimo na palice. Poteza je veljavna, če vrhnjo kroglo neke palice prestavimo na vrh druge, pod pogojem, da je na tej palici manj kot h_k krogel.

Vsako stanje krogel lahko enolično predstavimo s permutacijo $s \in S_{n+p}$, S je simetrijska grupa. Pri tem je s_i položaj krogle i, če $i \in [n]$, ali dna palice $i-n$, če je $i \in [n+p] \setminus [n]$. Položaje oštevilčimo od leve palice proti desni, z vrha palice proti dnu (kot pri klasičnem problemu). Tako bo s številko 1 oštevilčen položaj krogle, ki je postavljena najvišje na prvi palici; če na prvi palici ni nobene krogle, bo imelo položaj 1 dno te palice.

Naš primer: $s = 452136$.

Definicija 2.1. *Londonski graf* L_h^n, kjer je $p \geq 3$, $n \geq 2$, $h \in [n]^p$, $\sum_{k=1}^{p} h_k \geq n$:

- vozlišča: vse permutacije $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p]: \ 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \ s_{n+p} = n + p,$$

- povezave: vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani

Hitro vidimo, da mora veljati

$$\forall k \in [p]\colon s_{n+k} - s_{n+k-1} \geq 1$$

saj je s_{n+k} položaj dna palice k, s_{n+k-1} pa položaj dna palice $k-1$, torej se mora njun položaj razlikovati najmanj za 1 – to se zgodi, če na palici k ni nobene krogle.

Prav tako pa mora veljati tudi

$$\forall k \in [p]\colon s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1,$$

kar se zgodi v primeru, če je na k-ti palici h_k krogel.

S pogojem, da so vse palice visoke največ n, ne izgubimo splošnosti, saj razporejamo le n krogel.

Če smo v primeru klasičnega londonskega stolpa lahko izračunali število vozlišč, pa je v splošnem za londonske stolpe to precej težko.

3 Oxfordski graf

Oxfordski graf je poseben primer londonskega grafa, za katerega velja, da so vse palice velikosti n, pri čemer je n število krogel. Oxfordski graf označimo z O_p^n, zanj torej velja $O_p^n := L_{n^p}^n$.

Medtem ko je v splošnem težko določiti število vozlišč londonskega grafa, pa je to precej bolj preprosto za oxfordski graf. Še več, določimo lahko tudi število povezav.

Trditev 3.1. *Število vozlišč oxfordskega grafa O_p^n je enako*

$$\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}.$$

Oris dokaza. Iščemo število vseh možnih stanj pri oxfordskemu stolpu. Najprej pozabimo na različne barve krogel. Predstavljamo si, da imamo vse krogle zložene v vrsto, nato pa na poljubna mesta (s ponavljanjem) vrivamo | ; mesta so poljubna, saj so vse palice dovolj visoke, da lahko na njih zložimo vse krogle. Ko vrinemo $p-1$ pip, smo določili p palic in s tem razporeditev krogel. Nato samo še premešamo barve in dobimo končen rezultat.
(neurejeni izbori s ponavljanjem, izbiramo mesta za pipe) □

Trditev 3.2. *Število povezav oxfordskega grafa O_p^n je enako*

$$\frac{np}{2}\frac{(p-2+n)!}{(p-2)!}.$$

Oris dokaza. Ugotovimo, da so vsa stanja, ki imajo točno q nepraznih palic, $1 \leq q \leq p$ in $n \geq q$, enake stopnje. Preštejemo vsa taka stanja, nakar uporabimo lemo o rokovanju, stopnje vozlišč seštejemo po q. □

Lema 3.3 (Lema o rokovanju)**.** *Za vsak graf $G = (V(G), E(G))$velja formula*

$$\sum_{u \in V(G)} \deg u = 2 \cdot |E(G)|. \tag{1}$$

4 Lastnosti londonskega grafa

4.1 Povezanost

Zaželjeno je, da lahko pri londonskem stolpu prehajamo med poljubnima dvema stanjema, saj se problem uporablja za psihološka testiranja. To velja, če je pripadajoči londonski graf povezan, kar je zato ena pomembnejših lastnosti tega grafa.

V nadaljevanju bomo privzeli, da so palice urejene po velikosti naraščajoče, velja torej $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_p$. Potreben pogoj za povezanost londonskega grafa je očitno

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k,$$

oziroma z besedami, da lahko krogle razporedimo tako, da najvišja palica ostane prazna. V nasprotnem primeru bi, po tem ko bi razporedili maksimalno možno število krogel na vse preostale (manjše) palice, na največji ostalo še nekaj krogel, ki jih nikoli ne bi mogli premakniti na kakšno drugo palico. Izkaže se, da je ta pogoj tudi zadosten za povezanost londonskega grafa.

Izrek 4.1. *Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj*

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k. \tag{2}$$

Oris dokaza. Želimo dokazati, da lahko najdemo pot med poljubnima dvema vozliščema v londonskem grafu, oziroma da lahko prehajamo med poljubnima dvema stanjema krogel. Dokaza se lotimo tako, da problem zreduciramo na vprašanje, ali lahko zamenjamo poljubni dve krogli, brez da bi pri tem spremenili položaj katerekoli krogle, nato pa pokažemo, da je to mogoče. □

4.2 Ravninskost

Omenili smo že, da se problem londonskega stolpa pogosto uporablja kot psihološki test. Psihologi rezultate testov radi prikažejo kar na grafu uporabljenega problema, zato je zanimivo tudi vprašanje ravninskosti londonskih grafov – križanje povezav namreč lahko vodi do zmede pri prikazu rezultatov. Ker se za testiranje uporablja le londonski stolp s tremi palicami, se bomo tudi pri obravnavi ravninskosti omejili na ta primer, torej naj bo $p = 3$.

Najprej si poglejmo problem za dve krogli ($n = 2$): vsi grafi so ravninski, kot je prikazano na sliki.

Preden si ogledamo problem za $n = 3$, se spomnimo operacije *subdivizije*: vzamemo neko povezavo e grafa in na sredino te povezave dodamo še eno vozlišče. Ta operacija ohranja ravninskost. Graf torej zagotovo ni ravninski, če vsebuje subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$ (ta dva grafa nista ravninska); zanimivo pa je, da velja tudi obratno.

Izrek 4.2 (Kuratowski)**.** *Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$.*

Trditev 4.3. *Naj bo $p = 3$. Tedaj so londonski grafi $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3$ in L_{133}^3 ravninski.*

Oris dokaza. Za $n = 3$ dobimo sledečo shemo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & L & & & & \\
 & & \| & & & & \\
L_{122}^3 & \subset & L_{123}^3 & \subset & L_{133}^3 & & \\
\cap & & \cap & & \cap & & \\
L_{222}^3 & \subset & L_{223}^3 & \subset & L_{233}^3 & \subset & L_{333}^3 \\
 & & & & & & \| \\
 & & & & & & O_3^3
\end{array}
$$

Dokazati moramo še, da londonski grafi za $n \geq 4$ niso ravninski. Pri tem upoštevamo, da nekateri grafi z $n = 4$ vsebujejo nekatere neravninske grafe, v nekaterih moramo pa ponovno poiskati subdivizijo $K_{3,3}$. S tem ugotovimo, da noben londonski graf za $n = 4$ ni ravninski, zato niso ravninski tudi grafi za $n > 4$. $\square$

4.3 Simetrije

Simetrije londonskega grafa so posledica permutacij barv krogel in permutacij palic enake višine.

Za učinkovitejšo preučevanje simetrij večjih londonskih grafov definirajmo grupo $(\Gamma_{np}, \cdot, 1_{np})$, pri čemer velja $\Gamma_{np} = S_n \times S_p$; grupa S_n bo pri tem predstavljala vse možne permutacije (barv) krogel, S_p pa vse možne permutacije palic. Operacijo $\cdot$ definiramo takole:

$$(\chi_1, \pi_1) \cdot (\chi_2, \pi_2) = (\chi_1 \circ \chi_2, \pi_1 \circ \pi_2),$$

enota pa je kar urejen par enot grupe S_n (označimo jo z id_n) in S_p (označimo jo z id_p), velja torej $1_{np} = (\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_p)$. Enostavno lahko preverimo, da za tako definirano operacijo $\cdot$ in enoto 1_{np} res dobimo grupo.

Sedaj lahko definiramo delovanje te grupe na množici vozlišč (stanj) nekega londonskega grafa $V(L_h^n)$. Označimo neko stanje krogel z $s = \Sigma_1| \dots |\Sigma_p$, kjer $|$ ponovno označuje začetek naslednje palice, Σ_i pa je niz, sestavljen iz oznak krogel na i-ti palici; krogle kot ponavadi naštevamo od vrha palice navzdol. Grupa Γ_{np} sedaj deluje na poljubno stanje s iz množice vozlišč takole:

$$(\chi, \pi).s = \mathrm{X}\left(\Sigma_{\pi^{-1}(1)}| \dots |\Sigma_{\pi^{-1}(p)}\right),$$

pri čemer je X preslikava, ki ustrezno permutira barve krogel glede na χ. To je res delovanje, saj očitno velja $1_{np}.s = s$ za vsak $s \in V(L_h^n)$, enostavno pa lahko preverimo, da velja tudi

$$((\chi_1, \pi_1) \cdot (\chi_2, \pi_2)).s = (\chi_1, \pi_1).((\chi_2, \pi_2).s).$$

Iz osnovne teorije grup vemo, da lahko na množici stanj definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ takole:

$$s_1 \sim s_2 \iff \exists (\chi, \pi) \in \Gamma_{np}\colon\ s_2 = (\chi, \pi).s_1,$$

množica stanj razpade na ekvivalenčne razrede, ki so kar orbite. Ekvivalentna so torej tista stanja krogel, ki so v isti orbiti.

Če upoštevamo simetrije krogel in palic, imamo pri problemu O_2^3 pravzaprav le dve razporeditvi krogel, ki nista ekvivalentni, in sicer:

- obe krogli sta na isti palici (prikazano na sliki levo),
- krogli nista na isti palici (prikazano na sliki desno).

Množica stanj tega problema torej razpade na dva ekvivalenčna razreda. Sedaj lahko npr. povprečno ekscentričnost vozlišč izračunamo tako, da ugotovimo ekscentričnost nekega predstavnika teh dveh ekvivalenčnih razredov, recimo $\epsilon(12||) = 4$ in $\epsilon(1|2|) = 3$, iz česar lahko sklepamo, da je povprečna ekscentričnost v grafu enaka $\bar{\epsilon}(O_3^2) = 3.5$. Na podoben način lahko izračunamo tudi povprečno razdaljo med dvema vozliščema v grafu.

S pomočjo zgornje teorije lahko sedaj dokažemo naslednjo trditev za londonski graf L_{222}^3:

Trditev 4.4. *Množica stanj londonskega grafa* L^3_{222}*, katere velikost je* 42*, razpade v* 2 *ekvivalenčna razreda; prvi je velikosti* 6*, drugi pa* 36*. Minimalna stopnja vozlišč tega grafa je* 3*, maksimalna* 6*, povprečna pa* ≈ 3.43*. Premer tega grafa je* 5*, povprečna razdalja med dvema vozliščema pa* ≈ 3.31*.*

Oris dokaza. Pomagamo si z znanim dejstvom iz teorije grup o tem, da je moč grupe enaka moči orbite krat moči stabilizatorja elementa in z Burnsidovo lemo, ki pravi, da je število orbit enako povprečnemu številu negibnih točk. $\square$