Problem londonskega stolpa

Ines Meršak

16. 11. 2015

1 Klasični problem londonskega stolpa

Ta problem je izumil Tim Shallice, profesor nevropshilogije, leta 1982 – od takrat dalje se londonski stolp pogosto uporablja v psihologiji za preučevanje stanja bolnikov.

Problem je sledeči:

- imamo 3 enako velike krogle različnih barv (recimo modra, rdeča, rumena)
- poleg tega imamo 3 palice različnih velikosti; na prvo lahko postavimo samo eno kroglo, na drugo dve, na tretjo tri
- cilj igre je priti iz trenutnega stanja v neko dano stanje z minimalnim številom potez
- najboljši način za vizualizacijo tega problema je s pomočjo grafa - zato si najprej poglejmo nekaj osnovnih definicij

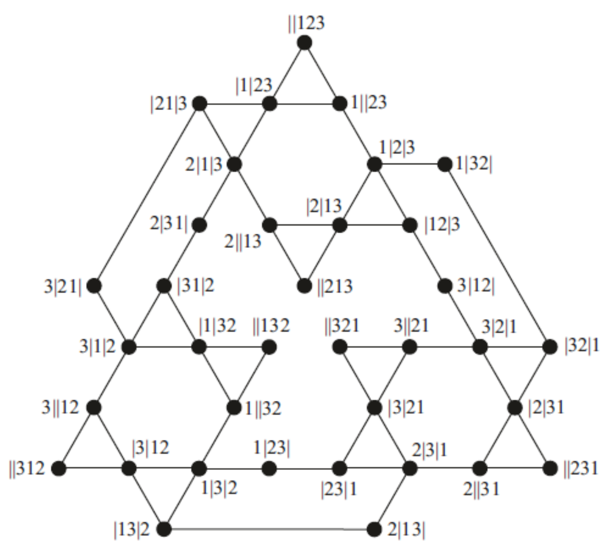
1.1 Osnovne definicije teorije grafov

- graf $G = (V, E)$ je urejen par, kjer je V množica vozlišč grafa in E množica neurejenih parov vozlišč (te elemente imenujemo povezave); vozlišča predstavimo kot točke v ravnini, povezave pa kot krivulje med njimi
- u in v sta *sosednji vozlišči*, če obstaja povezava med njima
- *soseščina* vozlišča u je $N(u) = \{x \in V;\ ux \in E\}$

- *stopnja* vozlišča u: $\deg u = |N(u)|$ je število sosedov tega vozlišča
- *sprehod* v grafu je zaporedje vozlišč $v_1, \ldots v_k$, da za vsak i velja $v_i v_{i+1} \in E$
- graf je *povezan*, če za poljuben par vozlišč obstaja sprehod med njima
- *diameter* grafa je maksimalno število povezav, ki jih moramo prepotovati, da pridemo od poljubnega vozlišča do nekega drugega vozlišča v temu grafu, pri čemer jemljemo najkrajše možne poti; če vzamemo poljubno vozlišče v grafu, potem lahko pridemo do drugega poljubnega vozlišča preko d ali manj povezav, kjer je d diameter grafa
- *ravninski* graf je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini brez križanja povezav
- pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča, je *Hamiltonova pot*

1.2 Graf klasičnega problema londonskega stolpa

Označimo krogle s številkami 1, 2, 3, pri čemer je npr. krogla 1 modra, krogla 2 rdeča, krogla 3 pa rumena. Začetek naslednje palice bomo nakazali z $|$, krogle pa bomo naštevali od vrha proti dnu palice. Na primer: stanja na prejšnji sliki so $||123$ in $1|3|2$.



1.2.1 Lastnosti grafa

- 36 vozlišč (36 možnih stanj)
- utežene stopnje vozlišč (12 vozlišč stopnje 2, 3, 4)
- diameter grafa je 8
- z lahkoto lahko preverimo minimalno število potez za rešitev problema s prejšnje slike
- ravninski (narisan je v ravnini, povezave se nikjer ne križajo)
- vsebuje Hamiltonovo pot

2 Posplošen londonski stolp

Graf klasičnega problema je majhen, možnih stanj je malo, zato je za testiranje zdravih ljudi naloga prelahka; Jenny R. Tunstall je prva predlagala razširitev na 4 krogle s podaljšanimi palicami (vsaka je podaljšana za eno enoto).

Poglejmo si posplošitev tega problema na p palic in n krogel različne barve, pri čemer je $p \geq 3$ in $n \geq 2$. Vsako palico označimo s številom $k \in [p]$, pri čemer je h_k višina palice (ta predstavlja število krogel, ki jih drži palica). Krogle označimo z 1 do n – te lahko razporejamo na palice. Veljati mora $n \leq \sum_{k=1}^{p} h_k$. Poteza je veljavna, če vrhnjo kroglo neke palice prestavimo na vrh druge, pod pogojem, da je na tej palici manj kot h_k krogel.

Vsako stanje krogel lahko enolično predstavimo s permutacijo $s \in S_{n+p}$, S je simetrijska grupa. Pri tem je s_i položaj krogle i, če $i \in [n]$, ali dna palice $i-n$, če je $i \in [n+p] \setminus [n]$. Položaje beremo od vrha palice proti dnu in z leve proti desni za palice (kot pri klasičnem problemu). s bomo zapisali v obliki $\sum_1 | \dots | \sum_p$, kjer je $\sum_k$ niz oznak krogel v položajih od $s_{n+k-1}+1$ do $s_{n+k}-1$ od vrha palice navzdol. $s_{n+0} = 0$ in ne s_n. Vertikalne pipe spet označujejo začetek dna palice.

Definicija 2.1. $p \geq 3,\ n \geq 2,\ h \in [n]^p,\ \sum_{k=1}^{p} h_k \geq n$. (h je tukaj nek vektor / niz višin)
Množica vozlišč Londonskega grafa, označimo ga z L_h^n, je sestavljena iz vseh $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p]:\ 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1,\ s_{n+p} = n + p.$$

Vsaka povezava Londonskega grafa je sestavljena iz takega para vozlišč, da lahko s pomočjo ene veljavne poteze pridemo iz stanja, ki pripada prvemu vozlišču, v stanje, ki pripada drugemu vozlišču.

BŠS $h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq h_p$.

Dve lastnosti, pomembni za uporabo londonskega stolpa v psihologiji, sta povezanost in ali je graf ravninski.

Potreben pogoj za povezanost Londonskega grafa je

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Namreč, možna mora biti razporeditev krogel, kjer najdaljša palica ostane prazna. Če so ostale palice zapolnjene, s tiste palice namreč ne moremo več premakniti nobene krogle.

To je lep primer potrebnega pogoja, ki je tudi zadosten.

Izrek 2.2. *Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj*

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

3 Uporaba

- problem londonskega stolpa je bil razvit z namenom merjenja sposobnosti načrtovanja in reševanja problemov v bolnikih s poškodbami čelnega režnja možganov
- slabo reševanje londonskega stolpa se interpretira kot nezmožnost učinkovitega načrtovanja
- uporabljen za ocenjevanje napredka bolezni pri bolnikih z Alzheimerjevo in Parkinsonovo boleznijo
- uporabljen za opazovanje vedenja majhnih otrok pri reševanju problemov