

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Ines Meršak

Problem londonskega stolpa

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Ljubljana, 2016

KAZALO

1. Uvod	4
2. Osnovni pojmi teorije grafov	4
2.1. Povezanost grafa	6
2.2. Hamiltonovi grafi	6
2.3. Ravninski grafi	6
3. Klasični problem londonskega stolpa	8
4. Posplošeni londonski stolp	9
4.1. Definicija in osnovne lastnosti	9
4.2. Oxfordski graf	10
4.3. Ravninskost londonskega grafa	11
4.4. Simetrija londonskega stolpa	11
Slovar strokovnih izrazov	11
Literatura	11

Problem londonskega stolpa

POVZETEK

V povzetku na kratko opiši vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

The Tower of London problem

ABSTRACT

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2010): navedi vsaj eno klasifikacijsko oznako – dostopne so na www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html

Ključne besede: navedi nekaj ključnih pojmov, ki nastopajo v delu

Keywords: angleški prevod ključnih besed

1. UVOD

Test londonskega stolpa je ena izmed variacij Hanojskih stolpov. Izumil ga je britanski nevropsiholog Tim Shallice leta 1982. Pogosto je uporabljen v psihologiji, saj s pomočjo te igre ugotavljajo stanje pacientove psihe, opazujejo pa lahko tudi napredek bolezni pri npr. Parkinsonovih bolnikih. [3]

Osnovna verzija londonskega stolpa vsebuje tri enako velike krogle različnih barv in tri palice. Na prvo palico lahko postavimo samo eno kroglo, na drugo le dve krogli, na tretjo pa tri. Cilj igre je priti iz nekega danega stanja v neko drugo željeno stanje s čim manj koraki. Stanja (in prehode med njimi) lahko opišemo s pomočjo teorije grafov.

Diplomska naloga je razdeljena na tri dele: v prvem delu bom najprej opisala vse pojme, navedla (in nekatere tudi dokazale) vse trditve, izreke in posledice teorije grafov, ki mi bodo v pomoč pri obravnavi problema londonskega stolpa. V drugem delu bom podrobneje opisala klasični londonski stolp in lastnosti pripadajočega grafa, v zadnjem delu pa bom obravnavala posplošeni problem londonskega stolpa.

2. OSNOVNI POJMI TEORIJE GRAFOV

Vsa možna stanja londonskega stolpa in prehode med njimi lahko zelo elegantno opišemo s pomočjo grafov, zato si najprej pogledjmo nekaj osnovnih pojmov teorije grafov.

Definicija 2.1. Graf G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ končna množica vozlišč, $E(G)$ pa množica povezav grafa. Povezave so predstavljene kot neurejeni pari vozlišč (neusmerjeni grafi).

Obstajajo variacije zgornje definicije, graf je lahko npr. usmerjen (povezave so urejeni pari) – tedaj govorimo o *digrafi*, ima neskončno število vozlišč ali pa več povezav med dvema vozliščema. Dopuščamo lahko tudi zanke: to je povezava oblike $\{v, v\}$, pri čemer je v vozlišče.

Vozlišča grafa predstavimo s točkami v ravnini, povezavo med dvema vozliščema pa kot enostavno krivuljo med ustreznima točkama v ravnini. Preslikavi, ki grafu priredi ustrezne točke in krivulje v ravnini, pravimo *risba grafa* (včasih pa s tem mislimo kar na predstavitev grafa v ravnini).

SLIKA 1. Možna predstavitev grafa v ravnini.

Če je $e = \{u, v\}$ povezava, tedaj sta u in v *krajišči* povezave e , pišemo tudi $e = uv$; rečemo, da sta u in v *sosednji vozlišči*.

Definicija 2.2. Soseščina vozlišča u je množica vseh sosednjih vozlišč vozlišča u :

$$N(u) = \{x: ux \in E(G)\}.$$

Stopnja vozlišča u je število vseh vozlišč, ki so mu sosednji: $\deg u = |N(u)|$.

Primer 2.3. Naj bo graf G podan z

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E(G) = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}.$$

Soseščina vozlišča 5 je $N(5) = \{1, 2, 3\}$.

◇

SLIKA 2. Graf G .

Definicija 2.4. Graf $H = (V(H), E(H))$ je *podgraf* grafa $G = (V(G), E(G))$, če velja

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ in } E(H) \subseteq E(G).$$

Podgraf H grafa G je *inducirani* podgraf, če za vsaki dve vozlišči $x, y \in V(H)$ velja: $xy \in E(G) \implies xy \in E(H)$.

Primer 2.5. Če vzamemo graf G iz prejšnjega primera 2.3, potem je graf H , ki ima

$$V(H) = \{2, 3, 4, 5\}, \quad E(H) = \{\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$$

induciran podgraf grafa G .

SLIKA 3. Graf H je induciran podgraf grafa G .

◇

Poglejmo si nekaj razredov grafov, ki nam bodo prišli prav v kasnejših definicijah.

Pot na n vozliščih je graf, ki ima dve vozlišči stopnje 1, medtem ko so preostala vozlišča stopnje 2.

Cikel na n vozliščih (označimo ga s C_n) je graf, ki ga dobimo iz poti na n vozliščih tako, da dodamo povezavo med vozliščema stopnje 1.

Polni graf na n vozliščih (označimo ga s K_n) je graf, za katerega velja

$$uv \in E(K_n) \quad \forall u, v \in V(K_n).$$

Z besedami, vsa vozlišča polnega grafa so med sabo povezana.

SLIKA 4. Primer poti (levo), cikla (sredina) in polnega grafa (desno) na šestih vozliščih.

Definicija 2.6. Graf G je *dvodelen*, če lahko množico njegovih vozlišč razbijemo na dva dela (V_1, V_2) tako, da ima vsaka povezava grafa G eno krajišče v V_1 in drugo v V_2 .

Pri polnem dvodelnem grafu z n vozlišči v prvi množici, recimo ji V_1 , in m vozlišči v drugi množici, recimo ji V_2 , je vsako vozlišče iz množice V_1 povezano z vsakim iz V_2 , medtem ko znotraj množic vozlišča niso povezana. Tak graf označimo s $K_{n,m}$.

SLIKA 5. Na sliki je polni dvodelni graf $K_{2,4}$.

Definicija 2.7. Naj bosta $G = (V(G), E(G))$ in $H = (V(H), E(H))$ grafa. Preslikava $f: V(G) \rightarrow V(H)$ je *izomorfizem*, če je bijektivna in velja

$$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H), \quad \forall u, v \in V(G).$$

Grafa G in H sta *izomorfna*, če obstaja izomorfizem $G \rightarrow H$. Oznaka: $G \cong H$.

Pot v grafu G je podgraf grafa G , ki je izomorfen poti. *Cikel v grafu* G je podgraf grafa G , ki je izomorfen ciklu.

SLIKA 6. Enostaven sprehod in pot v grafu, ki jo inducira.

2.1. Povezanost grafa. *Sprehod* v grafu G je zaporedje vozlišč v_1, v_2, \dots, v_k , tako da velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$, pri čemer je $1 \leq i \leq k-1$. Če označimo $x = x_1$ in $y = x_k$, potem takemu sprehodu rečemo x, y -sprehod.

Sprehod je *enostaven*, če so vsa njegova vozlišča različna. Enostaven sprehod inducira podgraf, ki je izomorfen poti (torej pot v grafu).

Naj bo G graf in \sim relacija, definirana na kartezičnem produktu $V(G) \times V(G)$:

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, y\text{-sprehod}.$$

Preprosto lahko preverimo, da je relacija \sim ekvivalenčna. Sledi, da relacija \sim množico vozlišč grafa G razbije na ekvivalenčne razrede. Podgrafi, inducirani s temi razredi, so *komponente* grafa G .

Definicija 2.8. Graf je *povezan*, če ima le eno komponento. Povedano drugače, za poljuben par vozlišč mora obstajati sprehod med njima.

SLIKA 7. Povezan (levo) in nepovezan (desno) graf.

Če je G povezan graf, lahko definiramo *razdaljo* $d_G(u, v)$ med vozliščema u in v kot najmanjše možno število povezav na neki u, v -poti.

2.2. Hamiltonovi grafi. Eno izmed zanimivih vprašanj v teoriji grafov je, ali je možno najti neko pot/cikel v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča tega grafa. S tem problemom se je ukvarjal tudi Hamilton, po katerem so take poti in cikli poimenovani; njega je zanimalo predvsem, ali je mogoče poiskati cikel, ki vsebuje vsa vozlišča, v dodekaedru [4].

Definicija 2.9. Pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča tega grafa, se imenuje *Hamiltonova pot*. *Hamiltonov cikel* nekega grafa G je cikel v G , ki poteka skozi vsa vozlišča tega grafa. Graf je *Hamiltonov*, če vsebuje Hamiltonov cikel.

Za Hamiltonove grafe velja naslednji izrek, ki je tudi potrební pogoj za to, da graf vsebuje Hamiltonov cikel.

Izrek 2.10. Naj bo G Hamiltonov graf. Za vsako podmnožico vozlišč $X \subseteq V(G)$ velja, da ima graf $G \setminus X$ kvečjemu $|X|$ komponent.

Dokaz.

□

2.3. Ravninski grafi. V diplomski nalogi se bom ukvarjala tudi s tem, kdaj je graf, s pomočjo katerega predstavimo londonski stolp, ravninski.

Definicija 2.11. Graf je *ravninski*, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne križata.

Če je graf narisán v ravnini brez križanja povezav, rečemo, da je graf vložen v ravnino.

SLIKA 8. Ravninskost grafa K_4 ni očitna.

Hitro lahko vidimo, da grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska (poskusimo ju narisati v ravnini, a kmalu ugotovimo, da to ne bo mogoče). To dejstvo sledi tudi kot posledica ene izmed posledic Eulerjeve formule.

Za začetek moramo najprej definirati *lica vložitve*. To so sklenjena območja, ki jih omejuje risba grafa, vložnega v ravnino.

Izrek 2.12 (Eulerjeva formula). *Naj bo G povezan ravninski graf z n vozlišči in m povezavami. Naj ima risba grafa G , vložnega v ravnino, f lic. Potem velja*

$$n - m + f = 2.$$

Eulerjevo formulo dokažemo z indukcijo na število povezav, zaradi jedrnatosti besedila bomo dokaz tukaj izpustili. Oglejmo si raje posledico Eulerjeve formule:

Posledica 2.13. *Če je G ravninski graf na n vozliščih in m povezavah, velja*

$$(1) \quad m \leq 3n - 6.$$

Če G ne vsebuje trikotnikov, pa velja formula

$$(2) \quad m \leq 2n - 4.$$

Dokaz. Če za vsako lice upoštevamo le tri povezave (to je minimalno število povezav, ki omejujejo lice), bomo dobili kvečjemu manj, kot če preštejemo vse povezave dvakrat. Torej velja neenakost

$$3f \leq 2m.$$

Če iz Eulerjeve formule izrazimo f in ga vstavimo v zgornjo neenakost, dobimo

$$3 \cdot (2 - n + m) \leq 2m$$

$$6 - 3n + 3m \leq 2m$$

$$m \leq 3n - 6$$

□

Z uporabo zgornje formule, ki torej mora veljati, če je graf ravninski, lahko dokažemo:

Posledica 2.14. K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska grafa.

Dokaz. Polni graf na petih vozliščih K_5 ima $\binom{5}{2} = 10$ povezav. n je torej v tem primeru enak 5, m pa je 10. Če bi bil K_5 ravninski, bi morala veljati formula 1, a temu ni tako:

$$10 = m \not\leq 3n - 6 = 9$$

Torej K_5 ni ravninski.

Podobno lahko pokažemo tudi za poln dvodelni graf $K_{3,3}$, pri čemer je n enak 6, število povezav m pa 9. Če bi bil ta graf ravninski, bi morala veljati formula 2, a to ne drži:

$$9 = m \not\leq 2n - 4 = 8.$$

Graf $K_{3,3}$ torej ni ravninski.

□

Sedaj želimo ugotoviti, kakšnim pogojem mora ustrezati graf, da bo ravninski. Očitno velja naslednja trditev:

Trditev 2.15. *Če je graf ravninski, potem je tudi vsak njegov podgraf ravninski.*

Operacija "podgraf" torej ohranja ravninskost grafa. Pogledali si bomo še operacijo *subdivizije*, ki prav tako ohranja lastnost ravninskosti.

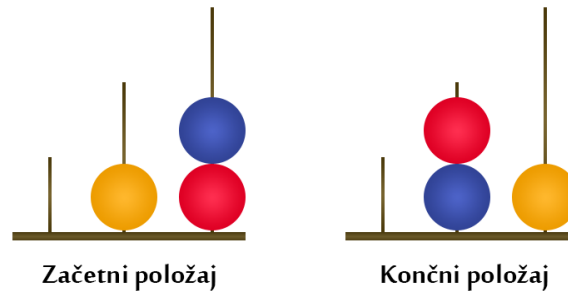
Definicija 2.16. Graf H je *subdivizija* grafa G , če ga lahko dobimo iz G tako, da povezave grafa G nadomestimo s paroma notranje disjunktne poti.

Iz definicije je razvidno, da je tak H ravninski natanko tedaj, ko je G ravninski. Iz tega dejstva, trditve 2.15 in posledice 2.14 lahko zaključimo, da graf zagotovo ni ravninski, če vsebuje subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$. Zanimivo pa je, da velja tudi obratno; dokaz tega dejstva je netrivialen in ga lahko najdemo v [TODO vir].

Izrek 2.17 (Kuratowski). *Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$.*

3. KLASIČNI PROBLEM LONDONSKEGA STOLPA

Pri klasičnem londonskem stolpu imamo tri enako velike krogle različnih barv in tri palice različnih velikosti: na prvo lahko postavimo eno kroglo, na drugo dve, na tretjo pa tri (temu bomo rekli, da imajo palice višine 1, 2 in 3). Cilj igre je priti iz nekega začetnega stanja v neko vnaprej določeno končno stanje.



SLIKA 9. Na sliki sta prikazani dve možni stanji londonskega stolpa.

Stanja in prehode med njimi si najlažje predstavljamo, če narišemo graf. V ta namen vpeljemo naslednje oznake: krogle bomo označili s števkami 1, 2, 3 – npr. modra krogla naj ima oznako 1, rdeča 2, rumena pa 3 – s simbolom “|” pa bomo označili konec prejšnje palice in začetek nove. Krogle bomo naštevili od vrha palice navzdol.

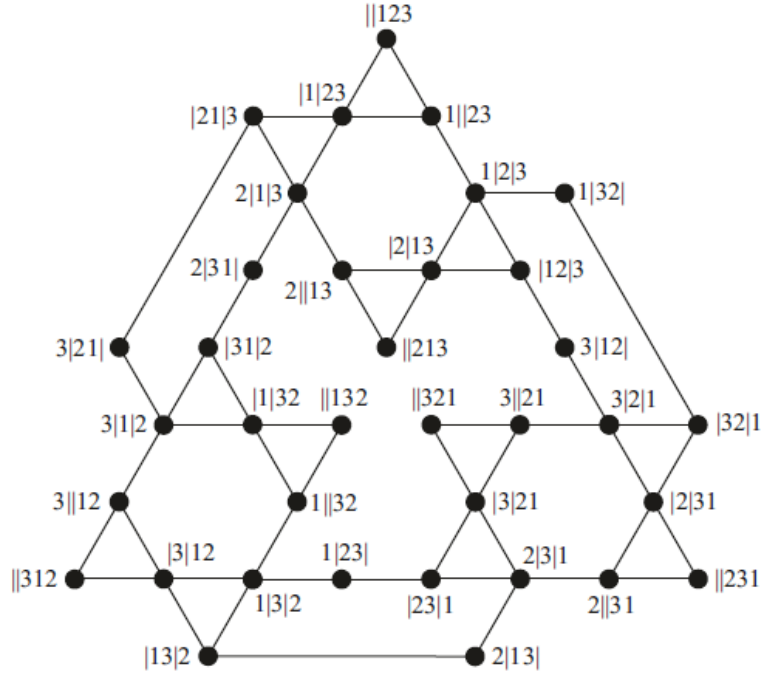
Primer 3.1. Začetno stanje na sliki 9 lahko torej opišemo z $|3|12$, končno stanje pa z $|21|3$. \diamond

S pomočjo teh oznak lahko opišemo vsako možno stanje in narišemo graf londonskega stolpa (označimo ga z L), pri čemer so vozlišča stanja, povezave pa so med tistimi stanji, med katerimi lahko prehajamo z eno potezo (enim veljavnim premikom krogle).

Lema 3.2. *Število vseh možnih stanj klasičnega londonskega stolpa je 36.*

Dokaz. Najprej si oglejmo vse možne postavitve krogel, pri čemer se ne oziramo na barvo. Imamo dve možnosti:

- (1) **Na prvi (najkrajši) palici je krogla.** Preostali dve krogli lahko razdelimo na drugi dve palici tako, da:
 - je prazna druga palica,
 - je prazna tretja palica,
 - ima vsaka palica po eno kroglo.



SLIKA 10. Graf L klasičnega Londonskega stolpa.

Torej imamo v tem primeru tri možnosti.

- (2) **Na prvi (najkrajši) palici ni krogle.** Na drugi dve palici moramo torej razdeliti vse tri krogle. Ponovno imamo tri možnosti:
- druga palica je prazna, tretja palica pa polna (na njej so tri krogle),
 - na drugi palici je ena krogla, na tretji palici pa dve krogli,
 - druga palica je polna (na njej sta dve krogli), na tretji palici pa je ena krogla.

Po pravilu vsote imamo torej, če se ne oziramo na barve krogel, $3 + 3 = 6$ možnih postavitvev krogel. V vsaki od teh lahko še premešamo barve krogel, torej imamo za vsako postavitvev $3!$ možnosti. Sledi, da je vseh možnih stanj $3! \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$. \square

Iz leme sledi, da ima L ima 36 vozlišč. Graf je očitno ravninski, saj je na sliki 10 narisano v ravnini brez križanja povezav. Hitro vidimo tudi, da je 12 vozlišč grafa L stopnje 2, drugih 12 je stopnje 3, zadnjih 12 pa stopnje 4.

Primer 3.3. S pomočjo grafa na sliki 10 lahko hitro ugotovimo, da za prehod med stanjema na sliki 9 potrebujemo minimalno 4 poteze in da je to edino najkrajše možno zaporedje potez. \diamond

Trditev 3.4. Graf L vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.

Dokaz. TODO. \square

4. POSPLOŠENI LONDONSKI STOLP

4.1. Definicija in osnovne lastnosti.

Definicija 4.1. Za londonski graf L_h^n , kjer je $p \geq 3$, $n \geq 2$, $h \in [n]^p$, $\sum_{k=1}^p h_k \geq n$ velja:

- vozlišča so vse permutacije $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p] : 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \quad s_{n+p} = n + p,$$

- vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani

Potreben pogoj za povezanost londonskega grafa je

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Izrek 4.2. *Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj*

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

4.2. Oxfordski graf. *Oxfordski graf* je poseben primer londonskega grafa, za katerega velja, da so vse palice velikosti n , pri čemer je n število krogel. Oxfordski graf označimo z O_p^n , zanj torej velja $O_p^n := L_{n^p}^n$.

Medtem ko je v splošnem težko določiti število vozlišč londonskega grafa, pa je to precej bolj preprosto za oxfordski graf. Še več, določimo lahko tudi število povezav.

Trditev 4.3. *Število vozlišč oxfordskega grafa O_p^n je enako*

$$\frac{(n + p - 1)!}{(p - 1)!}.$$

Dokaz. Iščemo število vseh možnih stanj pri oxfordskem stolpu, saj je ta enaka številu vozlišč oxfordskega grafa. Podobno kot pri dokazu števila stanj klasičnega londonskega stolpa najprej pozabimo na različne barve krogel (delamo se, da so krogle enake) in se osredotočimo samo na njihovo postavitve.

Na koliko načinov lahko n enakih krogel razvrstimo na p palic višine n ? Pri tem nimamo nobenih omejitev, saj so palice dovolj visoke, da lahko vse krogle postavimo tudi na eno samo palico. Lahko si predstavljamo, da imamo vse krogle zložene v vrsto, označene naj bodo z 0, nato pa na poljubna mesta (s ponavljanjem) vrivamo 1, ki naj pomeni konec neke palice in začetek neke druge. Ko vrinemo $p - 1$ enic, smo določili p palic in s tem razporeditev krogel.

Sedaj lahko na problem pogledamo malo drugače: na $n + p - 1$ mest razporejamo n ničel, ki predstavljajo krogle, in $p - 1$ enic, ki predstavljajo začetek nove palice. Če razporedimo vse enice, bodo na vsa preostala mesta prišle ničle, razporeditev bo s tem določena. $p - 1$ mest izmed $n + p - 1$ položajev lahko izberemo na $\binom{n+p-1}{p-1}$ načinov. S tem je položaj krogel na palicah točno določen, torej imamo $\binom{n+p-1}{p-1}$ vseh možnih razporeditev, če privzamemo, da so krogle enake.

Ker je vsaka krogla drugačne barve, imamo za vsako razporeditev še $n!$ možnih permutacij barv. Število vseh stanj, in zato tudi število vozlišč je tako enako

$$n! \cdot \binom{n + p - 1}{p - 1} = n! \cdot \frac{(n + p - 1)!}{n!(p - 1)!} = \frac{(n + p - 1)!}{(p - 1)!}.$$

□

Trditev 4.4. *Število povezav oxfordskega grafa O_p^n je enako*

$$\frac{np(p-2+n)!}{2(p-2)!}.$$

4.3. Ravninskost londonskega grafa.

Trditev 4.5. *Naj bo $p = 3$. Tedaj so londonski grafi $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3$ in L_{133}^3 ravninski.*

4.4. Simetrija londonskega stolpa.

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

LITERATURA

- [1] A. M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović in C. Petr, *The Tower of Hanoi – Myths and Maths*, Birkhäuser, Basel, 2013.
- [2] P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne Matematike I*, 1. izdaja, [ogled 29. 12. 15], dostopno na <http://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf>
- [3] *Tim Shallice*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 8. 10. 2015], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Tim_Shallice.
- [4] *Hamiltonian path*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 28. 12. 2015], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path.