VEČ V 1. POGLAVJU!

1. Uvod

Test londonskega stolpa je ena izmed variacij igre Hanojsk~~ih~~ega stolp~~ov~~a. Izumil ga je britanski nevropsiholog Tim Shallice leta 1982. Pogosto je uporabljen v psihologiji, saj s pomočjo te igre ugotavljajo stanje pacientove psihe, opazujejo pa lahko tudi napredek bolezni pri npr. Parkinsonovih bolnikih [5].

Osnovna verzija londonskega stolpa vsebuje tri enako velike krogle različnih barv in tri palice. Na prvo palico lahko postavimo samo eno kroglo, na drugo le dve krogli, na tretjo pa tri. Cilj igre je priti iz nekega danega stanja v neko drugo želeno stanje s čim manj koraki. ~~Stanja (in prehode med njimi) lahko opišemo s pomočjo teorije grafov.~~

1. oseba množine, tako kot je v nadaljevanju

Diplomska naloga je razdeljena na tri dele: v prvem delu bom najprej opisala vse pojme, navedla (in nekatere tudi dokazale) vse trditve, izreke in posledice teorije grafov, ki mi bodo v pomoč pri obravnavi problema londonskega stolpa. V drugem delu bom podrobneje opisala klasični londonski stolp in lastnosti pripadajočega grafa, v zadnjem delu pa bom obravnavala posplošeni problem londonskega stolpa.

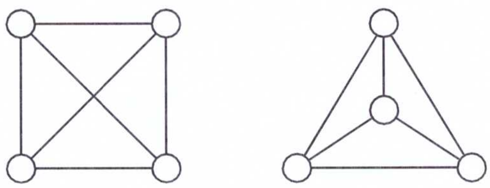
2. Osnovni pojmi teorije grafov

Vsa možna stanja londonskega stolpa in prehode med njimi lahko zelo elegantno opišemo s pomočjo grafov, zato si najprej poglejmo nekaj osnovnih pojmov teorije grafov.

Definicija 2.1. *Graf* G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ končna množica *vozlišč*, $E(G)$ pa množica *povezav* grafa. Povezave so predstavljene kot neurejeni pari vozlišč (neusmerjeni grafi).

Obstajajo variacije zgornje definicije, graf je lahko npr. usmerjen (povezave so urejeni pari) – tedaj govorimo o *digrafih*, ima neskončno število vozlišč ali pa več povezav med dvema vozliščema. Dopuščamo lahko tudi zanke: to je povezava oblike $\{v, v\}$, pri čemer je v vozlišče.

Vozlišča grafa predstavimo s točkami v ravnini, povezavo med dvema vozliščema pa kot enostavno krivuljo med ustreznima točkama v ravnini. Preslikavi, ki grafu priredi ustrezne točke in krivulje v ravnini, pravimo *risba grafa* (včasih pa s tem mislimo kar na predstavitev grafa v ravnini). Graf ima lahko več različnih možnih risb – razlikujejo se lahko npr. po tem, katere točke priredimo katerim vozliščem.



Slika 1. Možni predstavitvi nekega grafa v ravnini.

Če je $e = \{u, v\}$ povezava, tedaj sta u in v *krajišči* povezave e, pišemo tudi $e = uv$; rečemo, da sta u in v *sosednji vozlišči*.

Definicija 2.2. *Soseščina* vozlišča u je množica vseh sosednjih vozlišč vozlišča u:

$$N(u) = \{x \colon ux \in E(G)\}.$$

Stopnja vozlišča u je število vseh vozlišč, ki so mu sosednji: $\deg u = |N(u)|$.

TUKAJ

Če imamo podano stopnjo vseh vozlišč grafa, lahko na enostaven način izračunamo število povezav tega grafa, velja sledeča lema:

Lema 2.3. (Lema o rokovanju) *Za vsak graf $G = (V(G), E(G))$ velja formula*

$$\sum_{u \in V(G)} \deg u = 2 \cdot |E(G)|. \tag{1}$$

Dokaz. Naredimo si tabelo vozlišč in povezav:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \dots & e_j & \dots \\
\hline
\vdots & & \vdots & \\
v_i & \dots & 1 \,/\, 0 & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

V prvem stolpcu so našteta vozlišča grafa, v prvi vrstici pa povezave. Na mestu i, j v tabeli zapišemo enico, če je vozlišče v_i eno izmed krajišče povezave e_j, in ničlo v nasprotnem primeru.

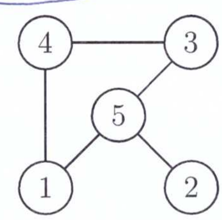
Vemo, da ima vsaka povezava dve krajišči, torej sta v vsakem stolpcu natanko dve enici. Če po drugi strani pogledamo število enic v neki vrstici i, nam to pove ravno stopnjo vozlišča v_i. Ker mora biti rezultat enak, če seštejemo ničle in enice po stolpcih oziroma po vrsticah, sledi formula (1). □

Primer 2.4. Naj bo graf G podan z

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E(G) = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}.$$

Soseščina vozlišča 5 je $N(5) = \{1, 2, 3\}$.

Njegova risba je podana na Sliki 2:



Slika 2. Graf G. ◇

Definicija 2.5. Graf $H = (V(H), E(H))$ je *podgraf* grafa $G = (V(G), E(G))$, če velja

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ in } E(H) \subseteq E(G).$$

Podgraf H grafa G je *inducirani* podgraf, če za vsaki dve vozlišči $x, y \in V(H)$ velja: $xy \in E(G) \implies xy \in E(H)$.

Primer 2.6. Če vzamemo graf G iz prejšnjega primera 2.4, potem je graf H, ki ima

$$V(H) = \{2, 3, 4, 5\}, \quad E(H) = \{\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$$

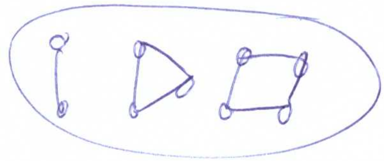
SKLIC NA SLIKO!

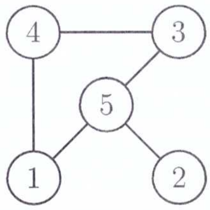
inducirani podgraf grafa G. ◇

Poglejmo si nekaj razredov grafov, ki nam bodo prišli prav v kasnejših definicijah.

Pot na n vozliščih je graf, ki ima dve vozlišči stopnje 1, medtem ko so preostala vozlišča stopnje 2.

Hmm: a je to pot?





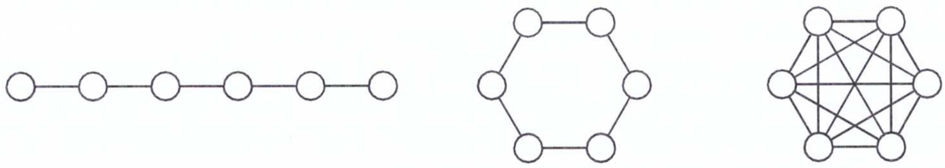
SLIKA 3. Graf H (označen z rdečo barvo) je induciran podgraf grafa G.

Cikel na n vozliščih (označimo ga s C_n) je graf, ki ga dobimo iz poti na n vozliščih tako, da dodamo povezavo med vozliščema stopnje 1.

Polni graf na n vozliščih (označimo ga s K_n) je graf, za katerega velja

$$uv \in E(K_n) \quad \forall u, v \in V(K_n).$$

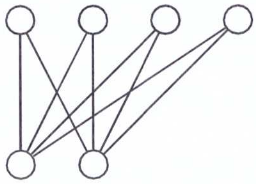
Z besedami, vsa vozlišča polnega grafa so med sabo povezana.



SLIKA 4. Primer poti (levo), cikla (sredina) in polnega grafa (desno) na šestih vozliščih.

Definicija 2.7. Graf G je *dvodelen*, če lahko množico njegovih vozlišč razbijemo na dva dela (V_1, V_2) tako, da ima vsaka povezava grafa G eno krajišče v V_1 in drugo v V_2.

Pri polnem dvodelnem grafu z n vozlišči v prvi množici, recimo ji V_1, in m vozlišči v drugi množici, recimo ji V_2, je vsako vozlišče iz množice V_1 povezano z vsakim iz V_2, medtem ko znotraj množic vozlišča niso povezana. Tak graf označimo s $K_{n,m}$.



SLIKA 5. ~~Na sliki je~~ Polni dvodelni graf $K_{2,4}$.

Definicija 2.8. Naj bosta $G = (V(G), E(G))$ in $H = (V(H), E(H))$ grafa. Preslikava $f\colon V(G) \to V(H)$ je *izomorfizem*, če je bijektivna in velja

$$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H), \quad \forall u, v \in E(G).$$

Grafa G in H sta *izomorfna*, če obstaja izomorfizem $G \to H$. Oznaka: $G \cong H$.

Pot v grafu G je podgraf grafa G, ki je izomorfen poti. *Cikel v grafu* G je podgraf grafa G, ki je izomorfen ciklu.

2.1. **Povezanost grafa.** *Sprehod* v grafu G je zaporedje vozlišč $v_1, v_2, \ldots, v_k$, tako da velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$, pri čemer je $1 \leq i \leq k-1$. Če označimo $x = x_1$ in $y = x_k$, potem takemu sprehodu rečemo x, y-sprehod.

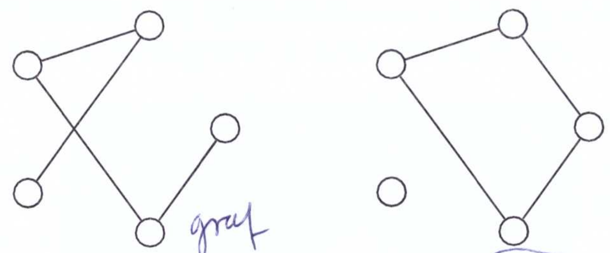
Sprehod je *enostaven*, če so vsa njegova vozlišča različna. Enostaven sprehod inducira podgraf, ki je izomorfen poti (torej pot v grafu).

Naj bo G graf in $\sim$ relacija, definirana na kartezičnem produktu $V(G) \times V(G)$:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\equiv} \exists\, x, y\text{-sprehod}.$$

Preprosto lahko preverimo, da je relacija $\sim$ ekvivalenčna. Sledi, da relacija $\sim$ množico vozlišč grafa G razbije na ekvivalenčne razrede. Podgrafi, inducirani s temi razredi, so *komponente* grafa G.

Definicija 2.9. Graf je *povezan*, če ima le eno komponento. Povedano drugače, za poljuben par vozlišč mora obstajati sprehod med njima.



graf

SLIKA 6. Povezan (levo) in nepovezan (desno) graf.

Če je G povezan graf, lahko definiramo *razdaljo* $d_G(u, v)$ med vozliščema u in v kot najmanjše možno število povezav na neki u, v-poti. Največjo možno razdaljo od danega vozlišča u do poljubnega vozlišča v grafu G imenujemo *ekscentričnost* vozlišča u.

vsemi

Definirajmo še *premer* grafa kot največjo minimalno razdaljo med pari vozlišč. Enostavneje povedano to pomeni: če vzamemo poljubno vozlišče v grafu, potem lahko pridemo do drugega poljubnega vozlišča preko d ali manj povezav, kjer je d premer grafa.

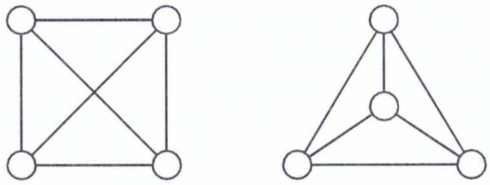
2.2. **Hamiltonovi grafi.** Eno izmed zanimivih vprašanj v teoriji grafov je, ali je možno najti neko pot/cikel v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča tega grafa. S tem problemom se je ukvarjal tudi Hamilton, po katerem so take poti in cikli poimenovani; njega je zanimalo predvsem, ali je mogoče poiskati cikel, ki vsebuje vsa vozlišča, v dodekaedru [6].

Definicija 2.10. Pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča tega grafa, se imenuje *Hamiltonova pot*. *Hamiltonov cikel* ~~nekega~~ grafa G je cikel v G, ki poteka skozi vsa vozlišča tega grafa. Graf je *Hamiltonov*, če vsebuje Hamiltonov cikel.

1. oseba množine (in povsod)

2.3. **Ravninski grafi.** V diplomski nalogi se bom ukvarjala tudi s tem, kdaj je graf, s pomočjo katerega predstavimo londonski stolp, ravninski.

Definicija 2.11. Graf je *ravninski*, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne križata – torej če obstaja risba grafa, kjer se nobeni dve povezavi ne križata.

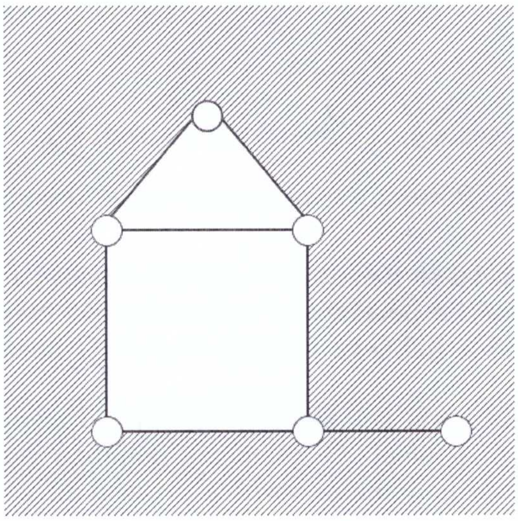


SLIKA 7. Ravninskost grafa K_4 ni očitna.

Če je graf narisan v ravnini brez križanja povezav, rečemo, da je graf vložen v ravnino.

Hitro lahko vidimo, da grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska (poskusimo ju narisati v ravnini, a kmalu ugotovimo, da to ne bo mogoče). Videli bomo, da to dejstvo sledi tudi kot posledica ene izmed posledic Eulerjeve formule.

Spomnimo se, da je risba grafa predstavitev grafa v ravnini, pri čemer vozlišča ustrezajo točkam v ravnini, povezave pa enostavnim krivuljam med točkami. Te točke in enostavne krivulje lahko ravnino razdelijo na več delov – takim območjem pravimo *lica vložitve*. Lice, ki je neomejeno in obdaja celotno risbo grafa, je *zunanje*.



SLIKA 8. Zunanje lice grafa je označeno z rdečimi poševnimi črtami.

Izrek 2.12. (Eulerjeva formula) *Naj bo G povezan ravninski graf z n vozlišči in m povezavami. Naj ima risba grafa G, vloženega v ravnino, f lic. Potem velja*

$$n - m + f = 2.$$

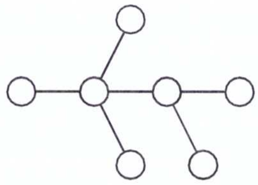
Za dokaz Eulerjeve formule bomo potrebovali še definicijo drevesa:

Definicija 2.13. *Drevo* je povezan graf brez ciklov.

Vidimo lahko, da risba drevesa premore le eno lice – zunanje.

Za vsako drevo z vsaj dvema vozliščema velja, da vsebuje vozlišče stopnje 1 – takemu vozlišču v drevesu pravimo *list* – saj bi v nasprotnem primeru graf vseboval neskončno pot ali cikel. Za drevesa velja tudi:

Lema 2.14. *Če je T drevo z n vozlišči in m povezavami, je $m = n - 1$.*



SLIKA 9. Drevo na 7 vozliščih.

Dokaz. Lemo bomo dokazali z indukcijo na število vozlišč.

Baza indukcije: Če ima drevo le eno vozlišče, nima nobene povezave (velja $n = 1$ $m = 0 = n - 1$).

Indukcijska predpostavka: Drevo z $n - 1$ vozlišči ima $n - 2$ povezav.

Indukcijski korak: Vzamemo drevo z n vozlišči in m povezavami. Vemo ($n \geq 2$), da vsebuje vsaj en list – označimo ga z x. Če x odstranimo iz grafa, dobimo novo drevo z $n - 1$ vozlišči in $m - 1$ povezavami, saj je bilo vozlišče x stopnje 1. Po indukcijski predpostavki za novo drevo velja:

$$(m - 1) = (n - 1) - 1$$
$$m = n - 1 \qquad \square$$

Če želimo, da velja tudi obratno, pa moramo zahtevati še, da je graf povezan. Graf je torej drevo natanko tedaj, ko je povezan in je število njegovih povezav m enako $n - 1$. Dokaz tega dejstva je naveden v [4, str. 57].

Dokaz izreka 2.12. Formulo dokažemo z indukcijo na število povezav.

Naj bo $m = n-1$. Imamo torej drevo, za katerega vemo, da njegova risba premore le zunanje lice, f je torej enak 1. Sledi

$$n - (n - 1) + 1 = 2.$$

omejuje lica risbe,

Predpostavimo, da formula velja za vsak graf na n vozliščih in $m - 1$ povezavah. Če sedaj vzamemo graf G z $m \geq n$ povezavami, graf torej vsebuje vsaj en cikel. tak Izberimo ~~nek~~ cikel v grafu, ~~in~~ ga označimo s C, ~~lice,~~ ki ga ta cikel omejuje, ~~pa~~ to lice označimo z F. Če iz grafa odstranimo eno od povezav e cikla C, nimamo več cikla, zato preostanek $C \setminus e$ ne omejuje več tega lica. Označimo $G' = G \setminus e$. G' ima še vedno $n' = n$ vozlišč, a eno povezavo in lice manj kot prej ($m' = m - 1$, $f' = f - 1$). Po indukcijski predpostavki sledi

$$n' - m' + f' = 2$$
$$n - (m - 1) + (f - 1) = 2$$
$$n - m + f = 2 \qquad \square$$

Naslednja posledica Eulerjeve formule nam bo pomagala pri dokazu dejstva, da grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska.

Posledica 2.15. *Če je G ravninski graf na n vozliščih in m povezavah, velja*

(2) $$m \leq 3n - 6.$$

Če G ne vsebuje trikotnikov, pa velja ~~formula~~ neenakost

(3) $$m \leq 2n - 4.$$

Dokaz. Če za vsako lice upoštevamo le tri povezave (to je minimalno število povezav, ki omejujejo lice, ki ni zunanje), bomo dobili kvečjemu manj, kot če preštejemo vse povezave dvakrat. Vsaka povezava namreč omejuje največ dve lici; če bi po vseh licih sešteli število povezav, ki omejujejo neko lice, bi torej dobili dvakratno vrednost števila povezav. Torej velja neenakost

$$3f \leq 2m.$$

Če iz Eulerjeve formule izrazimo f in ga vstavimo v zgornjo neenakost, dobimo

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2 - n + m) &\leq 2m \\ 6 - 3n + 3m &\leq 2m \\ m &\leq 3n - 6 \end{aligned}$$

Na podoben način pokažemo formulo (3), le da začnemo z neenakostjo

$$4f \leq 2m,$$

saj je zaradi predpostavke, da graf ne vsebuje trikotnikov, minimalno število povezav, ki omejuje lice, enako 4. □

Z uporabo zgornje formule, ki torej mora veljati, če je graf ravninski, lahko dokažemo:

Posledica 2.16. *K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska grafa.* Vrednost

Dokaz. Polni graf na petih vozliščih K_5 ima $\binom{5}{2} = 10$ povezav. n je torej v tem primeru enak 5, m pa je 10. Če bi bil K_5 ravninski, bi morala veljati formula (2), a temu ni tako:

$$10 = m \not\leq 3n - 6 = 9$$

Torej K_5 ni ravninski.

Podobno lahko pokažemo tudi za poln dvodelni graf $K_{3,3}$, pri čemer je n enak 6, število povezav m pa 9. Če bi bil ta graf ravninski, bi morala veljati formula (3), a to ne drži:

$$9 = m \not\leq 2n - 4 = 8.$$

Graf $K_{3,3}$ torej ni ravninski. □

Sedaj želimo ugotoviti, kakšnim pogojem mora ustrezati graf, da bo ravninski. Očitno velja naslednja trditev:

Trditev 2.17. *Če je graf ravninski, potem je tudi vsak njegov podgraf ravninski.*

Operacija "podgraf" torej ohranja ravninskost grafa. Pogledali si bomo še operacijo *subdivizije*, ki prav tako ohranja lastnost ravninskosti. Če vzamemo neko povezavo e grafa G in na sredino te povezave dodamo še eno vozlišče (v ravnini ga predstavlja točka), na tak način dobimo nov graf z operacijo subdivizije. [4, str. 66]

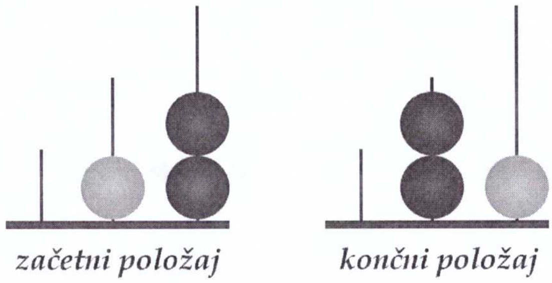
Definicija 2.18. Graf H je *subdivizija* grafa G, če ga lahko dobimo iz G z zaporednim *subdiviziranjem* povezav grafa G [4, str. 66].

Iz definicije je razvidno, da je tak H ravninski natanko tedaj, ko je G ravninski. Iz tega dejstva, trditve 2.17 in posledice 2.16 lahko zaključimo, da graf zagotovo ni ravninski, če vsebuje subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$. Zanimivo pa je, da velja tudi obratno; dokaz tega dejstva je netrivialen in ga lahko najdemo v [2, str. 247-251].

Izrek 2.19. (Kuratowski) *Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$.*

3. Klasični problem londonskega stolpa

Pri klasičnem londonskem stolpu imamo tri enako velike krogle različnih barv in tri palice različnih velikosti: na prvo lahko postavimo eno kroglo, na drugo dve, na tretjo pa tri (temu bomo rekli, da imajo palice višine 1, 2 in 3). Cilj igre je priti iz nekega začetnega stanja v neko vnaprej določeno končno stanje.



Slika 10. Na sliki sta prikazani dve možni stanji londonskega stolpa.

Stanja in prehode med njimi si najlažje predstavljamo, če narišemo graf. V ta namen vpeljemo naslednje oznake: krogle bomo označili s številkami 1, 2, 3 – npr. modra krogla naj ima oznako 1, rdeča 2, rumena pa 3 – s simbolom "|" pa bomo označili konec prejšnje palice in začetek nove. Krogle bomo naštevali od vrha palice navzdol.

Primer 3.1. Začetno stanje na sliki 10 lahko torej opišemo z $|3|12$, končno stanje pa z $|21|3$. ◇

S pomočjo teh oznak lahko opišemo vsako možno stanje in narišemo graf londonskega stolpa (označimo ga z L), pri čemer so vozlišča stanja, povezave pa so med tistimi stanji, med katerimi lahko prehajamo z eno potezo (enim veljavnim premikom krogle).

Lema 3.2. *Število vseh možnih stanj klasičnega londonskega stolpa je 36.* $\$36\$$.

Dokaz. Najprej si oglejmo vse možne postavitve krogel, pri čemer se ne oziramo na barvo. Imamo dve možnosti:

(1) **Na prvi (najkrajši) palici je krogla.** Preostali dve krogli lahko razdelimo na drugi dve palici tako, da:
- je prazna druga palica,
- je prazna tretja palica,
- ima vsaka palica po eno kroglo.

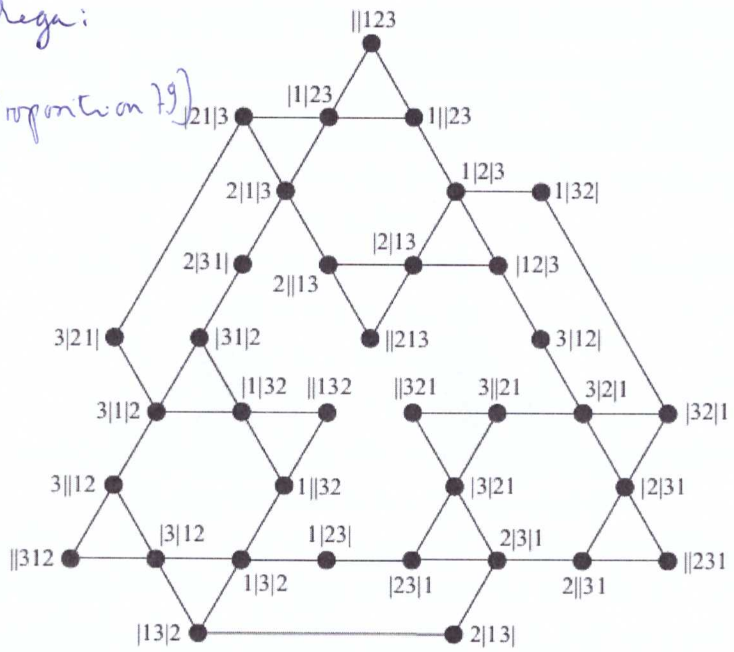
Torej imamo v tem primeru tri možnosti.

(2) **Na prvi (najkrajši) palici ni krogle.** Na drugi dve palici moramo torej razdeliti vse tri krogle. Ponovno imamo tri možnosti:
- druga palica je prazna, tretja palica pa polna (na njej so tri krogle),
- na drugi palici je ena krogla, na tretji palici pa dve krogli,
- druga palica je polna (na njej sta dve krogli), na tretji palici pa je ena krogla.

Po pravilu vsote imamo torej, če se ne oziramo na barve krogel, $3 + 3 = 6$ možnih postavitev krogel. V vsaki od teh lahko še premešamo barve krogel, torej imamo za vsako postavitev $3!$ možnosti. Sledi, da je vseh možnih stanj $3! \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$. □

✳ Za vse trditve/izreke od tu dalje (razen za klasične rezultate, kot je Burnside) navedite vir, iz katerega povzemate. Torej nekaj takega:

Trditev 3.4. [3, Proposition 7.9]



Slika 11. Graf L klasičnega Londonskega stolpa.

Iz leme 3.2 sledi, da ima L 36 vozlišč. Graf je ravninski, saj je na sliki 11 narisan v ravnini brez križanja povezav. Hitro vidimo, da je 12 vozlišč grafa L stopnje 2, drugih 12 je stopnje 3, zadnjih 12 pa stopnje 4. Preverimo lahko tudi, da je premer klasičnega londonskega grafa enak 8.

Primer 3.3. S pomočjo grafa na sliki 11 lahko hitro ugotovimo, da za prehod med stanjema $|3|12$ in $|21|3$, ki sta prikazani na sliki 10, potrebujemo minimalno 4 poteze in da obstaja le eno najkrajše možno zaporedje potez. $\diamondsuit$

✳ **Trditev 3.4.** *Graf L vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.*

Dokaz. Hitro lahko dokažemo, da L vsebuje Hamiltonovo pot: poiščemo jo. Ena izmed Hamiltonovih poti v grafu L je prikazana na sliki 12 levo.

Da bi dokazali, da graf ni Hamiltonov, moramo najprej opaziti nekaj lastnosti tega grafa. Soseščina vsakega vozlišča stopnje 2 je sestavljena iz enega vozlišča stopnje 3 in enega stopnje 4, prav tako je presek soseščin poljubnih dveh vozlišč stopnje 2 prazen – vsako vozlišče stopnje 2 ima torej "svoje" vozlišče stopnje 3 in stopnje 4. Nadalje lahko iz grafa vidimo, da poljubni dve vozlišči stopnje 3 nista sosednji.

Sledi, da na ciklu C v grafu, ki bi vseboval vsa vozlišča, nobeni dve vozlišči stopnje 4 nista sosednji. Ker imamo po 12 vozlišč vsake stopnje, bi v nasprotnem primeru namreč prišli do zaključka, da morata biti sosednji dve vozlišči stopnje 3, kar pa je v protislovju z zgornjim opažanjem.

Sedaj začnimo graditi cikel C, ki bo vseboval vsa vozlišča grafa natanko enkrat. Oglejmo si sliko 12 desno. Cikel C mora torej gotovo iti skozi vsa vozlišča stopnje 2, kar je možno le na en način: če imamo vozlišče stopnje 2 v s sosedoma u stopnje 3 in z stopnje 4, mora C vsebovati pot u, v, z. Če začnemo pri vozlišču stopnje 2 $||123$, mora graf torej vsebovati pot $1||23, ||123, |1|23$. Slednje je vozlišče stopnje 4, za nadaljevanje cikla pa imamo dve možnosti: vozlišče $2|1|3$ ali $|21|3$. Ker je prvo stopnje 4 in smo že prej opazili, da dve vozlišči enake stopnje ne bosta sosednji na kar se zgodi v primeru, če je na k-ti palici h_k krogel.

Opazimo še, da je položaj dna zadnje palice s_{n+p} vedno enak $n+p$, saj smo pred tem že oštevilčili položaje vseh n krogel in ostalih $p-1$ palic.

V splošnem je londonski graf, katerega vozlišča so vsa stanja pripadajočega londonskega stolpa, torej smiselno definirati takole:

Definicija 4.2. Za *londonski graf* L_h^n, kjer je $p \geq 3$, $n \geq 2$, $h \in [n]^p$, $\sum_{k=1}^p h_k \geq n$ velja:

- vozlišča so vse permutacije $s \in S_{n+p}$, za katere velja:
$$\forall k \in [p]: \; 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \; s_{n+p} = n+p,$$
- vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani.

S pogojem, da so vse palice visoke največ n, ne izgubimo splošnosti, saj razporejamo le n krogel.

|| ni

Očitno je klasičen londonski graf L enak L_{123}^3, saj imamo 3 krogle in 3 palice, ki so velikosti 1, 2 in 3. Če smo za ta primer lahko izračunali število vozlišč, pa je v splošnem za londonske stolpe to precej težko. V naslednjem podrazdelku bomo obravnavali poseben primer londonskih grafov, za katerega je znana formula za število vozlišč.

4.2. **Oxfordski graf.** *Oxfordski graf* je poseben primer londonskega grafa, za katerega velja, da so vse palice velikosti n, pri čemer je n število krogel. Oxfordski graf označimo z O_p^n, zanj torej velja $O_p^n := L_{n^p}^n$.

Medtem ko je v splošnem težko določiti število vozlišč londonskega grafa, pa je to precej bolj preprosto za oxfordski graf. Še več, določimo lahko tudi število povezav.

Trditev 4.3. *Število vozlišč oxfordskega grafa O_p^n je enako*

$$\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}. \tag{4}$$

Dokaz. Iščemo število vseh možnih stanj krogel oxfordskega stolpa, saj je to enako številu vozlišč oxfordskega grafa. Podobno kot pri dokazu števila stanj klasičnega londonskega stolpa najprej pozabimo na različne barve krogel (pretvarjamo se, da so krogle enake) in se osredotočimo samo na njihovo postavitev.

Na koliko načinov lahko n enakih krogel razporedimo na p palic višine n? Pri tem nimamo nobenih omejitev, saj so palice dovolj visoke, da lahko vse krogle postavimo tudi na eno samo palico. Lahko si predstavljamo, da imamo vse krogle zložene v vrsto, označene naj bodo z 0, nato pa na poljubna mesta (s ponavljanjem) vrivamo 1, ki naj pomeni konec neke palice in začetek neke druge. Ko vrinemo $p-1$ enic, smo določili p palic in s tem razporeditev krogel.

Sedaj lahko na problem pogledamo malo drugače: na $n+p-1$ mest razporejamo n ničel, ki predstavljajo krogle, in $p-1$ enic, ki predstavljajo začetek nove palice. Če razporedimo vse enice, bodo vsa preostala mesta zasedle ničle, razporeditev bo s tem točno določena. Načinov za izbiro $p-1$ mest za enice izmed $n+p-1$ položajev je $\binom{n+p-1}{p-1}$. Če privzamemo, da so vse krogle enake, je vseh možnih razporeditev torej $\binom{n+p-1}{p-1}$.

Ker je vsaka krogla drugačne barve, imamo za vsako razporeditev še $n!$ možnih permutacij barv. Število vseh stanj, in zato tudi število vozlišč, je tako enako

Če uporabimo še formulo za število vozlišč oxfordskega grafa (4) in poračunamo, dobimo, da je število takih stanj enako

$$\begin{aligned}
\binom{p}{q}\frac{n!}{(n-q)!}\cdot|V(O_q^{n-q})| &= \binom{p}{q}\frac{n!}{(n-q)!}\frac{(n-q+q-1)!}{(q-1)!}\\
&= n!\binom{p}{q}\frac{(n-1)!}{(q-1)!\,(n-q)!}\\
&= n!\binom{p}{q}\binom{n-1}{q-1}
\end{aligned}$$

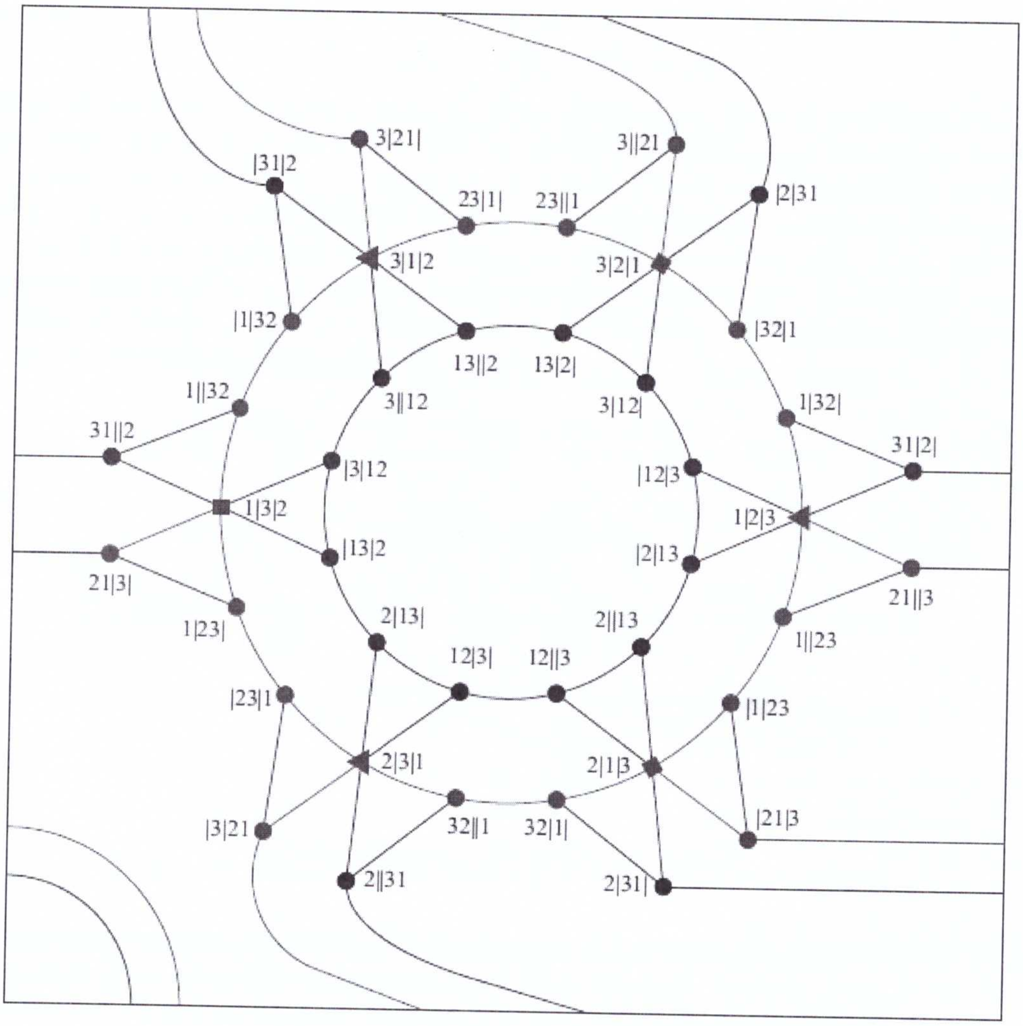
Sedaj po q seštejemo stopnje vseh vozlišč (upoštevamo, da imajo vsa vozlišča, kjer je nepraznih točno q palic, enako stopnjo) in uporabimo formulo (1) iz leme o rokovanju:

$$\begin{aligned}
|E(O_p^n)| &= \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{p}\overbrace{q(p-1)}^{\text{stopnja vozlišča}}\ \overbrace{n!\binom{p}{q}\binom{n-1}{q-1}}^{\text{št. vozlišč s to stopnjo}}\\
&= \frac{1}{2}(p-1)n!\sum_{q=1}^{p}q\binom{p}{q}\binom{n-1}{q-1}\\
&= \frac{1}{2}(p-1)n!\sum_{q=1}^{p}q\frac{p!}{q!\,(p-q)!}\binom{n-1}{q-1}\\
&= \frac{1}{2}(p-1)n!\sum_{q=1}^{p}p\frac{(p-1)!}{(q-1)!\,(p-q)!}\binom{n-1}{q-1}\\
&= \frac{1}{2}p(p-1)n!\sum_{q=1}^{p}\binom{p-1}{q-1}\binom{n-1}{q-1}
\end{aligned}$$

Sedaj uvedemo nov indeks $k=q-1$, upoštevamo lastnosti binomskih simbolov in uporabimo zgoraj dokazano formulo (6):

$$\begin{aligned}
|E(O_p^n)| &= \frac{1}{2}p(p-1)n!\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\binom{n-1}{k}\\
&= \frac{1}{2}p(p-1)n!\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{p-1-k}\binom{n-1}{k}\\
&= \frac{1}{2}p(p-1)n!\binom{p-1+n-1}{p-1}\\
&= \frac{1}{2}p(p-1)n!\binom{n+p-2}{p-1}\\
&= \frac{1}{2}p(p-1)n!\frac{(n+p-2)!}{(p-1)!\,(n-1)!}\\
&= \frac{1}{2}pn\frac{(n+p-2)!}{(p-2)!}\\
&= \frac{np}{2}\frac{(p-2+n)!}{(p-2)!}
\end{aligned}$$

□

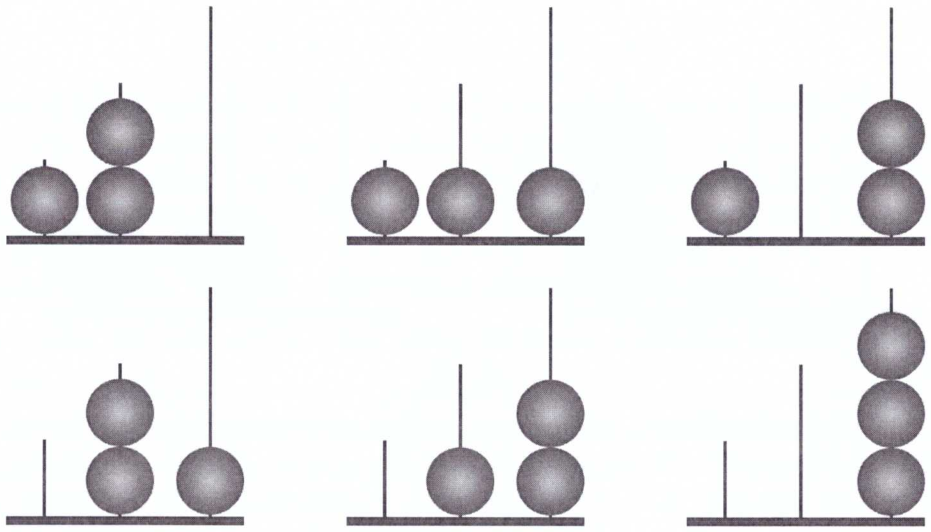


SLIKA 16. Graf L^3_{222} vsebuje subdivizijo $K_{3,3}$.

uporabo simetrijskih lastnosti pa bomo potem sklepali nekaj več o lastnostih pripadajočih grafov.

Pri klasičnem problemu londonskega stolpa imamo 3 palice različne višine, torej so edine možne simetrije permutacije barv krogel. Izračunali smo že, da je število vseh možnih stanj krogel za ta primer enak 36, pri tem pa vemo, da imamo zaradi treh krogel $3! = 6$ možnih barvnih permutacij. Med temi 36 stanji je torej pravzaprav le 6 različnih geometrijskih razporeditev krogel (neupoštevajoč barve), vsaka izmed teh razporeditev pa ima potem še 6 permutacij barv krogel.

Spomnimo se, da je naloga pri problemu londonskega stolpa sestavljena iz začetnega in končnega stanja krogel, matematično jo torej lahko opišemo kot urejen par dveh možnih stanj. Ker ima klasični problem 36 možnih stanj, je število vseh nalog enako $36 \cdot 35$. Razdelimo jih lahko v 6 blokov glede na barvno permutacijo, ki jim pripada – če ne upoštevamo barv, imamo tako na voljo le 210 različnih nalog, vsaka izmed njih je predstavnik enega ekvivalenčnega razreda na množici vseh nalog glede na permutacije barv krogle. Vsak tak ekvivalenčni razred je velikosti 6, saj imamo



SLIKA 17. Na slikah so prikazane vse možne geometrijske razporeditve krogel za klasični problem L^3_{123}.

toliko možnih barvnih permutacij. Rešitve nalog, ki spadajo v isti ekvivalenčni razred ("izo-naloge"), so sestavljene iz enakih potez; razlikujejo se le v barvah krogel, ki jih premikamo [3, str. 591].

Opomba 4.9. Matematično gledano so vse naloge, ki so del istega ekvivalenčnega razreda, enako težke. Ni pa nujno, da jih tako dojema tudi oseba, ki nalogo rešuje.

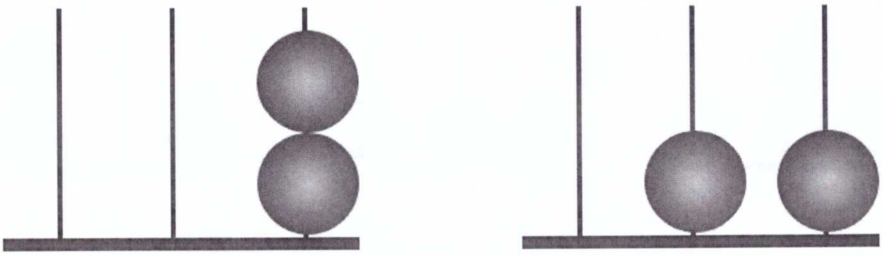
Problem pa postane še bolj zanimiv, če imamo (za razliko od klasičnega londonskega grafa) poleg barvnih permutacij na voljo tudi permutacije palic. Demonstrirajmo, kako lahko z upoštevanjem simetrij bolj učinkovito preučimo predvsem metrične lastnosti nekega grafa. Za začetek si le kot primer oglejmo oxfordski graf O^3_2, pri čemer bomo izpustili dokaze za nekatera dejstva, kasneje pa bomo izpeljali vso teorijo, potrebno za ~~rigorozen~~ dokaz, in s pomočjo te teorije preučili malo večji graf L^3_{222}.

celovit

Če upoštevamo simetrije krogel in palic, imamo pri problemu O^3_2 pravzaprav le dve razporeditvi krogel, ki nista ekvivalentni, in sicer:

- obe krogli sta na isti palici (prikazano na sliki 18 levo),
- krogli nista na isti palici (prikazano na sliki 18 desno).

Množica stanj tega problema torej razpade na dva ekvivalenčna razreda. Če za vsako izmed teh stanj upoštevamo vse možne simetrije (na voljo imamo 3! permutacij palic in 2 permutaciji barv), vidimo, da sta oba ekvivalenčna razreda velikosti 6, saj z nekaterimi izbirami permutacije za palice in barvi dobimo enako razporeditev krogel. Sedaj lahko npr. povprečno ekscentričnost vozlišč izračunamo tako, da ugotovimo ekscentričnost nekega predstavnika teh dveh ekvivalenčnih razredov, recimo $\epsilon(12||) = 4$ in $\epsilon(1|2|) = 3$, iz česar lahko sklepamo, da je povprečna ekscentričnost v grafu enaka $\bar{\epsilon}(O^2_3) = 3.5$. Na podoben način lahko izračunamo tudi povprečno razdaljo med dvema vozliščema v grafu tako, da najprej seštejemo vse razdalje od nekega poljubnega vozlišča do teh dveh predstavnikov, nato pa upoštevamo velikosti obeh ekvivalenčnih razredov in koliko je vseh možnih parov vozlišč (število vozlišč tega grafa lahko izračunamo po formuli (4) in je enako 12):



SLIKA 18. Na sliki sta prikazani edini dve neekvivalentni stanji problema O_3^2.

$$\sum_{s\in V(O_3^2)} \mathrm{d}(12||,s) = 26, \quad \sum_{s\in V(O_3^2)} \mathrm{d}(1|2|,s) = 21 \implies \bar{\mathrm{d}}(O_3^2) = \frac{6\cdot 26 + 6\cdot 21}{144} \approx 1.958.$$

Za učinkovitejšo preučevanje simetrij večjih ~~bolj zakompliciranih~~ londonskih grafov definirajmo grupo $(\Gamma_{np}, \cdot, 1_{np})$, pri čemer velja $\Gamma_{np} = S_n \times S_p$; grupa S_n bo pri tem predstavljala vse možne permutacije (barv) krogel, S_p pa vse možne permutacije palic. Operacijo $\cdot$ definiramo takole:

$$(\chi_1, \pi_1)\cdot(\chi_2, \pi_2) = (\chi_1 \circ \chi_2, \pi_1 \circ \pi_2),$$

prazna vrsta + \noindent

enota pa je kar urejen par enot grupe S_n (označimo jo z id_n) in S_p (označimo jo z id_p), velja torej $1_{np} = (\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_p)$. Enostavno lahko preverimo, da za tako definirano operacijo $\cdot$ in enoto 1_{np} res dobimo grupo. Seveda velja, da je velikost naše grupe simetrij $|\Gamma_{np}|$ enaka kar produktu velikosti množic S_n in S_p, torej $|\Gamma_{np}| = n!\cdot p!$.

Sedaj lahko definiramo delovanje te grupe na množici vozlišč (stanj) nekega londonskega grafa $V(L_h^n)$. Označimo neko stanje krogel z $s = \Sigma_1|\ldots|\Sigma_p$, kjer $|$ ponovno označuje začetek naslednje palice, Σ_i pa je niz, sestavljen iz oznak krogel na i-ti palici; krogle kot ponavadi naštevamo od vrha palice navzdol. Grupa Γ_{np} sedaj deluje na poljubno stanje s iz množice vozlišč takole:

$$(\chi,\pi).s = \mathrm{X}\left(\Sigma_{\pi^{-1}(1)}|\ldots|\Sigma_{\pi^{-1}(p)}\right),$$

pri čemer je X preslikava, ki ustrezno permutira barve krogel glede na χ. To je res delovanje, saj očitno velja $1_{np}.s = s$ za vsak $s \in V(L_h^n)$, enostavno pa lahko preverimo, da velja tudi

$$((\chi_1,\pi_1)\cdot(\chi_2,\pi_2)).s = (\chi_1,\pi_1).((\chi_2,\pi_2).s).$$

Iz osnovne teorije grup vemo, da lahko na množici stanj definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ takole:

$$s_1 \sim s_2 \iff \exists(\chi,\pi)\in\Gamma_{np}\colon\ s_2 = (\chi,\pi).s_1,$$

množica stanj razpade na ekvivalenčne razrede, ki so kar orbite. Ekvivalentna ~~bodo~~ so torej tista stanja krogel, ki ~~bodo~~ so v ~~istem ekvivalenčnem razredu.~~ isti orbiti.

Analogno lahko definiramo delovanje Γ_{np} tudi na množici vseh nalog za nek problem, torej na $V(L_h^n)\dot{\times}V(L_h^n)$, pri čemer je operator $\dot{\times}$ definiran takole:

$$A\dot{\times}A = \{(a,b) \in A \times A \mid a \neq b\}\,.$$

Primer 4.10. Vzemimo oxfordski graf O_3^2 in pokažimo, da sta nalogi $2||1 \to |1|2$ in $|2|1 \to 2|1|$ ekvivalentni. Želimo poiskati par permutacij (χ, π), ki nam bo prvi dve stanji krogel preslikal v drugi dve; permutaciji bomo zapisali z disjunktnimi cikli. Če vzamemo $(\chi,\pi) = ((1\ 2),(3\ 2\ 1))$ in upoštevamo, da je $\pi^{-1} = (1\ 2\ 3)$, se nam prva naloga preslika v X$(|1|2) \to$ X$(1|2|) = |2|1 \to 2|1|$, dobimo drugo nalogo, torej sta nalogi res v isti orbiti~~, in s tem v istem ekvivalenčnem razredu.~~ $\diamondsuit$

S pomočjo zgornje teorije lahko sedaj dokažemo naslednjo trditev za londonski graf L_{222}^3:

\$6\$

Trditev 4.11. *Množica stanj londonskega grafa L_{222}^3, katere velikost je 42, razpade v 2 ekvivalenčna razreda; prvi je velikosti 6, drugi pa 36. Minimalna stopnja vozlišč tega grafa je 3, maksimalna 6, povprečna pa ≈ 3.43. Premer tega grafa je 5, povprečna razdalja med dvema vozliščema pa ≈ 3.31.* \$3\$

Preden ~~pa~~ a se lotimo dokaza, bomo potrebovali še dva rezultata iz teorije grup.

Izrek 4.12. *Naj grupa G deluje na množico X. Označimo z $\bar{x}$ orbito elementa x in z G_x stabilizator elementa x. Potem velja*

$$\forall x \in X : |G| = |\bar{x}| \cdot |G_x|. \tag{9}$$

Dokaz. Za dokaz se najprej spomnimo Lagrangeevega (i) izreka, ki pravi, da za končno grupo G in njeno podgrupo $H \leq G$ velja

$$|G| = |G/H| \cdot |H|,$$

pri čemer je G/H kvocientna množica vseh odsekov. V našem primeru je $H = G_x$, vemo torej, da $\forall x$ velja

$$|G| = |G/G_x| \cdot |G_x|.$$

Dokazati želimo, da je $|G/G_x| = |\bar{x}|$. Konstruiramo preslikavo $\phi\colon G/G_x \to \bar{x}$ s predpisom $\phi(gG_x) = gx$. Trdimo, da je ϕ bijekcija. Velja

$$gG_x = hG_x \iff h^{-1}g \in G_x \iff h^{-1}gx = x \iff gx = hx,$$

torej je preslikava dobro definirana in injektivna. Surjektivnost preslikave ϕ pa sledi iz dejstva, da za vsak $x \in X$ lahko najdemo njegov stabilizator G_x, praslika elementa gx za nek $g \in G$ in $x \in X$ je torej gG_x.

Ker med množicama obstaja bijekcija, sledi $|G/G_x| = |\bar{x}|$ in s tem

$$|G| = |\bar{x}| \cdot |G_x|,\ \forall x \in X. \qquad \square$$

Izrek 4.13. (Burnsidova lema). *Naj grupa G deluje na množico X. Potem velja*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|, \text{ kjer je } X^g = \{x \in X \mid gx = x\}, \tag{10}$$

oziroma z besedo: število orbit je enako povprečnemu številu negibnih točk.

Dokaz. Zapišimo vsoto vseh negibnih točk malo drugače:

$$\sum_{g\in G}|X^g| = \sum_{g\in G}\sum_{x\in X^g} 1 = \sum_{g\in G}\sum_{\substack{x\in X\\ gx=x}} 1$$

v redu?

Zamenjamo vrstni red seštevanja in uporabimo enakost (9):

$$\sum_{g\in G}|X^g| = \sum_{x\in X}\sum_{\substack{g\in G\\ gx=x}} 1 = \sum_{x\in X}|G_x| = \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|\bar{x}|} = |G|\sum_{x\in X}\frac{1}{|\bar{x}|}$$

Sedaj upoštevamo še, da je X disjunktna unija vseh svojih orbit v X/G:

$$\sum_{g\in G}|X^g| = |G|\sum_{\sigma\in X/G}\sum_{x\in\sigma}\frac{1}{|\sigma|} = |G|\sum_{\sigma\in X/G} 1 = |G|\cdot|X/G|\,.$$

Enakost (10) od tod sledi. □

Ekvivalenčne razrede množice vseh stanj/nalog lahko torej preučujemo tako, da poiščemo negibne točke zgoraj definiranega delovanja in uporabimo Burnsidovo lemo. Sedaj se lahko lotimo dokaza trditve 4.11.

Dokaz trditve 4.11. Utemeljimo najprej, da je moč množice vozlišč grafa L^3_{222} enaka 42. Če imamo po eno kroglo na vsaki palici, imamo 3! možnosti, kako razporediti krogle. V nasprotnem primeru pa imamo na neki palici dve krogli, na neki drugi pa eno. Na voljo imamo torej $3\cdot 2\cdot 3!$ razporeditev krogel, saj se najprej odločimo, katera palica bo imela dve krogli (za to imamo na voljo 3 možnosti), nato katera palica bo imela eno kroglo (2 možnosti), nato pa še premešamo barve krogel. Skupaj imamo torej $3! + 3\cdot 2\cdot 3! = 42$ možnih razporeditev krogel.

Poiščimo negibne točke delovanja grupe $(\Gamma_{33},\cdot,1_{33})$ na množico vozlišč $V(L^3_{222})$. Če vzamemo identiteto 1_{33}, potem je množica negibnih točk za to preslikavo enaka kar celotni množici vozlišč. Možne negibne točke za preostale preslikave pa so samo tista stanja, ki imajo po eno kroglo na vsaki palici: pri stanju z npr. dvema kroglama na neki palici preslikava ne sme zamenjati palic, če želimo, da je to stanje negibna točka, zato pa preslikava ne sme zamenjati tudi barv. Nadalje lahko opazimo, da bodo negibne točke imele le tiste preslikave (λ,π), pri katerih bosta tako χ kot π ali permutaciji brez negibne točke ali pa zrcaljenji. V tabeli 1 so predstavljene množice negibnih točk za vse preslikave iz grupe Γ_{33}.

Iz tabele lahko preberemo, da je število vseh negibnih točk enako

$$\sum_{g\in\Gamma_{33}}|V(L^3_{222})^g| = 42 + 4\cdot 3 + 9\cdot 2 = 72,$$

saj je število vozlišč pri tem problemu enako 42.

Uporabimo Burnsidovo lemo (10) in dobimo, da je število ekvivalenčnih razredov enako

$$\frac{1}{|\Gamma_{33}|}\sum_{g\in\Gamma_{33}}|V(L^3_{222})^g| = \frac{72}{3!\cdot 3!} = 2.$$

Ker je poljubno stanje, ki ima na eni izmed palic več kot eno kroglo, fiksna točka le identične preslikave, iz formule (9) sledi, da je orbita (in s tem ekvivalenčni razred) takega stanja velikosti 36. Torej je prvi ekvivalenčni razred sestavljen iz stanj z več kot eno kroglo na neki palici, drugi pa je sestavljen iz 6-ih razporeditev, pri kateri je na vsaki palici točno ena krogla (te so fiksne točke šestih preslikav iz Γ_{33}.)

Pri obravnavi lastnosti tega grafa moramo torej upoštevati le dve neekvivalentni stanji, npr. $s_1 = 12|3|$ in $s_2 = 1|2|3$. Iz grafa 19 lahko vidimo, da je stanje s_1 stopnje 3, s_2 pa 6. Minimalna stopnja vozlišč je torej 3, maksimalna je 6, povprečna pa je enaka $\frac{36\cdot 3+6\cdot 6}{42}\approx 3.43$.

$\chi \backslash \pi$	123	231	312	132	321	213
123	$V(L_{222}^3)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
231	$\emptyset$	1|2|3 2|3|1 3|1|2	1|3|2 2|1|3 3|2|1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
312	$\emptyset$	1|3|2 2|1|3 3|2|1	1|2|3 2|3|1 3|1|2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
132	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	1|2|3 1|3|2	2|1|3 3|1|2	2|3|1 3|2|1
321	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	2|1|3 2|3|1	1|2|3 3|2|1	1|3|2 3|1|2
132	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	3|1|2 3|2|1	1|3|2 2|3|1	1|2|3 2|1|3

TABELA 1. Negibne točke preslikav iz Γ_{33}.

Za izračun povprečne razdalje med dvema vozliščema v tem grafu moramo določiti vse razdalje od enega izmed predstavnikov vsakega ekvivalenčnega razreda do poljubnega vozlišča, kar lahko naredimo s pomočjo risbe grafa 19. Na tej sliki smo že označili vse razdalje do stanj s_1 in s_2. Vidimo, da je za obe stanji maksimalna možna razdalja do nekega poljubnega vozlišča enaka 5. Ekscentričnost vseh vozlišč v grafu je torej 5, iz česar sledi, da je tudi premer enak 5.

Vsota vseh razdalj od stanja s_1 do nekega poljubnega stanja je enaka 140, od s_2 pa 133. Sledi, da je povprečna razdalja enaka

$$\frac{36 \cdot 140 + 6 \cdot 133}{42^2} = \frac{139}{42}.$$

S tem je dokaz končan. $\square$

Slovar strokovnih izrazov

Literatura

[1] A. M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović in C. Petr, *The Tower of Hanoi – Myths and Maths*, Birkhäuser, Basel, 2013.

[2] D. B. West ~~et al~~, *Introduction to graph theory*, Prentice hall, Upper Saddle River, 2001.

[3] W. K. Berg in D. L. Byrd, *The Tower of London spatial problem-solving task: Enchancing clinical and research implementation*, Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology **24** (2002) 586–604, dostopno tudi na https://www.researchgate.net/publication/11201010_The_Tower_of_London_Spatial_Problem-Solving_Task_Enhancing_Clinical_and_Research_Implementation.

[4] P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne Matematike I*, 1. izdaja, [ogled 29. 12. 15], dostopno na http://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf.

[5] *Tim Shallice*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 8. 10. 2015], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Tim_Shallice.

[6] *Hamiltonian path*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 28. 12. 2015], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path.