

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Ines Meršak

Problem londonskega stolpa

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Ljubljana, 2016

KAZALO

1. Uvod	4
2. Osnovni pojmi teorije grafov	4
2.1. Povezanost grafa	6
2.2. Hamiltonovi grafi	7
2.3. Ravninski grafi	7
3. Klasični problem londonskega stolpa	10
4. Posplošeni londonski stolp	12
4.1. Definicija	13
4.2. Oxfordski graf	14
4.3. Povezanost	16
4.4. Ravninskost	18
4.5. Simetrije londonskega stolpa	20
Slovar strokovnih izrazov	20
Literatura	20

Problem londonskega stolpa

POVZETEK

V povzetku na kratko opiši vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

The Tower of London problem

ABSTRACT

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2010): navedi vsaj eno klasifikacijsko oznako – dostopne so na www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html

Ključne besede: navedi nekaj ključnih pojmov, ki nastopajo v delu

Keywords: angleški prevod ključnih besed

1. UVOD

Test londonskega stolpa je ena izmed variacij Hanojskih stolpov. Izumil ga je britanski nevropsiholog Tim Shallice leta 1982. Pogosto je uporabljen v psihologiji, saj s pomočjo te igre ugotavljajo stanje pacientove psihe, opazujejo pa lahko tudi napredek bolezni pri npr. Parkinsonovih bolnikih. [3]

Osnovna verzija londonskega stolpa vsebuje tri enako velike krogle različnih barv in tri palice. Na prvo palico lahko postavimo samo eno kroglo, na drugo le dve krogli, na tretjo pa tri. Cilj igre je priti iz nekega danega stanja v neko drugo želeno stanje s čim manj koraki. Stanja (in prehode med njimi) lahko opišemo s pomočjo teorije grafov.

Diplomska naloga je razdeljena na tri dele: v prvem delu bom najprej opisala vse pojme, navedla (in nekatere tudi dokazale) vse trditve, izreke in posledice teorije grafov, ki mi bodo v pomoč pri obravnavi problema londonskega stolpa. V drugem delu bom podrobneje opisala klasični londonski stolp in lastnosti pripadajočega grafa, v zadnjem delu pa bom obravnavala posplošeni problem londonskega stolpa.

2. OSNOVNI POJMI TEORIJE GRAFOV

Vsa možna stanja londonskega stolpa in prehode med njimi lahko zelo elegantno opišemo s pomočjo grafov, zato si najprej pogledimo nekaj osnovnih pojmov teorije grafov.

Definicija 2.1. Graf G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ končna množica vozlišč, $E(G)$ pa množica povezav grafa. Povezave so predstavljene kot neurejeni pari vozlišč (neusmerjeni grafi).

Obstajajo variacije zgornje definicije, graf je lahko npr. usmerjen (povezave so urejeni pari) – tedaj govorimo o *digrafi*, ima neskončno število vozlišč ali pa več povezav med dvema vozliščema. Dopuščamo lahko tudi zanke: to je povezava oblike $\{v, v\}$, pri čemer je v vozlišče.

Vozlišča grafa predstavimo s točkami v ravnini, povezavo med dvema vozliščema pa kot enostavno krivuljo med ustreznima točkama v ravnini. Preslikavi, ki grafu priredi ustrezne točke in krivulje v ravnini, pravimo *risba grafa* (včasih pa s tem mislimo kar na predstavitev grafa v ravnini). Graf ima lahko več različnih možnih risb – razlikujejo se lahko npr. po tem, katere točke priredimo katerim vozliščem.

SLIKA 1. Možna predstavitev grafa v ravnini.

Če je $e = \{u, v\}$ povezava, tedaj sta u in v *krajišči* povezave e , pišemo tudi $e = uv$; rečemo, da sta u in v *sosednji vozlišči*.

Definicija 2.2. *Soseščina* vozlišča u je množica vseh sosednjih vozlišč vozlišča u :

$$N(u) = \{x : ux \in E(G)\}.$$

Stopnja vozlišča u je število vseh vozlišč, ki so mu sosednji: $\deg u = |N(u)|$.

Če imamo podano stopnjo vseh vozlišč grafa, lahko na enostaven način izračunamo število povezav tega grafa, velja sledeča lema:

Lema 2.3 (Lema o rokovanju). *Za vsak graf $G = (V(G), E(G))$ velja formula*

$$(1) \quad \sum_{u \in V(G)} \deg u = 2 \cdot |E(G)|.$$

Dokaz. Naredimo si tabelo vozlišč in povezav:

	...	e_j	...
\vdots		\vdots	
v_i	...	1 / 0	
\vdots			

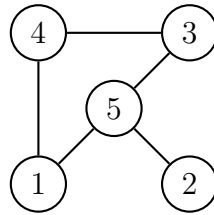
V prvem stolpcu so naštetá vozlišča grafa, v prvi vrstici pa povezave. Na mestu i, j v tabeli zapišemo enico, če je vozlišče v_i eno izmed krajišč povezave e_j , in ničlo v nasprotnem primeru.

Vemo, da ima vsaka povezava dve krajišči, torej sta v vsakem stolpcu natanko dve enici. Če po drugi strani pogledamo število enic v neki vrstici i , nam to pove ravno stopnjo vozlišča v_i . Ker mora biti rezultat enak, če seštejemo ničle in enice po stolpcih oziroma po vrsticah, sledi formula (1). \square

Primer 2.4. Naj bo graf G podan z

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E(G) = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}.$$

Soseščina vozlišča 5 je $N(5) = \{1, 2, 3\}$. \diamond



SLIKA 2. Graf G .

Definicija 2.5. Graf $H = (V(H), E(H))$ je *podgraf* grafa $G = (V(G), E(G))$, če velja

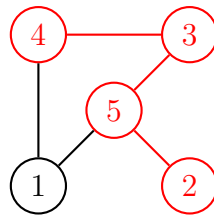
$$V(H) \subseteq V(G) \text{ in } E(H) \subseteq E(G).$$

Podgraf H grafa G je *inducirani* podgraf, če za vsaki dve vozlišči $x, y \in V(H)$ velja: $xy \in E(G) \implies xy \in E(H)$.

Primer 2.6. Če vzamemo graf G iz prejšnjega primera 2.4, potem je graf H , ki ima

$$V(H) = \{2, 3, 4, 5\}, \quad E(H) = \{\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$$

induciran podgraf grafa G .



SLIKA 3. Graf H (označen z rdečo barvo) je induciran podgraf grafa G . \diamond

Poglejmo si nekaj razredov grafov, ki nam bodo prišli prav v kasnejših definicijah.

Pot na n vozliščih je graf, ki ima dve vozlišči stopnje 1, medtem ko so preostala vozlišča stopnje 2.

Cikel na n vozliščih (označimo ga s C_n) je graf, ki ga dobimo iz poti na n vozliščih tako, da dodamo povezavo med vozliščema stopnje 1.

Polni graf na n vozliščih (označimo ga s K_n) je graf, za katerega velja

$$uv \in E(K_n) \quad \forall u, v \in V(K_n).$$

Z besedami, vsa vozlišča polnega grafa so med sabo povezana.



SLIKA 4. Primer poti (levo), cikla (sredina) in polnega grafa (desno) na šestih vozliščih.

Definicija 2.7. Graf G je *dvodelen*, če lahko množico njegovih vozlišč razbijemo na dva dela (V_1, V_2) tako, da ima vsaka povezava grafa G eno krajišče v V_1 in drugo v V_2 .

Pri polnem dvodelnem grafu z n vozlišči v prvi množici, recimo ji V_1 , in m vozlišči v drugi množici, recimo ji V_2 , je vsako vozlišče iz množice V_1 povezano z vsakim iz V_2 , medtem ko znotraj množic vozlišča niso povezana. Tak graf označimo s $K_{n,m}$.



SLIKA 5. Na sliki je polni dvodelni graf $K_{2,4}$.

Definicija 2.8. Naj bosta $G = (V(G), E(G))$ in $H = (V(H), E(H))$ grafa. Preslikava $f: V(G) \rightarrow V(H)$ je *izomorfizem*, če je bijektivna in velja

$$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H), \quad \forall u, v \in E(G).$$

Grafa G in H sta *izomorfna*, če obstaja izomorfizem $G \rightarrow H$. Oznaka: $G \cong H$.

Pot v grafu G je podgraf grafa G , ki je izomorfen poti. *Cikel v grafu G* je podgraf grafa G , ki je izomorfen ciklu.

2.1. Povezanost grafa. *Sprehod* v grafu G je zaporedje vozlišč v_1, v_2, \dots, v_k , tako da velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$, pri čemer je $1 \leq i \leq k-1$. Če označimo $x = x_1$ in $y = x_k$, potem takemu sprehodu rečemo x, y -sprehod.

Sprehod je *enostaven*, če so vsa njegova vozlišča različna. Enostaven sprehod inducira podgraf, ki je izomorfen poti (torej pot v grafu).

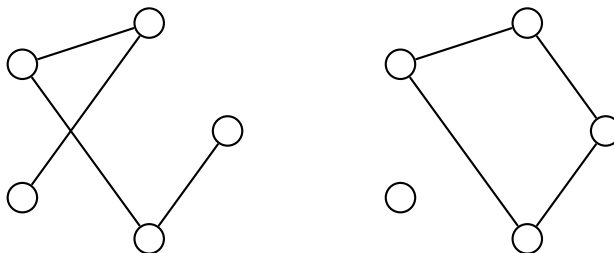
SLIKA 6. Enostaven sprehod in pot v grafu, ki jo inducira.

Naj bo G graf in \sim relacija, definirana na kartezičnem produktu $V(G) \times V(G)$:

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{=} \exists x, y\text{-sprehod.}$$

Preprosto lahko preverimo, da je relacija \sim ekvivalenčna. Sledi, da relacija \sim množico vozlišč grafa G razbije na ekvivalenčne razrede. Podgrafi, inducirani s temi razredi, so *komponente* grafa G .

Definicija 2.9. Graf je *povezan*, če ima le eno komponento. Povedano drugače, za poljuben par vozlišč mora obstajati sprehod med njima.



SLIKA 7. Povezan (levo) in nepovezan (desno) graf.

Če je G povezan graf, lahko definiramo *razdaljo* $d_G(u, v)$ med vozliščema u in v kot najmanjše možno število povezav na neki u, v -poti.

Definirajmo še *premer* grafa kot največjo minimalno razdaljo med pari vozlišč. Enostavneje povedano to pomeni: če vzamemo poljubno vozlišče v grafu, potem lahko pridemo do drugega poljubnega vozlišča preko d ali manj povezav, kjer je d premer grafa.

2.2. Hamiltonovi grafi. Eno izmed zanimivih vprašanj v teoriji grafov je, ali je možno najti neko pot/cikel v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča tega grafa. S tem problemom se je ukvarjal tudi Hamilton, po katerem so take poti in cikli poimenovani; njega je zanimalo predvsem, ali je mogoče poiskati cikel, ki vsebuje vsa vozlišča, v dodekaedru [4].

Definicija 2.10. Pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča tega grafa, se imenuje *Hamiltonova pot*. *Hamiltonov cikel* nekega grafa G je cikel v G , ki poteka skozi vsa vozlišča tega grafa. Graf je *Hamiltonov*, če vsebuje Hamiltonov cikel.

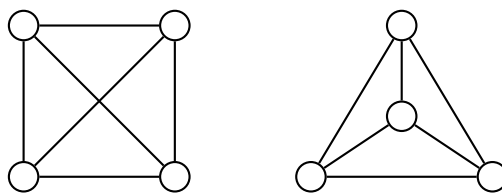
2.3. Ravninski grafi. V diplomski nalogi se bom ukvarjala tudi s tem, kdaj je graf, s pomočjo katerega predstavimo londonski stolp, ravninski.

Definicija 2.11. Graf je *ravninski*, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne križata – torej če obstaja risba grafa, kjer se nobeni dve povezavi ne križata.

Če je graf narisani v ravnini brez križanja povezav, rečemo, da je graf vložen v ravnino.

Hitro lahko vidimo, da grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska (poskusimo ju narisati v ravnini, a kmalu ugotovimo, da to ne bo mogoče). To dejstvo sledi tudi kot posledica ene izmed posledic Eulerjeve formule.

Spomnimo se, da je risba grafa predstavitev grafa v ravnini, pri čemer vozlišča ustrezajo točkam v ravnini, povezave pa enostavnim krivuljam med točkami. Te točke in enostavne krivulje lahko ravnino razdelijo na več delov – takim območjem pravimo *lica vložitve*. Lice, ki je neomejeno in obdaja celotno risbo grafa, je *zunanje*.



SLIKA 8. Ravninskost grafa K_4 ni očitna.

SLIKA 9. Zunanje lice grafa.

Izrek 2.12 (Eulerjeva formula). *Naj bo G povezan ravninski graf z n vozlišči in m povezavami. Naj ima risba grafa G , vložena v ravnino, f lic. Potem velja*

$$n - m + f = 2.$$

Za dokaz Eulerjeve formule bomo potrebovali še definicijo drevesa:

Definicija 2.13. *Drevo* je povezan graf brez ciklov.

Vidimo lahko, da risba drevesa premore le eno lice – zunanje.

SLIKA 10. Drevo na 7 vozliščih.

Za vsako drevo z vsaj dvema vozliščema velja, da vsebuje vozlišče stopnje 1 – takemu vozlišču v drevesu pravimo *list* – saj bi v nasprotnem primeru graf vseboval neskončno pot ali cikel. Za drevesa velja tudi:

Lema 2.14. *Če je T drevo z n vozlišči in m povezavami, je $m = n - 1$.*

Dokaz. Lemo bomo dokazali z indukcijo na število vozlišč.

Baza indukcije: Če ima drevo le eno vozlišče, nima nobene povezave (velja $n = 1$, $m = 0 = n - 1$).

Indukcijska predpostavka: Drevo z $n - 1$ vozlišči ima $n - 2$ povezav.

Indukcijski korak: Vzamemo drevo z n vozlišči in m povezavami. Vemo ($n \geq 2$), da vsebuje vsaj en list – označimo ga z x . Če x odstranimo iz grafa, dobimo novo drevo z $n - 1$ vozlišči in $m - 1$ povezavami, saj je bilo vozlišče x stopnje 1. Po indukcijski predpostavki za novo drevo velja:

$$\begin{aligned} (m - 1) &= (n - 1) - 1 \\ m &= n - 1 \end{aligned} \quad \square$$

Če želimo, da velja tudi obratno, pa moramo zahtevati še, da je graf povezan. Graf je torej drevo natanko tedaj, ko je povezan in je število njegovih povezav m enako $n - 1$. Dokaz tega dejstva je naveden v [2, str. 57].

Dokaz izreka 2.12. Formulo dokažemo z indukcijo na število povezav.

Naj bo $m = n - 1$. Imamo torej drevo, za katerega vemo, da njegova risba premore le zunanje lice, f je torej enak 1. Sledi

$$n - (n - 1) + 1 = 2.$$

Predpostavimo, da formula velja za vsak graf na n vozliščih in $m - 1$ povezavah.

Če sedaj vzamemo graf G z $m \geq n$ povezavami, graf torej vsebuje vsaj en cikel. Izberimo nek cikel v grafu in ga označimo s C , lice, ki ga ta cikel omejuje, pa

označimo z F . Če iz grafa odstranimo eno od povezav e cikla C , nimamo več cikla, zato preostanek $C \setminus e$ ne omejuje več tega lica. Označimo $G' = G \setminus e$. G' ima še vedno $n' = n$ vozlišč, a eno povezavo in lice manj kot prej ($m' = m - 1$, $f' = f - 1$). Po indukcijski predpostavki sledi

$$\begin{aligned} n' - m' + f' &= 2 \\ n - (m - 1) + (f - 1) &= 2 \\ n - m + f &= 2 \end{aligned} \quad \square$$

Naslednja posledica Eulerjeve formule nam bo pomagala pri dokazu dejstva, da grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska.

Posledica 2.15. Če je G ravninski graf na n vozliščih in m povezavah, velja

$$(2) \quad m \leq 3n - 6.$$

Če G ne vsebuje trikotnikov, pa velja formula

$$(3) \quad m \leq 2n - 4.$$

Dokaz. Če za vsako lice upoštevamo le tri povezave (to je minimalno število povezav, ki omejujejo lice, ki ni zunanje), bomo dobili kvečjemu manj, kot če preštejemo vse povezave dvakrat. Vsaka povezava namreč omejuje največ dve lici; če bi po vseh licih sešteli število povezav, ki omejujejo neko lice, bi torej dobili dvakratno vrednost števila povezav. Torej velja neenakost

$$3f \leq 2m.$$

Če iz Eulerjeve formule izrazimo f in ga vstavimo v zgornjo neenakost, dobimo

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2 - n + m) &\leq 2m \\ 6 - 3n + 3m &\leq 2m \\ m &\leq 3n - 6 \end{aligned}$$

Na podoben način pokažemo formulo (3), le da začnemo z neenakostjo

$$4f \leq 2m,$$

saj je zaradi predpostavke, da graf ne vsebuje trikotnikov, minimalno število povezav, ki omejuje lice, enako 4. \square

Z uporabo zgornje formule, ki torej mora veljati, če je graf ravninski, lahko dokažemo:

Posledica 2.16. K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska grafa.

Dokaz. Polni graf na petih vozliščih K_5 ima $\binom{5}{2} = 10$ povezav. n je torej v tem primeru enak 5, m pa je 10. Če bi bil K_5 ravninski, bi morala veljati formula (2), a temu ni tako:

$$10 = m \not\leq 3n - 6 = 9$$

Torej K_5 ni ravninski.

Podobno lahko pokažemo tudi za poln dvodelni graf $K_{3,3}$, pri čemer je n enak 6, število povezav m pa 9. Če bi bil ta graf ravninski, bi morala veljati formula (3), a to ne drži:

$$9 = m \not\leq 2n - 4 = 8.$$

Graf $K_{3,3}$ torej ni ravninski. \square

Sedaj želimo ugotoviti, kakšnim pogojem mora ustrezati graf, da bo ravninski. Očitno velja naslednja trditev:

Trditev 2.17. Če je graf ravninski, potem je tudi vsak njegov podgraf ravninski.

Operacija “podgraf” torej ohranja ravninskost grafa. Pogledali si bomo še operacijo *subdivizije*, ki prav tako ohranja lastnost ravninskosti. Če vzamemo neko povezavo e grafa G in na sredino te povezave dodamo še eno vozlišče (v ravnini ga predstavlja točka), na tak način dobimo nov graf z operacijo subdivizije. [2, str. 66]

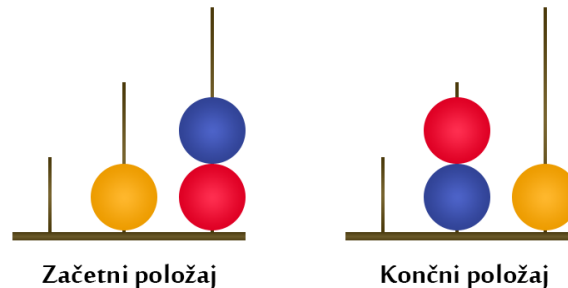
Definicija 2.18. Graf H je *subdivizija* grafa G , če ga lahko dobimo iz G z zaporednim *subdiviziranjem* povezav grafa G . [2, str. 66]

Iz definicije je razvidno, da je tak H ravninski natanko tedaj, ko je G ravninski. Iz tega dejstva, trditve 2.17 in posledice 2.16 lahko zaključimo, da graf zagotovo ni ravninski, če vsebuje subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$. Zanimivo pa je, da velja tudi obratno; dokaz tega dejstva je netrivialen in ga lahko najdemo v [TODO vir].

Izrek 2.19 (Kuratowski). Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$.

3. KLASIČNI PROBLEM LONDONSKEGA STOLPA

Pri klasičnem londonskem stolpu imamo tri enako velike krogle različnih barv in tri palice različnih velikosti: na prvo lahko postavimo eno kroglo, na drugo dve, na tretjo pa tri (temu bomo rekli, da imajo palice višine 1, 2 in 3). Cilj igre je priti iz nekega začetnega stanja v neko vnaprej določeno končno stanje.



SLIKA 11. Na sliki sta prikazani dve možni stanji londonskega stolpa.

Stanja in prehode med njimi si najlažje predstavljamo, če narišemo graf. V ta namen vpeljemo naslednje oznake: krogle bomo označili s številkami 1, 2, 3 – npr. modra krogla naj ima oznako 1, rdeča 2, rumena pa 3 – s simbolom “|” pa bomo označili konec prejšnje palice in začetek nove. Krogle bomo naštevali od vrha palice navzdol.

Primer 3.1. Začetno stanje na sliki 11 lahko torej opišemo z $|3|12$, končno stanje pa z $|21|3$. \diamond

S pomočjo teh oznak lahko opišemo vsako možno stanje in narišemo graf londonskega stolpa (označimo ga z L), pri čemer so vozlišča stanja, povezave pa so med tistimi stanji, med katerimi lahko prehajamo z eno potezo (enim veljavnim premikom krogla).



Dokaz. Najprej si oglejmo vse možne postavitve krogel, pri čemer se ne oziramo na barvo. Imamo dve možnosti:

- Torej imamo v tem primeru tri možnosti.

- Po pravilu vsote imamo torej, če se ne oziramo na barve krogel, $3 + 3 = 6$ možnih postavitvev krogel. V vsaki od teh lahko še premešamo barve krogel, torej imamo za vsako postavitvev $3!$ možnosti. Sledi, da je vseh možnih stanj $3! \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$. \square

Primer 3.3. S pomočjo grafa na sliki 12 lahko hitro ugotovimo, da za prehod med stanjema na sliki 11 potrebujemo minimalno 4 poteze in da je to edino najkrajše možno zaporedje potez. \diamond

Trditev 3.4. Graf L vsebuje Hamiltonovo pot, ne pa tudi Hamiltonovega cikla.

Dokaz. TODO

Hitro lahko dokažemo, da L vsebuje Hamiltonovo pot: poiščemo jo. Ena izmed Hamiltonovih poti v grafu L je prikazana na sliki ??.

Da bi dokazali, da graf ni Hamiltonov, moramo najprej opaziti nekaj lastnosti tega grafa. Soseščina vsakega vozlišča stopnje 2 je sestavljena iz enega vozlišča stopnje 3 in enega stopnje 4, prav tako je presek soseščin poljubnih dveh vozlišč stopnje 2 prazen – vsako vozlišče stopnje 2 ima torej “svoje” vozlišče stopnje 3 in stopnje 4. Nadalje lahko iz grafa vidimo, da poljubni dve vozlišči stopnje 3 nista sosednji.

Sledi, da na ciklu C v grafu, ki bi vseboval vsa vozlišča, nobeni dve vozlišči stopnje 4 nista sosednji. Ker imamo po 12 vozlišč vsake stopnje, bi v nasprotnem primeru namreč prišli do zaključka, da morata biti sosednji dve vozlišči stopnje 3, kar pa je v protislovju z zgornjim opažanjem.

Sedaj začnimo graditi cikel C , ki bo vseboval vsa vozlišča grafa natanko enkrat. Oglejmo si sliko ??. Cikel C mora torej gotovo iti skozi vsa vozlišča stopnje 2, kar je možno le na en način: če imamo vozlišče stopnje 2 v s sosedoma u stopnje 3 in z stopnje 4, mora C vsebovati pot u, v, z . Če začnemo pri vozlišču stopnje 2 $||123$, mora graf torej vsebovati pot $||123, ||123, |1|23$. Slednje je vozlišče stopnje 4, za nadaljevanje cikla pa imamo dve možnosti: vozlišče $2|1|3$ ali $|21|3$. Ker je prvo stopnje 4 in smo že prej opazili, da dve vozlišči iste stopnje ne bosta sosednji na ciklu C , cikel nadaljujemo z $|21|3$. Sosed tega vozlišča je vozlišče $3|21|$ stopnje 2, zato moramo cikel gotovo nadaljevati skozi njega. Pridemo do vozlišča $3|1|2$. Imamo dve možnosti:

- Nadaljujemo z vozliščem $|31|2$, ki je stopnje 3 in je na notranjem ciklu. V tem primeru ne bomo notranjega cikla nikoli zapustili, saj je notranji cikel oblike: vozlišče stopnje 2, vozlišče stopnje 3 (povezano samo z vozlišči na notranjem ciklu), vozlišče stopnje 4, ki je nato povezano z vozliščem stopnje 2, skozi katerega moramo iti. Nato pa sledita vozlišče a stopnje 3 (povezano z notranjim ciklom in vozliščem stopnje w 4 na zunanem ciklu) in vozlišče b stopnje 4 (povezan z vozliščem c stopnje 2 in še dvema drugima na notranjem ciklu ter vozliščem w). Ker moramo iti skozi vozlišče c , moramo tudi skozi b , od prej pa vemo, da moramo nujno tudi skozi a , saj je sosed vozlišča stopnje 2. Torej lahko pot speljemo le skozi a, b, c , saj je w stopnje 4 in na ciklu zato ne sme biti sosed b , ki je prav tako stopnje 4.
- Pot torej nadaljujemo z vozliščem stopnje 3 na zunanem ciklu $3||12$, in tudi v nadaljevanju ostanemo na zunanem ciklu, saj vemo, da bomo v nasprotnem primeru ostali na notranjem ciklu.

Torej ne moremo konstruirati cikla, ki bi vseboval vsa vozlišča našega grafa L natanko enkrat. L torej ni Hamiltonov. \square

4. POSPLOŠENI LONDONSKE STOLP

Graf klasičnega problema londonskega stolpa je majhen, zato je za psihološka testiranja naloga včasih prelahka. Jenny R. Tunstall je prva predlagala razširitev klasičnega londonskega stolpa na 4 krogle s podaljšanimi palicami (vsaka je podaljšana za eno enoto), mi pa si bomo v tem razdelku pogledali ta problem v splošnem, s $p \geq 3$ palicami in $n \geq 2$ krogli.

4.1. Definicija. Posplošen londonski stolp ima $n \geq 2$ krogel, označimo jih s številkami $1, \dots, n$, in $p \geq 3$ palic, katerih višino označimo s h_k – toliko krogel lahko postavimo na k -to palico. Seveda velja, da mora biti število vseh krogel manjše ali enako vsoti višin vseh palic, sicer vseh krogel ne moremo razporediti na palice. Veljati mora torej:

$$n \leq \sum_{k=1}^p h_k.$$

Edina omejitev premikov krogel je ponovno višina palic, prav tako je enak cilj igre, priti iz začetnega stanja v končno stanje s čim manj premiki.

Še pred definicijo splošnega londonskega grafa vpeljimo oznake, ki jih bomo uporabljali za opis stanja nekega posplošenega londonskega stolpa. Enoličen zapis lahko dosežemo, če vsako stanje predstavimo s permutacijo s iz simetrijske grupe S_{n+p} . Pri tem i -ta številka permutacije predstavlja

$$s_i = \begin{cases} \text{položaj krogle } i, & i \in [n] \\ \text{položaj dna palice } i - n, & i \in [n + p] \setminus [n] \end{cases}$$

Položaje oštevilčimo od leve palice proti desni, z vrha palice proti dnu. Tako bo s številko 1 oštevilčen položaj krogle, ki je postavljena najvišje na prvi palici; če na prvi palici ni nobene krogle, bo imelo položaj 1 dno te palice.

Primer 4.1. Poiščimo permutacijo za začetni položaj na sliki 11, ki smo ga označili z $|3|12|$. Predstavljajmo si, da oštevilčujemo krogle in dna palice, in začnimo oštevilčevati od leve proti desni, z vrha palice proti dnu, tako kot je prikazano na sliki 13.

SLIKA 13. Položaji krogel in palic za stanje $|3|12|$.

Sedaj le preberemo položaje vseh krogel (od prve do tretje) in vseh palic (od leve proti desni) – prva (modra) krogla je oštevilčena s 4, druga (rdeča) s 5, ... To stanje lahko torej predstavimo s permutacijo $s = 452136$. \diamond

Hitro vidimo, da mora veljati

$$\forall k \in [p]: s_{n+k} - s_{n+k-1} \geq 1$$

saj je s_{n+k} položaj dna palice k , s_{n+k-1} pa položaj dna palice $k - 1$, torej se mora njun položaj razlikovati najmanj za 1 – to se zgodi, če na palici k ni nobene krogle.

Prav tako pa mora veljati tudi

$$\forall k \in [p]: s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1,$$

kar se zgodi v primeru, če je na k -ti palici h_k krogel.

Opazimo še, da je položaj dna zadnje palice, s_{n+p} , vedno enak $n + p$, saj smo pred tem že oštevilčili položaje vseh n krogel in ostalih $p - 1$ palic.

V splošnem je londonski graf, katerega vozlišča so vsa stanja pripadajočega londonskega stolpa, torej smiselno definirati takole:

Definicija 4.2. Za londonski graf L_h^n , kjer je $p \geq 3$, $n \geq 2$, $h \in [n]^p$, $\sum_{k=1}^p h_k \geq n$ velja:

- vozlišča so vse permutacije $s \in S_{n+p}$, za katere velja:

$$\forall k \in [p]: 1 \leq s_{n+k} - s_{n+k-1} \leq h_k + 1, \quad s_{n+p} = n + p,$$

- vsaki dve stanji (oz. pripadajoči permutaciji), med katerima lahko prehajamo z veljavno potezo, sta povezani.

S pogojem, da so vse palice visoke največ n , ne izgubimo splošnosti, saj razporejamo le n krogel.

Očitno je klasičen londonski graf L enak L_{123}^3 , saj imamo 3 krogle in 3 palice, ki so velikosti 1, 2 in 3. Če smo v tem primeru lahko izračunali število vozlišč, pa je v splošnem za londonske stolpe to precej težko. V naslednjem podrazdelku bomo obravnavali poseben primer londonskih grafov, za katerega je znana formula za število vozlišč.

4.2. Oxfordski graf. *Oxfordski graf* je poseben primer londonskega grafa, za katerega velja, da so vse palice velikosti n , pri čemer je n število krogel. Oxfordski graf označimo z O_p^n , zanj torej velja $O_p^n := L_{np}^n$.

Medtem ko je v splošnem težko določiti število vozlišč londonskega grafa, pa je to precej bolj preprosto za oxfordski graf. Še več, določimo lahko tudi število povezav.

Trditev 4.3. *Število vozlišč oxfordskega grafa O_p^n je enako*

$$(4) \quad \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}.$$

Dokaz. Iščemo število vseh možnih stanj pri oxfordskem stolpu, saj je to enako številu vozlišč oxfordskega grafa. Podobno kot pri dokazu števila stanj klasičnega londonskega stolpa najprej pozabimo na različne barve krogel (delamo se, da so krogle enake) in se osredotočimo samo na njihovo postavitvev.

Na koliko načinov lahko n enakih krogel razvrstimo na p palic višine n ? Pri tem nimamo nobenih omejitev, saj so palice dovolj visoke, da lahko vse krogle postavimo tudi na eno samo palico. Lahko si predstavljamo, da imamo vse krogle zložene v vrsto, označene naj bodo z 0, nato pa na poljubna mesta (s ponavljanjem) vrivamo 1, ki naj pomeni konec neke palice in začetek neke druge. Ko vrinemo $p-1$ enic, smo določili p palic in s tem razporeditev krogel.

Sedaj lahko na problem pogledamo malo drugače: na $n+p-1$ mest razporejamo n ničel, ki predstavljajo krogle, in $p-1$ enic, ki predstavljajo začetek nove palice. Če razporedimo vse enice, bodo na vsa preostala mesta prišle ničle, razporeditev bo s tem določena. $p-1$ mest izmed $n+p-1$ položajev lahko izberemo na $\binom{n+p-1}{p-1}$ načinov. S tem je položaj krogel na palicah točno določen, torej imamo $\binom{n+p-1}{p-1}$ vseh možnih razporeditev, če privzamemo, da so krogle enake.

Ker je vsaka krogla drugačne barve, imamo za vsako razporeditev še $n!$ možnih permutacij barv. Število vseh stanj, in zato tudi število vozlišč, je tako enako

$$n! \cdot \binom{n+p-1}{p-1} = n! \cdot \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}.$$

□

Preden si ogledamo formulo za število povezav londonskega grafa, pa si na hitro oglejmo še sledečo lemo, ki jo bomo potrebovali pri dokazu formule za število povezav:

Lema 4.4. *Velja formula*

$$(5) \quad \binom{b+w}{l} = \sum_{k=0}^l \binom{b}{k} \binom{w}{l-k}.$$

Dokaz. Formulo najlažje dokažemo kombinatorično. Predstavljajmo si, da imamo v posodi b črnih in w belih krogel, iz posode pa izbiramo l krogel.

Leva stran enakosti nam predstavlja vse možne načine, kako lahko izberemo l krogel izmed $b + w$ krogel (brez vračanja).

Na to pa lahko gledamo tudi malo drugače: najprej določimo neko fiksno število k , toliko krogel bomo izbrali izmed črnih, preostanek pa bomo izbrali iz belih krogel. Za fiksno k je število možnih izbir ravno $\binom{b}{k} \binom{w}{l-k}$. Če to sedaj seštejemo po vseh možnih k -jih, bomo dobili ravno vse možne načine izbire l krogel izmed $b + w$ krogel, formula (5) torej velja. \square

Trditev 4.5. Število povezav oxfordskega grafa O_p^n je enako

$$\frac{np}{2} \frac{(p-2+n)!}{(p-2)!}.$$

Dokaz. Vzemimo stanje (vozlišče), pri katerem je q palic nepraznih, $1 \leq q \leq p$ in $n \geq q$. Vsako vrhnjo kroglo ene izmed q palic lahko premaknemo na katerokoli palico, razen trenutne; izberemo torej eno izmed q palic, s katere premaknemo kroglo, in eno izmed preostalih $p-1$ palic, kamor kroglo premaknemo. Tako vozlišče je torej stopnje $q(p-1)$. (Pri tem upoštevamo, da je povezava med dvema vozliščema grafa pravzaprav veljavna poteza med dvema stanjema.)

Vseh stanj, ki imajo točno q nepraznih palic, je enako

$$\binom{p}{q} \frac{n!}{(n-q)!} \cdot |V(O_q^{n-q})|.$$

Najprej izberemo q izmed p palic, ki bodo neprazne, kar lahko storimo na $\binom{p}{q}$ načinov. Na vsako izmed teh q palic moramo nujno postaviti vsaj eno kroglo, kar lahko naredimo na $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-q+1) = \frac{n!}{(n-q)!}$ (za prvo izmed q palic imamo na voljo n krogel, za drugo $n-1$ krogel, ...). Preostalih $n-q$ krogel pa lahko razporedimo poljubno na q palic, kar je brez škode za splošnost enako številu razporeditev $n-q$ krogel na q palic velikosti $n-q$, torej $|V(O_q^{n-q})|$. Če uporabimo formulo za število vozlišč oxfordskega grafa (4) in poračunamo, dobimo, da je število takih stanj enako

$$\begin{aligned} \binom{p}{q} \frac{n!}{(n-q)!} \cdot |V(O_q^{n-q})| &= \binom{p}{q} \frac{n!}{(n-q)!} \frac{(n-q+q-1)!}{(q-1)!} \\ &= n! \binom{p}{q} \frac{(n-1)!}{(q-1)! (n-q)!} \\ &= n! \binom{p}{q} \binom{n-1}{q-1} \end{aligned}$$

Za dokaz formule bomo potrebovali še sledečo formulo za binomske simbole, ki jo privzemimo kot znano [bolje dokaz – TODO]:

Sedaj po q seštejemo stopnje vseh vozlišč (upoštevamo, da imajo vsa vozlišča, kjer je nepraznih točno q palic, enako stopnjo) in uporabimo formulo (1) iz leme o

rokovanju:

$$\begin{aligned}
|E(O_p^n)| &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \overbrace{q(p-1)}^{\text{stopnja vozlišča}} \overbrace{n! \binom{p}{q} \binom{n-1}{q-1}}^{\text{št. vozlišč s to stopnjo}} \\
&= \frac{1}{2} (p-1)n! \sum_{q=1}^p q \binom{p}{q} \binom{n-1}{q-1} \\
&= \frac{1}{2} (p-1)n! \sum_{q=1}^p q \frac{p!}{q! (p-q)!} \binom{n-1}{q-1} \\
&= \frac{1}{2} (p-1)n! \sum_{q=1}^p p \frac{(p-1)!}{(q-1)! (p-q)!} \binom{n-1}{q-1} \\
&= \frac{1}{2} p(p-1)n! \sum_{q=1}^p \binom{p-1}{q-1} \binom{n-1}{q-1}
\end{aligned}$$

Sedaj uvedemo nov indeks $k = q - 1$, upoštevamo lastnosti binomskih simbolov in uporabimo formulo (5):

$$\begin{aligned}
|E(O_p^n)| &= \frac{1}{2} p(p-1)n! \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \binom{n-1}{k} \\
&= \frac{1}{2} p(p-1)n! \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{p-1-k} \binom{n-1}{k} \\
&= \frac{1}{2} p(p-1)n! \binom{p-1+n-1}{p-1} \\
&= \frac{1}{2} p(p-1)n! \binom{n+p-2}{p-1} \\
&= \frac{1}{2} p(p-1)n! \frac{(n+p-2)!}{(p-1)! (n-1)!} \\
&= \frac{1}{2} pn \frac{(n+p-2)!}{(p-2)!} \\
&= \frac{np}{2} \frac{(p-2+n)!}{(p-2)!}
\end{aligned}$$

□

4.3. Povezanost. Zaželeno je, da lahko pri londonskem stolpu, s pomočjo katerega opravljajo teste v psihologiji, prehajamo med poljubnima dvema stanjema. To velja, če je pripadajoči londonski graf povezan, kar je zato ena pomembnejših lastnosti tega grafa. V nadaljevanju bomo privzeli, da so palice urejene po velikosti naraščajoče, velja torej $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_p$. Potreben pogoj za povezanost londonskega grafa je očitno

$$n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k,$$

oziroma z besedami, da lahko kroglice razporedimo tako, da najvišja palica ostane prazna. V nasprotnem primeru bi, po tem ko bi razporedili maksimalno možno število krogel na vse preostale (manjše) palice, na največji ostalo še nekaj krogel, ki

jih nikoli ne bi mogli premakniti na kakšno drugo palico. Izkaže se, da je ta pogoj tudi zadosten za povezanost londonskega grafa.

Izrek 4.6. *Londonski graf L_h^n je povezan natanko tedaj, ko velja pogoj*

$$(6) \quad n \leq \sum_{k=1}^{p-1} h_k.$$

Dokaz. Želimo dokazati, da iz pogoja (6) sledi, da lahko najdemo pot med poljubnima dvema vozliščema v londonskem grafu, kar je ravno definicija povezanosti. Dokaza se lotimo tako, da najprej čim bolj zreduciramo splošen problem in nato rešimo zreduciran problem.

Spomnimo se, da vsako vozlišče londonskega grafa predstavlja neko stanje krogel – če torej iščemo pot v grafu med dvema vozliščema, pravzaprav rešujemo problem, kako iz začetnega stanja krogel priti v končno. Fiksirajmo poljubno začetno in končno stanje in poskusimo rešiti ta problem.

Predpostavili bomo, da je število vseh krogel kar enako vsoti višin vseh palic brez največje, saj lahko v nasprotnem primeru vpeljemo navidezne krogle, katerih premike kasneje zanemarimo. Velja naj torej $n = \sum_{k=1}^{p-1} h_k$.

Nadalje lahko predpostavimo, da so krogle pri začetnem kot tudi pri končnem stanju razporejene tako, da je največja palica prazna. V nasprotnem primeru jih lahko na začetku razporedimo na preostale palice, na koncu pa preprosto prestavimo na največjo palico.

Torej je za dokaz povezanosti grafa dovolj, če najdemo pot med poljubnima dvema stanjema, pri katerem so vse palice (razen največje) zapolnjene, največja palica pa je prazna.

Sedaj postopamo tako, da izberemo kroglo, ki še ni na svojem (končnem) položaju, in jo zamenjamo s kroglo, ki se trenutno nahaja na tem položaju; ta postopek ponavljamo. Če lahko zamenjavo naredimo tako, da se pri tem ne spremeni položaj nobene druge krogle, je po koncu zamenjave še ena krogla več na pravem mestu. Ker je največja palica prazna, vse druge pa zapolnjene, se po koncu ponavljanja tega postopka ne more zgoditi, da je le ena krogla (označimo jo z a) na napačnem mestu. V nasprotnem primeru bi zaradi zapolnjenosti palic namreč obstajala krogla b , ki bi bila na končnem mestu krogle a in zato b ne bi bila na svojem končnem položaju – torej imamo vedno vsaj dve krogli, ki sta na napačnem mestu, ti dve krogli pa lahko spet zamenjamo.

Če torej dokažemo, da lahko poljubni dve krogli zamenjamo tako, da se pri tem ne spremeni položaj nobene druge krogle, bomo s ponavljanjem zgornjega postopka lahko prešli iz začetnega v končno stanje krogel, graf bo povezan.

Sedaj predpostavimo še, da je ena izmed krogel, ki ju bomo zamenjali, na vrhu prve, najmanjše, palice. Namreč, s tremi zamenjavami, pri katerih je ena izmed krogel vedno na vrhu prve palice, lahko nadomestimo splošno zamenjavo dveh poljubnih krogel. Recimo, da želimo zamenjati poljubni krogli a in b . Če uporabimo notacijo klasičnega problema, s c označimo vrhno kroglo prve palice, z x pa poljubno število nekih poljubnih krogel in če izpustimo palice, ki na to menjavo ne bodo imele vpliva, lahko menjavo a in b opravimo takole:

$$cx|ax|xbx| \rightarrow bx|ax|xcx| \rightarrow ax|xbx|xcx| \rightarrow cx|xbx|ax|.$$

Pri tem je bila v vsaki menjavi udeležena vrhnja krogla prve palice. Dovolj je torej dokazati, da lahko naredimo menjavo vrhnje krogle prve palice in neke druge poljubne krogle, brez da bi pri tem pokvarili položaj ostalih krogel.

Sedaj si izberimo kroglo, ki ni na pravem položaju, in s tem tudi kroglo, ki je trenutno na njenem položaju. Predpostavili smo, da je ena izmed teh krogel na prvi palici – to kroglo označimo z a , drugo pa z b . Ločimo dva primera:

- (1) **Krogla b je na prvi palici.** Vrhno kroglo druge palice, označimo jo s c , premaknemo na največjo (p -to) palico. Nato kroglo a premaknemo na vrh druge palice, preostale krogle na prvi palici z do vključno kroglo b pa premaknemo (seveda eno naenkrat) na največjo palico. Krogla a lahko sedaj zasede svoj pravi položaj na prvi palici, b pa premaknemo iz vrha največje palice na vrh druge. Sedaj lahko vrnemo vse preostale krogle (razen c) na prejšnje mesto na prvi palici, nato lahko na vrh prve palice postavimo b , ki tako zavzame prejšnji položaj krogle a . Za konec premaknemo še kroglo c z največje palice na vrh druge palice.
- (2) **Krogla b ni na prvi palici.** V tem primeru je postopek še nekoliko lažji: najprej vse krogle nad b premaknemo na največjo palico, nato na vrh največje palice premaknemo tudi b . Sedaj lahko kroglo a prestavimo na njeno pravo mesto (kjer je bil prej b), b na vrh prve palice, vse preostale krogle na največji palici pa postavimo nazaj na prejšnja mesta, nad kroglo a .

S tem je dokaz končan, saj smo našli način, kako prehajati med dvema poljubnima stanjema krogel, in smo s tem našli tudi pot v grafu med poljubnima vozliščema. \square

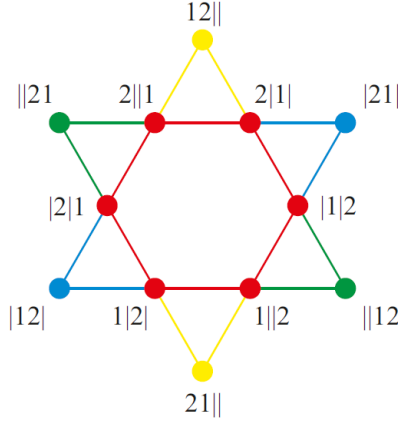
4.4. Ravninskost. Omenili smo že, da se problem londonskega stolpa pogosto uporablja kot psihološki test. Psihologi rezultate testov radi prikažejo kar na grafu uporabljenega problema, zato je zanimivo tudi vprašanje ravninskosti londonskih grafov – križanje povezav namreč lahko vodi do zmede pri prikazu rezultatov. Ker se za testiranje uporablja le londonski stolp s tremi palicami, se bomo tudi pri obravnavi ravninskosti omejili na ta primer, torej naj bo $p = 3$.

Najprej obravnavajmo primer londonskega stolpa z dvema kroglama ($n = 2$, to so torej grafi L_h^2). V tem primeru imamo grafe $L_{111}^2, L_{112}^2, L_{122}^2$ in $L_{222}^2 = O_3^2$ (še vedno predpostavljamo, da so palice razvrščene po velikosti naraščajoče). Hitro lahko vidimo, da je npr. L_{111}^2 podgraf L_{112}^2 : iz prvega lahko pridemo do drugega tako, da dodamo vozlišči, kjer sta obe krogli na največji palici, in ustrezno dodamo povezave z že obstoječimi stanji. Če $s \subset$ označimo relacijo podgraf, lahko vidimo sledeče:

$$L_{111}^2 \subset L_{112}^2 \subset L_{122}^2 \subset L_{222}^2 = O_3^2.$$

S slike 14, na kateri je narisani graf O_3^2 , lahko zaključimo, da je ta graf ravninski. Iz tega seveda sledi, da so ravninski tudi vsi njegovi podgrafi, saj z brisanjem vozlišč in povezav ne moremo ustvariti križanj povezav. Torej so vsi londonski grafi za $n = 2$ in $p = 3$ ravninski. Na sliki 14 so pravzaprav prikazani grafi vseh londonskih stolpov z dvema kroglama – rdeča barva označuje najmanjši graf, L_{111}^2 , nato pa z zaporednim dodajanjem vozlišč in povezav dobimo še ostale: če dodamo zelena vozlišča, dobimo L_{112}^2 , če nato dodamo še modra vozlišča, dobimo L_{122}^2 ; celoten graf pa (kot že omenjeno) predstavlja O_3^2 .

Če si sedaj pogledamo problem londonskega stolpa s tremi krogami ($n = 3$), na podoben način kot za dve krogli dobimo sledečo shemo:



SLIKA 14. Vsi londonski grafi s $p = 3$ in $n = 2$ so ravninski.

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} & & L & & & & \\ & & \parallel & & & & \\ L_{122}^3 & \subset & L_{123}^3 & \subset & L_{133}^3 & & \\ \cap & & \cap & & \cap & & \\ L_{222}^3 & \subset & L_{223}^3 & \subset & L_{233}^3 & \subset & L_{333}^3 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & O_3^3 \end{array}$$

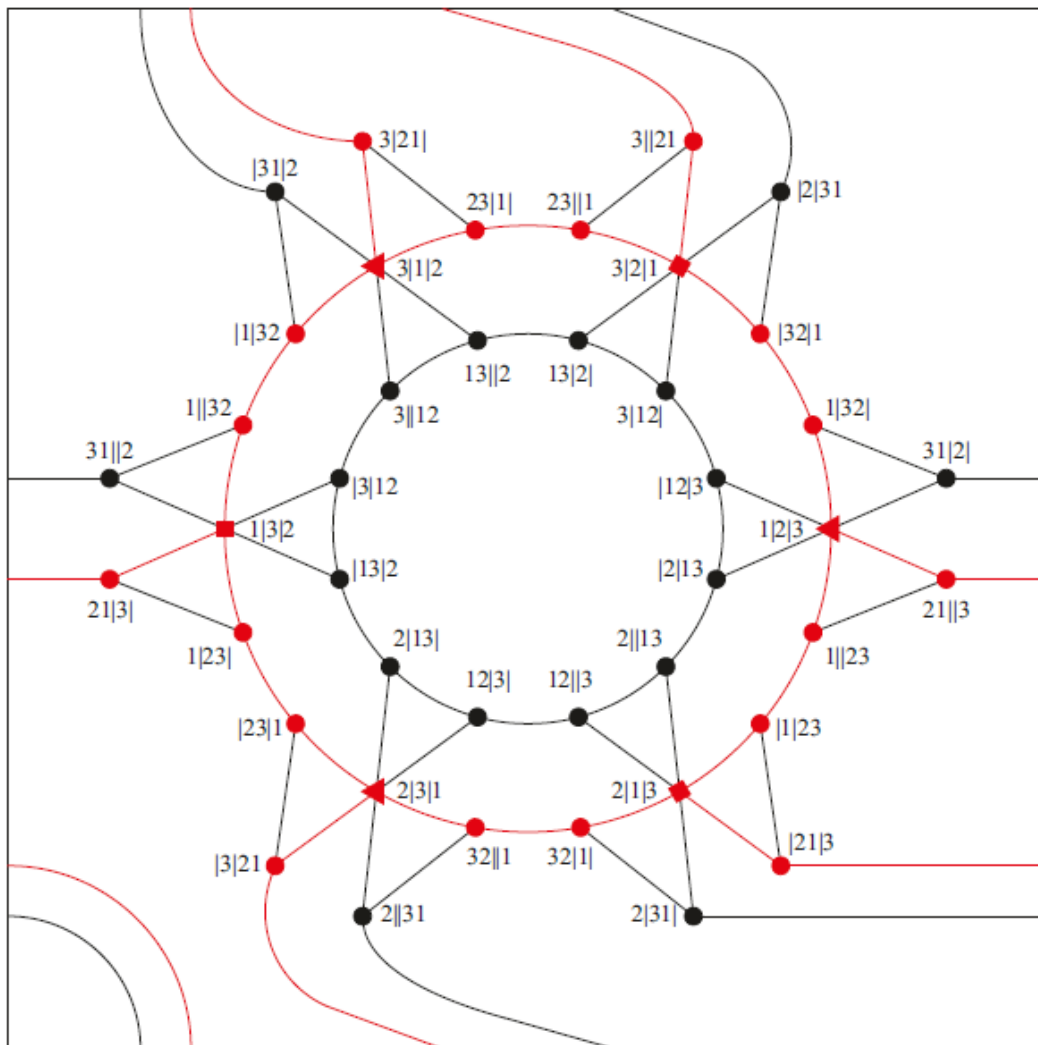
Videli smo že, da je klasični londonski graf L ravninski. Torej je ravninski tudi njegov podgraf L_{122}^3 , saj do njega pridemo tako, da iz L zberemo tistih šest vozlišč, kjer so vse tri krogle na največji palici, in pripadajoče povezave. Če pa grafu L dodamo vozlišča, kjer so vse tri krogle na srednji palici, lahko s slike ?? vidimo, da je tudi L_{133}^3 ravninski.

Trditev 4.7. *Naj bo $p = 3$. Tedaj so ravninski londonski grafi natanko grafi $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3$ in L_{133}^3 .*

Opomba 4.8. Še vedno predpostavljamo, da so londonski grafi povezani, torej zadostujejo pogoju (6).

Dokaz. Videli smo že, da so grafi $L_h^2, L_{122}^3, L_{123}^3$ in L_{133}^3 ravninski. Dokazati moramo, da vsi ostali grafi za $n = 3$ in vsi grafi za $n \geq 4$ niso ravninski. Pri tem nam bo v pomoč izrek 2.19, ki pravi, da je graf ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$. A v grafu L_{222}^3 lahko najdemo subdivizijo $K_{3,3}$, ki je na sliki 15 prikazana z rdečo barvo. Iz tega po izreku 2.19 sledi, da L_{222}^3 ni ravninski. Ker vsi preostali grafi z $n = 3$ vsebujejo graf L_{222}^3 (kot lahko vidimo na shemi (7)), tudi $L_{223}^3, L_{233}^3, L_{333}^3 = O_3^3$ niso ravninski.

Dokazati moramo le še, da tudi londonski grafi za $n \geq 4$ niso ravninski. Ker L_{222}^3 ni ravninski in je vsebovan v grafu L_{222}^4 , sledi, da L_{222}^4 ni ravninski. Pokazali bi lahko, da tudi graf L_{133}^4 ni ravninski, vendar si pri tem ne moremo pomagati z njegovim ravninskim podgrafom L_{133}^3 , zato bi morali znotraj L_{133}^4 poiskati subdivizijo $K_{3,3}$. Ta naloga je precej mučna zaradi velikosti grafa, zato jo bomo izpustili. Ker mora vsak graf L_h^4 vsebovati ali L_{133}^4 ali L_{222}^4 , ki nista ravninska, to sledi tudi za preostale grafe z $n = 4$.



SLIKA 15. Graf L_{222}^3 vsebuje subdivizijo $K_{3,3}$.

Za $n \geq 4$ torej noben graf ni ravninski, saj vsak L_h^n dobimo z dodajanjem krogel enemu izmed L_h^4 , za katere pa zdaj vemo, da niso ravninski. \square

Opomba 4.9 (TODO). toroidalnost

4.5. Simetrije londonskega stolpa.

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

LITERATURA

- [1] A. M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović in C. Petr, *The Tower of Hanoi – Myths and Maths*, Birkhäuser, Basel, 2013.
- [2] P. Potočnik, *Zapiski predavanj iz Diskretne Matematike I*, 1. izdaja, [ogled 29. 12. 15], dostopno na <http://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf>
- [3] *Tim Shallice*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 8. 10. 2015], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Tim_Shallice.
- [4] *Hamiltonian path*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 28. 12. 2015], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path.