Ničelna prisila

Ines Meršak

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Definicija

$G = (V, E)$ končen enostaven neusmerjen graf

1. $Z \subset V$ množica črnih vozlišč, $V \setminus Z$ množica belih vozlišč
2. $\forall u \in Z$, ki ima natanko enega belega soseda v, vozlišče v pobarvamo črno
3. drugo točko ponavljamo, dokler še lahko naredimo kakšno spremembo

Definicija

Množica ničelne prisile je tak $Z \subset V$, da so po koncu zgornjega postopka vsa vozlišča G pobarvana črno.

$Z(G) = \min\{|Z| : Z \subset V,\ Z \text{ je množica ničelne prisile } G\}$

Motivacija

$S_n(\mathbb{F})$ – simetrične matrike $n \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$

$A \in S_n(\mathbb{F})$: $\mathcal{G}(A)$ je graf z n vozlišči in povezavami $\{\{i,j\}\colon a_{ij} \neq 0, 1 \leq i < j \leq n\}$

Definicija

$\mathcal{S}(G) = \{A \in S_n(\mathbb{R})\colon \mathcal{G}(A) = G\}$
$\mathrm{mr}(G) = \min\{\mathrm{rang}\, A\colon A \in \mathcal{S}(G)\}$ *minimalni rang* grafa G
$\mathrm{M}(G) = \max\{\mathrm{korang}\, A\colon A \in \mathcal{S}(G)\}$ *maksimalni korang* grafa G

$$\mathrm{mr}(G) + \mathrm{M}(G) = |V|$$

Problem minimalnega ranga grafa

Določiti želimo parameter $\mathrm{mr}(G)$ za nek graf G.

Rešitev tega problema je ekvivalentna rešitvi problema maksimalne večkratnosti lastne vrednosti v družini $\mathcal{S}(G)$.

Obraten problem lastnih vrednosti grafa

Določiti želimo, kakšne so lahko lastne vrednosti matrik iz $\mathcal{S}(G)$.

$\operatorname{supp}(x) = \{i : x_i \neq 0\}$ nosilec vektorja x

Trditev

$\mathbb{F}$ polje, $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\operatorname{korang} A > k$ za nek $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$. Za poljubno množico k indeksov I obstaja neničelni vektor $x \in \ker A$, da je $\operatorname{supp}(x) \cap I = \emptyset$.

Trditev

Z množica ničelne prisile grafa G, $A \in \mathcal{S}(\mathbb{F}, G)$. Če $x \in \ker A$ in $\operatorname{supp}(x) \cap Z = \emptyset$, je $x = 0$.

Trditev

$Z \subseteq V$ množica ničelne prisile grafa G. Velja $\mathrm{M}^{\mathbb{F}}(G) \leq |Z|$ in torej $\mathrm{M}^{\mathbb{F}}(G) \leq Z(G)$ za poljubno polje $\mathbb{F}$.

$Z(G) = \mathrm{M}(G)$

Izrek

Za naslednje družine grafov velja $Z(G) = \mathrm{M}(G)$:

1. *vsi grafi G z $|G| \leq 6$*
2. P_n, C_n, K_n
3. *drevesa*

Karakterizacija grafov z ekstremnimi $Z(G)$

Trditev

$$Z(G) = 1 \iff G = P_n \text{ za } n \geq 1$$

Trditev

Naj bo G povezan graf z $|G| \geq 2$. Potem velja

$$Z(G) = |G| - 1 \iff G = K_{|G|}$$

$$Z(C_n) = 2 \text{ za } n \geq 3$$

$$Z(S_n) = n - 2 \text{ za } n \geq 4$$

Kartezični produkt

Definicija

Kartezični produkt grafov $G \,\square\, H$ je graf, za katerega velja:

1. *množica vozlišč je $V(G) \times V(H)$,*
2. *vozlišči (u, u') in (v, v') sta sosednji $\iff$*
   - *$u = v$ in $u' \sim v'$ v H ali*
   - *$u' = v'$ in $u \sim v$ v G.*

Trditev

$$Z(G \,\square\, H) \leq \min\{Z(G) \cdot |H|, Z(H) \cdot |G|\}$$

$$Q_n = Q_{n-1} \,\square\, K_2 \implies Z(Q_n) \leq 2^{n-1}$$

Zgornja meja

Izrek

Naj bo G graf z n vozlišči, največjo stopnjo vozlišča označimo z Δ in privzamemo, da je najmanjša stopnja vozlišča vsaj 1.

1. $Z(G) \leq \frac{\Delta}{\Delta+1}n$
2. *Če je G povezan in velja $\Delta \geq 2$, potem $Z(G) \leq \frac{(\Delta-2)n+2}{\Delta-1}$*