Ničelna prisila

Ines Meršak

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Definicija

$G = (V, E)$ končen enostaven neusmerjen graf

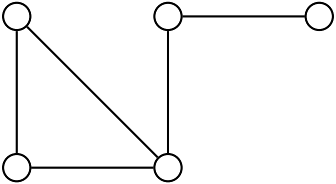
1. $Z \subset V$ množica črnih vozlišč, $V \setminus Z$ množica belih vozlišč
2. $\forall u \in Z$, ki ima natanko enega belega soseda v, vozlišče v pobarvamo črno
3. drugo točko ponavljamo, dokler še lahko naredimo kakšno spremembo

Definicija

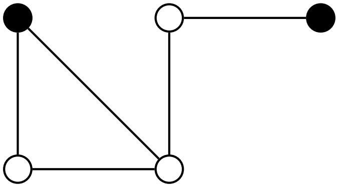
Množica ničelne prisile je tak $Z \subset V$, da so po koncu zgornjega postopka vsa vozlišča G pobarvana črno.

$Z(G) = \min\{|Z| \colon Z \subset V,\ Z \text{ je množica ničelne prisile } G\}$

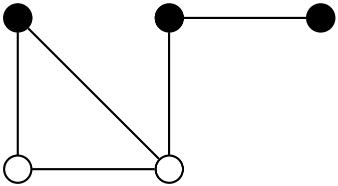
Primer



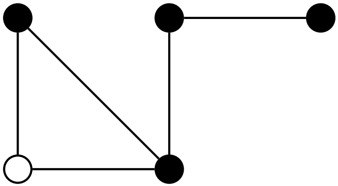
Primer



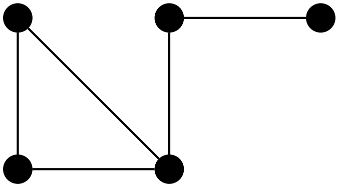
Primer



Primer



Primer



Definicija

$G = (V, E)$ končen enostaven neusmerjen graf

1. $Z \subset V$ množica črnih vozlišč, $V \setminus Z$ množica belih vozlišč
2. $\forall u \in Z$, ki ima natanko enega belega soseda v, vozlišče v pobarvamo črno
3. drugo točko ponavljamo, dokler še lahko naredimo kakšno spremembo

Definicija

Množica ničelne prisile je tak $Z \subset V$, da so po koncu zgornjega postopka vsa vozlišča G pobarvana črno.
$Z(G) = \min\{|Z| \colon Z \subset V,\ Z \text{ je množica ničelne prisile } G\}$

Zgornja in spodnja meja

Za ničelno prisilo velja:

$$Z(G) \leq n(G) - 1$$

$$Z(G) \geq 1$$

Spodnjo mejo lahko s krajšim premislekom hitro izboljšamo:

$$Z(G) \geq \delta(G)$$

Motivacija

$S_n(\mathbb{R})$ – simetrične matrike $n \times n$

$A \in S_n(\mathbb{R})$: $\mathcal{G}(A)$ je graf z n vozlišči in povezavami $\{\{i, j\}: a_{ij} \neq 0,\ 1 \leq i < j \leq n\}$

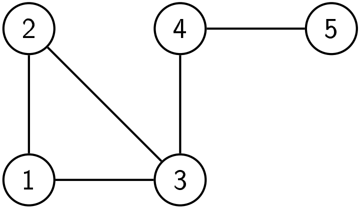
Definicija

$\mathcal{S}(G) = \{A \in S_n(\mathbb{R}): \mathcal{G}(A) = G\}$
$\mathrm{mr}(G) = \min\{\mathrm{rang}\, A: A \in \mathcal{S}(G)\}$ *minimalni rang grafa G*
$M(G) = \max\{\mathrm{korang}\, A: A \in \mathcal{S}(G)\}$ *maksimalni korang grafa G*

$$\mathrm{mr}(G) + M(G) = n(G)$$

Primer

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 13 & 6.9 & 0 & 0 \\ 3 & 6.9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Problem minimalnega ranga grafa

Določiti želimo parameter $\mathrm{mr}(G)$ za nek graf G.

Trditev

$Z \subseteq V$ množica ničelne prisile grafa G.
Velja $M(G) \leq |Z|$ in torej $M(G) \leq Z(G)$.

Izrek

Za naslednje družine grafov velja $Z(G) = M(G)$:

1. *vsi grafi G z $|G| \leq 6$,*
2. P_n, C_n, K_n,
3. *drevesa.*

Pot

$$Z(P_n) = 1$$

$$Z(P_n) \geq \delta(P_n) = 1$$

Pot

$$Z(P_n) = 1$$

$$Z(P_n) \geq \delta(P_n) = 1$$

Pot

$$Z(P_n) = 1$$

$$Z(P_n) \geq \delta(P_n) = 1$$

Pot

$$Z(P_n) = 1$$

$$Z(P_n) \geq \delta(P_n) = 1$$

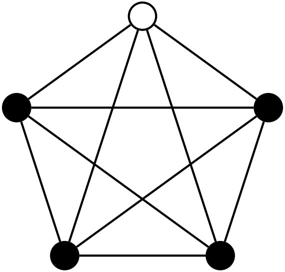
Pot

$$Z(P_n) = 1$$

$$Z(P_n) \geq \delta(P_n) = 1$$

Polni graf

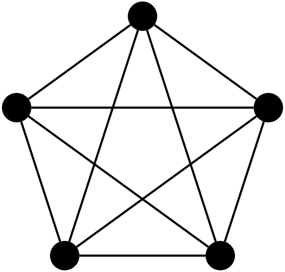
$$Z(K_n) = n - 1$$



$$Z(K_n) \geq \delta(K_n) = n - 1$$

Polni graf

$$Z(K_n) = n - 1$$



$$Z(K_n) \geq \delta(K_n) = n - 1$$

Karakterizacija grafov z ekstremnimi $Z(G)$

Trditev

$$Z(G) = 1 \iff G = P_n \text{ za } n \geq 1$$

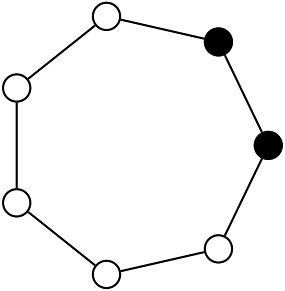
Trditev

Naj bo G povezan graf z $n(G) \geq 2$. Potem velja

$$Z(G) = n(G) - 1 \iff G = K_{n(G)}$$

Cikel

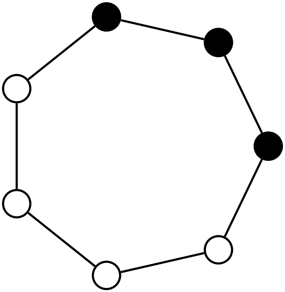
$$Z(C_n) = 2$$



$$Z(C_n) \geq \delta(C_n) = 2$$

Cikel

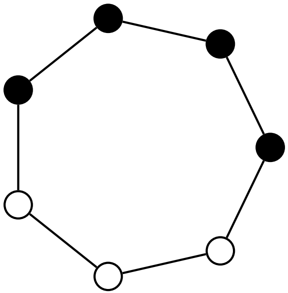
$$Z(C_n) = 2$$



$$Z(C_n) \geq \delta(C_n) = 2$$

Cikel

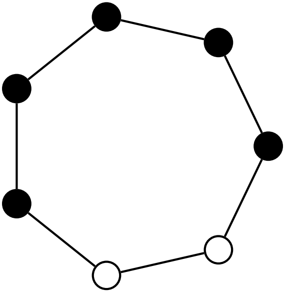
$$Z(C_n) = 2$$



$$Z(C_n) \geq \delta(C_n) = 2$$

Cikel

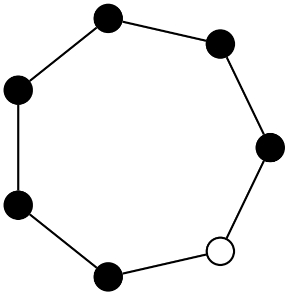
$$Z(C_n) = 2$$



$$Z(C_n) \geq \delta(C_n) = 2$$

Cikel

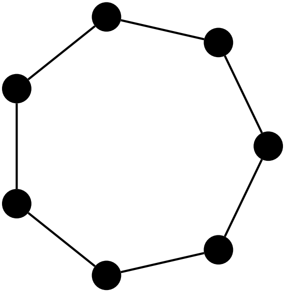
$$Z(C_n) = 2$$



$$Z(C_n) \geq \delta(C_n) = 2$$

Cikel

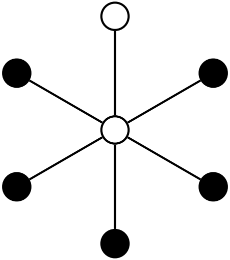
$$Z(C_n) = 2$$



$$Z(C_n) \geq \delta(C_n) = 2$$

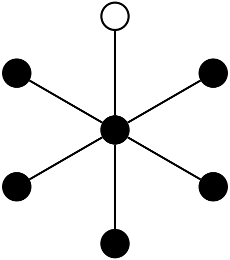
Zvezda

$$Z(S_n) = n - 1$$



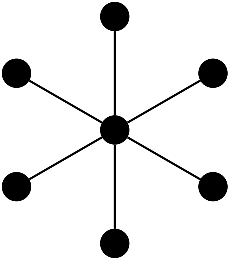
Zvezda

$$Z(S_n) = n - 1$$



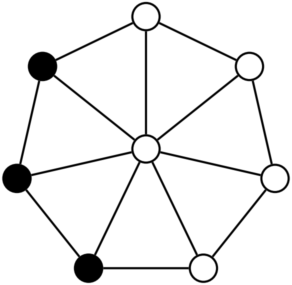
Zvezda

$$Z(S_n) = n - 1$$



Kolo

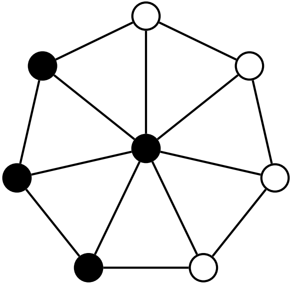
$$Z(W_n) = 3$$



$$Z(W_n) \geq \delta(W_n) = 3$$

Kolo

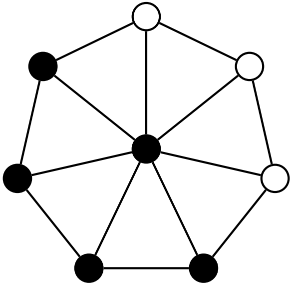
$$Z(W_n) = 3$$



$$Z(W_n) \geq \delta(W_n) = 3$$

Kolo

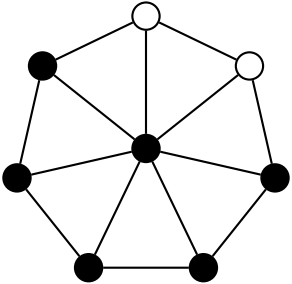
$$Z(W_n) = 3$$



$$Z(W_n) \geq \delta(W_n) = 3$$

Kolo

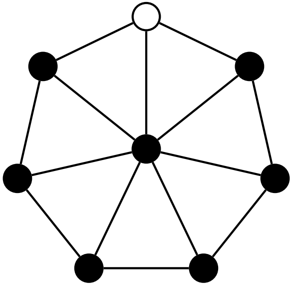
$$Z(W_n) = 3$$



$$Z(W_n) \geq \delta(W_n) = 3$$

Kolo

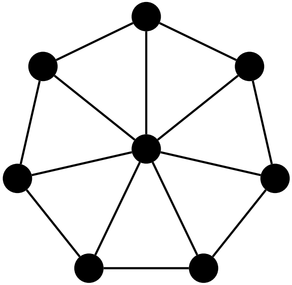
$$Z(W_n) = 3$$



$$Z(W_n) \geq \delta(W_n) = 3$$

Kolo

$$Z(W_n) = 3$$



$$Z(W_n) \geq \delta(W_n) = 3$$

Preverljivost

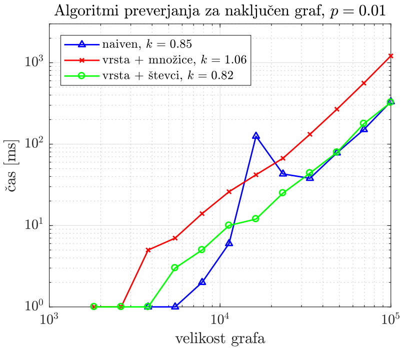
Ali obstaja množica ničelne prisile $\leq k$?

Želimo algoritem, ki preveri, ali je dana množica za dan graf res množica ničelne prisile.

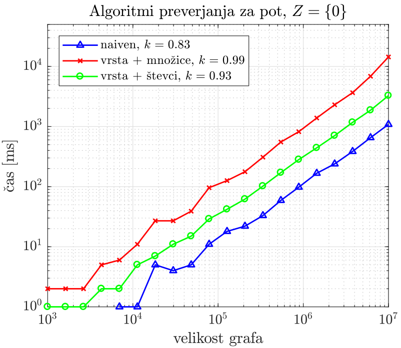
Tri implementacije:

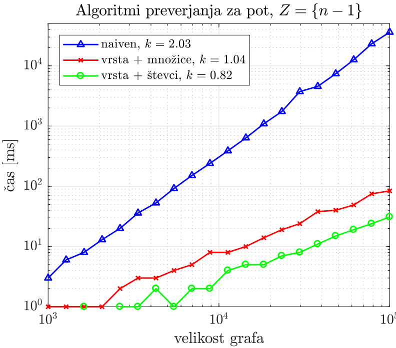
- naivna,
- z vrsto in množicami belih sosedov,
- z vrsto in seznamom števcev belih sosedov.

Model Erdős–Rényi: vsako povezavo izberemo z verjetnostjo p.



Slika: Primerjava časov izvajanja v odvisnosti od velikosti grafa za naključno generirane grafe G po modelu Erdős–Rényi.





Slika: Primerjava časov izvajanja za poti v odvisnosti od velikosti; pri tem je na levi strani izbrana začetna množica $\{0\}$, na desni pa $\{n-1\}$.

Eksponentni algoritem

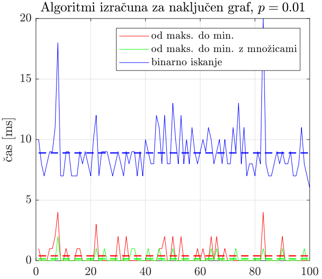
Algoritem 1

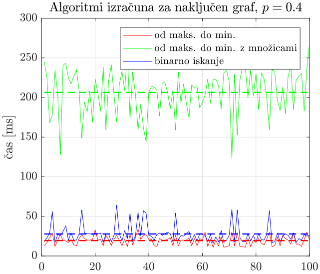
Vhod: Graf $G = (V, E)$.
Izhod: Število ničelne prisile $Z(G)$.

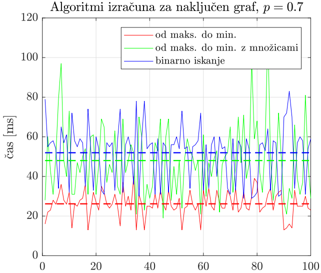
1: $z \leftarrow n(G) + 1$
2: **for each** Z **in** 2^V **do**
3: **if** preveri$(G, Z) \wedge |Z| < z$ **then**
4: $z \leftarrow |Z|$
5: **end if**
6: **end for**
7: **return** z

Trije načini pregleda množic iz 2^V:

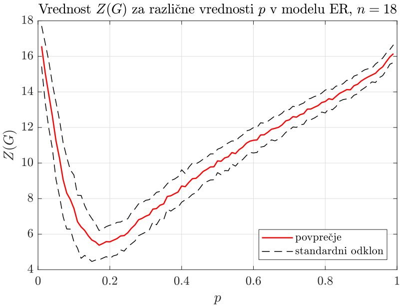
- padajoč,
- padajoč, pregledujemo le podmnožice množic ničelne prisile,
- bisekcija.

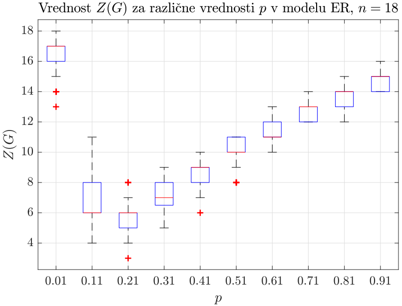

Algoritmi izračuna za naključen graf, $p = 0.01$
od maks. do min.
od maks. do min. z množicami
binarno iskanje
čas [ms]
0
5
10
15
20
0
20
40
60
80
100


Algoritmi izračuna za naključen graf, $p = 0.4$
od maks. do min.
od maks. do min. z množicami
binarno iskanje
čas [ms]
0
50
100
150
200
250
300
0
20
40
60
80
100


Algoritmi izračuna za naključen graf, $p = 0.7$
od maks. do min.
od maks. do min. z množicami
binarno iskanje
čas [ms]
0
20
40
60
80
100
120
0
20
40
60
80
100

Distribucija ničelne prisile za E-R model





Slika: Distribucija ničelne prisile za model Erdős–Rényi, za vsak p je ničelna prisila izračunana za 100 naključno generiranih grafov.

NP-polnost

Problem iskanja množice ničelne prisile je NP-težek.

Problem iskanja povezane množice ničelne prisile je prav tako NP-težek.

Za drevesa znamo ničelno prisilo izračunati v $O(n)$.