UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Vesna Iršič

POKRIVANJA VOZLIŠČ GRAFOV Z NAJKRAJŠIMI POTMI

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Sandi Klavžar

Ljubljana, 2017

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Izjava o avtorstvu, istovetnosti tiskane in elektronske verzije magistrskega dela in objavi osebnih podatkov študenta

Spodaj podpisana študentka **Vesna Iršič** avtorica **magistrskega dela** (v nadaljevanju: pisnega zaključnega dela študija) z naslovom:

Pokrivanja vozlišč grafov z najkrajšimi potmi

IZJAVLJAM

1. *Obkrožite eno od variant a) ali b)*

   a) da sem pisno zaključno delo študija izdelala samostojno;

   b) da je pisno zaključno delo študija rezultat lastnega dela več kandidatov in izpolnjuje pogoje, ki jih Statut UL določa za skupna zaključna dela študija ter je v zahtevanem deležu rezultat mojega samostojnega dela;

   pod mentorstvom **prof. dr. Sandija Klavžarja**;

2. da je tiskana oblika pisnega zaključnega dela študija istovetna elektronski obliki pisnega zaključnega dela študija;

3. da sem pridobila vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v pisnem zaključnem delu študija in jih v pisnem zaključnem delu študija jasno označila;

4. da sem pri pripravi pisnega zaključnega dela študija ravnala v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobila soglasje etične komisije;

5. da soglašam, da se elektronska oblika pisnega zaključnega dela študija uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom fakultete;

6. da na UL neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja pisnega zaključnega dela študija na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija UL;

7. da dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v pisnem zaključnem delu študija in tej izjavi, skupaj z objavo pisnega zaključnega dela študija.

Kraj: Podpis študentke:

Datum:

Zahvala

Mentorju, prof. dr. Sandiju Klavžarju, se zahvaljujem za vse dobre nasvete, hitro odzivnost in pomoč pri prvih korakih v svet pisanja člankov.

Zahvaljujem se svoji družini in fantu za izjemno podporo ob pisanju magistrskega dela in tekom celotnega študija.

Zahvala gre tudi sošolcem, za vse matematične in nematematične pogovore, ter prijateljem, ki so v študijskih letih poskrbeli za zadostno količino smeha in sprostitve.

Hvala!

Kazalo

Program dela

Magisterij naj obravnava znane rezultate iz literature, ki se nanašajo na pokrivanja vseh vozlišč grafov s potmi. Najprej naj bodo detektirane inačice tega problema in zatem narejen kolikor se da popoln pregled znanih rezultatov. Rezultati naj bodo kritično primerjani med seboj. V primerih, ko za katero izmed invariant ni znanega rezultata, hkrati pa je znan vzporeden rezultat za neko drugo invarianto, naj magisterij poskuša zapolniti vrzel iz literature.

prof. dr. Sandi Klavžar

Pokrivanja vozlišč grafov z najkrajšimi potmi

Povzetek

Delo definira geodetsko število, krepko geodetsko število in število izometričnih poti grafa. Predstavljen je pregled vrednosti za nekatere družine grafov in grafi, ki dosegajo ekstremne vrednosti obravnavanih invariant. Raziskane so tudi povezave s premerom grafa. Geodetsko število grafa z določenim premerom je bilo že raziskano, pri krepkem geodetskem številu in številu izometričnih poti je določenih nekaj novih lastnosti. V zadnjem poglavju so določene še lastnosti za kartezične produkte grafov, in sicer za prizme in mreže.

Covering vertices of graphs with shortest paths

Abstract

The work defines geodetic number, strong geodetic number and isometric path number of a graph. Values for some families of graphs and graphs with extremal values of these invariants are presented. Connection with the diamter of a graph is also explored. Geodetic number of a graph with specified dimater has already been studied, for strong geodetic number and isometric path number new properties are proved. In the last section, properties for Cartesian products of graphs, especially for prisms and grids, are explained.

Math. Subj. Class. (2010): 05C38, 05C12, 05C05, 05C99

Ključne besede: teorija grafov, najkrajša pot, izometrična pot, geodetsko število, krepko geodetsko število, število izometričnih poti

Keywords: graph theory, shortest path, isometric path, geodetic number, strong geodetic number, isometric path number

1 Uvod

V teoriji grafov se srečamo s tremi različnimi invariantami, ki izhajajo iz pokrivanja vozlišč grafov z najkrajšimi potmi: geodetsko število, krepko geodetsko število in število izometričnih poti. V nadaljevanju bomo spoznali te tri koncepte, njihove lastnosti in povezave med njimi.

Geodetsko število so leta 1986 uvedli Harary, Loukakis in Tsouros (objavili šele leta 1993 ([7])), večina člankov pa je izšla v zadnjih 20 letih. Koncept krepkega geodetskega števila so leta 2016 uvedli Manuel et al. ([11]). Število izometričnih poti pa je leta 1997 uvedla Fitzpatrick ([13]).

Motivacija za obravnavo geodetskega števila grafov izhaja iz socialnih omrežij ([11]). Socialno omrežje lahko predstavimo kot (velik) graf, v katerem vozlišča predstavljajo člane omrežja, povezave pa komunikacijo med člani. Dva člana (ki nista sosedna v grafu) lahko komunicirata drug z drugim posredno, preko ostalih članov omrežja. V nekaterih primerih je takšna komunikacija omejena zgolj na najkrajše poti med članoma. Torej si lahko predstavljamo, da člani, ki ležijo na neki najkrajši poti, tvorijo komunikacijsko skupino, ki jo koordinirata člana na krajiščih te najkrajše poti. Naravno vprašanje je, najmanj koliko koordinatorjev v omrežju potrebujemo, če želimo, da vsak član omrežja leži v neki koordinacijski skupini (in torej na neki najkrajši poti med dvema koordinatorjema). Kot bomo videli v nadaljevanju, je število potrebnih koordinatorjev ravno geodetsko število grafa.

Geodetsko število grafa se uporablja tudi v teoriji konveksnosti ([2, 8, 10, 14]) in je posredno povezano s "skrčitvenimi igrami na grafih" ([6]). To so igre na grafu za dva igralca z naslednjimi pravili. Množica L je v začetku prazna. Igralca nato izmenično izbirata vozlišča, ki še niso v množici L. Ko igralec izbere neko vozlišče v, v L dodamo to vozlišče in vsa vozlišča, ki ležijo na neki najkrajši poti med v in preostalimi vozlišči iz množice L. Igre je konec, ko L vsebuje vsa vozlišča grafa. V osnovni verziji igre izgubi tisti igralec, ki ne more več narediti poteze.

Tudi problem krepkega geodetska števila izhaja iz socialnih omrežij ([11]). Situacija je podobna kot pri geodetskem številu, le da pri obravnavi socialnega omrežja zahtevamo, da lahko en par koordinatorjev usmerja le eno komunikacijsko skupino. Isti koordinator lahko še vedno usmerja več skupin, vendar vsako v paru z drugim koordinatorjem. Najmanjše število koordinatorjev, ki jih v takšnem primeru potrebujemo v omrežju, da še vedno vsak član leži v neki koordinacijski skupini, je enako krepkemu geodetskemu številu.

Podobno lahko motiviramo tudi problem pokrivanja vozlišč grafa z izometričnimi potmi. Člani omrežja, ki ležijo na neki najkrajši poti, tvorijo komunikacijsko skupino, ki pa ne potrebuje koordinatorjev. Vprašamo se, najmanj koliko koordinacijskih skupin potrebujemo, da vsak član omrežja leži v vsaj eni skupini. Kot bomo videli v nadaljevanju, je odgovor ravno število izometričnih poti grafa.

Zgornji opis ni klasična motivacija za študij števila izometričnih poti. Problem se je razvil v povezavi z igro "policaji in ropar" ([4]). Igro na povezanem grafu igrata dva igralca – eden izmed njiju upravlja poteze k policajev, drugi je ropar. Na začetku prvi igralec izbere k vozlišč, kjer se nahajajo policaji, nato drugi igralec izbere roparjevo začetno vozlišče. Zatem izmenično premikata svoje igralce. Prvi igralec lahko vsakega policaja premakne v njemu sosednje vozlišče, ali pa ga pusti na istem mestu. Drugi igralec lahko roparja prav tako premakne na sosednje vozlišče ali nikamor. Policaji zmagajo igro, če se vsaj en policaj znajde v istem vozlišču kot ropar. Ropar zmaga, če se to nikoli ne zgodi.

Najmanjše število policajev, ki zagotovi, da na nekem grafu vedno zmagajo policaji, imenujemo policijsko število grafa. Izkaže se ([4]), da lahko policaj, ki se premika po neki najkrajši poti v grafu, ujame roparja, če se ta pojavi na tej poti. Če torej vsa vozlišča grafa pokrijemo z najkrajšimi potmi in vsaki poti dodelimo policaja, bo ropar gotovo ujet. Zato je za poljuben graf policijsko število manjše ali enako številu izometričnih poti.

V magistrskem delu najprej definiramo geodetsko število, krepko geodetsko število in število izometričnih poti ter opazimo nekaj osnovnih lastnosti (poglavje 2). Sledi pregled vrednosti za nekatere družine grafov (poglavje 3). Obravnava poti, ciklov, polnih grafov in dreves je bila že raziskana, vrednosti za kolesa določimo na novo. Bolj zapletena je obravnava polnih dvodelnih (in r-partitnih) grafov. V nadaljevanju raziščemo grafe, ki dosegajo ekstremne vrednosti obravnavanih invariant (poglavje 4).

Sledi iskanje povezav s premerom grafa (poglavje 5). Geodetsko število grafa z določenim premerom je bilo že raziskano, pri krepkem geodetskem številu in številu izometričnih poti določimo nekaj novih lastnosti. V zadnjem poglavju se posvetimo še kartezičnim produktom grafov, in sicer prizmam in mrežam. Geodetsko število prizem je bilo že raziskano, pri krepkem geodetskem številu dokažemo nekaj novih rezultatov, vseeno pa ostajajo še nerešeni problemi. Tudi število izometričnih poti prizem je še precej neraziskano. Po drugi strani je število izometričnih poti in geodetsko število za mreže znano, krepko geodetsko število je že precej raziskano, vendar v vsej splošnosti še ni razrešeno.

2 Osnovne definicije

V nadaljevanju se najprej spomnemo osnovnih definicij in pojmov iz teorije grafov, nato pa uvedemo vse tri invariante, ki izhajajo iz pokrivanja vozlišč grafov z najkrajšimi potmi.

S pojmom *graf* razumemo neusmerjen končen graf brez zank in vzporednih povezav. Z $V(G)$ označujemo množico vozlišč grafa G, z $E(G)$ množico njegovih povezav in z $\mathrm{n}(G)$ število vozlišč oz. *red grafa*. *Soseščina* vozlišča v je množica njegovih sosedov in jo označimo z $N(v)$. Če sta vozlišči u in v sosedni, pišemo $u \sim_G v$ oz. $u \sim v$. V nadaljevanju se omejimo le na **povezane grafe**, saj lahko sicer obravnavamo vsako komponento posebej. Prav tako se omejimo na **netrivialne grafe**, to so grafi na vsaj dveh vozliščih.

Oglejmo si nekaj pojmov iz metrične teorije grafov. *Pot* v grafu je podgraf, ki je izomorfen grafu poti P_n z n vozlišči. *Dolžina poti* je število njenih povezav. Pot med vozliščema u in v na kratko imenujemo u, v*-pot.* Najkrajšo u, v-pot imenujemo u, v*-geodetka*, njena dolžina je enaka *razdalji* $\mathrm{d}_G(u, v)$ med vozliščema u in v. Pravimo, da množica poti *pokrije* graf G, če vsako vozlišče leži na neki poti iz množice.

Spomnimo se, da je *premer* ali *diameter* grafa G, $\mathrm{diam}(G)$, največja razdalja med dvema vozliščema v grafu G, tj. $\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} \mathrm{d}(u, v)$. *Ekscentričnost vozlišča u,* $\mathrm{ecc}(u)$, je maksimalna razdalja med u in ostalimi vozlišči grafa G, tj. $\mathrm{ecc}(u) = \max_{v \in V(G)} \mathrm{d}(u, v)$. *Polmer* ali *radij grafa G,* $\mathrm{rad}(G)$, je minimalna ekscentričnost vseh vozlišč, tj. $\mathrm{rad}(G) = \min_{u \in V(G)} \mathrm{ecc}(u)$. Preko ekscentričnosti bi lahko definirali tudi premer grafa, in sicer kot $\mathrm{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} \mathrm{ecc}(u)$, kar se seveda ujema s prej navedeno definicijo.

Oglejmo si še definicijo kartezičnega produkta grafov in nekaj osnovnih lastnosti.

Definicija 2.1. *Kartezični produkt $G \,\square\, H$ grafov G in H* je graf z množico vozlišč $V(G) \times V(H)$, kjer sta vozlišči (g, h) in (g', h') sosedni, če je bodisi $g \sim_G g'$ in $h = h'$, bodisi $g = g'$ in $h \sim_H h'$.

Če je $h \in V(H)$, je podgraf grafa $G \,\square\, H$, induciran z vozlišči $\{(x, h) \ ; \ x \in V(G)\}$, izomorfen grafu G. Označimo ga z G^h in imenujemo G-sloj. Analogno dobimo H-sloj, ki ga označimo z ${}^gH$, kjer je $g \in V(G)$.

Kartezični produkt grafov je komutativen in asociativen. Tudi metrična struktura produkta ni zapletena. Za vozlišči (g, h) in (g', h') grafa $G \,\square\, H$ velja

$$\mathrm{d}_{G \,\square\, H}((g, h), (g', h')) = \mathrm{d}_G(g, g') + \mathrm{d}_H(h, h').$$

Uporabljali bomo še oznako $[n] = \{1, \ldots, n\}$ za naravno število n.

2.1 Geodetsko število

Oglejmo si pojme, ki jih potrebujemo za definicijo geodetskega števila ([1]), in nekaj osnovnih lastnosti te invariante.

Definicija 2.2. Naj bo G graf in $u, v \in V(G)$ vozlišči. *(Geodetski) interval, I(u, v)*, je množica vozlišč, ki ležijo na neki najkrajši u, v-poti, tj.

$$I(u, v) = \{x \in V(G) \ ; \ x \text{ leži na neki najkrajši } u, v\text{-poti}\}.$$

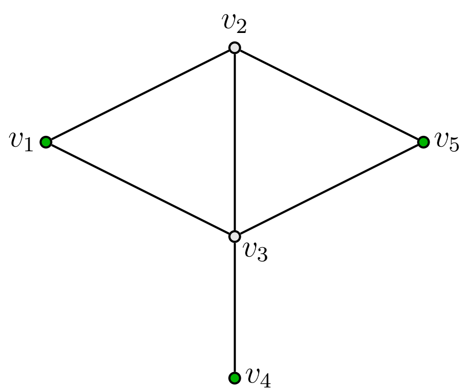
Naj bo $S \subseteq V(G)$ podmnožica vozlišč grafa. *(Geodetsko) zaprtje, I[S]*, je množica

$$I[S] = \bigcup_{u,v \in S} I(u, v) = \{x \in V(G) \ ; \ \text{obstajata takšna } u, v \in S, \text{ da je } x \in I(u, v)\}.$$

Podmnožica vozlišč $S \subseteq V(G)$ je *geodetska množica grafa* G, če velja $I[S] = V(G)$.

Oglejmo si preprost primer.

Primer 2.3. Naj bo G graf kot na sliki 1.



Slika 1: Graf G. Vozlišča iz množice S so obarvana zeleno.

Naj bo $S = \{v_1, v_4, v_5\}$. Ker sta v grafu dve najkrajši poti med vozliščema v_1 in v_5 (ena poteka preko vozlišča v_2, druga pa preko v_3), je interval $I(v_1, v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$. Določimo še intervala $I(v_1, v_4) = \{v_1, v_3, v_4\}$ in $I(v_5, v_4) = \{v_3, v_4, v_5\}$. Zdaj zlahka določimo zaprtje množice S: $I[S] = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = V(G)$, torej je S geodetska množica.

V splošnem grafu ni težko najti neke geodetske množice. Na primer množica vseh vozlišč je vedno geodetska. Vendar se ob tem pojavi vprašanje, kako velika in kakšna je čim manjša geodetska množica nekega grafa.

Definicija 2.4. *Geodetsko število $g(G)$ grafa G* je moč najmanjše geodetske množice, tj.

$$\mathrm{g}(G) = \min\{|S| \ ; \ S \subseteq V(G) \text{ geodetska množica}\}.$$

Pri prejšnjem primeru (2.3) smo videli, da je S geodetska množica, zato iz tega sledi $\mathrm{g}(G) \leq |S| = 3$. Ker je graf majhen, lahko na roke preverimo, da nobena množica velikosti 2 ni geodetska. Torej je $\mathrm{g}(G) = 3$.

Razmislili smo že, da velja $\mathrm{g}(G) \leq \mathrm{n}(G)$. Ker obravnavamo grafe G na vsaj dveh vozliščih, očitno velja tudi $\mathrm{g}(G) \geq 2$, saj z geodetsko množico moči 1 pokrijemo le eno vozlišče. Izpeljali smo naslednjo preprosto trditev.

Trditev 2.5. *Za vsak graf G velja*

$$2 \leq \mathrm{g}(G) \leq \mathrm{n}(G).$$

Tako spodnja kot zgornja meja sta lahko tudi doseženi. Zgornja meja je dosežena natanko pri polnih grafih, spodnja pa na primer pri poteh in sodih ciklih. Več o tem bomo spoznali v nadaljevanju (poglavje 4).

2.2 Krepko geodetsko število

Geodetskemu številu podoben, vendar hkrati zelo različen pojem, je krepko geodetsko število ([11]). Oglejmo si njegovo definicijo in osnovne lastnosti.

Definicija 2.6. Naj bo G graf in $S \subseteq V(G)$ podmnožica vozlišč grafa. Če za vsak par različnih vozlišč $u, v \in S$ izberemo fiksno u, v-geodetko in jo označimo z $\widetilde{g}(u, v)$, lahko definiramo množico *izbranih oz. fiksiranih geodetk* $\widetilde{I}(S) = \{\widetilde{g}(u, v) \ ; \ u, v \in S, u \neq v\}$.

Množica S je *krepka geodetska množica*, če velja $V(\widetilde{I}(S)) = V(G)$ za neko množico $\widetilde{I}(S)$.

Dodatno označimo množico vseh geodetk med vozlišči iz S kot $I(S)$. Od tod izhaja tudi oznaka $\widetilde{I}(S)$.

Opozoriti velja, da sta množici $I(S)$ in $I[S]$ različni. Množica $I(S)$ vsebuje geodetke, množica $I[S]$ pa vozlišča. Seveda pa velja $V(I(S)) = I[S]$. Zavedati se je potrebno tudi razlike med množicama $I(S)$ in $\widetilde{I}(S)$. Prva vsebuje vse geodetke med vozlišči v S, druga pa za vsak par vozlišč le eno izbrano in fiksno geodetko. Očitno velja $\widetilde{I}(S) \subseteq I(S)$ in $|\widetilde{I}(S)| = \binom{|S|}{2}$.

Primer 2.7. Naj bo G graf kot na sliki 1 in $S = \{v_1, v_4, v_5\}$. Tedaj je $I(S) = \{(v_1, v_2, v_5), (v_1, v_3, v_5), (v_1, v_3, v_4), (v_4, v_3, v_5)\}$. Pri $\widetilde{I}(S)$ imamo dve možnosti – odvisno katero geodetko med v_1 in v_5 izberemo. Če izberemo geodetko preko vozlišča v_3, potem ne pokrijemo vseh vozlišč grafa G (vozlišče v_2 ostane nepokrito). Če pa izberemo geodetko preko v_2, torej $\widetilde{I}(S) = \{(v_1, v_2, v_5), (v_1, v_3, v_4), (v_4, v_3, v_5)\}$, so pokrita vsa vozlišča grafa (tj. $V(\widetilde{I}(S)) = V(G)$). Torej je S krepka geodetska množica.

Tudi pri problemu krepke geodetske množice ni težko najti vsaj enega primera: v splošnem je $V(G)$ krepka geodetska množica, kjer so izbrane fiksne geodetke kar vse povezave grafa. Spet se pojavi vprašanje, kakšna je velikost najmanjše krepke geodetske množice.

Definicija 2.8. *Krepko geodetsko število* $\mathrm{sg}(G)$ *grafa* G je moč najmanjše krepke geodetske množice v grafu G, tj.

$$\mathrm{sg}(G) = \min\{|S| \; ; \; S \subseteq V(G) \text{ krepka geodetska množica}\}.$$

Če se ponovno vrnemo k primeru 2.3, vidimo, da velja $\mathrm{sg}(G) \leq 3$. Spet lahko preverimo, da v resnici velja enačaj.

Z enakim sklepanjem kot pri geodetskem številu tudi tu izpeljemo preprosto lastnost.

Trditev 2.9. *Za vsak graf* G *velja*

$$2 \leq \mathrm{sg}(G) \leq \mathrm{n}(G).$$

Spodnja meja je dosežena natanko pri grafih poti, zgornja pa natanko pri polnih grafih (poglavje 4).

2.3 Število izometričnih poti

Tretja invarianta, vezana na pokrivanje vozlišč grafa s potmi, je število izometričnih poti ([13]). Ime izhaja iz pojma *izometrična pot* med vozliščema u in v, ki pomeni najkrajšo u,v-pot in je torej sopomenka u,v-geodetki. Poglejmo si, kako je definirana.

Definicija 2.10. *Število izometričnih poti grafa* G*,* $\mathrm{ip}(G)$, je najmanjše število izometričnih poti oz. geodetk, ki jih potrebujemo, da pokrijemo vsa vozlišča grafa G.

Primer 2.11. Spet vzemimo graf G s slike 1. Hitro vidimo, da zgolj z eno geodetko ne moremo pokriti vseh vozlišč grafa G. Lahko pa to storimo z dvema geodetkama – pri tem imamo celo več možnih izbir. Vozlišča lahko pokrijemo z $\{(v_1, v_2, v_5), (v_3, v_4)\}$ ali $\{(v_1, v_2, v_5), (v_2, v_3, v_4)\}$ ali $\{(v_1, v_2), (v_4, v_3, v_5)\}$ in podobno. Torej je $\mathrm{ip}(G) = 2$.

Tudi pri problemu števila izometričnih poti ni težko najti zgornje meje. Vsako vozlišče grafa je namreč izometrična pot (dolžine 0). Velja torej $\mathrm{ip}(G) \leq \mathrm{n}(G)$. Vendar se da to mejo še izboljšati. Po drugi strani pa $\mathrm{ip}(G)$ lahko zavzame tudi vrednost 1 (na primer za graf poti).

Trditev 2.12. *Naj bo* G *graf z* n *vozlišči. Tedaj velja*

$$1 \leq \mathrm{ip}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Dokaz. Dokazati moramo le zgornjo mejo. Označimo vozlišča grafa z $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ker je graf povezan, obstaja najkrajša pot od v_1 do v_2, ki seveda pokrije vozlišči v_1 in v_2. Podobno obstaja najkrajša pot med v_3 in v_4 in tako naprej. Tako dobimo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ poti, ki pokrijejo vsa vozlišča, razen morda v_n (če je n liho število). Po potrebi dodamo še pot (v_n) dolžine 0. Sledi, da z $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ izometričnimi potmi pokrijemo vsa vozlišča grafa. □

Izkaže se, da je spodnja meja dosežena natanko pri grafih poti, zgornja pa na primer pri polnih grafih (poglavje 4).

3 Vrednosti za nekatere družine grafov

Oglejmo si vrednosti geodetskega in krepkega geodetskega števila ter števila izometričnih poti za nekaj družin grafov. Ob tem spoznamo nekaj lastnosti vseh treh konceptov ter opazimo podobnosti in razlike med njimi.

3.1 Poti in cikli

Najprej obravnavajmo dve preprosti družini grafov – poti in cikle.

Graf poti P_n ($n \geq 2$) lahko pokrijemo z eno izometrično potjo, ki ima dve krajišči. Velja torej

$$\mathrm{g}(P_n) = \mathrm{sg}(P_n) = 2 \text{ in } \mathrm{ip}(P_n) = 1.$$

Oglejmo si še vrednosti za cikel. Označimo vozlišča z $V(C_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, pri čemer naj velja $v_i \sim v_{i+1}$ za $i \in [n-1]$ in $v_n \sim v_1$.

Cikla seveda ne moremo pokriti zgolj z eno izometrično potjo. Lahko pa ga pokrijemo z dvema potema, pri čemer vsaka poteka po eni strani oboda cikla: $\mathcal{P}_1 = (v_1, \ldots, v_{\lfloor n/2 \rfloor})$ in $\mathcal{P}_2 = (v_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \ldots, v_n, v_1)$. Poti $\mathcal{P}_1$ in $\mathcal{P}_2$ sta obe izometrični in skupaj pokrijeta vsa vozlišča cikla. Zato je

$$\mathrm{ip}(C_n) = 2.$$

Množica $S = \{v_1, v_{\lfloor n/2 \rfloor}, v_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\}$ je geodetska, saj so dobljene geodetke med vozlišči iz S ravno $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ in $\mathcal{P}_3 = (v_{\lfloor n/2 \rfloor}, v_{\lfloor n/2 \rfloor + 1})$. Torej je $\mathrm{g}(C_n) \leq 3$. Pri lihem ciklu so najkrajše poti med dvema vozliščema enolične, zato vsaka geodetska množica vsebuje vsaj tri vozlišča. Pri sodih ciklih pa je $S' = \{v_1, v_{n/2}\}$ tudi geodetska množica. Torej velja

$$\mathrm{g}(C_n) = \begin{cases} 2; & n \text{ sodo,} \\ 3; & n \text{ liho.} \end{cases}$$

Opazimo, da je zgoraj definirana množica S tudi krepka geodetska množica. Če bi obstajala krepka geodetska množica moči 2, bi z najkrajšo potjo med izbranima vozliščema pokrili vsa vozlišča cikla, kar pa ni mogoče. Zato je

$$\mathrm{sg}(C_n) = 3.$$

3.2 Polni grafi in kolesa

Oglejmo si vrednosti za polne grafe in izpeljimo še vrednosti za kolesa.

V polnem grafu je najkrajša pot med poljubnima vozliščema natanko povezava med njima. Torej so najkrajše poti enolične in pokrijejo le krajišči povezave. Zato velja

$$\mathrm{g}(K_n) = \mathrm{sg}(K_n) = n.$$

Iz trditve 2.12 sledi $\mathrm{ip}(K_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Ker vsaka izometrična pot v polnem grafu pokrije največ dve vozlišči, velja $\mathrm{ip}(K_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ Zato je

$$\mathrm{ip}(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Graf kolesa, W_n, $n \geq 3$, ima $n+1$ vozlišč: $\{u, v_1, \ldots, v_n\}$. Povezave grafa so $v_i \sim v_{i+1}$ za $i \in [n-1]$, $v_n \sim v_1$ in $u \sim v_i$ za $i \in [n]$. Vozlišča $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tvorijo obod cikla.

Če je $n = 3$, je $W_3 \cong K_4$, zato je $\mathrm{g}(W_3) = \mathrm{sg}(W_3) = 4$ in $\mathrm{ip}(W_3) = 2$.

Če je $n \geq 4$, je razdalja med različnima vozliščema v grafu W_n enaka 1 ali 2. Poti dolžine 1 so seveda enolične (to so povezave grafa). Pot dolžine 2 je enolična, če opazujemo vozlišči na obodu cikla, ki sta na obodu cikla oddaljeni za več kot 2.

Tedaj edina najkrajša pot med njima poteka skozi vozlišče u. Med vozliščema na obodu cikla, ki sta na obodu cikla oddaljeni za 2, pa imamo dve najkrajši poti – ena poteka skozi vmesno vozlišče na obodu cikla, druga pa skozi vozlišče u.

Trditev 3.1. *Za kolesa velja*

$$\mathrm{g}(W_n) = \begin{cases} 4; & n = 3, \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil; & n \geq 4. \end{cases}$$

Dokaz. Primer, ko je $n = 3$, smo že obravnavali. Naj bo sedaj $n \geq 4$.

Očitno je $\mathrm{g}(W_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, saj če izberemo vsako drugo vozlišče na obodu cikla, dobimo geodetsko množico. Razmislimo še, da velja neenakost v drugo smer.

Naj bo S poljubna geodetska množica. Če je u v S, poti med u in ostalimi vozlišči iz S ne pokrijejo nobenega vozlišča izven S. Poti, ki potekajo po obodu cikla med vozlišči v $S - \{u\}$, morajo torej pokriti vsa preostala vozlišča na obodu cikla. Torej mora S na obodu cikla vsebovati vsaj $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ vozlišč. Zato je $S \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Če u ni v množici S, morajo vozlišča iz S še vedno pokriti vsa preostala vozlišča na obodu cikla. Torej S vsebuje vsaj $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ vozlišč. Ker je $n \geq 4$, sta med temi vozlišči vsaj dve na razdalji 2. Ena izmed najkrajših poti med njima poteka preko vozlišča u. Torej je takšna množica res geodetska.

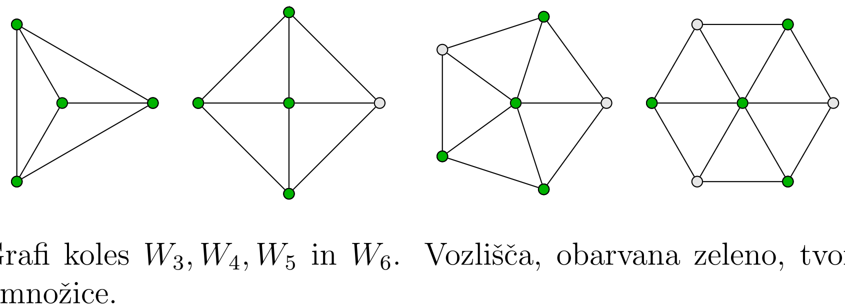
Torej za poljubno geodetsko množico velja $|S| \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ in zato $\mathrm{g}(W_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. □

S podobnim razmislekom lahko določimo krepko geodetsko število koles.

Trditev 3.2. *Za kolesa velja*

$$\mathrm{sg}(W_n) = \begin{cases} 4; & 3 \leq n \leq 6, \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil; & n \geq 7. \end{cases}$$

Dokaz. Za $3 \leq n \leq 6$ je primerna krepka geodetska množica sestavljena iz vozlišča u in treh vozlišč iz oboda cikla, pri čemer so le-ta med seboj čim bolj oddaljena (glej sliko 2). Če izberemo najkrajše poti med zaporednimi vozlišči na obodu cikla, pokrijemo vsa vozlišča na obodu. Vozlišče u je pokrito, ker je v geodetski množici. Da se grafa v tem primeru ne da pokriti z manj vozlišči, preverimo na roke, saj gre le za nekaj majhnih primerov.



Slika 2: Grafi koles W_3, W_4, W_5 in W_6. Vozlišča, obarvana zeleno, tvorijo krepke geodetske množice.

Naj bo sedaj $n \geq 7$. Naj bo S poljubna krepka geodetska množica. Če je u v S, poti med u in ostalimi vozlišči iz S ne pokrijejo nobenega vozlišča izven S. Poti, ki potekajo po obodu cikla, med vozlišči v $S - \{u\}$ morajo torej pokriti vsa preostala vozlišča na obodu cikla. Torej mora S na obodu cikla vsebovati vsaj $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ vozlišč.

Za vsak par zaporednih vozlišč na obodu cikla izberemo najkrajšo pot med njima. Torej je $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Če u ni v množici S, morajo vozlišča iz S še vedno pokriti vsa preostala vozlišča na obodu cikla. Torej S vsebuje vsaj $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vozlišč, to med drugim pomeni vsaj štiri vozlišča. Za vsak par zaporednih vozlišč na obodu cikla izberemo najkrajšo pot med njima. Ker imamo na obodu cikla v S vsaj štiri vozlišča, dve med njimi gotovo nista zaporedni. Med njima še nismo fiksirali najkrajše poti – izberemo tisto, ki poteka preko vozlišča u. Torej je $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Za poljubno krepko geodetsko množico torej velja $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Če izberemo vsako drugo vozlišče na obodu cikla in poti, kot je opisano zgoraj, dobimo krepko geodetsko množico moči $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

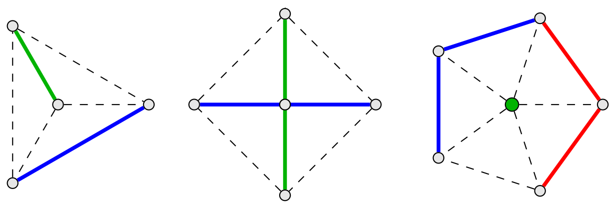
Opomba 3.3. Zgoraj opisana krepka geodetska množica ni ustrezna za primer $4 \leq n \leq 6$, saj v tem primeru dobimo le tri vozlišča na obodu cikla.

Oglejmo si še število izometričnih poti za kolesa.

Trditev 3.4. *Za kolesa velja*

$$\mathrm{ip}(W_n) = \begin{cases} 2; & n = 3, 4, \\ 3; & n = 5, \\ \lceil \frac{n+1}{3} \rceil; & n \geq 6. \end{cases}$$

Dokaz. Primere $n = 3, 4, 5$ lahko obravnavamo na roke (primere pokritij vidimo na sliki 3).



Slika 3: Grafi koles W_3, W_4 in W_5 z označenimi pokritij z izometričnimi potmi. Različne barve označujejo različne poti.

Naj bo sedaj $n \geq 6$. Vsaka najkrajša pot v grafu W_n lahko pokrije največ tri vozlišča. Zato velja $\mathrm{ip}(W_n) \geq \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$. Zadostuje torej najti ustrezno množico $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ poti, ki pokrije vsa vozlišča grafa.

Naj bo $\mathcal{P} = \{(v_2, v_3, v_4), (v_1, u, v_5), (v_6, v_7, v_8), (v_9, v_{10}, v_{11}), \ldots\}$. Pri tem je zadnja pot v množici morda krajša (sestavljena le iz enega vozlišča ali le iz ene povezave). Poti v množici $\mathcal{P}$ so res izometrične, saj zaradi $n \geq 6$ vozlišči v_1 in v_6 nista sosedni. Moč množice $\mathcal{P}$ je $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ in poti iz te množice pokrijejo vsa vozlišča grafa. □

3.3 Drevesa

Posvetimo se obravnavi pokrivanja vozlišč v drevesih. Pri tem spoznamo še pomembno splošno lastnost.

Naj bo T drevo in $l \in V(T)$ njegov list. Očitno skozi l poteka geodetka natanko tedaj, ko se v l začne ali konča. Iz tega sledi, da vsaka geodetska množica drevesa T

zagotovo vsebuje vse liste drevesa. Vendar podoben sklep ne velja le za liste, ampak za širšo družino vozlišč.

Definicija 3.5. Vozlišče v grafa G je *simplicialno vozlišče*, če njegova soseščina inducira polni graf.

Oglejmo si povezavo med simplicialnimi vozlišči in geodetskim številom grafa.

Lema 3.6 ([3])**.** *Vsaka geodetska množica vsebuje vsa simplicialna vozlišča grafa.*

Dokaz. Naj bo G graf in v simplicialno vozlišče v njem. Torej je graf induciran z $\{v\} \cup N(v)$ poln. Zato za vsako najkrajšo pot v grafu G, ki vsebuje vozlišče v, velja, da se v njem začne ali konča. Torej mora v zagotovo ležati v vsaki geodetski množici grafa G. □

S pomočjo te leme lahko določimo geodetsko število dreves. Pri tem upoštevamo, da je vsak list seveda simplicialno vozlišče.

Izrek 3.7 ([3])**.** *Geodetsko število drevesa je enako številu njegovih listov. Pri tem je množica listov enolična minimalna geodetska množica.*

Dokaz. Naj bo T drevo in $\mathcal{L}$ množica njegovih listov. Vsak list drevesa je simplicialno vozlišče, zato iz leme 3.6 sledi, da za vsako geodetsko množico S velja $\mathcal{L} \subseteq S$. Torej je $\mathrm{g}(T) \geq |\mathcal{L}|$. Iz tega tudi sledi, da če je $\mathcal{L}$ geodetska množica, je enolična minimalna geodetska množica.

Naj bo u poljubno vozlišče drevesa T, ki ni list. Drevo si lahko predstavljamo kot drevo s korenom u. Ker u ni list, obstaja list l_1 v levem in list l_2 v desnem poddrevesu. Tedaj u leži na l_1, l_2-geodetki. Ker to velja za vsako vozlišče $u \in V(G)$, je $I[\mathcal{L}] = V(T)$ in je $\mathcal{L}$ geodetska množica. Zato je $\mathrm{g}(T) = |\mathcal{L}|$. □

Z enakim dokazom kot zgoraj lahko izpeljemo povezavo med simplicialnimi vozlišči in krepkim geodetskim številom.

Lema 3.8 ([11])**.** *Vsaka krepka geodetska množica vsebuje vsa simplicialna vozlišča grafa.*

Vemo, da za vsak par vozlišč v drevesu obstaja enolična najkrajša pot med njima. Zato ni razlike med geodetskim in krepkim geodetskim številom. Torej za vsako drevo T velja $\mathrm{sg}(T) = \mathrm{g}(T) =$ število listov drevesa T.

Opomba 3.9. Ker so v polnem grafu vsa vozlišča simplicialna, iz lem 3.6 in 3.8 sledi, da morajo vsa vozlišča ležati v vsaki (krepki) geodetski množici. Tako lahko še na drug način izpeljemo $\mathrm{g}(K_n) = \mathrm{sg}(K_n) = n$.

Z enakim sklepom kot pri dokazu leme 3.6 izpeljemo tudi naslednjo lemo.

Lema 3.10. *Naj bo G graf in $\mathcal{P}$ množica poti, ki pokrijejo vsa vozlišča grafa. Naj velja $|\mathcal{P}| = \mathrm{ip}(G)$. Tedaj za vsako simplicialno vozlišče v grafa G velja, da obstaja takšna pot $P \in \mathcal{P}$, da je v krajišče poti P.*

Iz tega lahko izpeljemo naslednji izrek, ki je bil implicitno dokazan v [4] kot posledica določenih rezultatov iz pokrivanja povezav grafa z izometričnimi potmi.

Izrek 3.11. *Naj bo T drevo in $l(T)$ število listov drevesa T. Tedaj velja*

$$\mathrm{ip}(T) = \left\lceil \frac{l(T)}{2} \right\rceil .$$

Dokaz. Iz leme 3.10 sledi, da je $\mathrm{ip}(T) \geq \left\lceil \frac{l(T)}{2} \right\rceil$, saj je to najmanjše število poti, ki imajo krajišča v listih drevesa. V nadaljevanju torej ni potrebno na vsakem koraku preverjati minimalnosti najdenega pokritja z $\left\lceil \frac{l(T)}{2} \right\rceil$ izometričnimi potmi.

Izrek dokažemo z indukcijo na število listov. Pri tem dodatno dokazujemo še, da v primeru, ko je število listov liho, v pokritju obstaja pot, ki gre od lista do vozlišča, ki ni list. Ker obravnavamo netrivialne grafe, velja $l(T) \geq 2$.

Če je $l(T) = 2$, je T izomorfen poti. Zato velja $\mathrm{ip}(T) = 1 = \left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil$.

Če je $l(T) = 3$, je T izomorfen grafu, ki ga sestavljajo tri poti, ki imajo eno krajišče skupno, sicer pa so paroma disjunktne. Takšen graf lahko pokrijemo z dvema geodetkama – ena poteka od lista do lista, druga pa od preostalega lista do središčnega vozlišča. Zato je $\mathrm{ip}(T) = 2 = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil$.

Naj bo sedaj $l(T) \geq 4$ in predpostavimo, da za drevesa T' z $l(T) - 1$ listi velja $\mathrm{ip}(T') = \left\lceil \frac{l(T')}{2} \right\rceil$, pri čemer v primeru, ko je $l(T')$ liho, v pokritju obstaja pot od lista do vozlišča, ki ni list.

Naj bo v poljuben list drevesa T. Ker je $l(T) \geq 3$, drevo ni izomorfno poti, zato obstaja pot P, ki poteka od lista v do najbližjega vozlišča s stopnje večje ali enake 3. Graf $T' = T - P \cup \{s\}$ je povezan (zaradi lastnosti poti P) in je torej drevo z $l(T) - 1$ listi. Zato lahko graf T' pokrijemo s $\left\lceil \frac{l(T)-1}{2} \right\rceil$ izometričnimi potmi $\mathcal{P}$.

Če je $l(T) - 1$ sodo, potem $\mathcal{P}$ dodamo še pot P in dobimo pokritje grafa T z $\left\lceil \frac{l(T)}{2} \right\rceil$ potmi, od katerih ena poteka od lista do vozlišča, ki ni list.

Če je $l(T) - 1$ liho, potem $\mathcal{P}$ vsebuje pot R, ki poteka od lista u do vozlišča, ki ni list. Če $\mathcal{P} - \{R\}$ dodamo u, v-pot, pokrijemo vsa vozlišča drevesa T z $\left\lceil \frac{l(T)}{2} \right\rceil$ potmi. □

Kot poseben primer obravnavajmo še zvezde.

Primer 3.12. Zvezda je graf $K_{1,n}$ in je drevo z n listi. Zato velja

$$\mathrm{g}(K_{1,n}) = \mathrm{sg}(K_{1,n}) = n \;\text{ in }\; \mathrm{ip}(K_{1,n}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

3.4 Polni dvodelni grafi

Ker smo zvezde že obravnavali pri drevesih, se omejimo na polne dvodelne grafe $K_{m,n}$, kjer je $m, n \geq 2$. Najprej določimo njihovo geodetsko število.

Trditev 3.13 ([7])**.** *Naj bosta m in n naravni števili, $m, n \geq 2$. Tedaj je*

$$\mathrm{g}(K_{m,n}) = \min\{m, n, 4\}.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $m \leq n$. Naj bo (X, Y) biparticija grafa $K_{m,n}$, kjer je $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ in $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Najprej obravnavajmo primer, ko je $m = 2$. Množica X je geodetska množica moči 2. Ker v splošnem velja, da je geodetsko število večje ali enako 2, je tudi minimalna. Zato je v tem primeru $\mathrm{g}(K_{2,n}) = 2 = \min\{2, n, 4\}$.

Če je $m = 3$, je množica X seveda tudi geodetska množica. Razmislimo, da poljubna množica $S \subseteq V(K_{3,n})$ moči 2 ni geodetska. Če je $S \subseteq X$, ne moremo pokriti tretjega vozlišča v množici X. Če je $S \subseteq Y$, ne moremo pokriti preostalih vozlišč v Y. Če S vsebuje eno vozlišče iz X in eno iz Y, pa ne moremo pokriti nobenega drugega vozlišča. Zato velja $\mathrm{g}(K_{3,n}) = 3 = \min\{3, n, 4\}$.

Naj bo sedaj $m \geq 4$. Množica $S = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ je geodetska, saj velja $I[S] = V(G)$. Torej je $\mathrm{g}(K_{m,n}) \leq 4$. Razmislimo, da velja tudi $\mathrm{g}(K_{m,n}) \geq 4$. Naj bo $T \subseteq V(K_{m,n})$ in $|T| \leq 3$. Če je $T \subseteq X$, potem je $I[T] = T \cup Y \neq V(K_{m,n})$, saj je $|X| \geq 4$. Podobno sklepamo, če je $T \subseteq Y$. Sicer je brez škode za splošnost $T \cap X = \{x_i, x_j\}$ in $T \cap Y = \{y_k\}$. V tem primeru je $I[S] = T \cup Y \neq V(K_{m,n})$, torej T nikakor ne more biti geodetska množica. Sledi, da je $\mathrm{g}(K_{m,n}) = 4 = \min\{m, n, 4\}$. □

Določitev krepkega geodetskega števila polnih dvodelnih grafov je bolj zapletena. Poleg vozlišč v krepki geodetski množici moramo namreč fiksirati še geodetke. Geodetka je bodisi povezava bodisi pot dolžine 2 (ki se začne in konča v istem kosu biparticije).

Če ima krepka geodetska množica v enem kosu biparticije k vozlišč, lahko z njimi pokrijemo največ $\binom{k}{2}$ vozlišč v drugem kosu (za vsak par vozlišč fiksiramo pot skozi eno od vozlišč v drugem kosu). Torej lahko krepko geodetsko število dobimo kot rešitev naslednjega celoštevilskega (nelinearnega) programa.

Naj bo (X, Y) biparticija grafa K_{n_1,n_2} in $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \subseteq X, S_2 \subseteq Y$, krepka geodetska množica. Označimo $|S_i| = s_i$ za $i \in [2]$. Tedaj velja $\mathrm{sg}(K_{n_1,n_2}) = s_1 + s_2$. S potmi med vozlišči iz S_1 želimo pokriti vozlišča v Y, ki ne ležijo v S_2. In obratno, s potmi med vozlišči iz S_2 pokrivamo vozlišča v $X - S_1$. Dobimo optimizacijski problem:

$$\begin{aligned} \min\quad & s_1 + s_2 \\ \text{pri pogojih:}\quad & 0 \leq s_1 \leq n_1 \\ & 0 \leq s_2 \leq n_2 \\ & \binom{s_2}{2} \geq n_1 - s_1 \\ & \binom{s_1}{2} \geq n_2 - s_2 \\ & s_1, s_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{1}$$

Oglejmo si nekaj primerov.

- $\mathrm{sg}(K_{5,3}) = 5$; množico S sestavljajo na primer vsa vozlišča iz kosa velikosti 3 in dve vozlišči iz kosa velikosti 5. Ustrezna krepka geodetska množica je sestavljena tudi le iz celotnega kosa velikosti 5.

- $\mathrm{sg}(K_{5,4}) = 4$; ustrezno krepko geodetsko množico dobimo ravno iz celotnega kosa velikosti 4.

- $\mathrm{sg}(K_{11,10}) = 9$; množico S lahko sestavimo iz štirih vozlišč večjega kosa in petih vozlišč manjšega kosa. S štirimi vozlišči iz večjega kosa lahko pokrijemo $\binom{4}{2} = 6$ vozlišč v manjšem kosu, s petimi vozlišči iz manjšega kosa pa $\binom{5}{2} = 10$ vozlišč večjega kosa. Vozlišča, ki ležijo v S so tudi pokrita, ker so krajišča geodetk.

Zdi se, da lahko določimo splošno formulo vsaj za nekatere posebne primere, na primer za $n_1 = n_2$ in $n_1 \gg n_2$. Najprej obravnavajmo drugi primer, ki je preprostejši.

Trditev 3.14. *Naj bosta $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 \geq 2$. Naj velja še* $\binom{n_1 - \binom{n_2}{2}}{2} \geq n_1$. *Tedaj je*

$$\mathrm{sg}(K_{n_1,n_2}) = \begin{cases} n_1; & n_2 = 2, \\ n_1 + n_2 - \binom{n_2}{2}; & n_2 \geq 3. \end{cases}$$

Dokaz. Naj bo (X, Y) biparticija grafa K_{n_1,n_2} in $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \subseteq X, S_2 \subseteq Y$, krepka geodetska množica. Označimo $|S_i| = s_i$ za $i \in [2]$. Torej je $\mathrm{sg}(K_{n_1,n_2}) = s_1 + s_2$.

Če je $n_2 = 2$, imamo le tri možnosti za s_2: $0, 1$ ali 2. Za vsako od teh možnosti razmislimo, koliko mora biti s_1, da pokrijemo celoten graf.

s_2	s_1	sg
0	n_1	n_1
1	n_1	$n_1 + 1$
2	$n_1 - 1$	$n_1 + 1$

Vidimo, da dobimo najmanjšo vrednost krepkega geodetskega števila, če vzamemo $S = X$. Tedaj je res $\mathrm{sg}(K_{n_1,2}) = n_1$.

Naj bo sedaj $n_2 \geq 3$. Tedaj velja $\binom{n_2}{2} \geq n_2$ (za razliko od zgornjega primera). Poleg tega je zaporedje $\{\binom{k}{2} - k\}_{k \in \mathbb{N}, k \geq 3}$ naraščajoče.

Če je v krepki geodetski množici s_2 vozlišč iz kosa Y, potem s temi vozlišči pokrijemo $\binom{s_2}{2}$ vozlišč v kosu X. Ker je $\binom{n_1 - \binom{n_2}{2}}{2} \geq n_1$ velja, da lahko s preostalimi $s_1 = n_1 - \binom{s_2}{2}$ vozlišči v X vedno prekrijemo vsa preostala vozlišča kosa Y. Torej lahko celoštevilski program (1) precej poenostavimo:

$$\begin{aligned} \min \quad & n_1 + s_2 - \binom{s_2}{2} \\ \text{pri pogojih:} \quad & 0 \leq s_2 \leq n_2 \\ & s_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ker je zaporedje $\{\binom{k}{2} - k\}$ naraščajoče, je zaporedje $\{n_1 - (\binom{k}{2} - k)\}$ padajoče, torej doseže minimum pri čim večji vrednosti k. Rešitev zgornjega programa je torej pri $s_2 = n_2$. Zato je $\mathrm{sg}(K_{n_1,n_2}) = s_1 + s_2 = n_1 + n_2 - \binom{n_2}{2}$. $\square$

Opomba 3.15. Trditev (z enakim dokazom) velja v splošnejšem primeru, in sicer če za vse vrednosti s_2, za katere je $0 \leq s_2 \leq n_2$, velja $\binom{n_1 - \binom{s_2}{2}}{2} \geq n_1 - s_2$.

Izpeljemo lahko tudi splošno formulo za primer, ko je $n_1 = n_2 = n$. Nekaj manjših primerov obravnavamo posebej. Zanje preprosto rešimo konkretni optimizacijski problem in dobimo $\mathrm{sg}(K_{2,2}) = \mathrm{sg}(K_{3,3}) = 3$, $\mathrm{sg}(K_{4,4}) = 5$ in $\mathrm{sg}(K_{5,5}) = 5$. Za večje vrednosti n pa velja naslednja formula, ki jo je na osnovi računalniškega eksperimenta prvi predvidel Petkovšek ([15]).

Izrek 3.16. *Za naravna števila $n \geq 6$ velja*

$$\mathrm{sg}(K_{n,n}) = \begin{cases} 2\left\lceil \dfrac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil; & 8n - 7 \textit{ ni popolni kvadrat}, \\ 2\left\lceil \dfrac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil - 1; & 8n - 7 \textit{ je popolni kvadrat}. \end{cases}$$

Pri tem za optimalno krepko geodetsko množico $S = S_1 \cup S_2$ velja $s_1 = s_2 = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil$, če $8n-7$ ni popolni kvadrat, sicer pa je $s_1 = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil$ in $s_2 = s_1 - 1$.

Intuicija pravi, da je optimalna vrednost dosežena pri krepki geodetski množici, ki jo sestavlja približno enako vozlišč iz enega in iz drugega kosa biparticije, kar bomo v nadaljevanju tudi dokazali. Zato je smiselno najprej pokazati, da lahko optimum iščemo le med takšnimi krepkimi geodetskimi množicami.

Lema 3.17. *Naj bo $T = T_1 \cup T_2$ krepka geodetska množica grafa $K_{n,n}$, $n \geq 6$, z biparticijo (X, Y), kjer je $T_1 \subseteq X$, $T_2 \subseteq Y$ in $t_i = |T_i|$ za $i \in [2]$. Naj bo $|t_1 - t_2| \geq 2$. Tedaj obstaja krepka geodetska množica $T' = T_1' \cup T_2'$, $T_1' \subseteq X$, $T_2' \subseteq Y$, za katero je $|T'| = |T|$ in $|t_1' - t_2'| < |t_1 - t_2|$, kjer je $t_i' = |T_i'|$ za $i \in [2]$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost je $t_1 \geq t_2$. Označimo $t_1 - t_2 = k \geq 2$.

Najprej obravnavajmo primer, ko je $\min\{t_1, t_2\} \geq 1$.

Naj bo $V(K_{n,n}) = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$, kjer je $x_i \in X$ in $y_i \in Y$ za vse $i \in [n]$. Brez škode za splošnost je $T_1 = \{x_1, \ldots, x_{t_2+k}\}$ in $T_2 = \{y_1, \ldots, y_{t_2}\}$.

Ker je T krepka geodetska množica, poleg $1 \leq t_i \leq n$, velja še

$$t_2 + \binom{t_2 + k}{2} \geq n \tag{2}$$

in

$$t_2 + k + \binom{t_2}{2} \geq n. \tag{3}$$

Definirajmo množico $T' = T_1' \cup T_2'$ kot $T_1' = T_1 - \{x_{t_2+k}\}$, $T_2' = T_2 \cup \{y_{t_2+1}\}$. Iz predpostavk leme sledi, da je $0 \leq t_i \leq n$ za $i \in [2]$. Razmislimo, da je T' krepka geodetska množica.

Ker je $t_2 \geq 1$, velja $\binom{t_2+1}{2} \geq \binom{t_2}{2} + 1$. Iz tega dejstva in enačbe (3) sledi

$$t_2 + k - 1 + \binom{t_2 + 1}{2} \geq n.$$

Razmisliti moramo še, da lahko z vozlišči iz T_1' pokrijemo vozlišča $Y - T_2'$. Iz enačbe (3) sledi, da lahko z geodetkami med t_2 vozlišči $\{x_1, \ldots, x_{t_2}\}$ pokrijemo $n - t_2 - k$ vozlišč $\{y_{t_2+k+1}, \ldots, y_n\}$.

Razmisliti moramo, da lahko z uporabo preostalih $k - 1$ vozlišč iz množice T_1' pokrijemo še preostalih $k - 1$ vozlišč v $Y - T_2'$. To je očitno možno, če je $k - 1 \geq 3$ oziroma $k \geq 4$, saj je tedaj $\binom{k-1}{2} \geq k - 1$. Prav tako lahko preostala vozlišča pokrijemo z geodetkami med vozliščem x_1 in vozlišči iz $\{x_{t_2+1}, \ldots, x_{t_2+k-1}\}$, kadar je $t_2 \geq k - 1$. Med preostalimi možnostmi ostane nerešen le še primer, ko je $k = 3$ in $t_2 = 1$, ki pa ni možen, ker zahtevamo $n > 4$.

Sledi, da je T' krepka geodetska množica, za katero velja $|t_1' - t_2'| = (t_1 - 1) - (t_2 + 1) = |t_1 - t_2| - 2$.

Obravnavajmo še primer, ko je $\min\{t_1, t_2\} < 1$. To pomeni, da je $t_2 = 0$. V tem primeru je T lahko krepka geodetska množica le, če je $t_1 = n$. Definirajmo množico $T' = T_1' \cup T_2'$, kjer je $T_1' = \{x_1, \ldots, x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\}$ in $T_2' = \{y_1, \ldots, y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}$. Velja $T_1' \subseteq X$ in $T_2' \subseteq Y$. Ker je $n \geq 6$, sta števili $\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq 3$, zato zanju velja $\binom{k}{2} \geq k$. Torej je T' res krepka geodetska množica. Zanjo velja $|t_1' - t_2'| \in \{0, 1\}$, torej $|t_1' - t_2'| < |t_1 - t_2| = n$. $\square$

Za dokaz izreka 3.16 potrebujemo še naslednjo lemo.

Lema 3.18. *Za vsak lih popoln kvadrat s obstaja naravno število k, da je $s = 8k+1$.*

Dokaz. Ker je s lihi popolni kvadrat, obstaja naravno število l, da velja $s = (2l+1)^2 = 4l(l+1)+1$. Ker je število $l(l+1)$ sodo, velja $s = 8l'+1$. $\square$

Dokažimo zdaj izrek.

Dokaz izreka 3.16. Iz leme 3.17 sledi, da zadostuje obravnavati krepke geodetske množice $S = S_1 \cup S_2$, za katere je $|s_1 - s_2| \leq 1$, kar nas omeji na dve možnosti.

1. Najprej obravnavajmo primer, ko je $s_2 = s_1 - 1$. Optimizacijski problem (1) se prevede v

$$\begin{aligned} \min \quad & 2s_1 - 1 \\ \text{pri pogojih:} \quad & 0 \leq s_1 \leq n \\ & s_1^2 - s_1 + 2 - 2n \geq 0 \\ & s_1^2 + s_1 - 2 - 2n \geq 0 \\ & s_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Iz prve kvadratne neenakosti sledi, da mora veljati $s_1 \geq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$, iz druge pa $s_1 \geq \frac{-1+\sqrt{8n+9}}{2}$. Ker za vsa naravna števila $n \geq 2$ velja

$$n \geq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \geq \frac{-1+\sqrt{8n+9}}{2},$$

   je minimum izraza $2s_1 - 1$ dosežen pri

$$s_1 = \left\lceil \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rceil$$

   in enak $2\left\lceil \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rceil - 1$.

2. Oglejmo si še primer, ko je $s_1 = s_2$. Optimizacijski problem (1) se poenostavi v

$$\begin{aligned} \min \quad & 2s_1 \\ \text{pri pogojih:} \quad & 0 \leq s_1 \leq n_1 \\ & s_1^2 + s_1 - 2n \geq 0 \\ & s_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Kvadratna neenačba porodi pogoj $s_1 \geq \left\lceil \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil$, zato je minimum izraza $2s_1$ dosežen pri vrednosti

$$s_1 = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil$$

   in enak $2\left\lceil \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil$.

Določiti moramo, v katerem primeru dobimo manjšo vrednost krepkega geodetskega števila. Označimo $a = \left\lceil \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rceil$, $b = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil$, $\mathrm{sg}_a = 2a - 1$ in $\mathrm{sg}_b = 2b$. Ponovno ločimo dva primera, in sicer glede na to, ali je število $8n-7$ popolni kvadrat ali ne.

1. Naj bo $8n-7$ popolni kvadrat. Tedaj obstaja naravno število m, da je $8n-7 = m^2$. Iz tega takoj sledi, da mora biti število m liho in $m \geq 5$, saj je $n \geq 6$ (torej $8n - 7 \geq 35 > 5^2$). Zato velja

$$a = \left\lceil \frac{1+m}{2} \right\rceil = \frac{1+m}{2} \quad \text{in} \quad \mathrm{sg}_a = m.$$

Ker je $8n - 7 = m^2$ in $m \geq 4$, velja tudi $m^2 < 8n + 1 \leq (m + 1)^2$. Iz tega sledi

$$b = \left\lceil \frac{-1 + (m+1)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{m+1}{2} \quad \text{in} \quad \mathrm{sg}_b = m + 1.$$

Od tod sledi $\mathrm{sg}_a < \mathrm{sg}_b$, torej je optimalna vrednost dosežena v primeru, ko je $s_2 = s_1 - 1$. Dodatno opazimo še, da je $a = b$, torej lahko zapišemo

$$\mathrm{sg}(K_{n,n}) = 2b - 1,$$

kar je željen rezultat.

2. Naj sedaj velja, da število $8n - 7$ ni popolni kvadrat. Tedaj obstaja naravno število m, da je

$$m^2 < 8n - 7 < (m + 1)^2.$$

Od tod sledi, da je

$$a = \left\lceil \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1+(m+1)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{m+2}{2} \right\rceil$$

in

$$\mathrm{sg}_a = \begin{cases} m+1; & m \text{ sodo,} \\ m+2; & m \text{ liho.} \end{cases}$$

Velja tudi $8n + 1 < (m + 1)^2 + 8 < (m + 2)^2$, saj je $m \geq 3$. Od tod sledi

$$b = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{-1+(m+2)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil.$$

Če je m liho število, velja

$$\mathrm{sg}_b = 2 \cdot \frac{m+1}{2} = m + 1 < m + 2 = \mathrm{sg}_a,$$

torej je optimalna vrednost dosežena pri $s_1 = s_2$.

Če je m sodo število, je $m+1$ liho število. Iz leme 3.18 sledi, da obstaja naravno število k, da je $8k + 1 = (m + 1)^2$. Torej je $(m + 1)^2 \equiv 1 \pmod 8$. Velja tudi $8n - 7 \equiv 1 \pmod 8$. Iz tega sledi $8n - 7 \notin \{(m + 1)^2 - 7, \ldots, (m + 1)^2 -$

$1, (m+1)^2+1, \ldots, (m+1)^2+7\}$. To pomeni, da ni možno $8n+1 > (m+1)^2$. Zato lahko izboljšamo oceno za b:

$$b = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{-1+(m+1)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{m}{2}.$$

V tem primeru torej velja

$$\mathrm{sg}_b = m < m+1 = \mathrm{sg}_a$$

in optimalna vrednost je dosežena pri $s_1 = s_2$.

Ugotovili smo, da v primeru, ko $8n-7$ ni popolni kvadrat, velja

$$\mathrm{sg}(K_{n,n}) = 2b. \qquad \square$$

Določanje števila izometričnih poti polnih dvodelnih grafov je bolj preprosto.

Izrek 3.19 ([13])**.** *Naj bo K_{n_1,n_2} polni dvodelni graf, kjer je $n_1 \geq n_2 \geq 2$. Označimo $n = n_1 + n_2$. Tedaj velja*

$$\mathrm{ip}(K_{n_1,n_2}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil; & n_1 > 2n_2, \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil; & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Dokaz. Naj bo (X, Y) biparticija grafa K_{n_1,n_2}, kjer je $|X| = n_1$ in $|Y| = n_2$. Obravnavajmo primera $n_1 > 2n_2$ in $n_1 \leq 2n_2$:

1. Naj bo $n_1 > 2n_2$. Ker lahko vsaka izometrična pot v kosu velikosti n_1 pokrije kvečjemu dve vozlišči, velja $\mathrm{ip}(K_{n_1,n_2}) \geq \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil$. Torej zadostuje najti pokritje z $\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil$ potmi.

   S potmi oblike $x_1 \sim y \sim x_2$, kjer so $x_1, x_2 \in X$ in $y \in Y$, lahko pokrijemo vsa vozlišča grafa. V kosu X izbiramo različna krajišča in ker je $n_1 > 2n_2$, lahko z vmesnimi vozlišči pokrijemo celoten kos Y. Teh poti je ravno $\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil$.

2. Naj bo $n_1 \leq 2n_2$. Ker vsaka izometrična pot vsebuje kvečjemu tri vozlišča, velja $\mathrm{ip}(K_{n_1,n_2}) \geq \left\lceil \frac{n_1+n_2}{3} \right\rceil$. Obratno neenakost dokažemo z indukcijo na $n_1 + n_2$.

   Če je $n_1 + n_2 = 4$, je edini možni graf $K_{2,2}$. Tega očitno lahko pokrijemo z dvema potema, manj pa se ne da. Po drugi strani je $\left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil = 2$.

   Naj bo sedaj $n_1+n_2 \geq 5$ (torej je $n_1 \geq 3$). Izberemo dve vozlišči iz večjega kosa biparticije in eno vozlišče iz manjšega kosa. Ta vozlišča tvorijo izometrično pot P. Ko pot (skupaj s krajiščema) odstranimo iz grafa, dobimo graf K_{n_1-2,n_2-1}. Glede na to, kateri kos novega grafa je večji, ločimo dve možnosti.

   (a) Če je $n_1 - 2 \geq n_2 - 1$, iz pogoja $n_1 \leq 2n_2$ sledi $n_1' = n_1 - 2 \leq 2(n_2-1) = 2n_2'$, zato na grafu G' lahko uporabimo indukcijsko predpostavko.

   (b) Sicer je $n_1 - 2 < n_2 - 1$. Ampak ker velja tudi $n_1 \geq n_2$, je edina možnost $n_1 = n_2$. Sedaj je drugi kos večji, zato moramo razmisliti, da velja $n_2 - 1 \leq 2(n_1 - 2)$. Ta neenakost je izpolnjena, ker je $n_1 \geq 3$.

   V vsakem primeru lahko na grafu G' uporabimo indukcijsko predpostavko, iz katere sledi, da lahko G' pokrijemo s $\left\lceil \frac{n_1+n_2-3}{3} \right\rceil$ izometričnimi potmi. Ko dodamo še pot P, pokrijemo celoten graf K_{n_1,n_2} z $\left\lceil \frac{n_1+n_2}{3} \right\rceil$ potmi. $\square$

Opomba 3.20. V primeru, ko je $n_1 = 2n_2$, velja $\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

3.5 Polni r-partitni grafi

Poglejmo si sedaj, če (in kako) lahko posplošimo rezultate iz razdelka 3.4.

Naj bo $K_{n_1,\ldots,n_r}$ polni r-partitni graf, kjer je $r \geq 2$ in $n = n_1 + \cdots + n_r$. Določimo najprej geodetsko število grafa G.

Trditev 3.21. *Naj bo r naravno število, $r \geq 2$, in $n_1, \ldots, n_r$ naravna števila, za katera velja $n_1, \ldots, n_r \geq 2$. Tedaj je*

$$\mathrm{g}(K_{n_1,\ldots,n_r}) = \min\{4, n_1, \ldots, n_r\}.$$

Dokaz. Opazimo, da z geodetkami med dvema vozliščema v enem kosu biparticije lahko pokrijemo vsa vozlišča v preostalih kosih grafa. Če izberemo dve vozlišči v enem kosu in dve vozlišči v drugem kosu, dobimo torej geodetsko množico. Zato je $\mathrm{g}(K_{n_1,\ldots,n_r}) \leq 4$.

Če je $\min\{n_1, \ldots, n_r\} = 2$, potem z vozliščema v najmanjšem kosu pokrijemo vsa vozlišča grafa. Torej je $\mathrm{g}(K_{n_1,\ldots,n_r}) = 2$.

Če je $\min\{n_1, \ldots, n_r\} = 3$, potem z vozlišči v najmanjšem kosu tudi pokrijemo vsa vozlišča grafa. Razmislimo lahko, da z dvema vozliščema tega ne moremo storiti. Zato je $\mathrm{g}(K_{n_1,\ldots,n_r}) = 3$.

Če je $\min\{n_1, \ldots, n_r\} = 4$, moramo preveriti, da geodetsko število ne more biti enako dva ali tri. To storimo podobno kot v dokazu izreka 3.13.

Sledi, da je $\mathrm{g}(K_{n_1,\ldots,n_r}) = \min\{4, n_1, \ldots, n_r\}$. □

Posebej obravnavajmo še primer, ko je $\min\{n_1, \ldots, n_r\} = 1$. Naj velja $n_1 \geq \cdots \geq n_s \geq 2$ in $n_{s+1} = \cdots = n_r = 1$. Če je $s \geq 2$, je $\mathrm{g}(K_{n_1,\ldots,n_r}) = \min\{4, n_1, \ldots, n_s\}$, ker kosi velikosti 1 ne morejo zmanjšati geodetske množice. Če je $s = 1$, je $\mathrm{g}(K_{n_1,\ldots,n_r}) = n_1$. V primeru, ko je $s = 0$, pa je graf izomorfen polnemu grafu in velja $\mathrm{g}(K_{n_1,\ldots,n_r}) = r$.

Problem določanja krepkega geodetskega števila je bolj zapleten. Vpeljimo nekaj oznak. Naj bodo $X_1, \ldots, X_r$ kosi biparticije, kjer je $|X_i| = n_i$ za $i \in [r]$. Naj bo $S = S_1 \cup \cdots \cup S_r$ potencialna krepka geodetska množica, za katero velja $S_i \subseteq X_i$ in $|S_i| = s_i$ za vse $i \in [r]$. Podobno kot pri polnih dvodelnih grafih velja, da z geodetkami med k vozlišči v enem kosu biparticije lahko pokrijemo $\binom{k}{2}$ vozlišč v drugih kosih. Naj $a_{i,j}$ označuje število vozlišč, ki jih v X_j pokrijemo z geodetkami med vozlišči iz S_i. Dodatno definiramo $a_{1,1} = \cdots = a_{r,r} = 0$. Problem določanja krepkega geodetskega števila $\mathrm{sg}(K_{n_1,\ldots,n_r})$ se tako prevede v optimizacijski problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & s_1 + \cdots + s_r \\ \text{pri pogojih:} \quad & \forall i \in [r]\colon 0 \leq s_i \leq n_i \\ & \forall i \in [r]\colon s_i + \sum_{k=1}^{r} a_{k,i} \geq n_i \\ & \forall i \in [r]\colon \sum_{j=1}^{r} = \binom{s_i}{2} \\ & \forall i \in [r]\colon s_i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Število izometričnih poti polnih r-partitnih grafov bilo že določeno ([13]).

Izrek 3.22 ([13])**.** *Naj bo $K_{n_1,\ldots,n_r}$ polni r-multipartitni graf, kjer je $r \geq 2$ in $n_1 \geq \cdots \geq n_r$. Označimo $n = n_1 + \cdots + n_r$ in $\alpha = |\{i \in [r] \; ; \; n_i$ je liho število$\}|$. Tedaj velja*

$$\mathrm{ip}(K_{n_1,\ldots,n_r}) = \begin{cases} \lceil \frac{n_1}{2} \rceil; & 3n_1 > 2n, \\ \lceil \frac{n+\alpha}{4} \rceil; & 3\alpha > n, \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil; & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Dokaz izreka je precej tehničen, zato ga razdelimo na več korakov. Pri tem ves čas ohranjamo oznake iz izreka. Dodatno označimo $G = K_{n_1,\ldots,n_r}$ in kose biparticije z $X_1, \ldots, X_r$, kjer je $|X_i| = n_i$ za vse $i \in [r]$.

Če imata dve poti s tremi vozlišči skupno krajišče, lahko eno od teh poti brez škode zamenjamo s krajšo potjo tako, da še vedno ostanejo pokrita ista vozlišča. Pot, ki vsebuje le eno vozlišče, lahko brez škode podaljšamo do poti, ki vsebuje dve vozlišči. Iz tega sledi, da lahko brez škode za splošnost obravnavamo le pokritja z izometričnimi potmi, ki jih sestavljajo poti dolžine 1 in 2, pri čemer imajo poti dolžine 2 paroma različna krajišča.

Lema 3.23 ([13])**.** *Če je $3n_1 > 2n$, potem velja* $\mathrm{ip}(G) = \lceil \frac{n_1}{2} \rceil$.

Dokaz. Vsaka izometrična pot lahko v kosu X_1 pokrije največ dve vozlišči, zato velja $\mathrm{ip}(G) \geq \lceil \frac{n_1}{2} \rceil$. Obratno neenakost dokazujemo z indukcijo po $n - n_1$.

Če je $n - n_1 = 1$, je graf G izomorfen grafu $K_{n_1,1}$, ki je zvezda. Zato je $\mathrm{ip}(G) \leq \lceil \frac{n_1}{2} \rceil$.

Predpostavimo, da za polne multipartitne grafe $G' = K_{n'_1,\ldots,n'_{r'}}$, za katere je $n'_1 \geq \cdots \geq n'_r$, $3n'_1 \geq 2n'$ in $n' - n'_1 < n - n_1$, velja $\mathrm{ip}(G') \leq \left\lceil \frac{n'_1}{2} \right\rceil$. Pri tem označujemo $n' = n'_1 + \cdots + n'_{r'}$.

Naj bo $n - n_1 \geq 2$. Tvorimo izometrično pot P, ki povezuje dve vozlišči iz X_1 preko enega vozlišča iz X_2. Ker je $3n_1 > 2n$ in $r \geq 2$, je $n_1 - 2 > 0$, zato to lahko storimo. Naj bo G' graf, ki ga dobimo, ko iz grafa G odstranimo pot P in njeni krajišči. Graf G' je še vedno polni multipartitni graf, torej $G' = K_{n'_1,\ldots,n'_{r'}}$. Ker je $n - n_1 \geq 2$ in $n_1 - 2 > 0$, je $r' \geq 2$. Poleg tega velja $n' = n - 3$. Novi kosi grafa so velikosti $n_1 - 2, n_2 - 1, n_3, \ldots, n_r$. Glede na to, kateri kos je največji, ločimo tri možnosti.

1. Če je največji kos velikosti $n_1 - 2$, iz pogoja $3n_1 > 2n$ sledi tudi, da je $3(n_1 - 2) > 2n'$.
2. Če je največji kos velikosti $n_2 - 1$, iz pogoja $n_1 \geq n_2$ sledi, da je edina možnost $n_1 = n_2$. Zato velja $3(n_2 - 1) > 2n'$.
3. Če je največji kos velikosti n_3, izpeljemo $n_2 = n_3$ in $n_3 \in \{n_1 - 1, n_1\}$. Iz tega sledi, da je $3n_3 > 2n'$.

Torej je v vsakem primeru izpolnjen pogoj $3n'_1 > 2n'$. Ker je tudi $n' - n'_1 = n - n_1 - 1 < n - n_1$, lahko za graf G' uporabimo indukcijsko predpostavko, torej zanj velja $\mathrm{ip}(G') \leq \lceil \frac{n_1 - 2}{2} \rceil$. Če v pokritje grafa G' dodamo pot P, dobimo pokritje grafa G. Zato je

$$\mathrm{ip}(G) \leq \mathrm{ip}(G') + 1 = \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil. \qquad \square$$

Lema 3.24 ([13])**.** *Če je $3\alpha > n$, potem je* $\mathrm{ip}(G) = \lceil \frac{n+\alpha}{4} \rceil$.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{C}$ optimalno pokritje z izometričnimi potmi in naj vsebuje p_2 poti dolžine 1 in p_3 poti dolžine 2. Očitno velja $p_2 + p_3 = \mathrm{ip}(G)$ in $2p_2 + 3p_3 \geq n$.

Največ $n - \alpha$ vozlišč lahko tvori različna krajišča za poti dolžine 2. Zato je $p_3 \leq \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor$. Iz tega sledi $2p_2 + 2p_3 \geq n - p_3 \geq n - \left\lfloor \frac{n-\alpha}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n+\alpha}{2} \right\rceil$. Torej je $\mathrm{ip}(G) \geq \left\lceil \frac{n+\alpha}{4} \right\rceil$. Obratno neenakost dokažemo z indukcijo po $n - \alpha$.

Če je $n - \alpha = 0$, je število vozlišč enako α, torej je $G = K_n$. Zato je $\mathrm{ip}(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+\alpha}{4} \right\rceil$.

Predpostavimo, da za polni multipartitini graf G', za katerega je $n' - \alpha' < n - \alpha$, velja $\mathrm{ip}(G') \leq \left\lceil \frac{n'+\alpha'}{4} \right\rceil$.

Ni možno, da bi bilo $n - \alpha = 1$. Naj bo sedaj $n - \alpha \geq 2$. Ko to združimo s pogojem $3\alpha > n$, sledi $\alpha > 1$ in $n > 3$. Konstruiramo pot P, ki povezuje dve vozlišči iz kosa X_1 preko vozlišča iz največjega izmed lihih kosov, ki ni X_1. Naj bo $G' = G - P$. Graf G' je polni multipartitni graf, zanj velja $n' = n - 3$ in $\alpha' = \alpha - 1$. Velja tudi $3\alpha' > n'$ in $n' - \alpha' < n - \alpha$. Če je $r' \geq 2$, lahko uporabimo indukcijsko predpostavko in je $\mathrm{ip}(G') \leq \left\lceil \frac{n+\alpha-4}{4} \right\rceil$. Ko pokritju grafa G' dodamo pot P, dobimo pokritje grafa G, zato je $\mathrm{ip}(G) \leq \mathrm{ip}(G') + 1 = \left\lceil \frac{n+\alpha}{4} \right\rceil$.

Razmislimo, kdaj je lahko $r' = 1$. Če je $r \geq 4$, se ne more zgoditi $r' = 1$. Če je $r = 3$, je edini graf, ki privede do $r' = 1$, graf $K_{2,1,1}$. Vendar zanj izrek velja, saj je $\mathrm{ip}(K_{2,1,1}) = 2 = \left\lceil \frac{4+2}{4} \right\rceil$. Če je $r = 2$, sta oba kosa liha. Ker je $n \geq \alpha + 2$, morata biti oba kosa velikosti vsaj tri, zato se ne more zgoditi $r' = 1$. $\square$

Lema 3.25 ([13]). *Če je $3n_1 \leq 2n$ in $3\alpha \leq n$, potem velja* $\mathrm{ip}(G) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Dokaz. Vsaka najkrajša pot v grafu G vsebuje največ tri vozlišča. Od tod sledi, da je $\mathrm{ip}(G) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Obratno neenakost dokažemo z indukcijo po n.

Če je $n \leq 8$, pogoja $3n_1 \leq 2n$ in $3\alpha \leq n$ zelo omejita nabor možnih grafov. Možni so $K_{2,1}$, $K_{2,2}$, $K_{3,2}$, $K_{2,2,1}$, $K_{4,2}$, $K_{4,1,1}$, $K_{3,3}$, $K_{3,2,1}$, $K_{2,2,2}$, $K_{2,2,1,1}$, $K_{4,3}$, $K_{4,2,1}$, $K_{3,2,2}$, $K_{2,2,2,1}$, $K_{5,3}$, $K_{5,2,1}$, $K_{4,4}$, $K_{4,3,1}$, $K_{4,2,2}$, $K_{4,2,1,1}$, $K_{3,3,2}$, $K_{3,2,2,1}$, $K_{2,2,2,2}$, $K_{2,2,2,1,1}$. Te grafe obravnavamo na roke in vidimo, da za vse velja $\mathrm{ip}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Predpostavimo sedaj, da za polne multipartitne grafe G', za katere je $3n_1' \leq 2n'$, $3\alpha' \leq n'$ in $n' < n$, velja $\mathrm{ip}(G') \leq \left\lceil \frac{n'}{3} \right\rceil$.

Naj bo $n \geq 9$. Tvorimo pot P, sestavljeno iz treh vozlišč. Dve vozlišči sta iz kosa X_1, eno vozlišče pa iz kosa X_j, kjer je $j \geq 2$ največji tak, da je n_j liho število. Pri tem izberemo $j = r$, če so $n_2, \ldots, n_r$ vsi sodi. Takšna pot obstaja, ker je $n_1 \geq 2$ in $r \geq 2$, kar sledi iz pogoja $3\alpha \leq n$.

Naj bo G' graf G brez poti P in njunih krajišč. Graf G' je polni multipartitni graf. Zanj velja $n' = n - 3$ in $\alpha' = \alpha - 1$, če je $j < r$, oziroma $\alpha' \leq 2$, če je $j = r$.

Sledi, da je v obeh primerih $3\alpha' \leq n'$, saj je $n \geq 9$. Za preverjanje $3n_1' \leq 2n'$ obravnavamo več možnosti.

1. Naj bo $n_1 \geq n_2 + 2$. Tedaj je $n_1 - 2 \geq n_2 \geq n_i$ za vse $i \in \{2, \ldots, r\}$. Zato je $n_1' = n_1 - 2$, saj je ta kos največji v grafu G'. Iz tega sledi $3n_1' \leq 2n'$.

2. Naj bo $n_1 \leq n_2 + 1$. Ločimo tri primere.

   (a) Naj bo $n_2 \leq 4$. V grafu G' je velikost prejšnjega prvega kosa $n_1 - 2 \leq n_2 - 1 \leq n_2$, velikost prej drugega kosa pa n_2 ali $n_2 - 1$. V vsakem primeru je drugi kos zdaj večji od prvega. Zato je $n_1' \leq n_2 \leq 4$. Ker je $n \geq 9$, je $n' \geq 6$, zato je $3n_1' \leq 2n'$.

(b) Naj bo $n_2 \geq 5$ in $r = 2$. V grafu G' je velikost prej prvega kosa $n_1 - 2$, velikost prej drugega kosa pa $n_2 - 1$. Torej je $n'_1 = n_2 - 1$. Velja tudi $n' = n - 3 = n_1 + n_2 - 3 \geq 2n_2 - 3 > 2n_2 - 4$. Iz tega sledi $3n'_1 \leq 2n'$.

(c) Naj bo $n_2 \geq 5$ in $r \geq 3$. V grafu G' je velikost prej prvega kosa $n_1 - 2 \leq n_2 - 1 \leq n_2$, velikost prej drugega kosa pa n_2 ali $n_2 - 1$. Za vse preostale kose velja, da so velikosti n_i ali $n_i - 1$. V vsakem primeru je drugi kos večji od prvega, zato je $n'_1 \leq n_2$. Ker je $r \geq 3$, je $n' \geq n_1 + n_2 + 1 - 3 \geq 2n_2 - 2$. Z upoštevanjem tega dejstva in pogoja $n_2 \geq 5$, izpeljemo $3n'_1 \leq 2n'$.

Torej graf G' ustreza indukcijski predpostavki. Zato je $\mathrm{ip}(G) \leq \mathrm{ip}(G') + 1 = \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. □

Izrek 3.22 zdaj sledi direktno iz lem 3.23, 3.24 in 3.25.

4 Ekstremni primeri

Poiskali smo že zgornje in spodnje meje za vse tri načine pokrivanja vozlišč. Razmislimo še, kdaj so pri teh mejah dosežene enakosti. Najprej se posvetimo geodetskemu številu.

Trditev 4.1. *Edini povezan graf na n vozliščih, ki ima geodetsko število enako n, je polni graf K_n.*

Dokaz. Kot smo videli v podpoglavju 3.2, velja $\mathrm{g}(K_n) = n$. Razmisliti moramo, da je to edini graf s to lastnostjo.

Naj bo G poljuben graf z lastnostmi iz trditve. Denimo, da obstajata vozlišči $u, v \in V(G)$, ki nista sosedni. Tedaj je u,v-geodetka dolžine vsaj dva, zato na njej obstaja vozlišče $w \in V(G) - \{u, v\}$. Oglejmo si množico $S = V(G) - \{w\}$. Z najkrajšimi potmi od vozlišča u do ostalih vozlišč v množici S zagotovo pokrijemo vsa vozlišča v $V(G) - \{w\}$ (ker so krajišča teh poti). Ker neka u,v-geodetka poteka preko vozlišča w, je pokrito tudi to vozlišče. Torej je S geodetska množica. Zato je $\mathrm{g}(G) \leq |S| = n - 1$, kar je v nasprotju s predpostavko. Sledi, da za vsak par vozlišč v G obstaja povezava med njima. Torej je G polni graf. □

Grafe na n vozliščih, za katere velja $\mathrm{g}(G) = 2$, lahko karakteriziramo kot grafe, v katerih obstajata takšni vozlišči u in v, da vsa vozlišča grafa ležijo na u,v-geodetkah. Vendar temu pogoju ne ustreza le ena družina grafov. Primeri so poti P_n, sodi cikli C_{2n}, polni grafi brez ene povezave $K_n - e$, mreže $P_m \,\square\, P_n$ in kocke Q_n. Za poti in cikle smo to že dokazali (podpoglavje 3.1), oglejmo si sedaj še preostale tri primere.

Primer 4.2. Naj bo G polni graf brez ene povezave, torej $K_n - e$. Označimo z u in v krajišči manjkajoče povezave e. Oglejmo si množico $S = \{u, v\}$. Razdalja med vozliščema je 2, zato so vse poti dolžine 2 med njima geodetke. Za vsako vozlišče $w \in V(G) - \{u, v\}$ velja $u \sim w \sim v$, torej je to u,v-geodetka. Sledi, da je S geodetska množica. Torej je $\mathrm{g}(G) = 2$.

Primer 4.3. Naj bo $P_m \,\square\, P_n$ mreža. Vozlišča P_m označimo z $u_1, \ldots, u_m$, vozlišča P_n z $v_1, \ldots, v_n$. Vozlišča mreže so torej $(u_1, v_1), (u_2, v_1), \ldots, (u_m, v_m)$. Oglejmo si množico $S = \{(u_1, v_1), (u_m, v_n)\}$. Razdalja med vozliščema v S je $m + n - 2$. Vse možne najkrajše poti med vozliščema pokrijejo vsa vozlišča grafa. Torej je S geodetska množica in velja $\mathrm{g}(P_m \,\square\, P_n) = 2$.

Primer 4.4. Kocka Q_n je graf z vozlišči $\{x_1 \ldots x_n \ ; \ x_i \in \{0,1\}\}$. Dve vozlišči sta sosedni, če se razlikujeta v natanko eni koordinati oz. bitu x_i. Velja tudi $Q_n = K_2^n$. Razmislimo, da vsa vozlišča v kocki ležijo na geodetkah med vozliščema 0^n in 1^n. Ti dve vozlišči sta na razdalji n, torej bodo takšne tudi dolžine geodetk. Naj bo $v \in V(Q_n) - \{0^n, 1^n\}$. Nekateri biti vozlišča v so enaki 0, preostali pa 1. Zaporedno spreminjanje bitov z vrednostjo 1 v 0 porodi pot od vozlišča v do vozlišča 0^n. Podobno dobimo tudi pot od vozlišča v do vozlišča 1^n. Ti dve poti skupaj tvorita pot od 0^n do 1^n dolžine n, zato v leži na neki geodetki med 0^n in 1^n. Zato je $\{0^n, 1^n\}$ geodetska množica in velja $\mathrm{g}(Q_n) = 2$.

Oglejmo si, kateri grafi dosežejo meje iz trditve 2.9 in so torej ekstremni primeri za krepko geodetsko število.

Trditev 4.5. *Za povezan graf G na n vozliščih velja $\mathrm{sg}(G) = n$ natanko tedaj, ko je G polni graf.*

Trditev dokažemo podobno kot trditev 4.1.

Trditev 4.6. *Za povezan graf G na n vozliščih velja $\mathrm{sg}(G) = 2$ natanko tedaj, ko je G pot.*

Dokaz. Če je G graf poti, potem je res $\mathrm{sg}(G) = 2$ (podpoglavje 3.1). Naj bo sedaj G graf na n vozliščih in naj velja $\mathrm{sg}(G) = 2$. Torej obstajata vozlišči $u, v \in V(G)$, da je $S = \{u, v\}$ geodetska množica. Vsa vozlišča grafa G ležijo na neki fiksni u, v-geodetki. Zato je graf G sestavljen le iz te geodetke (če bi imel graf dodatne povezave, bi se njena dolžina zmanjšala). Torej je G res graf poti. □

Sedaj poiščimo še grafe, ki dosegajo ekstremne vrednosti števila izometričnih poti.

Trditev 4.7. *Za povezan graf G na n vozliščih velja $\mathrm{ip}(G) = 1$ natanko tedaj, ko je G pot.*

Trditev dokažemo podobno kot trditev 4.6.

Družin grafov na n vozliščih, za katere je $\mathrm{ip}(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, je več. To so zagotovo polni grafi, poleg njih pa tudi polni grafi brez ene povezave $K_n - e$ za sode n, polni grafi brez dveh incidenčnih povezav za sode n in morda še kateri. Velja pa naslednje.

Trditev 4.8. *Naj bo G graf na n vozliščih in n liho število. Tedaj je $\mathrm{ip}(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ natanko tedaj, ko je G polni graf.*

Dokaz. Če je G polni graf, potem je res $\mathrm{ip}(G) = \frac{n+1}{2}$.

Naj bo sedaj G kot v trditvi in naj velja $\mathrm{ip}(G) = \frac{n+1}{2}$. Denimo, da obstajata vozlišči $u, v \in V(G)$, ki nista sosedni. Na najkrajši poti med njima torej obstaja vozlišče $w \in V(G) - \{u, v\}$. Vozlišč v množici $V(G) - \{u, v, w\}$ je $n - 3$, kar je sodo število. Vozlišča poljubno razdelimo v pare in med vsakim parom izberemo neko izometrično pot. Na ta način dobimo množico poti $\mathcal{P}$, ki pokrije vozlišča v $V(G) - \{u, v, w\}$. Teh poti je $\frac{n-3}{2}$. Tej množici poti dodamo še izometrično pot od u do v, ki poteka preko vozlišča w. Torej z $\frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$ potmi pokrijemo vsa vozlišča grafa. Zato je $\mathrm{ip}(G) \le \frac{n-1}{2} < \frac{n+1}{2}$, kar je v nasprotju s predpostavko. Zato je graf G res polni graf. □

Opomba 4.9. Enak dokaz ne deluje v primeru, ko je n sodo število. Tedaj je poti v množici $\mathcal{P}$ namreč $\lceil \frac{n-3}{2} \rceil = \frac{n-2}{2}$. Ko dodamo še u, v-pot, dobimo $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ poti, kar ni protislovno.

5 Povezava s premerom grafa

Premer grafa smo definirali v poglavju 2. V nadaljevanju razmislimo, ali lahko osnovne zgornje in spodnje meje za vse tri invariante izboljšamo, če poznamo premer grafa. Poiščemo tudi ekstremne primere za dobljene rezultate.

5.1 Geodetsko število grafa z določenim premerom

Vprašamo se, ali lahko s pomočjo premera geodetsko število grafa omejimo bolj natančno kot v trditvi 2.5. Izkaže se, da je to mogoče.

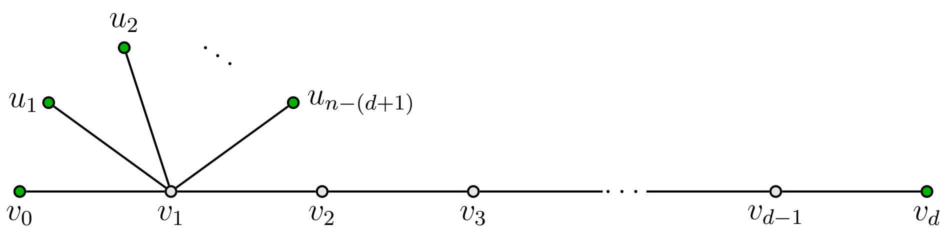
Izrek 5.1 ([3]). *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{g}(G) \leq \mathrm{n}(G) - \mathrm{diam}(G) + 1.$$

Dokaz. Označimo $n = \mathrm{n}(G)$ in $d = \mathrm{diam}(G)$. Naj bosta $u, v \in V(G)$ vozlišči grafa, za kateri velja $\mathrm{d}(u, v) = d$. Naj bo $u = v_0, v_1, \ldots, v_{d-1}, v_d = v$ pot dolžine d med u in v. Definiramo množico $S = V(G) - \{v_1, \ldots, v_{d-1}\}$. Velja $I[S] = S \cup \{v_1, \ldots, v_{d-1}\} = V(G)$, saj ta vozlišča ležijo na prej omenjeni najkrajši poti med $u, v \in S$. Torej je S geodetska množica. Zato velja $\mathrm{g}(G) \leq |S| = n - (d - 1) = n - d + 1$. $\square$

Pojavi se vprašanje, kdaj je ta meja dosežena.

Primer 5.2 ([3]). Definirajmo graf G z vozlišči $\{v_0, \ldots, v_d, u_1, \ldots, u_{n-(d+1)}\}$ in povezavami $v_i \sim v_{i+1}$ za $i \in \{0, \ldots, d - 1\}$ in $u_j \sim v_1$ za $j \in [n - d - 1]$ (glej sliko 4).



Slika 4: Graf z n vozlišči, premerom d in geodetskim številom enakim $n - d + 1$. Zeleno obarvana vozlišča tvorijo geodetsko množico.

Graf G je drevo z n vozlišči, $n - d + 1$ listi in premerom d. Po izreku 3.7 velja $\mathrm{g}(G) = n - d + 1$, torej G dosega enakost v izreku 5.1.

Razmislimo še, kakšna je povezava med polmerom, premerom in geodetskim številom grafa. Pred tem se spomnimo naslednje dobro znane zveze, ki jo med drugim najdemo v [3].

Trditev 5.3. *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\,\mathrm{rad}(G).$$

Dokaz. Po definiciji velja $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G)$. Za dokaz desne neenakosti izberimo takšni vozlišči $u, v \in V(G)$, da velja $d(u,v) = \mathrm{diam}(G)$. Izberimo še vozlišče $w \in V(G)$, za katero velja $\mathrm{ecc}(w) = \mathrm{rad}(G)$. Ker je razdalja v grafu metrika, sledi

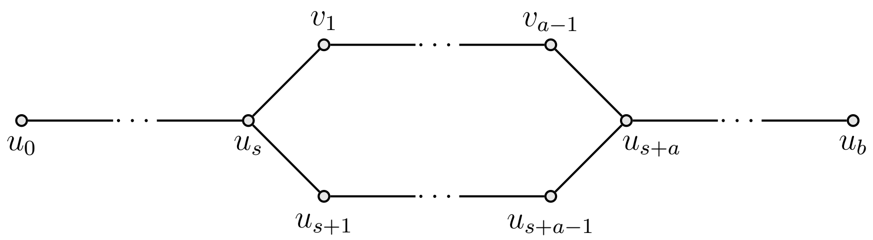
$$\mathrm{diam}(G) = d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \leq \mathrm{ecc}(w) + \mathrm{ecc}(w) = 2\,\mathrm{rad}(G). \qquad \square$$

Izkaže se, da za določeni vrednosti polmera in premera, ki ustrezata zgornji trditvi, vedno obstaja graf, ki ju realizira.

Izrek 5.4 (Ostrand, [12])**.** *Naj bosta a in b takšni naravni števili, da velja $a \leq b \leq 2a$. Tedaj obstaja povezan graf G, za katerega velja* $\mathrm{rad}(G) = a$ *in* $\mathrm{diam}(G) = b$.

Dokaz. Če je $b = 2a$ ali $b = 2a - 1$, potem je iskani graf pot dolžine b (P_{b+1}).

Če je $a \leq b \leq 2a - 2$, pa je iskani graf $G_{a,b,s}$, kjer je $s \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{1}{2}(b-a) \rfloor\}$, z vozlišči $\{u_0, \ldots, u_b, v_1, \ldots, v_{a-1}\}$ in povezavami $u_i \sim u_{i+1}$ za $i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $v_j \sim v_{j+1}$ za $j \in [a-2]$ ter $u_s \sim v_1$ in $v_{a-1} \sim u_{s+a}$. Graf $G_{a,b,s}$ torej sestavljata poti $(u_0, \ldots, u_b)$ in $(u_s, v_1, \ldots, v_{a-1}, u_{s+a})$, ki imata skupni le vozlišči u_s in u_{s+a} (glej sliko 5). Graf tako vsebuje cikel dolžine $2a$.



Slika 5: Graf $G_{a,b,s}$, kot je definiran v dokazu izreka 5.4.

Določimo lahko ekscentričnosti vozlišč:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ecc}(u_i) = b - i \ \text{ za } i \in \{0, 1, \ldots s-1\},\\
&\mathrm{ecc}(u_i) = i \ \text{ za } i \in \{s+a+1, s+a+2, \ldots, b\},\\
&\mathrm{ecc}(u_i) = \max\{b-i, a\} \ \text{ za } i \in \{s, s+1, \ldots, s+a\},\\
&\mathrm{ecc}(v_j) = \max\{b-s-j, a\} \ \text{ za } j \in [a-1].
\end{aligned}$$

Torej velja $a \leq \mathrm{ecc}(u) \leq b$ za vsa vozlišča $u \in V(G_{a,b,s})$. Pri tem ključno uporabimo dejstvo, da je $0 \leq s \leq \lfloor \frac{1}{2}(b-a) \rfloor$. Ker velja še $\mathrm{ecc}(u_0) = b$ in $\mathrm{ecc}(u_a) = a$, je $\mathrm{diam}(G_{a,b,s}) = b$ in $\mathrm{rad}(G_{a,b,s}) = a$. $\square$

Opomba 5.5. V primeru, ko je $b = 2a$ ali $b = 2a - 1$, je pot dolžine b graf z najmanjšim številom vozlišč, ki ustreza zahtevanim pogojem. V primeru, ko je $a \leq b \leq 2a - 2$, se izkaže, da ima najmanjši graf s premerom b in polmerom a natanko $a + b$ vozlišč. Obstaja natanko $\lfloor \frac{1}{2}(b-a) \rfloor + 1$ neizomorfnih grafov s temi lastnostmi in to so ravno grafi $G_{a,b,s}$. Dokaz je precej tehničen in oddaljen od glavne teme tega dela. Najdemo ga v [12].

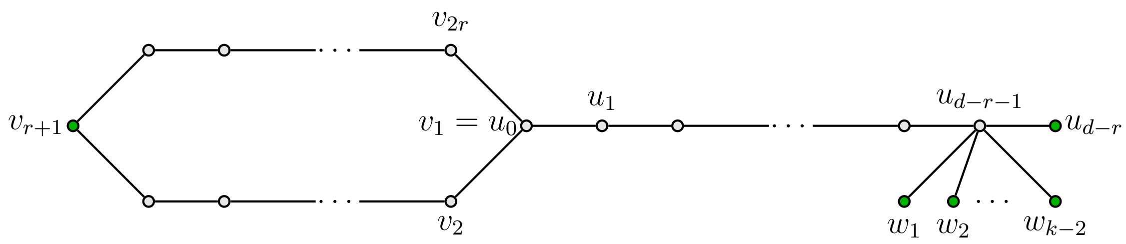
Iz izreka 5.4 izhaja vprašanje, ali lahko poleg določenega premera in polmera zahtevamo še vrednost geodetskega števila.

Izrek 5.6 ([3])**.** *Naj bodo r, d in k naravna števila, za katera velja $k \geq 2$ in $r \leq d \leq 2r$. Tedaj obstaja povezan graf G, za katerega velja* $\mathrm{rad}(G) = r$, $\mathrm{diam}(G) = d$ *in* $\mathrm{g}(G) = k$.

Dokaz. V primeru, ko je $r = 1$, imamo dve možnosti. Če je $d = 1$, je iskani graf polni graf K_k. Če je $d = 2$, pa je iskani graf zvezda $K_{1,k}$.

Definirajmo graf $\widetilde{G}_{a,b,l}$ z vozlišči $\{v_{2a}, \ldots, v_2, v_1 = u_0, u_1, \ldots, u_b, w_1, \ldots, w_l\}$ in povezavami $v_i \sim v_{i+1}$ za $i \in [2a-1]$, $v_{2a} \sim v_1$, $u_j \sim u_{j+1}$ za $j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ in $u_{b-1} \sim w_k$ za $k \in [l]$.

V primeru, ko je $r \geq 2$, si oglejmo graf $\widetilde{G}_{r,d-r,k-2}$ (glej sliko 6).



Slika 6: Graf $\widetilde{G}_{r,d-r,k-2}$, kot je definiran v dokazu izreka 5.6. Zeleno obarvana vozlišča tvorijo geodetsko množico.

Podobno kot v dokazu izreka 5.4 vidimo, da je polmer grafa $\widetilde{G}_{r,d-r,k-2}$ enak r, premer pa d. Graf ima $k-1$ listov, ki so gotovo vsebovani v vsaki geodetski množici. Označimo jih z $\mathcal{L} = \{w_1, \ldots, w_{k-2}, u_{d-r}\}$. Ker je $I[\mathcal{L}] = \mathcal{L} \cup \{u_{d-r-1}\} \neq V(G)$, listi niso geodetska množica. Hitro vidimo, da je $S = \mathcal{L} \cup \{v_{r+1}\}$ geodetska množica moči k, zato je $\mathrm{g}(G) = k$. □

Opomba 5.7. Pogoji na parametre v izreku so smiselni. Iz trditve 2.5 sledi, da mora biti $k \geq 2$, iz trditve 5.3 pa pogoj $r \leq d \leq 2r$.

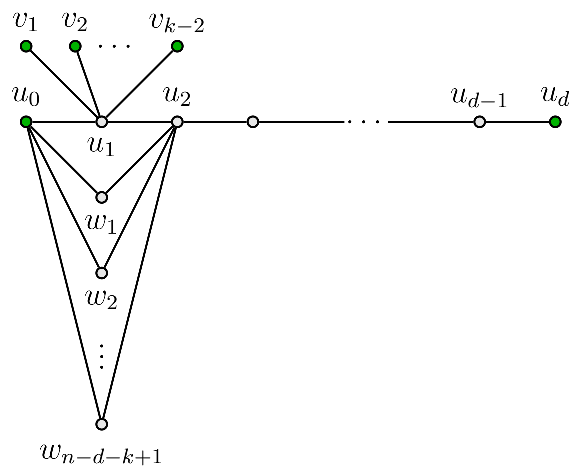
Izkaže se, da lahko namesto polmera zahtevamo določeno število vozlišč grafa.

Izrek 5.8 ([3])**.** *Naj bodo n, d, in k naravna števila, za katera velja $2 \leq d < n$, $2 \leq k < n$ in $n - d - k + 1 \geq 0$. Tedaj obstaja povezan graf G z n vozlišči, za katerega je* $\mathrm{diam}(G) = d$ *in* $\mathrm{g}(G) = k$.

Dokaz. Definirajmo graf G z vozlišči $\{u_0, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_{k-2}, w_1, \ldots, w_{n-d-k+1}\}$ in povezavami $u_i \sim u_{i+1}$ za $i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, $u_1 \sim v_j$ za $j \in [k-2]$ in $u_0 \sim w_k \sim u_2$ za $k \in [n-d-k+1]$ (glej sliko 7).

Zlahka določimo število vozlišč grafa $|V(G)| = (d+1)+(k-2)+(n-d-k+1) = n$. Premer grafa je enak d, kar sledi iz pogoja $d \geq 2$. Množica listov $\mathcal{L}$ je zagotovo podmnožica vsake geodetske množice. Vendar $u_0 \notin I[\mathcal{L}]$, zato množica listov ni geodetska. Množica $S = \mathcal{L} \cup \{u_0\}$ pa je geodetska, saj je $I[S] = V(G)$. Zato je $\mathrm{g}(G) = |S| = k$. Graf G torej ustreza vsem zahtevam iz izreka. □

Opomba 5.9. Razmislimo, ali so vrednosti parametrov v izreku smiselne. Edini grafi s premerom 1 so polni grafi. To so hkrati tudi edini grafi z geodetskim številom enakim redu grafa. Zato lahko brez škode izvzamemo vrednosti $d = 1$ in $k = n$. Pogoja $2 \leq d < n$ in $2 \leq k < n$ sta torej smiselna. Pogoj $n - d - k + 1 \geq 0$ izhaja iz izreka 5.1 in zagotavlja dobro definiranost grafa G v dokazu izreka.



Slika 7: Graf G, kot je definiran v dokazu izreka 5.8. Zeleno obarvana vozlišča tvorijo geodetsko množico.

5.2 Krepko geodetsko število grafa z določenim premerom

Tudi krepko geodetsko število lahko omejimo glede na premer grafa in s tem izboljšamo trditev 2.9. Pri tem je osnovna motivacija poiskati analogije iz razdelka 5.1.

Trditev 5.10. *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{sg}(G) \leq \mathrm{n}(G) - \mathrm{diam}(G) + 1.$$

Dokaz. Dokaz je enak kot pri izreku 5.1. Fiksna geodetka med vozliščema u in v je pot dolžine $\mathrm{diam}(G)$. Med ostalimi vozlišči fiksiramo poljubne geodetke. □

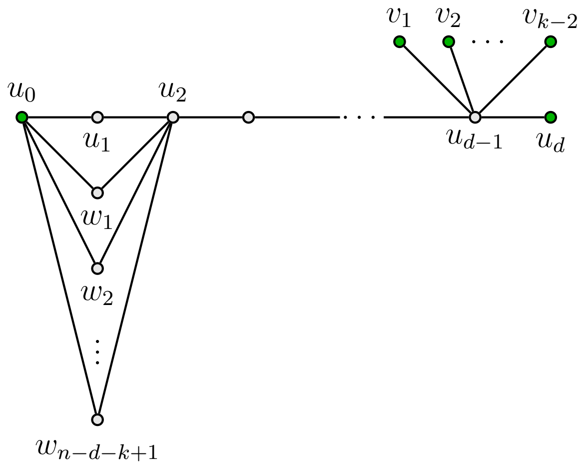
Tudi primer grafa, kjer je dosežena enakost, je enak (primer 5.2). Iz tega sledi, da vedno obstaja graf z določenim številom vozlišč in krepkim geodetskim številom. Prav tako velja podobna trditev glede obstoja grafa z določenim polmerom, premerom in krepkim geodetskim številom.

Trditev 5.11. *Naj bodo r, d in k naravna števila, za katera velja $k \geq 3$ in $r \leq d \leq 2r$. Tedaj obstaja povezan graf G, za katerega velja $\mathrm{rad}(G) = r$, $\mathrm{diam}(G) = d$ in $\mathrm{sg}(G) = k$.*

Dokaz. Dokazujemo podobno kot pri izreku 5.6, opazujemo graf $\widetilde{G}_{r,d-r,k-2}$. Med fiksne geodetke vzamemo pot med v_{r+1} in u_{d-r} preko v_{2r} in pot med v_{r+1} in w_1 preko v_2 (ta pot obstaja, ker je $k \geq 3$, torej ima graf G vsaj eno vozlišče tipa w_i). Ne glede na to, kako fiksiramo preostale geodetke, pokrijemo vsa vozlišča grafa. Torej je $\mathrm{sg}(\widetilde{G}_{r,d-r,k-2}) \leq k$. Ker množica listov grafa ni krepka geodetska množica in ima graf $k-1$ listov, sledi še $\mathrm{sg}(\widetilde{G}_{r,d-r,k-2}) \geq k$. □

Opomba 5.12. Trditev v primeru, ko je $k = 2$, ne velja v splošnem. Če je $\mathrm{sg}(G) = 2$, je graf G izomorfen grafu poti za katerega velja $\mathrm{rad}(G) = \left\lfloor \frac{\mathrm{diam}(G)}{2} \right\rfloor$, torej polmera ne moremo izbrati poljubno.

Analog izreka 5.8 velja za primer, ko je $2k \geq n - d + 3$. Primer je graf, podoben grafu iz dokaza izreka 5.8, le da so vozlišča v_i povezana z vozliščem u_{d-1} namesto z u_1 (glej sliko 8).



Slika 8: Graf, ki dokazuje analog izreka 5.8 za krepko geodetsko število, če je $2k \geq n - d + 3$. Zeleno obarvana vozlišča tvorijo krepko geodetsko množico.

Za fiksne geodetke vzamemo poti med u_0 do v_i preko w_i ter pot med u_0 in u_d preko u_1. Da te poti obstajajo, mora veljati ravno prej omenjeni pogoj $2k \geq n-d+3$.

Izpeljemo lahko tudi spodnjo mejo za geodetsko število.

Trditev 5.13. *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{sg}(G) \geq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8\,\mathrm{n}(G)}{\mathrm{diam}(G)+1}}}{2} \right\rceil .$$

Dokaz. Označimo $n = \mathrm{n}(G)$ in $d = \mathrm{diam}(G)$. Ker je premer grafa enak d, je dolžina vsake geodetke manjša ali enaka d, kar pomeni, da pokrije največ $d + 1$ vozlišč. Hkrati velja, da vsa vozlišča grafa pokrijemo z $\binom{\mathrm{sg}(G)}{2}$ geodetkami. Sledi, da je

$$n \leq \binom{\mathrm{sg}(G)}{2}(d+1).$$

Dobljena neenakost porodi kvadratno neenačbo

$$\mathrm{sg}(G)^2 - \mathrm{sg}(G) - \frac{2n}{d+1} \geq 0.$$

Ker je $\mathrm{sg}(G)$ naravno število in je ena od pripadajočih ničel negativna, sledi $\mathrm{sg}(G) \geq \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+\frac{8n}{d+1}}}{2} \right\rceil$. □

Enakost je v trditvi dosežena pri grafih poti P_n za $n \geq 2$. Res, saj zanje velja $\mathrm{diam}(P_n) = n - 1$ in $\mathrm{sg}(P_n) = 2$. Velja še več: enakost je lahko dosežena, če je vsako vozlišče pokrito natanko enkrat (vključno s krajišči poti). To pomeni, da je $\mathrm{sg}(G) \leq 2$. Iz česar sledi $\mathrm{sg}(G) = 2$ in G je izomorfen grafu poti.

Opazimo, da v trditvi vsako vozlišče iz krepke geodetske množice pokrijemo $\mathrm{sg}(G)$-krat. Zato lahko zapišemo natančnejšo oceno. Pred tem si oglejmo poseben primer, ko je premer grafa enak 1. Edini grafi s premerom 1 so polni grafi in zanje velja $\mathrm{sg}(G) = n$.

Izrek 5.14. *Za graf G na n vozliščih in z diametrom $d \geq 2$ velja*

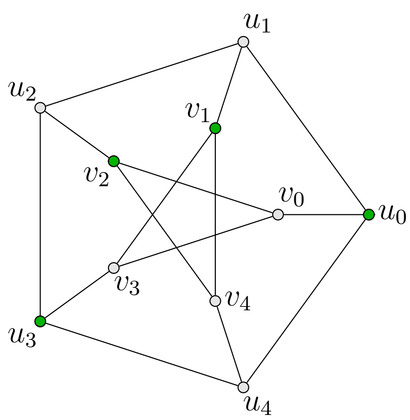
$$\mathrm{sg}(G) \geq \left\lceil \frac{d - 3 + \sqrt{(d-3)^2 + 8n(d-1)}}{2(d-1)} \right\rceil.$$

Dokaz uporabi zvezo $\mathrm{n}(G) \leq \mathrm{sg}(G) + (\mathrm{diam}(G) - 1)\binom{\mathrm{sg}(G)}{2}$ in je podoben kot pri prejšnji trditvi.

Ker izrek 5.14 v splošnem postavi strožjo oceno za število vozlišč kot trditev 5.13, je tudi ocena iz izreka 5.14 boljša.

Če je $d \geq 2$, je enakost dosežena na primer pri grafih poti. Vendar to niso edini grafi, ki dosegajo enakost.

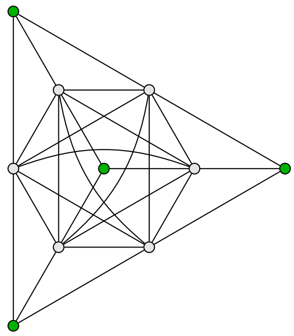
Primer 5.15. Naj bo P Petersenov graf z oznakami vozlišč kot na sliki 9. Petersenov graf ima diameter 2 in 10 vozlišč. Iz zgornje trditve sledi, da je $\mathrm{sg}(P) \geq 4$. Množica $S = \{u_0, u_3, v_1, v_2\}$ je krepka geodetska množica, zato velja enačaj.



Slika 9: Petersenov graf P z označeno krepko geodetsko množico (zeleno obarvana vozlišča).

Oglejmo si še bolj splošne primere grafov premera 2, ki dosegajo enakost v izreku 5.14. Naj bo G graf premera 2 in S krepka geodetska množica grafa moči $\mathrm{sg}(G)$. Ker G dosega enakost v izreku, velja $\mathrm{n}(G) = \mathrm{sg}(G) + \binom{\mathrm{sg}(G)}{2}$ in vse geodetke so dolžine 2. To pomeni, da lahko vozlišča grafa razdelimo na dva dela: vozlišča, ki ležijo v krepki geodetski množici S, in vozlišča, ki ležijo znotraj natanko ene geodetke med vozlišči iz S. Množica S je neodvisna množica (tj. med vozlišči v njej ni nobene povezave), sicer geodetka med sosednima vozliščema ne bi pokrila nobenega drugega vozlišča. Oglejmo si naslednjo konstrukcijo grafa G_k, kjer je k naravno število. Vzemimo subdivizijo grafa K_k z množico vozlišč $V(K_k) \cup E(K_k)$ in dodajmo povezave $e \sim f$ za vsak par vozlišč $e, f \in E(K_k)$ (glej sliko 10). Premer grafa G_k je očitno enak 2. Množica $V(K_k)$, s subdividiranimi povezavami kot fiksiranimi geodetkami, je krepka geodetska množica, zato je $\mathrm{sg}(G_k) \leq k$. Iz zveze $\mathrm{n}(G_k) = k + \binom{k}{2}$ in izreka 5.14 sledi tudi $k \leq \mathrm{sg}(G_k)$. Torej je $\mathrm{sg}(G_k) = k$ in graf G_k dosega enakost v izreku 5.14.

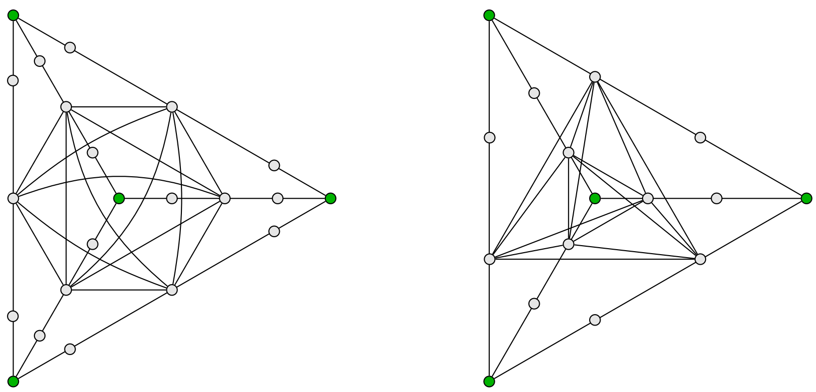
Opomba 5.16. Zgolj subdivizija grafa K_k ni ustrezen primer, saj ima premer 3.



Slika 10: Graf G_4 s krepkim geodetskim številom 4 in premerom 2, ki doseže enačaj v izreku 5.14. Vozlišča, obarvana zeleno, tvorijo krepko geodetsko množico.

Ugotovitev lahko posplošimo na poljuben diameter. Naj bo G graf s premerom d, krepkim geodetskim številom k in $k+(d-1)\binom{k}{2}$ vozlišči. Če je S krepka geodetska množica moči k, je hkrati tudi neodvisna množica. Med vsakim parom vozlišč iz S obstajajo popolnoma disjunktne poti dolžine d, vsaka pot torej vsebuje $d-1$ vozlišč. Te poti so geodetke v grafu, torej med vozlišči na isti poti ni drugih povezav. Vendar pa morajo obstajati neke povezave med vozlišči različnih poti, ki zagotovijo, da je premer grafa enak d.

Oglejmo si graf $G_{k,d}$ definiran za $k, d \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, $d \geq 2$, na naslednji način. Vzemimo $(d-1)$-kratno subdivizijo grafa K_k z množico vozlišč $V(K_k) \cup \{e^i \ ; \ e \in E(K_k), i \in [d-1]\}$, kjer vozlišča e^i vsa ležijo na subdividirani povezavi e in velja $e^i \sim e^{i+1}$ za vse $i \in [d-2]$. Definirajmo takšno množico $\mathcal{V} \subseteq V(G_{k,d})$, da za vsako vozlišče $u \in V(K_k)$ obstaja vozlišče $v \in \mathcal{V}$, da je $\mathrm{d}(u,v) = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$. Graf $G_{k,d}$ naj vsebuje tudi povezave $x \sim y$ za vse pare $x, y \in \mathcal{V}$ (glej sliko 11). Opazimo, da je v primeru, ko je d sodo, množica $\mathcal{V}$ enolična in enaka $\{e^{\frac{d}{2}} \ ; \ e \in E(K_k)\}$. Množica $\mathcal{V}$ je dobro definirana, saj iz $k \geq 3$ sledi, da ima graf K_k več ali enako povezav kot vozlišč.



Slika 11: Grafa $G_{4,4}$ in $G_{4,3}$ dosegata enakost v izreku 5.14. Vozlišča, obarvana zeleno, tvorijo krepko geodetsko množico.

Očitno velja $\mathrm{diam}(G_{k,d}) \geq d$, ker je $\mathrm{d}(u,v) = d$ za poljubni različni vozlišči $u, v \in V(K_k)$. Za dokaz $\mathrm{diam}(G_{k,d}) = d$ najprej obravnavajmo primer, ko je d

sodo število. Za vsako vozlišče $e^i \in V(G_{k,d}) - V(K_k)$ obstaja vozlišče $v \in \mathcal{V}$, da je $\mathrm{d}(e^i, v) \leq \frac{d}{2} - 1$. Torej je $\mathrm{d}(e^i, u) \leq \frac{d}{2} - 1 + 1 + \frac{d}{2} = d$ za vsako vozlišče $u \in V(G_{k,d})$. Zato v tem primeru velja $\mathrm{diam}(G_{k,d}) = d$.

Oglejmo si še primer, ko je d liho število. Za vsako vozlišče $e^i \in V(G_{k,d}) - V(K_k)$ obstaja vozlišče $v \in \mathcal{V}$, da je $\mathrm{d}(e^i, v) \leq \frac{d-1}{2}$. Torej za poljubni vozlišči $e^i, f^j \in V(G_{k,d}) - V(K_k)$ velja $\mathrm{d}(e^i, f^j) \leq \frac{d-1}{2} + 1 + \frac{d-1}{2} = d$. Iz lastnosti množice $\mathcal{V}$ sledi, da med vozliščema $e^i \in V(G_{k,d}) - V(K_k)$ in $u \in V(K_k)$ obstaja pot dolžine največ $\frac{d-1}{2} + 1 + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor = d$. Zato tudi v tem primeru velja $\mathrm{diam}(G_{k,d}) = d$.

Ker je množica $V(K_k)$ krepka geodetska množica in je $\mathrm{n}(G_{k,d}) = k + (d-1)\binom{k}{2}$, velja $\mathrm{sg}(G_{k,d}) = k$. Torej grafi $G_{k,d}$ dosegajo enakost v izreku 5.14.

5.3 Število izometričnih poti grafa z določenim premerom

Tudi število izometričnih poti lahko dodatno omejimo, če poznamo premer grafa, in s tem izboljšamo trditev 2.12. Tudi tu poskusimo poiskati analogije iz razdelka 5.1.

Trditev 5.17. *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{ip}(G) \leq 1 + \left\lceil \frac{\mathrm{n}(G) - \mathrm{diam}(G) - 1}{2} \right\rceil .$$

Dokaz. Označimo $n = \mathrm{n}(G)$ in $d = \mathrm{diam}(G)$. Naj bosta $u, v \in v(G)$ vozlišči grafa, za kateri velja $d(u, v) = d$. Naj bo $u = v_0, v_1, \ldots, v_d = v$ pot P dolžine d. Z najkrajšimi potmi moramo pokriti le še preostalih $n - d - 1$ vozlišč. Za to potrebujemo največ $\left\lceil \frac{n-d-1}{2} \right\rceil$ poti. S tem je trditev dokazana. □

Primer, kjer je dosežena enakost, je enak kot prej (primer 5.2). Graf je drevo z $n - d + 1$ listi, zato zanj velja $\mathrm{ip}(G) = \left\lceil \frac{n-d+1}{2} \right\rceil = 1 + \left\lceil \frac{n-d-1}{2} \right\rceil$.

Podobno lahko ugotovimo, da za dane polmer, premer in število izometričnih poti, obstaja graf z želenimi lastnostmi.

Izrek 5.18. *Naj bodo r, d in k naravna števila, za katera velja $k \geq 2$ in $r \leq d \leq 2r$. Tedaj obstaja povezan graf G, za katerega velja $\mathrm{rad}(G) = r$, $\mathrm{diam}(G) = d$ in $\mathrm{ip}(G) = k$.*

Dokaz. V primeru, ko je $r = 1$, imamo dve možnosti. Če je $d = 1$, je iskani graf polni graf K_{2k} ali K_{2k-1}. Če je $d = 2$, je iskani graf zvezda $K_{1,2k}$ ali $K_{1,2k-1}$.

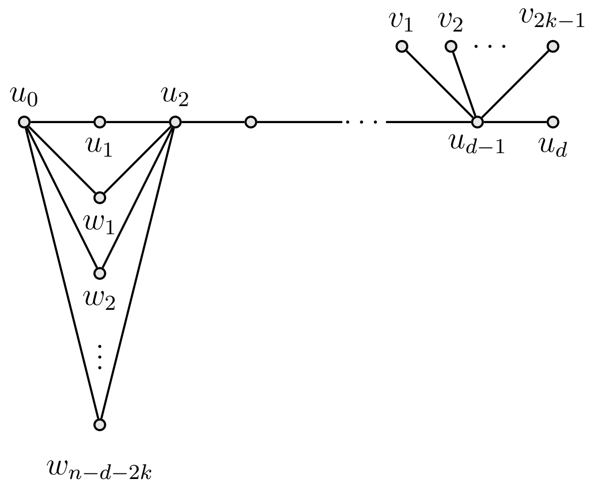
V primeru, ko je $r \geq 2$, opazujmo graf $\widetilde{G}_{r,d-r,2k-3}$, ki je definiran v dokazu izreka 5.6. Podobno kot prej vidimo, da je $\mathrm{diam}(\widetilde{G}_{r,d-r,2k-3}) = d$ in $\mathrm{rad}(\widetilde{G}_{r,d-r,2k-3}) = r$. Graf ima $2k - 2$ listov, zato je $\mathrm{ip}(G) \geq k - 1$.

Ker je razdalja med poljubnima listoma enaka 2, z najkrajšimi potmi med listi očitno ne moramo pokriti vseh vozlišč grafa. Torej je $\mathrm{ip}(G) \geq k$.

Naj bo P_1 pot od v_{r+1} do u_{d-r} preko vozlišča v_{2r} in P_2 pot od v_{r+1} do w_{2k-3} preko vozlišča v_2. Naj bo $\mathcal{P}$ množica poti $w_{2i-1} \sim w_{2i}$ za $i \in [k-2]$. S potmi $\mathcal{P} \cup \{P_1, P_2\}$ pokrijemo vsa vozlišča grafa G, vse poti so izometrične in jih je $2 + (k-2) = k$. Torej je $\mathrm{ip}(G) = k$. □

Analog izreka 5.8 velja vsaj v nekaterih primerih. Najprej razmislimo, katere vrednosti parametrov so sploh smiselne. Ker je polni graf edini graf s premerom 1 in pot edini graf s številom izometričnih poti enakim 1, lahko ti dve vrednosti izločimo. Naj bodo torej $n, d, k \in \mathbb{N}$, $2 \leq d < n$ in $2 \leq k \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Če dodano velja še

$d + 2k \leq n$ in $n - d + 1 \leq 4k$, potem obstaja povezan graf z n vozlišči, premerom d in številom izometričnih poti k. Primer je enak kot pri krepkem geodetskem številu, le da je vozlišč tipa v_i tokrat $2k - 1$, vozlišč tipa w_j pa $n - d - 2k$ (glej sliko 12).



Slika 12: Graf, ki dokazuje analog izreka 5.8 za število izometričnih poti, če je $d + 2k \leq n$ in $n - d + 1 \leq 4k$.

Tudi za število izometričnih poti lahko izpeljemo spodnjo mejo povezano s premerom.

Trditev 5.19 ([5]). *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{ip}(G) \geq \frac{\mathrm{n}(G)}{\mathrm{diam}(G) + 1}.$$

Dokaz. Označimo $n = \mathrm{n}(G)$ in $d = \mathrm{diam}(G)$. Vsaka najkrajša pot v grafu je dolžine največ d, torej pokrije največ $d + 1$ vozlišč. Zato velja $\mathrm{ip}(G)(d + 1) \geq n$. □

Enakost je dosežena pri poteh, polnih grafih na sodo vozliščih in hiperkockah na 2^{2^k-1} vozliščih, kjer je k naravno število ([5]). V viru je navedeno, da enakost velja tudi za cikle, vendar to ne drži. Zanje je namreč $\mathrm{ip}(C_n) = 2 > \frac{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$. Prav tako enakost ni dosežena pri polnih grafih lihega reda. Zanje je $\mathrm{ip}(K_{2k+1}) = k + 1 > \frac{2k+1}{2}$. Za poti je $\mathrm{ip}(P_n) = 1 = \frac{n}{(n-1)+1}$, za polne grafe sodega reda je $\mathrm{ip}(K_{2k}) = k = \frac{2k}{2}$, torej res velja enačaj. Enakost v $\mathrm{ip}(G) \geq \left\lceil \frac{\mathrm{n}(G)}{\mathrm{diam}(G)+1} \right\rceil$ pa velja tudi za cikle in polne grafe lihega reda.

6 Kartezični produkt grafov

Definicijo kartezičnega produkta smo spoznali že v razdelku 2. V nadaljevanju si ogledamo dva posebna primera produktov – prizme in mreže. Za obe družini grafov raziščemo geodetsko število, krepko geodetsko število in število izometričnih poti.

6.1 Prizme

Prizma nad G je produkt grafa G z grafom K_2. Oglejmo si, kaj lahko povemo o $\mathrm{g}(G \,\square\, K_2)$, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2)$ in $\mathrm{ip}(G \,\square\, K_2)$ na podlagi vrednosti $\mathrm{g}(G)$, $\mathrm{sg}(G)$ in $\mathrm{ip}(G)$.

Vozlišči grafa K_2 označimo z 0 in 1. Graf $G \,\square\, K_2$ je sestavljen iz dveh G-slojev: G^0 in G^1. Če krajišči ležita v istem G-sloju, v tem sloju leži tudi celotna geodetka med njima. Velja tudi, da geodetka lahko vsebuje le en par vozlišč $(x,0),(x,1)$ za $x \in V(G)$.

Opazimo, da je projekcija geodetke grafa $G \,\square\, K_2$ na nek G-sloj geodetka v tem sloju. Na ta način geodetke prizme $G \,\square\, K_2$ porodijo geodetke v grafu G.

Osnovna lastnost grafa $G \,\square\, K_2$ je, da ga sestavljata dve kopiji grafa G. Zato očitno velja $\mathrm{g}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{g}(G)$, $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{sg}(G)$ in $\mathrm{ip}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{ip}(G)$, saj lahko v obeh kopijah izberemo ista vozlišča oz. izometrične poti. Kot bomo videli v nadaljevanju, je za število izometričnih poti enakost dosežena pri grafih P_n, pri geodetskem in krepkem geodetskem številu pa enakosti nista nikoli doseženi.

6.1.1 Geodetsko število prizem

V nadaljevanju raziščemo lastnosti geodetskega števila prizem. Najprej si ogledamo preprost primer.

Primer 6.1. Spomnimo se, da velja

$$\mathrm{g}(C_n) = \begin{cases} 2; & n \text{ sod}, \\ 3; & n \text{ lih}. \end{cases}$$

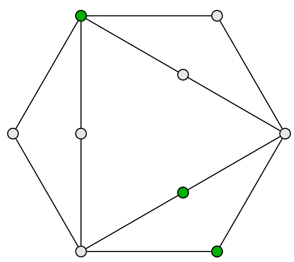
Razmislimo, koliko je $\mathrm{g}(C_n \,\square\, K_2)$. Vozlišča cikla C_n označimo z $v_1, \ldots, v_n$.

Če je n sodo število, je $\{(v_1,0),(v_{\frac{n}{2}},1)\}$ geodetska množica. Če je n liho število, podobno kot pri ciklu C_n razmislimo, da noben par vozlišč ni geodetska množica. Množica $\{(v_1,0),\ (v_{\frac{n-1}{2}},1),\ (v_{\frac{n+1}{2}},1)\}$ pa je geodetska. Zato je

$$\mathrm{g}(C_n \,\square\, K_2) = \mathrm{g}(C_n).$$

Kot je razvidno iz naslednjega primera v splošnem ne velja $\mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = \mathrm{g}(G)$.

Primer 6.2. V [3] navajajo, da je primer grafa G, za katerega je $\mathrm{g}(G) < \mathrm{g}(G \,\square\, K_2)$, subdivizija multigrafa K_3 z dvojnimi povezavami (glej sliko 13). Vendar je $\mathrm{g}(K_3^{(2)}) = 3 = \mathrm{g}(K_3^{(2)} \,\square\, K_2)$.



Slika 13: Subdivizija multigrafa K_3 z dvojnimi povezavami. Z zeleno barvo je označena geodetska množica.

Za graf kolesa W_6 velja $\mathrm{g}(W_6) = 3$. Določimo vrednost $\mathrm{g}(W_6 \,\square\, K_2)$. Uporabljamo enake oznake kot v podpoglavju 3.2. Množica $\{(v_1,0),(v_3,1),(v_5,0),(v_5,1)\}$

je geodetska množica grafa $W_6 \,\square\, K_2$, zato je $\mathrm{g}(W_6 \,\square\, K_2) \leq 4$. Denimo, da je $\mathrm{g}(W_6 \,\square\, K_2) \leq 3$. Tedaj obstaja geodetska množica S moči 3. V vsakem W_6-sloju mora ležati vsaj eno vozlišče iz S. Zato je brez škode $S = \{(x,0),(y,0),(w,1)\}$. Premer grafa W_6 je enak 2. Poleg tega med dvema vozliščema obstajata največ dve različni geodetki, vsaj ena vedno poteka preko centralnega vozlišča. To pomeni, da z geodetkami med vozliščema $(x,0)$ in $(w,1)$ pokrijemo največ štiri vozlišča v vsakem sloju, vključno s centralnim vozliščem in krajiščema geodetk. Analogno sklepamo za geodetke med $(y,0)$ in $(w,1)$. Torej v sloju W_6^1 pokrijemo največ $8-1-1=6$ vozlišč, saj smo centralno vozlišče in krajišče geodetke šteli dvakrat. V sloju pa je sedem vozlišč, zato S očitno ne more biti geodetska množica. Sledi, da je $\mathrm{g}(W_6 \,\square\, K_2) = 4$. Torej je $\mathrm{g}(W_6) < \mathrm{g}(W_6 \,\square\, K_2)$.

Izpeljemo lahko naslednjo povezavo med $\mathrm{g}(G)$ in $\mathrm{g}(G \,\square\, K_2)$.

Izrek 6.3 ([3]). *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{g}(G) \leq \mathrm{g}(G \,\square\, K_2).$$

Dokaz. Naj bo S najmanjša geodetska množica grafa $G \,\square\, K_2$. Definirajmo

$$S' = \{v \in V(G) \; ; \; (v,0) \in S \text{ ali } (v,1) \in S\}.$$

Naj bo $v \in V(G)$ poljubno vozlišče. Ker je S geodetska množica, vozlišče $(v,0)$ leži na neki geodetki. Torej mora vsaj eno od krajišč te geodetke ležati v sloju G^0. Ločimo dve možnosti.

1. Naj bosta obe krajišči geodetke v sloju G^0. Označimo njeni krajišči z $(x,0)$ in $(y,0)$. Velja $x, y \in S'$, ker sta krajišči geodetke v množici S. Tedaj vozlišče v očitno leži na x,y-geodetki v grafu G.

2. Naj le eno od krajišč leži v sloju G^0. Označimo krajišči z $(x,0)$ in $(y,1)$. Seveda je $x, y \in S'$. Velja, da je $\mathrm{d}((x,0),(y,1)) = \mathrm{d}((x,0),(y,0)) + 1$. Torej vozlišče $(v,0)$ leži na neki geodetki med $(x,0)$ in $(y,0)$. Zato v leži na neki x,y-geodetki v grafu G.

Ugotovili smo, da poljubno vozlišče grafa G leži na neki geodetki med vozliščema iz množice S'. Torej je S' geodetska množica. Ker velja $|S'| \leq |S|$, je $\mathrm{g}(G) \leq \mathrm{g}(G \,\square\, K_2)$. $\square$

Iz primera 6.1 sledi, da je v izreku lahko dosežen enačaj. Vprašamo se, kakšne lastnosti imajo grafi, pri katerih se to zgodi.

Izrek 6.4 ([3]). *Naj v grafu G obstaja geodetska množica S moči $\mathrm{g}(G)$, ki vsebuje takšno vozlišče x, da za vsako vozlišče $v \in V(G)$ obstaja vozlišče $w \in S$, da v leži na neki x,w-geodetki. Potem je $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2)$.*

Dokaz. Naj bo S geodetska množica grafa G, ki vsebuje vozlišče x z zgoraj opisano lastnostjo. Definirajmo

$$S' = \{(x,0)\} \cup \{(w,1) \; ; \; w \in S - \{x\}\}.$$

Velja $|S'| = |S|$. Ker vemo, da je $\mathrm{g}(G) \leq \mathrm{g}(G \,\square\, K_2)$, je dovolj dokazati, da je S' geodetska množica grafa $G \,\square\, K_2$.

Vzemimo poljubno vozlišče (v, i) grafa $G \,\square\, K_2$, ki ni v množici S'. Obstaja $w \in S$, da vozlišče v leži na neki x, w-geodetki v grafu G. Tedaj (v, i) leži na neki $(x, 0), (w, 1)$-geodetki v grafu $G \,\square\, K_2$. Krajišči te geodetke sta v množici S'. Torej je S' res geodetska množica. $\square$

Pojavi se vprašanje, kdaj velja obrat izreka 6.4. Obrat velja, če je $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = 2$ ali 3. Ni znano, če velja za 4, za več ali enako 5 ne velja v splošnem ([3]). V nadaljevanju bomo videli, da pri 4 obrat v resnici ne velja v splošnem. Oglejmo si sedaj utemeljitve zgornjih trditev.

Naj bo G graf, za katerega velja $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = 2$. Tedaj obstaja $S \subseteq V(G)$ geodetska množica grafa G. Naj bo $S = \{x, y\}$. Po definiciji geodetske množice za vsako vozlišče grafa G velja, da leži na neki x, y-geodetki. Torej vozlišče x ustreza pogoju iz izreka.

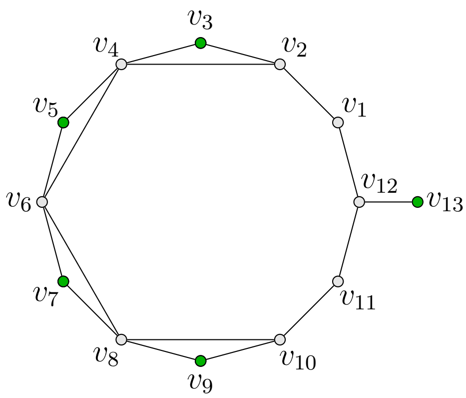
Naj bo G graf, za katerega velja $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = 3$. Tedaj obstaja $S \subseteq V(G)$ geodetska množica grafa $G \,\square\, K_2$. V vsakem G-sloju leži vsaj eno vozlišče iz množice S. Zato je brez škode za splošnost $S = \{(x, 0), (u, 1), (v, 1)\}$. Geodetke med vozliščema $(u, 1)$ in $(v, 1)$ ležijo le v sloju G^1. Zato vsako vozlišče sloja G^0 leži na $(x, 0), (u, 1)$-geodetki ali na $(x, 0), (v, 1)$-geodetki. Iz tega sledi, da vsako vozlišče grafa G leži na x, u-geodetki ali na x, v-geodetki. Torej vozlišče x ustreza pogojem izreka.

Dokažimo, da za primer, ko je $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = 4$, obrat izreka ne velja v splošnem. Za graf kolesa W_8 velja $\mathrm{g}(W_8) = 4$, hkrati pa ta graf nima lastnosti iz izreka. Edina geodetska množica moči 4 je namreč sestavljena iz štirih vozlišč na obodu cikla, nobeno od teh vozlišč pa nima zahtevane lastnosti. Od tu dalje uporabljajmo iste oznake kot v podpoglavju 3.2.

Razmislimo lahko, da je $S = \{(v_1, 0), (v_5, 0), (v_3, 1), (v_7, 1)\}$ geodetska množica grafa $W_8 \,\square\, K_2$. Torej je $\mathrm{g}(W_8 \,\square\, K_2) \leq 4$. Po drugi strani iz izreka 6.3 sledi, da je $4 = \mathrm{g}(W_8) \leq \mathrm{g}(W_8 \,\square\, K_2)$. Torej je $\mathrm{g}(W_8) = \mathrm{g}(W_8 \,\square\, K_2) = 4$, vendar graf W_8 nima lastnosti iz izreka 6.4.

Analogno ugotovimo, da velja $\mathrm{g}(W_{4k}) = \mathrm{g}(W_{4k} \,\square\, K_2) = 2k$, za vse $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

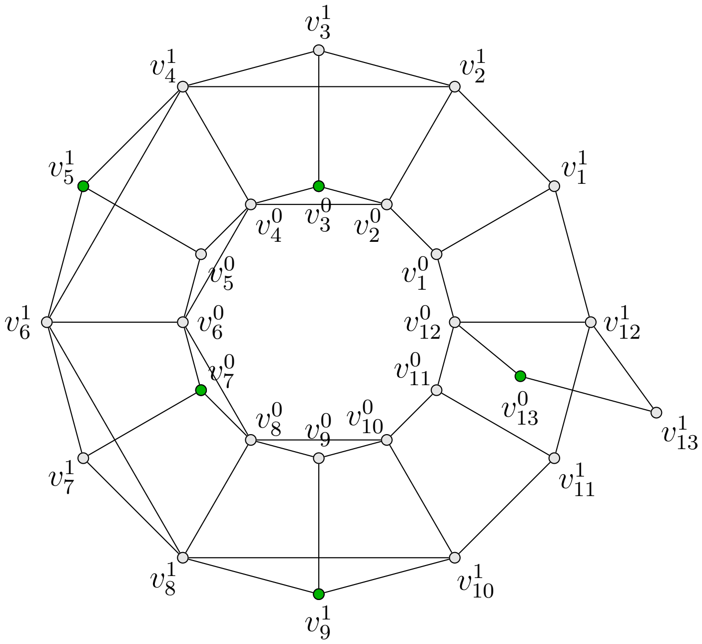
Oglejmo si še primer grafa, ki pokaže, da obrat ne velja v primeru, ko je $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = 5$. Naj bo G graf kot na sliki 14.



Slika 14: Graf G z označeno geodetsko množico (vozlišča zelene barve).

Graf G ima pet simplicialnih vozlišč: v_3, v_5, v_7, v_9 in v_{13}. Množica teh vozlišč je hkrati že geodetska množica. Zato je $\mathrm{g}(G) = 5$ in je to edina minimalna geodetska množica. Opazimo, da nobeno izmed vozlišč v njej nima lastnosti iz izreka 6.4.

V grafu $G \,\square\, K_2$ lahko najdemo geodetsko množico moči 5 (na primer kot na sliki 15). Ker vemo, da je $\mathrm{g}(G) \leq \mathrm{g}(G \,\square\, K_2)$, sledi, da je $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = 5$.



Slika 15: Geodetska množica grafa $G \,\square\, K_2$ je označena z zeleno barvo. Namesto oznake (v, i) pišemo v^i.

Ta primer zlahka posplošimo na graf G, ki nima lastnosti iz izreka 6.4 in za katerega je $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = k$, kjer je $k \geq 5$. Graf ima vozlišča $v_1, \ldots, v_{2k+3}$ ter povezave $v_i \sim v_{i+1}$ za $i \in [2k+2]$, $v_1 \sim v_{2k+2} \sim v_{2k+3}$ in $v_j \in v_{j+2}$ za $j \in \{2, 4, \ldots, 2k-2\}$. Simplicialna vozlišča grafa so $\{v_3, v_5, \ldots, v_{2k-1}\} \cup \{v_{2k+3}\}$ in jih je k. Tvorijo geodetsko množico grafa G, vendar nobeno nima lastnosti iz izreka 6.4. Definirajmo podmnožico vozlišč $S = \{(v_3, 0), (v_5, 1), (v_7, 0), (v_9, 1), \ldots, (v_{2k+3}, p)\}$, kjer je $p = 0$, če je k liho, in $p = 1$, če je k sodo. Množica S je geodetska množica grafa $G \,\square\, K_2$ moči k. Sledi, da je $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = k$, hkrati pa graf G ne ustreza pogoju izreka 6.4.

Seveda obstajajo tudi grafi, ki ustrezajo obratu izreka 6.4. Velja na primer $\mathrm{g}(K_{1,5}) = \mathrm{g}(K_{1,5} \,\square\, K_2) = 5$ in graf $K_{1,5}$ ima ustrezno lastnost.

Izkaže se, da obstaja potrebni in zadostni pogoj za enakost $\mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = \mathrm{g}(G)$ ([10, 1]). Preden si ogledamo rezultat, vpeljimo še novo oznako. Za disjunktni podmnožici vozlišč $S_1, S_2 \subseteq V(G)$ označimo z

$$I[S_1, S_2] = \{v \in V(G) \; ; \; v \in I(x, y), x \in S_1, y \in S_2\}$$

množico vozlišč, ki ležijo na neki geodetki med vozliščem iz S_1 in vozliščem iz S_2. Pri tem dodatno definiramo $I[S, S] = I[S]$.

Izrek 6.5 ([1])**.** *Za graf G velja $\mathrm{g}(G \,\square\, K_2) = \mathrm{g}(G)$ natanko tedaj, ko G premore najmanjšo geodetsko množico S, ki jo lahko razdelimo na dve neprazni, disjunktni podmnožici S_1 in S_2, za kateri velja $S_1 \cup S_2 = S$ in $(I[S_1] \cap I[S_2]) \cup I[S_1, S_2] = V(G)$.*

Pogoj iz izreka lahko ekvivalentno zapišemo kot konjunkcijo $I[S_1] \cup I[S_1, S_2] = V(G)$ in $I[S_2] \cup I[S_1, S_2] = V(G)$. To pomeni, da če obstaja vozlišče $v \in V(G)$, ki ne leži na nobeni geodetki med S_1 in S_2, potem leži na geodetki med vozliščema iz S_1 in tudi na geodetki med vozliščema iz S_2.

Zgornji izrek lahko posplošimo za produkt s poljubnim polnim grafom. Tudi dokaz je podoben, zato si oglejmo splošnejšo verzijo.

Izrek 6.6 ([1]). *Za graf G velja $\mathrm{g}(G \,\square\, K_k) = \mathrm{g}(G)$ natanko tedaj, ko G premore najmanjšo geodetsko množico S, ki jo lahko razdelimo na neprazne, disjunktne podmnožice $S_1, \ldots, S_k$, za katere velja $S_1 \cup \cdots \cup S_k = S$ in za vse $i \in [k]$ velja*

$$\bigcup_{j=1}^{k} I[S_i, S_j] = V(G).$$

Dokaz. Naj bo $V(K_k) = [k]$, vozlišča produkta $G \,\square\, K_k$ pa označimo krajše z $x^i = (x, i)$, kjer je $x \in V(G)$ in $i \in V(K_k)$. Vozlišče x^i je sosednje vozliščem x^j za $j \neq i$ in vozliščem y^i, če je $x \sim_G y$.

($\Leftarrow$) Denimo, da G premore najmanjšo geodetsko množico S z lastnostjo iz izreka. Definirajmo $S' = \bigcup_{i=1}^{k} S_i \times \{i\}$. Razmislimo, da je $|S'|$ geodetska množica grafa $G \,\square\, K_k$.

Naj bo x^i poljubno vozlišče grafa $G \,\square\, K_k$. Če x leži na y, z-geodetki, kjer $y, z \in S_i$, potem x leži na y^i, z^i-geodetki in $y^i, z^i \in S'$. Ker ima S lastnost iz izreka, je edina preostala možnost, da x^i leži na v, w-geodetki, kjer je $v \in S_i$ in $w \in S_j$ za nek $j \neq i$. Tedaj to geodetko podaljšamo s prehodom med slojema i in j ter vidimo, da x^i leži na v^i, w^j-geodetki, kjer sta $v^i, w^j \in S'$.

Torej je S' geodetska množica, zato je $\mathrm{g}(G \,\square\, K_k) \leq |S'| = |S| = \mathrm{g}(G)$. Ker hkrati vemo, da je $\mathrm{g}(G) \leq \mathrm{g}(G \,\square\, K_k)$ (dokaz je podoben kot v izreku 6.3), sledi $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_k)$.

($\Rightarrow$) Denimo, da velja $\mathrm{g}(G) = \mathrm{g}(G \,\square\, K_k)$. Naj bo S' najmanjša geodetska množica grafa $G \,\square\, K_k$, $|S'| = \mathrm{g}(G)$. Definirajmo $S'_i = S' \cap (V(G) \times \{i\})$ in S_i kot naravno projekcijo množice S'_i na graf G. Opazimo, da za vse $i \in [k]$ velja $S'_i \neq \emptyset$, ker je S' geodetska in je eden od faktorjev polni graf.

Fiksirajmo $i \in [k]$ in opazujmo poljubno vozlišče x^i. Vozlišče leži na neki geodetki med vozliščema iz S'. Vsaj eno od teh dveh vozlišč mora ležati v sloju G^i. Torej je $x^i \in I(v^i, w^j)$ za neka $v^i, w^j \in S'$.

Če je $w^j \in S'_i$, potem x leži na v, w-geodetki, kjer sta $v, w \in S_i$, torej je $x \in I[S_i]$. Če $w^j \notin S'_i$, potem x leži na v, w-geodetki, kjer je $v \in S_i$ in $w \in S_j$, torej je $x \in I[S_i, S_j]$.

Ker sta bili vozlišči x in i poljubni, iz tega sledi $\bigcup_{j=1}^{k} I[S_i, S_j] = V(G)$ za vse $i \in [k]$. □

Razmislimo še, kaj lahko povemo o zgornji meji za $\mathrm{g}(G \,\square\, K_2)$. Ker je graf $G \,\square\, K_2$ sestavljen iz dveh kopij grafa G, je očitno $\mathrm{g}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{g}(G)$. Vendar ta meja ni nikoli dosežena. Oglejmo si njeno izboljšavo (splošnejšo verzijo najdemo v [8]).

Trditev 6.7. *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{g}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{g}(G) - 2.$$

Dokaz. Naj bo S geodetska množica grafa G moči $\mathrm{g}(G)$. Naj bosta $x, y \in S$ poljubni vozlišči. Definirajmo množico $T = (S - \{y\}) \times \{0\} \cup (S - \{x\}) \times \{1\}$. Preverimo, da je T geodetska množica grafa $G \,\square\, K_2$.

Naj bo $v \in V(G)$ poljubno vozlišče. Razmisliti moramo, da $(v,0)$ in $(v,1)$ ležita na neki geodetki. Ločimo več primerov, kjer upoštevamo, da v leži na neki geodetki grafa G.

1. Naj vozlišče v leži na w,z-geodetki P, kjer sta $w,z \in S - \{x,y\}$. Tedaj $(v,0)$ leži na geodetki $P \times \{0\}$ in $(v,1)$ na $P \times \{1\}$. Obe sta res geodetki med vozliščema iz množice T.

2. Naj vozlišče v leži na x,z-geodetki P, kjer je $z \in S - \{x,y\}$. Tedaj $(v,0)$ leži na geodetki $P \times \{0\}$. Če združimo poti $(x,0) \sim (x,1)$ in $P \times \{1\}$, dobimo geodetko med vozliščema iz T, ki vsebuje $(v,1)$.

3. Analogno sklepamo v primeru, ko v leži na y,z-geodetki, kjer je $z \in S - \{x,y\}$.

4. Naj vozlišče v leži na x,y-geodetki P. Če združimo poti $P \times \{0\}$ in $(y,0) \sim (y,1)$, dobimo geodetko, ki vsebuje vozlišče $(v,0)$. Če združimo poti $(x,0) \sim (x,1)$ in $P \times \{1\}$, dobimo geodetko, ki pokrije $(v,1)$.

Sledi, da je T res geodetska množica. Ker je $|T| = 2|S| - 2$, je trditev dokazana. $\square$

Razmisliti moramo, da je ta meja ostra. Enakost je dosežena pri grafih poti, saj velja $\mathrm{g}(P_n \,\Box\, K_2) = 2 = 2\,\mathrm{g}(P_n) - 2$. Oglejmo si še splošnejši primer, kjer je enakost dosežena pri poljubni vrednosti $\mathrm{g}(G)$ ([8]). Definiramo graf D_p^t z vozlišči $x_1, \ldots, x_p$, z in $y_1^{(ij)}, \ldots, y_t^{(ij)}$ za vse indekse i,j, za katere velja $1 \leq i < j \leq p$. Vozlišče z je sosedno z vsemi ostalimi vozlišči grafa in vozlišča oblike $y_1^{(ij)}, \ldots, y_t^{(ij)}$ so sosedna natanko z x_i in x_j. Graf ima torej $p + 1 + t\binom{p}{2}$ vozlišč in premer 2. Označimo $W_{ij} = \{y_1^{(ij)}, \ldots, y_t^{(ij)}\}$. Primer takšnega grafa vidimo na sliki 16.

Lema 6.8 ([8])**.** *Naj bosta t in p naravni števili ter $t > p$. Tedaj je $\mathrm{g}(D_p^t) = p$.*

Dokaz. Množica $\{x_1, \ldots, x_p\}$ je geodetska, zato je $\mathrm{g}(D_p^t) \leq p$. Naj bo S poljubna geodetska množica grafa D_p^t. Dokazati moramo, da je $|S| \geq p$.

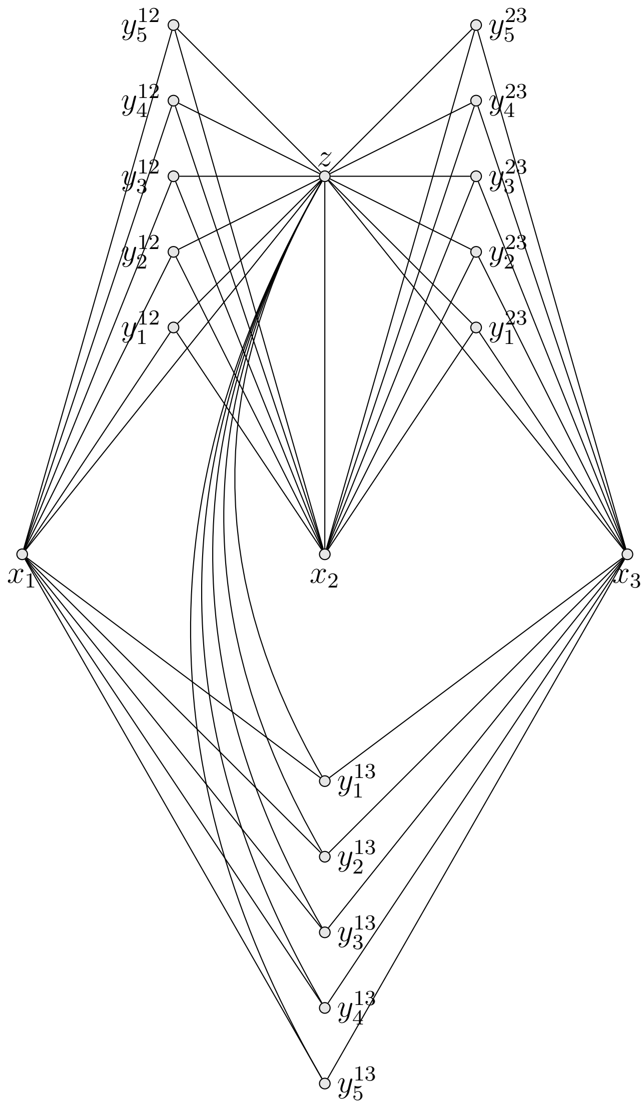
Če množica S vsebuje vsa vozlišča $x_1, \ldots, x_p$, potem je $|S| \geq p$. Predpostavimo torej, da $x_l \notin S$ za nek $l \in [p]$. Vzemimo $i \in [p] - \{l\}$. Brez škode je $i < l$. Naj bo $w \in W_{il}$ poljubno vozlišče tipa $y_k^{(il)}$. Denimo, da $w \notin S$. Tedaj obstajata vozlišči $u, v \in S$, da w leži na u,v-geodetki. Ker ima graf premer 2, je dolžina te geodetke enaka 2. Torej sta u in v soseda vozlišča w. Edini sosedi vozlišča w so z, x_i in x_l. Ker je z soseden z vsemi vozlišči grafa, mora biti $\{u,v\} = \{x_i, x_l\}$, kar je v nasprotju s predpostavko $x_l \notin S$. Sledi, da množica S vsebuje vsa vozlišča tipa $y_k^{(il)}$. Zato je v tem primeru $|S| \geq t > p$. $\square$

Naslednja lema pove, da graf $D_p^t \,\Box\, K_2$, pri ustrezni vrednosti t, doseže enakost iz trditve 6.7.

Lema 6.9 ([8])**.** *Naj bosta p in t naravni števili ter $t > 2p-2$. Tedaj je $\mathrm{g}(D_p^t \,\Box\, K_2) = 2p - 2$.*

Dokaz. Naj bo S najmanjša geodetska množica grafa $D_p^t \,\Box\, K_2$. Denimo, da je $|S| < 2p - 2 = 2(p-1)$. Po Dirichletovem principu sledi, da obstaja $l \in \{0,1\}$, da je $|S \cap V(G^l)| < p - 1$. Označimo vozlišče (u,k) z u^k, kjer je $u \in V(D_p^t)$ in $k \in \{0,1\}$.

Ker je $|S \cap V(G^l)| \leq p - 2$, obstajata $i,j \in [p]$, da $x_i^l, x_j^l \notin S$.



Slika 16: Graf D_3^5.

Vzemimo $w \in W_{ij}$ poljubno vozlišče. Označimo $A_w = \{w^0, w^1\}$. Dokazali bomo $A_w \cap S \neq \emptyset$. Če je $w^l \in S$, to velja. Predpostavimo torej, da $w^l \notin S$. Torej obstajata $u, v \in S$, da w^l leži na u, v-geodetki.

Ker ima graf D_p^t premer 2, ima graf $D_p^t \,\square\, K_2$ premer 3. Torej je vsaj eno od vozlišč u, v sosednje vozlišču w^l. Brez škode za splošnost je to vozlišče u. Zato je $u \in A_w - \{w^l\} \cup \{x_i^l, x_j^l, z^l\}$. Vendar ni možno $u \in \{x_i^l, x_j^l\}$, ker ti dve vozlišči nista v množici S.

Če je $u \in A_w$, je seveda $A_w \cap S \neq \emptyset$. Edina preostala možnost je torej, da je $u = z^l$. Vozlišče z^l je od vseh preostalih vozlišč grafa $D_p^t \,\square\, K_2$ oddaljeno za največ 2. Torej je tudi v sosed vozlišča w^l, kar pomeni $v \in A_w - \{w^l\} \cup \{z^l\}$ in seveda $v \neq z^l$. Torej je $v \in A_w$ in zato $A_w \cap S \neq \emptyset$.

Ker za vsako vozlišče $w \in W_{ij}$ velja $A_w \cap S \neq \emptyset$ in so množice A_w disjunktne, sledi, da je $|S| \geq |W_{ij}| = t > 2p - 2 > |S|$, kar nas privede v protislovje. $\square$

Oceno zgornje in spodnje meje za geodetsko število produkta dveh grafov lahko posplošimo na poljubne grafe.

Izrek 6.10 ([8]). *Naj bosta G in H grafa. Tedaj velja*

$$\max\{\mathrm{g}(G), \mathrm{g}(H)\} \leq \mathrm{g}(G \,\square\, H) \leq \mathrm{g}(G)\,\mathrm{g}(H) - \min\{\mathrm{g}(G), \mathrm{g}(H)\}.$$

Obe oceni sta najboljši možni. Spodnja meja je dosežena, ko sta grafa G in H polna, zgornja pa pri grafih $D_p^t \,\square\, K_q$, kjer je $p = \mathrm{g}(G) \geq \mathrm{g}(H) = q$ in $t > pq - q$.

Dokaz najdemo v [8]. Do sedaj smo obravnavali primer, ko je $H = K_2$ in dobljeni rezultati se ujemajo z zgornjim izrekom (saj polni graf ustreza pogoju iz izreka 6.4).

6.1.2 Krepko geodetsko število prizem

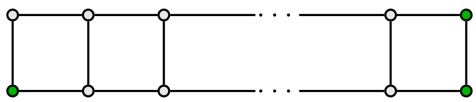
V nadaljevanju raziskujemo analogije iz podpoglavja 6.1.1. Pojavi se vprašanje, ali lahko za krepko geodetsko število izpeljemo analog izreka 6.3. Primere enakosti si ogledamo v nadaljevanju, neenakost pa je zaenkrat še odprt problem. Posvetimo se tudi zgornji meji za $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2)$.

Domneva 6.11. *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{sg}(G) \leq \mathrm{sg}(G \,\square\, K_2).$$

Analog izreka 6.4 ne velja, kot sledi iz naslednjega primera.

Primer 6.12. Opazujmo graf poti P_n za $n \geq 2$. Vemo, da je $\mathrm{sg}(P_n) = 2$ in da graf poti ustreza lastnosti iz izreka 6.4. Vendar je $\mathrm{sg}(P_n \,\square\, K_2) = 3$. Nobena krepka geodetska množica moči 2 ne zadostuje (ne moremo pokriti obeh P_n-slojev v celoti), primer množice moči 3 pa vidimo na sliki 17.



Slika 17: Krepka geodetska množica grafa $P_n \,\square\, K_2$.

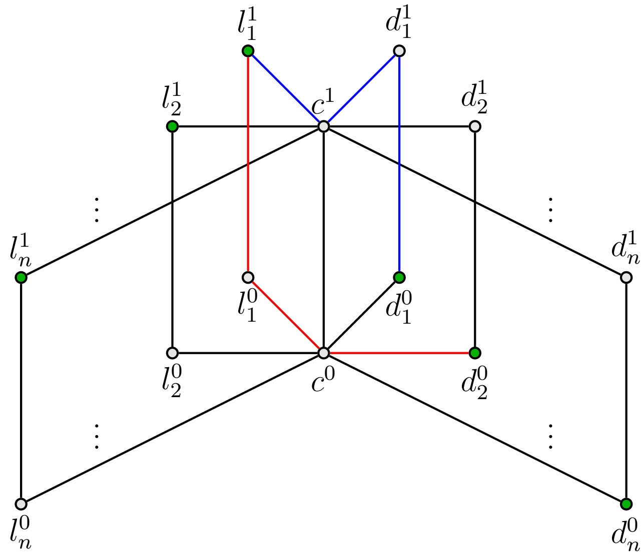
V nadaljevanju se posvetimo primerom, ki dosežejo enakost v domnevi 6.11. V dokazih večkrat uporabimo posebne primere naslednje leme.

Lema 6.13. *Če je v simplicialno vozlišče grafa G, potem vsaka krepka geodetska množica grafa $G \,\square\, K_2$ vsebuje vsaj eno izmed vozlišč $(v, 0)$ in $(v, 1)$.*

Dokaz je podoben dokazu leme 3.6.

Primer 6.14. Graf $K_{1,2n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $n \geq 2$, je zvezda, zato vemo, da je $\mathrm{sg}(K_{1,2n}) = 2n$. Določimo sedaj krepko geodetsko število grafa $K_{1,2n} \,\square\, K_2$ (slika 18). Označimo centralno vozlišče grafa $K_{1,2n}$ s c, liste pa z $l_1, d_1, \ldots, l_n, d_n$. Izmed vozlišč $(u, 0)$ in $(u, 1)$, kjer $u \in V(K_{1,2n}) - \{c\}$, mora po lemi 6.13 vsaj eno ležati v krepki geodetski množici. Zato je $\mathrm{sg}(K_{1,2n}) \geq 2n$.

Definirajmo množico $S = \{(l_1, 1), \ldots, (l_n, 1), (d_1, 0), \ldots, (d_n, 0)\}$. Velja $|S| = 2n$. Preverimo, da je S krepka geodetska množica. Izberimo geodetke oblike $(l_i, 1) \sim (c, 1) \sim (d_i, 1) \sim (d_i, 0)$ za $i \in [n]$ in $(l_i, 1) \sim (l_i, 0) \sim (c, 0) \sim (d_{i+1}, 0)$ za $i \in [n-1]$ ter $(l_n, 1) \sim (l_n, 0) \sim (c, 0) \sim (d_1, 0)$. Z njimi pokrijemo vsa vozlišča grafa. Torej je $\mathrm{sg}(K_{1,2n}) = \mathrm{sg}(K_{1,2n} \,\square\, K_2) = 2n$.



Slika 18: Zeleno obarvana vozlišča tvorijo krepko geodetsko množico grafa $K_{1,2n} \,\Box\, K_2$. Z modro in rdečo sta narisani dve fiksirani geodetki. Namesto oznake (v, i) pišemo v^i.

Podobno lahko sklepamo v primeru, ko ima zvezda liho listov, če ima zgoraj opisana krepka geodetska množica v vsaki kopiji zvezde v produktu vsaj dve vozlišči. Torej za $n \geq 4$ velja $\mathrm{sg}(K_{1,n}) = \mathrm{sg}(K_{1,n} \,\Box\, K_2) = n$.

Primer 6.15. Zelo podoben je primer drevesa $T_{m,n}$, kjer sta m in n naravni števili, $m, n \geq 2$ in $m \geq n$. Vozlišča grafa so $u_0, \dots, u_m, v_0, \dots, v_n$ in povezave $u_i \sim u_0$ za $i \in [m]$, $v_i \sim v_0$ za $i \in [n]$ in $u_0 \sim v_0$. Graf ima $m+n$ listov, zato je $\mathrm{sg}(T_{m,n}) = m+n$.

Iz leme 6.13 sledi, da krepka geodetska množica grafa $T_{m,n} \,\Box\, K_2$ (slika 19) vsebuje vsaj eno vozlišče iz para $(w, 0), (w, 1)$ za poljuben $w \in \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$. Zato je $\mathrm{sg}(T_{m,n} \,\Box\, K_2) \geq m + n$.

Naj bo $S = \{(u_1, 1), \dots, (u_m, 1), (v_1, 0), \dots, (v_n, 0)\}$. Razmislimo, da je S krepka geodetska množica grafa $T_{m,n} \,\Box\, K_2$. Za poljubno vozlišče u_j, kjer je $j \in [m]$, fiksiramo geodetki

$$(u_j, 1) \sim (u_0, 1) \sim (v_0, 1) \sim (v_j, 1) \sim (v_j, 0),$$

kjer v primeru, ko je $j > n$ vzamemo $v_j = v_1$, in

$$(u_j, 1) \sim (u_j, 0) \sim (u_0, 0) \sim (v_0, 0) \sim (v_{j+1}, 0),$$

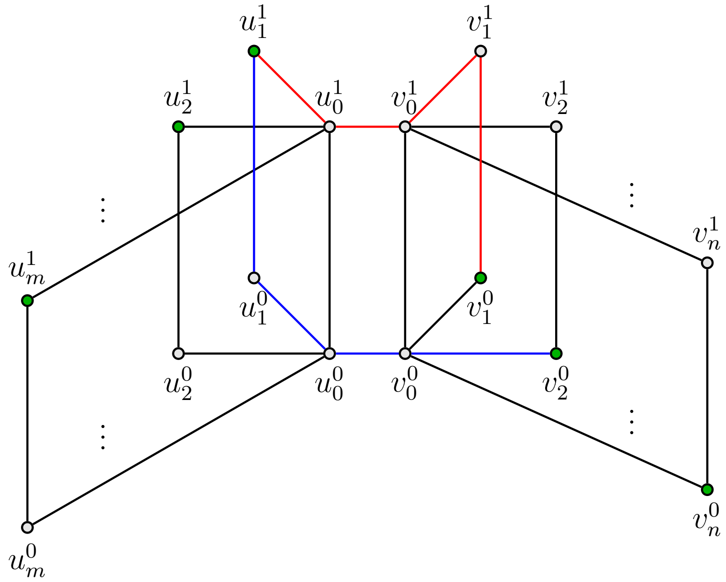
kjer v primeru, ko je $j > n - 1$, vzamemo $v_{j+1} = v_2$. Geodetke potekajo med različnimi pari vozlišč in očitno pokrijejo vozlišča $(u_0, 0), (v_0, 0), (u_0, 1), (v_0, 1)$. S prvim tipom geodetk pokrijemo vsa vozlišča oblike $(v, 1)$, kjer je $v \in \{v_1, \dots, v_n\}$, z drugim tipom pa vozlišča oblike $(u, 0)$ za $u \in \{u_1, \dots, u_m\}$.

Sledi, da je $\mathrm{sg}(T_{m,n} \,\Box\, K_2) = m + n = \mathrm{sg}(T_{m,n})$.

Prejšnja primera nakazujeta, da enakost morda velja za vsa drevesa z dovolj listi.

Izrek 6.16. *Naj bo T drevo z vsaj štirimi listi. Tedaj velja*

$$\mathrm{sg}(T \,\Box\, K_2) = \mathrm{sg}(T).$$



Slika 19: Zeleno obarvana vozlišča tvorijo krepko geodetsko množico grafa $T_{m,n} \,\square\, K_2$. Dodatno sta z modro in rdečo barvo označeni dve fiksirani geodetki.

Dokaz. Označimo z $l(T)$ število listov drevesa. Vemo, da je $\mathrm{sg}(T) = l(T)$. Iz leme 6.13 sledi $\mathrm{sg}(T \,\square\, K_2) \geq l(T)$. Dokazati moramo še obratno neenakost.

Ker ima drevo T vsaj štiri liste, obstaja vozlišče $v \in V(T)$, za katerega velja naslednje: če je v koren drevesa T, tako levo kot desno poddrevo vsebujeta vsaj dva lista. Označimo liste levega poddrevesa z $l_1, \ldots, l_m$ in liste desnega poddrevesa z $d_1, \ldots, d_n$. Brez škode za splošnost je $m \geq n$. Naj bo $S = \{(l_1, 1), \ldots, (l_m, 1), (d_1, 0), \ldots, (d_n, 0)\}$. V drevesu so najkrajše poti med vozlišči enolične, zato lahko x, y-geodetko označimo kot $x \rightsquigarrow y$. Geodetke med vozlišči iz množice S fiksiramo na naslednji način:

$$(l_i, 1) \rightsquigarrow (v, 1) \rightsquigarrow (d_{e(i)}, 1) \rightsquigarrow (d_{e(i)}, 0),$$

kjer je

$$e(i) = \begin{cases} i; & i \leq n, \\ 2; & \text{sicer}, \end{cases}$$

in

$$(l_i, 1) \rightsquigarrow (l_i, 0) \rightsquigarrow (v, 0) \rightsquigarrow (d_{n(i)}, 0),$$

kjer je

$$d(i) = \begin{cases} i + 1; & i \leq n - 1, \\ 1; & \text{sicer}. \end{cases}$$

Z geodetkami prvega tipa pokrijemo vsa vozlišča oblike $(u, 1)$, kjer je $u \in V(T)$, z geodetkami drugega tipa pa vsa vozlišča oblike $(u, 0)$, kjer je $u \in V(T)$. Torej je S krepka geodetska množica in je dokaz končan. $\square$

Obstaja še ena velika družina grafov, ki izpolnijo enakost.

Trditev 6.17. *Za polni graf K_n, kjer je n naravno število, $n \geq 4$, velja*

$$\mathrm{sg}(K_n) = \mathrm{sg}(K_n \,\square\, K_2).$$

Dokaz. Označimo vozlišča grafa K_n z $v_1, \ldots, v_n$. Vemo, da je $\mathrm{sg}(K_n) = n$. Poleg tega iz leme 6.13 sledi $\mathrm{sg}(K_n \,\square\, K_2) \geq n$.

Naj bo $S = \{(v_1, 1), (v_2, 1), (v_3, 0), \ldots, (v_n, 0)\}$. Fiksiramo geodetke

$$(v_1, 1) \sim (v_1, 0) \sim (v_3, 0),$$

$$(v_2, 1) \sim (v_3, 1) \sim (v_3, 0),$$

$$(v_1, 1) \sim (v_j, 1) \sim (v_j, 0) \text{ za } j \in \{4, \ldots, n\}$$

in

$$(v_2, 1) \sim (v_2, 0) \sim (v_j, 0) \text{ za } j \in \{4, \ldots, n\}.$$

S tem so očitno pokrita vsa vozlišča grafa, zato je $\mathrm{sg}(K_n \,\square\, K_n) = n$. $\square$

Trditev za polne grafe K_1, K_2, K_3 ne velja. Zanje je $\mathrm{sg}(K_1) = 1 < 2 = \mathrm{sg}(K_1 \,\square\, K_2)$, $\mathrm{sg}(K_2) = 2 < 3 = \mathrm{sg}(K_2 \,\square\, K_2)$ in $\mathrm{sg}(K_3) = 3 < 4 = \mathrm{sg}(K_3 \,\square\, K_2)$.

Opomba 6.18. Ravno dejstvo, da je grafov, ki dosežejo enakost veliko in so po lastnostih različni, nakazuje, da je dokaz enakosti v splošnem verjetno težek problem.

Določimo še zgornjo mejo za $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2)$.

Trditev 6.19. *Za vsak graf G velja*

$$\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{sg}(G) - 1.$$

Dokaz. Naj bo $S \subseteq V(G)$ krepka geodetska množica grafa G moči $\mathrm{sg}(G)$, $S = \{v, u_1, \ldots, u_{k-1}\}$, množica fiksiranih geodetk naj bo $\widetilde{I}(S)$. Označimo s P_i fiksirano geodetko med vozliščema v in u_i. S P_i^0 označujemo pot P_i v sloju G^0, s P_i^1 pa v sloju G^1.

Definiramo $S' = S \times \{0\} \cup (S - \{v\}) \times \{1\}$. Velja $|S'| = 2|S| - 1 = 2\,\mathrm{sg}(G) - 1$. Razmislimo, da je S' krepka geodetska množica grafa $G \,\square\, K_2$.

Določimo fiksne geodetke. Med vozlišči v sloju G^0 fiksiramo enake geodetke kot so v $\widetilde{I}(S)$. Enako storimo med vozlišči $(u_i, 1), (u_j, 1) \in S'$. Na ta način pokrijemo vsa vozlišča razen morda vozlišč v notranjosti poti P_i^1 za vse $i \in [k-1]$.

Pot $(v, 0) \sim (v, 1)$ združena s potjo P_i^1 je geodetka med vozliščema $(v, 0)$ in $(u_i, 1)$. Če takšne geodetke fiksiramo za vse $i \in [k-1]$, pokrijemo vsa vozlišča grafa. Zato je $\mathrm{sg}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{sg}(G) - 1$. $\square$

Enakost je dosežena na primer pri grafih poti P_n, saj velja $\mathrm{sg}(P_n) = 2$ in $\mathrm{sg}(P_n \,\square\, K_2) = 3 = 2\,\mathrm{sg}(P_n) - 1$.

6.1.3 Število izometričnih poti prizem

V nadaljevanju si ogledamo še povezavo med $\mathrm{ip}(G)$ in $\mathrm{ip}(G \,\square\, K_2)$, ki je bolj preprosta kot pri krepkem geodetskem številu.

Trditev 6.20. *Za vsak graf G velja*

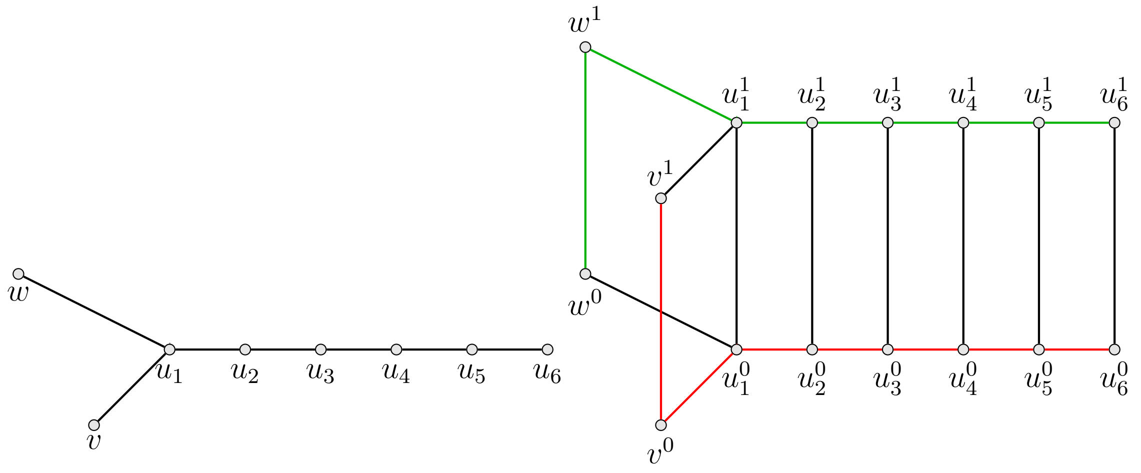
$$\mathrm{ip}(G) \leq \mathrm{ip}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{ip}(G).$$

Dokaz. Najprej dokažimo levo neenakost. Naj bo $\mathcal{P}$ množica izometričnih poti moči $\mathrm{ip}(G \,\square\, K_2)$, ki pokrijejo vsa vozlišča grafa $G \,\square\, K_2$. Projekcija teh poti na sloj G^0 ostane množica izometričnih poti in seveda pokrije celoten G^0 sloj, ki je izomorfen grafu G. Zato je $\mathrm{ip}(G) \leq |\mathcal{P}| = \mathrm{ip}(G \,\square\, K_2)$.

Dokažimo še desno neenakost. Naj bo $\mathcal{P}$ množica izometričnih poti, ki pokrijejo graf G, moči $\mathrm{ip}(G)$. Poti $\mathcal{P} \times \{0\}$ in $\mathcal{P} \times \{1\}$ so tudi izometrične in očitno pokrijejo graf $G \,\square\, K_2$. Zato je $\mathrm{ip}(G \,\square\, K_2) \leq 2\,\mathrm{ip}(G)$. □

Obe neenakosti sta najboljši možni, kot je razvidno iz sledečih primerov.

Primer 6.21. Definirajmo drevo T_n z vozlišči $v, w, u_1, \ldots, u_n$ in povezavami $v \sim u_1$, $w \sim u_1$ in $u_i \sim u_{i+1}$ za $i \in [n-1]$, kjer je n naravno število, $n \geq 2$. Primer takšnega grafa vidimo na sliki 20.



Slika 20: Grafa T_6 (levo) in $T_6 \,\square\, K_2$ (desno) z označenima izometričnima potema, ki pokrijeta graf.

Graf T_n je drevo s tremi listi, zato je $\mathrm{ip}(T_n) = 2$. Tudi graf $T_n \,\square\, K_2$ lahko pokrijemo z dvema izometričnima potema, in sicer z $(u_n, 0) \sim \cdots \sim (u_1, 0) \sim (v, 0) \sim (v, 1)$ in $(u_n, 1) \sim \cdots \sim (u_1, 1) \sim (w, 1) \sim (w, 0)$. Ker velja $2 = \mathrm{ip}(T_n) \leq \mathrm{ip}(T_n \,\square\, K_2) \leq 2$, je $\mathrm{ip}(T_n) = \mathrm{ip}(T_n \,\square\, K_2)$.

Primer 6.22. Za graf poti P_n, kjer je n naravno število, $n \geq 2$, velja $\mathrm{ip}(P_n) = 1$. Poljubna izometrična pot v grafu $P_n \,\square\, K_2$ lahko pokrije največ en par vozlišč oblike $(x, 0)$, $(x, 1)$. Ker graf $P_n \,\square\, K_2$ vsebuje več kot dva takšna para, sledi, da je $\mathrm{ip}(P_n \,\square\, K_2) \geq 2$. Graf lahko pokrijemo z dvema izometričnima potema (v vsakem sloju ena pot). Zato je $\mathrm{ip}(P_n \,\square\, K_2) = 2 = 2\,\mathrm{ip}(P_n)$.

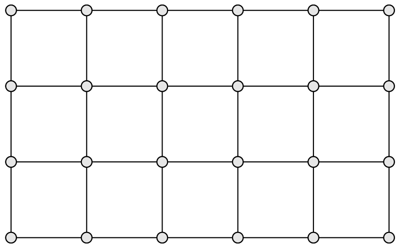
6.2 Mreže

Mreža je graf $P_m \,\square\, P_n$, kjer sta $m, n \in \mathbb{N}$ (glej sliko 21). Naj bo $V(P_m) = [m]$ in $V(P_n) = [n]$. Graf $P_m \,\square\, P_n$ ima mn vozlišč in zanj velja

$$\mathrm{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Premer grafa je enak $m + n - 2$.

V nadaljevanju poskušamo določiti geodetsko število, krepko geodetsko število in število izometričnih poti mrež.



Slika 21: Graf $P_6 \,\square\, P_4$.

6.2.1 Geodetsko število mrež

Določitev geodetskega števila mreže je preprosto.

Trditev 6.23 ([7]). *Naj bosta m in n naravni števili, $m, n \geq 2$. Tedaj je*

$$\mathrm{g}(P_m \,\square\, P_n) = 2.$$

Dokaz. Vemo, da je $\mathrm{g}(P_m \,\square\, P_n) \geq 2$. Razmislimo še, da je $S = \{(1,1),(m,n)\}$ geodetska množica. Razdalja med vozliščema je $m+n-2$ in z geodetkami

$$(1,1) \sim (2,1) \sim \cdots \sim (m,1) \sim (m,2) \sim \cdots \sim (m,n),$$

$$(1,1) \sim (1,2) \sim (2,2) \sim \cdots \sim (m,2) \sim (m,3) \sim \cdots \sim (m,n), \ldots,$$

$$(1,1) \sim \cdots \sim (1,n) \sim \cdots \sim (m,n)$$

očitno pokrijemo vsa vozlišča grafa. Zato je $\mathrm{g}(P_m \,\square\, P_n) = 2$. □

6.2.2 Krepko geodetsko število mrež

Krepko geodetsko število je zaenkrat določeno le za tanke mreže, to so mreže $P_m \,\square\, P_n$, kjer je $m \gg n$ ([9]). V nadaljevanju si ogledamo natančno izpeljavo tega rezultata. Zato potrebujemo naslednjo tehnično lemo, ki velja za splošen kartezični produkt grafov.

Lema 6.24 ([9]). *Naj bosta G in H grafa, S minimalna krepka geodetska množica grafa $G \,\square\, H$ in $\widetilde{I}(S)$ izbrane geodetke, ki pokrijejo celoten graf. Če je $|V(H)| > |S| + \mathrm{diam}(G) \cdot \binom{|S|}{2}$, potem obstaja G-sloj G^h, za katerega velja*

1. $E(G^h) \cap \bigcup_{P \in \widetilde{I}(S)} E(P) = \emptyset$ *in*
2. $V(G^h) \cap S = \emptyset$.

Opomba 6.25. Lema pove, da obstaja G-sloj G^h, da nobeno vozlišče v G^h ni hkrati tudi v množici S in da nobena povezava v tem G-sloju ni pokrita z nobeno fiksirano geodetko. Ker morajo vozlišča G^h biti pokrita z geodetkami, pomeni, da skozi vsako vozlišče poteka vsaj ena geodetka, ki pa G^h zgolj preči. Ena geodetka iz $\widetilde{I}(S)$ lahko torej pokrije največ eno vozlišče iz G^h.

Dokaz. Naj bo t število G-slojev, katerih nobena povezava ne leži na nobeni geodetki iz $\widetilde{I}(S)$, tj.

$$t = \left| \left\{ h \in V(H) \; ; \; E(G^h) \cap \bigcup_{P \in \widetilde{I}(S)} E(P) = \emptyset \right\} \right|.$$

Naj bo $P \in \widetilde{I}(S)$. Iz lastnosti geodetk v kartezičnem produktu sledi, da lahko povezave iz P ležijo na največ $\mathrm{diam}(G)$ različnih G-slojih. Ker množica $\widetilde{I}(S)$ vsebuje $\binom{|S|}{2}$ poti, je število G-slojev, ki vsebujejo povezavo neke poti iz $\widetilde{I}(S)$, največ $\mathrm{diam}(G) \cdot \binom{|S|}{2}$.

Opazimo, da je $|V(H)|$ ravno število G-slojev grafa $G \,\square\, H$. Iz tega in predpostavke $|V(H)| > |S| + \mathrm{diam}(G)\binom{|S|}{2}$ sledi, da je $t > |S|$.

Po Dirichletovem principu sledi, da obstaja vsaj en G-sloj G^h, za katerega velja $E(G^h) \cap \bigcup_{P \in \widetilde{I}(S)} E(P) = \emptyset$ in hkrati $V(G^h) \cap S = \emptyset$. □

Določimo spodnjo mejo za produkt $P_m \,\square\, G$, s pomočjo katere bomo v nadaljevanju lahko določili tudi spodnjo mejo za tanke mreže.

Izrek 6.26 ([9]). *Naj bo S minimalna krepka geodetska množica grafa $P_m \,\square\, G$ in naj velja $m > |S| + \mathrm{diam}(G)\binom{|S|}{2}$. Potem je*

$$\mathrm{sg}(P_m \,\square\, G) \geq \left\lceil 2\sqrt{|V(G)|} \right\rceil .$$

Dokaz. Iz komutativnosti kartezičnega produkta in leme 6.24 sledi, da obstaja G-sloj G^i, za katerega velja $E(G^i) \cap \bigcup_{P \in \widetilde{I}(S)} E(P) = \emptyset$ in $V(G^i) \cap S = \emptyset$. Opazimo, da je $i \neq 1$ in $i \neq m$, sicer vozlišč v G^1 oz. G^m ne bi mogli pokriti z nobeno geodetko.

Zato lahko množico S razdelimo na dva neprazna dela na naslednji način:

$$S_1 = S \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} G^j \text{ in } S_2 = S \cap \bigcup_{j=i+1}^{m} G^j.$$

Ker morajo geodetke iz S pokriti vsa vozlišča grafa, mora med drugim čez vsako vozlišče sloja G^i potekati vsaj ena geodetka. Takšna geodetka gotovo poteka med vozliščem iz množice S_1 in vozliščem iz množice S_2. Takšnih geodetk je $|S_1| \cdot |S_2|$, zato velja $|S_1| \cdot |S_2| \geq |V(G^i)| = |V(G)|$. Iz neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino sledi

$$\frac{|S|}{2} = \frac{|S_1| + |S_2|}{2} \geq \sqrt{|S_1| \cdot |S_2|} \geq \sqrt{|V(G)|}.$$

Torej je $|S| \geq 2\sqrt{|V(G)|}$. Ker je krepko geodetsko število celo, sledi $\mathrm{sg}(P_m \,\square\, G) \geq \left\lceil 2\sqrt{|V(G)|} \right\rceil$. □

Oglejmo si sedaj zgornjo mejo za krepko geodetsko število poljubne mreže.

Lema 6.27 ([9]). *Naj bosta m in n naravni števili, za kateri velja $2 \leq n \leq m$. Tedaj je*

$$\mathrm{sg}(P_m \,\square\, P_n) \leq \left\lceil 2\sqrt{n} \right\rceil .$$

Dokaz. Za dokaz leme je dovolj najti krepko geodetsko množico moči $\lceil 2\sqrt{n} \rceil$ in fiksne geodetke, ki pokrijejo celoten graf. Obravnavamo več primerov.

1. Naj bo n popolni kvadrat. To pomeni, da obstaja naravno število k, da velja $n = k^2$. Za $i \in [k]$ označimo vozlišča

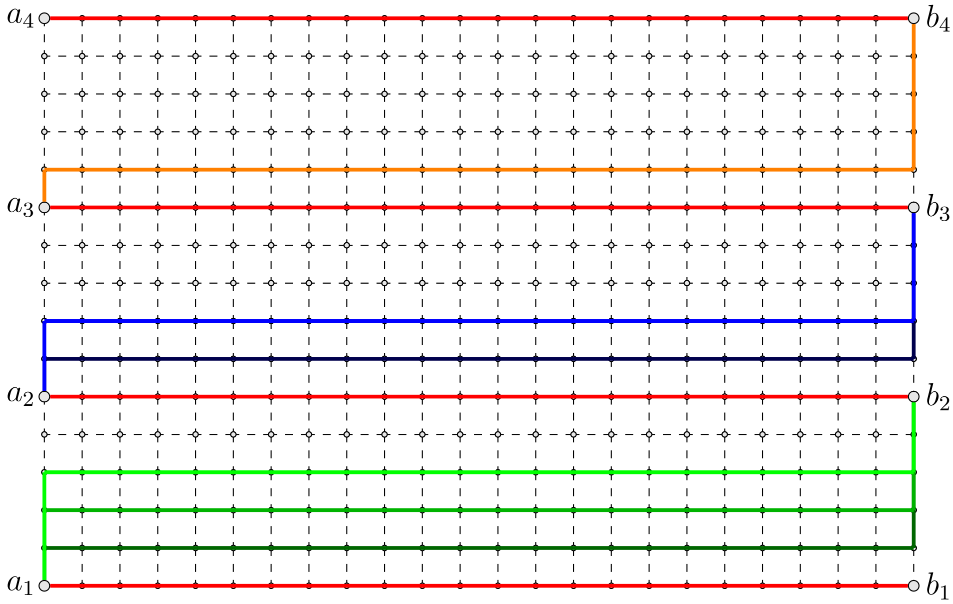
   $$a_i = (1, (i-1)k + i) \text{ in } b_i = (m, (i-1)k + i).$$

   Naj bo

   $$S = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k\}.$$

Množica S je moči $2k = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$ in vsebuje krajišča mreže $(1,1)$, $(m,1)$, $(1,k^2)$ in (m,k^2). Fiksirajmo geodetke med vozlišči iz množice S na naslednji način.

Za vse $i \in [k]$ fiksiramo a_i, b_i-geodetko (ki je enolična, poteka vodoravno po mreži). Nato induktivno dodajamo geodetke v množico $\widetilde{I}(S)$. Najprej dodajamo geodetke od a_1 do vozlišč $b_2, \ldots, b_k$. Vsaka geodetka se začne v a_1, gre po prvem stolpcu navzgor do prvega vozlišča, ki še ni pokrito. Nato poteka po tej vrstici do zadnjega stolpca in nato navpično navzgor do vozlišča b_j. Na ta način pokrijemo $k-1$ vrstic. Enako nadaljujemo med vozliščem a_2 in vozlišči $b_3, \ldots, b_k$ in pokrijemo $k-2$ novih vrstic. Tako nadaljujemo do geodetke med a_{k-1} in b_k. Na enem koraku pokrijemo $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 1 vrstic. Primer takšnih geodetk vidimo na sliki 22.



Slika 22: Prvi del fiksiranih geodetk v grafu $P_{24} \square P_{16}$, kot so opisane v dokazu leme 6.27. Različne barve označujejo različne geodetke.

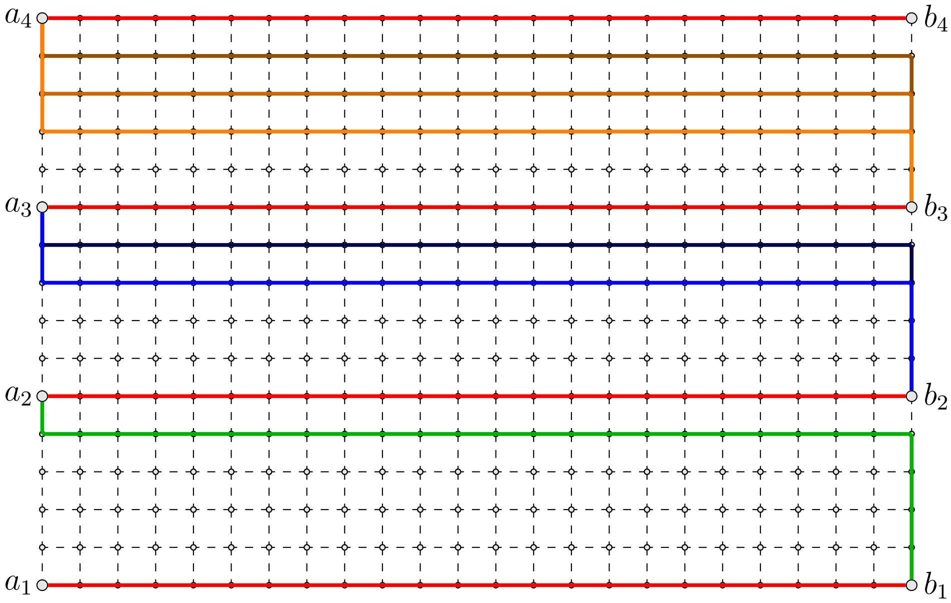
Nato enak postopek ponovimo s potmi med a_k in $b_{k-1}, \ldots, b_1$. Tu pot poteka navzdol po prvem stolpcu do prvega vozlišča, ki še ni pokrito, nato po tej vrstici do zadnjega stolpca in nato po zadnjem stolpcu navzdol do vozlišča b_j. Enako nadaljujemo od vozlišč $a_{k-1}, \ldots, a_2$ do ustreznih vozlišč b_j. Po korakih pokrijemo ravno preostalih $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 1 vrstic. Primer takšnih geodetk vidimo na sliki 23. Na ta način torej pokrijemo vsa vozlišča grafa.

2. Če n ni popolni kvadrat, obstaja naravno število k, da velja $k^2 < n < (k+1)^2$. Zapišemo lahko $n = k^2 + l$, kjer je $1 \leq l < 2k+1$. Glede na možno vrednost $\lceil 2\sqrt{n} \rceil$ ločimo dva primera.

   (a) Naj bo $1 \leq l \leq k$. V tem primeru je $\lceil 2\sqrt{n} \rceil = 2k+1$. Vozlišča a_i, b_i naj bodo kot zgoraj, množico S pa definiramo kot

   $$S = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k\} \cup \{(1,n)\}.$$

   Tedaj je $|S| = 2k+1 = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$. Kot v prejšnjem primeru lahko z geodetkami med vozlišči a_i, b_j pokrijemo vsa vozlišča podgrafa $P_m \square P_{k^2}$.



Slika 23: Drugi del fiksiranih geodetk v grafu $P_{24} \,\square\, P_{16}$, kot so opisane v dokazu leme 6.27. Različne barve označujejo različne geodetke.

Preostalih l vrstic pokrijemo s potmi med $(1, n)$ in vozlišči b_j. Res lahko pokrijemo vse vrstice, ker je $l \leq k$, vozlišč tipa b_j pa je k.

(b) Naj bo $k + 1 \leq l \leq 2k$. V tem primeru je $\lceil 2\sqrt{n} \rceil = 2k + 2$. Vozlišča a_i in b_i naj bodo kot zgoraj, množico S pa definiramo kot

$$S = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k\} \cup \{(1, n), (m, n)\}.$$

Kot v prvem primeru lahko z geodetkami med vozlišči a_i, b_j pokrijemo vsa vozlišča podgrafa $P_m \,\square\, P_{k^2}$. Preostalih l vrstic pokrijemo s potmi med $(1, n)$ in vozlišči b_j ter s potmi med (m, n) in vozlišči a_i. Res lahko pokrijemo vse vrstice, ker je $l \leq 2k$, vozlišč tipa a_i in b_j pa je $2k$. $\square$

Zdaj lahko določimo krepko geodetsko število tankih mrež.

Izrek 6.28 ([9])**.** *Naj bosta $m, n \in \mathbb{N}$ in naj velja* $m > \lceil 2\sqrt{n} \rceil + \binom{\lceil 2\sqrt{n} \rceil}{2}(n-1)$. *Tedaj je*

$$\mathrm{sg}(P_m \,\square\, P_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil .$$

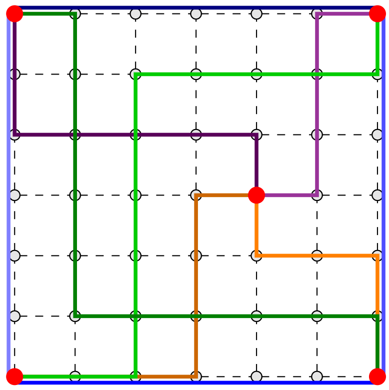
Dokaz. Naj bo S minimalna krepka geodetska množica grafa $P_m \,\square\, P_n$. Iz leme 6.27 sledi, da je $|S| \leq \lceil 2\sqrt{n} \rceil$. Zato velja

$$m > \lceil 2\sqrt{n} \rceil + \binom{\lceil 2\sqrt{n} \rceil}{2}(n-1) \geq |S| + \binom{|S|}{2} \mathrm{diam}(P_n),$$

saj je premer grafa P_n enak $n - 1$. Iz izreka 6.26 sledi, da je $\mathrm{sg}(P_m \,\square\, P_n) \geq \lceil 2\sqrt{n} \rceil$. Torej je $\mathrm{sg}(P_m \,\square\, P_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$. $\square$

Kot je razvidno iz naslednjega primera, tega izreka ne moremo posplošiti na splošne mreže.

Primer 6.29. Oglejmo si mrežo $P_7 \,\square\, P_7$. Množica $S = \{(1,1),(7,1),(1,7),(7,7),(5,4)\}$ je krepka geodetska množica moči 5 (ustrezne geodetke so nakazane na sliki 24). Torej je $\mathrm{sg}(P_7 \,\square\, P_7) \leq 5 < 6 = \lceil 2\sqrt{7} \rceil$.



Slika 24: Geodetke med vozlišči iz množice S (obarvanimi rdeče), ki pokrijejo celoten graf $P_7 \,\square\, P_7$. Različne barve označujejo različne geodetke.

6.2.3 Število izometričnih poti mrež

Oglejmo si še problem določanja števila izometričnih poti na poljubnih mrežah ([4]).

Vpeljimo usmeritev izometričnih poti v grafu $P_m \,\square\, P_n$. *Prvo krajišče* izometrične poti P je tisto od krajišč, ki ima manjšo prvo koordinato. Če sta prvi koordinati krajišč enaki, je prvo krajišče tisto, ki ima manjšo drugo koordinato. Od tod sledi, da za izometrično pot $P = ((x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k))$ velja $x_0 < x_k$ ali $x_0 = x_k$, $y_0 \leq y_k$. Naj $P[(x_i, y_i), (x_j, y_j)]$, kjer je $1 \leq i \leq j \leq k$, označuje del poti P od vozlišča (x_i, y_i) do vozlišča (x_j, y_j). Seveda je $P[(x_i, y_i), (x_j, y_j)]$ tudi izometrična pot v grafu $P_m \,\square\, P_n$. Oglejmo si naslednjo tehnično lemo.

Lema 6.30 ([4])**.** *Pot $P = ((x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k))$ v grafu $P_m \,\square\, P_n$ je izometrična natanko tedaj, ko za vse $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ velja*

1. $a_i \leq a_{i+1}$,
2. $b_0 \leq b_k \implies b_i \leq b_{i+1}$ *in*
3. $b_0 > b_k \implies b_i \geq b_{i+1}$.

Dokaz. Če veljajo lastnosti (1)–(3), potem je pot res izometrična. Dokažimo še obrat.

Naj bo P izometrična pot. Denimo, da za nek i velja $a_i > a_{i+1}$. Torej je $a_{i+1} = a_i - 1$ in $b_{i+1} = b_i$. Izpeljemo lahko

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}((x_0, y_0), (x_k, y_k)) &= \mathrm{d}((x_0, y_0), (x_i, y_i)) + \mathrm{d}((x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})) \\
&\quad + \mathrm{d}((x_{i+1}, y_{i+1}), (x_k, y_k)) \\
&= |x_i - x_0| + |y_i - y_0| + 1 + |x_k - x_{i+1}| + |y_k - y_{i+1}| \\
&\geq |x_i - x_0 + x_k - x_i + 1| + |y_i - y_0 + y_k - y_i| + 1 \\
&= x_k - x_0 + |y_k - y_0| + 2 \\
&= \mathrm{d}((x_0, y_0), (x_k, y_k)) + 2,
\end{aligned}$$

kar je protislovje. Zato je $a_i \leq a_{i+1}$ za vse $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Podobno dokažemo tudi točki (2) in (3). $\square$

Iz leme sledi, da lahko izometrične poti grafa $P_m \,\Box\, P_n$ razdelimo v dva razreda. Poti, za katere velja $b_0 \leq b_k$, imenujemo *naraščajoče*, poti, za katere je $b_0 > b_k$, pa *padajoče*. Opazimo, da so naraščajoče poti tudi tiste, ki potekajo vodoravno.

Pri nadaljnjih dokazih bomo večkrat uporabili dejstvo, da izometrična pot P, na primer med vozliščema $(1,1)$ in (m,n), razdeli mrežo na dva dela. Vsaka izometrična pot, ki poteka iz enega dela v drugega, ima s potjo P vsaj eno skupno vozlišče.

V nadaljevanju bomo dokazali, da je

$$\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n) = \left\lceil \frac{2}{3}\left(m + n - \sqrt{m^2 + n^2 - mn}\right) \right\rceil.$$

Da bo dokaz bolj pregleden si posebej ogledamo zgornjo in spodnjo mejo za število izometričnih poti za mreže.

Lema 6.31 ([4])**.** *Za vsa naravna števila m in n velja*

$$\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n) \geq \left\lceil \frac{2}{3}\left(m + n - \sqrt{m^2 + n^2 - mn}\right) \right\rceil.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $m \leq n$. Očitno je $\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n) \leq m$, saj z m vzporednimi izometričnimi potmi pokrijemo celotno mrežo.

Naj bo $\mathcal{P}$ množica izometričnih poti moči $\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n)$, ki pokrijejo celoten graf. Poti iz $\mathcal{P}$ razdelimo na naraščajoče poti, $\mathcal{R}$, in padajoče poti, $\mathcal{S}$. Označimo $r = |\mathcal{R}|$ in $s = |\mathcal{S}|$. Tedaj je $r + s = \mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n)$.

Najprej opazujmo naraščajoče poti. Brez škode lahko predpostavimo, da ima vsaka pot iz množice $\mathcal{R}$ krajišči $(1,1)$ in (m,n) (poti po potrebi dodamo naraščajočo pot od $(1,1)$ do prvega krajišča in od drugega krajišča do (m,n)).

Z indukcijo na m dokažemo, da lahko poti iz $\mathcal{R}$ pokrijejo največ $(m+n)r - r^2$ vozlišč. Dodatno dokazujemo še, da lahko r naraščajočih poti zamenjamo z naraščajočimi potmi $\{P_1, \ldots, P_r\}$, ki pokrijejo natanko ista vozlišča, imajo pa še dodatno lastnost, da pot P_i poteka med vozliščema $(i,1)$ in $(m, n-i+1)$ za vse $i \in [r]$.

Razmislimo, da trditev velja za $m = 1$. Graf $P_1 \,\Box\, P_n$ je izomorfen poti, ena izometrična pot pokrije največ $n = (1+n) \cdot 1 - 1$ vozlišč, poteka od $(1,1)$ do $(1,n)$ in je naraščajoča.

Trditev velja tudi za $m = 2$. Ena izometrična pot v grafu $P_2 \,\Box\, P_n$ pokrije največ $n + 1 = (2+n) \cdot 1 - 1$ vozlišč in pri tem poteka od $(1,1)$ do $(2,n)$. Dve izometrični poti pokrijeta največ $2n = (2+n) \cdot 2 - 4$ vozlišč. Lahko ju izberemo tako, da ena poteka od $(1,1)$ do $(2,n)$, druga pa od $(2,1)$ do $(2,n-1)$.

Predpostavimo sedaj, da trditev velja za vse grafe $P_k \,\Box\, P_n$, kjer je $1 \leq k < m$. Opazujmo graf $P_m \,\Box\, P_n$ in množico $\mathcal{R}$ naraščajočih izometričnih poti. Naj bo $(1,b)$ takšno vozlišče, pokrito s potmi iz $\mathcal{R}$, da nobeno vozlišče $(1,j)$ za $j > b$ ni pokrito z $\mathcal{R}$. Naj bo (a,n) takšno vozlišče, pokrito s potmi iz $\mathcal{R}$, da nobeno vozlišče (i,n) za $i < a$ ni pokrito s potmi iz $\mathcal{R}$.

Če obstaja pot $P \in \mathcal{R}$, ki vsebuje vozlišči $(1,b)$ in (a,n), definiramo $P^* = P$ in $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$. Velja $|\mathcal{R}^*| = |\mathcal{R}|$ in obe množici pokrijeta ista vozlišča.

Sicer ne obstaja pot, ki bi vsebovala obe vozlišči. To pomeni, da morata biti vozlišči nujno različni, zato je $a > 1$ in $b < n$. Naj bosta $P, R \in \mathcal{R}$ različni poti in naj P vsebuje $(1, b)$, R pa (a, n). Ker obe potekata med vozliščema $(1, 1)$ in (m, n), se gotovo sekata. Natančneje, sekata se dela $P[(1, b), (m, n)]$ in $Q[(1, 1), (a, n)]$. Naj bo (x, y) eno od vozlišč v preseku. Definiramo $P^* = P[(1, 1), (x, y)] \cup Q[(x, y), (m, n)]$ in $Q^* = Q[(1, 1), (x, y)] \cup P[(x, y), (m, n)]$. Obe poti sta naraščajoči in izometrični. Dodatno definiramo $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} - \{P, R\} \cup \{P^*, R^*\}$. Velja $|\mathcal{R}^*| = |\mathcal{R}|$ in obe množici pokrijeta ista vozlišča.

V obeh primerih je torej $\mathcal{R}^*$ množica r naraščajočih izometričnih poti, ki pokrije ista vozlišča kot začetna množica $\mathcal{R}$, dodatno pa velja, da pot P^* vsebuje vsa vozlišča pokrita s potmi iz $\mathcal{R}$, ki imajo prvo koordinato enako 1 ali drugo koordinato enako n. Torej vozlišča, pokrita z $\mathcal{R}^*$ in ne s P^*, ležijo v $\{2, \ldots, m\} \times \{2, \ldots, n\}$, torej v grafu izomorfnemu $P_{m-1} \,\Box\, P_{n-1}$. Po indukcijski predpostavki lahko $r - 1$ poti iz $\mathcal{R}^* - \{P^*\}$ v grafu $P_{m-1} \,\Box\, P_{n-1}$ pokrije največ $(m - 1 + n - 1)(r - 1) - (r - 1)^2 = (m + n)(r - 1) - r^2 + 1$ vozlišč. Ker pot P^* pokrije največ $m + n - 1$ vozlišč, sledi, da poti iz $\mathcal{R}^*$ pokrijejo največ $(m+n)(r-1) - r^2 + 1 + (m+n-1) = (m+n)r - r^2$ vozlišč.

Po indukcijski predpostavki lahko vozlišča, ki jih $\mathcal{R}^*$ pokrije v $P_{m-1} \,\Box\, P_{n-1}$, pokrijemo tudi z $r-1$ potmi, ki potekajo med $(i, 1)$ in $(m, n-i+1)$ za $i \in \{2, \ldots, r\}$. Če tem potem dodamo še P^*, dobimo poti, ki jih zahteva trditev.

S tem smo dokazali, da za vsak m, kjer $1 \leq m \leq n$, množica r naraščajočih poti pokrije kvečjemu $(m + n)r - r^2$ vozlišč grafa $P_m \,\Box\, P_n$. Poleg tega lahko množico teh poti $\mathcal{R}$ zamenjamo z množico $\mathcal{R}'$, ki vsebuje r naraščajočih izometričnih poti $\{P_1, \ldots, P_r\}$, ki pokrijejo natanko ista vozlišča kot množica $\mathcal{R}$. Pri tem ima pot P_i krajišči $(i, 1)$ in $(m, n - i + 1)$.

Analogno lahko množico padajočih poti $\mathcal{S}$ zamenjamo s padajočimi potmi $\mathcal{S}' = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$, ki pokrijejo natanko ista vozlišča. Pri tem ima pot Q_j krajišči (j, n) in (m, j). Poleg tega poti iz $\mathcal{S}'$ pokrijejo največ $(m + n)s - s^2$ vozlišč.

Razmislimo, da vsaka pot iz $\mathcal{S}'$ seka vsako pot iz $\mathcal{R}'$. Preveriti moramo, da pot P_i res seka pot Q_j, kjer sta $1 \leq i \leq r$ in $1 \leq j \leq s$. Če pot P_i vsebuje (j, n) ali (m, j), se poti sekata. Sicer pot P_i mrežo razdeli na dva kosa. En kos vsebuje vozlišče (j, n), drugi kos pa vozlišče (m, j), saj je $j < n - i + 1$, kar sledi iz dejstva, da je $i + j \leq r + s \leq m \leq n$. Zato se poti P_i in Q_j res sekata v vsaj enem vozlišču.

Za vsako pot Q_j torej velja, da pokrije vsaj r vozlišč, ki so že pokrita z naraščajočimi potmi. Zato je vozlišč, ki jih pokrijejo poti iz $\mathcal{S}'$ in ne iz $\mathcal{R}'$ največ $(m + n)s - s^2 - rs$.

Skupno število vozlišč, ki ji pokrijejo poti iz $\mathcal{R}' \cup \mathcal{S}'$, je največ $(m + n)r - r^2 + (m + n)s - s^2 - rs = (m + n)(r + s) - (r + s)^2 + rs$. Označimo $\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n) = p$. Torej s p izometričnimi potmi pokrijemo največ $(m + n)p - p^2 + s(p - s)$ vozlišč. Ta vrednost je največja, če je $s = \frac{p}{2}$ in je takrat enaka $(m + n)p - \frac{3}{4}p^2$. Ker je p število izometričnih poti grafa, velja

$$mn \leq (m + n)p - \frac{3}{4}p^2,$$

kar je ekvivalentno

$$\frac{3}{4}p^2 - (m + n)p + mn \leq 0.$$

Pripadajoča kvadratna enačba ima dve ničli, obe sta pozitivni. Vrednost izraza je negativna med ničlama, zato med drugim sledi, da mora veljati

$$p \geq \left\lceil \frac{2}{3}\left(m+n-\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)\right\rceil. \qquad \square$$

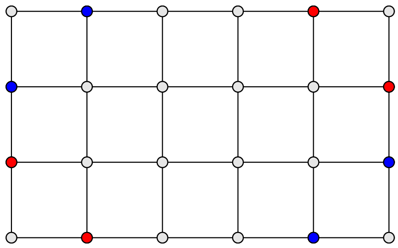
Dokazati moramo še obratno neenakost. Vpeljimo pojem normalnega pokritja. Denimo, da množica r naraščajočih in s padajočih poti pokrije vsa vozlišča grafa $P_m \,\square\, P_n$. Če naraščajoče poti pokrijejo vozlišča

$$\{(r,1),(r-1,2),\ldots,(1,r)\} \cup \{(m-r+1,n),(m-r+2,n-1),\ldots,(m,n-r+1)\}$$

in padajoče poti pokrijejo vozlišča

$$\{(m-s+1,1),(m-s+2,2),\ldots,(m,s)\} \cup \{(1,n-s+1),(2,n-s+2),\ldots,(s,n)\},$$

rečemo, da je pokritje *normalno* (glej sliko 25).



Slika 25: Graf $P_6 \,\square\, P_4$. Naj bo $r = s = 2$. Če naraščajoče poti pokrijejo rdeča vozlišča, padajoče poti modra vozlišča in vse poti skupaj vsa vozlišča grafa, je pokritje normalno.

Lema 6.32 ([4]). *Naj bodo m,n,r in s cela števila, za katera velja $m,n \geq 1$ in $r,s \geq 0$. Če je*

$$(m-r-s)(n-r-s) \leq rs,$$

potem lahko graf $P_m \,\square\, P_n$ pokrijemo z r naraščajočimi in s padajočimi potmi.

Dokaz. Najprej obravnavamo primer, ko je $r+s \geq \min\{m,n\}$. Za $k \in [r]$ naj naraščajoča pot poteka vodoravno in navpično navzgor med naslednjimi vozlišči

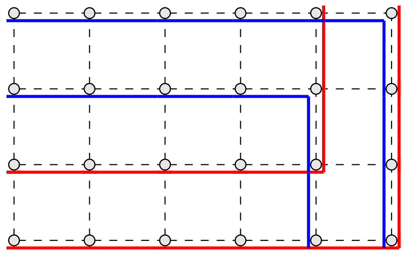
$$(1,k) \rightsquigarrow (m-k+1,k) \rightsquigarrow (m-k+1,n).$$

Za $l \in [s]$ naj padajoča pot poteka vodoravno in navpično navzdol med

$$(1,n-l+1) \rightsquigarrow (m-l+1,n-l+1) \rightsquigarrow (m-l+1,1).$$

Te poti so izometrične. Iz $r+s \geq \min\{m,n\}$ sledi, da pokrijejo vsa vozlišča grafa. Primer tako izbranih poti vidimo na sliki 26.

Naj bo sedaj $r+s < \min\{m,n\}$. Brez škode lahko predpostavimo, da je $r \leq s$ (sicer prezrcalimo graf preko vodoravne osi, da zamenjamo zgornji in spodnji del grafa; naraščajoče poti pri tem postanejo padajoče in obratno) in da je $n \leq m$ (sicer graf prezrcalimo preko osi $i = j$; pri tem naraščajoče poti ostanejo naraščajoče, padajoče pa ostanejo padajoče). Če je $r \geq n$, lahko graf pokrijemo že z r vodoravnimi potmi (takšne poti so namreč naraščajoče). Zato obravnavajmo primer, ko je $r < n$.



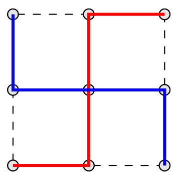
Slika 26: Graf $P_6 \square P_4$. Naj bo $r = s = 2$. Na sliki vidimo naraščajoče (rdeče) in padajoče (modre) poti, kot so opisane v dokazu leme 6.32.

Če je $r = 0$, pri teh predpostavkah neenakost $(m - r - s)(n - r - s) \leq rs$ ne more biti izpolnjena. Torej lahko dodatno predpostavimo še, da je $1 \leq r \leq s$. Od tod pa zaradi $r + s < \min\{m, n\}$ sledi tudi $3 \leq n \leq m$.

Iz neenačbe $(m-r-s)(n-r-s) \leq rs$ sledi $(n-r-s)^2 \leq s^2$, od koder izpeljemo

$$r + 2s - n \geq 0.$$

Dokaz nadaljujemo z indukcijo po n. Najprej si oglejmo primer, ko je $n = 3$. Tedaj je edina možnost $r = s = 1$. Zato je $(m-r-s)(n-r-s) = (m-2)(3-2) = m-2 \leq rs = 1$. Torej mora veljati $m \leq 3$. Ker je $n \leq m$, od tod sledi $m = 3$. Edina možnost, ki zadošča neenakosti iz leme, je torej graf $P_3 \square P_3$ in vrednosti $r = s = 1$. Za tak graf res obstaja ustrezno pokritje, ki je normalno (glej sliko 27).



Slika 27: Graf $P_3 \square P_3$ z ustreznim pokritjem.

Predpostavimo, da za n', kjer je $3 \leq n' < n$ in $(m' - r' - s')(n' - r' - s') \leq r's'$, obstaja normalno pokritje grafa $P_{m'} \square P_{n'}$ z r' naraščajočimi in s' padajočimi izometričnimi potmi.

Najdimo ustrezno pokritje grafa $P_m \square P_n$. Del grafa pokrijemo na sledeč način. Za $1 \leq k \leq r$ naj k-ta naraščajoča pot poteka navpično navzgor in vodoravno med vozlišči

$$(k, 1) \rightsquigarrow (k, n - s - k + 1) \rightsquigarrow (n - s + k, n - s - k + 1).$$

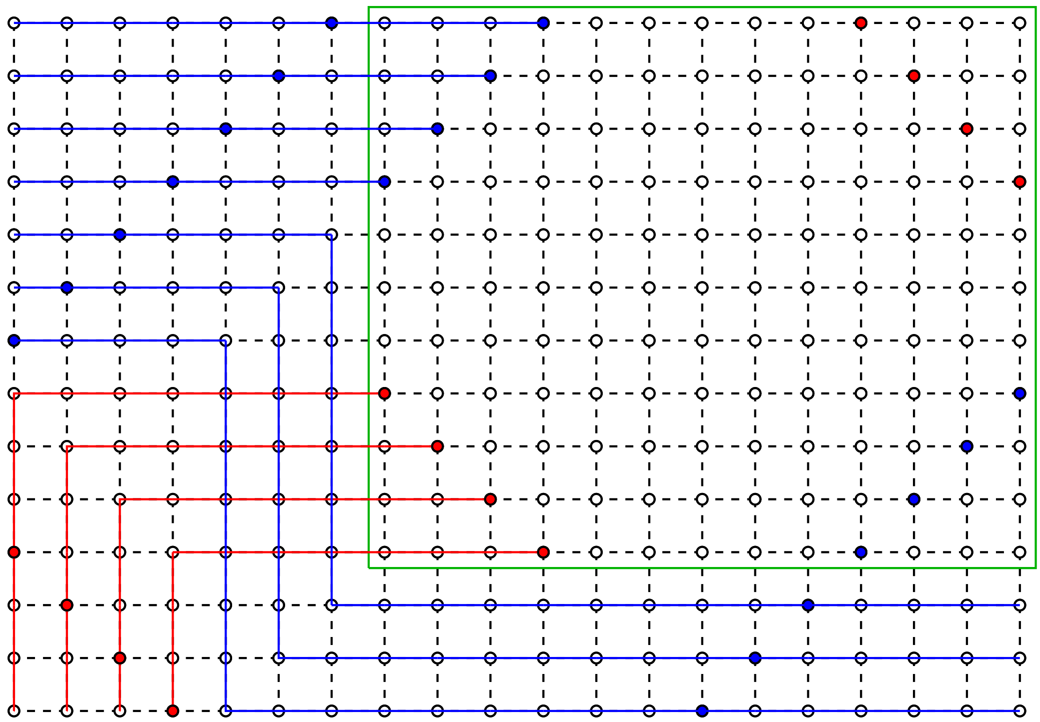
Definiramo še dva tipa padajočih poti. Za $1 \leq j \leq r + 2s - n$ (če obstaja), naj j-ta padajoča pot poteka vodoravno med vozliščema

$$(1, n - j + 1) \rightsquigarrow (r + s - j + 1, n - j + 1),$$

za $r + 2s - n < j \leq s$ pa naj pot poteka vodoravno in navpično med vozlišči

$$(1, n-j+1) \rightsquigarrow (r+s-j+1, n-j+1) \rightsquigarrow (r+s-j+1, s-j+1) \rightsquigarrow (m, s-j+1).$$

S temi potmi pokrijemo vsa vozlišča v spodnjih $n - s$ vrsticah in levih $n - r - s$ stolpcih grafa $P_m \square P_n$. Nepokrita ostane mreža velikosti $(m - n + s) \times (r + s)$.



Slika 28: Graf $P_{20} \square P_{14}$ z označenimi naraščajočimi in padajočimi potmi, kot so definirane v dokazu leme 6.32. Vrednosti parametrov so $r = 4$ in $s = 7$. Nepokrita ostane mreža velikosti 13×11, ki je označena z zeleno barvo.

Vendar r naraščajočih in prvih $r+2s-n$ padajočih poti vstopi v to podmrežo tako, da jih lahko z normalnim pokritjem podmreže $(m-n+s)\times(r+s)$ z r naraščajočimi in $r+2s-n$ padajočimi potmi razširimo do normalnega pokritja mreže $m \times n$.

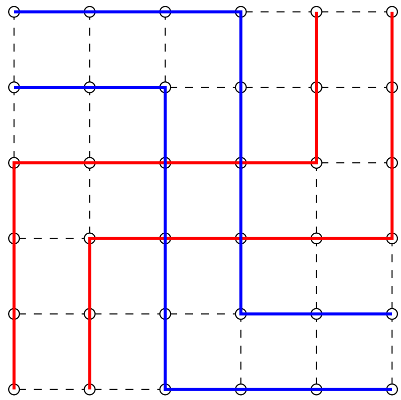
Označimo $m' = m-n+s, n' = r+s, r' = r$ in $s' = r+2s-n$. Tedaj je

$$\begin{aligned}(m'-r'-s')(n'-r'-s')-r's' &= (m-2r-s)(n-r-s)-r(r+2s-n)\\ &= (m-r-s)(n-r-s)-rs \leq 0.\end{aligned}$$

Zato lahko na podmreži velikosti $(m-n+s)\times(r+s)$ (ki je izomorfna grafu $P_{m'} \square P_{n'}$) uporabimo indukcijsko predpostavko. Ker obstaja ustrezno normalno pokritje grafa $P_{m'} \square P_{n'}$ z izometričnimi potmi, imamo tudi ustrezno normalno pokritje grafa $P_m \square P_n$. □

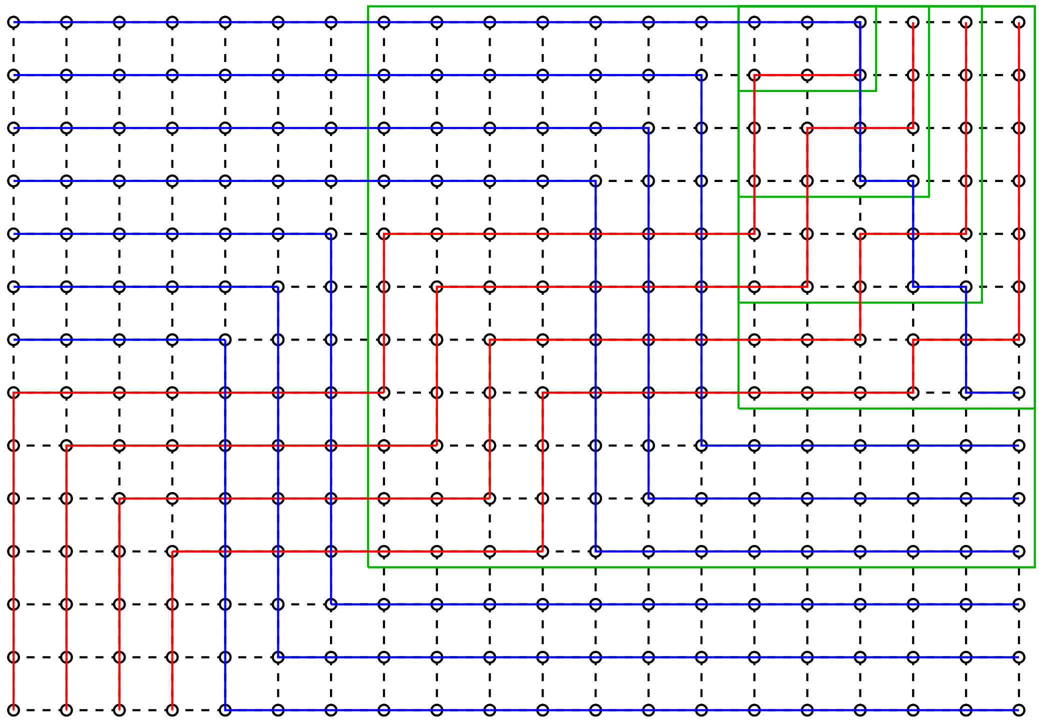
S pomočjo te leme lahko na primer poiščemo pokritje grafa $P_6 \square P_6$. Najprej moramo določiti r in s, da bo veljalo $(6-r-s)^2 \leq rs$. Temu na primer ustrezata vrednosti $r = s = 2$. Najprej pokrijemo spodnji dve vrstici in leve štiri stolpce in poiščemo normalno pokritje grafa $P_2 \square P_4$. Dobimo pokritje kot na sliki 29.

Oglejmo si še izračun $\mathrm{sg}(P_{20} \square P_{14})$ (prvi korak je viden na sliki 28). Izberemo parametra $r = 4$ in $s = 7$, saj ustrezata neenakosti $(20-r-s)(14-r-s) \leq rs$. Nato moramo poiskati pokritje grafa $P_{13} \square P_{11}$ s štirimi naraščajočimi in eno padajočo potjo. To se prevede na problem pokrivanja $P_6 \square P_8$ s štirimi naraščajočimi in eno padajočo potjo. Potem poiščemo pokritje $P_5 \square P_6$ s tremi naraščajočimi in eno padajočo potjo. Nato moramo pokriti graf $P_4 \square P_4$ z dvema naraščajočima in eno padajočo potjo. Na koncu poiščemo še pokritje $P_3 \square P_2$ z eno naraščajočo in



Slika 29: Graf $P_6 \,\square\, P_6$ z ustreznim pokritjem pri parametrih $r = s = 2$.

eno padajočo potjo. Pri tem večkrat prezrcalimo mrežo, kot je opisano v dokazu leme 6.32. Pokritje je označeno na sliki 30.



Slika 30: Graf $P_{20} \,\square\, P_{14}$, pokrit s štirimi naraščajočimi in sedmimi padajočimi izometričnimi potmi. Z zeleno barvo so označene podmreže, ki jih pokrivamo.

S pomočjo konstrukcije iz leme 6.32 določimo zgornjo mejo za $\mathrm{ip}(P_m \,\square\, P_n)$.

Lema 6.33 ([4])**.** *Za vsa naravna števila m in n velja*

$$\mathrm{ip}(P_m \,\square\, P_n) \leq \left\lceil \frac{2}{3}\left(m + n - \sqrt{m^2 + n^2 - mn}\right) \right\rceil .$$

Dokaz. Označimo $p = \left\lceil \frac{2}{3}\left(m + n - \sqrt{m^2 + n^2 - mn}\right) \right\rceil$. Tedaj je

$$\frac{2}{3}\left(m + n - \sqrt{m^2 + n^2 - mn}\right) \leq p < 1 + \frac{2}{3}\left(m + n - \sqrt{m^2 + n^2 - mn}\right) .$$

Opazujmo funkcijo $f(m,n) = m^2 + n^2 - mn$ na območju $[1,\infty) \times [1,\infty)$. Edina stacionarna točka funkcije f je $(0,0)$, ki leži izven tega območja. Ko gre eno izmed števil m,n proti neskončnosti, se v neskončnost veča tudi vrednost funkcije $f(m,n)$. Zato je minimum f dosežen, ko je $m = 1$ ali $n = 1$. V primeru, ko je $m = 1$, dobimo funkcijo $g(n) = n^2 - n + 1$, ki minimum na danem območju doseže pri $n = 1$. Iz simetrije potem sledi, da je minimum f dosežen v $(1,1)$ in enak 1. Zato je $\sqrt{m^2+n^2-mn} \geq 1$, od koder lahko izpeljemo, da velja $1 + \frac{2}{3}\left(m+n-\sqrt{m^2+n^2-mn}\right) \leq \frac{2}{3}\left(m+n+\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)$.

Torej je

$$\frac{2}{3}\left(m+n-\sqrt{m^2+n^2-mn}\right) \leq p < \frac{2}{3}\left(m+n+\sqrt{m^2+n^2-mn}\right),$$

kar pomeni, da p leži ravno med ničlama kvadratne enačbe $\frac{3}{4}x^2 - (m+n)x + mn$, in sicer na območju, kjer je vrednost kvadratne enačbe nepozitivna. Torej velja

$$\frac{3}{4}p^2 - (m+n)p + mn \leq 0.$$

To je ekvivalentno

$$(m-p)(n-p) \leq \frac{p^2}{4}.$$

Obravnavajmo najprej primer, ko je p sodo število. Postavimo $r = s = \frac{p}{2}$. Tedaj je

$$(m-r-s)(n-r-s) = (m-p)(n-p) \leq \frac{p^2}{2} = rs,$$

zato iz leme 6.32 sledi, da lahko graf $P_m \,\Box\, P_n$ pokrijemo s $\frac{p}{2}$ naraščajočimi in $\frac{p}{2}$ padajočimi izometričnimi potmi. Torej je $\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n) \leq r + s = p$.

Obravnavajmo še primer, ko je p liho število. V tem primeru ima p^2 pri deljenju s 4 ostanek 1, zato je $\frac{p^2}{4}$ natanko za $\frac{1}{4}$ večji od nekega celega števila. Ker je $(m-p)(n-p)$ seveda celo število, iz $(m-p)(n-p) \leq \frac{p^2}{4}$ sledi

$$(m-p)(n-p) \leq \frac{p^2-1}{4}.$$

Postavimo $r = \frac{p-1}{2}$ in $s = \frac{p+1}{2}$. Tedaj je $r + s = p$ in

$$(m-r-s)(n-r-s) = (m-p)(n-p) \leq \frac{p^2-1}{2} = rs.$$

Zato iz leme 6.32 sledi, da lahko graf $P_m \,\Box\, P_n$ pokrijemo s $\frac{p-1}{2}$ naraščajočimi in $\frac{p+1}{2}$ padajočimi izometričnimi potmi. Torej je $\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n) \leq r + s = p$.

V obeh primerih torej velja $\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n) \leq p = \left\lceil \frac{2}{3}\left(m+n-\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)\right\rceil$, s čimer je lema dokazana. □

Iz lem 6.31 in 6.33, sledi naslednji izrek.

Izrek 6.34 ([4]). *Za vsa naravna števila m in n velja*

$$\mathrm{ip}(P_m \,\Box\, P_n) = \left\lceil \frac{2}{3}\left(m+n-\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)\right\rceil.$$

V posebnem primeru, ko je $m = n$ to pomeni, da je

$$\mathrm{ip}(P_n \,\Box\, P_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil.$$

7 Zaključek

Geodetsko in krepko geodetsko število grafa ter število izometričnih poti izhajajo iz podobnih problemov, vendar se njihove lastnosti razlikujejo. V delu so poleg osnovnih definicij, primerov in lastnosti predstavljene še povezave s premerom grafa in lastnosti invariant na kartezičnih produktih. Ker o krepkem geodetskem številu še ni veliko znanega, so že znani rezultati za geodetsko število ali število izometričnih poti uporabljeni kot vodilo za določanje novih lastnosti.

Poleg splošne predstavitve znanih rezultatov s tega področja, je izpeljanih tudi nekaj novih. S pomočjo optimizacijskega problema je določeno krepko geodetsko število uravnoteženih polnih dvodelnih grafov, zanimiva je tudi obravnava grafov z ekstremnimi vrednostmi invariant.

Geodetsko število grafa z določenim premerom je že dobro raziskano, zato v delu poiščemo tudi podobne lastnosti krepkega geodetskega števila in števila izometričnih poti. Tako spoznamo uporabne ocene za vrednosti invariant na poljubnem grafu. Obravnava zgornjih in spodnjih mej za prizme je zanimiva že pri geodetskem številu, pri krepkem geodetskem številu pa do sedaj ni bila obravnavana. Predstavljenih je nekaj novih rezultatov, vendar ostajajo tudi še nerešeni problemi. Na koncu dela so predstavljene še vrednosti za mreže, ki so za vse tri invariante že bile vsaj delno raziskane.

Novi rezultati, ki so bili dokazani med izdelavo magistrskega dela, so večinoma zbrani v naslednjih dveh člankih, ki sta bila dokončana vzporedno z dokončanjem magisterija:

1. V. Iršič, Strong geodetic number of complete bipartite graphs and of graphs with specified diameter, arXiv:1708.02416, 9. avgust 2017.

2. V. Iršič, S. Klavžar, Strong geodetic problem on Cartesian products of graphs, arXiv:1708.02414, 9. avgust 2017.

Področje pokrivanja vozlišč grafov je zelo bogato in predvsem pri krepkem geodetskem številu dopušča še veliko možnosti za nadaljnje raziskave.

Literatura

[1] B. Brešar, M. Kovše, A. Tepeh, *Geodetic sets in graphs*, v: Structural Analysis of Complex Networks, Birkhäuser/Springer, New York (2011) 197–218.

[2] C. C. Centeno, L. D. Penso, D. Rautenbach, V. G. Pereira de Sá, Geodetic number versus hull number in P_3-convexity, SIAM J. Discrete Math. 27 (2013) 717–731.

[3] G. Chartrand, F. Harary, P. Zhang, *On the geodetic number of a graph*, Networks 39 (2002) 1–6.

[4] D. C. Fisher, S. L. Fitzpatrick, *The isometric path number of a graph*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 38 (2001) 97–110.

[5] S. L. Fitzpatrick, *Isometric path number of the Cartesian product of paths*, Congr. Numer. 137 (1999) 109–119.

[6] A. S. Fraenkel, F. Harary, *Geodetic contraction games on graphs*, Internat. J. Game Theory 18 (1989) 327–338.

[7] F. Harary, E. Loukakis, C. Tsouros, *The geodetic number of a graph*, Math. Comput. Model. 17 (1993) 89–95.

[8] T. Jiang, I. Pelayo, D. Pritikin, *Geodesic convexity and Cartesian products in graphs*, rokopis, 2004.

[9] S. Klavžar, P. Manuel, *Strong geodetic problem in grid like architectures*, rokopis, 2017.

[10] C. Lu, *The geodetic numbers of graphs and digraphs*, Sci China Ser A 50 (2007) 1163–1172.

[11] P. Manuel, S. Klavžar, A. Xavier, A. Arokiaraj, E. Thomas, *Strong edge geodetic problem in networks: computational complexity and solution for Apollonian networks*, rokopis, 2016.

[12] P. A. Ostrand, *Graphs with specified radius and diameter*, Discrete Math. 4 (1973) 71–75.

[13] J.-J. Pan, G. J. Chang, *Isometric path numbers of graphs*, Discrete Math. 306 (2006) 2091–2096.

[14] I. M. Pelayo, Geodesic Convexity in Graphs, Springer Briefs in Mathematics, Springer, New York, 2013.

[15] M. Petkovšek, osebna komunikacija, maj 2017.