Graduate Texts in Mathematics

目　　录

第一部分　表示和特征标

第二部分　在特征零情形的表示

第一部分　表示和特征标

第一章　线性表示通论

1.1　定义

令 V 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上一个向量空间，$\boldsymbol{GL}(V)$ 是由 V 到自身的一切同构所组成的群．按照定义，$\boldsymbol{GL}(V)$ 的一个元素 a 是 V 到 V 内的一个线性映射，它有一个逆映射 a^{-1}；这个逆映射也是线性的．当 V 具有一个 n 元有限基 (e_i) 时，每一个线性映射 $a: V\to V$ 由一个 n 阶方阵 (a_{ij}) 所确定，系数 a_{ij} 都是复数；这些系数是通过将象 $a(e_j)$ 用基 (e_i) 来表示：

$$a(e_j)=\sum_i a_{ij}e_i$$

而得到的．

说 a 是一个同构相当于说 a 的行列式 $\det(a)=\det(a_{ij})$ 不等于零．因此，群 $\boldsymbol{GL}(V)$ 可以与一切 n 阶可逆方阵所组成的群等同起来．

现在设 G 是一个有限群，具有单位元 1 和运算 $(s,t)\longmapsto st$．群 G 到群 $\boldsymbol{GL}(V)$ 内的一个同态 ρ 叫做 G 在 V 内的一个线性表示．换句话说，对于每一元素 $s\in G$，令 $\boldsymbol{GL}(V)$ 的一个元素 $\rho(s)$ 与它对应，使得对于 $s, t\in G$，等式

$$\rho(st)=\rho(s)\cdot\rho(t)$$

成立(我们常把 $\rho(s)$ 写作 ρ_s)．由上面的等式可以推出：

$$\rho(1)=1;\quad \rho(s^{-1})=\rho(s)^{-1}.$$

当 ρ 被给定时，我们就说 V 是 G 的一个表示空间(或者为了简单起见，就说 V 是 G 的一个表示)．今后我们只限于考虑 V 是有限维向量空间的情形．这并不是一个过分的限制．事实上，对于多数应

用来说，人们感兴趣的只是V的有限个元素x_i，并且总可以找到V的一个有限维子表示(稍后将定义，参看1.3)，它包含这些x_i：就取由这些x_i的象$\rho_t(x_i)$所生成的子空间作为表示空间。

现在设V是有限维的，令n是它的维数。我们也称n是所考虑的表示的级。令(e_i)是V的一个基，令R_s是ρ_s关于这个基的矩阵。我们有

$$\det(R_s) \neq 0; \quad R_{st} = R_s \cdot R_t, \quad s, t \in G.$$

如果令$r_{ij}(s)$表示矩阵R_s的系数，那么第二个公式变成

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) r_{jk}(t).$$

反之，给了满足上面等式的可逆矩阵$R_s = (r_{ij}(s))$，相应地就有G在V内的一个线性表示ρ；这就是说，用"矩阵形式"给出一个表示。

设ρ和ρ'是同一个群G分别在向量空间V和V'内的表示。这两个表示说是等价的（或同构的），如果存在一个线性映射τ：$V \to V'$，它把ρ"变为"ρ'，也就是说，以下等式成立：

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \text{ 对一切 } s \in G.$$

当ρ和ρ'是通过矩阵形式分别由R_s和R'_s给出时，这个等式的意义就是，存在一个可逆矩阵T使得

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \text{ 对一切 } s \in G,$$

或写成$R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$。我们可以把这样的两个表示看作同一个(对于每一$x \in V$令$\tau(x) \in V'$与它对应)；特别，$\rho$和$\rho'$有相同的级。

1.2 基本例子

(a) 群G的一个1级表示是一个同态$\rho: G \to \boldsymbol{C}^*$，这里$\boldsymbol{C}^*$表示非零复数乘法群。因为$G$的每一元素都有有限阶，所以$\rho$的值$\rho(s)$都是单位根。特别，我们有$|\rho(s)| = 1$。

如果对一切$s \in G$都取$\rho(s) = 1$，我们就得到G的一个表示，叫做单位(或平凡)表示。

(b) 令 g 是群 G 的阶，V 是一个 g 维向量空间，而 $(e_t)_{t\in G}$ 是 V 的一个基，以 G 的元素 t 为指标。对于 $s\in G$，令 ρ_s 是 V 到 V 内的线性映射，它将 e_t 变到 e_{st}；这样就定义了一个线性表示，叫做 G 的**正则表示**。这个表示的级等于 G 的阶。注意 $e_s=\rho_s(e_1)$，所以 e_1 的象组成 V 的一个基。反之，令 W 是 G 的一个表示，它含有这样一个向量 w，使得 $\rho_s(w), s\in G$，组成 W 的一个基，那么 W 与正则表示同构(令 $\tau(e_s)=\rho_s(w)$，就定义了一个同构 $\tau: V\to W$)。

(c) 更一般地，设 G **作用**在一个有限集 X 上。这就是说，对于每一 $s\in G$，都给出 X 的一个置换 $x\longmapsto sx$，满足等式

$$1x=x,\quad s(tx)=(st)x,$$

这里 $s, t\in G$，$x\in X$。令 V 是一个向量空间，它具有一个基 $(e_x)_{x\in X}$，这里取 X 的元素作为指标。对于 $s\in G$，令 ρ_s 是 V 到 V 内的线性映射，它把 e_x 变到 e_{sx}；这样得到的 G 的表示叫做 G 关于 X 的**置换表示**。

1.3 子表示

令 $\rho: G\to \mathbf{GL}(V)$ 是一个线性表示，W 是 V 的一个子空间。假设 W 在 G 的作用下是**稳定的**(或者说是“不变的”)，换句话说，假设对于一切 $s\in G$，$x\in W$，都有 $\rho_s x\in W$。于是 ρ_s 在 W 上的限制 ρ_s^W 是 W 到它自身上的一个同构，并且 $\rho_{st}^W=\rho_s^W\cdot\rho_t^W$。这样一来，$\rho^W: G\to\mathbf{GL}(W)$ 就是 G 在 W 内的一个线性表示。W 叫做 V 的一个**子表示**。

例 取 V 是 G 的正则表示 [参看 1.2 (b)]。令 W 是由元素 $x=\Sigma_{s\in G}e_s$ 所生成的 V 的一维子空间。那么对一切 $s\in G$ 都有 $\rho_s x=x$，从而 W 是 V 的一个子表示。这个子表示与单位表示同构。(在 2.4 我们将确定正则表示的一切子表示。)

在往下进行之前，让我们先来回顾一下线性代数中的某些概念。向量空间 V 叫做子空间 W 与 W' 的**直和**，如果每一 $x\in V$ 可以唯一地写成 $x=w+w'$ 的形式，这里 $w\in W$，$w'\in W'$；这相当于说 W 与 W' 的交 $W\cap W'$ 是 0，并且 $\dim(V)=\dim(W)+$

$\dim(W')$. 这时就写作 $V = W \oplus W'$ 而 W' 叫做W在V里的一个余子空间. 将每一 $x \in V$ 变到它在W中的分量w的映射 p 叫做对于分解 $V = W \oplus W'$ 来说V在W上的射影, p的象就是W,并且对于一切 $x \in W$, $p(x) = x$. 反之, 如果 p 是V到自身内满足上述两个条件的一个线性映射,可以验证,V是W与 p 的核 (一切满足条件 $p(x) = 0$ 的x所成的集)的直和. 这样一来,V在W上的射影和W在V中的余子空间之间就建立了一个一一对应.

现在让我们再回到子表示上来.

定理 1 令 $\rho: G \to \boldsymbol{GL}(V)$ 是G在V内的一个线性表示, 而W是V的一个在G之下稳定的子空间. 那么存在W在V中的一个余子空间 W^0, 它也在G之下稳定.

令 W' 是W在V中的任意一个余子空间, p 是相应的V在W上的射影. 作 p 在G的元素之下的共轭,并且求平均得

$$p^0 = \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \quad (g\text{ 是 }G\text{ 的阶}).$$

因为 p 将V映入W而 ρ_t 使W不变, 所以 p^0 将V映入W. 如果 $x \in W$, 那么 $\rho_t^{-1}x \in W$. 因此

$$p \cdot \rho_t^{-1}x = \rho_t^{-1}x, \quad \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1}x = x, \quad \text{从而 } p^0x = x.$$

这样, p^0 是V在W上的一个射影,它对应着W的一个余子空间W^0. 再者,对一切 $s \in G$, 我们有

$$\rho_s \cdot p^0 = p^0 \cdot \rho_s.$$

事实上,计算一下 $\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1}$, 就得到

$$\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1} = \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_s \cdot \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \cdot \rho_s^{-1}$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{t \in G} \rho_{st} \cdot p \cdot \rho_{st}^{-1} = p^0.$$

现在设 $x \in W^0$, $s \in G$, 那么 $p^0x = 0$, 因此 $p^0 \cdot \rho_s x = \rho_s \cdot p^0 x = 0$, 所以 $\rho_s x \in W^0$. 这就证明了 W^0 在G之下是稳定的. 定理证毕. □

注记 设V带有一个内积 $(x|y)$, 满足通常的条件: 对 x 是

线性的，对 y 是半线性的，并且当 $x \neq 0$ 时，$(x|x) > 0$. 又假设这个内积在 G 之下不变，即对于一切 $s \in G$，都有 $(\rho_s x|\rho_s y) = (x|y)$. 我们取 $\sum_{t \in G} (\rho_t x|\rho_t y)$ 来代替 $(x|y)$，总可以归结为这一情形. 在这样的前提下，W 在 V 中的正交余 W^0 是 W 的一个余子空间，并且在 G 之下稳定. 这样就得到定理 1 的另一证明. 注意内积 $(x|y)$ 的不变性意味着，如果 (e_i) 是 V 的一个标准正交基，那么 ρ_s 关于这个基的矩阵是一个酉阵.

保持定理 1 的前提和记法. 令 $x \in V$ 而 w 和 w^0 是 x 在 W 和 W^0 上的射影. 我们有 $x = w + w^0$，同时 $\rho_s x = \rho_s w + \rho_s w^0$，并且由于 W 和 W^0 都在 G 之下稳定，所以 $\rho_s w \in W$，$\rho_s w^0 \in W^0$. 这样，$\rho_s w$ 和 $\rho_s w^0$ 是 $\rho_s x$ 的射影. 因此，表示 W 和 W^0 确定了表示 V. 我们就说 V 是 W 和 W^0 的直和，并且记作 $V = W \oplus W^0$. V 的元素可以与元素对 (w, w^0) 等同起来，这里 $w \in W$，$w^0 \in W^0$. 如果 W 和 W^0 由矩阵形式 R_s 和 R_s^0 给出，那么 $W \oplus W^0$ 就由矩阵形式

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

给出. 任意有限多个表示的直和可以类似地定义.

1.4 不可约表示

令 $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ 是 G 的一个线性表示. 我们说，ρ 是不可约的或单的，如果 V 不是 0 并且除了 0 和 V 之外，V 没有在 G 之下稳定的子空间. 由定理 1，第二个条件相当于说，V 不是两个表示的直和(除开显然的分解 $V = 0 \oplus V$). 一级的表示自然都是不可约的. 以后将会看到(3.1)，每一个非交换群至少有一个级 $\geqslant 2$ 的不可约表示.

通过作直和，不可约表示被用来构造其它的表示:

定理 2 每一个表示都是不可约表示的直和.

令 V 是 G 的一个线性表示. 我们对 $\dim(V)$ 作归纳法. 若 $\dim(V) = 0$，定理是显然的 (0 是不可约表示的空集的直和). 假设 $\dim(V) \geqslant 1$. 如果 V 不可约，那么已经没有什么要证的了；否

则，由定理 1，V 可以分解为直和 $V'\oplus V''$，而 $\dim(V')<\dim(V)$，$\dim(V'')<\dim(V)$. 由归纳法的假设，V' 和 V'' 都是一些不可约表示的直和，因而 V 也是一些不可约表示的直和. □

注记　令 V 是一个表示，$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ 是 V 的一个不可约表示的直和分解. 我们会问，这个分解是否唯一. 在一切 ρ_s 都等于 1 的情形，这个分解一般不是唯一的（这时 W_i 都是直线，而一个向量空间分成一些直线的直和的分解是很多的）. 然而，我们将在 2.3 看到，与一个给定的不可约表示同构的 W_i 的个数不依赖于分解的选取.

1.5　两个表示的张量积

同直和运算（这个运算具有通常加法的性质）在一起，还有一种"乘法"：**张量积**，有时也叫做 Kronecker **积**. 它的定义如下：

设 V_1 和 V_2 是两个向量空间. 向量空间 W，连同一个 $V_1\times V_2$ 到 W 内的映射 $(x_1, x_2)\longmapsto x_1\cdot x_2$，叫做 V_1 与 V_2 的**张量积**，如果下列条件被满足：

(a) $x_1\cdot x_2$ 对于变量 x_1 和 x_2 中每一个都是线性的.

(b) 若 (e_{i_1}) 是 V_1 的一个基，(e_{i_2}) 是 V_2 的一个基，则一切乘积 $e_{i_1}\cdot e_{i_2}$ 是 W 的一个基.

容易证明，这样一个空间是存在且唯一的（在同构的意义下）. 记作 $V_1\otimes V_2$. 条件 (b) 表明，

$$\dim(V_1\otimes V_2)=\dim(V_1)\cdot\dim(V_2).$$

现在设 $\rho^1: G\to \boldsymbol{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2: G\to \boldsymbol{GL}(V_2)$ 是群 G 的两个表示. 对于 $s\in G$，由以下条件定义 $\boldsymbol{GL}(V_1\otimes V_2)$ 的一个元素 ρ_s：

$$\rho_s(x_1\cdot x_2)=\rho_s^1(x_1)\cdot\rho_s^2(x_2), x_1\in V_1, x_2\in V_2.$$

[ρ_s 的存在和唯一性容易由条件 (a) 和 (b) 得出.] 我们记作

$$\rho_s=\rho_s^1\otimes\rho_s^2.$$

ρ_s 定义了 G 到 $V_1\otimes V_2$ 内的一个线性表示，叫做原来两个表示的**张量积**.

把这个定义转换成矩阵的说法就是：令 (e_{i_1}) 是 V_1 的一个

基，$(r_{i_1j_1}(s))$ 是 ρ_s^1 关于这个基的矩阵；完全类似地定义 (e_{i_2}) 和 $(r_{i_2j_2}(s))$. 由

$$\rho_s^1(e_{j_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1j_1}(s)e_{i_1},$$

$$\rho_s^2(e_{j_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2j_2}(s)e_{i_2}$$

推出：

$$\rho_s(e_{j_1}\cdot e_{j_2}) = \sum_{i_1,i_2} r_{i_1j_1}(s)\cdot r_{i_2j_2}(s)\cdot e_{i_1}\cdot e_{i_2}.$$

因此 ρ_s 的矩阵就是 $(r_{i_1j_1}(s)r_{i_2j_2}(s))$；它是 ρ_s^1 的矩阵与 ρ_s^2 的矩阵的**张量积**.

两个不可约表示的张量积一般说来不是不可约的，它被分解成一些不可约表示的直和，这些不可约表示可以利用特征标的理论来确定(参看 2.3).

在量子化学中，张量积常常表现为以下形式：V_1 和 V_2 是两个函数空间,它们都在 G 之下稳定，分别有基 (φ_{i_1}) 和 (ψ_{i_2})，而 $V_1\otimes V_2$ 是由乘积 $\varphi_{i_1}\cdot\psi_{i_2}$ 所生成的向量空间，这些乘积是线性无关的. 最后的条件是重要的. 这里有两个特殊情形,对于这两个情形来说,上面的条件都被满足：

(1) 一些函数 φ 只依赖于变量 $(x, x', \cdots)$而另一些函数 ψ 只依赖于与第一组变量无关的变量 $(y, y', \cdots)$.

(2) 空间 V_1 (或 V_2) 具有一个只由单独一个函数 φ 所组成的基，这个函数在任何区域内都不等于零;于是空间 V_1 是一维的.

1.6 对称方和交错方

假设表示 V_1 和 V_2 都恒同于同一个表示 V. 那么 $V_1\otimes V_2 = V\otimes V$. 如果 (e_i) 是 V 的一个基，令 θ 是 $V\otimes V$ 的一个自同构，使得

$$\theta(e_i\cdot e_j) = e_j\cdot e_i, \quad 对一切\ (i,j).$$

由此推出，对一切 $x, y\in V$ 都有 $\theta(x\cdot y) = y\cdot x$，因此 θ 不依赖于基 (e_i) 的选取. 再者，$\theta^2 = 1$. 于是空间 $V\otimes V$ 被分解为直和：

$$V\otimes V = \mathbf{Sym}^2(V)\oplus\mathbf{Alt}^2(V),$$

这里 $\mathbf{Sym}^2(V)$ 是 $V\otimes V$ 中一切满足条件 $\theta(z)=z$ 的元素 z 所成的集合，而 $\mathbf{Alt}^2(V)$ 是 $V\otimes V$ 中一切满足条件 $\theta(z)=-z$ 的元素 z 所成的集合．元素 $(e_i\cdot e_j+e_j\cdot e_i)_{i\leqslant j}$ 构成 $\mathbf{Sym}^2(V)$ 的一个基，而元素 $(e_i\cdot e_j-e_j\cdot e_i)_{i<j}$ 构成 $\mathbf{Alt}^2(V)$ 的一个基．如果 $\dim(V)=n$，那么

$$\dim\mathbf{Sym}^2(V)=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\dim\mathbf{Alt}^2(V)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

子空间 $\mathbf{Sym}^2(V)$ 和 $\mathbf{Alt}^2(V)$ 都在 G 之下稳定．这样定义的表示分别叫做所给的表示的**对称方**和**交错方**．

第二章　特征标理论

2.1　表示的特征标

令 V 是一个向量空间，它有一个由 n 个元素组成的基 (e_i). 令 a 是 V 到它自身内的一个线性映射，它关于这个基的矩阵是 (a_{ij}). 纯量

$$\mathrm{Tr}(a) = \sum_i a_{ii}$$

叫做 a 的迹，它是 a 的特征值的和（几重根算几次），并且不依赖于基 (e_i) 的选取.

现在令 $\rho: G \to \boldsymbol{GL}(V)$ 是有限群 G 在向量空间 V 内的一个线性表示. 对于每一 $s \in G$，令

$$\chi_\rho(s) = \mathrm{Tr}(\rho_s).$$

这样得到的 G 上的复数值函数 χ_ρ 叫做表示 ρ 的特征标. 这个函数的重要性主要在于它完全刻画了表示 ρ（参看 2.3）.

命题 1　设 χ 是一个 n 级表示 ρ 的特征标，那么

(i)　$\chi(1) = n$；

(ii)　$\chi(s^{-1}) = \chi(s)^*$，对于 $s \in G$；

(iii)　$\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$，对于 $s, t \in G$.

（如果 $z = x + iy$ 是一个复数，我们用 z^* 或 $\bar{z}$ 表示共轭复数 $x - iy$.）

我们有 $\rho(1) = 1$，而 V 的维数是 n，所以 $\mathrm{Tr}(1) = n$，从而 (i) 成立.

关于 (ii)，我们注意 ρ_s 是有限阶的，所以它的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 也都是有限阶的，因而它们的绝对值都等于 1（这也是 ρ_s 可以由一个酉阵来定义这一事实的直接结果，参看 1.3）. 于是

$$\chi(s)^* = \mathrm{Tr}(\rho_s)^* = \sum \lambda_i^* = \sum \lambda_i^{-1} = \mathrm{Tr}(\rho_s^{-1})$$

$$= \mathrm{Tr}(\rho_{s^{-1}}) = \chi(s^{-1}).$$

令 $u = ts$, $v = t^{-1}$. 公式 (iii) 也可以写成 $\chi(vu) = \chi(uv)$. 于是由熟知的对于 V 到自身内的任意两个线性映射 a, b 都成立的公式

$$\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba),$$

立即得到 (iii). □

注记 G 上一个函数 f 叫做一个类函数，如果等式 (iii) 被满足，或者换一个等价的说法就是 $f(uv) = f(vu)$. 我们将在 2.5 中看到，每一个类函数都是特征标的线性组合.

命题 2 令 $\rho^1: G \to \mathbf{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2: G \to \mathbf{GL}(V_2)$ 是 G 的两个线性表示，而 χ_1 和 χ_2 分别是它们的特征标. 那么

(i) 直和表示 $V_1 \oplus V_2$ 的特征标 χ 等于 $\chi_1 + \chi_2$.

(ii) 张量积表示 $V_1 \otimes V_2$ 的特征标 ψ 等于 $\chi_1 \cdot \chi_2$.

设 ρ^1 和 ρ^2 分别由矩阵形式 R_s^1 和 R_s^2 给出. 于是表示 $V_1 \oplus V_2$ 就由矩阵

$$R_s = \begin{pmatrix} R_s^1 & 0 \\ 0 & R_s^2 \end{pmatrix}$$

给出，从而 $\mathrm{Tr}(R_s) = \mathrm{Tr}(R_s^1) + \mathrm{Tr}(R_s^2)$, 即 $\chi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s)$.

对于 (ii) 可以类似地证明：用 1.5 的记法，我们有

$$\chi_1(s) = \sum_{i_1} r_{i_1 i_1}(s), \quad \chi_2(s) = \sum_{i_2} r_{i_2 i_2}(s),$$

$$\psi(s) = \sum_{i_1 i_2} r_{i_1 i_1}(s) r_{i_2 i_2}(s) = \chi_1(s) \cdot \chi_2(s). \qquad \square$$

命题 3 设 $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ 是 G 的一个线性表示，χ 是它的特征标. 令 χ_σ^2 是 V 的对称方 $\mathbf{Sym}^2(V)$ 的特征标，χ_α^2 是交错方 $\mathbf{Alt}^2(V)$ 的特征标(参看 1.5). 对于每一 $s \in G$, 我们有

$$\chi_\sigma^2(s) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 + \chi(s^2)),$$

$$\chi_\alpha^2(s) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 - \chi(s^2)),$$

并且 $\chi_\sigma^2+\chi_\alpha^2=\chi^2$.

令 $s\in G$. 可以如此选取 V 的基 (e_i)，使它由 ρ_s 的特征向量组成；由于 ρ_s 可以用一个酉阵来表示，所以这一点是可以做到的，参看 1.3. 于是有 $\rho_s e_i=\lambda_i e_i$，$\lambda_i\in\mathbf{C}$. 因此

$$\chi(s)=\sum\lambda_i,\quad \chi(s^2)=\sum\lambda_i^2.$$

另一方面，我们有

$$(\rho_s\otimes\rho_s)(e_i\cdot e_j+e_j\cdot e_i)=\lambda_i\lambda_j(e_i\cdot e_j+e_j\cdot e_i),$$
$$(\rho_s\otimes\rho_s)(e_i\cdot e_j-e_j\cdot e_i)=\lambda_i\lambda_j(e_i\cdot e_j-e_j\cdot e_i).$$

所以

$$\chi_\sigma^2(s)=\sum_{i\leqslant j}\lambda_i\lambda_j=\sum\lambda_i^2+\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum\lambda_i\right)^2+\frac{1}{2}\sum\lambda_i^2,$$
$$\chi_\alpha^2(s)=\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\frac{1}{2}\left(\sum\lambda_i\right)^2-\frac{1}{2}\sum\lambda_i^2.$$

命题成立.

（注意等式 $\chi_\sigma^2+\chi_\alpha^2=\chi^2$ 反映了 $V\otimes V$ 是 $\mathbf{Sym}^2(V)$ 与 $\mathbf{Alt}^2(V)$ 的直和这一事实.）□

习　　题

2.1 令 χ 和 χ' 是两个表示的特征标. 证明下列公式:

$$(\chi+\chi')_\sigma^2=\chi_\sigma^2+\chi_\sigma'^2+\chi\chi',$$
$$(\chi+\chi')_\alpha^2=\chi_\alpha^2+\chi_\alpha'^2+\chi\chi'.$$

2.2 令 X 是一个有限集，群 G 作用在 X 上，ρ 是相应的置换表示 [参看 1.2，例 (c)]，χ_X 是 ρ 的特征标. 令 $s\in G$. 证明，$\chi_X(s)$ 是 X 中被 s 所固定的元素的个数.

2.3 令 $\rho: G\to\mathbf{GL}(V)$ 是一个线性表示，特征标为 χ；令 V' 是 V 的对偶空间，即 V 上线性型的空间. 对于 $x\in V$，$x'\in V'$，令 $\langle x,x'\rangle$ 表示线性型 x' 在 x 的值. 证明，存在唯一的线性表示 $\rho': G\to\mathbf{GL}(V')$，使得

$$\langle\rho_s x,\rho_s' x'\rangle=\langle x,x'\rangle,\ 对\ s\in G,\ x\in V,\ x'\in V'.$$

这个表示叫做 ρ 的逆步（或对偶）表示；它的特征标是 χ^*.

2.4 令 $\rho_1: G\to \mathbf{GL}(V_1)$ 和 $\rho_2: G\to \mathbf{GL}(V_2)$ 是两个线性表示，特征标分别是 χ_1 和 χ_2. 令 $W=\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ 是一切线性映射 $f: V_1\to V_2$ 所组成的向量空间. 对于 $s\in G$ 和 $f\in W$，令 $\rho_s f=\rho_{2,s}\circ f\circ \rho_{1,s}^{-1}$；则 $\rho_s f\in W$. 证明，这样定义了一个线性表示 $\rho: G\to \mathbf{GL}(W)$，它的特征标是 $\chi_1^*\cdot\chi_2$. 这个表示与 $\rho_1'\otimes\rho_2$ 同构，这里 ρ_1' 是 ρ_1 的逆步表示(参看习题 2.3).

2.2 Schur 引理. 基本应用

命题 4 (**Schur 引理**). 令 $\rho^1: G\to \mathbf{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2: G\to \mathbf{GL}(V_2)$ 是 G 的两个不可约表示，而 f 是 V_1 到 V_2 内的一个线性映射，使得 $\rho_s^2\circ f=f\circ\rho_s^1$ 对一切 $s\in G$ 成立. 那么

(i) 若 ρ^1 与 ρ^2 不同构，则 $f=0$.

(ii) 若 $V_1=V_2$ 且 $\rho^1=\rho^2$，则 f 是一个位似(即恒等变换的一个纯量倍).

$f=0$ 的情形是明显的. 设 $f\neq 0$ 并且令 W_1 是 f 的核(即 V_1 中一切满足 $fx=0$ 的元素 x 所成的集). 对于 $x\in W_1$，我们有 $f\rho_s^1x=\rho_s^2fx=0$,从而 $\rho_s^1x\in W_1$，即 W_1 在 G 之下稳定. 因为 V_1 不可约,所以 W_1 或者等于 V_1 或者等于 0. 前一情形已经除外,因为否则将有 $f=0$. 同样地可以证明 f 的象 W_2 (一切 fx, $x\in V_1$, 所成的集)等于 V_2. $W_1=0$ 和 $W_2=V_2$ 这两个性质表明，f 是 V_1 到 V_2 上的一个同构,这就证明了论断 (i).

现在设 V_1 等于 V_2，$\rho^1=\rho^2$. 令 λ 是 f 的一个特征值：至少存在一个,因为纯量域是复数域. 置 $f'=f-\lambda$. 因为 λ 是 f 的一个特征值,所以 f' 的核 $\neq 0$；另一方面,我们有 $\rho_s^2\circ f'=f'\circ\rho_s^1$. 证明中的第一部分表明,这个情形仅当 $f'=0$ 时才可能出现,这就是说,$f=\lambda$. □

让我们保留 V_1 和 V_2 是不可约的假设，并且令 g 表示群 G 的阶.

推论 1 令 h 是 V_1 到 V_2 内的一个线性映射. 置

$$h^0=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\rho_t^2)^{-1}h\rho_t^1.$$

那么：

(i) 如果 ρ^1 与 ρ^2 不同构，则 $h^0=0$，

(ii) 如果 $V_1=V_2$ 且 $\rho^1=\rho^2$，则 h^0 是一个位似，位似系数为 $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(h)$，这里 $n=\dim(V_1)$。

我们有 $\rho_s^2h^0=h^0\rho_s^1$。事实上，

$$(\rho_s^2)^{-1}h^0\rho_s^1=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\rho_s^2)^{-1}(\rho_t^2)^{-1}h\rho_t^1\rho_s^1$$

$$=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\rho_{ts}^2)^{-1}h\rho_{ts}^1=h^0.$$

对 $f=h^0$ 应用命题 4，我们看到，在情形 (i)，$h^0=0$，而在情形 (ii)，h^0 等于一个纯量 λ. 再者，对于后一情形，我们有

$$\mathrm{Tr}(h^0)=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\mathrm{Tr}((\rho_t^1)^{-1}h\rho_t^1)=\mathrm{Tr}(h),$$

而由于 $\mathrm{Tr}(\lambda)=n\lambda$，所以 $\lambda=\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(h)$。□

现在假设 ρ^1 和 ρ^2 都由矩阵形式给出：

$$\rho_t^1=(r_{i_1j_1}(t)),\quad \rho_t^2=(r_{i_2j_2}(t)).$$

我们再重新写出推论1. 线性映射 h 由矩阵 $(x_{i_2i_1})$ 给出，而 h^0 由矩阵 $(x_{i_2i_1}^0)$ 给出. 根据 h^0 的定义，我们有

$$x_{i_2i_1}^0=\frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2}r_{i_2j_2}(t^{-1})x_{j_2j_1}r_{j_1i_1}(t).$$

右端是关于 $x_{j_2j_1}$ 的一个线性型. 在情形 (i)，这个线性型对于 $x_{j_2j_1}$ 的每一组值都等于零，所以它的系数都是零. 于是有

推论 2 在情形 (i)，对于一切 i_1, i_2, j_1, j_2，我们有

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G}r_{i_2j_2}(t^{-1})r_{j_1i_1}(t)=0.$$

在情形 (ii)，类似地有 $h^0=\lambda$，即 $x_{i_2i_1}^0=\lambda\delta_{i_2i_1}$（$\delta_{i_2i_1}$ 表示 Kronecker 符号，当 $i_1=i_2$ 时等于 1，在其余情形等于 0），这里 $\lambda=\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(h)$. 这就是说，

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum \delta_{i_2 i_1} x_{i_2 j_1}.$$

因此以下等式成立:

$$\frac{1}{g}\sum_{t, j_1, j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) x_{j_2 i_1} r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j_1, j_2} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} x_{j_2 j_1}.$$

比较两端 $x_{j_2 j_1}$ 的系数,我们得到

推论 3 在情形 (ii), 我们有:

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } i_1 = i_2 \text{ 且 } j_1 = j_2, \\ 0, & \text{在其它情形.} \end{cases}$$

注记

(1) 如果 φ 和 ψ 都是 G 上的函数,令

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \varphi(t^{-1})\psi(t) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \varphi(t)\psi(t^{-1}).$$

那么就有 $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$. 再者, $\langle \varphi, \psi \rangle$ 关于 φ 和 ψ 都是线性的. 利用这个证法,推论 2 和推论 3 分别变成

$$\langle r_{i_1 j_1}, r_{i_2 j_2} \rangle = 0 \text{ 和 } \langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}.$$

(2) 假设矩阵 $(r_{ij}(t))$ 是酉阵 (总可以通过适当选取基而做到这一点, 参看 1.3). 那么就有 $r_{ij}(t^{-1}) = r_{ji}(t)^*$, 而推论 2 和 3 正是关于下一节所定义的内积 $(\varphi|\psi)$ 的正交关系.

2.3 特征标的正交关系

我们先从一个记号开始. 设 φ 和 ψ 是 G 上两个复值函数. 令

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \varphi(t)\psi(t)^*, \quad g \text{ 是 } G \text{ 的阶.}$$

这是一个内积: 它关于 φ 是线性的,关于 ψ 是半线性的,并且对于一切 $\varphi \neq 0$ 来说,都有 $(\varphi|\varphi) > 0$.

如果 $\check{\psi}$ 是由公式 $\check{\psi}(t)=\psi(t^{-1})^*$ 所定义的函数，那么

$$(\varphi|\psi)=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\varphi(t)\check{\psi}(t^{-1})=\langle\varphi,\check{\psi}\rangle,$$

参看 2.2，注记 (1)．特别，如果 χ 是 G 的一个表示的特征标，则 $\check{\chi}=\chi$(命题 1)．于是对于 G 上一切函数 φ 都有 $(\varphi|\chi)=\langle\varphi,\chi\rangle$．因此，当涉及特征标的时候，我们既可以用 $(\varphi|\chi)$，也可以用 $\langle\varphi,\chi\rangle$．

定理 3

(i) 如果 χ 是一个不可约表示的特征标，则 $(\chi|\chi)=1$ (即 χ 的“模是 1”)．

(ii) 如果 χ 和 χ' 是两个不同构的不可约表示的特征标，则 $(\chi|\chi')=0$ (即 χ 与 χ' 正交)．

令 ρ 是一个由矩阵形式 $\rho_t=(r_{ij}(t))$ 给出的不可约表示，χ 是它的特征标．我们有 $\chi(t)=\sum r_{ii}(t)$，因此

$$(\chi|\chi)=\langle\chi,\chi\rangle=\sum_{i,j}\langle r_{ii},r_{jj}\rangle.$$

然而由命题 4 的推论 3，我们有 $\langle r_{ii},r_{jj}\rangle=\delta_{ij}/n$，这里 n 是 ρ 的级．于是

$$(\chi|\chi)=\frac{1}{n}\sum_{i,j}\delta_{ij}=\frac{n}{n}=1,$$

因为指标 i，j 中每一个都取 n 个值．用同样的方法，以推论 2 代替推论 3，可以证明 (ii)．□

注记 一个不可约表示的特征标叫做一个不可约特征标．定理 3 表明，不可约特征标形成一个标准正交系．这个结果以后还要进一步完备化 (2.5，定理 6)．

定理 4 令 V 是 G 的一个线性表示，特征标为 φ，又假定 V 被分解为不可约表示的直和：

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k,$$

设 W 是一个不可约表示，特征标为 χ．那么与 W 同构的 W_i 的个数等于内积 $(\varphi|\chi)=\langle\varphi,\chi\rangle$．

令 χ_i 是 W_i 的特征标．由命题 2，我们有

$$\varphi = \chi_1 + \cdots + \chi_k.$$

因此 $(\varphi|\chi) = (\chi_1|\chi) + \cdots + (\chi_k|\chi)$．然而根据上面的定理，$(\chi_i|\chi)$ 等于 1 或 0，视 W_i 是否同构于 W 而定．于是就得到这个结果．□

推论 1 与 W 同构的 W_i 的个数不依赖于分解的选取．

（这个数目叫做"W 出现在 V 中的重数"，或者叫做"W 包含在 V 中的重数"．）

事实上，$(\varphi|\chi)$ 不依赖于这个分解．□

注记　在这个意义下，可以说一个表示分解为不可约表示的分解是唯一的．我们在 2.6 还将回到这上面来．

推论 2 具有相同特征标的两个表示是同构的．

事实上，推论 1 表明，每一个给定的不可约表示在这两个表示中出现的重数是一样多的．

上述结果将表示的研究归结为它们的特征标的研究．如果 $\chi_1, \cdots, \chi_h$ 是 G 的一切互不相同的不可约特征标[1]，而 $W_1, \cdots, W_h$ 依次是相应的表示，那么每一个表示 V 都与如下的一个直和同构：

$$V = m_1W_1 \oplus \cdots \oplus m_hW_h, \quad m_i \text{ 是整数} \geqslant 0.$$

V 的特征标 φ 等于 $m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h$，并且 $m_i = (\varphi|\chi_i)$．[这一事实显然可以应用到两个不可约表示的张量积 $W_i \otimes W_j$ 上，并且表明乘积 $\chi_i \cdot \chi_j$ 可以分解成 $\chi_i \cdot \chi_j = \sum m_{ij}^k \chi_k$，这里 m_{ij}^k 是非负整数．] 由这些 χ_i 之间的正交关系还推出

$$(\varphi|\varphi) = \sum_{i=1}^{h} m_i^2,$$

从而有

定理 5 如果 φ 是一个表示 V 的特征标，那么 $(\varphi|\varphi)$ 是一个正整数，并且 $(\varphi|\varphi) = 1$ 当且仅当 V 不可约．

---

1) 由定理 3，一个有限群的互不同构的不可约表示的特征标构成有限维酉空间（G 上复值函数所成的空间）的一个正交系，因而互不相同的特征标的个数是有限的．——译者注

事实上，$\sum m_i^2$ 等于 1 当且仅当这些 m_i 中有一个是 1 而其余的都是零，这就是说，当且仅当 V 与某一个 W_i 同构. □

这样我们就得到一个很方便的不可约性判定标准.

习　题

2.5　设 ρ 是一个线性表示，它的特征标为 χ. 证明，ρ 所包含单位表示的重数等于 $(\chi|1)=(1/g)\sum\limits_{s\in G}\chi(s)$.

2.6　令 X 是一个容许 G 作用的有限集，ρ 是相应的置换表示（见 1.2），χ 是 ρ 的特征标.

(a)　X 中一个元素 x 在 G 之下的象集 Gx 叫做一个轨道. 令 c 是不同的轨道的个数. 证明，c 等于 ρ 所包含的单位表示 1 的重数；由此推出 $(\chi|1)=c$. 特别，如果 G 是可迁的（即如果 $c=1$），那么 ρ 可以分解为 $1\oplus\theta$，而 θ 不含单位表示. 如果 ψ 是 θ 的特征标，则 $\chi=1+\psi$，并且 $(\psi|1)=0$.

(b)　设 X 容许 G 的作用. 令 G 按公式 $s(x,y)=(sx,sy)$ 作用在积 $X\times X$ 上. 证明，相应的置换表示的特征标等于 χ^2.

(c)　设 G 可迁地作用在 X 上，并且 X 至少含有两个元素. 我们说，G 是二重可迁的，如果对于任意 $x,y,x',y'\in X$，$x\neq y$，$x'\neq y'$，都存在 $s\in G$ 使得 $x'=sx$，$y'=sy$. 证明下列性质是等价的：

(i)　G 是二重可迁的.

(ii)　G 在 $X\times X$ 上的作用有两个轨道：对角线元素所成的集和其余元素所成的集.

(iii)　$(\chi^2|1)=2$.

(iv)　在 (a) 中所定义的表示 θ 是不可约的. [等价性 (i)⇔(ii) 是明显的；(ii)⇔(iii) 可以由 (a) 和 (b) 得出. 如果 ψ 是 θ 的特征标，我们有 $1+\psi=\chi$ 和 $(1|1)=1$，$(\psi|1)=0$，这就表明 (iii) 与 $(\psi^2|1)=1$ 等价，也就是与 $(1/g)\sum\limits_{s\in G}\psi(s)^2=1$ 等价；因为 ψ 取实数值，这就意味着 θ 不可约，参看定理 5.]

2.4　正则表示的分解

记号　在第二章剩下的部分里，G 的不可约特征标记作 $\chi_1,\cdots,\chi_h$；它们的级依次记作 $n_1,\cdots,n_h$；我们有 $n_i=\chi_i(1)$，参

看命题1.

令R是G的正则表示．我们知道（参看1.2）R有一个基$(e_t)_{t\in G}$，使得$\rho_s e_t = e_{st}$．如果$s\neq 1$，那么对于一切t，$st\neq t$．这就表明，在ρ_s的矩阵中，主对角线上的元素都是0；特别就有$\mathrm{Tr}(\rho_s)=0$．另一方面，当$s=1$时，我们有

$$\mathrm{Tr}(\rho_s)=\mathrm{Tr}(1)=\dim R=g.$$

于是得到

命题5 正则表示的特征标r_G由以下公式给出：

$$r_G(1)=g,\ G\text{的阶};$$
$$r_G(s)=0,\quad s\neq 1.$$

推论1 每一个不可约表示W_i出现在正则表示内的重数等于这个不可约表示的级n_i.

根据定理4，W_i在正则表示中出现的重数等于$\langle r_G, \chi_i\rangle$，并且有

$$\langle r_G, \chi_i\rangle=\frac{1}{g}\sum_{s\in G} r_G(s^{-1})\chi_i(s)$$

$$=\frac{1}{g}\cdot g\cdot \chi_i(1)=\chi_i(1)=n_i. \quad \square$$

推论2

(a) 级n_i满足关系$\sum_{i=1}^{h} n_i^2=g$.

(b) 如果$s\in G$不等于1，则$\sum_{i=1}^{h} n_i\chi_i(s)=0$.

由推论1，对一切$s\in G$，我们有$r_G(s)=\sum n_i\chi_i(s)$．取$s=1$就得到(a)，取$s\neq 1$就得到(b)．□

注记

(1) 上述结果可以用来定出一个群的不可约表示：假设我们已经构造了一些彼此不同构的不可约表示，它们的级分别是n_1，$\cdots$，n_k；这些表示是G的全部不可约表示(确切到同构)的充分且必要条件是$n_1^2+\cdots+n_k^2=g$.

(2) 以后(第二部分，6.5) 我们将会看到级n_i的另一个性质：它们都整除G的阶g.

习　　题

2.7　证明，如果G的一个特征标对于一切$s\neq 1$来说，都取值零，那么它是正则表示r_G的特征标的一个整数倍。

2.5　不可约表示的个数

我们回忆一下（参看 2.1），G上一个函数f叫做一个类函数，如果对于一切$s, t\in G$都有$f(tst^{-1})=f(s)$。

命题 6　令f是G上一个类函数，而$\rho: G\to \mathbf{GL}(V)$是$G$的一个线性表示．令$\rho_f$是如下定义的一个$V$到自身内的线性映射：

$$\rho_f=\sum_{t\in G} f(t)\rho_t.$$

如果V是一个n级不可约表示，特征标为χ，那么ρ_f是一个位似，位似系数λ是：

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t)=\frac{g}{n}(f|\chi^*).$$

计算一下$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s$得：

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s=\sum_{t\in G} f(t)\rho_s^{-1}\rho_t\rho_s=\sum_{t\in G} f(t)\rho_{s^{-1}ts}.$$

令$u=s^{-1}ts$，上式变成：

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s=\sum_{u\in G} f(sus^{-1})\rho_u=\sum_{u\in G} f(u)\rho_u=\rho_f.$$

于是$\rho_f\rho_s=\rho_s\rho_f$。由命题 4 的第二部分，这就表明$\rho_f$是一个位似$\lambda$。$\lambda$的迹是$n\lambda$；而$\rho_f$的迹是：

$$\sum_{t\in G} f(t)\mathrm{Tr}(\rho_t)=\sum_{t\in G} f(t)\chi(t).$$

因此

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t)=\frac{g}{n}(f|\chi^*).\ \square$$

我们现在引入G上类函数所成的空间H；不可约特征标$\chi_1,\cdots,\chi_h$都属于H。

定理 6　特征标$\chi_1,\cdots,\chi_h$组成H的一个标准正交基。

定理 3 表明，这些 χ_i 组成H内的一个标准正交系．只剩下证明它们生成H．为此只需证明H中每一个与一切 χ_i^* 正交的元素都是零．令 f 是这样一个函数．对于G的每一表示 ρ，令 $\rho_f=\sum_{t\in G}f(t)\rho_t$．因为 f 与 χ_i^* 正交，上面的命题 6 指出，当ρ不可约时，ρ_f 等于零；由直和分解得出，ρ_f 永远为零．将这一结论应用到正则表示R上（参看 2.4），并且计算基向量 e_1 在 ρ_f 之下的象，我们有

$$\rho_f e_1=\sum_{t\in G}f(t)\rho_t e_1=\sum_{t\in G}f(t)e_t.$$

因为 ρ_f 等于零，所以 $\rho_f e_1=0$，于是由上面的公式得出，对一切 $t\in G$，$f(t)=0$；所以 $f=0$．定理被证明．□

我们知道，G的两个元素 t 和 t' 说是共轭的，如果存在 $s\in G$ 使得 $t'=sts^{-1}$；这是一个等价关系，这个关系将G划分成类（也叫做共轭类）．

定理 7 G的不可约表示的个数（确切到同构）等于G的共轭类的个数．

令 $C_1,\cdots,C_k$ 是G的一切不同的共轭类．说G上一个函数 f 是一个类函数就相当于说 f 在 $C_1,\cdots,C_k$ 的每一个上都是常数；于是这个函数由它在 C_i 上的值 λ_i 所确定，而这些值是可以任意选取的．因此，类函数所成的空间H的维数等于 k．另一方面，由定理 6，这个维数等于G的不可约表示的个数（确切到同构）．定理被证明．□

下面的命题是定理 6 的另一推论：

命题 7 令 $s\in G$，而 $c(s)$ 表示 s 所在的共轭类中元素的个数．

(a) $\sum_{i=1}^{h}\chi_i(s)^*\chi_i(s)=g/c(s)$．

(b) 如果 t 不与 s 共轭，则 $\sum_{i=1}^{h}\chi_i(s)^*\chi_i(t)=0$．（当 $s=1$ 时，这就是命题 5 的推论 2。）

令 f_s 是这样定义的一个函数，它在 s 的类上等于 1，而在其它的类上等于 0．因为 f_s 是一个类函数，由定理 6，它可以写成

$$f_s = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i, \text{ 而 } \lambda_i = (f_s | \chi_i) = \frac{c(s)}{g} \chi_i(s)^*.$$

于是，对于每一 $t \in G$，我们有

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(t).$$

这样，如果 $t = s$ 就得到(a)；如果 t 不与 s 共轭，就得到(b). □

例 令 G 是三个数码的全体置换群. 这时 $g = 6$，并且有三个类：元素 1，三个对换，以及两个循环置换. 令 t 是一个对换而 c 是一个循环置换. 我们有 $t^2 = 1$，$c^3 = 1$，$tc = c^2t$；这时恰有两个一级特征标：单位特征标 χ_1 和由置换的符号所给出的特征标 χ_2. 定理 7 告诉我们，还存在另外一个不可约特征标 θ；若它的级是 n，那么必须有 $1 + 1 + n^2 = 6$，从而 $n = 2$. θ 的值可以由 $\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ 是 G 的正则表示这一事实得出(参看命题 5). 于是就得到 G 的特征标表：

	1	t	c
χ_1	1	1	1
χ_2	1	−1	1
θ	2	0	−1

利用 G 置换 $\mathbf{C}^3$ 中满足方程 $x + y + z = 0$ 的元素的坐标这一事实，我们得出 G 的一个不可约表示，它的特征标就是 θ (参看习题 2.6 (c)).

2.6 一个表示的典型分解

令 $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ 是 G 的一个线性表示. 我们要定义 V 的一个直和分解，它比分成不可约表示的分解"粗糙"一些，然而它的优点在于唯一性. 这个分解是如下得到的:

令 $\chi_1, \cdots, \chi_h$ 是 G 的一切不同的不可约表示 $W_1, \cdots, W_h$ 的特征标，$n_1, \cdots, n_h$ 依次是这些不可约表示的级. 令 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ 是把 V 分成不可约表示的直和的一个分解. 对于 $i = 1, \cdots, h$，令 V_i 表示 $U_1, \cdots, U_m$ 中与 W_i 同构的那些空间的直和. 显

然我们有:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h.$$

(换句话说,我们已经把V分解成不可约表示的直和,然后再把同构的表示归并在一起.)

这个分解叫做典型分解. 它具有以下性质:

定理 8

(i) 分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$ 不依赖于原来将V分成不可约表示的分解的选取.

(ii) 在这个分解中,V在V_i上的射影p_i由以下公式给出:

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t.$$

我们证明(ii). 论断(i)可以由(ii)推出,因为射影p_i完全确定了V_i. 令

$$q_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t.$$

由命题 6, q_i在一个具有特征标χ的n级不可约表示W上的限制是一个位似,位似系数是$(n_i/n)(\chi_i|\chi)$; 于是当$\chi \neq \chi_i$时,这个系数等于0,当$\chi = \chi_i$时,它等于1. 换句话说,q_i在一个与W_i同构的不可约表示上是恒等映射,而在其余的不可约表示上是0. 注意到V_i的定义,由此得出,q_i在V_i上是恒等映射,当$j \neq i$时,q_i在V_j上是0. 如果我们将元素$x \in V$分解成分量$x_i \in V_i$的和:

$$x = x_1 + \cdots + x_h,$$

那么就有$q_i(x) = q_i(x_1) + \cdots + q_i(x_h) = x_i$. 这就是说,$q_i$等于$V$在$V_i$上的射影$p_i$. □

这样一来,一个表示V的分解可以分两步进行. 首先定出典型分解$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$; 利用射影$p_i$的公式,这一点是容易做到的. 其次,如果需要的话,选取一个将V_i分为不可约表示的直和分解,每一个不可约表示都与W_i同构:

$$V_i = W_i \oplus \cdots \oplus W_i.$$

最后的分解一般可以有无限多种方式(参看 2.7 和下面的习题

2.8); 这种分解的方式恰与一个向量空间中基的选法一样多.

例 取G是由两个元素 $\{1, s\}$, $s^2=1$, 所成的群. 这个群有两个一级不可约表示 W^+ 和 W^-, 对应于 $\rho_s=1$ 和 $\rho_s=-1$. 一个表示V的典型分解是 $V=V^+\oplus V^-$, 这里 V^+ 由V中的对称元素,即满足 $\rho_s x=x$ 的元素 x 所组成, 而 V^-由V中的反对称元素,即满足 $\rho_s x=-x$ 的元素 x 所组成.相应的射影是:

$$p^+x=\frac{1}{2}(x+\rho_s x),\quad p^-x=\frac{1}{2}(x-\rho_s x).$$

将 V^+和 V^-再分解成不可约分支就意味着将这两个空间分解成直线的直和.

习　　题

2.8 令 H_i 是由满足以下条件的线性映射 h: $W_i\to V$ 所成的向量空间: 对一切 $s\in G$, $\rho_s h=h\rho_s$. 每一 $h\in H_i$ 都将 W_i 映入 V_i.

(a) 证明, H_i的维数等于 W_i 在 V 中出现的重数,即等于 $\dim V_i/\dim W_i$. [归结到 $V=W_i$ 的情形并且应用 Schur 引理.]

(b) 令G通过它在 H_i 上的平凡表示和在 W_i 上所给定的表示的张量积而作用在 $H_i\otimes W_i$ 上. 证明,由公式

$$F(\sum h_\alpha\cdot w_\alpha)=\sum h_\alpha(w_\alpha)$$

所定义的映射

$$F: H_i\otimes W_i\to V_i$$

是 $H_i\otimes W_i$ 到 V_i 上的一个同构. [用同样的方法.]

(c) 令 $(h_1,\cdots,h_k)$ 是 H_i 的一个基,同时作直和 $W_i\oplus\cdots\oplus W_i$, 在这里 W_i 重复出现 k 次. $(h_1,\cdots,h_k)$ 通过平凡的方式定义 $W_i\oplus\cdots\oplus W_i$ 到 V_i 内的一个线性映射 h. 证明, h 是表示的一个同构, 并且每一同构都可以这样得到[利用 (b) 或者直接证明]. 特别,将 V_i 分解成与 W_i 同构的表示的直和相当于给 H_i 选取一个基.

2.7 表示的明显分解式

保留前一节的记号. 令

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_h$$

是所给的表示的典型分解．我们已经看到，如何通过相应的射影来确定第 i 个分支 V_i（定理 8）．现在再来给出将 V_i 分解为与 W_i 同构的子表示直和的一种直接构造方法．

设 W_i 由关于基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 的矩阵形式 $(r_{\alpha\beta}(s))$ 给出；我们有 $\chi_i(s)=\sum_\alpha r_{\alpha\alpha}(s)$，而 $n=n_i=\dim W_i$．　对于每一对从 1 到 n 取值的整数 α,β，令 $p_{\alpha\beta}$ 是由公式

$$(*)\qquad p_{\alpha\beta}=\frac{n}{g}\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1})\rho_t$$

所定义的 V 到 V 内的线性映射．

命题 8

(a) 映射 $p_{\alpha\alpha}$ 是一个射影；它在 $V_j, j\neq i$，上是零．它的象 $V_{i,\alpha}$ 包含在 V_i 内，而 V_i 是这些 $V_{i,\alpha}$，$1\leqslant\alpha\leqslant n$，的直和．我们有 $p_i=\sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$．

(b) 线性映射 $p_{\alpha\beta}$ 在 $V_j(j\neq i)$ 上以及在 $V_{i,\gamma}$ $(\gamma\neq\beta)$ 上，都是零．它定义一个由 $V_{i,\beta}$ 到 $V_{i,\alpha}$ 上的同构．

(c) 令 x_1 是 $V_{i,1}$ 的一个非零元素，又令 $x_\alpha=p_{\alpha1}(x_1)\in V_{i,\alpha}$．这些 x_α 线性无关，并且生成一个在 G 之下稳定的 n 维子空间 $W(x_1)$．对于每一 $s\in G$，我们有

$$\rho_s(x_\alpha)=\sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)x_\beta$$

（特别，$W(x_1)$ 与 W_i 同构）．

(d) 如果 $(x_1^{(1)},\cdots,x_1^{(m)})$ 是 $V_{i,1}$ 的一个基，那么表示 V_i 是在 (c) 中所定义的子表示 $W(x_1^{(1)}),\cdots,W(x_1^{(m)})$ 的直和．

（这样，每选取 $V_{i,1}$ 的一个基就给出一个将 V_i 分成与 W_i 同构的表示的直和分解．）

首先注意，上面的公式 $(*)$ 使得我们可以在 G 的任意表示里定义 $p_{\alpha\beta}$，特别可以在不可约表示 W_i 里来定义．对于 W_i，我们有

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma)=\frac{n}{g}\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1})\rho_t(e_\gamma)=\frac{n}{g}\sum_\delta\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1})r_{\delta\gamma}(t)e_\delta.$$

由命题 4 的推论 3，我们有

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma)=\begin{cases}e_\alpha, & 若\ \gamma=\beta,\\ 0, & 在其它情形.\end{cases}$$

由此得出 $\sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$ 是 W_i 的恒等映射，并且有

$$p_{\alpha\beta}\circ p_{\gamma\delta}=\begin{cases}p_{\alpha\delta}, & 若\ \beta=\gamma,\\ 0, & 在其它情形,\end{cases}$$

$$\rho_s\circ p_{\alpha\gamma}=\sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)p_{\beta\gamma}.$$

如果 $j\neq i$，我们对 W_j 应用命题 4 的推论 2，用同样的证法可以证明一切 $p_{\alpha\beta}$ 都是零.

这样做了以后，我们将 V 分解为与 W_i 同构的子表示的直和，并且对每一子表示应用上面的论述. 由此就得出 (a) 和 (b)；而且上面的公式在 V 中也成立. 在 (c) 的前提下，我们有

$$\rho_s(x_\alpha)=\rho_s\circ p_{\alpha1}(x_1)=\sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)p_{\beta1}(x_1)$$

$$=\sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)x_\beta,$$

这就证明了 (c). 最后，由 (a)，(b) 和 (c) 就可以得出 (d). □

习　　题

2.9　令 H_i 是满足条件 $h\circ\rho_s=\rho_s\circ h$ 的线性映射 $h:W_i\to V$ 所成的向量空间(参看习题 2.8). 证明，映射 $h\mapsto h(e_\alpha)$ 是 H_i 到 $V_{i,\alpha}$ 上的同构.

2.10　设 $x\in V_i$. 令 $V(x)$ 是 V 中包含 x 的最小子表示；令 x_α^i 是 x 在 $p_{1\alpha}$ 之下的象. 证明，$V(x)$ 是表示 $W(x_\alpha^i)$ 的和，$\alpha=1,\cdots,n$. 由此推出，$V(x)$ 是至多 n 个与 W_i 同构的子表示的直和.

第三章　子群．群的积．诱导表示

以下所讨论的群都假定是有限群。

3.1 Abel 子群

令G是一个群．如果对于一切$s,t\in G$，都有$st=ts$，那么就称G是一个 Abel 群(或交换群)．这相当于说G的每一共轭类只含一个元素，也就是说，G上每一个函数都是类函数．这种群的线性表示特别简单：

定理 9　下列性质是等价的：

(i)　G是一个 Abel 群．

(ii)　G的一切不可约表示都是一级的．

令g是G的阶，而$(n_1,\cdots,n_h)$是G的一切互不相同的不可约表示的级．由第二章知道，h是G的共轭类的个数，并且$g=n_1^2+\cdots+n_h^2$．因此，g等于h必要且只要一切n_i都等于1．定理被证明．□

推论　令A是G的一个 Abel 子群，a是A的阶，g是G的阶．那么G的每一不可约表示的级$\leqslant g/a$．

(g/a 就是A在G中的指数．)

令$\rho: G\to \mathbf{GL}(V)$是$G$的一个不可约表示．它在子群$A$上的限制定义了$A$的一个表示$\rho_A: A\to\mathbf{GL}(V)$．令$W\subseteq V$是$\rho_A$的一个不可约表示．由定理 9，我们有$\dim(W)=1$．令$V'$是由$W$的象$\rho_sW$所生成的$V$的子空间，这里$s$遍历$G$．显然$V'$在$G$之下稳定．因为$\rho$不可约，所以$V'=V$．然而对于$s\in G$和$t\in A$，我们有

$$\rho_{st}W=\rho_s\rho_tW=\rho_sW.$$

由此推出，互不相同的ρ_sW的个数至多等于g/a；又因为V是这些

$\rho_s W$ 的和，于是就得出所要求的不等式 $\dim(V) \leqslant g/a$. □

例 一个二面体群含有一个指数为 2 的循环子群. 因此它的不可约表示的级只能是 1 或 2. 我们以后（5.3）将定出这些不可约表示.

习 题

3.1 利用 Schur 引理直接证明，一个(有限或无限) Abel 群的每一不可约表示都是一级的.

3.2 令 ρ 是群 G 的一个 n 级不可约表示，特征标为 χ; 令 C 是 G 的中心(即一切这样的 $s\in G$ 所成的集: 对于任意 $t\in G$ 都有 $st=ts$)，而 c 是 C 的阶.

(a) 证明，对于每一 $s\in C$, ρ_s 是一个位似. [利用 Schur 引理.] 由此推出，对于一切 $s\in C$ 都有 $|\chi(s)|=n$.

(b) 证明不等式 $n^2\leqslant g/c$. [结合着 (a)，利用公式 $\sum\limits_{s\in G}|\chi(s)|^2=g$.]

(c) 证明，如果 ρ 是忠实的(即对于 $s\neq 1$ 都有 $\rho_s\neq 1$)，则 C 是一个循环群.

3.3 令 G 是一个阶为 g 的 Abel 群，$\hat{G}$ 是 G 的一切不可约特征标所成的集. 如果 χ_1,χ_2 属于 $\hat{G}$，则乘积 $\chi_1\chi_2$ 也属于 $\hat{G}$. 证明，$\hat{G}$ 作成一个阶为 g 的 Abel 群; 群 $\hat{G}$ 叫做 G 的对偶群. 对于 $x\in G$，映射 $\chi\mapsto\chi(x)$ 是 $\hat{G}$ 的一个不可约特征标，因而是 $\hat{G}$ 的对偶群 $\hat{\hat{G}}$ 的一个元素. 证明，这样得到的 G 到 $\hat{\hat{G}}$ 内的映射是一个同态单射; 由此得出(比较这两个群的阶)，这个映射是一个同构.

3.2 两个群的积

设 G_1 和 G_2 是两个群，$G_1\times G_2$ 是它们的集合积，即一切元素对 (s_1,s_2), $s_1\in G_1$, $s_2\in G_2$，所成的集合. 规定

$$(s_1,s_2)(t_1,t_2)=(s_1t_1,s_2t_2).$$

这样就在 $G_1\times G_2$ 上定义了一个群结构. 对于这个群结构来说，$G_1\times G_2$ 叫做 G_1 与 G_2 的积. 如果 G_1 的阶是 g_1，G_2 的阶是 g_2，那么 $G_1\times G_2$ 的阶是 g_1g_2. 群 G_1 可以与 $G_1\times G_2$ 中由元素 $(s_1,1)$，s_1 遍历 G_1，所成的子群等同起来; 同样，G_2 也可以与 $G_1\times G_2$ 的一个子群等同起来. 在这样的等同意义下，G_1 的每一元素与 G_2 的

每一元素可交换.

反之,令 G 是一个群,它包含 G_1 和 G_2 作为子群,并且假定下列条件被满足:

(i) 每一元素 $s \in G$ 可以唯一地写成 $s = s_1 s_2$,这里 $s_1 \in G_1$,$s_2 \in G_2$.

(ii) 对于 $s_1 \in G_1$,$s_2 \in G_2$,我们有 $s_1 s_2 = s_2 s_1$.

于是两个元素 $s = s_1 s_2$,$t = t_1 t_2$ 的乘积就可以写成

$$st = s_1 s_2 t_1 t_2 = (s_1 t_1)(s_2 t_2).$$

因此,如果对于 $(s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$,令 G 中元素 $s_1 s_2$ 与它对应,我们就得到 $G_1 \times G_2$ 到 G 上的一个同构映射.在这种情况下,我们也称 G 是子群 G_1 与 G_2 的积(或直积),并且将 G 与 $G_1 \times G_2$ 等同看待.

现在令 $\rho^1: G_1 \to \boldsymbol{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2: G_2 \to \boldsymbol{GL}(V_2)$ 分别是 G_1 和 G_2 的线性表示.我们通过与 1.5 类似的步骤来定义 $G_1 \times G_2$ 到 $V_1 \otimes V_2$ 内的线性表示 $\rho^1 \otimes \rho^2$.规定

$$(\rho^1 \otimes \rho^2)(s_1, s_2) = \rho^1(s_1) \otimes \rho^2(s_2).$$

这个表示叫做 ρ^1 与 ρ^2 的张量积.如果 χ_i 是 ρ^i 的特征标 $(i = 1, 2)$,那么 $\rho^1 \otimes \rho^2$ 的特征标 χ 就由公式

$$\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1) \cdot \chi_2(s_2)$$

给出.

当 G_1 和 G_2 都等于同一个群 G 时,如上定义的表示 $\rho^1 \otimes \rho^2$ 是 $G \times G$ 的一个表示.如果将这个表示限制到 $G \times G$ 的对角线子群(即由 (s, s),s 遍历 G,所成的子群)上,就得到在 1.5 中记作 $\rho^1 \otimes \rho^2$ 的 G 的表示;尽管在记法上一样,但是区别开这两个表示是重要的.

定理 10

(i) 如果 ρ^1 和 ρ^2 都是不可约的,则 $\rho^1 \otimes \rho^2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的一个不可约表示.

(ii) $G_1 \times G_2$ 的每一不可约表示都同构于某一表示 $\rho^1 \otimes \rho^2$,这里 ρ^i 是 G_i 的一个不可约表示.

如果 ρ^1 和 ρ^2 不可约,那么就有(参看 2.3):

$$\frac{1}{g_1}\sum_{s_1\in G_1}|\chi_1(s_1)|^2=1,$$

$$\frac{1}{g_2}\sum_{s_2\in G_2}|\chi_2(s_2)|^2=1,$$

这里 g_i 表示 G_i 的阶 $(i=1,2)$. 将这两个等式相乘，就得到：

$$\frac{1}{g}\sum_{s_1,s_2}|\chi(s_1,s_2)|^2=1,\ g\text{ 是 }G\text{ 的阶.}$$

这就证明了 $\rho^1\otimes\rho^2$ 是不可约的（定理 5）. 为了证明 (ii)，只需证明，$G_1\times G_2$ 的每一个与形如 $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$ 的特征标正交的类函数 f 都等于零. 假定有

$$\sum_{s_1,s_2}f(s_1,s_2)\chi_1(s_1)^*\chi_2(s_2)^*=0.$$

固定 χ_2 而令 $g(s_1)=\sum_{s_2}f(s_1,s_2)\chi_2(s_2)^*$，那么对于一切 χ_1，我们有

$$\sum_{s_1}g(s_1)\chi_1(s_1)^*=0.$$

因为 g 是一个类函数，由此得出 $g=0$；因为对于每一 χ_2 都有同样的结论，所以根据同样的论证就得出 $f(s_1,s_2)=0$. □

[也可以通过计算这些不可约表示 $\rho^1\otimes\rho^2$ 的级的平方和，再应用 2.4 来证明 (ii).]

上面的定理将 $G_1\times G_2$ 的表示的研究完全归结为 G_1 的表示和 G_2 的表示的研究.

3.3 诱导表示

一个子群的左陪集.

回忆以下的定义：令 H 是群 G 的一个子群. 对于 $s\in G$，令 sH 表示一切乘积 st，$t\in H$，所成的集合；sH 叫做 H 的含 s 的左陪集. G 的两个元素 s 和 s' 说是模 H 同余的，如果它们属于同一个左陪集，也就是说，如果 $s^{-1}s'$ 属于 H；这时就写作 $s'\equiv s(\mathrm{mod}H)$. 一切左陪集所成的集合记作 G/H；它是 G 的一个分类. 如果 G 有 g 个元素而 H 有 h 个元素，则 G/H 含有 g/h 个元素. 整数 g/h

叫做H在G中的**指数**,并且记作$(G:H)$.

如果从H的每一个左陪集中选出一个元素，我们就得到G的一个子集R，叫做G/H的一个**代表系**；G中每一元素s可以唯一地写成$s=rt$的形式，$r\in R$，$t\in H$.

诱导表示的定义

令$\rho:G\to \mathbf{GL}(V)$是G的一个线性表示,令ρ_H是ρ在H上的限制. 设W是ρ_H的一个子表示；即W是V的一个子空间,并且在ρ_t，$t\in H$，之下稳定. 令$\theta:H\to \mathbf{GL}(W)$是这样定义的$H$在$W$内的表示. 对于$s\in G$，向量空间$\rho_s W$只依赖于$s$所在的左陪集$sH$. 事实上，用$st$，$t\in H$，代替$s$，因为$\rho_t W=W$，我们有$\rho_{st}W=\rho_s\rho_t W=\rho_s W$. 这样一来，如果$\sigma$是$H$的一个左陪集，我们可以定义$V$的一个子空间$W_\sigma$为$\rho_s W$，这里$s$是$\sigma$中任意元素. 显然,$\rho_s$,$s\in G$,引起这些$W_\sigma$的一个置换. 因此,这些$W_\sigma$的和$\sum_{\sigma\in G/H}W_\sigma$是$V$的一个子表示.

定义 **我们说G在V内的表示ρ是由H在W内的表示θ所诱导的,如果V等于一切$W_\sigma(\sigma\in G/H)$的和，并且这个和是直和，即**$V=\bigoplus_{\sigma\in G/H}W_\sigma$.

我们可以把这个条件用另外几种方式来表述:

(i) 每一$x\in V$可以唯一地写成

$$x=\sum_{\sigma\in G/H}x_\sigma,$$

这里$x_\sigma\in W_\sigma$.

(ii) 如果R是G/H的一个代表系,那么向量空间V是$\rho_r W$，$r\in R$，的直和.

特别,我们有

$$\dim(V)=\sum_{r\in R}\dim(\rho_r W)=(G:H)\cdot\dim W.$$

例 1 取V是G的正则表示;空间V有一个基$(e_t)_{t\in G}$,使得对一切$s\in G$，$t\in G$，$\rho_s e_t=e_{st}$. 令W是V中以$(e_t)_{t\in H}$为基的子

空间．H在W内的表示θ就是H的正则表示．显然ρ由θ诱导．

例 2 取V是一个向量空间，它有一个基(e_σ)，这里作为指标的σ遍历G/H的一切元素．如下地定义G在V内的一个表示ρ：对于$s\in G$，$\sigma\in G/H$，规定$\rho_s e_\sigma=e_{s\sigma}$（这个公式有意义，因为如果$\sigma$是$H$的一个左陪集，则$s\sigma$也是$H$的一个左陪集）．这样就得到$G$的一个表示，它就是$G$关于$G/H$的置换表示［参看 1.2，例(c)］．对应于陪集$H$的向量$e_H$在$H$之下不变；于是$H$在子空间$\mathbf{C}e_H$内的表示就是$H$的单位表示．显然这个表示诱导出$G$在$V$内的表示$\rho$．

例 3 如果ρ_1由θ_1诱导而ρ_2由θ_2诱导，那么$\rho_1\oplus\rho_2$由$\theta_1\oplus\theta_2$诱导．

例 4 如果(V,ρ)由(W,θ)诱导而W_1是W的一个不变子空间，那么V的子空间$V_1=\sum\limits_{r\in R}\rho_r W_1$在$G$之下稳定，并且$G$在$V_1$内的表示是由$H$在$W_1$内的表示所诱导的．

例 5 如果ρ由θ诱导，ρ'是G的一个表示，并且ρ'_H是ρ'在H上的限制，则$\rho\otimes\rho'$是由$\theta\otimes\rho'_H$所诱导的．

诱导表示的存在和唯一性

引理 1 设(V,ρ)是由(W,θ)所诱导的表示．令$\rho':G\to \mathbf{GL}(V')$是$G$的一个线性表示，而$f:W\to V'$是一个线性映射，使得对于一切$t\in H$，$w\in W$都有$f(\theta_t w)=\rho'_t f(w)$．那么存在唯一的线性映射$F:V\to V'$，它是$f$的一个开拓，并且对于一切$s\in G$，$F\circ\rho_s=\rho'_s\circ F$．

设F满足这些条件．如果$x\in\rho_s W$，那么$\rho_s^{-1}x\in W$；于是

$$F(x)=F(\rho_s\rho_s^{-1}x)=\rho'_s F(\rho_s^{-1}x)=\rho'_s f(\rho_s^{-1}x).$$

这个公式在$\rho_s W$上确定了F．因为V是这些$\rho_s W$的直和，所以在整个V上确定了F．这就证明了F的唯一性．

现在令$x\in W_\sigma$，并且选取$s\in\sigma$．我们如上地利用公式$F(x)=\rho'_s f(\rho_s^{-1}x)$来定义$F(x)$．这个定义不依赖于$s$在$\sigma$中的选取．事实上，如果对于$t\in H$，以$st$代替$s$，那么

$$\rho'_{st}f(\rho_{st}^{-1}x)=\rho'_s\rho'_t f(\theta_t^{-1}\rho_s^{-1}x)=\rho'_s f(\theta_t\theta_t^{-1}\rho_s^{-1}x)=\rho'_s f(\rho_s^{-1}x).$$

因为 V 是 W_σ 的直和，所以存在唯一的线性映射 $F: V \to V'$，它是定义在每一个 W_σ 上的那些线性映射的开拓．容易验证，对一切 $s \in G$，$F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$．□

定理 11　令 (W, θ) 是 H 的一个线性表示．存在 G 的一个线性表示 (V, ρ)，它是由 (W, θ) 所诱导的表示，并且确切到同构，这个表示是唯一的．

首先证明诱导表示 ρ 的存在．注意到上面的例 3，我们总可以假定 θ 是不可约的．这时 θ 与 H 的正则表示的一个子表示同构，而 H 的正则表示可以诱导出 G 的正则表示（参看例 1）．再利用例 4，θ 本身可以诱导出 G 的一个表示．

剩下来只要证明，确切到同构，ρ 是唯一的．令 (V, ρ) 和 (V', ρ') 是由 (W, θ) 所诱导的两个表示．对 W 到 V' 的内射应用引理 1，那么存在一个线性映射 $F: V \to V'$，它在 W 上的限制是恒等映射，并且对一切 $s \in G$，$F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$．由此得出，$F$ 的象包含一切 $\rho'_s W$，从而等于 V'．因为 V 和 V' 有相同的维数 $(G:H) \dim W$，所以 F 是一个同构．定理被证明．（关于定理 11 的一个更为自然的证明可参看 7.1.）□

诱导表示的特征标

设 (V, ρ) 是由 (W, θ) 所诱导的表示，令 χ_ρ 和 χ_θ 分别是 G 和 H 相应的特征标．因为确切到同构，(V, ρ) 是由 (W, θ) 完全确定的，所以应该能够从 χ_θ 来计算 χ_ρ．下面的定理告诉我们如何去计算：

定理 12　令 h 是子群 H 的阶，R 是 G/H 的一个代表系．对于每一 $u \in G$，我们有

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \chi_\theta(r^{-1}ur) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}us \in H}} \chi_\theta(s^{-1}us).$$

（特别，$\chi_\rho(u)$ 是 χ_θ 在 H 与 u 在 G 中共轭类的交上所取的值的线性组合．）

空间 V 是 $\rho_r W$ 的直和，$r \in R$；ρ_u 引起这些 $\rho_r W$ 的一个置换．确切地说，如果我们把 ur 写成 $r_u t$，这里 $r_u \in R$，$t \in H$，那么

ρ_u 将 $\rho_r W$ 变到 $\rho_{r_u} W$. 为了确定 $\chi_\rho(u) = \mathrm{Tr}_V(\rho_u)$, 我们可以将这些 $\rho_r W$ 的基合并在一起凑成 V 的基. 对于指标 r, 如果 $r \neq r_u$, 那么对角线上的元素是零; 在其它的情形, 就给出 ρ_u 在 $\rho_r W$ 上的迹. 于是就得到

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in R_u} \mathrm{Tr}_{\rho_r W}(\rho_{u,r}),$$

这里 R_u 表示 R 中满足条件 $r_u = r$ 的元素 r 所成的集, 而 $\rho_{u,r}$ 是 ρ_u 在 $\rho_r W$ 上的限制. 注意 r 属于 R_u 必要且只要 ur 可以写成 rt 的形式, $t \in H$, 这就相当于 $r^{-1}ur \in H$.

剩下来就是要计算 $\mathrm{Tr}_{\rho_r W}(\rho_{u,r})$, $r \in R_u$. 注意 ρ_r 定义了一个 W 到 $\rho_r W$ 上的同构, 因而我们有

$$\rho_r \circ \theta_t = \rho_{u,r} \circ \rho_r, \text{ 这里 } t = r^{-1}ur \in H.$$

这样一来, $\rho_{u,r}$ 的迹等于 θ_t 的迹, 即等于 $\chi_\theta(t) = \chi_\theta(r^{-1}ur)$.
于是我们得到

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in R_u} \chi_\theta(r^{-1}ur).$$

只要注意到 G 在左陪集 $rH(r \in R_u)$ 内的一切元素 s 都满足等式 $\chi_\theta(s^{-1}us) = \chi_\theta(r^{-1}ur)$, 那么关于 $\chi_\rho(u)$ 的第二个公式就可以由第一个公式推出. □

在本书的第二部分里, 读者将能找到关于诱导表示的另外一些性质. 主要有

(i) Frobenius **互反公式**

$$(f_H | \chi_\theta)_H = (f | \chi_\rho)_G,$$

这里 f 是 G 上一个类函数, 而 f_H 是 f 在 H 上的限制, 两边的内积各在 H 和 G 上计算.

(ii) Mackey **判定**, 它告诉我们一个诱导表示在什么时候是不可约的.

(iii) Artin **定理**和 Brauer **定理**: 前一个定理是说, 群 G 的每一个特征标是由 G 的循环子群所诱导的表示的特征标的有理系数线性组合; 后一个定理是说, 群 G 的每一个特征标是由 G 的"初等"子群所诱导的表示的特征标的整系数线性组合.

习　　题

3.4　证明，G的每一个不可约表示都包含在H的一个不可约表示所诱导的表示内。[利用每一不可约表示都包含在正则表示内的事实.]由此得出定理9的推论的另一证明。

3.5　令(W,θ)是H的一个线性表示。令V是由一切满足以下条件的函数$f:G\to W$所成的向量空间：对于$u\in G,t\in H,f(tu)=\theta_t f(u)$。令$\rho$是如下定义的$G$在$V$内的一个表示：对于$s,u\in G,(\rho_s f)(u)=f(us)$。对于$w\in W$，再定义$f_w\in V$如下：对于$s\in H$，定义$f_w(s)=\theta_s w$,对于$s\notin H$，定义$f_w(s)=0$。证明，$w\mapsto f_w$是$W$到$V$的子空间$W_0$上的一个同构，这里$W_0$由一切在$H$之外取零值的函数所组成。证明，如果将$W$与$W_0$按这个方式等同起来，那么表示$(V,\rho)$就是由表示$(W,\theta)$所诱导的表示。

3.6　设G是子群H与K的直积(参看 3.2)。令ρ是G的一个表示，它是由H的一个表示θ所诱导的。证明，ρ与$\theta\otimes r_K$同构，这里r_K是K的正则表示。

第四章　紧　　群

这一章的目的是要指出以前的结果如何过渡到任意紧群（不一定有限）上去；至于证明，可看文献中的[1]，[4]，[6]．

下面的结果，除了在例 5.2，5.5 和 5.6 外，以后都用不到．

4.1　紧群

一个拓扑群 G 是一个群，它容有一个拓扑结构，使得乘积 st 和逆 s^{-1} 都是连续的．如果这样一个群的拓扑是一个紧空间的拓扑，即满足 Borel-Lebesgue 定理，那么就称这个群是紧的．例如，在二维（或三维，…）欧氏空间里绕一点的转动所成的群具有一个自然拓扑，使得这个群是紧群；它的闭子群也是紧群．

由平移 $x \mapsto x+a$ 所成的群，和保持二次型 $x^2+y^2+z^2-t^2$ 不变的线性映射所成的群（Lorentz 群）可以作为非紧群的例子．这些群的线性表示具有与紧群的线性表示完全不同的性质．

4.2　紧群上的不变测度

在研究一个阶为 g 的有限群 G 的线性表示时，我们曾多次使用在 G 上求平均的运算，这就是对于 G 上每一个函数 f，令一个元素 $(1/g)\sum_{t\in G} f(t)$ 与它对应（f 的值可以是复数，或者更一般地，是一个向量空间的元素）．对于紧群来说，也存在类似的运算；自然，代替有限和是关于一个测度 dt 的积分 $\int_G f(t)\,dt$．

更确切地说，可以证明，在 G 中具有下列两个性质的测度 dt 的存在和唯一性：

(i)　对于每一连续函数 f 和每一 $s\in G$，

$$\int_G f(t)\,dt=\int_G f(ts)\,dt$$

(dt 在右平移之下的不变性).

(ii) $\int_G f(t)dt = 1$ (dt 的全质量等于 1).

还可以进一步证明，dt 在左平移之下不变，即:

(i)′ $\int_G f(t)dt = \int_G f(st)dt$.

测度 dt 叫做群 G 的不变测度 (或 Haar 测度). 我们给出两个例子(也见第五章):

(1) 设 G 是一个阶为 g 的有限群. 对于每一元素 $t \in G$，都对应着一个质量 $1/g$，就得到测度 dt.

(2) 设 G 是平面内的旋转群 C_∞. 如果将元素 $t \in G$ 写成 $t = e^{i\alpha}$ (α 按以 2π 为模来取)，那么不变测度是 $(1/2\pi)d\alpha$; 因子 $1/2\pi$ 用以保证条件 (ii).

4.3 紧群的线性表示

令 G 是一个紧群，V 是复数域上一个有限维向量空间. G 在 V 内的一个线性表示是一个同态 $\rho: G \to \boldsymbol{GL}(V)$，并且这个同态是连续的. 这个条件相当于说 $\rho_s x$ 是两个变量 $s \in G$，$x \in V$ 的连续函数. 类似地可以定义 G 在一个 Hilbert 空间内的线性表示;并且可以证明,这样一个表示同构于有限维酉表示的一个 (Hilbert) 直和. 这样,我们可以只限于考虑后者.

有限群表示的大多数性质都可以过渡到紧群的表示上来，只要把表达式"$(1/g)\sum_{t \in G} f(t)$"换成"$\int_G f(t)dt$"即可. 例如,两个函数 φ 与 ψ 的内积 $(\varphi|\psi)$ 是

$$(\varphi|\psi) = \int_G \varphi(t)\psi(t)^* dt.$$

更确切地说:

(a) 定理 1, 2, 3, 4 和 5 连同它们的证明都可以不加改变地转移过来. 命题 1, 2, 3, 4 也同样成立.

(b) 在 2.4 里，需要将正则表示 R 定义为 G 上一切平方可和

函数所成的 Hilbert 空间，群 G 在它上面的作用为

$$(\rho_s f)(t) = f(s^{-1}t).$$

如果 G 不是有限群，这个表示是无限维的，这时不再能够谈论它的特征标，因此命题 5 不再有意义．然而，每一个不可约表示都包含在 R 内，它的重数等于它的级这一事实依然成立．

(c) 命题 6 和定理 6 都可以不加改变地转移过来(在定理 6 里，取 H 是 G 上平方可和函数所成的 Hilbert 空间)．

(d) 当 G 不是有限群时，定理 7 依然成立(但意义不大：有无限多个类和无限多个不可约表示)．

(e) 定理 8 和命题 8 连同它们的证明都可以不加改变地转移过来．典型分解(定理 8)的射影 p_i 由公式

$$p_i x = n_i \int_G \chi_i(t)^* \rho_t x\, dt$$

给出．

(f) 定理 9 和定理 10 都可以连同证明一起无改变地转移过来．注意，在定理 10 里，乘积 $G_1 \times G_2$ 的不变测度是群 G_1 和 G_2 的不变测度的乘积 $ds_1 ds_2$．

(g) 只要 H 是 G 中一个具有有限指数的闭子群，如同在 3.3 里所定义的由 H 的一个表示所诱导的 G 的表示的概念，以及定理 11 和定理 12 都成立．当 H 的指数无限时，由 (W, θ) 所诱导的表示定义为 G 上这样的平方可和函数 f 所成的 Hilbert 空间：f 在 W 中取值，并且对于一切 $t \in H$，$f(tu) = \theta_t f(u)$，而 G 在这个空间的作用是 $\rho_s f(u) = f(us)$，参看习题 3.5．

第五章　例　子

5.1　循环群 C_n

这是由一个元素 r 的幂 $1, r, \cdots, r^{n-1}$ 所成的 n 阶群，这里 $r^n = 1$. 这样一个群可以作为绕一个轴旋转 $2k\pi/n$ 角的旋转所成的群来实现. 它是一个 Abel 群.

根据定理 9，C_n 的不可约表示都是一级的. 这样一个表示使一个复数 $\chi(r) = w$ 与 r 对应，数 $\chi(r^k) = w^k$ 与 r^k 对应；因为 $r^n = 1$，所以 $w^n = 1$，这就是说，$w = e^{2\pi ih/n}$，$h = 0, 1, \cdots, n-1$. 这样一来，我们就得出 n 个一级不可约表示，它们的特征标 $\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{n-1}$ 由

$$\chi_h(r^k) = e^{2\pi ihk/n}$$

给出. 我们有 $\chi_h \cdot \chi_{h'} = \chi_{h+h'}$，按照通常的规定，如果 $h + h' \geqslant n$，则 $\chi_{h+h'} = \chi_{h+h'-n}$（换句话说，$\chi_h$ 的指标 h 要以 n 为模来取）.

例如，对于 $n = 3$，特征标表如下：

	1	r	r^2
χ_0	1	1	1
χ_1	1	w	w^2
χ_2	1	w^2	w

这里

$$w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

我们有

$$\chi_0 \cdot \chi_i = \chi_i \ (i = 0, 1, 2),$$

$$\chi_1 \cdot \chi_1 = \chi_2, \quad \chi_2 \cdot \chi_2 = \chi_1, \quad \chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_0.$$

5.2　群 C_∞

这是平面的旋转群. 如果用 r_α 表示旋转角 α 的旋转（模 2π），

那么 C_∞ 的不变测度是 $(1/2\pi)d\alpha$（参看 4.2）.

C_∞ 的不可约表示都是一级的，它们由

$$\chi_n(r_\alpha)=e^{in\alpha}\quad (n\text{ 是任意整数})$$

给出. 正交关系在这里就是熟知的公式：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\alpha}\cdot e^{-im\alpha}d\alpha=\delta_{nm},$$

而定理 6 给出了一个周期函数的 Fourier 展开.

5.3 二面体群 D_n

这是平面上保持一个具有 n 个顶点的正多边形不变的旋转和反射所成的群. 它含有 n 个旋转，这些旋转作成一个与 C_n 同构的子群；又含有 n 个反射. 这个群的阶是 $2n$. 如果用 r 表示旋转 $2\pi/n$ 角的旋转，用 s 表示任意一个反射，那么就有

$$r^n=1,\ s^2=1,\ srs=r^{-1}.$$

D_n 的每一元素或者可以唯一地写成 r^k 的形式，$0\leqslant k\leqslant n-1$（如果这个元素属于 C_n），或者被唯一地写成 sr^k 的形式，$0\leqslant k\leqslant n-1$（如果它不属于 C_n）. 注意由 $srs=r^{-1}$ 可以推出，$sr^ks=r^{-k}$，从而 $(sr^k)^2=1$.

D_n 作为三维空间刚性运动的群来实现.

可以有几种实现的方法：

(a) 通常的实现方法（D_n 的传统记法，参看 Eyring [5]）. 作为旋转，取绕 Oz 轴的旋转；作为反射，取对于 Oxy 平面上经过原点的 n 条直线的反射，这些直线的夹角是 π/n 的倍数.

(b) 通过群 C_{nv}（Eyring [5] 的记法）来实现：取对于包含 Oz 轴的平面的反射来代替对于 Oxy 平面上直线的反射.

(c) 群 D_{2n} 也可以作为群 D_{nd}（Eyring [5] 的记法）来实现.

群 $D_n(n\geqslant 2$ 偶数) 的不可约表示.

首先，令 ± 1 按一切可能的方式与 r 和 s 对应，这样就得到四个一级表示. 它们的特征标 ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 由下面的表给出：

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

我们再来考虑二级表示. 令 $w = e^{2\pi i/n}$ 并且令 h 是任意整数. 我们如下地定义 D_n 的一个表示 ρ^h:

$$\rho^h(r^k) = \begin{pmatrix} w^{hk} & 0 \\ 0 & w^{-hk} \end{pmatrix}, \quad \rho^h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-hk} \\ w^{hk} & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算证实这的确是一个表示. 它是由 C_n 的特征标为 χ_h 的表示 (5.1) 所诱导的表示(在 3.3 的意义下). 这个表示只依赖于 $h \pmod n$ 的剩余类;再者, ρ^h 和 ρ^{n-h} 是同构的. 因此我们可以假设 $0 \leqslant h \leqslant n/2$. 两个极端的情形 $h=0$ 和 $h = n/2$ 是没有什么趣味的: 这时相应的表示是可约的,特征标分别为 $\psi_1 + \psi_2$ 和 $\psi_3 + \psi_4$. 另一方面, 对于 $0 < h < n/2$, 表示 ρ^h 是不可约的: 因为 $w^h \neq w^{-h}$, 在 $\rho^h(r)$ 之下稳定的直线只有坐标轴,但它们在 $\rho^h(s)$ 之下不保持稳定. 同样的理由表明这些表示互不同构, 相应的特征标 χ_h 如下地给出:

$$\chi_h(r^k) = w^{hk} + w^{-hk} = 2\cos\frac{2\pi hk}{n},$$

$$\chi_h(sr^k) = 0.$$

上面所构造的一级和二级不可约表示是 D_n 的仅有的不可约表示(确切到同构). 事实上, 这些不可约表示的级的平方和等于

$$4 \times 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times 4 = 2n,$$

恰等于 D_n 的阶.

例 群 D_6 有四个一级表示,特征标为 ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, 和两个二级不可约表示,特征标为 χ_1 和 χ_2.

群 D_n (n 是奇数) 的不可约表示.

一级表示只有两个,它们的特征标 ψ_1 和 ψ_2 由下面的表给出:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

二级不可约表示 ρ^h 由 n 是偶数的情形同样的公式来定义．相当于 $0<h<n/2$ 的那些表示都是不可约且互不同构的（注意，因为 n 是奇数，条件 $0<h<n/2$ 也可写成 $0<h\leqslant(n-1)/2$）．给出特征标的公式也是一样的．

这些表示是仅有的不可约表示．事实上，它们的级的平方和等于 $2\times1+\dfrac{1}{2}(n-1)\times4=2n$，就是 D_n 的阶．

习　题

5.1　证明，在 D_n 里，若 n 是偶数（奇数），一切反射组成两个（一个）共轭类，而 C_n 的元素组成 $(n/2)+1$ 个 $((n+1)/2$ 个）共轭类．由此得出 D_n 的类的个数，并且验证它等于不可约特征标的个数．

5.2　证明，$\chi_h\cdot\chi_{h'}=\chi_{h+h'}+\chi_{h-h'}$．特别，我们有

$$\chi_h\cdot\chi_h=\chi_{2h}+\chi_0=\chi_{2h}+\psi_1+\psi_2.$$

证明，ψ_2 是 ρ^h 的交错方的特征标，而 $\chi_{2h}+\psi_1$ 是对称方的特征标（参看 1.5 和命题 3）．

5.3　证明，D_n 作为 $\mathbf{R}^3$ 中刚性运动群的通常实现（Eyring [5]）是可约的，特征标为 $\chi_1+\psi_2$，而 D_n 作为 C_{nv} 来实现（Eyring [5]）则特征标为 $\chi_1+\psi_1$．

5.4　群 D_{nh}

这个群是积 $D_n\times I$，这里 I 是由元素 $\{1,\iota\}$，$\iota^2=1$，所组成的一个阶为 2 的群．它的阶是 $4n$．如果 D_n 按通常的方式作为三维空间的旋转和反射的群来实现［参看 5.3 (a)］，那么 D_{nh} 可以作为由 D_n 和经过原点的反射 ι 所生成的群来实现．

根据定理 10，D_{nh} 的不可约表示是 D_n 的不可约表示与 I 的不可约表示的张量积．群 I 恰有两个不可约表示，都是一级的．它们的特征标 g 和 u 由下表给出：

	1	ι
g	1	1
u	1	-1

因此，D_{nh} 的不可约表示的个数是 D_n 的不可约表示个数的二倍．更确切地说，D_n 的每一个不可约特征标 χ 如下地确定 D_{nh} 的两个不可约特征标 χ_g 和 χ_u：

	x	ιx
χ_g	$\chi(x)$	$\chi(x)$
χ_u	$\chi(x)$	$-\chi(x)$

$(x \in D_n)$

例如，D_n 的特征标 χ_1 给出特征标 χ_{1g} 和 χ_{1u}：

	r^k	sr^k	ιr^k	ιsr^k
χ_{1g}	$2\cos\frac{2k\pi}{n}$	0	$2\cos\frac{2k\pi}{n}$	0
χ_{1u}	$2\cos\frac{2k\pi}{n}$	0	$-2\cos\frac{2k\pi}{n}$	0

同样地可应用到 D_n 的其它特征标上．

5.5 群 D_∞

这是平面上使原点不动的旋转和反射所成的群．它包含一切旋转 r_α 所成的群 C_∞．如果 s 是任意一个反射，那么有以下关系：

$$s^2 = 1, \quad sr_\alpha s = r_{-\alpha}.$$

D_∞ 的每一元素或者可以唯一地写成 r_α 的形式（如果它属于 C_∞），或者可以唯一地写成 sr_α 的形式（如果它不属于 C_∞）；作为一个拓扑空间，D_∞ 由两个不相交的圆组成．D_∞ 的不变测度是 $d\alpha/4\pi$．更确切地说，函数 f 的平均 $\int_G f(t)\,dt$ 由公式

$$\int_G f(t)\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(r_\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(sr_\alpha)\,d\alpha$$

给出．特别，2.6 中的射影 p_i 是：

$$p_i x = \frac{n_i}{4\pi}\int_0^{2\pi} \chi_i(r_\alpha)^*\,\rho_{r_\alpha}(x)\,d\alpha + \frac{n_i}{4\pi}\int_0^{2\pi} \chi_i(sr_\alpha)^*\rho_{sr_\alpha}(x)\,d\alpha.$$

D_∞ 作为三维空间的一个刚性运动群的实现.

有两种实现方法:

(a) 通常的实现(在 Eyring [5] 中记作 D_∞): 取绕 Oz 轴的旋转和对于平面 Oxy 中过原点 O 的直线的反射.

(b) 由群 $C_{\infty v}$ 来实现 (Eyring [5] 的记法): 取对于通过 Ox 轴的平面的反射来代替对于 Oxy 平面内直线的反射.

群 D_∞的不可约表示

它们可以象 D_n 的不可约表示那样构造出来. 首先有两个一级表示,它们的特征标 ψ_1 和 ψ_2 由下面的表给出:

	r_α	sr_α
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

有一系列的二级不可约表示 $\rho^h(h=1,2,\cdots)$, 这些表示由以下的公式定义:

$$\rho^h(r_\alpha)=\begin{pmatrix} e^{ih\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-ih\alpha}\end{pmatrix},\quad \rho^h(sr_\alpha)=\begin{pmatrix} 0 & e^{-ih\alpha} \\ e^{ih\alpha} & 0\end{pmatrix}.$$

它们的特征标 $\chi_1, \chi_2, \cdots$有以下的值:

$$\chi_h(r_\alpha)=2\cos(h\alpha),\quad \chi_h(sr_\alpha)=0.$$

可以证明,这就是 D_∞的所有的不可约表示(确切到同构).

5.6 群 $D_{\infty h}$

这个群是积 $D_\infty\times I$; 它可以作为由 D_∞ 和经过原点的反射 ι 所生成的群来实现. 它的元素可以唯一地写成下列四种形式之一:

$$r_\alpha,\quad sr_\alpha,\quad \iota r_\alpha,\quad \iota sr_\alpha.$$

作为一个拓扑空间, 它是四个互不相交的圆的并. $D_{\infty h}$ 的不变测度是 $(1/8\pi)d\alpha$. 如同上面一样,这就意味着 $D_{\infty h}$ 上函数 f 的平均值 $\int_G f(t)\,dt$ 由以下公式给出:

$$\int_G f(t)\,dt = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} f(r_\alpha)d\alpha + \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} f(sr_\alpha)d\alpha$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} f(\iota r_\alpha)d\alpha + \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} f(\iota s r_\alpha)d\alpha.$$

我们留给读者去推导关于 2.6 中射影 p_i 的表达式。

如同在 D_{nh} 的情形一样，$D_{\infty h}$ 的不可约表示由 D_∞ 的不可约表示成对地产生：D_∞ 的每一特征标 χ 都产生 $D_{\infty h}$ 的两个特征标 χ_g 和 χ_u。

例如，D_∞ 的特征标 χ_3 给出：

	r_α	sr_α	ιr_α	$\iota s r_\alpha$
χ_{3g}	$2\cos 3\alpha$	0	$2\cos 3\alpha$	0
χ_{3u}	$2\cos 3\alpha$	0	$-2\cos 3\alpha$	0

5.7 交错群 $\mathfrak{A}_4$

这是有四个元素的集合 $\{a,b,c,d\}$ 的一切偶置换所成的群；它同构于 $\boldsymbol{R}^3$ 中保持一个重心在原点的正四面体不变的旋转所成的群. 这个群含有 12 个元素：

单位元 1；

三个二阶元素，$x=(ab)(cd)$，$y=(ac)(bd)$，$z=(ad)(bc)$，它们相当于正四面体经过两对边中点联线的反射。

八个三阶元素：(abc)，(acb)，(abd)，(adb)，(acd)，(adc)，(bcd)，(bdc)，它们相当于绕联结一个顶点和对面重心的联线旋转 $\pm 120°$ 角的旋转。

我们用 (abc) 表示循环置换 $a\mapsto b$，$b\mapsto c$，$c\mapsto a$，$d\mapsto d$；类似地，$(ab)(cd)$ 表示置换 $a\mapsto b$，$b\mapsto a$，$c\mapsto d$，$d\mapsto c$，它是对换 (ab) 与 (cd) 的乘积。

令 $t=(abc)$，$K=\{1,t,t^2\}$，$H=\{1,x,y,z\}$。我们有

$$txt^{-1}=z,\quad tzt^{-1}=y,\quad tyt^{-1}=x;$$

再者，H 和 K 都是 $\mathfrak{A}_4$ 的子群，H 是正规子群，并且 $H\cap K=\{1\}$。容易看出，$\mathfrak{A}_4$ 的每一元素可以唯一地写成乘积 $h\cdot k$，这里 $h\in H$，$k\in K$。

这时也说，$\mathfrak{A}_4$ 是 K 与正规子群 H 的**半直积**；注意这并不是直积，因为 K 的元素不能与 H 的元素交换。

$\mathfrak{A}_4$ 中有四个共轭类：$\{1\}$，$\{x,y,z\}$，$\{t,tx,ty,tz\}$和$\{t^2,t^2x,t^2y,t^2z\}$，因而有四个不可约特征标。有三个一级特征标，它们相当于子群K的三个特征标 χ_0，χ_1 和 χ_2（参看 5.1）到群 $\mathfrak{A}_4$ 上的开拓，这种开拓就是令 $\chi_i(h\cdot k)=\chi_i(k)$，对于 $h\in H, k\in K$。最后一个特征标 ψ 可以，例如，利用命题 5 的推论 2 来定出。这就是 $\mathfrak{A}_4$ 在 $\boldsymbol{R}^3$ 内的自然表示（线性地开拓到 $\boldsymbol{C}^3$ 内）的特征标。于是我们有以下的关于 $\mathfrak{A}_4$ 的特征标表：

	1	x	t	t^2
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	1	w	w^2
χ_2	1	1	w^2	w
ψ	3	-1	0	0

这里

$$w=e^{2\pi i/3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

习　　题

5.4　令 $\theta(1)=\theta(x)=1$，$\theta(y)=\theta(z)=-1$；这是 H 的一个一级表示。由 θ 所诱导的 $\mathfrak{A}_4$ 的表示（参看 3.3）是三级的；证明它是不可约的并且有特征标 ψ。

5.8　对称群 $\mathfrak{S}_4$

这是 $\{a,b,c,d\}$ 的一切置换所成的群；它同构于使一个正四面体不变的一切刚性运动所成的群。它有 24 个元素，划分为五个共轭类：

单位元 1；

六个对换：(ab)，(ac)，(ad)，(bc)，(bd)，(cd)；

三个在 $\mathfrak{A}_4$ 内的二阶元素：$x=(ab)(cd)$，　$y=(ac)(bd)$，

$z=(ad)(bc)$;

八个三阶元素：(abc)，(acb)，(abd)，(adb)，(acd)，(adc)，(bcd)，(bdc)；

六个四阶元素：$(abcd)$，$(abdc)$，$(acbd)$，$(acdb)$，$(adbc)$，$(adcb)$.

令 $H=\{1, x, y, z\}$，令 L 是使 d 不动的置换所成的群．如同前一段一样，可以看出，$\mathfrak{S}_4$ 是 L 与正规子群 H 的半直积．L 的每一表示 ρ 通过公式 $\rho(h\cdot l)=\rho(l), h\in H, l\in L$，开拓为 $\mathfrak{S}_4$ 的一个表示．这就给出了 $\mathfrak{S}_4$ 的三个不可约表示（参看 2.5），它们的级是 1，1 和 2．另一方面，$\mathfrak{S}_4$ 在 $\boldsymbol{C}^3$ 内的自然表示是不可约的（因为它在 $\mathfrak{A}_4$ 上的限制是不可约的）；同样，这个表示与 $\mathfrak{S}_4$ 的非平凡一级表示的张量积也是不可约的．于是就有以下关于 $\mathfrak{S}_4$ 的特征标表：

	1	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
χ_0	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
ψ	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\psi$	3	-1	-1	0	1

注意 $\mathfrak{S}_4$ 的特征标的值都是整数；这是对称群的表示的一个通性（参看13.1）．

5.9 立方体群

考虑 $\boldsymbol{R}^3$ 中的立方体 C，它的顶点是 (x, y, z)，$x=\pm1$，$y=\pm1$，$z=\pm1$．考虑 $\boldsymbol{R}^3$ 中使立方体 C 不变的自同构，也就是置换这八个顶点的自同构，一切这样的自同构作成一个群 G．这个群可以用多种方式来描述：

（1）群 G 包含 $\{x, y, z\}$ 的置换群 $\mathfrak{S}_3$ 和由变换

$$(x, y, z)\longmapsto(\pm x, \pm y, \pm z)$$

所组成的八阶群 M．容易验证，G 是 $\mathfrak{S}_3$ 与正规子群 M 的半直积，

它的阶是 $6\times 8=48$。

(2) 令 ι 表示经过原点的反射

$$(x, y, z)\longmapsto(-x, -y, -z).$$

令T是顶点为$(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ 的四面体，又 $T'=\iota T$. C的每一顶点都是T或T'的一个顶点. 令 $S(T)$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中保持T不变的自同构所成的群. 对于 $s\in S(T)$，我们有 $sT'=s\iota T=\iota sT=T'$，这表明 s 使C的顶点的集稳定，从而属于G. 于是 $S(T)\subset G$，并且立即看出G是 $S(T)$ 与群 $I=\{1, \iota\}$ 的直积. 因为 $S(T)=\mathfrak{S}_4$，所以G的不可约特征标可以从 $\mathfrak{S}_4$ 的不可约特征标成对地得到，就象从 D_n 的不可约特征标得出 D_{nh} 的不可约特征标一样. 于是有四个一级的，两个二级的，和四个三级的不可约特征标;细节的描述留给读者。

习 题

5.4 由分解 $G=\mathfrak{S}_4\times I$ 和 $\mathfrak{S}_4=\mathfrak{S}_3\cdot L$ (参看5.8) 重新得出半直积分解 $G=\mathfrak{S}_3\cdot M$。

5.5 令 G_+ 是群G中行列式等于1的元素(立方体的旋转)所成的子群. 证明，如果G被分解为 $S(T)\times I$，则射影 $G\to S(T)$ 定义一个 G_+ 到 $S(T)=\mathfrak{S}_4$ 上的同构。

参 考 文 献 (第一部分)

有限群的表示论在很多书中都有讨论. 我们首先提出一本经典著作:

[1] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics. Dover Publ., 1931.

也可以参看文献:

[2] M. Hall, The Theory of Groups. Macmillan, New York, 1959.

[3] G. G. Hall, Applied Group Theory. Mathematical Physics Series, Longmans, 1967.

关于诱导表示和它的应用的讨论,可以参看文献:

[4] A. J. Coleman, Induced and subduced representations, Group Theory and Its Applications, edited by M. Loebl. Academic Press, New York, 1968.

关于R^3中刚性运动的群,它们的标准记法和特征标表,可以参看文献:

[5] H. Eyring, J. Walter, and G. Kimball, Quantum Chemistry. John Wiley and Sons, New York, 1944. (特征标表在附录 VII,pp. 376—388.)

关于紧群可以参看文献[1],[4]以及:

[6] L. Loomis, An Introduction to Abstract Harmonic Analysis. Van Nostrand, New York, 1953.

对于特征标理论的历史可以参看文献:

[7] F. G. Frobenius, Gesammelte Abhandlungen, Bd. III. Springer-Verlag, 1969.

[7′] I. Schur, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, Springer-Verlag, 1973.

[7″] T. Hawkins, New Light on Frobenius, Creation of the Theory of Group Characters, *Archive for History of Exact Sciences*, **12**(1974), p.217—243.

第二部分 在特征零情形的表示

除非特别声明，我们总假定一切群都是有限的，一切向量空间都是有限维的，而一切模都是有限生成的.

在第六章到第十一章里（6.1 除外），基域都是复数域 $\mathbf{C}$.

第六章 群 代 数

6.1 表示和模

令 G 是一个具有有限阶 g 的群，而 K 是一个交换环. 我们用 $K[G]$ 表示 K 上 G 的代数；这个代数有一个基，以 G 的元素为指标. 在多数情形我们就将这个基与 G 等同起来. 于是 $K[G]$ 的每一元素 f 可以唯一地写成以下形式：

$$f=\sum_{s\in G}a_s s,\quad a_s\in K,$$

而 $K[G]$ 内的乘法就是 G 的乘法的开拓.

令 V 是一个 K-模，令 $\rho:G\to \mathbf{GL}(V)$ 是 G 在 V 内一个线性表示. 对于 $s\in G$ 和 $x\in V$，令 $sx=\rho_s x$；对于 $f\in K[G]$ 和 $x\in V$，依照线性定义 fx. 这样一来，V 就容有一个左 $K[G]$-模结构. 反之，这样一个结构也定义 G 在 V 内的一个线性表示. 以下我们将不加区别地使用“线性表示”和“模”这两个术语.

命题 9 如果 K 是一个特征为零的域，那么代数 $K[G]$ 是半单的.

（关于半单代数的基本事实，可以看，例如，Bourbaki [8] 或 Lang [10].）

说 $K[G]$ 是一个半单代数相当于说每一个 $K[G]$-模 V 都是半单的，即 V 的每一子模 V' 作为一个 $K[G]$-模都是 V 的一个直因子. 这可以象 1.3 里那样，用取平均的办法来证明：我们首先选

取 V 在 V' 上的一个 K-线性射影 p，然后用 G 的元素来变换 p，再取平均

$$p^0 = \frac{1}{g}\sum_{s\in G} sps^{-1}.$$

这样得到的射影 p^0 是 $K[G]$-线性的，由此推出，作为一个 $K[G]$-模，V' 是 V 的一个直因子. □

推论 代数 $K[G]$ 是 K 上一个有限次扩体上矩阵代数的积[1].

这是半单代数结构定理的一个直接推论(见上述引文).

习　题

6.1 令 K 是一个特征 $p>0$ 的域. 证明下列两个性质是等价的:

(i) $K[G]$ 是半单的.

(ii) p 不能整除 G 的阶 g.

[(ii)⇒(i) 的证明同上. 为了证明 (i)⇒(ii)，证明，如果 p 整除 g，那么 $K[G]$ 中由元素 $\sum a_s s$，$\sum a_s = 0$，所成的理想就不是 $K[G]$ 的(作为一个模)的直因子.]

6.2 $C[G]$ 的分解

以下我们取 $K = \mathbf{C}$(其实任意特征零的代数闭域都可以)，因而 $\mathbf{C}$ 上每一有限次扩体都等于 $\mathbf{C}$，于是命题 9 的推论表明，$\mathbf{C}[G]$ 是全阵代数 $\mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{C})$ 的积. 确切地说，令 $\rho_i: G\to \mathbf{GL}(W_i)$，$1\leqslant i\leqslant h$，是 G 的一切互不相同的不可约表示(确切到同构)，令 $n_i = \dim. W_i$. 那么 W_i 的自同态环 $\mathrm{End}(W_i)$ 与 $\mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{C})$ 同构. 映射 $\rho_i: G\to \mathbf{GL}(W_i)$ 线性地开拓为一个代数同态 $\tilde\rho_i: \mathbf{C}[G]\to \mathrm{End}(W_i)$. 这一组 $(\tilde\rho_i)$ 定义一个同态

$$\tilde\rho: \mathbf{C}[G]\to \prod_{i=1}^{h}\mathrm{End}(W_i)\cong \prod_{i=1}^{h}\mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{C}).$$

命题 10 上面所定义的同态 $\tilde\rho$ 是一个同构.

这是半单代数的一般性质. 在这一情形，可以证明如下：首

1) 代数的积即直和. 在这本书里有时用"积"，有时用"直和". ——译者注

先，$\tilde{\rho}$是满射．否则将存在 $\prod M_{n_i}(\mathbf{C})$上一个非零线性型，它在 $\tilde{\rho}$ 的象上取值为 0；这将给出关于表示 ρ_i 的系数的一个非平凡关系；然而由 2.2 的正交关系，这是不可能的．另一方面，由 2.4， $\mathbf{C}[G]$ 和 $\prod M_{n_i}(\mathbf{C})$的维数都是 $g=\sum n_i^2$；因为 $\tilde{\rho}$ 是满射，所以这个映射是双射．□

我们可以具体地给出同构 $\tilde{\rho}$ 的逆映射．

命题 11 (Fourier 反演公式)令 $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$ 是 $\prod \mathrm{End}(W_i)$的一个元素，而 $u=\sum\limits_{s\in G}u(s)s$ 是$\mathbf{C}[G]$ 中使得 $\tilde{\rho}_i(u)=u_i$, $1\leqslant i\leqslant h$，的那个元素．那么 u 的第 s 个系数 $u(s)$ 由公式

$$u(s)=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{h}n_i\mathrm{Tr}_{W_i}(\rho_i(s^{-1})u_i)$$

给出，这里 $n_i=\dim(W_i)$.

由于线性，我们只需对于 u 等于G中一个元素 t 时来验证这个公式即可．这时

$$u(s)=\delta_{st}, \quad \text{而} \quad \mathrm{Tr}_{W_i}(\rho_i(s^{-1})u_i)=\chi_i(s^{-1}t),$$

这里 χ_i 是G的对应于 W_i 的不可约特征标．这样一来，只剩下证明

$$\delta_{st}=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{h}n_i\chi_i(s^{-1}t).$$

然而这是 2.4，命题 5 的推论 1 和 2 的直接结果．□

习 题

6.2 (Plancherel 公式)．令 $u=\sum u(s)s$ 和 $v=\sum v(s)s$ 是 $L[G]$的两个元素．规定

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{g}\sum_{s\in G}u(s^{-1})v(s).$$

证明公式

$$\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{h}n_i\mathrm{Tr}_{W_i}(\tilde{\rho}_i(uv)).$$

[归结到 u,v 属于 G 的情形．]

6.3 令 U 是 $\boldsymbol{C}[G]$ 的乘法群中一个包含 G 的有限子群。令 $u=\sum u(s)s$ 和 $u'=\sum u'(s)s$ 是 U 的两个元素且 $u\cdot u'=1$；又令 u_i 和 u'_i 分别是 u 和 u' 在 $\tilde{\rho}_i$ 之下位于 $\mathrm{End}(W_i)$ 内的象。

(a) 证明，$\rho_i(s^{-1})u_i\doteq\tilde{\rho}_i(s^{-1}u)$ 的特征值是单位根。由此推出，对于一切 $s\in G$ 和一切 i 都有

$$\mathrm{Tr}_{W_i}(\rho_i(s^{-1})u_i)^*=\mathrm{Tr}_{W_i}(u'_i\rho_i(s))=\mathrm{Tr}_{W_i}(\rho_i(s)u'_i),$$

从而，应用命题 11，得 $u(s)^*=u'(s^{-1})$。

(b) 证明 $\sum\limits_{s\in G}|u(s)|^2=1$。[应用(a)。]

(c) 设 U 包含在 $\boldsymbol{Z}[G]$ 内，从而 $u(s)$ 是整数。证明，$u(s)$ 中除了一个等于 ±1 外，其余的都等于零。由此得出，U 包含在由形如 $\pm s$，$s\in G$，的元素所成的群 $\pm G$ 内。

(d) 假设 G 是 Abel 群。证明，$\boldsymbol{Z}[G]$ 的乘法群中每一个有限阶的元素都包含在 $\pm G$ 内。(Higman 定理。)

6.3 $\boldsymbol{C}[G]$ 的中心

这是 $\boldsymbol{C}[G]$ 中与 $\boldsymbol{C}[G]$ 的一切元素可交换的元素(即与 G 的一切元素可交换的元素)所成的集；记作 $\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]$。

对于 G 的一个共轭类 c，令 $e_c=\sum\limits_{s\in c}s$。立即看出，一切 e_c 作成 $\boldsymbol{C}[G]$ 的中心的一个基；因而 $\boldsymbol{C}[G]$ 的中心的维数是 h，这里 h 是 G 的共轭类的个数，参看 2.5。令

$$\rho_i: G\to \boldsymbol{GL}(W_i)$$

是 G 的一个不可约表示，其特征标为 χ_i 而级为 n_i，又令 $\tilde{\rho}_i:\boldsymbol{C}[G]\to\mathrm{End}(W_i)$ 是相应的代数同态(参看 6.2)。

命题 12 同态 $\tilde{\rho}_i$ 将 $\boldsymbol{C}[G]$ 的中心映入 W_i 的位似所成的集，并且确定一个代数同态

$$\omega_i:\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]\to\boldsymbol{C}.$$

如果 $u=\sum u(s)s$ 是 $\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]$ 的一个元素，那么

$$\omega_i(u)=\frac{1}{n_i}\mathrm{Tr}_{W_i}(\tilde{\rho}_i(u))=\frac{1}{n_i}\sum_{s\in G}u(s)\chi_i(s).$$

这实际上就是 2.5 中命题 6 的复述而已。

命题 13 这一组$(\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$ 定义 $\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]$ 到代数$\boldsymbol{C}^h=\boldsymbol{C}\times\cdots\times\boldsymbol{C}$上的一个同构.

如果将 $\boldsymbol{C}[G]$ 与 $\mathrm{End}(W_i)$ 的积等同起来,那么 $\boldsymbol{C}[G]$ 的中心就成为 $\mathrm{End}(W_i)$ 中心的积. 然而 $\mathrm{End}(W_i)$ 的中心由一切位似所组成. 于是就得到 $\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]$ 到 $\boldsymbol{C}\times\cdots\times\boldsymbol{C}$ 上的一个同构,这就是命题 13 所说的那个同构. □

习 题

6.4 令

$$p_i=\frac{n_i}{g}\sum_{s\in G}\chi_i(s^{-1})s.$$

证明,一切p_i, $1\leqslant i\leqslant h$, 作成 $\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]$ 的一个基,并且 $p_i^2=p_i$; $p_ip_j=0$, 若 $i\neq j$; 而 $p_1+\cdots+p=1$. 于是又得到 2.6,定理 8 的另一证明. 证明 $\omega_i(p_j)=\delta_{ij}$.

6.5 证明, $\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]$ 到 $\boldsymbol{C}$ 内的每一个同态都等于某一 ω_i.

6.4 整元的基本性质

令 R 是一个交换环. 设 $x\in R$. 我们说, x 在 $\boldsymbol{Z}$ 上是整的, 如果存在一个整数 $n\geqslant 1$ 和 $\boldsymbol{Z}$的元素 $a_1,\cdots,a_n$, 使得

(*) $$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

一个复数如果在 $\boldsymbol{Z}$ 上是整的, 就叫做一个代数整数. 每一个单位根都是代数整数. 如果 $x\in\boldsymbol{Q}$是一个代数整数,那么$x\in\boldsymbol{Z}$;因为否则我们可以把 x 写成 p/q 的形式, $p,q\in\boldsymbol{Z}$, $q\geqslant 2$ 且 p,q 互素. 于是由方程(*)得

$$p^n+a_1qp^{n-1}+\cdots+a_nq^n=0,$$

从而 $p^n\equiv 0(\bmod q)$, 这与 p,q 互素的事实矛盾.

命题 14 令 x 是交换环R的一个元素. 下列性质是等价的:

(i) x 在 $\boldsymbol{Z}$上是整的.

(ii) R中由 x 所生成的子环$\boldsymbol{Z}[x]$作为一个 $\boldsymbol{Z}$-模是有限生成的.

(iii) 存在R的一个有限生成的子$\boldsymbol{Z}$-模，它包含$\boldsymbol{Z}[x]$.

因为$\boldsymbol{Z}$是 Noether 环，有限生成的$\boldsymbol{Z}$-模的子模仍是有限生成的，于是就得出(ii)与(iii)的等价性．另一方面，如果x满足一个方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in \boldsymbol{Z},$$

那么由 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 所生成的R的子$\boldsymbol{Z}$-模在乘以x的作用下是稳定的，因而等于$\boldsymbol{Z}[x]$，这就证明了(i)$\Rightarrow$(ii)．反之，设(ii)成立．令R_n表示R中由$1, x, \cdots, x^{n-1}$所生成的子$\boldsymbol{Z}$-模．这样的R_n组成一个升链，它们的并就是$\boldsymbol{Z}[x]$．因为$\boldsymbol{Z}[x]$是有限生成的，所以对于足够大的n，必有$R_n = \boldsymbol{Z}[x]$．这就表明x^n是$1, x, \cdots, x^{n-1}$的整系数线性组合，从而(i)成立．□

推论 1 如果R是一个有限生成$\boldsymbol{Z}$-模，那么R的每一元素都在$\boldsymbol{Z}$上是整的．

这由蕴含关系(iii)$\Rightarrow$(i)得出．□

推论 2 R在$\boldsymbol{Z}$上一切整元素作成R的一个子环．

令$x, y \in R$．如果x, y在$\boldsymbol{Z}$上是整的，那么环$\boldsymbol{Z}[x]$和$\boldsymbol{Z}[y]$都是有限生成$\boldsymbol{Z}$-模．因此，它们的张量积$\boldsymbol{Z}[x]\otimes\boldsymbol{Z}[y]$是一个有限生成$\boldsymbol{Z}$-模，从而它在$R$内的象$\boldsymbol{Z}[x, y]$也是$\boldsymbol{Z}$上有限生成的．于是$\boldsymbol{Z}[x, y]$的一切元素都在$\boldsymbol{Z}$上是整的．□

注记　在上面的定义和结果里，可以将$\boldsymbol{Z}$换成任意一个交换 Noether 环；关于(i)$\Leftrightarrow$(ii)甚至都不需要假设这个环是 Noether 环．

6.5 特征标的整性质．应用

命题 15 令χ是有限群G的一个表示ρ的特征标．那么对于每一$s \in G$，$\chi(s)$是一个代数整数．

事实上，$\chi(s)$是$\rho(s)$的迹，因而等于$\rho(s)$的特征值的和，而$\rho(s)$的特征值都是单位根．□

命题 16 令$u = \sum u(s)s$是$\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]$的一个元素，并且$u(s)$都是代数整数．那么$u$在$\boldsymbol{Z}$上是整的．

（这个命题有意义，因为$\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]$是一个交换环．）

令 $c_i(1\leqslant i\leqslant h)$ 是G的共轭类，并且令 $e_i=\sum_{s\in c_i}s$（参看 6.3）. 对于 $s_i\in c_i$,我们可以将 u 写成

$$u=\sum_{i=1}^{h}u(s_i)e_i$$

的形式. 由命题 14 的推论 2，我们只需证明 e_i 都在 $\boldsymbol{Z}$上是整的. 然而这一点是明显的，因为每一乘积 e_ie_j 都是这些 e_k 的整系数线性组合. 于是 Cent $\boldsymbol{C}[G]$ 的子加群$R=\boldsymbol{Z}e_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}e_h$是一个子环；它是一个有限生成 $\boldsymbol{Z}$-模，因而它的每一元素都在 $\boldsymbol{Z}$ 上是整的（命题 14，推论 1）. 命题被证明. □

推论 1 令 ρ 是G的一个 n 级不可约表示，特征标为 χ. 如果 u 如上定义，那么数 $(1/n)\sum_{s\in G}u(s)\chi(s)$ 是一个代数整数.

事实上，这个数是在与 ρ 相伴的同态（命题 14，推论 1）

$$\omega:\mathrm{Cent}\,\boldsymbol{C}[G]\to\boldsymbol{C}$$

之下，元素 u 的象. 因为 u 在 $\boldsymbol{Z}$上之整的，所以它在 ω 之下的象也是整的.

推论 2 G的不可约表示的级整除G的阶.

令 g 是G的阶. 我们对元素 $u=\sum_{s\in G}\chi(s^{-1})s$ 应用推论 1，这是允许的，因为 χ 是一个类函数而 $\chi(s)$ 都是代数整数（命题 15）；我们得到

$$\frac{1}{n}\sum\chi(s^{-1})\chi(s)=\frac{g}{n}\langle\chi,\chi\rangle=\frac{g}{n}$$

是一个代数整数. 因为这个数是有理数，所以属于 $\boldsymbol{Z}$，即 n 整除 g. □

推论 2 还可以再加强一些（参看 8.1，命题 24 的推论）. 下面是这方面的第一个结果：

命题 17 令 C 是G的中心. G的不可约表示的级整除$(G:C)$.

令 g 是G的阶而 c 是C的阶. 令$\rho:G\to\boldsymbol{GL}(W)$是$G$的一个 n 级不可约表示. 如果 $s\in C$，则 $\rho(s)$ 与一切 $\rho(t)$，$t\in G$，可交换；于是由 Schur 引理，$\rho(s)$ 是一个位似，将它记作 $\lambda(s)$. 映射

$s \longmapsto \lambda(s)$ 是 C 到 $\mathbf{C}^*$ 内的一个同态．令 m 是一个非负整数．作表示 ρ 的 m 重张量积

$$\rho^m: G^m \to \boldsymbol{GL}(W \otimes \cdots \otimes W).$$

这是群 $G^m = G \times \cdots \times G$ 的一个不可约表示(参看 3.2，定理 10)．$\mathbf{C}^m$ 的一个元素 $(s_1, \cdots, s_m)$ 在 ρ^m 之下的象是一个位似，其系数为 $\lambda(s_1, \cdots, s_m)$．$\mathbf{C}^m$ 中由满足条件 $s_1 \cdots s_m = 1$ 的元素 $(s_1, \cdots, s_m)$ 所成的子群 H 平凡地作用在 $W \otimes \cdots \otimes W$ 上．因此，过渡到商群上，我们得到 G^m/H 的一个不可约表示．由命题16的推论 2 得出，这个表示的级 n^m 整除 G^m/H 的阶 g^m/c^{m-1}．于是对一切 m，我们有 $(g/cn)^m \in c^{-1}\mathbf{Z}$；由此推出 g/cn 是一个整数(例如，参看命题 14)．□

(这个证明是由 J. Tate 给出的．)

习　　题

6.6　证明，环 $\mathbf{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_k$ 是 $\mathbf{Z}[G]$ 的中心。

6.7　令 ρ 是 G 的一个 n 级不可约表示，特征标是 χ．如果 $s \in G$，证明 $|\chi(s)| \leqslant n$，并且当且仅当 $\rho(s)$ 是一个位似时等号才成立[注意 $\rho(s)$ 是 n 个单位根的和]．由此推出，$\rho(s) = 1 \Leftrightarrow \chi(s) = n$.

6.8　令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是单位根，而 $a = (1/n)\sum\lambda_i$．证明，若 a 是一个代数整数，那么或者 $a = 0$，或者 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = a$．[令 A 是 a 在 $\mathbf{Q}$ 上的共轭数的乘积；证明 $|A| \leqslant 1$.]

6.9　令 ρ 是 G 的一个 n 级不可约表示，特征标是 χ．设 $s \in G$，令 $c(s)$ 表示 s 的共轭类中元素的个数．证明，$(c(s)/n)\chi(s)$ 是一个代数整数 [应用命题 16 的推论 1，取 u 为 s 的共轭元素的和]．证明，如果 $c(s)$ 与 n 互素且 $\chi(s) \neq 0$，则 $\rho(s)$ 是一个位似[注意 $(1/n)\chi(s)$ 是一个代数整数，并且应用习题 6.8]．

6.10　令 $s \in G$ 且 $s \neq 1$．设含 s 的共轭类的元素个数 $c(s)$ 是一个素数 p 的幂．证明，存在一个不可约特征标 χ，它不等于单位特征标，使得 $\chi(s) \neq 0$ 且 $\chi(1) \not\equiv 0 \pmod p$．[利用公式 $1 + \sum\limits_{\chi \neq 1} \chi(1)\chi(s) = 0$ (参看命题5的推论 2)来证明，如果不存在这样一个特征标 χ，则 $1/p$ 将是一个代数整数．] 令 ρ 是以 χ 为特征标的一个表示．证明 $\rho(s)$ 是一个位似 [利用习题 6.9]．由此推出，如果 N 是 ρ 的核，那么 $N \neq G$，且 s 在 G/N 内的象属于 G/N 的中心。

第七章　诱导表示. Mackey 判定

7.1　导引

令H是群G的一个子群，R是H的一个左陪集代表系．令V是一个 $\mathbf{C}[G]$-模，而W是V的一个子 $\mathbf{C}[H]$-模．回忆一下(参看3.3)，模V(或表示V)说是由W所诱导的，如果 $V=\bigoplus_{s\in R}sW$，即V是象sW，$s\in R$，的直和(一个不依赖于R的选取的条件)．这个性质还可以如下地表述：

令
$$W'=\mathbf{C}[G]\otimes_{\mathbf{C}[H]}W$$
是由W通过从$\mathbf{C}[H]$到$\mathbf{C}[G]$的纯量扩张而得到的$\mathbf{C}[G]$-模．内射$W\to V$线性地开拓为一个 $\mathbf{C}[G]$-同态 $i:W'\to V$.

命题 18　V是由W所诱导的充分且必要条件是同态
$$i:\mathbf{C}[G]\otimes_{\mathbf{C}[H]}W\to V$$
是一个同构.

这是以下事实的一个直接推论：$\mathbf{C}[G]$看成一个右$\mathbf{C}[H]$-模，R的元素作成它的一个基.

注记

(1)　对于W所诱导的表示这样来刻画就使得诱导表示的存在性和唯一性都成为显然的.

以下我们将W所诱导的G的表示记作 $\mathrm{Ind}_H^G(W)$，或者在不致发生混淆的情况下，就简单地记作 $\mathrm{Ind}(W)$.

(2)　如果V是由W所诱导的而E是一个 $\mathbf{C}[G]$-模，我们有一个典范同构
$$\mathrm{Hom}^H(W,E)\cong\mathrm{Hom}^G(V,E),$$
这里 $\mathrm{Hom}^G(V,E)$ 表示V到E内的$\mathbf{C}[G]$-同态所成的向量空间，$\mathrm{Hom}^H(W,E)$也类似地定义．这一事实是由张量积的一个初等性质推出的(也可以参看 3.3，引理 1).

(3) 表示的诱导是传递的：如果G是一个群K的子群，我们有

$$\mathrm{Ind}_G^K(\mathrm{Ind}_H^G(W)) \cong \mathrm{Ind}_H^K(W).$$

这一点可以直接地或利用张量积的结合性得出。

命题 19 令V是一个$\mathbf{C}[G]$-模，它是一些向量子空间的直和：$V=\bigoplus_{i\in I}W_i$，而G可迁地置换这些子空间．令$i_0\in I$，$W=W_{i_0}$，而H是W在G内的稳定化子(即G中使得$sW=W$的元素s所成的集)．那么W在子群H之下稳定，并且$\mathbf{C}[G]$-模V由$\mathbf{C}[H]$-模W所诱导．

这是显然的．

注记　要将命题 19 应用到G的一个不可约表示　$V=\bigoplus W_i$上，只需验证G置换这些W_i；可迁性条件是自然成立的，因为G在这些W_i所组成的集内的轨道确定V的一个子表示．

例　当W_i的维数都是 1 时，表示V叫做单项的．

7.2 诱导表示的特征标．互反公式

我们保留前面的记法．设f是H上一个类函数．考虑由以下公式所定义的G上的函数f'：

$$f'(s)=\frac{1}{h}\sum_{\substack{t\in G\\ t^{-1}st\in H}} f(t^{-1}st),\text{这里 } h=\mathrm{Card}(H).$$

我们说，f'是由f所诱导的，并且记作$\mathrm{Ind}_H^G(f)$或$\mathrm{Ind}(f)$．

命题 20

(i)　函数$\mathrm{Ind}(f)$是G上一个类函数．

(ii)　如果f是H的表示W的特征标，那么$\mathrm{Ind}(f)$是G的诱导表示$\mathrm{Ind}(W)$的特征标．

论断 (ii) 已经被证明 (3.3，定理 12)．论断 (i) 可以通过直接计算而得出，也可以由 (ii) 以及每一个类函数都是特征标的线性组合这一事实而得到．□

在 2.2 里，对于G上两个类函数φ_1和φ_2，我们曾经令

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\varphi_1(s^{-1})\varphi_2(s), \quad 这里\ g = \mathrm{Card}(G).$$

当我们希望更明确地显示出它与G的关系时，就写$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_G$来代替$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle$.

如果V_1和V_2是两个$\mathbf{C}[G]$-模，令

$$\langle V_1, V_2\rangle_G = \dim \mathrm{Hom}^G(V_1, V_2).$$

引理 2 *如果φ_1和φ_2分别是V_1和V_2的特征标，那么*

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_G = \langle V_1, V_2\rangle_G.$$

将V_1和V_2分解成直和，我们总可以假定它们是不可约的，在这一情形，引理即由特征标的正交公式得出(2.3，定理 3)．□

如果φ是G上一个函数，我们用$\mathrm{Res}\varphi$表示φ在子群H上的限制；相应地，如果V是G的一个表示，就用$\mathrm{Res}\,V$表示它在H上的限制.

定理 13 (Frobenius 互反性) *设ψ是H上一个类函数而φ是G上一个类函数．我们有*

$$\langle\psi, \mathrm{Res}\varphi\rangle_H = \langle \mathrm{Ind}\psi, \varphi\rangle_G.$$

因为每一个类函数都是特征标的线性组合，我们总可以假定ψ是一个$\mathbf{C}[H]$-模W的特征标，而φ是一个$\mathbf{C}[G]$-模E的特征标．由引理 2，只需证明

$$(*) \qquad \langle W, \mathrm{Res}E\rangle_H = \langle \mathrm{Ind}W, E\rangle_G,$$

即

$$\dim \mathrm{Hom}^H(W, \mathrm{Res}E) = \dim \mathrm{Hom}^G(\mathrm{Ind}W, E).$$

这个等式由 7.1 中注记(2)得出(或者由 3.3，引理 1 得出，这个引理和这个等式实际上是一回事)．自然，也可以通过直接计算来证明定理 13．□

注记

(1) 定理 13 表明，映射 Res 和 Ind 是*互相伴随*的.

(2) 也可以用 2.3 里所定义的数积$(\alpha|\beta)$来代替双线性型$\langle\alpha,\beta\rangle$．我们有同样的公式：

$$(\psi|\mathrm{Res}\varphi)_H = (\mathrm{Ind}\psi|\varphi)_G.$$

(3) 要记住以下的有用的公式:

$$\mathrm{Ind}(\psi\cdot\mathrm{Res}\varphi)=(\mathrm{Ind}\psi)\cdot\varphi.$$

这个公式可以通过简单的计算来验证,或者由公式 $\mathrm{Ind}(W)\otimes E\cong\mathrm{Ind}(W\otimes\mathrm{Res}E)$ 得出,参看 3.3,例 5.

命题 21 令 W 是 H 的一个不可约表示而 E 是 G 的一个不可约表示. 那么 W 出现在 $\mathrm{Res}E$ 内的重数等于 E 出现在 $\mathrm{Ind}W$ 内的重数.

将定理 13 应用到 W 的特征标 ψ 和 E 的特征标 φ 上,就得出这个命题(也可以应用公式(*)).

习 题

7.1 (诱导表示概念的推广). 令 $\alpha: H\to G$ 是群的一个同态(不一定是单的),又令 $\tilde\alpha:\mathbf{C}[H]\to\mathbf{C}[G]$ 是相应的代数同态. 设 E 是一个 $\mathbf{C}[G]$-模. 我们用 $\mathrm{Res}_\alpha E$ 表示由 E 通过 $\tilde\alpha$ 的作用所得到的 $\mathbf{C}[H]$-模. 如果 φ 是 E 的特征标,那么 $\mathrm{Res}_\alpha E$ 的特征标是 $\mathrm{Res}_\alpha\varphi=\varphi\circ\alpha$. 设 W 是一个 $\mathbf{C}[H]$-模. 我们用 $\mathrm{Ind}_\alpha W$ 表示 $\mathbf{C}[G]$-模 $\mathbf{C}[G]\otimes_{\mathbf{C}[H]}W$. 如果 ψ 是 W 的特征标,令 $\mathrm{Ind}_\alpha\psi$ 表示 $\mathrm{Ind}_\alpha W$ 的特征标.

(a) 证明互反公式

$$\langle\psi,\mathrm{Res}_\alpha\varphi\rangle_H=\langle\mathrm{Ind}_\alpha\psi,\varphi\rangle_G$$

仍然成立.

(b) 设 α 是满射并且将 G 与 H 对于 α 的核 N 的商群等同起来. W 中在 N 之下不变的元素所成的子空间在 $G=H/N$ 的作用下作成一个 $\mathbf{C}[G]$-模. 证明,这个模与 $\mathrm{Ind}_\alpha W$ 同构. 推导以下公式:

$$(\mathrm{Ind}_\alpha\psi)(s)=\frac{1}{n}\sum_{\alpha(t)=s}\psi(t),$$

这里 $n=\mathrm{Card}(N)$.

7.2 令 H 是 G 的一个子群, χ 是 G 关于 G/H 的置换表示(参看 1.2) 的特征标. 证明 $\chi=\mathrm{Ind}_H^G(1)$, 并且 $\psi=\chi-1$ 是 G 的一个表示的特征标; 确定在什么条件下后一个表示是不可约的 [利用习题 2.6, 或应用互反公式].

7.3 令 H 是 G 的一个子群. 假设对于每一 $t\notin H$, 都有 $H\cap tHt^{-1}=\{1\}$, 那么就称 H 是 G 的一个 Frobenius 子群. 令 N 是 G 中不与 H 的任何元素共轭

的元素所成的集.

(a) 令 $g=\mathrm{Card}(G)$，$h=\mathrm{Card}(H)$。证明，N 的元素个数是 $(g/h)-1$.

(b) 令 f 是 H 上一个类函数。证明，存在唯一的 G 上的类函数 $\tilde{f}$，它是 f 的开拓并且在 N 上取值 $f(1)$。

(c) 证明 $\tilde{f}=\mathrm{Ind}_H^G f-f(1)\phi$，这里 ϕ 是 G 的特征标 $\mathrm{Ind}_H^G(1)-1$，参看习题 7.2。

(d) 证明 $\langle f_1,f_2\rangle_H=\langle\tilde{f}_1,\tilde{f}_2\rangle_G$。

(e) 取 f 是 H 的一个不可约特征标。利用 (c) 和 (d) 证明 $\langle\tilde{f},\tilde{f}\rangle_G=1$，$\tilde{f}(1)\geqslant 0$，并且 $\tilde{f}$ 是 G 的不可约特征标的整系数线性组合。证明，$\tilde{f}$ 是 G 的一个不可约特征标。如果 ρ 是 G 的对应的表示，证明，对每一 $s\in N$ 都有 $\rho(s)=1$ [利用命题 6.7]。

(f) 证明，H 的每一线性表示都可以开拓为 G 的一个线性表示，它的核包含 N。证明 $N\cup\{1\}$ 是 G 的一个正规子群，并且 G 是 H 与 $N\cup\{1\}$ 的半直积 (Frobenius 定理)。

(g) 反之，设 G 是 H 与一个正规子群 A 的半直积。证明，H 是 G 的一个 Frobenius 子群必要且只要对于每一 $s\in H-\{1\}$，和每一 $t\in A-\{1\}$，都有 $sts^{-1}\neq t$ (即 H 自由地作用在 $A-\{1\}$ 上)。(如果 $H\neq\{1\}$，根据 Thompson 的一个定理，由这个性质可以得出 A 是幂零的.)

7.3 在子群上的限制

设 H 和 K 是 G 的两个子群。令 $\rho:H\to \boldsymbol{GL}(W)$ 是 H 的一个线性表示，而 $V=\mathrm{Ind}_H^G(W)$ 是 G 的相应的诱导表示。我们来确定 V 在 K 上的限制 $\mathrm{Res}_K V$。

首先选定 G 关于 (H,K) 的一个双陪集代表系 S；这就是说，G 是互不相交的子集 KsH 的并，$s\in S$ (我们也可以写 $s\in K\backslash G/H$)。对于 $s\in S$，令 $H_s=sHs^{-1}\cap K$，它是 K 的一个子群。如果对 $x\in H_s$，令

$$\rho^s(x)=\rho(s^{-1}xs),$$

我们就得到一个同态 $\rho^s:H_s\to \boldsymbol{GL}(W)$，因而就得到 H_s 的一个线性表示，记作 W_s。因为 H_s 是 K 的一个子群，所以诱导表示 $\mathrm{Ind}_{H_s}^K(W_s)$ 有意义。

命题 22 表示 $\mathrm{Res}_K\mathrm{Ind}_H^G(W)$ 与表示 $\mathrm{Ind}_{H_s}^K(W_s)$ 的直和同构，这里 $s\in S\cong K\backslash G/H$.

我们知道，V 是象 xW 的直和，$x\in G/H$. 令 $s\in S$，又令 $V(s)$ 是由象 xW，$x\in KsH$，所生成的 V 的子空间；空间 V 是子空间 $V(s)$ 的直和，并且 $V(s)$ 显然在 K 之下稳定. 剩下来只需证明 $V(s)$ 与 $\mathrm{Ind}_{H_s}^K(W_s)$是 K-同构的. 然而 K 中使得 $x(sW)=sW$的元素 x 所成子群显然等于 H_s，而 $V(s)$是象 $x(sW)$的直和，$x\in K/H_s$. 所以 $V(s)=\mathrm{Ind}_{H_s}^K(sW)$. 因此只需验证 sW 与 W_s 是 H_s-同构的. 这一点是明显的：这个同构由 $s:W_s\to sW$ 给出. □

注记　因为 $V(s)$ 只依赖于 s 在 $K\backslash G/H$ 内的象，所以表示 $\mathrm{Ind}_{H_s}^K(W_s)$（确切到同构）只依赖于 s 所在的双陪集.

7.4 Mackey 的不可约性判定

我们将上面的结果应用到 $K=H$ 的情形. 对于 $s\in G$，令 H_s 仍旧表示 H 的子群 $sHs^{-1}\cap H$；H 的表示 ρ 限制到 H_s 上定义一个表示 $\mathrm{Res}_s(\rho)$. 不要把这个表示与 7.3 所定义的表示 ρ^s 混淆.

命题 23 诱导表示 $V=\mathrm{Ind}_H^G(W)$ 是不可约的必要且只要下列两个条件成立：

(a) W 不可约.

(b) 对于每一 $s\in G-H$，H_s 的两个表示 ρ^s 与 $\mathrm{Res}_s(\rho)$ 是无缘的.

（群 K 的两个表示 V_1 和 V_2 说是无缘的，如果它们没有公共的不可约成分，也就是说，如果 $\langle V_1, V_2\rangle_K=0$.）

V 不可约必要且只要 $\langle V,V\rangle_G=1$. 然而根据 Frobenius 的互反性，我们有：

$$\langle V,V\rangle_G=\langle W,\mathrm{Res}_H V\rangle_H.$$

但是由 7.3，我们有：

$$\mathrm{Res}_H V=\bigoplus_{s\in H\backslash G/H}\mathrm{Ind}_{H_s}^H(\rho^s).$$

再一次应用 Frobenius 互反公式，得

$$\langle V, V\rangle_G = \sum_{s\in H\backslash G/H} d_s, \quad 而\ d_s = \langle \mathrm{Res}_s(\rho), \rho^s\rangle_{H_s}.$$

对于 $s=1$，我们有 $d_s = \langle\rho, \rho\rangle \geqslant 1$. 这样一来，$\langle V, V\rangle_G = 1$ 必要且只要 $d_1 = 1$，而且若 $s \neq 1$，则 $d_s = 0$；这正是条件 (a) 和 (b). □

推论 设H是G的正规子群. $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ 不可约必要且只要ρ不可约，且对于任意 $s\notin H$，ρ不与它的共轭ρ^s同构.

事实上，这时 $H_s = H$ 而 $\mathrm{Res}_s(\rho) = \rho$.

习　　题

7.4 令k是一个有限域，$G = \boldsymbol{SL}_2(k)$，而H是G中由一切矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$，$c=0$，所成的子群，令$\omega$是$k^*$到$\boldsymbol{C}^*$内的一个同态，而$\chi_\omega$是如下定义的$H$的一级特征标：

$$\chi_\omega\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \omega(a).$$

证明，若 $\omega^2\neq 1$，那么由χ_ω所诱导的G的表示是不可约的。

第八章 诱导表示的例子

8.1 正规子群. 对于不可约表示的级的应用

命题 24 令 A 是群 G 的一个正规子群，而 $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ 是 G 的一个不可约表示. 那么

(a) 或者存在 G 的一个子群 $H, H \neq G$ 且包含 A，以及 H 的一个不可约表示 σ，使得 ρ 由 σ 诱导；

(b) 或者 ρ 在 A 上的限制是同型的.

(一个表示叫做同型的，如果它是一些同构的不可约表示的直和.)

令 $V = \bigoplus V_i$ 是表示 ρ (在 A 上的限制)的典型分解，它是一些同型的表示的直和(参看 2.6). 对于 $s \in G$，通过"结构的转移"(transport de structure)，我们看到，$\rho(s)$ 置换这些 V_i[1]；因为 V 不可约，它可迁地置换这些 V_i. 令 V_{i_0} 是其中之一；如果 V_{i_0} 等于 V，那么就得到情形 (b). 否则，令 H 是 G 中满足 $\rho(s)V_{i_0} = V_{i_0}$ 的元素 s 所成的子群. 我们有 $A \subset H, H \neq G$，并且 ρ 是由 H 在 V_{i_0} 内的自然表示 σ 所诱导的. 这就是情形 (a). □

注记 如果 A 是交换的，那么 (b) 相当于说，对于每一 $a \in A$，$\rho(a)$ 是一个位似.

推论 如果 A 是 G 的一个 Abel 正规子群，那么 G 的每一不可约表示 ρ 的级都整除 A 在 G 内的指数 $(G:A)$.

对 G 的阶用归纳法来证明. 在上面命题的情形 (a) 里，归纳法假设表明，σ 的级整除 $(H:A)$；把这个关系乘以 $(G:H)$，那么 ρ 的级就整除 $(G:A)$. 在情形 (b)，令 $G' = \rho(G)$，$A' = \rho(A)$；因为典范映射 $G/A \to G'/A'$ 是满的，所以 $(G':A')$ 整除 $(G:A)$.

---

1) 对于 $s \in G, V = \bigoplus \rho(s)V_i$ 是表示 ρ 在 sAs^{-1} 上的限制的典型分解；但 $sAs^{-1} = A$，所以 $\bigoplus \rho(s)V_i = \bigoplus V_i$，即 $\rho(s)$ 置换这些 V_i.——译者注

上面的注记告诉我们，这时 A' 的元素都是位似，从而都包含在 G' 的中心内。由 6.5，命题 17 得出，ρ 的级整除 $(G':A')$，从而整除 $(G:A)$。$\boxed{\cdot}$

注记 如果 A 是 G 的一个 Abel 子群（不一定正规），那么一般来说，ρ 的级不一定能整除 $(G:A)$，然而我们总有 $\deg(\rho)\leqslant(G:A)$，参看 3.1，定理 9 的推论。

8.2 与一个 Abel 群的半直积

令 A 和 H 是群 G 的两个子群，并且 A 是正规子群。作以下的假设：

(i) A 是 Abel 的。

(ii) G 是 H 与 A 的半直积。

[(ii) 意味着 $G=A\cdot H$ 且 $A\cap H=\{1\}$，或者换句话说，G 的每一元素可以唯一地写作乘积 ah 的形式，$a\in A$ 而 $h\in H$。]

我们证明，G 的不可约表示可以由 H 的某些子群的不可约表示构造出来(这就是 Wigner 和 Mackey 的"小群"方法)。

因为 A 是 Abel 的，所以它的不可约特征标都是一级的，并且作成一个群 $X=\mathrm{Hom}(A,\mathbf{C}^*)$。群 G 如下地作用在 X 上：对于 $s\in G$，$\chi\in X$，$a\in A$，

$$(s\chi)(a)=\chi(s^{-1}as).$$

令 $(\chi_i)_{i\in X/H}$ 是 H 在 X 中的轨道的一个代表系。对于每一 $i\in X/H$，令 H_i 是 H 中使得 $h\chi_i=\chi_i$ 的元素 h 所成的子群。又令 $G_i=A\cdot H_i$ 是 G 中相应的子群。对于 $a\in A$，$h\in H_i$，令

$$\chi_i(ah)=\chi_i(a).$$

这样就将函数 χ_i 开拓到 G_i 上。对于一切 $h\in H_i$，都有 $h\chi_i=\chi_i$，利用这一事实可以看出，χ_i 是 G_i 的一个一级特征标。现在令 ρ 是 H_i 的一个不可约表示；作 ρ 与典范射影 $G_i\to H_i$ 的合成映射，就得到 G_i 的一个不可约表示 $\tilde{\rho}$。最后，作 χ_i 与 $\tilde{\rho}$ 的张量积，我们得到 G_i 的一个不可约表示 $\chi_i\otimes\tilde{\rho}$。令 $\theta_{i,\rho}$ 是 G 的相应的诱导表示。

命题 25

(a) $\theta_{i,\rho}$ 是不可约的.

(b) 如果 $\theta_{i,\rho}$ 与 $\theta_{i',\rho'}$ 同构，那么 $i=i'$ 且 ρ 与 ρ' 同构.

(c) G 的每一不可约表示都与某一 $\theta_{i,\rho}$ 同构.

(这样，我们得到 G 的一切不可约表示.)

我们利用 Mackey 判定(7.4，命题 23) 来证明 (a). 设 $s\notin G_i=A\cdot H_i$. 又 $K_s=G_i\cap sG_is^{-1}$. 我们要证明，如果将 G_i 的表示 $\chi_i\otimes\tilde{\rho}$ 分别与如下定义的两个内射 $K_s\to G_i$: $x\longmapsto x$ 和 $x\longmapsto s^{-1}xs$ 作合成映射，那么就得到 K_s 的两个不同的表示. 为了证明这一点，只要验证这两个表示在 K_s 的子群 A 上的限制是不相同的即可. 然而第一个表示在 A 上的限制是 χ_i 的一个倍数，而第二个表示在 A 上的限制是 $s\chi_i$ 的一个倍数；因为 $s\notin A\cdot H_i$，我们有 $s\chi_i\neq\chi_i$，因此这两个表示的确是不同的.

现在证明 (b). 首先，$\theta_{i,\rho}$ 在 A 上的限制只含有属于 χ_i 的轨道 $H\chi_i$ 的那些特征标 χ. 这就证明了 $\theta_{i,\rho}$ 确定了 i. 其次，令 W 是 $\theta_{i,\rho}$ 的表示空间，而 W_i 是 W 中对应于 χ_i 的子空间 [即 W 中满足以下条件的元素 x 所成的集合：对于一切 $a\in A$，都有 $\theta_{i,\rho}(a)x=\chi_i(a)x$]. 子空间 W_i 在 H_i 之下稳定，并且可以直接验证 H_i 在 W_i 内的表示与 ρ 同构，因此 $\theta_{i,\rho}$ 也确定了 ρ.

最后，令 $\sigma: G\to \mathbf{GL}(W)$ 是 G 的一个不可约表示. 令 $W=\bigoplus_{\chi\in X}W_\chi$ 是 $\mathrm{Res}_A W$ 的典型分解. 在这些 W_χ 中，至少有一个不是零；如果 $s\in G$，那么 $\sigma(s)$ 将 W_χ 变到 $W_{s(\chi)}$. 群 H_i 将 W_{χ_i} 映入自身；令 W_i 是 W_{χ_i} 的一个不可约子 $\mathbf{C}[H_i]$-模，ρ 是 H_i 的相应的表示. 显然 $G_i=A\cdot H_i$ 的表示与 $\chi_i\otimes\tilde{\rho}$ 同构. 于是 σ 在 G_i 上的限制至少包含 $\chi_i\otimes\tilde{\rho}$ 一次. 由命题 21 得出，σ 在诱导表示 $\theta_{i,\rho}$ 里至少出现一次；因为 $\theta_{i,\rho}$ 是不可约的，所以 σ 与 $\theta_{i,\rho}$ 同构，这就证明了 (c). □

习 题

8.1 令 a, h, h_i 依次是 A, H, H_i 的阶. 证明，$a=\sum(h/h_i)$. 证明，

对于固定的 i，表示 $\theta_{i,p}$ 的级的平方和等于 h^2/h_i. 由此推出 (c) 的另一证明.

8.2 利用命题 25 重新计算群 D_n, $\mathfrak{A}_4$ 和 $\mathfrak{S}_4$ 的不可约表示（参看第五章）.

8.3 几类有限群摘要

关于这一节和下一节结果的较为详细的论述，可看 Bourbaki, 代数 I, § 7.

可解群　群 G 叫做可解的，如果存在 G 的一个子群序列

$$\{1\}=G_0\subset G_1\subset\cdots\subset G_n=G,$$

其中 G_{i-1} 是 G_i 的正规子群，且 G_i/G_{i-1} 是 Abel 群，$1\leqslant i\leqslant n$. (一个等价的定义是：G 是由子群 $\{1\}$ 通过有限次具有 Abel 核的扩张而得到的.)

超可解群　在上述定义中再要求所有 G_i 都是 G 的正规子群，且 G_i/G_{i-1} 是循环群.

幂零群　在上述定义中再要求对于 $1\leqslant i\leqslant n$, G_i/G_{i-1} 包含在 G/G_{i-1} 的中心内.（等价的定义是：G 是由 $\{1\}$ 通过有限次中心扩张而得到的.）

显然，超可解⇒可解. 另一方面，直接验证可知，一个超可解群的每一中心扩张都是超可解的；因此幂零⇒超可解.

p-群　设 p 是一个素数. 阶是 p 的某一幂的群叫做 p-群.

定理 14　每一 p-群都是幂零的(因而是超可解的).

根据以上所述，只需证明每一非平凡 p-群的中心是非平凡的. 这一点是以下引理的直接推论：

引理 3　令 G 是一个 p-群，它作用在一个有限集 X 上；又令 X^G 是 X 中在 G 之下不动的元素所成的子集. 我们有

$$\mathrm{Card}\,(X)\equiv\mathrm{Card}(X^G)(\mathrm{mod}\ p).$$

事实上，$X-X^G$ 是 G 的非平凡轨道的并，而每一个这样的轨道中元素的个数是 p 的一个幂 p^α, $\alpha\geqslant 1$；所以 $\mathrm{Card}\,(X-X^G)$ 可以被 p 整除. □

现在将这个引理应用到 $X = G$ 而 G 是通过内自同构而作用在 X 上的情形. 这时 X^G 就是 G 的中心 C. 于是

$$\mathrm{Card}(C) \equiv \mathrm{Card}(G) \equiv 0 \pmod p,$$

从而 $C \neq \{1\}$. 定理被证明. □

我们再给出引理 3 的另一个应用,这将在第三部分用到:

命题 26 令 $V \neq 0$ 是一个特征为 p 的域 k 上的向量空间,又令 $\rho: G \to \boldsymbol{GL}(V)$ 是一个 p-群 G 在 V 内的线性表示. 那么存在 V 的一个非零元素,它在一切 $\rho(s)$, $s \in G$, 之下不动.

令 x 是 V 的一个非零元素,而 X 是由一切 $\rho(s)x$, $s \in G$, 所生成的 V 的子群. 对 X 应用引理 3, 注意 X 是有限的,它的阶是 p 的一个幂. 所以 $X^G \neq \{0\}$, 命题被证明. □

推论 在特征 p 的情形,一个 p-群仅有的不可约表示就是平凡表示.

习 题

8.3 证明,二面体群 D_n 是超可解的,并且当且仅当 n 是 2 的幂时, D_n 是幂零的.

8.4 证明,交错群 $\mathfrak{A}_4$ 是可解的,但不是超可解的. 对于 $\mathfrak{S}_4$ 证明同样的论断.

8.5 证明,一个可解群或超可解群或幂零群的每一子群和每一商群都分别是可解的或超可解的或幂零的.

8.6 令 p 和 q 是不同的素数,而 G 是一个阶为 $p^a q^b$ 的群,这里 a,b 都是正整数.

(i) 设 G 的中心是 $\{1\}$. 对于 $s \in G$, 令 $c(s)$ 表示 s 的共轭类中元素的个数. 证明,存在 $s \neq 1$ 使得 $c(s) \not\equiv 0 \pmod q$ [否则 $G - \{1\}$ 的元素个数将能被 q 整除]; 对于这样的 s 来说, $c(s)$ 是 p 的幂; 由此推出, 存在 G 的一个既不等于 $\{1\}$ 又不等于 G 的正规子群[应用习题 6.10].

(ii) 证明, G 是可解群 (Burnside 定理). [对 G 的阶作归纳法,区别 G 的中心等于$\{1\}$和不等于$\{1\}$两种情形.]

(iii) 通过例子证明 G 不一定是超可解的(参看习题 8.4).

(iv) 给出一个非可解群的例子, 要求它的阶恰被三个素数整除 [可以取 $\mathfrak{S}_5, \mathfrak{S}_6, \boldsymbol{GL}_3(\boldsymbol{F}_2)$].

8.4 Sylow 定理

令 p 是一个素数，G 是一个阶为 $g = p^n m$ 的群，这里 m 与 p 互素．G 的一个阶为 p^n 的子群叫做 G 的一个 Sylow p-子群．

定理 15

(a) 存在 Sylow p-子群．

(b) G 的 Sylow p-子群都是内共轭的．

(c) G 的每一 p-子群都含在一个 Sylow p-子群内．

为了证明 (a)，我们对 G 的阶作归纳法．可以假定 $n \geqslant 1$，即 $\mathrm{Card}(G) \equiv 0 \pmod p$．令 C 是 G 的中心．如果 $\mathrm{Card}(C)$ 可以被 p 整除，由一个初等的论断可知，C 含有一个 p 阶循环子群 D．由归纳法假设，G/D 有一个 Sylow p-子群，而这个子群在 G 中的原象就是 G 的一个 Sylow p-子群．如果 $\mathrm{Card}(C) \not\equiv 0 \pmod p$，令 G 通过内自同构作用在 $G-C$ 上；这就将 $G-C$ 划分为轨道（共轭类）．当 $\mathrm{Card}(G-C) \not\equiv 0 \pmod p$ 时，这些轨道之一所含元素的个数要与 p 互素．于是存在一个不等于 G 的子群 H，使得 $(G:H) \not\equiv 0 \pmod p$．因此，$H$ 的阶可以被 p^n 整除．由归纳法的假设，H 含有一个 p^n 阶子群．

现在令 P 是 G 的一个 Sylow p-子群，而 Q 是 G 的一个 p-子群．p-群 Q 通过左平移作用在 $X = G/P$ 上．由 8.3，引理 3，我们有

$$\mathrm{Card}(X^Q) \equiv \mathrm{Card}(X) \not\equiv 0 \pmod p,$$

从而 $X^Q \neq \varnothing$．于是存在一个元素 $x \in G$，使得 $QxP = xP$，所以 $Q \subset xPx^{-1}$，这就证明了 (c)．如果 $\mathrm{Card}(Q) = p^n$，那么 Q 与 xPx^{-1} 有相同的阶，从而 $Q = xPx^{-1}$，这就证明了 (b)．□

习　　题

8.7 令 H 是群 G 的一个正规子群而 P_H 是 G/H 的一个 Sylow p-子群．

(a) 证明，存在 G 的一个 Sylow p-子群 P，它在 G/H 内的象就是 P_H [利用 Sylow 子群的共轭性]．

(b) 证明，如果 H 是一个 p-群或 H 被包含在 G 的中心内，那么 P 是唯

一的. [归结到H的阶与p互素的情形,再利用p_H到H内的每一个同态都是平凡的这一事实.]

8.8 令G是一个幂零群. 证明, 对于每一素数p, G含有唯一的 Sylow p-子群,而且是正规的[对G的阶作归纳法,并且对G关于它的中心的商群应用归纳法假设,参看习题8.7(b)]. 由此推出G是一些 p-群的直积.

8.9 令 $G = \boldsymbol{GL}_n(k)$, 这里k是一个特征为p的有限域. 证明, 在对角线上都是1的上三角形矩阵所成的子群是G的一个 Sylow p-子群.

8.5 超可解群的线性表示

引理 4 令G是一个非交换的超可解群. 那么存在G的一个正规 Abel 子群,它不被包含在G的中心内.

令C是G的中心. 商群$H = G/C$是超可解的,因而有一个合成列,其中第一个非平凡项H_1是H的一个循环正规子群. H_1在G中的原象就具有所要求的性质. □

定理 16 令G是一个超可解群. 那么G的每一不可约表示都是由G的某一子群的一个一级表示所诱导的(即单项表示).

我们对G的阶作归纳法来证明这个定理. 因此我们可以只考虑G的忠实的不可约表示ρ,即 $\mathrm{Ker}(\rho) = \{1\}$ 的情形. 如果G是 Abel 群,那么这样的ρ是一级的,此时没有什么可证的. 假设G不是 Abel 群. 令A是G的一个正规 Abel 子群,并且它不被包含在G的中心内(参看引理 4). 因为ρ是忠实的, 所以 $\rho(A)$ 不被包含在 $\rho(G)$ 的中心内; 于是存在 $a \in A$ 使得 $\rho(a)$ 不是一个位似. 因此ρ在A上的限制不是同型的. 由命题 24, 这就得出ρ是由G的一个子群H的一个不可约表示所诱导的, 这个子群不等于G. 对H应用归纳法假设就得到这个定理. □

习 题

8.10 将定理16推广到这样的群上: 它们是一个超可解群与一个 Abel 正规子群的半直积[应用命题25归结到超可解的情形].

8.11 令$\boldsymbol{H}$是$\boldsymbol{R}$上四元数体,它的基 $\{1, i, j, k\}$ 满足

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \ ij = -ji = k, \ jk = -kj = i, \ ki = -ik = j.$$

令 E 是 H^* 中由八个元素 ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ 所成的子群（四元数群）；令 G 是 E 和十六个元素 $(\pm 1\pm i\pm j\pm k)/2$ 的并集. 证明，G 是 H^* 的一个可解子群，它是一个三阶循环群与正规子群 E 的半直积. 利用同构 $\boldsymbol{H}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\simeq \boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{C})$ 定义 G 的一个二级不可约表示. 证明，这个表示不是单项的（注意 G 没有指数为 2 的子群）.［群 G 是 Hurwitz "整四元数" 环的可逆元素所成的群；它也是在特征为 2 的情形下椭圆曲线 $y^2-y=x^3$ 的自同构群. 它与 $\boldsymbol{SL}_2(\boldsymbol{F}_3)$ 同构.］

8.12 令 G 是一个 p-群. 证明，对于 G 的每一不可约特征标 χ，都有 $\sum\chi'(1)^2\equiv 0(\bmod \chi(1)^2)$，这里对一切满足条件 $\chi'(1)<\chi(1)$ 的不可约特征标 χ' 求和.［利用 $\chi(1)$ 是 p 的幂这样一个事实，并且应用命题 5，推论 2 (a).］

第九章 Artin 定理

9.1 环 $R(G)$

令 G 是一个有限群，$\chi_1,\cdots,\chi_h$ 是它的一切互不相同的不可约特征标．G 上一个类函数是特征标，必要且只要它是这些 χ_i 的非负整系数线性组合．令 $R^+(G)$ 表示这样的函数所成的集．令 $R(G)$ 表示 $R^+(G)$ 所生成的群，也就是两个特征标的差所成的集合．我们有

$$R(G)=\mathbf{Z}\chi_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}\chi_h.$$

$R(G)$的元素叫做虚特征标．因为两个特征标的积还是一个特征标，所以 $R(G)$ 是 G 上取复数值的类函数所成的环 $F_{\mathbf{C}}(G)$ 的一个子环．由于 χ_i 作成 $F_{\mathbf{C}}(G)$ 在 $\mathbf{C}$ 上的一个基，因此可以把 $\mathbf{C}\otimes R(G)$ 与 $F_{\mathbf{C}}(G)$ 等同起来．

我们也可以把 $R(G)$看作有限生成 $\mathbf{C}[G]$-模的范畴的 Grothendieck 群；这个观点将在第三部分里用到．

如果 H 是 G 的一个子群，那么限制作用就定义了一个环同态 $R(G)\to R(H)$，记作 Res_H^G 或 Res．

类似地，诱导作用(7.2)定义一个 Abel 群的同态 $R(H)\to R(G)$，记作 Ind_H^G 或 Ind．由定理 13，同态 Ind 和 Res 关于双线性型 $\langle\varphi,\psi\rangle_H$ 和 $\langle\varphi,\psi\rangle_G$ 来说互相伴随．再者，公式

$$\mathrm{Ind}(\varphi\cdot\mathrm{Res}(\psi))=\mathrm{Ind}(\varphi)\cdot\psi$$

表明，$\mathrm{Ind}:R(H)\to R(G)$的象是环 $R(G)$ 的一个理想．

如果 A 是一个交换环，那么同态 Res 和 Ind 都可以线性地开拓为 A-线性映射：

$$A\otimes\mathrm{Res}:A\otimes R(G)\to A\otimes R(H),$$
$$A\otimes\mathrm{Ind}:A\otimes R(H)\to A\otimes R(G).$$

习 题

9.1 令φ是G上一个取实数值的类函数．假设$\langle\varphi,1\rangle=0$并且对每一$s\neq 1$，都有$\varphi(s)\leqslant 0$．证明，对于每一特征标$\chi$，$\langle\varphi,\chi\rangle$的实部$\geqslant 0$．[利用对一切$s$，$\varphi(s^{-1})\chi(s)$的实部都大于或等于$\varphi(s^{-1})\chi(1)$的实部这一事实.]由此推出，如果$\varphi$属于$R(G)$，那么$\varphi$是一个特征标．

9.2 令$\chi\in R(G)$．证明，χ是一个不可约特征标必要且只要$\langle\chi,\chi\rangle=1$且$\chi(1)\geqslant 0$．

9.3 设f是G上一个函数，k是一个整数．令$\Psi^k(f)$表示函数$s\mapsto f(s^k)$．令

(a) 设ρ是G的一个表示，其特征标为χ．对于每一整数$k\geqslant 0$，令χ_σ^k和χ_λ^k分别表示ρ的k次对称幂和k次交错幂的特征标（参看2.1关于$k=2$的情形）．令

$$\sigma_T(\chi)=\sum_{k=0}^{\infty}\chi_\sigma^k T^k \text{ 和 } \lambda_T(\chi)=\sum_{k=0}^{\infty}\chi_\lambda^k T^k,$$

这里T是一个不定元．证明，对于$s\in G$，我们有

$$\sigma_T(\chi)(s)=1/\det(1-\rho(s)T) \text{ 和 } \lambda_T(\chi)(s)=\det(1+\rho(s)T).$$

推导以下公式：

$$\sigma_T(\chi)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\Psi^k(\chi)T^k/k\right\},$$

$$\lambda_T(\chi)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\Psi^k(\chi)T^k/k\right\},$$

和

$$n\chi_\sigma^n=\sum_{k=1}^{n}\Psi^k(\chi)\chi_\sigma^{n-k},\quad n\chi_\lambda^n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Psi^k(\chi)\chi_\lambda^{n-k}.$$

这些公式是2.1中相应的公式的一般化．

(b) 由(a)推出$R(G)$在算子Ψ^k之下稳定，$k\in\mathbf{Z}$．

9.4 令n是一个与G的阶互素的整数．

(a) 令χ是G的一个不可约特征标．证明，$\Psi^n(\chi)$是G的一个不可约特征标．[利用前两个习题.]

(b) 将映射$x\mapsto x^n$线性地开拓为向量空间$\mathbf{C}[G]$的一个自同态ψ_n．证明ψ_n在Cent $\mathbf{C}[G]$上的限制是代数Cent $\mathbf{C}[G]$的一个自同构．

9.2 Artin 定理的表述

这就是以下的定理：

定理 17 令 X 是有限群 G 的一个子群族．令

$$\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H\in X} R(H) \to R(G)$$

是由映射族 Ind_H^G，$H\in X$，所定义的同态．那么下列性质是等价的：

(i) G 是属于 X 的子群的共轭子群的并．

(ii) $\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H\in X} R(H) \to R(G)$ 的余核是有限的．

因为 $R(G)$ 作为一个群是有限生成的，我们可以将 (ii) 改述为：

(ii′) 对于 G 的每一特征标 χ，存在虚特征标 $\chi_H \in R(H)$，$H\in X$，和整数 $d\geqslant 1$，使得

$$d\chi = \sum_{H\in X} \mathrm{Ind}_H^G(\chi_H).$$

注意 G 的循环子群族满足 (i)，所以有：

推论 G 的每一特征标都是 G 的循环子群的特征标所诱导的特征标的有理系数线性组合．

在下一节我们将看到，用"整的"代替"有理的"，用"初等的"代替"循环的"，上述论断仍然成立．

习 题

9.5 取 G 是交错群 $\mathfrak{A}_4$，取 X 是 G 的循环子群族．令 $\{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \psi\}$ 是 G 的一切互不相同的不可约特征标(参看 5.7)．证明，$\bigoplus_{H\in X} R^+(H)$ 在 Ind 之下的象由以下五个特征标生成：

$$\chi_0+\chi_1+\chi_2+\psi,\ 2\psi, \chi_0+\psi\ ,\chi_1+\psi,\ \chi_2+\psi.$$

由此推出 $R(G)$ 的一个元素 χ 属于 Ind 的象，必要且只要 $\chi(1)\equiv 0 \pmod 2$．证明，特征标 χ_0，χ_1，χ_2 都不是这些循环子群所诱导的特征标的正有理系数的线性组合．

9.3 第一个证明

首先证明 (ii) ⇒ (i)．令 S 是属于 X 的子群 H 的共轭子群的并．每一个形如 $\Sigma \mathrm{Ind}_H^G(f_H)$ 的函数，其中 $f_H \in R(H)$，在 S 以外等于零．如果 (ii) 成立，那么 G 的每一个类函数都在 S 以外等于零，这就证明了 $S = G$，从而 (i) 成立．

反之，设 (i) 成立．为了证明 (ii) 成立，只需证明 $\mathbf{Q}$-线性映射

$$\mathbf{Q}\otimes \mathrm{Ind}: \bigoplus_{H\in X} \mathbf{Q}\otimes R(H) \to \mathbf{Q}\otimes R(G)$$

是满的即可．这也相当于证明 $\mathbf{C}$-线性映射

$$\mathbf{C}\otimes \mathrm{Ind}: \bigoplus_{H\in X} \mathbf{C}\otimes R(H) \to \mathbf{C}\otimes R(G)$$

是满的．由对偶性，这就相当于伴随映射

$$\mathbf{C}\otimes \mathrm{Res}: \mathbf{C}\otimes R(G) \to \bigoplus_{H\in X} \mathbf{C}\otimes R(H)$$

是单的．然而这个映射的单性是明显的；这相当于说，G 上一个类函数如果在每一 $H\in X$ 上的限制都是零，那么这个函数等于零．定理被证明．□

习　　题

我们假定子群族 X 对于取共轭和取子群来说是稳定的[1]，而 G 是属于 X 的子群的并（例如，G 的循环子群族）．

9.6 令 N 是同态

$$\mathbf{Q}\otimes \mathrm{Ind}: \bigoplus_{H\in X} \mathbf{Q}\otimes R(H) \to \mathbf{Q}\otimes R(G)$$

的核．

(a) 令 $H, H'\in X$ 且 $H'\subset H$．设 $\chi'\in R(H')$ 而 $\chi = \mathrm{Ind}_{H'}^{H}(\chi')\in R(H)$．证明 $\chi - \chi'$ 属于 N．

1) 即 $H\in X, s\in G \Longrightarrow sHs^{-1}\in X$；又 $H\in X$，而 H' 是 H 的子群 $\Rightarrow H'\in X$．——译者注

(b) 令 $H\in X$，$s\in G$. 记 ${}^sH=sHs^{-1}$. 令 $\chi\in R(H)$，而 ${}^s\chi$ 是 $R({}^sH)$ 中如下定义的一个元素：对一切 $h\in H$，定义 ${}^s\chi(shs^{-1})=\chi(h)$. 证明，$\chi-{}^s\chi$ 属于 N.

(c) 证明，N 是由上述 (a) 和 (b) 类型的元素在 $\mathbf{Q}$ 上生成的. [纯量扩张到 $\mathbf{C}$ 上，再利用对偶性. 于是就归结为证明，如果对于每一 $H\in X$ 都给定了一个类函数 f_H，并且假定 f_H 满足类似于上述 (a) 和 (b) 的限制条件和共轭条件，那么存在 G 上一个类函数 f，使得对于每一 H，都有 $\mathrm{Res}_H^G(f)=f_H$.][1]

9.7. 证明，$\mathbf{Q}\otimes R(G)$ 有如下的由生成元和关系的显示：

生成元：符号 (H,χ)，$H\in X$，$\chi\in\mathbf{Q}\otimes R(H)$.

关系：

(i) $(H,\lambda\chi+\lambda'\chi')=\lambda(H,\chi)+\lambda'(H,\chi')$，$\lambda$，$\lambda'\in\mathbf{Q}$，$\chi$，$\chi'\in\mathbf{Q}\otimes R(H)$.

(ii) 对于 $H'\subset H$，$\chi'\in R(H')$ 和 $\chi=\mathrm{Ind}_{H'}^H(\chi')$，我们有 $(H,\chi)=(H',\chi')$.

(iii) 对于 $H\in X$，$s\in G$，$\chi\in R(H)$，在习题 9.6 (b) 的记法下，我们有 $(H,\chi)=({}^sH,{}^s\chi)$.

[利用习题 9.6.]

9.4 (i) ⇒ (ii) 的第二个证明

首先设 A 是一个循环群，它的阶是 a. 通过以下公式定义一个 A 上的函数 θ_A：

$$\theta_A(x)=\begin{cases} a, & \text{若 } x \text{ 生成 } A. \\ 0, & \text{在其它情形.}\end{cases}$$

命题 27 *设 G 是一个阶为 g 的有限群. 那么*

$$g=\sum_{A\subset G}\mathrm{Ind}_A^G(\theta_A),$$

这里 A 遍历 G 的一切循环子群.

(在这个公式里，字母 g 表示等于 g 的常值函数.)

1) 这个习题给出用诱导特征标 (H,χ) 来表示 $\mathbf{Q}\otimes R(G)$ 的一种"显示". 对于 L-级数理论的应用上，很有希望给出 $R(G)$ 本身的这样一个显示(不与 $\mathbf{Q}$ 作张量积). 当 G 是可解的时候，这个工作已由 Langlands-Deligne 做了(*Lecture Notes in Math.*, **349**, p. 517, 定理 4).

令 $\theta'_A=\mathrm{Ind}_A^G(\theta_A)$. 对于 $x\in G$，我们有

$$\theta'_A(x)=\frac{1}{a}\sum_{\substack{y\in G\\ yxy^{-1}\in A}}\theta_A(yxy^{-1})$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{\substack{y\in G\\ yxy^{-1}\text{生成}A}}a=\sum_{\substack{y\in G\\ yxy^{-1}\text{生成}A}}1,$$

然而对于每一 $y\in G$，yxy^{-1} 生成 G 的一个唯一的循环子群. 所以我们有

$$\sum_{A\subset G}\theta'_A(x)=\sum_{y\in G}1=g.\ \square$$

命题 28 如果 A 是一个循环群，则 $\theta_A\in R(A)$.

对 A 的阶 a 作归纳法来证明. $a=1$ 的情形是明显的. 由命题 27，我们有

$$a=\sum_{B\subset A}\mathrm{Ind}_B^A(\theta_B)=\theta_A+\sum_{B\neq A}\mathrm{Ind}_B^A(\theta_B).$$

由归纳法假设，对于 $B\neq A$，$\theta_B\in R(B)$，所以 $\mathrm{Ind}_B^A(\theta_B)$ 属于 $R(A)$. 另一方面，显然 $a\in R(A)$，因而 θ_A 属于 $R(A)$. $\square$

对于 (i) ⇒ (ii) 的证明的应用

首先注意，如果 A' 被包含在 A 的一个共轭子群内，那么 $\mathrm{Ind}_{A'}^G$ 的象被包含在 Ind_A^G 的象内. 因此可以假定 X 是 G 的循环子群族. 于是由命题 27 和 28 得：

$$g=\sum_{A\in X}\mathrm{Ind}_A^G(\theta_A),\ \theta_A\in R(A).$$

所以元素 g 属于 Ind 的象. 因为这个象是 $R(G)$ 的一个理想（参看 9.1），它含有每一个形如 $g\chi$ 的元素，$\chi\in R(G)$，这就证明了 (ii'). (甚至还证明的更多一些，因为我们得到一个确切的分母，就是 G 的阶.)

习　题

9.8 如果 A 是一个阶为 a 的循环群，令 $\lambda_A=\varphi(a)r_A-\theta_A$，这里 $\varphi(a)$ 是 A 的生成元的个数，而 r_A 是正则表示的特征标. 证明，λ_A 是 A 的一个与

单位特征标正交的特征标［应用习题 9.1］. 证明，如果 A 遍历一个阶为 g 的群 G 的一切循环子群，那么有：

$$(*) \qquad \sum_{A\subset G}\operatorname{Ind}_A^G(\lambda_A)=g(r_G-1),$$

这里 r_G 是 G 的正则表示的特征标［利用命题 27］.

［应用 (Aramata-Brauer)：令 F 是数域 E 的一个有限扩域，令 $\Phi(s)=\zeta_F(s)/\zeta_E(s)$ 是它们的 ζ-函数的商. 我们知道，它在整个复平面内是半纯的. 现在假设 F/E 是一个 Galois 扩张，其 Galois 群为 G. 那么由上面的公式(＊)可以得出恒等式：

$$\Phi(s)^g=\prod_A L_{F/F_A}(s,\lambda_A),$$

这里 F_A 表示 F 中对应于循环子群 A 的子域. 函数 $L_{F/F_A}(s,\lambda_A)$ 是 "Abel" L-函数，因而是全纯的. 于是可以看出，Φ 本身是全纯的，即 ζ_E 整除 ζ_F；(然而还不知道这个结果对于非 Galois 扩张来说是否成立. (这是 Artin 猜想的一个推论).］

第十章 Brauer 定 理

在 10.1 到 10.4 里，字母 p 都表示一个素数.

10.1 p-正则元素. p-初等子群

令 x 是有限群 G 的一个元素. x 叫做一个 p-元素（或 p-幺幂元素），如果 x 的阶是 p 的一个幂；x 叫做一个 p'-元素（或 p-正则元素），如果 x 的阶与 p 互素.

G 的每一元素 x 可以唯一地写成 $x=x_u x_r$，这里 x_u 是 p-幺幂的，而 x_r 是 p-正则的，并且 x_u 与 x_r 可交换；再者，x_u 和 x_r 都是 x 的幂. 将 x 所生成的循环子群分解成它的 p-分支和 p'-分支的直积，就可以证明这一事实. 元素 x_u 和 x_r 分别叫做 x 的 p-分支和 p'-分支.

一个群 H 叫做 p-初等的，如果它是一个阶与 p 互素的循环群 C 和一个 p-群 P 的直积. 这样的群是幂零的，并且分解 $H=C\times P$ 是唯一的；C 是 H 中一切 p'-元素的集合，P 是 H 中一切 p-元素的集合.

令 x 是有限群 G 的一个 p'-元素，C 是 x 所生成的循环子群；又令 $Z(x)$ 是 x 的中心化子（G 中满足条件 $sx=xs$ 的元素 s 所成的集）. 如果 P 是 $Z(x)$ 的一个 Sylow p-子群，那么 $H=C\cdot P$ 是 G 的一个 p-初等子群，叫做与 x 相伴的 p-初等子群；这样的 p-初等子群除了在 $Z(x)$ 内共轭外是唯一的.

习 题

10.1 令 $H=C\cdot P$ 是有限群 G 的一个 p-初等子群，x 是 C 的一个生成元. 证明，H 被包含在一个与 x 相伴的 p-初等子群 H' 内.

10.2 令 $G=GL_n(k)$，这里 k 是一个特征为 p 的有限域. 证明，元素

$x \in G$ 是一个 p-元素必要且只要它的特征值都等于 1，即 $1-x$ 是幂零的；x 是一个 p'-元素必要且只要它是半单的，即在 k 的某一有限扩域内可以对角化。

10.2 由 p-初等子群所产生的诱导特征标

这一节和以下两节的目的是要证明以下的结果：

定理 18 令 G 是一个有限群．令 V_p 是 $R(G)$ 中由 G 的一切 p-初等子群诱导的特征标所生成的子群．那么 V_p 在 $R(G)$ 中的指数是有限的且与 p 互素．

令 $X(p)$ 是 G 的 p-初等子群族．群 V_p 是由诱导同态 Ind_H^G，$H \in X(p)$，所定义的同态

$$\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in X(p)} R(H) \to R(G)$$

的象．于是 V_p 是 $R(G)$ 的一个理想．为了证明这个定理，只需证明，存在一个与 p 互素的整数 m，使得 $m \in V_p$．事实上，我们证明以下更为精确的结果：

定理 18′ 令 $g = p^n l$ 是 G 的阶，$(p, l) = 1$．那么 $l \in V_p$．

这个证明(由 Roquette 和 Brauer-Tate [12] 给出)利用了由 g 次单位根所生成的 $\mathbf{C}$ 的子环 A．这个环作为一个 $\mathbf{Z}$-模是自由的并且是有限生成的；它的元素都是代数整数．我们有 $\mathbf{Q} \cap A = \mathbf{Z}$，因为这个交里的元素既是有理数又是代数整数（参看 6.4)．商群 $A/\mathbf{Z}$ 是有限生成的无扭群，因而是自由群；由此(将 $A/\mathbf{Z}$ 的一个基提升到 A 内)推出，A 有一个基 $\{1, \alpha_1, \cdots, \alpha_c\}$，它包含元素 1．

通过与 A 作张量积，同态 Ind 定义一个 A-线性映射

$$A \otimes \mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in X(p)} A \otimes R(H) \to A \otimes R(G).$$

由基 $\{1, \alpha_1, \cdots, \alpha_c\}$ 的存在就得出以下的

引理 5 $A \otimes \mathrm{Ind}$ 的象是 $A \otimes V_p$，并且

$$(A \otimes V_p) \cap R(G) = V_p.$$

这样，为了证明常值函数 l 属于 V_p，只需证明 l 属于 $A \otimes \mathrm{Ind}$

的象即可.换一句话说,只需证明 l 有形式 $\sum_H a_H \operatorname{Ind}_H^G(f_H)$, $a_H\in A$, $f_H\in R(H)$.

注记

(1) 环 A 较环 $\boldsymbol{Z}$ 优越之处在于 G 的所有特征标的值都在 A 内,因为这些值都是 g 次单位根的和. 因此 $A\otimes R(G)$ 是 G 上在 A 内取值的类函数所成的环的一个子环.

(2) 可以证明, A 是割圆域 $\boldsymbol{Q}\cdot A$ 的代数整数所成的集,但是我们并不需要这个结果.

10.3 特征标的构造

引理 6 G 上每一个整值类函数,如果它的值可以被 g 整除,都是 G 的循环子群的特征标所诱导的特征标的一个 A-线性组合.

(在这里和以后凡说到"整值"时,都指的是"在 $\boldsymbol{Z}$ 内取值".)

令 f 是这样一个函数,并且把它写作 $g\chi$, 这里 χ 是一个整值类函数. 如果 C 是 G 的一个循环子群, 令 θ_C 是在 9.4 里所定义的 $R(C)$ 的那个元素. 由命题 27, 我们有

$$g=\sum_C \operatorname{Ind}_C^G(\theta_C),$$

从而

$$\begin{aligned} f=g\chi &= \sum_C \operatorname{Ind}_C^G(\theta_C)\chi \\ &= \sum_C \operatorname{Ind}_C^G(\theta_C\cdot \operatorname{Res}_C^G\chi). \end{aligned}$$

剩下来就是要证明, 对于每一个 C, $\theta_C\cdot\operatorname{Res}_C^G\chi$ 属于 $A\otimes R(C)$. 然而 $\chi_C=\theta_C\cdot\operatorname{Res}_C^G\chi$ 可以被 C 的阶整除,所以如果 ψ 是 C 的一个特征标, 那么 $\langle\chi_C,\psi\rangle\in A$. 这就证明了 χ_C 是 C 的特征标的一个 A-线性组合,因而 $\chi_C\in A\otimes R(C)$. □

引理 7 令 χ 是 $A\otimes R(G)$ 的一个整值元素. 令 $x\in G$ 而 x_r 是 x 的 p'-分支(参看 10.1). 那么

$$\chi(x)\equiv\chi(x_r) \pmod p.$$

通过限制作用，我们可以归结到 G 是由 x 所生成的循环群的情形。这时 $\chi=\sum a_i\chi_i$，$a_i\in A$ 而 χ_i 遍历 G 的一切不同的一级特征标。如果 q 是 p 的一个足够大的幂，我们有 $x^q=x_r^q$，从而对一切 i 都有 $\chi_i(x)^q=\chi_i(x_r)^q$。所以

$$\chi(x)^q=\left(\sum a_i\chi_i(x)\right)^q\equiv\sum a_i^q\chi_i(x)^q$$
$$\equiv\sum a_i^q\chi_i(x_r)^q\equiv\chi(x_r)^q\pmod{pA}.$$

因为 $pA\cap\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$，所以

$$\chi(x)^q\equiv\chi(x_r)^q\pmod p.$$

然而对一切 $\lambda\in\mathbf{Z}$，都有 $\lambda^q\equiv\lambda\pmod p$，因此

$$\chi(x)\equiv\chi(x_r)\pmod p.\ \square$$

引理 8 令 x 是 G 的一个 p'-元素，H 是 G 的一个与 x 相伴的 p-初等子群(参看 10.1)。那么存在一个整值函数 $\phi\in A\otimes R(H)$，使得诱导函数 $\phi'=\mathrm{Ind}_H^G(\phi)$ 具有以下性质：

(a) $\phi'(x)\not\equiv0\pmod p$。

(b) 对于 G 中每一个不与 x 共轭的 p'-元素 s，都有 $\phi'(s)=0$。

令 C 是由 x 所生成的 G 的循环子群，而 $Z(x)$ 是 x 在 G 内的中心化子。我们有 $H=C\times P$，这里 P 是 $Z(x)$ 的一个 Sylow p-子群。令 c 是 C 的阶，p^n 是 P 的阶。令 ϕ_C 是如下定义的一个 C 上的函数：

$$\phi_C(x)=c\ \text{而}\ \phi_C(y)=0,\ \text{若}\ y\neq x.$$

于是 $\phi_C=\sum_\chi\chi(x^{-1})\chi$，这里 χ 遍历 C 的不可约特征标的集；由此得出 ϕ_C 属于 $A\otimes R(C)$（也可以由引理 6 得出）。

令 ϕ 是 $H=C\times P$ 上一个函数，对于 $x\in C$ 和 $y\in P$，定义 $\phi(xy)=\phi_C(x)$。这是 ϕ_C 在射影 $H\to C$ 之下的原象。所以 $\phi\in A\otimes R(H)$。我们证明，ϕ 满足引理的条件。

如果 s 是 G 的一个 p'-元素，而 $y\in G$，则 ysy^{-1} 是一个 p'-元素；如果 ysy^{-1} 属于 H，那么它就属于 C。于是当 $ysy^{-1}\neq x$ 时，我们有 $\phi(ysy^{-1})=0$。由此得出，如果 s 不与 x 共轭，则 $\phi'(s)=0$，这就证明了 (b)。再者，

$$\psi'(x) = \frac{1}{c\cdot p^a}\sum_{yxy^{-1}=x}\psi(x)$$
$$= \frac{1}{p^a}\sum_{yxy^{-1}=x}1 = \frac{\mathrm{Card}(Z(x))}{p^a}.$$

因为 $p^a = \mathrm{Card}(P)$ 是能够整除 $\mathrm{Card}(Z(x))$ 的 p 的最高次幂，所以 $\psi'(x)\not\equiv 0(\bmod p)$. □

引理 9 存在$A\otimes V_p$的一个整值元素ψ，使得对于每一$x\in G$，$\psi(x)\not\equiv 0(\bmod p)$.

令 $(x_i)_{i\in I}$ 是 p-正则类（即由 p'-元素所组成的共轭类）的一个代表系. 引理 8 给出了 $A\otimes V_p$ 的整值元素 ψ_i，使得

$$\psi_i(x_i)\not\equiv 0(\bmod p),$$

并且对于 $j\neq i$，

$$\psi_i(x_j) \equiv 0(\bmod p).$$

令 $\psi = \Sigma\psi_i$. 显然ψ属于 $A\otimes V_p$ 并且取整数值. 对于 $x\in G$，x 的 p'-分支与唯一的一个 x_i 共轭. 由引理 7，我们得到

$$\psi(x) \equiv \psi(x_i) \equiv \psi_i(x_i)\not\equiv 0(\bmod p). \quad \square$$

习　　题

10.3 将引理 6 推广到在 A 的理想 gA 内取值的类函数上.

10.4 令 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想且 $\mathfrak{p}\cap \boldsymbol{Z} = p\boldsymbol{Z}$(这相当于说 $A/\mathfrak{p}$ 是一个特征为 p 的有限域). 令 $\chi\in A\otimes R(G)$，$x\in G$ 而x_r 是 x 的 p'-分支. 证明 $\chi(x)\equiv\chi(x_r)(\bmod \mathfrak{p})$[与引理 7 同样地证明]. 然而 $\chi(x)\equiv\chi(x_r)$ $(\bmod\ \mathfrak{p}A)$ 并不永远成立.

10.4 定理 18 和 18′ 的证明

令 $g = p^n l$，$(p, l) = 1$，是群G的阶. 由 10.2，只需证明 l 属于 $A\otimes V_p$.

设ψ是 $A\otimes V_p$ 中满足引理 9 的条件的一个元素. ψ 的值$\not\equiv 0$ $(\bmod\ p)$. 令 $N = \varphi(p^n)$ 是乘法群$(\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z})^*$的阶. 那么对于任意与 p 互素的整数 λ 来说，$\lambda^N \equiv 1(\bmod\ p^n)$. 因此对一切 $x\in G$，$\psi(x)^N \equiv 1\,(\bmod\ p^n)$，而函数 $l(\psi^N - 1)$ 取整值，其值可以被

$lp^n = g$ 整除．由引理 6，这个函数是 G 的循环子群的特征标所诱导的特征标的一个 A-线性组合．因为每一循环子群都是 p-初等的，所以 $l(\phi^N - 1) \in A \otimes V_p$． 但 $A \otimes V_p$ 是 $A \otimes R(G)$ 的一个理想，因此 $l\phi^N \in A \otimes V_p$．相减，就得到 l 属于 $A \otimes V_p$，证明完毕．

10.5 Brauer 定理

G 的一个子群说是**初等的**，如果它至少对于一个素数 p 来说是 p-初等的．

定理 19 *G 的每一特征标都是 G 的初等子群的特征标所诱导的特征标的整系数线性组合．*

令 V_p 是如同定理 18 里所定义的 $R(G)$ 的那个子群．我们只需证明，对于素数 p，这样的 V_p 的和 V 等于 $R(G)$．因为 V 包含 V_p，所以 V 在 $R(G)$ 内的指数整除 V_p 在 $R(G)$ 内的指数，从而由定理 18，它与 p 互素．因为这一事实对一切 p 成立，所以这个指数等于 1，定理被证明．□

定理 20 *G 的每一特征标都是单项特征标的整系数线性组合．*

（回忆一下，如果一个特征标是由某一子群的一级特征标所诱导的，那么就称它是一个单项特征标．）

由定理 19，又因为每一个初等子群都是幂零的，从而它的不可约特征标是单项的（参看 8.5，定理 16），于是就得到这个定理．□

注记

(1) 出现在定理 19 和 20 里的线性组合的系数可能有正有负．一般说来，不可能将一个给定的特征标写成单项特征标的正整数（甚至正实数）的线性组合，参看下面的习题 10.5．

(2) 定理 20 在表示论的许多应用中起着重要的作用：在大多数情况下，它将关于任意特征标 χ 的问题简化为 χ 是一级特征标的情形（从而由一个循环群的特征标得出来）．例如，就是利用这个方法，Brauer 证明了 Artin L-函数在整个复平面内是**半纯**

的. 以后我们还要看到其它的应用.

习　题

10.5 令 χ 是群 G 的一个不可约特征标.

(a) 假设 χ 是单项特征标的正实系数线性组合. 证明, 存在一个整数 $m\geqslant 1$ 使得 $m\chi$ 是单项的.

(b) 取交错群 $\mathfrak{A}_5$ 作为 G. 相应的置换表示是单位表示和一个 4 级不可约表示的直和; 取后一个表示的特征标作为 χ. 如果 $m\chi$ 是由一个子群 H 的一级表示所诱导的, 那么 H 的阶必须等于 $15/m$, 因而 m 只能取值 1, 3, 5, 15. 再者, χ 在 H 上的限制必须包含一个重数为 m 的一级特征标 (注意 G 没有阶为 15 的子群). 由此得出, χ 不能是单项特征标的正实系数的线性组合.

10.6 (A. Weil 提供). 我们要证明, 如果 $f\in R(G)$ 而 $f(1)=0$, 那么 f 是形如 $\mathrm{Ind}_E^G(\alpha-1)$ 的元素的 $\mathbf{Z}$-线性组合, 这里 E 是 G 的一个初等子群而 α 是 E 的一个一级特征标.

(a) 令 $R_0'(G)$ 是由一切 $\mathrm{Ind}_E^G(\alpha-1)$ 所生成的 $R(G)$ 的子群而 $R'(G)=\mathbf{Z}\oplus R_0'(G)$. 证明, 如果 H 是 G 的一个子群, 则 Ind_H^G 将 $R_0'(H)$ 映入 $R_0'(G)$.

(b) 设 H 是 G 的一个正规子群且 G/H 是 Abel 群. 证明, Ind_H^G 将 $R'(H)$ 映入 $R'(G)$. [只需证明 $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ 属于 $R'(G)$, 这可以由 $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ 是 G 的 $(G:H)$ 个核包含 H 的一级特征标的和这一事实得出.]

(c) 设 G 是初等的. 令 Y 是 G 的一切极大子群所成的集. 证明, 如果 $H\in Y$, 则 H 是 G 的正规子群, 并且 G/H 的阶是素数. [利用 G 是幂零群这一事实.] 证明, $R(G)$ 由 G 的一级特征标以及 $\mathrm{Ind}_H^G(R(H))$ 生成, 这里 H 遍历 Y. [应用定理16.] 证明 $R'(G)=R(G)$. [对 G 的阶作归纳法, 并且利用 (b) 来证明 $\mathrm{Ind}_H^G(R(H))$ 包含在 $R'(G)$ 内.]

(d) 回到一般情形. 令 X 表示 G 的一切初等子群所成的集合. 由定理 19, 我们有 $1=\sum\limits_{E\in X}\mathrm{Ind}_E^G(f_E)$, $f_E\in R(E)$. 如果 $\varphi\in R(G)$, 那么就得出

$$\varphi=\sum_{E\in X}\mathrm{Ind}_E^G(\varphi_E),\ \text{这里}\ \varphi_E=f_E\cdot\mathrm{Res}_E^G(\varphi).$$

如果 $\varphi(1)=0$, 那么由 (c) 得 $\varphi_E\in R_0'(E)$. 由此推出 φ 属于 $R_0'(G)$, 于是 $R'(G)=R(G)$.

第十一章 Brauer 定理的应用

11.1 特征标的刻画

令 B 是 $\mathbf{C}$ 的一个子环，G 是一个有限群．

定理 21 设 φ 是 G 上一个类函数，并且对于 G 的每一初等子群 H，都有 $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)\in B\otimes R(H)$．那么 $\varphi\in B\otimes R(G)$．

令 X 是 G 的一切初等子群的集合．由定理 19，我们可以将常值函数 1 写成以下形式：

$$1=\sum_{H\in X}\mathrm{Ind}_H^G(f_H),\ f_H\in R(H).$$

两端乘以 φ 得

$$\varphi=\sum_{H\in X}\varphi\cdot\mathrm{Ind}_H^G(f_H)=\sum_{H\in X}\mathrm{Ind}_H^G(f_H\cdot\mathrm{Res}_H^G(\varphi)).$$

因为 f_H 属于 $R(H)$ 而 $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)$ 属于 $B\otimes R(H)$，所以它们的乘积属于 $B\otimes R(H)$．由此得出 φ 属于 $B\otimes R(G)$．□

利用 Artin 定理（第九章），用类似的论证方法可得

定理 21′ 设 B 包含 $\mathbf{Q}$．如果对于 G 的每一循环子群 H，$\mathrm{Res}_H^G(\varphi)\in B\otimes R(H)$，那么 $\varphi\in B\otimes R(G)$．

注记 定理 21 可以理解为一种聚合性质．假设对于每一 $H\in X$，给出 $B\otimes R(H)$ 的一个元素 φ_H，并且下列性质被满足：

(i) 如果 $H'\subset H$，则 $\varphi_{H'}=\mathrm{Res}_{H'}^H(\varphi_H)$．

(ii) 如果 $H'=sHs^{-1}$，$s\in G$，则 $\varphi_{H'}$ 通过同构 $x\longmapsto sxs^{-1}$ 由 φ_H 得到．

那么存在 $B\otimes R(G)$ 的唯一的元素 φ，使得对一切 $H\in X$ 都有 $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)=\varphi_H$．

定理 22 令 φ 是 G 上一个类函数．如果对于 G 的每一初等子群 H 和 H 的每一个一级特征标 χ，数

$$\langle \chi, \mathrm{Res}_H \varphi \rangle_H = \frac{1}{\mathrm{Card}(H)} \sum_{s \in H} \chi(s^{-1})\varphi(s)$$

属于 B，那么 φ 属于 $B \otimes R(G)$.

令 H 是 G 的一个初等子群．令

$$\mathrm{Res}_H^G \varphi = \sum_{\omega} c_\omega \omega, \text{ 这里 } c_\omega = \langle \omega, \mathrm{Res}_H^G \varphi \rangle_H,$$

是将 $\mathrm{Res}_H^G \varphi$ 表成 H 的不可约特征标 ω 的分解．由定理 16，每一特征标 ω 都是由 H 的某一子群 H_ω 的一个一级特征标 χ_ω 所诱导的．由 Frobenius 互反性，我们有：

$$c_\omega = \langle \chi_\omega, \mathrm{Res}_{H_\omega}^G \varphi \rangle_{H_\omega}.$$

因为 H_ω 是一个初等子群，关于 φ 的假设保证了 c_ω 属于 B．因此 $\mathrm{Res}_H^G \varphi = \sum c_\omega\, \omega$ 属于 $B \otimes R(H)$．再由定理 21，就得出这个结果．□

推论 φ 是一个虚特征标（即 $\varphi \in R(G)$）的充分且必要条件是，对于任意初等子群 H 和任意同态 $\chi: H \to \boldsymbol{C}^*$，$\langle \chi, \mathrm{Res}_H^G \varphi \rangle_H \in \boldsymbol{Z}$.

这是 $B = \boldsymbol{Z}$ 的特殊情形．

令 Res 是由限制同态族 Res_H^G 所定义的 $R(G)$ 到 $\bigoplus_{H \in X} R(H)$ 内的同态．

命题 29 同态 $\mathrm{Res}: R(G) \to \bigoplus_{H \in X} R(H)$ 是一个分裂内射．

（模同态 $f: L \to M$ 叫做一个分裂内射，如果存在 $r: M \to L$，使得 $r \circ f = 1$；这相当于说，f 是一个单射且 $f(L)$ 是 M 的一个直和因子.）

显然 Res 是一个单射．由于所考虑的群都是有限生成的自由群，因此，为了证明它是分裂的，只需证明它的余核是无扭的．于是我们需要证明，如果 $f = (f_H)_{H \in X}$ 是 $\oplus R(H)$ 的一个元素，并且存在一个非零整数 n 使得 $nf = \mathrm{Res}\varphi$，那么 $f \in \mathrm{Im}(\mathrm{Res})$．然而将定理 21 应用到函数 φ/n 和环 $\boldsymbol{Z}$ 上，就可以得到这个事实．□

[这个论断也可以通过对偶性给出：由于所考虑的群都是有限生成的自由群，因此证明 Res 是分裂的，相当于证明它的转

置映射是满射．然而 Res 的转置映射是

$$\mathrm{Ind}: \bigoplus R(H) \rightarrow R(G),$$

由 Brauer 定理，它的确是满射．]

11.2 Frobenius 的一个定理

如同在第十章里一样，我们令 A 表示由 g 次单位根所生成的 $\mathbf{C}$ 的子环，这里 $g = \mathrm{Card}(G)$。

令 n 是一个 $\geqslant 1$ 的整数，(g, n) 是 g 与 n 的最大公因子．如果 f 是 G 上一个函数，令 $\Psi^n f$ 表示函数 $x \longmapsto f(x^n)$．容易验证（参看习题 9.3），算子 Ψ^n 将 $R(G)$ 映入自身．再者，我们有

定理 23 如果 f 是 G 上在 A 内取值的一个类函数，那么函数 $\dfrac{g}{(g,n)}\Psi^n f$ 属于 $A\otimes R(G)$.

设 c 是 G 的一个共轭类．令 f_c 表示 c 的特征函数，它在 c 上取值 1 而在 $G - c$ 上取值 0．那么函数 $\Psi^n f_c$ 是：

$$\Psi^n f_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x^n \in c, \\ 0, & \text{在其它情形.} \end{cases}$$

每一个在 A 内取值的类函数都是这些 f_c 的线性组合．这样，定理 23 等价于：

定理 23′ 对于 G 的每一共轭类 c，函数 $\dfrac{g}{(g,n)}\Psi^n f_c$ 属于 $A\otimes R(G)$.

我们还可以用另一方式来表述：

定理 23″ 对于 G 的每一共轭类 c 和 G 的每一特征标 χ，我们有 $\dfrac{1}{(g,n)}\sum\limits_{x^n\in c}\chi(x) \in A$.

取 χ 是单位特征标，由此就得出：

推论 1 G 中满足条件 $x^n \in c$ 的元素 x 的个数是 (g,n) 的倍数．

特别：

推论 2 如果 n 能够整除 G 的阶，那么 G 中满足条件 $x^n=1$ 的元素 x 的个数是 n 的倍数.

（在这里我们提出 Frobenius 的一个猜想：如果 G 中满足条件 $s^n=1$ 的元素 s 所成的集合 G_n 含有 n 个元素，那么 G_n 是 G 的一个子群.）

定理 23 的证明 (R. Brauer) 由定理 21，只需证明，函数 $\frac{g}{(g,n)}\Psi^n f$ 在 G 的每一初等子群 H 上的限制都属于 $A\otimes R(H)$. 现在设 h 是 H 的阶，那么 $g/(g,n)$ 可以被 $h/(h,n)$ 整除. 因此只需证明，$[h/(h,n)]\Psi^n(\mathrm{Res}_H f)$ 属于 $A\otimes R(H)$. 这样一来，证明就归结到初等子群的情形. 因为初等子群是 p-群的直积，所以只需对 p-群的情形来证明即可. 再利用这种群的每一不可约特征标都是由一级特征标所诱导的这样一个事实，最后就归结为证明以下的

引理 10 令 c 是 p-群 G 的一个共轭类，χ 是 G 的一个一级特征标，又令 $a_c=\sum\limits_{x^n\in c}\chi(x)$. 那么 $a_c\equiv 0(\mathrm{mod}(g,n)A)$.

首先，这些 a_c 的和(固定 χ，令 c 变)等于 $\sum\limits_{x\in G}\chi(x)$，也就是说，如果 $\chi=1$，则等于 g，否则等于 0. 于是

$$\sum_c a_c\equiv 0(\mathrm{mod}(g,n)).$$

因此，只需对于不等于单位类的那些共轭类 c 来证明引理 10 就够了.

将 n 写成 $p^a m$ 的形式，这里 $(p,m)=1$. 令 p^b 是 c 中元素共同的阶，又令 C 是 G 中满足条件 $x^n\in c$ 的元素 x 所成的集合. 因为 $x^n=x^{p^a m}$ 的阶是 $p^b>1$，而 G 是一个 p-群，所以 x 的阶是 p^{a+b}. 由此推出，如果 z 是一个满足条件 $z\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^b)$ 的整数，那么 $(x^z)^n=x^n$，从而 $x^z\in C$；再者，等式 $x^z=x$ 成立必要且只要 $z\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^{a+b})$. 换句话说，$(\boldsymbol{Z}/p^{a+b}\boldsymbol{Z})^*$ 中同余于 $1(\mathrm{mod}\ p^b)$ 的元素所成的子群 Γ 自由地作用在 C 上[1]. 这时集合 C 在 Γ 作用下

1) 这就是说，除单位元外，Γ 的元素在 C 中没有不动点. ——译者注

被划分为轨道．我们只需证明，在每一轨道上的 $\chi(x)$ 的和在环 A 中可以被 (g,n) 整除．这样一个轨道由元素 $x^{1+p^b t}$ 所组成，这里 t 遍历 $\mathbf{Z}/p^a\mathbf{Z}$．因此 χ 在这个轨道上的值的和等于

$$a_c(x)=\chi(x)\sum_{t \bmod p^a} z^t,\quad \text{这里}\quad z=\chi(x^{p^b}).$$

然而 $\chi(x)$ 是一个 p^{a+b} 次单位根，而 z 是一个 p^a 次单位根，所以

$$\sum_{t \bmod p^a} z^t=\begin{cases}p^a, & \text{若}\quad z=1,\\ 0, & \text{若}\quad z\neq 1.\end{cases}$$

因此 $a_c(x)$ 可以被 p^a 整除．从而自然可以被 (g,n) 整除．□

习　　题

11.1　设 f 是 G 上在 $\mathbf{Q}$ 中取值的一个类函数，具有以下性质：对于一切与 g 互素的 m，$f(x^m)=f(x)$．证明，f 属于 $\mathbf{Q}\otimes R(G)$．[利用定理 21′，归结到循环群的情形．]由定理 23 推出，如果 f 在 $\mathbf{Z}$ 内取值，那么函数 $(g/(g,n))\Psi^n f$ 属于 $R(G)$．将这个结果应用到单位类为特征函数上．

11.3　Brauer 定理的逆

字母 A 和 g 的意义同前一节．

引理 11　令 p 是一个素数．令 x 是 G 的一个 p'-元素，C 是 x 所生成的子群，而 P 是 x 在 G 内的中心化子 $Z(x)$ 的一个 Sylow p-子群．又令 H 是 G 的一个子群，它不含与 $C\times P$ 共轭的子群；ϕ 是 H 上在 A 内取值的一个类函数，而 $\phi'=\mathrm{Ind}_H^G\phi$．那么 $\phi'(x)\equiv 0 \pmod{pA}$．

令 $S(x)$ 表示 x 的一切共轭元素所成的集．那么

$$\phi'(x)=\frac{\mathrm{Card}\,Z(x)}{\mathrm{Card}\,H}\sum_{y\in S(x)\cap H}\phi(y).$$

令 $(Y_i)_{i\in I}$ 是 $S(x)\cap H$ 所含的互不相同的 H-共轭类，并且在每一 Y_i 选取一个元素 y_i．y_i 在 H 中共轭元素的个数等于 $\mathrm{Card}\,Y_i$，也等于 $(H:H\cap Z(y_i))$．所以

$$\psi'(x)=\frac{\operatorname{Card} Z(x)}{\operatorname{Card} H}\sum_{i\in I}\operatorname{Card} Y_i\cdot\phi(y_i)$$

$$=\sum_{i\in I}n_i\phi(y_i),\quad 这里\ n_i=\frac{\operatorname{Card} Z(y_i)}{\operatorname{Card}(H\cap Z(y_i))}.$$

假设对于某一 $i\in I$，$n_i\not\equiv 0(\bmod p)$，那么 $\operatorname{Card}Z(y_i)$ 和 $\operatorname{Card}(H\cap Z(y_i))$ 可以被 p 的同一个幂所整除；因此 $H\cap Z(y_i)$ 的一个 Sylow p-子群 P_i 也是 $Z(y_i)$ 的一个 Sylow p-子群．如果 C_i 是 y_i 所生成的循环群，那么 $C_i\times P_i$ 包含在 H 内，并且是群 G 中与 y_i 相伴的一个 p-初等子群．因为 y_i 与 x 在 G 中共轭，所以群 $C_i\times P_i$ 与 $C\times P$ 共轭，这与对于 H 的假设相违． 这样，对一切 $i\in I$ 都有 $n_i\equiv 0(\bmod p)$，从而 $\psi'(x)\equiv 0(\bmod pA)$．□

定理 24 (J. Green) 令 $(H_i)_{i\in I}$ 是 G 的一个子群族，使得 $R(G)=\sum_{i\in I}\operatorname{Ind} R(H_i)$． 那么 G 的每一初等子群都包含在某一 H_i 的一个共轭子群内．

令 $C\times P$ 是 G 的一个 p-初等子群．我们总可以假设这个子群是极大的，从而与 G 的一个 p'-元素 x 相伴．如果 $C\times P$ 不包含在任何 H_i 的共轭子群内，那么上面的引理表明，对于一切 $\chi\in\sum\operatorname{Ind} R(H_i)$，都有 $\chi(x)\equiv 0\ (\bmod pA)$；特别对于 χ 等于 G 的单位特征标时也成立，这是不可能的．□

换句话说，初等子群族是使得 Brauer 定理成立的“最小”子群族．

11.4 $A\otimes R(G)$ 的谱

设 C 是一个交换环．C 的一切素理想所成的集合叫做 C 的谱，记作 $\operatorname{Spec}(C)$．参看 Bourbaki，交换代数，第二章．

我们将确定环 $A\otimes R(G)$ 的谱（我们也可以描述 $R(G)$ 的谱，但是比较复杂）．

令 $Cl(G)$ 表示 G 的共轭类所成的集合．环 $A^{Cl(G)}$ 可以与 G 上在 A 内取值的类函数所成的环等同起来；如果 f 属于这个环，c 是一个共轭类，f 在 c 中任何一个元素上的值记作 $f(c)$．内射

$A \to A \otimes R(G) \to A^{Cl(G)}$ 定义了映射

$$\mathrm{Spec}(A^{Cl(G)}) \to \mathrm{Spec}(A \otimes R(G)) \to \mathrm{Spec}(A).$$

这两个映射都是满的;这一点可以由,例如,$A^{Cl(G)}$ 在 A 上(甚至在 $\mathbf{Z}$ 上)是整的这一事实推出,参看 Bourbaki, 交换代数,第四章,§2.

另一方面,我们知道,$\mathrm{Spec}(A)$ 是由理想 0 和 A 的极大理想所组成. 再者,如果 M 是 A 的一个极大理想,那么域 A/M 是有限域,它的特征叫做 M 的剩余特征.

$A^{Cl(G)}$ 的谱可以与 $Cl(G) \times \mathrm{Spec}(A)$ 等同起来: 对于每一 $c \in Cl(G)$ 和每一 $M \in \mathrm{Spec}(A)$, 令 $A^{Cl(G)}$ 中满足条件 $f(c) \in M$ 的那些函数 f 所组成的素理想 M_c 与它们对应. M_c 在 $\mathrm{Spec}(A \otimes R(G))$ 内的象是素理想 $P_{M,c} = M_c \cap (A \otimes R(G))$.

命题 30 如果

(i) 对于每一个类 $c \in Cl(G)$, 令 $P_{0,c}$ 与它对应,

(ii) 对于每一 p-正则类 c 和 A 的每一个剩余特征为 p 的极大理想 M, 令 $P_{M,c}$ 与它们对应,

那么 $A \otimes R(G)$ 的每一素理想恰被取到一次.

(一个共轭类叫做 p-正则的,如果它由 p'-元素所组成,参看 10.1.)

因为 $\mathrm{Spec}(A^{Cl(G)}) \to \mathrm{Spec}(A \otimes R(G))$ 是满射(见上面),所以 $A \otimes R(G)$ 的每一素理想 $\mathfrak{p}$ 都具有 $P_{M,c}$ 的形式; 因为 $\mathfrak{p} \cap A$ 等于 M, 所以 $\mathfrak{p}$ 确定了 M. 只剩下确定怎样的一对共轭类 c_1 和 c_2 能使 $P_{M,c_1} = P_{M,c_2}$. 于是命题 30 就归结为以下的命题:

命题 30′

(i) 如果 $M = 0$, 那么 $P_{0,c_1} = P_{0,c_2}$ 等价于 $c_1 = c_2$.

(ii) 设 $M \neq 0$ 具有剩余特征 p. 令 c_1' 和 c_2' 分别是 c_1 和 c_2 中元素的 p'-分支所组成的类. 那么 $P_{M,c_1} = P_{M,c_2}$ 等价于 $c_1' = c_2'$.

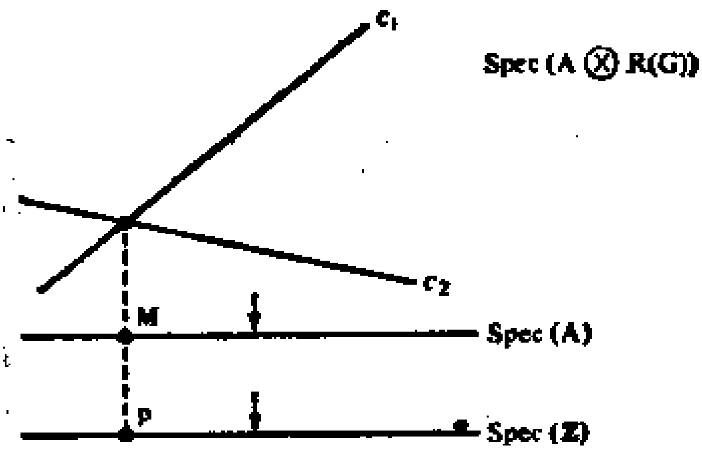
要证明 (i), 只需证明, 如果 $c_1 \neq c_2$, 那么存在一个元素 $f \in A \otimes R(G)$ 使得 $f(c_1) \neq 0$ 而 $f(c_2) = 0$. 这一点是显然的(取 f 是在 c_1 上取值 g 而在其它的类上取值 0 的函数即可).

如果M的剩余特征为p，和引理7的证明类似，容易证明，$P_{M,c_1}=P_{M,c_1'}$（参看习题10.4）．另一方面，引理8表明，如果$c_1'\neq c_2'$，则$P_{M,c_1'}\neq P_{M,c_2'}$．于是(ii)成立．□

注记

(1) 令I是$A\otimes R(G)$的一个理想．要证I等于$A\otimes R(G)$，只需证明I不包含在任何这样的素理想$P_{M,c}$内就够了；这就是Brauer 定理的证明中所采用的方法(还可以看下面的习题11.7)．

(2) 我们可以利用图象将Spec$(A\otimes R(G))$表示成对应于各个类c的"直线"D_c的并集，每一条这样的直线都表示Spec(A)．这些直线按以下方式相交：D_{c_1}和D_{c_2}在A的一个剩余特征为p的极大理想M上面有一个公共点，必要且只要c_1和c_2的p'-分支相等．



命题31 Spec$(A\otimes R(G))$在Zariski拓扑内是连通的．

(设C是一个交换环．Spec(C)的一个子集F在Zariski拓扑内是闭集，必要且只要存在$H\subset C$，使得$\mathfrak{p}\in F\Longleftrightarrow\mathfrak{p}\supset H$．)

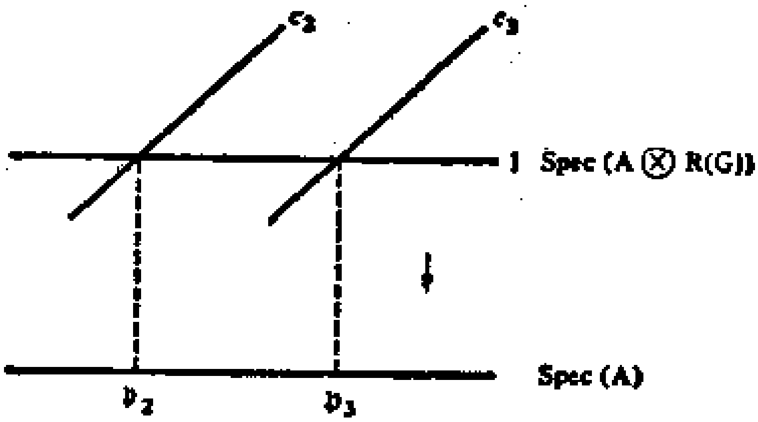
令x是G的一个元素，它的阶是$p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$；$x$可以分解为积$x=x_{p_1}x_{p_2}\cdots x_{p_k}$，这里$x_{p_i}$的阶是$p_i^{n_i}$．$x$所在的类与$x_{p_2}\cdots x_{p_k}$所在的类有同一$p_1$-正则分支．因此，Spec$(A\otimes R(G))$的对应的"直线"相交；再者，每一条这样的直线都与Spec(A)同构，它们都是连通的．一步一步地进行下去，直到得出单位元的类．因

此，Spec($A\otimes R(G)$) 是连通的. □

推论 Spec($R(G)$) 是连通的.

事实上，Spec ($R(G)$) 是 Spec ($A\otimes R(G)$) 在一个连续映射之下的象.

例 作为群 G 取对称群 $\mathfrak{S}_3$. 一共有三个类：1，c_2（由二阶元素组成）和 c_3（由三阶元素组成）. 在 A 里有唯一的剩余特征为 2 的素理想 $\mathfrak{p}_2$；同样，有唯一的剩余特征为 3 的素理想 $\mathfrak{p}_3$. $A\otimes R(G)$ 的谱由三条"直线"组成，它们相交如下图：



注记 这一节的结果已经由 G. Segal 推广到紧 Lie 群的情形 (*Publ. Math. I. H. E. S.*, **34**, 1968).

习　　题

11.2 证明 $P_{M,c}$ 的剩余域是 A/M.

11.3 设 B 是一个 A-代数. 试用 Spec(B) 来确定 Spec($B\otimes R(G)$). [利用命题 30 和 30′ 的证明.]

11.4 令 K 是 A 的商域而 Γ 是 $K/\mathbf{Q}$ 的 Galois 群. 我们知道，Γ 与 $(\mathbf{Z}/g\mathbf{Z})^*$ 同构. 令 Γ 通过它在 A 上的作用而作用在 $A\otimes R(G)$ 上；确定它在 Spec($A\otimes R(G)$) 上相应的作用. 注意 $R(G)$ 是 $A\otimes R(G)$ 中被 Γ 固定的元素所成的子环，由此得出 Spec($R(G)$).

11.5 当 G 是 Abel 群时，确定 Spec ($A[G]$). [注意 $A[G]$ 可以与

$A\otimes R(\hat{G})$ 等同起来，这里 $\hat{G}$ 是 G 的对偶(参看习题 3.3).]

11.6 令 B 是 $A^{Cl(G)}$ 中如下的函数 f 所成的子环：对于 A 的每一极大理想 M 和每一类 c，M 的剩余特征为 p 而 c 的 p-正则分支为 c'，我们有 $f(c)\equiv f(c')(\mathrm{mod} M)$. 证明 $A\otimes R(G)\subset B$，并且这两个环有相同的谱；给出一个例子，在这个例子里这两个环不相等.

11.7 令 H 是 G 的一个子群，而 I_H 是 $A\otimes \mathrm{Ind}_H^G$ 的象，它是 $A\otimes R(G)$ 的理想.

(a) 令 c 是 G 的一个类. 证明，I_H 包含在 $P_{0,c}$ 内必要且只要 $H\cap c=\varnothing$.

(b) 令 c 是一个 p-正则类，M 是 A 中含有 p 的一个素理想. 证明，I_H 包含在 $P_{M,c}$ 内必要且只要 H 不包含与 c 的元素相伴的 p-初等子群.

(c) 由 (b) 得出定理 18 和 24 另外的证明.

第十二章　有理性问题

迄今为止，我们只是讨论了定义在复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的表示．实际上，以前各节的一切证明在特征为零的代数闭域上，例如，在 $\boldsymbol{Q}$ 的一个代数闭包上，仍然成立．现在我们将看一下不是代数闭域的情形是怎样的．

12.1　环 $R_K(G)$ 和 $\bar{R}_K(G)$

在这一节里，K 表示一个特征为零的域，C 是 K 的一个代数闭包．设 V 是一个 K-向量空间．令 V_C 表示 V 通过由 K 到 C 的纯量扩张而得到的 C-向量空间 $C\otimes_K V$．如果 G 是一个有限群，那么域 K 上每一线性表示 $\rho: G\rightarrow \boldsymbol{GL}(V)$ 定义了域 C 上一个表示：

$$\rho_C: G\rightarrow \boldsymbol{GL}(V)\rightarrow \boldsymbol{GL}(V_C).$$

使用"模"的记法（参看6.1），我们有

$$V_C = C[G]\otimes_{K[G]}V.$$

ρ 的特征标 $\chi_\rho = \mathrm{Tr}(\rho)$ 与 ρ_C 的特征标相同；它是 G 上在 K 中取值的一个类函数．

我们把 G 在 K 上的表示的特征标所生成的群记作 $R_K(G)$；它是在第九、十和十一章里所研究的环 $R(G)=R_C(G)$ 的一个子环．

我们也可以定义 $R_K(G)$ 为有限型 $K[G]$-模的范畴的 Grothendieck 群，参看第三部分，第十四章．

命题 32　令 (V_i, ρ_i) 是 G 在 K 上一切互不相同（确切到同构）的不可约线性表示，χ_i 是相应的特征标．那么

(a)　这些 χ_i 作成 $R_K(G)$ 的一个基．

(b)　这些 χ_i 两两正交．

[和通常一样，这里的正交性是对于双线性型

$$\langle \varphi, \phi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \varphi(s^{-1}) \phi(s)$$

来说的.]

显然，χ_i 生成 $R_K(G)$. 另一方面，如果 $i \neq j$，那么 $\mathrm{Hom}^G(V_i, V_j) = 0$，然而一般说来，如果 V 和 W 分别有特征标 χ_V 和 χ_W，那么由 7.2，引理 2，我们有

$$\dim_K \mathrm{Hom}^G(V, W) = \dim_C \mathrm{Hom}^G(V_C, W_C) = \langle \chi_V, \chi_W \rangle.$$

因此，如果 $i \neq j$，则 $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$，而 $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = \dim \mathrm{End}^G(V_i)$ 是一个 $\geqslant 1$ 的整数(等于 1 必要且只要 V_C 是不可约的，即 V 是绝对不可约的，参看 Bourbaki[8]，§13，$n^o 4$). 特别，这些 χ_i 线性无关. □

G 在 C 上一个线性表示说是在 K 上可实现的（或在 K 上是有理的），如果它与一个形如 ρ_C 的表示同构，这里 ρ 是 G 在 K 上一个线性表示；这相当于说，这个表示可以通过系数在 K 内的矩阵来实现.

命题 33 G 在 C 上一个线性表示在 K 上可实现的必要且充分条件是它的特征标属于 $R_K(G)$.

这个条件显然是必要的. 反之，假设这个条件被满足. 令 χ 是所给的表示的特征标. 根据命题32，我们有 $\chi = \sum n_i \chi_i, n_i \in \mathbf{Z}$. 因此，对于一切 i 都有

$$\langle \chi, \chi_i \rangle = n_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle.$$

因为 χ 是 G 在 C 上一个表示的特征标，所以内积 $\langle \chi, \chi_i \rangle \geqslant 0$. 由此得出 n_i 是正的，因而所给的表示可以写成这些 V_i 的和，每一 V_i 重复出现 n_i 次. □

同理可证，在这个问题里的实现除 K-同构外是唯一的.

同环 $R_K(G)$ 在一起，我们还要考虑 $R(G)$ 中在 K 内取值的元素所成的子环 $\bar{R}_K(G)$. 显然 $R_K(G) \subset \bar{R}_K(G)$. 更进一步，我们有

命题 34 群 $R_K(G)$ 在群 $\bar{R}_K(G)$ 内的指数是有限的.

首先，G 在 C 上每一不可约表示都在 K 的某一个有限扩域上

可实现(可以取由一个相应的矩阵表示的系数所生成的扩域)．因此，存在K的一个有限扩域L，使得$R_L(G)=R(G)$．令$d=[L:K]$是这个扩域的次数．于是这个命题就由以下引理得出：

引理 12 $d\cdot\bar{R}_K(G)\subset R_K(G)$．

首先，令V是G在L上一个线性表示，特征标为χ；通过纯量的局限，可以将V看成一个K-向量空间(维数放大d倍)，而且还是G在K上一个线性表示．我们立即看出这个表示的特征标等于$\mathrm{Tr}_{L/K}(\chi)$，这里$\mathrm{Tr}_{L/K}$是对应于扩域L/K的迹．根据线性可知，对于$R_L(G)$的每一元素χ，$\mathrm{Tr}_{L/K}(\chi)\in R_K(G)$．

特别，取$\chi\in\bar{R}_K(G)$，即假定χ的值属于K．于是$\mathrm{Tr}_{L/K}(\chi)=d\cdot\chi$；所以$d\cdot\chi\in R_K(G)$．证毕．□

12.2 Schur 指标

利用半单代数的理论，也可以得出上一节的结果，而且更为精确．我们扼要地论述如下：

代数$K[G]$是一些单代数A_i的直和，这些A_i对应于G在K上一切互不相同的不可约表示V_i．如果$D_i=\mathrm{Hom}^G(V_i,V_i)$是$G$在$\mathrm{End}(V_i)$内的换位代数，那么$D_i$是一个体(一般非交换)，而$A_i$可以与$D_i$上向量空间$V_i$的一切自同态所组成的代数$\mathrm{End}_{D_i}(V_i)$等同起来．如果$[V_i:D_i]=n_i$，那么$A_i\cong\boldsymbol{M}_{n_i}(D_i^0)$($D_i^0$上的$n_i$阶全阵代数)，这里$D_i^0$是$D_i$的反向环[1]．再者，$D_i$在它的中心$K_i$上的次数是一个平方数，记作$m_i^2$．整数$m_i$叫做表示$V_i$的(或分支$A_i$的) Schur 指标．

令$s\in G$，$\rho_i(s)$是V_i的相应的自同态．我们要考虑$\rho_i(s)$的三种“迹”：

(a) 作为一个K-自同态，$\rho_i(s)$的迹；这就是以前记作$\chi_i(s)$的那个K中的元素．

(b) 作为一个K_i-自同态，$\rho_i(s)$的迹；这是K_i的一个元素，

1) 即在D_i中定义乘法：$(x,y)\longmapsto yx$，这样得到的环叫做D_i的反向环．——译者注

我们将它记作 $\varphi_i(s)$。

(c) 作为单代数 A_i 的一个元素，$\rho_i(s)$ 的约化迹(例如，参看[8]，§ 12，n^o3)；这是 K_i 的一个元素，我们将它记作 $\phi_i(s)$。

这几种迹被以下的公式联系着：

$$\chi_i(s)=\mathrm{Tr}_{K_i/K}(\varphi_i(s)) \text{ 而 } \varphi_i(s)=m_i\phi_i(s).$$

现在令 $\sum_i$ 是域 K_i 到代数闭域 C 的一切 K-同态所成的集。如果 $\sigma\in\sum_i$，那么通过 σ 作 K_i 到 C 的纯量扩张，使 D_i 成为全阵代数 $\boldsymbol{M}_{m_i}(C)$，而 A_i 成为 $\boldsymbol{M}_{n_im_i}(C)$。作合成映射 $G\to A_i\to\boldsymbol{M}_{n_im_i}(C)$，我们就得到 G 在 C 上一个不可约表示，它的级是 n_im_i，而特征标是 $\phi_{i,\sigma}=\sigma(\phi_i)$。对于固定的指标 i 来说，特征标 $\phi_{i,\sigma}$ 是彼此共轭的：C 在 K 上的 Galois 群可迁地置换这些特征标。而且，G 在 C 上每一不可约特征标都等于某一个 $\phi_{i,\sigma}$。我们有

$$\chi_i=\mathrm{Tr}_{K_i/K}(\varphi_i)=\sum_{\sigma\in\Sigma_i}\sigma(\varphi_i)=m_i\sum_{\sigma\in\Sigma_i}\phi_{i,\sigma}.$$

这样就将 χ_i 分解为 C 上不可约特征标的和.

现在令 $\chi=\sum\limits_{i,\sigma}d_{i,\sigma}\phi_{i,\sigma}$ 是 $R(G)$ 的一个元素，这里 $d_{i,\sigma}$ 都是整数. 要使 χ 的值在 K 中，必要且只要 χ 对于 C 在 K 上的 Galois 群不变，即 $d_{i,\sigma}$ 只依赖于 i. 如果是这一情形，那么就令 d_i 表示它们的共同的值，我们有

$$\chi=\sum_i d_i\phi_i=\sum_i d_i\chi_i/m_i.$$

于是我们有以下命题，它是命题34的精密化：

命题 35 一切特征标 $\phi_i=\chi_i/m_i$ 组成 $\overline{R}_K(G)$ 的一个基.

$K(G)$ 说是拟分裂的，如果所有 D_i 都是交换的；换一句话说，如果 Schur 指标 m_i 都等于 1. 于是由命题 35 得出以下的

推论 $R_K(G)=\overline{R}_K(G)$ 的必要且充分条件是 $K[G]$ 是拟分裂的.

特别，在下列的每一情形都有 $R_K(G)=\overline{R}_K(G)$：

(i) G 是 Abel 群 (因为这时 $K[G]$ 以及一切 D_i 都是交换的)。

(ii) K的有限扩域的 Brauer 群是平凡的。

习　　题

12.1 证明，在第五章里所考虑的一切有限群的 Schur 指标都等于1.

12.2 令G是交错群 $\mathfrak{A}_4$ (参看 5.7). 证明，$\boldsymbol{Q}[G]$ 被分成单因子的直积的分解有以下形式：

$$\boldsymbol{Q}[G]=\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}(w)\times\boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{Q}),$$

这里 $\boldsymbol{Q}(w)$是对 $\boldsymbol{Q}$ 添加一个三次单位根 w 而得的二次扩域.

12.3 令 G 是四元数群 $\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$. 群$G$有4个一级特征标，值在$\{\pm1\}$内；另一方面，$G$在 $\boldsymbol{Q}$上的四元数体 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{Q}}$ 内的自然嵌入定义一个同态满射 $\boldsymbol{Q}[G]\rightarrow\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{Q}}$. 证明，$Q[G]$ 被分成单因子的直积的分解是

$$\boldsymbol{Q}[G]=\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{Q}}.$$

最后一个因子的 Schur 指标是2，而相应的特征标ψ被如下地给出：

$$\psi(1)=2,\ \psi(-1)=-2,\ \psi(s)=0\ \text{若}\ s\neq\pm1.$$

因此，$K(G)$ 是拟分裂的充分且必要条件是 $K\otimes\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{Q}}$ 与 $\boldsymbol{M}_2(K)$ 同构；证明这个条件相当于说-1是K中两个平方数的和.

12.4 证明，Schur 指标 m_i 能整除G的中心的指数 a. [注意以 $\phi_{i,e}$ 为特征标的不可约表示的级是 $n_i m_i$，并且应用命题17.] 由此推出 $a\cdot\bar{R}_K(G)$ 包含在 $R_K(G)$ 内.

12.5 令 L 是K的一个有限扩域. 证明，如果 $L[G]$ 是拟分裂的，那么 $[L:K]$ 可以被每一 Schur 指标 m_i 整除.

12.3 在割圆域上的可实现性

保留前两节的记法，并且令m表示G的元素的阶的最小公倍；它是g的一个因子.

定理 25 (Brauer). 如果 K 包含一切 m 次单位根，那么 $R_K(G)=R(G)$.

根据命题33，由此得出

推论 G的每一线性表示在K上可实现.

(这个结果曾被 Schur 猜想过.)

令 $\chi\in R(G)$. 由10.5，定理20，我们可以将χ写成

$$\chi = \sum n_i \mathrm{Ind}_{H_i}^{G}(\varphi_i)\ (n_i \in \boldsymbol{Z}),$$
这里 φ_i 是 G 的子群 H_i 的一级特征标. φ_i 的的值都是 m 次单位根，它们都属于 K. 因此，$\varphi_i \in R_K(H_i)$. 然而，如果 H 是 G 的一个子群，那么显然 Ind_H^G 将 $R_K(H)$ 映入 $R_K(G)$. 因此，对于一切 i 都有 $\mathrm{Ind}_{H_i}^G(\varphi_i) \in R_K(G)$，定理被证明. □

习　　题

12.6 证明，G 的 Schur 指标(在任意域上)能整除 Euler 函数 $\varphi(m)$. [利用习题 12.5]

12.4 群 $R_K(G)$ 的秩

现在回到一个特征为零的任意域 K 的情形. 我们将定出群 $R_K(G)$ 的秩；一个等价的提法是，定出 G 在 K 上不可约表示的个数.

选取一个整数 m，它是 G 的元素的阶的一个公倍数(例如，取它们的最小公倍或 G 的阶 g). 令 L 是对 K 添加一切 m 次单位根所得的扩域. 我们知道(例如，参看 Bourbaki, 代数，第五章，§11)，L/K 是 Galois 扩域而它的 Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 是 $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ 中一切可逆元素所成的乘法群 $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$ 的一个子群. 更确切地说，如果 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$，那么存在唯一的元素 $t \in (\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$，使得
$$\sigma(\omega) = \omega^t,\ 若\ \omega^m = 1.$$
我们将 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 在 $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$ 内的象记作 Γ_K. 若 $t \in \Gamma_K$，就令 σ_t 表示 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 中与 t 对应的元素. 前一节所考虑的就是 $\Gamma_K = \{1\}$ 的情形.

令 $s \in G$，而 n 是一个整数. 那么 G 的元素 s^n 只依赖于 n 关于以 s 的阶为模的剩余类，从而只依赖于 n 模 m 的剩余类；特别，对于每一 $t \in \Gamma_K$，s^t 有定义. 群 Γ_K 作为一个置换群而作用在 G 的底集合上. G 的两个元素 s 与 s' 说是 Γ_K-共轭的，如果存在 $t \in \Gamma_K$，使得 s' 与 s^t 在 G 里共轭. 这样定义的关系是一个等价关系，并且不依赖于 m 的选取；由这个关系所决定的类叫做 G 的 Γ_K-类

(或 K-类).

定理 26 G上在L中取值的类函数 f 属于 $K\otimes_{\mathbf{Z}}R(G)$ 的必要且充分条件是

$(*)$ $\qquad \sigma_t(f(s))=f(s^t)$, 对于一切 $s\in G$ 和一切 $t\in\Gamma_K$.

(换句话说,对于一切 $t\in\Gamma_K$, 都必须有 $\sigma_t(f)=\Psi^t(f)$, 参看11.2.)

令 ρ 是G的一个表示,特征标为 χ. 对于 $s\in G$, $\rho(s)$ 的特征值 w_i 都是m次单位根, 而 $\rho(s^t)$ 的特征值是 w_i^t. 于是我们有

$$\sigma_t(\chi(s))=\sigma_t(\sum w_i)=\sum w_i^t=\chi(s^t).$$

这就证明了 χ 满足条件$(*)$. 由于线性,对于 $K\otimes R(G)$ 的一切元素都成立.

反之,设 f 是G上一个满足条件$(*)$的类函数. 那么

$$f=\sum c_\chi\chi,\quad c_\chi=\langle f,\chi\rangle,$$

这里 χ 遍历G的一切不可约特征标. 我们要证明, c_χ 属于 K; 根据 Galois 理论,这就相当于证明 c_χ 在一切 $\sigma_t(t\in\Gamma_K)$ 之下不变. 然而如果 φ 和 χ 是G上两个类函数,那么容易验证,

$$\langle\Psi^t\varphi,\Psi^t\chi\rangle=\langle\varphi,\chi\rangle.$$

因而

$$c_\chi=\langle f,\chi\rangle=\langle\Psi^t f,\Psi^t\chi\rangle=\langle\sigma_t(f),\sigma_t(\chi)\rangle$$
$$=\sigma_t(\langle f,\chi\rangle)=\sigma_t(c_\chi).$$

定理证毕. □

推论 1 G上在K内取值的类函数 f 属于 $K\otimes R_K(G)$ 的充分且必要条件是它在G的 Γ_K-类上取常值.

如果 $f\in K\otimes R_K(G)$, 那么对于一切 $s\in G$ 都有 $f(s)\in K$; 而公式$(*)$表明,对于一切 $t\in\Gamma_K$, 都有 $f(s)=f(s^t)$. 所以 f 在G的 Γ_K-类上取常值.

反之, 设 f 的值在K内且在G的 Γ_K-类上取常值. 于是条件$(*)$被满足,并且如同上面一样,可以写成

$$f=\sum\langle f,\chi\rangle\chi,\quad \langle f,\chi\rangle\in K.$$

再者, f 在 $\sigma_t(t\in\Gamma_K)$ 之下不变这一事实表明, $\langle f,\chi\rangle=\langle f,\sigma_t(\chi)\rangle$, 所以两个共轭的特征标 χ 和 $\sigma_t(\chi)$ 的系数相同. 将属于同一共轭

类的特征标合并在一起，我们可以将 f 写成形如 $\mathrm{Tr}_{L/K}(\chi)$ 的特征标的线性组合．因为后者属于 $R_K(G)$（参看 12.1），于是就证明了这个推论．□

［**别证**：令 Γ_K 通过 $f\longmapsto\sigma_t(f)=\Psi^t(f)$ 作用在 $K\otimes R(G)$ 上，注意不动点的集合就是 $K\otimes R_K(G)$．］

推论 2 设 χ_i 是 G 在 K 上一切互不相同的不可约表示的特征标．那么这些 χ_i 组成 G 上在 Γ_K-类上取常值的函数所成的向量空间的一个基，它们的个数等于 Γ_K-类的个数．

这由推论 1 直接得到．

注记　在推论 1 里可以将 $R_K(G)$ 换成 $\bar{R}_K(G)$．事实上，命题 34 表明，

$$\boldsymbol{Q}\otimes R_K(G)=\boldsymbol{Q}\otimes\bar{R}_K(G)\ \text{从而}\ K\otimes R_K(G)=K\otimes\bar{R}_K(G).$$

12.5 Artin 定理的一般化

设 H 是 G 的一个子群．映射

$$\mathrm{Res}_H: R(G)\rightarrow R(H)\ \text{和}\ \mathrm{Ind}_H: R(H)\rightarrow R(G)$$

显然分别将 $R_K(G)$ 映入 $R_K(H)$，将 $R_K(H)$ 映入 $R_K(G)$．因此我们可以问，当 R 换成 R_K 时，Artin 定理和 Brauer 定理是否成立．对于 Artin 定理来说，答案是肯定的：

定理 27 令 T 是 G 的一切循环子群所成的集合．那么由映射族 $\boldsymbol{Q}\otimes\mathrm{Ind}_H^G$，$H\in T$，所定义的映射

$$\boldsymbol{Q}\otimes\mathrm{Ind}:\bigoplus_{H\in T}\boldsymbol{Q}\otimes R_K(H)\rightarrow\boldsymbol{Q}\otimes R_K(G)$$

是满的．

第九章所给出的两个证明可以不加改变地用在这里．第一个证明是一个对偶性论断；需要证明映射

$$\boldsymbol{Q}\otimes\mathrm{Res}:\boldsymbol{Q}\otimes R_K(G)\rightarrow\bigoplus_{H\in T}\boldsymbol{Q}\otimes R_K(H)$$

是单的，这一点是明显的．

第二个证明是利用公式

$$g = \sum_{H \in T} \mathrm{Ind}_H^G(\theta_H), \text{ 参看 9.4，命题 27，}$$

并且证明 θ_H 属于 $R_K(H)$；关于后一论断的证明可以对H的阶作归纳法，或者注意 θ_H 取整值，从而属于 $\bar{R}_K(H)$，再因为H是 Abel 的，所以有 $R_K(H) = \bar{R}_K(H)$. 上面的等式表明，常值函数 1 属于 $\mathbf{Q}\otimes\mathrm{Ind}$ 的象. 因为这个象是一个理想，所以它一定是整个的环 $\mathbf{Q}\otimes R_K(G)$. □

12.6 Brauer 定理的一般化

保留前面几节的记法. 容易看出，如果X是G的一切初等子群所成的集合，那么映射

$$\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in X} R_K(H) \to R_K(G)$$

一般不是满的(例如，$G = \mathfrak{S}_3$，$K = \mathbf{R}$). 因此需要把X换成一个大一点的集合 X_K，即所谓"Γ_K-初等子群"的集合.

令 p 是一个素数. G的一个子群H说是 Γ_K-p-*初等的*，如果它是一个 p-群 P 和一个阶与 p 互素的循环群C的半直积[1]，并且以下条件被满足:

($*_K$) 对于 $y \in P$，存在 $t \in \Gamma_K$，使得对于任意 $x \in C$ 都有 $yxy^{-1} = x^t$.

(当 $\Gamma_K = \{1\}$ 时，这个条件意味着C与P可交换，从而 $H = C \times P$ 是一个 p-初等群.)

G的一个子群叫做 Γ_K-*初等子群*，如果至少对于一个素数 p 来说，它是 Γ_K-p-初等的.

令 X_K 和 $X_K(p)$ 分别表示G的 Γ_K-初等子群族和 Γ_K-p-初等子群族. 我们有以下和定理19相平行的定理.

定理 28 *映射* $\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in X_K} R_K(H) \to R_K(G)$ *是满的*.

如同在 10.5 里一样，定理28由以下的与一个固定的素数 p 有

---

1) 不要把子群C与12.1中所选取的K的代数闭包混淆；后者在这一节里不出现.

关的更为精确的结果得出：

定理 29 令 $g=p^n l$ 是 G 的阶，这里 $(p,l)=1$. 常值函数 l 属于映射

$$\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H\in X_K(p)} R_K(H)\to R_K(G)$$

的象 $V_{K,p}$. 特别，$V_{K,p}$ 在 $R_K(G)$ 内的指数是有限的，且与 p 互素.

这个定理的证明与定理 18′的证明完全类似(当 K 是代数闭域时，这个证明就归结为定理 18′的证明). 我们将在下一节给出它的证明. 现在先给出定理 28 的两个推论：

命题 36 令 φ 是 G 上一个类函数. φ 属于 $R_K(G)$ 的必要且充分条件是：对于 G 的每一个 Γ_K-初等子群 H，都有 $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)\in R_K(H)$.

利用定理 28，我们有恒等式

$$1=\sum_{H\in X_K}\mathrm{Ind}_H^G f_H,\ \text{这里}\ f_H\in R_K(H).$$

两端乘以 φ 得

$$\varphi=\sum_{H\in X_K}\varphi\cdot\mathrm{Ind}_H^K f_H=\sum_{H\in X_K}\mathrm{Ind}_H^G(f_H\cdot\mathrm{Res}_H^G\varphi).$$

这样，如果对于一切 $H\in X_K$，$\mathrm{Res}_H^G\varphi\in R_K(H)$，那么 $\varphi\in R_K(G)$. 反过来是明显的. □

命题 37 如果对于每一个 $H\in X_K$，代数 $K[H]$ 是拟分裂的(参看 12.2)，那么 $K[G]$ 也是拟分裂的.

令 $\varphi\in\overline{R}_K(G)$. 对于 $H\in X_K$，我们有 $\mathrm{Res}_H^G\varphi\in\overline{R}_K(H)$；又因为 $K[H]$ 是拟分裂的，所以 $\overline{R}_K(H)=R_K(H)$ (参看命题 35 的推论). 于是由前一个命题，φ 属于 $R_K(G)$. 因此 $\overline{R}_K(G)=R_K(G)$，从而 $K[G]$ 是拟分裂的. □

习　题

12.7 证明映射 $\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H\in X_K}\overline{R}_K(H)\to\overline{R}_K(G)$ 是满的. [利用命题 36 的

证明方法.]

12.7 定理 29 的证明

令 A 表示由 m 次单位根所生成的 L 的子环.

引理 13 如果 l 属于 $A\otimes V_{K,p}$，那么 $l\in V_{K,p}$.

与 10.2,引理 5 的证明一样.

引理 14 在 A 中只有有限多个素理想 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_h$ 包含 p. 剩余类环 $A/\mathfrak{p}_i$ 都是特征为 p 的有限域，并且存在一个整数 N 使得 $pA\supset(\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_h)^N$.

$\mathfrak{p}_i$ 都与 A/pA 的素理想对应，而 A/pA 是一个特征为 p 的有限环. 由此就得出前两个论断. 因为 $(\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_h)/pA$ 是 Artin 环 A/pA 的根,所以是幂零的. 于是就得到第三个论断. □

引理 15 令 f 是 G 上一个函数,它的值在 gA 内并且在 Γ_K-类上取常值. 那么 f 可以写成以下形式:

$$f=\sum \mathrm{Ind}_C^G(\varphi_C),\quad \varphi_C\in A\otimes R_K(C),$$

这里 C 遍历 G 的一切循环子群所成的集.

令 $\varphi=f/g$. 用引理 6 的记法,我们有

$$f=\sum \mathrm{Ind}_C^G(\theta_C\cdot \mathrm{Res}_C^G\varphi).$$

只需证明,对一切 C，$\varphi_C=\theta_C\cdot\mathrm{Res}_C^G\varphi$ 属于 $A\otimes R_K(C)$. 然而 φ_C 的值可以被 C 的阶整除;因此，如果 χ 是 C 的一个一级特征标，那么 $\langle\varphi_C,\chi\rangle\in A$. 再者，由 f 在 Γ_K-类上取常值这一事实得出，若 $t\in\Gamma_K$，则

$$\langle\varphi_C,\chi\rangle=\langle\Psi^t\varphi_C,\Psi^t\chi\rangle=\langle\varphi_C,\Psi^t\chi\rangle.$$

这样，在 φ_C 的分解式里，在 K 上共轭的特征标的系数相等. 我们可以将 φ_C 表成特征标 χ 在 K 上的迹的 A-线性组合；所以 $\varphi_C\in A\otimes R_K(C)$. □

引理 16 设 x，$y\in G$，它们的 p'-分支是 Γ_K-共轭的. 如果 $f\in A\otimes R_K(G)$，那么

$$f(x)\equiv f(y)\pmod{\mathfrak{p}_i},\quad i=1,\cdots,h.$$

我们知道 f 在 Γ_K-类上取常值（定理 26，推论 1）. 因此可以

假设 x 是 y 的 p'-分支，这时可以象 10.3，引理 7 一样来证明. □

引理 17 令 x 是 G 的一个 p'-元素，而 C 是 x 所生成的循环子群. 令 $N(x)$ 是 G 中满足以下条件的元素 y 所成的集合：存在 $t\in\Gamma_K$ 使得 $yxy^{-1}=x^t$;[1] 又设 P 是 $N(x)$ 的一个 Sylow p-子群. 那么：

(a) $H=C\cdot P$ 是 G 的一个 Γ_K-p-初等子群.

(b) C 在 K 上每一线性表示都可以开拓到 H 上.

(c) 映射 $\mathrm{Res}: R_K(H)\to R_K(C)$ 是满的.

论断 (a) 是明显的. 要证 (b)，只需考虑 K 上的不可约表示的情形. 这样一个表示可以如下地得到：从一个同态 $\chi: C\to L^*$ 出发，取由 $\chi(C)$ 在 K 上所生成的 L 的子域 K_χ 作为表示空间，并且由公式

$$\rho(s)w=\chi(s)w,\quad s\in C,\quad w\in K,$$

来定义表示 $\rho: C\to \boldsymbol{GL}(K_\chi)$. 群 $\Gamma_K=\mathrm{Gal}(L/K)$ K-线性地作用在 K_χ 上. 对于 $y\in P$，令 $t\in\Gamma_K$，使得 $yxy^{-1}=x^t$；定义 $\rho(y)$ 为 σ_t 在 K_χ 上的限制. 可以验证 $\rho(y)$ 不依赖于 t 的选取，并且

$$\rho(y)\rho(x)\rho(y)^{-1}=\rho(x^t).$$

由此得出，以上所定义的 C 和 P 到 $\boldsymbol{GL}(K_\chi)$ 内的同态可以开拓为 H 到 $\boldsymbol{GL}(K_\chi)$ 内的一个同态，这就证明了 (b). 由 (b) 即得出 (c). □

在 10.3 里，$\Gamma_K=\{1\}$ 从而 $H=C\times P$，所以上面这个引理是明显的.

引理 18 保持引理 17 中的记法. 存在 $\phi\in A\otimes R_K(H)$，使得诱导函数 $\phi'=\mathrm{Ind}_H^G\phi$ 具有以下性质：

(i) $\phi'(x)\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}$，$i=1,\cdots,h$.

(ii) 对于任意不与 x Γ_K-共轭的 p'-元素 s 来说，$\phi'(s)=0$.

令 c 是 C 的阶. ϕ_C 是如下定义的 C 上的函数：如果存在 $t\in\Gamma_K$，使得 $y=x^t$，则 $\phi_C(y)=c$，在其它情形 $\phi_C(y)=0$. 将引

---

1) $N(x)$ 显然是 G 的一个子群. ——译者注

理15 应用到C上，就得出 $\psi_C\in A\otimes R_K(C)$. 由引理 17，存在 $\psi\in A\otimes R_K(H)$ 使得 $\mathrm{Res}_C^H\psi=\psi_C$. 我们证明$\psi$满足所要求的条件.

设s是G的一个p'-元素，而 $y\in G$，ysy^{-1} 是 p'-元素. 如果 $ysy^{-1}\in H$，那么 $ysy^{-1}\in C$，而且当 ysy^{-1} 不能写成 $x^t(t\in\Gamma_K)$ 的形式时，$\psi(ysy^{-1})$ 是零. 由此得出，若s不与x Γ_K-共轭，则 $\psi'(s)=0$，这就证明了 (ii). 为了证明 (i)，令Z是一切 x^t，$t\in\Gamma_K$，所成的集合. 那么

$$\psi'(x)=\frac{1}{\mathrm{Card}\,(H)}\sum_{yxy^{-1}\in Z}c=\frac{\mathrm{Card}(N(x))}{\mathrm{Card}(P)}.$$

又因为P是 $N(x)$ 的一个 Sylow p-子群(参看引理 17)，所以 $\psi'(x)$是一个与p互素的整数,这就证明了 (i). □

引理 19 存在 $\varphi\in A\otimes V_{K,p}$，使得对于每一 $x\in G$ 和每一 $i=1,\cdots,h$，$\varphi(x)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}_i)$.

令 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 p-正则 Γ_K-类的一个代表系 (即由 p'-元素组成). 对于每一 $\lambda\in\Lambda$，前一个引理使我们可以构造这样的 $\varphi_\lambda\in A\otimes V_{K,p}$:

$$\varphi_\lambda(x_\lambda)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}_i),$$

并且

$$\varphi_\lambda(x_\mu)=0，若\ \lambda\neq\mu.$$

令 $\varphi=\sum\limits_\lambda\varphi_\lambda$. 那么$\varphi$属于 $A\otimes V_{K,p}$，并且对于G中每一 p'-元素x，$\varphi(x)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}_i)$. 由引理 16 可知，这一结论对于$G$中任意元素$x$都成立. □

定理 29 的证明的完成

令 $\varphi\in A\otimes V_{K,p}$ 满足引理 19 的条件. 对于每一 $x\in G$ 和每一 $i=1,\cdots,h$，剩余类 $\varphi(x)\mathrm{mod}\mathfrak{p}_i$ 属于域 $A/\mathfrak{p}_i$ 的乘法群. 因为域 $A/\mathfrak{p}_i$ 是有限的(引理 14)，所以存在一个 $M\geqslant 1$ 使得对一切i和一切$x\in G$，都有 $\varphi^M(x)\equiv 1(\mathrm{mod}\mathfrak{p}_i)$. 于是由引理 14，我们有 $\varphi^{MN}(x)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ pA)$. 将 φ^{MN} 举n次方，我们得到 $\psi\in A\otimes V_{K,p}$，使得对一切 $x\in G$ 都有

$$\psi(x)\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^nA).$$

于是函数 $l(\phi-1)$ 的值在 $p^n lA=gA$ 内. 由引理 15, $l(\phi-1)\in A\otimes V_{K,p}$. 相减, 就得到 $l\in A\otimes V_{K,p}$. 于是再由引理 13, 就得到这个定理. □

习　　题

12.8 确定环 $A\otimes R_K(G)$ 的谱. [除了将共轭类换成 Γ_K-类外, 这个结果与 11.4 的结果一样.]

第十三章　有理性问题：例子

保留第十二章里的记号.

13.1　有理数域的情形

令 G 是一个阶为 g 的有限群，m 是 G 的元素的阶的一个公倍数. 以有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 作为基础域 K，而 $\boldsymbol{Q}(m)$ 是对 $\boldsymbol{Q}$ 添加 m 次单位根所得的扩域. $\boldsymbol{Q}(m)$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上的 Galois 群就是在 12.4 里记作 $\Gamma_{\boldsymbol{Q}}$ 的那个群；它是群 $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$ 的一个子群. 实际上，我们有以下

定理（Gauss） $\Gamma_{\boldsymbol{Q}}=(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$.

（这相当于说，m 次割圆多项式 Φ_m 在 $\boldsymbol{Q}$ 上不可约.）

我们假定这个经典结果是已知的；证明可以看，例如，Lang [10], p. 204.

推论　G 的两个元素是 $\Gamma_{\boldsymbol{Q}}$-共轭的必要且充分条件是它们所生成的循环子群是共轭的.

应用 12.4 的结果，我们有

定理 30　令 f 是 G 上在 $\boldsymbol{Q}(m)$ 内取值的一个类函数.

(a)　f 属于 $\boldsymbol{Q}\otimes R(G)$ 必要且只要对于每一与 m 互素的 t，都有 $\sigma_t(f)=\Psi^t(f)$.

(b)　f 属于 $\boldsymbol{Q}\otimes R_{\boldsymbol{Q}}(G)$ 必要且只要 f 的值在 $\boldsymbol{Q}$ 内，并且对于每一与 m 互素的 t，都有 $\Psi^t(f)=f$（这就是说，如果 x 和 y 生成 G 的同一子群，那么 $f(x)=f(y)$.）

（回忆一下，σ_t 是 $\boldsymbol{Q}(m)$ 的一个自同构，它把一个 m 次单位根映成它的 t 次幂，而 $\Psi^t(f)$ 是函数 $x\longmapsto f(x^t)$.）

推论 1　G 在 $\boldsymbol{Q}$ 上不可约表示的同构类的个数等于 G 的循环子群的共轭类的个数.

这由定理 26 的推论 2 得到.

推论 2 下列性质是等价的:

(i) G的每一特征标的值都在$\mathbf{Q}$内.

(i′) G的每一特征标的值都在$\mathbf{Z}$内.

(ii) G中生成同一循环子群的元素是共轭的.

特征标的值都是代数整数，从而只要它们在$\mathbf{Q}$内就一定在$\mathbf{Z}$内，这就得出(i)和(i′)的等价性。(i)和(ii)的等价性由定理 30得出. □

例

(1) 对称群$\mathfrak{S}_n$满足(ii)，从而满足(i). 再者，还可以证明，$\mathfrak{S}_n$的每一表示都在$\mathbf{Q}$上可实现，即$R(\mathfrak{S}_n)=R_{\mathbf{Q}}(\mathfrak{S}_n)$.

(2) 四元数群 $G=\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 满足推论 2 的条件. 所以 $\bar{R}_{\mathbf{Q}}(G)=R(G)$; 群 $R_{\mathbf{Q}}(G)$ 是 $R(G)$ 的一个指数为 2 的子群，参看习题 12.3.

设H是G的一个子群. 全1_H表示H的单位特征标，令1_H^G表示1_H所诱导的G的特征标(也就是在G/H上置换表示的特征标，参看 3.3，例 2).

定理 31 $R_{\mathbf{Q}}(G)$的每一元素都是特征标1_C^G的系数在$\mathbf{Q}$内的线性组合，这里C遍历G的一切循环子群.

这相当于说，$\mathbf{Q}\otimes R_{\mathbf{Q}}(G)$ 由一切这样的 1_C^G 生成. 因为 $\mathbf{Q}\otimes R_{\mathbf{Q}}(G)$ 带有非退化双线性型

$$(\varphi,\psi)\longmapsto\langle\varphi,\psi\rangle,$$

所以这就相当于证明，$R_{\mathbf{Q}}(G)$ 中与所有的 1_C^G 正交的元素 θ 一定等于零. 然而我们有

$$\langle\theta, 1_C^G\rangle=\langle \operatorname{Res}_C^G\theta, 1_C\rangle=\frac{1}{c}\sum_{s\in C}\theta(s),$$

这里 $c=\operatorname{Card}(C)$. 所以定理 31 等价于

定理 31′ 设 $\theta\in R_{\mathbf{Q}}(G)$. 如果对于 G 的每一循环子群C来说，$\sum_{s\in C}\theta(s)=0$，那么 $\theta=0$.

我们对 $\operatorname{Card}(G)$ 作归纳法来证明这个结果. 令 $s\in G$; $C(s)$是由s所生成的G的循环子群. 设 $x\in C(s)$. 如果x生成 $C(s)$,

那么因为 x 与 s 是 Γ_Q-共轭的，所以 $\theta(x)=\theta(s)$；如果 x 生成 $C(s)$ 的一个真子群，由归纳法假设(应用于 θ 在这个子群的限制上)，$\theta(x)=0$. 于是有

$$\sum_{x\in C(s)}\theta(x)=a\cdot\theta(s),$$

这里 a 是 $C(s)$ 的生成元的个数. 然而由题设,我们有

$$\sum_{x\in C(s)}\theta(x)=0,$$

所以 $\theta(s)=0$. □

推论 令 V 和 V' 是 G 在 $\mathbf{Q}$ 上的两个线性表示. 那么 V 与 V' 同构必要且只要对于 G 的每一循环子群 C,都有

$$\dim V^C=\dim V'^C,$$

这里 V^C 和 V'^C 分别表示 V 和 V' 中在 C 之下不变的元素所成的子空间.

必要性是明显的. 要证这个条件也是充分的，可以令 χ 和 χ' 分别是 V 和 V' 的特征标. 我们有

$$\dim V^C=\langle \mathrm{Res}_C^G\chi,1_C\rangle_C.$$

因此对于每一 C,$\langle \mathrm{Res}_C^G(\chi-\chi'),1_C\rangle_C=0$. 于是由定理 31′, $\chi-\chi'=0$. 所以 V 与 V' 同构. □

注记

(1) 一般说来，即使 H 遍历 G 的一切子群所成的集合，$R_Q(G)$ 的每一元素也不一定是特征标 1_H^G 的整系数线性组合（参看习题 13.4).

(2) 由定理 31 得出以下结果：设 F/E 是数域 E 的一个有限次 Galois 扩张,χ 是 $\mathrm{Gal}(F/E)$ 的一个在 $\mathbf{Q}$ 上可实现的线性表示的特征标. 那么可以将关于 χ 的 Artin L-函数写成 F_C 的 ζ-函数的分数幂的乘积,这里 F_C 是 F 中对应于 $\mathrm{Gal}(F/E)$ 的循环子群 C 的子域.

习　　题

13.1 令 G 是一个阶为 n 的循环群. 对于 n 的每一因子 d，令 G_d 表示

指数为 d 的 G 的子群。

(a) 证明，G 有一个 $\mathbf{Q}$ 上的不可约表示，它的核等于 G_d；并且确切到同构，是唯一的。令 χ_d 是这个不可约表示的特征标；那么 $\chi_d(1)=\varphi(d)$，一切 χ_d 组成 $R_{\mathbf{Q}}(G)$ 的一个正交基。

(b) 定义一个 $\mathbf{Q}[G]$ 到 $\prod\limits_{d|n}\mathbf{Q}(d)$ 上的同构。

(c) 令 $\psi_d=1_{G_d}^G$。证明，$\psi_d=\sum_{d'|d}\chi_{d'}$，而 $\chi_d=\sum_{d'|d}\mu(d/d')\psi_{d'}$，这里 μ 表示 Möbius 函数。由此推出，一切 ψ_d 组成 $R_{\mathbf{Q}}(G)$ 的一个基。

13.2 利用定理 27 归结为循环子群的情形，再应用习题 13.1 来证明定理 31。

13.3 令 ρ 是 G 在 $\mathbf{Q}$ 上一个不可约表示，令 $A=M_n(D)$ 是 $\mathbf{Q}[G]$ 的相应的单分支（D 是一个体，不一定可交换），又令 χ 是 ρ 的特征标。假设 ρ 是忠实的（即 $\mathrm{Ker}\rho=\{1\}$），且 G 的每一子群都是正规的。令 H 是 G 的一个子群。证明，在 G/H 上的置换表示包含 ρ 的重数当 $H=\{1\}$ 时是 n，当 $H\neq\{1\}$ 时是 0。由此得出，若 $n\geqslant 2$，则 χ 不在 $R_{\mathbf{Q}}(G)$ 中由特征标 1_H^G 所生成的子群内。

13.4. 令 E 是四元数群，C 是三阶循环群，而 $G=E\times C$。如果 $\boldsymbol{H}_{\mathbf{Q}}$ 是通常的四元数体（在 $\mathbf{Q}$ 上），证明 E 和 C 可以嵌入乘法群 $\boldsymbol{H}_{\mathbf{Q}}^*$ 内。这样一来，就分别给出 E 和 C 在向量空间 $\boldsymbol{H}_{\mathbf{Q}}$ 上的一个右乘和左乘作用。由此得出 G 在 $\mathbf{Q}$ 上一个四级不可约表示 ρ。证明，相应的单代数与 $M_2(K)$ 同构，这里 K 是三次单位根的域。验证习题 13.3 中的条件，并且由此得出，ρ 的特征标不是特征标 1_H^G，$H\subset G$，的线性组合。

13.5 令 X 和 Y 是两个有限集，群 Γ 作用在其上。设 H 是 Γ 的一个子群。用 X^H 和 Y^H 分别表示 X 和 Y 中被 H 固定的元素所成的集合。证明，Γ-集合 X 与 Y 同构必要且只要对于 Γ 的每一子群 H，$\mathrm{Card}(X^H)=\mathrm{Card}(Y^H)$。再证下列性质彼此等价：

(i) 关于 X 和 Y 的（线性）置换表示 ρ_X 与 ρ_Y 同构。

(ii) 对于 Γ 的每一循环子群 H，$\mathrm{Card}(X^H)=\mathrm{Card}(Y^H)$。

(iii) 对于 Γ 的每一子群 H，$\mathrm{Card}(X/H)=\mathrm{Card}(Y/H)$[1]。

(iv) 对于 Γ 的每一循环子群 H，$\mathrm{Card}(X/H)=\mathrm{Card}(Y/H)$。

当这些性质成立时，就说 X 与 Y 是**弱同构**的。

---

1) X/H 表示 X 中 H-轨道所成的集。——译者注

[(i) 与 (ii) 的等价性可通过计算 ρ_X 和 ρ_Y 的特征标得到. (i) 与 (iii) 和 (iv) 的等价性由 $\mathrm{Card}(X/H)$ 是 ρ_X 的特征标与特征标 1_H^Γ 的内积这一事实得到.]

证明,如果 Γ 是循环群,那么 Γ-集合 X 与 Y 同构必要且只要它们是弱同构的. 给出一个例子,说明在一般情形,弱同构的集合不一定同构(可取 Γ 是两个二阶群的直积).

13.6. 令 X 是 G 在 $Q(m)$ 上一切不可约的特征标所成的集合,Y 是 G 的共轭类的集合. 设群 $\Gamma_Q=(Z/mZ)^*$ 通过 $\chi\mapsto\sigma_t(\chi)$ 作用在 X 上,而通过 $x\mapsto x^t$ 作用在 Y 上.

(a) 证明,Γ_Q-集合 X 与 Y 是弱同构的(参看习题 13.5).

(b) 证明,X 和 Y 可以分别与Q-代数 $\mathrm{Cent}\,Q[G]$ 和 $Q\otimes R(G)$ 到 $Q(m)$ 内的同态所成的集合等同起来. 由此推出,Γ_Q-集合 X 与 Y 同构的充分且必要条件是 $\mathrm{Cent}\,Q[G]$ 与 $Q\otimes R(G)$ 同构.

(c) 证明,在下列每一情形,$\mathrm{Cent}\,Q[G]$ 都与 $Q\otimes R(G)$ 同构:

(c_1) G 是 Abel 群. [利用 G 到它的对偶 $\hat{G}$ 上的同构,并且注意$Q[G]=Q\otimes R(\hat{G})$.]

(c_2) G 是一个 p-群且 $p\neq 2$. [利用 Γ_Q 是循环群这一事实.]

(关于 X 与 Y 不 Γ_Q-同构的群 G 的例子,见 J. Thompson, *J. of Algebra*, **14**, 1970, pp. 1—4.)

13.7 令 p 是一个 $\neq 2$ 的素数,G 是 $GL_3(F_p)$ 的一个 Sylow p-子群,而 G' 是 Z/pZ 与 Z/p^2Z 的一个非交换的半直积. 于是 $\mathrm{Card}(G)=\mathrm{Card}(G')=p^3$.

(a) 证明 G 不与 G' 同构.

(b) 构造出 G 和 G' 的不可约表示. 证明 $Q[G]$ 和 $Q[G']$ 都是域 Q, $p+1$ 个域$Q(p)$ 和全阵代数 $M_p(Q(p))$的积. 特别 $Q[G]$ 与 $Q[G']$ 同构.

(c) 证明 $F_p[G]$ 不与 $F_p[G']$ 同构.

13.8 令 $\{C_1,\cdots,C_d\}$ 是 G 的循环子群的共轭类的一个代表系. 证明,特征标 $1_{C_1}^G,\cdots,1_{C_d}^G$ 组成 $Q\otimes R_Q(G)$ 的一个基.

13.2 实数域的情形

保留以前的记法. 取实数域R作为基础域; 相应的群 Γ_R 是 $(Z/mZ)^*$ 的子群$\{\pm 1\}$. G 的两个元素 x,y 是 Γ_R-共轭的必要且

充分的条件是 y 与 x 或 x^{-1} 共轭。与 $\Gamma_{\boldsymbol{R}}$ 的元素 -1 相对应的自同构 σ_{-1} 就是复共轭 $z \longmapsto z^*$. 如果 χ 是 G 在 $\boldsymbol{C}$ 上的特征标，那么一般的公式 $\sigma_t(\chi) = \Psi^t(\chi)$ 在这里简化为标准公式（参看 2.1，命题 1）：

$$\chi(s)^* = \chi(s^{-1}).$$

定理 32 (Frobenius-Schur) 令 $\rho: G \to \boldsymbol{GL}(V)$ 是 G 在 $\boldsymbol{C}$ 上一个线性表示，它的特征标为 χ. χ 的值在 $\boldsymbol{R}$ 内的必要且充分的条件是 V 有一个在 G 之下不变的非退化双线性型. ρ 在 $\boldsymbol{R}$ 上可实现的必要且充分的条件是 V 有一个在 G 之下不变的非退化对称双线性型.

群 G 以自然的方式作用在 V 的对偶空间 V' 上；容易看出，相应的特征标 χ' 如下地给出：

$$\chi'(s) = \chi(s)^* = \chi(s^{-1}).$$

χ 取实数值的必要且充分的条件是 $\chi = \chi'$，即 G 在 V 和在 V' 内的表示是同构的. 然而对于 V 到 V' 上每一同构映射，都有 V 上一个在 G 之下不变的非退化双线性型与它对应. 因此，这样一个双线性型的存在是 χ 取实值的必要且充分的条件.

现在假定 ρ 在 $\boldsymbol{R}$ 上可实现. 这相当于说，可以将 V 写成以下形式：

$$V = V_0 + iV_0 = \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} V_0,$$

这里 V_0 是在一切 ρ_s 之下保持稳定的 V 的一个 $\boldsymbol{R}$-子空间. 我们知道，V_0 上存在一个在 G 之下不变的正定二次型 Q_0（取任意一个正定二次型，用 G 的一切元素作变换，然后求和即可). 作纯量扩张，Q_0 在 V 上定义一个二次型，而与它相伴的双线性型是非退化的，对称的，且在 G 之下不变.

反之，设 V 带有这样一个双线性型 $B(x,y)$. 选取 V 上一个在 G 之下不变的正定 Hermite 内积 $(x|y)$；在前面已经证明过这样一个内积是存在的（参看 1.3). 对于每一 $x \in V$，存在 V 中唯一的元素 $\varphi(x)$ 使得对任意 $y \in V$ 都有

$$B(x,y) = (\varphi(x)|y)^*.$$

这样定义的映射 $\varphi: V \to V$ 是半线性的并且是 1—1 的．它的平方 φ^2 是 V 的一个自同构．对于 $x, y \in V$，我们有

$$(\varphi^2(x)|y) = B(\varphi(x), y)^* = B(y, \varphi(x))^*$$
$$= (\varphi(y)|\varphi(x)).$$

因为 $(\varphi(y)|\varphi(x)) = (\varphi(x)|\varphi(y))^*$，所以

$$(\varphi^2(x)|y) = (\varphi^2(y)|x)^* = (x|\varphi^2(y)).$$

这就是说，φ^2 是一个 Hermite 变换．再者，公式

$$(\varphi^2(x)|x) = (\varphi(x)|\varphi(x))$$

表明，φ^2 是正定的．然而我们知道，如果 u 是一个正定 Hermite 变换，那么存在唯一的正定 Hermite 变换 v，使得 $u = v^2$，而 v 可以写成 $P(u)$ 的形式，这里 P 是一个实系数多项式（设 u 的特征值是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，那么就选取 P，使得对一切 i 有 $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$）．将这个结果应用到 $u = \varphi^2$ 上，并且令 $\sigma = \varphi v^{-1}$．因为 $v = P(\varphi^2)$，所以 φ 与 v 可交换，我们有 $\sigma^2 = \varphi^2 v^{-2} = 1$．令 $V = V_0 \oplus V_1$ 是 V 关于 σ 的特征值 $+1$ 和 -1 的分解．因为 σ 是半线性的，所以将 V_0 的向量乘以 i 就把 V_0 映到 V_1 上．这样，$V = V_0 \oplus iV_0$．另一方面，因为 $B(x, y)$ 和 $(x|y)$ 都在 G 之下不变，所以 φ，v 和 σ 都与每一 ρ_s 可交换．由此得出，V_0 和 V_1 都在 ρ_s 之下稳定．于是就得到 V 在 $\mathbf{R}$ 上的一个实现．这就证明了定理 32．□

注记

（1） 定理 32 可以转移到紧群的表示上，参看第四章．这一节的其它结果也同样成立．

（2） 令 $\boldsymbol{O}_n(\boldsymbol{C})$ 和 $\boldsymbol{O}_n(\boldsymbol{R})$ 分别表示 n 个变量的复正交群和实正交群．以上证明的最后一部分表明，实际上，$\boldsymbol{O}_n(\boldsymbol{C})$ 的每一有限子群（甚至是紧子群）都与 $\boldsymbol{O}_n(\boldsymbol{R})$ 的一个子群共轭．这是关于 Lie 群的极大紧子群的一般性定理的一个特殊情形．

G 的不可约表示的三种类型

令 $\rho: G \to \boldsymbol{GL}(V)$ 是 G 在 $\boldsymbol{C}$ 上一个 n 级不可约表示，χ 是它的特征标．有三种可能情形（互相排斥）：

（1） χ 有一个值不是实数．通过作纯量的局限，ρ 定义 $\boldsymbol{R}$ 上

一个$2n$级不可约表示，特征标为 $\chi+\bar{\chi}$. 关于这个表示的换位代数是$\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{R}[G]$的相应的单分支与 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ 同构；它的 Schur 指标等于1.

(2) χ的一切值都是实数，而且ρ可以由一个表示ρ_0在$\boldsymbol{R}$上实现. 表示ρ_0是不可约的(而且是绝对不可约的)，特征标为χ. 它的换位代数是$\boldsymbol{R}$. $\boldsymbol{R}[G]$ 的相应的单分支与 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{R})$ 同构；它的 Schur 指标等于1.

(3) χ的一切值都是实数，但ρ不能在$\boldsymbol{R}$上实现. 作纯量局限，ρ定义$\boldsymbol{R}$上一个$2n$级不可约表示，特征标为2χ. 它的换位代数在$\boldsymbol{R}$上是四次的；它与四元数体$\boldsymbol{H}$同构. $\boldsymbol{R}[G]$的相应的单分支与 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{H})$ 同构；它的 Schur 指标等于2.

再者，G在$\boldsymbol{R}$上每一不可约表示都可以由它的一个复不可约表示通过上述三种方法之一而得到：将$\boldsymbol{R}[G]$分解为单分支的积，注意这样一个单分支必然有$\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{R})$，$\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{H})$ 三种类型之一，即可证明这一点. ($\boldsymbol{R}[G]$ 是一个群代数的事实在这里并不重要；同样的结果对于$\boldsymbol{R}$上任何半单代数都成立.)

类型1，2和3可以用不同的方式来刻画：

命题 38

(a) 如果V上不存在一个G-不变的非零双线性型，那么ρ是类型1.

(b) 如果这样一个双线性型存在，那么确切到位似，这个双线性型是唯一的，并且非退化. 它或者是对称的，或者是交错的. 如果是对称的，那么ρ是类型2；如果是交错的，那么ρ是类型3.

V上一个G-不变双线性型$B\neq 0$对应着V到它的对偶空间V'内的一个G-同态$b\neq 0$. 因为V和V'都是不可约的，所以b是一个同构；这就证明了B是非退化的. 由定理32，B的存在意味着ρ是类型2和3. 再者，由 Schur 引理，除了相差一个位似外，B是唯一确定的. 如果将B写成$B=B_++B_-$，这里B_+是对称的，B_-是交错的，那么B_+和B_-都在G之下不变. 因为B是唯一的，所以或者$B_-=0$(从而B是对称的)，或者$B_+=0$(从而B是

交错的）．由定理 32，第一个情形相当于类型 2，第二个情形相当于类型 3．□

命题 39 *ρ 是类型 1，2 或 3，必要且只要*

$$\langle 1, \Psi^2(\chi)\rangle = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\chi(s^2),\ \text{这里}\ g = \mathrm{Card}(G),$$

分别等于 0，+1 或 −1．

令 χ_σ^2 和 χ_λ^2 分别是 V 的对称方和交错方的特征标．那么

$$\chi_\sigma^2 = \frac{1}{2}(\chi^2 + \Psi^2(\chi)),\ \chi_\lambda^2 = \frac{1}{2}(\chi^2 - \Psi^2(\chi)),$$

参看 2.1，命题 3．令 a_+ 和 a_- 分别代表 ρ 的对称方和交错方包含单位表示的重数．那么

$$a_+ = \langle 1, \chi_\sigma^2\rangle,\ a_- = \langle 1, \chi_\lambda^2\rangle.$$

另一方面，V 的对称方和交错方的对偶空间可以分别与 V 上对称双线性型和交错双线性型所成的空间等同起来．因为相互对偶的表示中所含的单位表示有同一重数，由命题 38 得：

$$a_+ = a_- = 0,\quad \text{在情形 1},$$
$$a_+ = 1,\ a_- = 0,\ \text{在情形 2},$$
$$a_+ = 0,\ a_- = 1,\ \text{在情形 3}.$$

因为 $\langle 1, \Psi^2(\chi)\rangle = a_+ - a_-$，所以对应于这三种情形，它分别等于 0，+1 和 −1．命题得证．□

习　题

13.9　设 c 是 G 的一个共轭类．令 c^{-1} 表示由一切 x^{-1}，$x\in c$，所成的类，如果 $c = c^{-1}$，那么就说 c 是偶的．

(a)　证明，G 在 $\mathbf{C}$ 上的实值不可约特征标的个数等于 G 的偶类的个数．

(b)　证明，如果 G 的阶是奇数，那么仅有的偶类就是单位元的类．由此推出，G 的仅有的实值不可约特征标就是单位特征标（Burnside）．

13.10　证明，$\mathbf{R}$-代数 $\mathrm{Cent}\mathbf{R}[G]$ 与 $\mathbf{R}\otimes R(G)$ 同构．

13.11　令 X_2 和 X_3 分别是类型 2 和类型 3 的不可约特征标所成的集．证明，整数

$$\sum_{\chi\in X_2}\chi(1)-\sum_{\chi\in X_3}\chi(1)$$

等于G中平方等于1的元素的个数.[注意这个整数等于$\sum\chi(1)\langle 1,\Psi^2(\chi)\rangle=\langle 1,\Psi^2(r_G)\rangle$，这里$r_G$是$G$的正则表示的特征标.]

由此推出,如果G的阶是偶数，那么至少有两个类型是(2)的特征标。

13.12(Burnside) 设G的阶是奇数. 令h是G的共轭类的个数. 证明，$g\equiv h(\bmod 16)$.

[利用公式 $g=\sum_{i=1}^{h}\chi_i(1)^2$，并且注意$\neq 1$的$\chi_i$两两共轭（参看习题13.9),而$\chi_i(1)$是奇数.]

如果g的每一素因子都同余于1(mod 4)，用同样的方法证明，$g\equiv h(\bmod 32)$。

参考文献（第二部分）

关于半单代数的一般理论，可参看文献:

[8] N. Bourbaki, Algèbre. Chapter VIII, Hermann, Paris, 1958.

[9] C. Curtis and I. Reiner, Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience Publishers, New York, 1962.

[10] S. Lang, Algebra. Addison-Wesley, New York, 1965.

关于诱导表示，Brauer 定理和有理性问题可参看文献 [9,10] 以及:

[11] W. Feit, Characters of Finite Groups, W. A. Benjamin Publishers, New York, 1967.

[12] R. Brauer and J. Tate, On the Characters of finite groups. *Ann. of Math.*, **62** (1955), p. 1—7.

[13] B. Huppert, Endliche Gruppen I. Kap. V. Springer-Verlag, 1967.

对于有限群结构的应用，可参看文献 [11,13]，以及经典著作:

[14] W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2nd edition. Cambridge, 1911; reprinted by Dover Publishers, 1955.

有限"代数"群的特征标特别有趣味；可以参看文献:

[15] A. Borel et al., Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131, Springer-Verlag, 1970.

[16] P. Deligne and G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math.*, **103** (1976), p. 103—161.

关于特征标理论的主要问题的罗列，可以参看文献

[17] R. Brauer, Representations of finite groups. Lectures on Modern Mathematics, Vol. I, edited by T. Saaty. John Wiley and Sons, New York, 1963.

第三部分　Brauer 理论导引

在这一部分里，我们将对有限群在特征 p 里和在特征零里的表示作一比较．这些结果，主要是由 Brauer 得到的，可以用“Grothendieck 群”的语言更为方便地加以阐述；这种处理方法是由 Swan 引入的(参看 [21]，[22])，他还得到一系列其它的结果，这些结果不在这里讨论．

十四和十五两章是预备知识．第十六章包含一些主要定理的表述，这些定理的证明放在第十七章．在第十八章里，我们用“模特征标”的语言来叙述这些结果．第十九章包含对 Artin 表示的某些应用．关于 Grothendieck 群，射影模等等的标准定义都放在附录里．

这里的阐述只是介绍性的；特别，关于块的理论并没有涉及．有兴趣的读者可以参考 Curtis-Reiner [9] 和 Feit 的讲义[20]，同时还可以参考 Brauer, Feit, Green, Osima, Suzuki 和 Thompson 等人的原始论文．

第十四章　群 $R_K(G)$, $R_k(G)$ 和 $P_k(G)$

记号：在第三部分里，G 表示一个有限群，m 是 G 的元素的阶的最小公倍．一个域说是（关于 G）**足够大的**，如果它包含全部 m 次单位根(参看 12.3，定理 25)．

所考虑的模都是**有限生成**的．

令 K 表示一个关于离散赋值 v 的完备域(参看附录)，v 的赋值环为 A，极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为 $k = A/\mathfrak{m}$．假设 K 的特征为零而 k 的特征为 $p > 0$ (于是“**对 $\mathfrak{m}$ 约化**”就由特征零过渡到特征 p)．

14.1 环 $R_K(G)$ 和 $R_k(G)$

设 L 是一个域. 我们用 $R_L(G)$ 表示有限生成 $L[G]$-模的范畴的 Grothendieck 群(参看附录). 它是一个对于(关于 L 的)外张量积来说的有单位元的交换环. 如果 E 是一个 $L[G]$-模,我们令 $[E]$ 表示它在 $R_L(G)$ 里的象; 一切 $[E]$ 的集合记作 $R_L^+(G)$.

令 S_L 表示单 $L[G]$-模(也就是 G 在 L 上的不可约表示)的同构类所成的集合.

命题 40 一切元素 $[E]$, $E \in S_L$, 构成群 $R_L(G)$ 的一个基.

令 R 是以 S_L 为基的自由 $\mathbf{Z}$-模. $[E]$ 的族 $(E \in S_L)$ 定义一个同态 $\alpha: R \to R_L(G): \alpha(E) = [E]$. 另一方面,设 F 是一个 $L[G]$-模,而 $E \in S_L$, 令 $l_E(F)$ 表示 E 出现在 F 的一个合成列中的重数; 显然 l_E 是 F 的一个加性函数[1]. 于是存在一个同态 $\beta_E: R_L(G) \to \mathbf{Z}$, 使得对于任意 F, $\beta_E([F]) = l_E(F)$. 一切这样的 β_E 定义一个同态

$$\beta: R_L(G) \to R,$$

并且显然 α 与 β 是互逆的. 命题被证明. □

更一般地,同样的论证也可以应用到任意环上有限长度模的范畴上.

同时注意 $R_L^+(G)$ 的元素就是基 $([E])_{E \in S_L}$ 的元素的非负整系数线性组合.

上面的讨论特别可以应用到域 K 和 k 上. 因为 K 的特征是零,一个 $K[G]$-模 E 的特征标 χ_E 已经有定义; 它是 E 的一个加性函数. 根据线性, 我们得到由 $R_K(G)$ 到 G 的类函数所成的环内的一个映射 $x \longmapsto \chi_x$. 这个映射实际上是 $R_K(G)$ 到 G 在 K 上的虚特征标所成的群上的一个同构; 我们常把这两个群等同起来(这说明了 12.1 中所用的记法). 我们也常把 χ_x 叫做 $R_K(G)$ 的元素 x 的特征标(或虚特征标).

---

1) 即对于 $L[G]$-模正合列 $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ 来说, 都有 $l_E(F) = l_E(F') + l_E(F'')$.——译者注

在第十八章里将会看到,利用 Brauer 的模特征标，对于域 k 也有类似的结果.

注记　如果 E 和 E' 是两个 $K[G]$-模，并且在 $R_K(G)$ 里有 $[E]=[E']$，那么 E 与 E' 同构：这一点可以由 E 和 E' 都是半单的事实得到.如果 p 能够整除 G 的阶,那么同样的结果对于 $k[G]$-模来说不再成立,因为存在非半单的模.

14.2　群 $P_k(G)$ 和 $P_A(G)$

这两个群分别定义为投射 $k[G]$-模和投射 $A[G]$-模(参看附录)的范畴的 Grothendieck 群．类似地可以定义 $P_k^+(G)$ 和 $P_A^+(G)$.

如果 E 是一个 $k[G]$-模而 F 是一个投射 $k[G]$-模，那么 $E\otimes_k F$ 是一个投射 $k[G]$-模(这只要对于 F 是自由模的情形来验证就够了,而在这一情形是显然的)．于是我们在 $P_k(G)$ 上得到一个 $R_k(G)$-模结构.

14.3　$P_k(G)$ 的结构

因为 $k[G]$ 是一个 Artin 环,所以我们可以谈论一个 $k[G]$-模 M 的投射包络(参看 Gabriel [23] 或 Giorgiutti [24])．我们简单地说明一下这个意义：

一个模同态 $f:M'\to M$ 说是本质的，如果 $f(M')=M$，而对于 M' 的一切真子模 M'' 来说，$f(M'')\neq M$．一个投射模 P 叫做 M 的一个投射包络,如果它容有一个本质同态 $f:P\to M$.

命题 41

(a)　每一模 M 都有一个投射包络,确切到同构是唯一的.

(b)　如果 P_i 是 M_i 的投射包络 $(i=1,\cdots,n)$，那么 P_i 的直和就是 M_i 的直和的投射包络.

(c)　如果 P 是一个投射模而 E 是它的最大半单商模,那么 P 是 E 的一个投射包络.

我们证明(a)．把 M 写成 L/R 的形式,这里 L 是一个投射模而 R 是 L 的一个子模(例如,可以取 L 是自由模)．对于 $N\subset R$，令

f_N 是L/N到 $M = L/R$ 上的典范同态．令N是R中使f_N是本质同态的极小子模；这样一个子模是存在的，因为f_R是本质的而$k[G]$是 Artin 环．令 $P = L/N$，而Q是L的这样一个子模，它在使得射影 $Q \to P$ 是满射的那些子模Q之中是极小的．因为L是投射模，射影 $p: L \to P = L/N$ 提升为 $q: L \to Q$，并且由Q的极小性得出，$q(L) = Q$．令N'是q的核．射影 $f_{N'}: L/N' \to L/R$ 分解为 $L/N' = Q \to L/N \to L/R$，并且这两个同态都是本质的．因为N'包含在N内，由N的极小性得出 $N' = N$，即 $Q \to P$ 是一个同构．于是模L是一个直和 $L = N \oplus Q$，这就证明了 $P = L/N$ 是投射模．显然 $P \to M$ 是M的一个投射包络．

令 $P' \to M$ 是M的另一投射包络．因为P是投射模，所以存在 $q: P \to P'$，使得三角同态

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
P \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & P' \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

是交换的．$g(P)$ 在M里的象是M；因为 $P' \to M$ 是本质的，由此得出 $g(P) = P'$，从而g是满的．因为P'是投射模，$P \to P'$ 的核S是P内的一个直和因子，这就表明P可以分解为 $S \oplus P'$．由 $P \to M$ 是本质的这一事实推出 $S = 0$，即 $P \to P'$ 是同构．这就完成了(a)的证明．论断(b)和(c)的证明是容易的，我们把它们留给读者(详尽的证明可以看[23]，[24])．□

注意在情形(c)，E是P对于$\mathfrak{r}P$的商，这里$\mathfrak{r}$是$k[G]$的根(极大幂零理想)；这是由于半单$k[G]$-模就是那些被$\mathfrak{r}$所零化的$k[G]$-模．再者，由(b)，对于E被分为单模直和的任意一个分解，都给出P的一个相应的分解．因此我们有：

推论 1 每一投射$k[G]$-模都是一些不可分解的投射$k[G]$-模的直和；确切到同构，这个分解是唯一的．这些不可分解的投射$k[G]$-模都是单$k[G]$-模的投射包络．

推论 2 对于每一 $E \in S_k$，令 P_E 是E的一个投射包络．那么一切 $[P_E]$，$E \in S_k$，构成 $P_k(G)$ 的一个基．

推论 3 两个投射 $k[G]$-模 P 与 P' 同构必要且只要它们在 $P_k(G)$ 中的类 $[P]$ 与 $[P']$ 相等.

更确切地说，如果 $[P]=\sum_{E\in S_k} n_E[P_E]$，那么模 P 与 $\prod_{E\in S_k}(P_E)^{n_E}$ 同构.

习　题

14.1 证明，$k[G]$是一个内射 $k[G]$-模. 由此推出，一个 $k[G]$-模是投射模必要且只要它是内射模，且那些不可分解的投射 $k[G]$-模都是单 $k[G]$-模的内射包络(参看习题 14.6).

14.4 $P_A(G)$ 的结构

以下的结果是熟知的:

引理 20 令 A 是一个交换环，P 是一个 $A[G]$-模. 那么 P 是 $A[G]$ 上一个投射模必要且只要它是 A 上一个投射模，并且存在 P 的一个自同态 u，使得

$$\sum_{s\in G} s\cdot u(s^{-1}x)=x,\quad 对一切\ x\in P.$$

如果 P 是 $A[G]$ 上一个投射模，那么它也是 A 上一个投射模；这是因为 $A[G]$ 是自由 A-模. 反之，假设 P 的底 A-模 P_0 是投射模；令 $Q=A[G]\otimes_A P_0$. $A[G]$-模 Q 是投射模. 再者，恒等映射 $P_0\to P$ 开拓为一个 $A[G]$-同态满射 $q:Q\to P$. 由此得出，P 是投射模必要且只要存在一个 $A[G]$-同态 $v:P\to Q$，使得 $q\circ v=1$. 容易看出，每一 $A[G]$-同态 $v:P\to Q$ 都具有以下形式:

$$x\longmapsto\sum_{s\in G} s\otimes u(s^{-1}x),$$

对某一 $u\in \mathrm{End}_A(P_0)$. 要使 $q\circ v=1$ 必要且只要对于一切 $x\in P$，都有 $\sum_{s\in G} s\cdot u(s^{-1}x)=x$. 引理被证明. □

引理 21 设 A 是一个局部环，它的剩余域是 $k_A=A/\mathfrak{m}_A$.

(a) 令 P 是一个 A 上自由 $A[G]$-模. P 是一个 $A[G]$-投射模必要且只要 $k_A[G]$-模 $\bar{P}=P\otimes k_A$ 是投射模.

(b) 两个投射 $A[G]$-模 P 与 P' 同构必要且只要相应的

$k_A[G]$-模 $\bar{P}$ 与 $\bar{P}'$ 同构.

如果 P 是投射 $A[G]$-模，那么 $\bar{P}$ 是一个投射 $k_A[G]$-模. 反之，如果这个条件被满足，那么由前一引理可知，存在 $\bar{P}$ 的一个 k_A-自同态 $\bar{u}$，使得

$$\sum_{s\in G} s\cdot\bar{u}\cdot s^{-1}=1.$$

提升 $\bar{u}$，就得到 P 的一个 A-自同态 u，使得 $u'=\sum\limits_{s\in G} s\cdot u\cdot s^{-1}$ 满足关系 $u'\equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_A P}$. 因此 u' 是 P 的一个自同构，而且与 G 的元素可交换. 于是 $\sum\limits_{s\in G} s\cdot(uu'^{-1})\cdot s^{-1}=1$，这就证明了 P 是 $A[G]$ 上一个投射模；(a) 被证明.

设 P 和 P' 都是投射模，而 $\bar{w}:\bar{P}\to\bar{P}'$ 是一个 $k_A[G]$-同态. 由 P 是投射模这一事实得出，存在由 $\bar{w}$ 提升的 $A[G]$-同态 $w:P\to P'$. 如果 $\bar{w}$ 还是一个同构，那么由 Nakayama 引理(或由一个关于行列式的初等论断)推出，w 也是一个同构. (b) 被证明. □

现在转向环 A. 我们有

命题 42

(a) 设 E 是一个 $A[G]$-模. E 是一个投射 $A[G]$-模必要且只要 E 是 A 上的自由模，且 E 对 $\mathfrak{m}$ 的约化 $\bar{E}=E/\mathfrak{m}E$ 是一个投射 $k[G]$-模.

(b) 如果 F 是一个投射 $k[G]$-模，那么存在唯一的（确切到同构）投射 $A[G]$-模，它对 $\mathfrak{m}$ 的约化与 F 同构.

论断 (a) 和论断 (b) 中的唯一性可由引理 20 和 21 推出. 只剩下证明论断 (b) 中的存在性.

令 F 是一个投射 $k[G]$-模. 如果 n 是一个 $\geqslant 1$ 的整数，令 A_n 表示环 $A/\mathfrak{m}^n$；于是 $A_1=k$ 而 A 是 A_n 的射影极限. 环 A_n 和 $A_n[G]$ 都是 Artin 环. 用上一节的论证方法可知，$A_n[G]$-模 F 有一个投射包络 P_n，而且 P_n 是 A_n 上自由模. 射影 $P_n\to F$ 通过 $P_n/\mathfrak{m}P_n\to F$ 分解，而后者是满射. 因为 F 是一个投射 $k[G]$-模，所以存在 $P_n/\mathfrak{m}P_n$ 的一个子 $k[G]$-模 F'，它被同构地映到 F 上. F' 在 P_n 中的原象 P' 的象是 F. 因为 $P_n\to F$ 是本质的，由此得出

$P' = P_n$，即 $P_n/\mathfrak{m}P \to F$ 是同构．再者，这些 P_n 组成一个投射序列．它的射影极限 P 是 A 上一个自由 $A[G]$-模，而 $\bar{P} = P/\mathfrak{m}P$ 与 F 同构．再注意到 (a)，于是就完成了 (b) 的证明．□

推论 1 每一投射 $A[G]$-模都是不可分解的投射 $A[G]$-模的直和；确切到同构，这个分解是唯一的．一个不可分解的投射 $A[G]$-模，确切到同构，由它对 $\mathfrak{m}$ 的约化完全刻画出来，后者是一个不可分解的 $k[G]$-模（就是一个单 $k[G]$-模的投射包络）．

这由上面的命题以及关于投射 $k[G]$-模的熟知的结果得到．作为一个推论，我们有

推论 2 两个投射 $A[G]$-模 P 与 Q 同构的必要且充分条件是在 $P_A(G)$ 内有 $[P]=[Q]$．

推论 3 对 $\mathfrak{m}$ 的约化作用定义一个 $P_A(G)$ 到 $P_k(G)$ 上的同构；这个同构将 $P_A^+(G)$ 映成 $P_k^+(G)$．

根据这个结果，我们可以把 $P_A(G)$ 与 $P_k(G)$ 等同起来．

关于在"极限 Artin"（proartinian）范畴里投射包络的一般处理，可以看 Demazure-Gabriel [23]．

习　　题

14.2 令 A 是一个交换环，P 是 A 上一个投射 $A[G]$-模．证明下列性质等价：

(i) P 是一个投射 $A[G]$-模．

(ii) 对于 A 的每一极大理想 $\mathfrak{p}$，$(A/\mathfrak{p})[G]$-模 $P/\mathfrak{p}P$ 是投射的．

14.3 (a) 令 B 是一个 A-代数，它在 A 上是有限秩自由模；又令 $\bar{e}$ 是 $\bar{B} = B/\mathfrak{m}B$ 的一个幂等元素．证明，存在 B 的一个幂等元素，它对 $\mathfrak{m}B$ 的约化等于 $\bar{e}$．

(b) 令 P 是一个投射 $A[G]$-模，$B = \mathrm{End}^G(P)$．证明，B 是 A 上的自由模，而 $\bar{B}$ 可以与 $\bar{P} = P/\mathfrak{m}P$ 的 G-自同态代数等同．由此再利用 (a) 得出，$\bar{P}$ 的任意一个被分成 $k[G]$-模直和的分解都提升为 P 的一个相应的分解．

(c) 利用 (b) 给出命题 42 (b) 中存在性的另一证明．[将 F 写成一个自由模 $\bar{F}$ 的一个直因子，将 $\bar{F}$ 提升为一个自由模，再应用 (b)．]

14.5 对偶性

$R_K(G)$ 与 $R_K(G)$ 之间的对偶性

令 E 和 F 都是 $K[G]$-模. 令

$$\langle E,F\rangle = \dim\mathrm{Hom}^G(E, F)$$

参看 7.1. 映射 $(E,F)\to\langle E,F\rangle$ 是"双线性的"(关于正合列)[1], 从而定义一个双线性型

$$R_K(G)\times R_K(G)\to \mathbf{Z},$$

这个双线性型记作 $\langle e,f\rangle$ 或 $\langle e,f\rangle_K$. 单模 $E\in S_K$ 的类 $[E]$ 彼此正交,并且 $\langle E,E\rangle$ 等于 E 的自同态域 $\mathrm{End}^G(E)$ 的维数 d_E; 因此 $d_E\geqslant 1$, 而等号当且仅当 E 是绝对单的 (即对应的表示是绝对不可约的)时才成立,参看 12.1.

当 K 足够大时, 由定理 25 得出. 每一单 $K[G]$-模都是绝对单的. 因此, 上述双线性型定义了 $R_K(G)$ 到它的对偶模上的一个同构;在这个意义下,这个双线性型在 $\mathbf{Z}$ 上非退化.

$R_k(G)$ 和 $P_k(G)$ 之间的对偶性

设 E 是一个投射 $k[G]$-模, F 是任意一个 $k[G]$-模. 令

$$\langle E,F\rangle = \dim\mathrm{Hom}^G(E,F).$$

因为 E 是投射模,这样就得到关于 E 和 F 的一个双线性函数,从而就得到一个双线性型

$$P_k(G)\times R_k(G)\to \mathbf{Z};$$

记作 $\langle e,f\rangle$ 或 $\langle e,f\rangle_k$. 如果 $E, E'\in S_k$, 那么就有

$$\mathrm{Hom}^G(P_E,E') = \mathrm{Hom}^G(E,E'),$$

这里 P_E 是 E 的投射包络. 如果 $E\neq E'$, 那么 $[P_E]$ 与 $[E']$ 正交; 对于 $E=E'$, 我们有

$$\langle P_E,E'\rangle = d_E = \dim\mathrm{End}^G(E).$$

如同前面的情形一样, $d_E=1$ 当且仅当 E 是绝对单的.

假设 K 是足够大的. 于是 k 含有一切 m 次单位根. 这时对于每一 $E\in S_k$, 都有 $d_E=1$ (见下面的注记). 因此双线性型 $\langle,\rangle_k$ 在 $\mathbf{Z}$ 上非退化, 而基 $[E]$ 和 $[P_E]$ $(E\in S_k)$ 关于这个双线性型来说彼此对偶.

1) 即如果 $0\to E'\to E\to E''\to 0$ 正合, 则对于任意 $K[G]$-模 F, 都有 $\langle E,F\rangle = \langle E',F\rangle+\langle E'',F\rangle$; $\langle F,E\rangle=\langle F,E'\rangle+\langle F,E''\rangle$.——译者注

注记 当K足够大时，$d_E=1$这一事实可以用不同的方法证明如下：

(1) 当我们知道同态$d: R_K(G)\to R_k(G)$是满射时(参看第十六章，定理34)，由定理25通过"对m约化"，就得到这个结果.

(2) 也可以利用 Schur 指标在k上都等于1这一事实(参看14.6). 这样就归结为证明(在k的一个扩域上)G的表示的特征标永远在k内取值. 这一结果可以由这些特征标都是m次单位根的和这一事实而得到.

习 题

14.4 设E是一个$k[G]$-模，E'是E的对偶模(即$E'=\mathrm{Hom}_k(E,k)$). 定义$H^0(G,E)$是E中在G之下不动的元素所成的子空间；又定义$H_0(G,E)$是E对于由一切形如$sx-x(x\in E, s\in G)$的元素所生成的子空间的商空间.

(a) 证明，如果E是投射模，那么映射$x\mapsto\sum_{s\in G}sx$过渡到商空间上，定义一个$H_0(G,E)$到$H^0(G,E)$上的同构.

(b) 证明，$H^0(G,E)$是$H_0(G,E')$的对偶. 由此推出，如果E是投射模，$H^0(G,E)$与$H^0(G,E')$有相同的维数.

14.5 令E和F是两个$k[G]$-模，其中E是投射的. 证明，

$$\dim\mathrm{Hom}^G(E,F)=\dim\mathrm{Hom}^G(F,E).$$

[对于投射$k[G]$-模$\mathrm{Hom}(E,F)$应用习题14.4(b)，并且注意它的对偶模与$\mathrm{Hom}(F,E)$同构.]

14.6 令S是一个单$k[G]$-模，P_S是它的投射包络. 证明P_S包含一个与S同构的子模. [应用习题14.5，取$E=P_S$，$F=S$.] 由此推出，P_S与S的内射包络同构(参看习题14.1). 特别，如果S不是投射模，那么S在P_S的一个合成列里至少出现两次.

14.7 令E是一个半单$k[G]$-模，P_E是它的投射包络. 证明，E的对偶模的投射包络与P_E的对偶模同构. [归结到单模的情形并且应用习题14.6.]

14.6 纯量扩张

如果K'是K的一个扩域，那么通过纯量扩张，每一$K[G]$-模E就定义了一个$K'[G]$-模$K'\otimes_K E$. 这样一来，就得到一个同态

$$R_K(G) \to R_{K'}(G).$$

这个同态是一个单射．通过确定 $R_K(G)$ 的标准基 $\{[E]\}(E\in S_K)$ 的象就可以看出这一点：如果 D_E 是 E 的自同态体，那么张量积 $K'\otimes D_E$ 分解成为一些全阵代数 $M_{s_i}(D_i)$ 的积，这里 D_i 都是域．每一 D_i 对应着一个单 $K'[G]$-模 E'_i，而 $[E]$ 在 $R_{K'}(G)$ 内的象等于 $\sum s_i[E'_i]$．再者，每一单 $K'[G]$-模与唯一的 E'_i 同构．对于映射 $R_K(G)\to R_{K'}(G)$ 的这样描述，是 12-2 的一般化，特别证明了：

如果所有的 D_E 都是交换的，那么 s_i 都等于 1，而同态 $R_K(G)\to R_{K'}(G)$ 将第一个群与第二个群的一个直因子等同起来；换句话说，这个同态是一个分裂内射．如果所有的 $E\in S_K$ 都是绝对单的，那么 $R_K(G)\to R_{K'}(G)$ 是一个同构．

对于通过纯量扩张所定义的同态

$$R_k(G)\to R_{k'}(G),\ P_k(G)\to P_{k'}(G)$$

来说，也有类似的结果．在这种情况下实际上更为简单：一个单 $k[G]$-模的自同态体总是交换的，并且在 k 上是可分的（当 k 是有限的时候，这是明显的；对于一般情形，可以通过纯量扩张而得出这一事实）．因此 $R_k(G)\to R_{k'}(G)$ 是一个分裂内射．对于 $P_k(G)\to P_{k'}(G)$ 来说，也有同样的结果：因为"纯量扩张"这个函子将投射包络仍旧变成投射包络．

现在设 K' 是 K 的一个有限扩域．令 A' 是 K' 的整量环（就是 A 在 K' 内的整闭包），而 k' 是它的剩余域．如果 E 是一个投射 $A[G]$-模，那么 $E'=A'\otimes_A E$ 是一个投射 $A'[G]$-模．再者，E' 的约化 $k'\otimes_{A'}E'$ 同构于

$$k'\otimes_A E = k'\otimes_k(k\otimes_A E).$$

因此，图

$$\begin{array}{ccc} P_A(G) & \to & P_{A'}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_k(G) & \to & P_{k'}(G) \end{array}$$

是交换的．因为在这个图中两个垂直的箭头是同构映射，所以由以上的论述可知，同态 $P_A(G)\to P_{A'}(G)$ 是一个分裂内射．

注记 内射 $R_K(G)\to R_{K'}(G)$，$R_k(G)\to R_{k'}(G)$等等都与前一节的双线性型相容，而且还与下一节所定义的同态 c，d，e 可交换．

第十五章 cde 三角

我们将定义同态 c，d 和 e，它们形成一个可交换的三角形：

$$\begin{tikzcd} P_k(G) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "e"'] & & R_k(G) \\ & R_K(G) \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}$$

15.1 $c: P_k(G) \to R_k(G)$ 的定义

对于每一个投射 $k[G]$-模 P，令 P 在群 $R_k(G)$ 中的类与它对应. 这个类是 P 的加性函数. 于是就得到一个同态

$$c: P_k(G) \to R_k(G),$$

叫做 Cartan 同态. 通过 $P_k(G)$ 和 $R_k(G)$ 的标准基 $[P_S]$ 和 $[S]$ $(S \in S_k)$ 将 c 表示出来，就得到一个 $S_k \times S_k$ 型矩阵 C，这个矩阵叫做 G 的（关于 k 的）Cartan 矩阵. 矩阵 C 中 (S, T) 位置的系数 C_{ST} 就是单模 S 在 T 的投射包络 P_T 的一个合成列中出现的重数：在 $R_k(G)$ 内，我们有

$$[P_T] = \sum_{S \in S_k} C_{ST}[S].$$

习 题

15.1 证明，若 $x \in R_k(G)$，$y \in P_k(G)$，则 $c(x \cdot y) = x \cdot c(y)$.

15.2 $d: R_K(G) \to R_k(G)$ 的定义

令 E 是一个 $K[G]$-模. 选取 E 中一个格 E_1（就是 E 的一个有限生成的 A-子模，而 E 作为一个 K-模，是由它生成的）. 必要时用 E_1 在 G 的元素作用之下的象的和来代替 E_1，我们总可以假

定 E_1 在 G 的作用下是稳定的，于是 E_1 对 $\mathfrak{m}E_1$ 的约化 $\bar{E}_1 = E_1/\mathfrak{m}E_1$ 是一个 $k[G]$-模.

定理 33 $\bar{E}_1$ 在 $R_k(G)$ 中的象不依赖于稳定格 E_1 的选取.

(由两个稳定格 E_1 和 E_2 通过约化而得到的 $k[G]$-模 $\bar{E}_1$ 与 $\bar{E}_2$ 不一定同构，参看习题 15.1. 这个定理是说，$\bar{E}_1$ 与 $\bar{E}_2$ 有相同的合成因子.)

令 E_2 是 E 中一个在 G 的作用下是稳定的格. 我们证明，在 $R_k(G)$ 内，$[\bar{E}_1]=[\bar{E}_2]$. 先从一个特殊情形开始:

(a) 设 $\mathfrak{m}E_1\subset E_2\subset E_1$. 令 T 表示 $k[G]$-模 E_1/E_2. 于是有以下的正合列

$$0\to T\to\bar{E}_2\to\bar{E}_1\to T\to 0,$$

这里同态 $T\to\bar{E}_2$ 是用理想 $\mathfrak{m}$ 的一个生成元 π 作乘法. 过渡到 $R_k(G)$，我们有

$$[T]-[\bar{E}_2]+[\bar{E}_1]-[T]=0.$$

因此 $[\bar{E}_1]=[\bar{E}_2]$，从而定理对于这一情形被证明.

(b) 一般情形. 必要时可以用 E_2 的一个纯量倍来代替 E_2 (这对 $\bar{E}_2$ 没有影响)，我们可以假定 E_2 包含在 E_1 内. 这样一来，总存在一个整数 $n\geqslant 0$，使得

$$\mathfrak{m}^nE_1\subset E_2\subset E_1.$$

我们对 n 作归纳法. 令 $E_3=\mathfrak{m}^{n-1}E_1+E_2$. 于是

$$\mathfrak{m}^{n-1}E_1\subset E_3\subset E_1 \text{ 且 } \mathfrak{m}E_3\subset E_2\subset E_3.$$

由 (a) 和归纳法假设，我们得到

$$[\bar{E}_1]=[\bar{E}_3]=[\bar{E}_2].$$

定理被证明.

现在映射 $E\longmapsto[\bar{E}_1]$ 显然可以开拓为一个环同态

$$d: R_K(G)\to R_k(G).$$

d 叫做分解同态. 它将 $R_K^+(G)$ 映入 $R_k^+(G)$. 相应的矩阵 D (关于 $R_K(G)$ 和 $R_k(G)$ 的标准基)叫做分解矩阵. 它是一个 $S_k\times S_K$ 型矩阵，矩阵的系数都是非负整数. 对于 $F\in S_k$ 和 $E\in S_K$，D 中相应的系数 D_{FE} 就是在 E 的一个稳定格 E_1 对 $\mathfrak{m}$ 的约化 $\bar{E}_1$ 的一

个合成列里，F 作为合成因子而出现的重数．于是在 $R_k(G)$ 内有

$$[\bar{E}_1] = \sum_F D_{FE}[F].$$

注记

（1） 关于 K 是完备域的假设无论是在定理 33 的证明里，还是在同态 d 的定义里，都不起作用．

（2） 对于代数群也有类似的结果．参看 *Publ. Sci. I. H. E. S.* no. **34**, 1968, p. 37—52.

习 题

15.2 取 $p = 2$ 而 G 是一个二阶群．令 $E = K[G]$．证明，在 E 中有稳定格，它的约化是半单的（与 $k \otimes k$ 同构）；也有另外的稳定格，它的约化不是半单的（与 $k[G]$ 同构）．

15.3 令 E 是一个非零 $K[G]$-模，E_1 是 E 中一个在 G 之下稳定的格．证明下列论断等价：

(i) E_1 的约化 $\bar{E}_1$ 是一个单 $k[G]$-模．

(ii) E 中每一在 G 之下稳定的格都具有 aE_1 的形式，这里 $a \in K^*$．

证明，这两个条件都能推出 E 是一个单 $K[G]$-模．

15.4 (J. Thompson) 设 E 是 $\mathbf{Z}$ 上自由 $\mathbf{Z}[G]$-模，秩是 $n \geqslant 2$．假设对于每一素数 p，E 的约化 E/pE 是一个单 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[G]$-模．

(a) 证明，在 E 上存在一个在 $\mathbf{Z}$ 中取值的对称双线性型 $B(x, y)$，而且对于一切 $x \neq 0$，都有 $B(x, x) > 0$．

(b) 令 B 是如在 (a) 中所选取的那样一个双线性型，并且利用线性开拓到 $\mathbf{Q}$-向量空间 $\mathbf{Q} \otimes E$ 上．令 E' 是 $\mathbf{Q} \otimes E$ 中满足以下条件的元素 x 所成的集合：对于任意 $y \in E$，$B(x, y) \in \mathbf{Z}$．证明，E' 具有 aE，$a \in \mathbf{Q}^*$，的形式（同习题 15.3 的证法一样）．由此推出，可以如此选取 B，使它在 $\mathbf{Z}$ 上非退化，即 $E' = E$．如果 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 E 的一个基，那么矩阵 $(B(e_i, e_j))$ 的行列式等于 1．

(c) 假设 B 已经如同在 (b) 里那样选定．证明，存在 $x \in E$ 使得对于一切 $y \in E$ 都有 $B(y, y) \equiv B(x, y) \pmod 2$，并且对于这样的 x 来说，$\bmod 2E$ 在 G 之下不变．由此推出 $x \equiv 0 \pmod{2E}$，也就是说，二次型 $B(x, x)$ 只取偶数值．

(d) 由 (c) 得出同余式 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$. [利用以下事实：每一正定整系数二次型如果取偶数值，而且判别式等于 1，那么它的秩一定可以被 8 整除[1].]

(e) 证明，E_8 型的 Coxeter 群的反射表示具有上述性质(参看 Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Ch. VI, §4, no. 10).

15.3 $e: P_k(G)\to R_K(G)$ 的定义

"与K作张量积"这个函子定义一个 $P_A(G)$ 到 $R_K(G)$ 内的同态. 作这个映射与典范同构映射 $P_A(G)\to P_k(G)$ (参看 14.4) 的逆映射的合成映射，我们得到一个同态

$$e: P_k(G)\to R_K(G).$$

令 E 表示它的矩阵；这是一个 $S_K\times S_k$ 型的矩阵.

习 题

15.5 如果 $x\in R_K(G)$, $y\in P_k(G)$, 那么

$$e(d(x)\cdot y)=x\cdot e(y).$$

15.4 cde 三角的基本性质

(a) 这个三角形是交换的，即 $c=d\circ e$ 或者 $C=D\cdot E$. 这是明显的.

(b) 同态 d 和 e 关于 14.5 的双线性型相互伴随：如果 $x\in P_k(G)$, $y=R_K(G)$, 那么

$$\langle x, d(y)\rangle_k=\langle e(x), y\rangle_K.$$

事实上，我们可以假定 $x=[\bar{X}]$, $y=[K\otimes_A Y]$, 这里X是一个投射 $A[G]$-模，Y是A上一个自由 $A[G]$-模. 于是 A-模 $\mathrm{Hom}^G(X,Y)$ 是自由的；令 r 是它的秩. 我们有以下的典范同构：

$$K\otimes\mathrm{Hom}^G(X,Y)=\mathrm{Hom}^G(K\otimes X, K\otimes Y),$$

和

1) 例如，可参看作者的 Cours d'Arithemétique, Presses Univ. France, 1970, p. 92 和 174.(英译本： A course in Arithmetic, GTM 7, Springer-Verlag, 1973. p. 53 和 109.)

$$k\otimes \mathrm{Hom}^G(X, Y) = \mathrm{Hom}^G(k\otimes X, k\otimes Y).$$

这就证明了，$\langle e(x), y\rangle = r = \langle x, d(y)\rangle$.

(c) 假设K是足够大的. 由 14.5，$P_k(G)$ 与 $R_k(G)$ 的标准基关于双线性型 $\langle a, b\rangle_k$ 相互对偶；$R_K(G)$ 的标准基关于双线性型 $\langle a, b\rangle_K$ 自对偶. 由此推出，e 可以与 d 的转置映射等同起来；特别，我们有 $E = {}^tD$. 因为 $C = D\cdot E = D\cdot {}^tD$，所以$C$是一个对称矩阵.

习　　题

15.6　令 $S, T\in S_k$，而 P_S, P_T 是它们的投射包络. 令

$$d_S = \dim\mathrm{End}^G(S),\quad d_T = \dim\mathrm{End}^G(T).$$

再令 C_{ST} 是 S 在 P_T 的一个合成列中出现的重数，C_{TS} 是 T 在 P_S 的一个合成列中出现的重数(参看 15.1).

(a)　证明，$C_{ST}d_S = \dim\mathrm{Hom}^G(P_S, P_T)$.

(b)　证明，$C_{ST}d_S = C_{TS}d_T$ [应用习题14.5]. 当K足够大时，d_S 都等于 1，从而又得出矩阵 $C = (C_{ST})$ 是对称矩阵的事实.

15.7　保留习题 15.6 的记号. 证明，或者 S 是投射模，$P_S\cong S$，$C_{SS} = 1$，或者 $C_{SS}\geqslant 2$. [利用习题 14.6.]

15.8　设 $x\in P_k(G)$. 我们有 $\langle x, c(x)\rangle_k = \langle e(x), e(x)\rangle_K$. 由此推出，当$K$足够大时，由 Cartan 矩阵$C$所定义的二次型是正定的.

15.5　例：p'-群

命题 43　假设群G的阶与p互素. 那么:

(i)　每一$k[G]$-模以及A上每一自由$A[G]$-模都是投射模.

(ii)　对m的约化作用定义一个 S_K 到 S_k 上的双射.

(iii)　如果象在(ii)中那样，将 S_K 与 S_k 等同起来，那么矩阵 C, D, E 都是单位矩阵.

(简而言之，就是群G的表示理论在k上和在K上是“一样的”.)

令E是A上一个自由$A[G]$-模. 我们可以将E写成$A[G]$上一个自由$A[G]$-模L的商模L/R的形式. 因为E是A-自由的，

所以存在一个 L 到 R 上的 A-线性射影 π；因为 G 的阶 g 在 A 中可逆，我们可以对 π 的共轭取平均得 $(1/g)\sum\limits_{s\in G} s\pi s^{-1}$，并且用它来代替 π，这样得到的射影是 $A[G]$-线性的．这就证明了 E 是投射模．对于 $k[G]$-模也用同样的证法．于是 (i) 被证明；同时也证明了 Cartan 矩阵是单位矩阵．

如果 $E\in S_k$，那么 E 关于 $A[G]$ 的投射包络 E_1 是一个投射 $A[G]$-模，它的约化 $\bar{E}_1=E_1/\mathfrak{m}E_1$ 就是 E．如果令 $F=K\otimes E_1$，那么 $d([F])=[E]$．因为 E 是单的，所以 F 也是单的，从而与 S_K 的一个元素同构．于是得到 S_k 到 S_K 内的一个映射 $E\longmapsto F$．显然这个映射是 d 的逆．这就证明了 (ii) 和 (iii)．□

注记　D 是单位矩阵这一事实表明，d 将 $R_K^+(G)$ 映到 $R_k^+(G)$ 上；换句话说，G 在 k 上每一表示都可以提升为 A 上一个线性表示，这个结果很容易直接验证(参看下面的习题 15.9)．

习　　题

15.9　设 g 与 p 互素，令 E 是一个自由 A-模．

(a)　令 n 是一个 $\geqslant 1$ 的整数，而

$$\rho_n: G\longrightarrow \boldsymbol{GL}(E/\mathfrak{m}^nE)$$

是 G 到 $E/\mathfrak{m}^nE$ 的全体自同构群内的一个同态．证明，ρ_n 可以提升为

$$\rho_{n+1}: G\longrightarrow \boldsymbol{GL}(E/\mathfrak{m}^{n+1}E),$$

并且除了 $E/\mathfrak{m}^{n+1}E$ 的以 $\mathfrak{m}^n$ 为模同余于 1 的自同构的共轭作用外，这个提升是唯一的．[利用 G 在 $\mathrm{End}(E/\mathfrak{m}E)$ 内取值的一维和二维上同调群是 0 这一事实．]

(b)　自 (a) 得出，G 在 k 上每一线性表示

$$\rho_1: G\rightarrow \boldsymbol{GL}(E/\mathfrak{m}E)$$

都可以提升为 G 在 A 上一个表示，并且在本质上这种提升方法是唯一的．

15.6　例：p-群

设 G 是一个 p-群，阶为 p^n．我们已经看到(8.3，命题 26 的推论)，G 在特征 p 内唯一的不可约表示就是单位表示．由此得出，Artin 环 $k[G]$ 是以 k 为剩余域的局部环．单 $k[G]$-模 k 的投射包络是 $k[G]$，就是 G 的正则表示．群 $R_k(G)$ 和 $P_k(G)$ 都可以

与 $\boldsymbol{Z}$ 等同，而 Cartan 同态 c: $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ 就是用 p^n 去作乘法．同态 $d: R_K \to \boldsymbol{Z}$ 对应于K上的秩；同态 $e: \boldsymbol{Z} \to R_K(G)$将整数 n 映成G的正则表示类的 n 倍．

15.7 例：p'-群与 p-群的积

设 $G = S \times P$，这里S的阶与 p 互素，而P是一个 p-群．于是 $k[G] = k[S] \otimes k[P]$．我们有

(a) 一个 $k[G]$-模 E 是半单的必要且只要 P 平凡地作用在 E 上．

充分性由每一 $k[S]$-模都是半单的事实得出，参看 15.5．要证必要性，我们可以假定 E 是单的．由 15.6，E中在P之下不动的元素所组成的子空间 E' 不等于零．因为P是G的正规子群，所以子空间 E' 在G之下稳定，从而等于 E．这就是说，P平凡地作用在 E 上．

(b) 一个 $k[G]$-模 E 是投射模必要且只要它与 $F \otimes k[P]$ 同构，这里 F 是一个 $k[S]$-模．

因为F是一个投射 $k[S]$-模(参看 15.5)，所以 $F \otimes k[P]$ 是一个投射 $k[G]$-模．再者，在 $F \otimes k[G]$ 的商模中，考虑P在其上平凡地作用的那些商模，显然F是最大的．由 (a)，这就意味着 $F \otimes k[P]$ 是F的投射包络．然而，每一投射模都是它的最大的半单商模的投射包络．因此每一投射模都有 $F \otimes k[P]$ 的形式．

(c) 一个 $A[G]$-模 $\tilde{E}$ 是投射模必要且只要它与$\tilde{F} \otimes A[P]$同构，这里 $\tilde{F}$ 是A上一个自由 $A[S]$-模．

显然，形如 $\tilde{F} \otimes A[P]$ 的模是投射模．反过来，将(b)应用到 $E = \tilde{E}/\mathfrak{m}\tilde{E}$ 上来证明逆论断：如果 $\tilde{E}$ 是投射模，那么 $E \cong F \otimes k[P]$，并且F可以提升成为A上一个自由 $A[S]$-模 $\tilde{F}$(而且是一个投射 $A[S]$-模，参看上面)．模 $\tilde{F} \otimes A[P]$ 是 $F \otimes k[P]$ 的投射包络．因而与 $\tilde{E}$ 同构．

性质 (a) 和 (b) 特别地证明了G的 Cartan 矩阵是纯量矩阵 p^n，这里 $p^n = \mathrm{Card}(P)$．

第十六章 若 干 定 理

16.1 *cde* 三角的性质

主要结果是以下的定理[1]:

定理 34 同态 $d: R_K(G) \to R_k(G)$ 是满的.

证明将在 17.3 里给出.

注记

(1) 特别,取 K 是 p-adic 域 $\mathbf{Q}_p$,而将这个定理应用到 $k = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上;于是环 A 就是 p-adic 整数环 $\mathbf{Z}_p$.

(2) 粗略地说,这个定理表明,如果我们愿意使用"虚表示",即 Grothendieck 群 $R_K(G)$ 的元素的话,那么 G 在 k 上所有的线性表示都可以提升到特征零里. 这对于许多应用来说是一个非常重要的结果.

定理 35 同态 $e: P_k(G) \to R_K(G)$ 是分裂内射.

当 K 足够大时,e 是 d 的转置(参看 15.4). 由于 d 是满射,所以 e 是一个分裂内射. 在一般情形下,令 K' 是 K 的一个足够大的有限扩域,令 k' 是它的剩余域. 考虑下面的图:

$$\begin{array}{ccc} P_k(G) & \xrightarrow{e} & R_K(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{k'}(G) & \xrightarrow{e'} & R_{K'}(G) \end{array}$$

根据上述,e' 是一个分裂内射. 由 14.6, $P_k(G) \to P_{k'}(G)$ 也是分裂内射. 所以它们的合成映射是一个分裂内射; 因此同样的结果对 e 也成立. □

我们同时证明了:

---

1) 在本书第一版里. 定理 34 只是对于一个足够大的域 K 来陈述的. Claude Chevalley 和 Andreas Dress 彼此独立地指出,这个定理对于一般情形也成立.

推论 1 对于K的任意有限扩域K'来说，同态

$$P_k(G)\xrightarrow{e}R_K(G)\to R_{K'}(G)$$

是分裂内射.

e 是单映射这一性质等价于

推论 2 令P和P'是投射 $A[G]$-模. 如果 $K[G]$-模 $K\otimes P$ 与$K\otimes P'$ 同构，那么P与P'是 $A[G]$-同构的.

(事实上，我们知道，在 $P_A(G)\cong P_k(G)$ 里，等式 $[P]=[P']$ 等价于 $P\cong P'$.)

定理 36 设在p的幂中，能整除G的阶的最大幂是 p^n. 那么 $R_k(G)$中每一能被 p^n 整除的元素都属于 Cartan 映射 $c:P_k(G)\to R_k(G)$ 的象.

证明将在 17.4 里给出.

推论 1 映射 $c:P_k(G)\to R_k(G)$ 是单射，它的余核是一个有限p-群.

第二个论断由定理 36 直接得出；从而也就得出第一个论断，因为 $P_k(G)$ 和 $R_k(G)$ 都是具有同一秩的自由 $\boldsymbol{Z}$-模，这个共同的秩就是 Card (S_k).

推论 2 如果两个投射 $k[G]$-模有相同的合成因子，那么它们是同构的.

这是映射 c 是单射的另一种表述.

推论 3 设K足够大. 那么 Cartan 矩阵 C是对称的，并且对应的二次型是正定的. C的行列式是p的幂.

问题里的二次型是

$$\langle x,c(x)\rangle_k=\langle x,d(e(x))\rangle_k=\langle e(x),e(x)\rangle_K,\quad x\in P_k(G).$$

因为双线性型 $\langle a,b\rangle_K$ 显然是正定的，而e是单射 (定理 35)，所以上面的二次型也是正定的. 于是C的行列式 >0. 又因为c的余核是一个p-群，所以 $\det(C)$ 是p的幂. □

注记

(1) 上面的论证表明，由e是单射可以推出c是单射.

(2) 定理 36 等价于：存在一个同态 c': $R_k(G)\to P_k(G)$,

使得 $c\circ c' = p^n$ (从而 $c'\circ c = p^n$).

(3) 定理 36 里的指数 n 是最佳可能的指数,参看习题 16.3.

习　题

16.1 证明,只要 K 足够大,即使 K 不是完备域时,定理 34 仍然成立. [令 $\hat{K}$ 表示 K 的完备化. 注意同态 $R_K(G)\to R_{\hat{K}}(G)$ 是一个同构,对 $\hat{K}$ 应用定理 34.]

16.2 证明,如果 G 是四阶循环群,那么同态 $d: R_Q(G)\to R_{Z/2Z}(G)$ 不是满射.

16.3 令 H 是 G 的一个 Sylow p-子群. 证明,如果 E 是一个投射 $k[G]$-模,那么 E 是一个自由 $k[H]$-模(参看15.6),因而 $\dim E$ 可以被 p^n 整除. 由此推出,过渡到商上,映射 $[E]\to\dim E$ 定义一个满同态 $\mathrm{Coker}(c)\to \boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$. 特别 $R_k(G)$ 的元素 p^{n-1} 不属于 c 的象.

16.2 对 e 的象的刻画

G 的一个元素如果不是 p-正则的(参看 10.1), 也就是说,如果它的阶可以被 p 整除,那么就叫做 p-奇异的. 另一方面,回忆一下, $R_K(G)$ 的每一元素可以与 G 上一个类函数,即它的特征标等同起来(参看 12.1 和 14.1).

定理 37 $e: P_k(G)\to R_K(G)$ 的象由 $R_K(G)$ 中在 G 的 p-奇异元素上特征标取零值的那些元素所组成.

更为确切的结果是

定理 38 令 K' 是 K 的一个有限扩域. $R_{K'}(G)$ 的一个元素属于 $P_A(G)=P_k(G)$ 在 e 之下的象,必要且只要它的特征标在 K 内取值且在 G 的 p-奇异元素上是零.

证明见 17.5.

习　题

16.4 (Swan.) 令 A 是一个 Dedekind 整环,它的商域为 F. 假设对于能够整除 G 的阶的每一素数 p, 存在 A 的一个素理想 $\mathfrak{p}$, 使得 $A/\mathfrak{p}$ 的特征为 p. 又令 P 是一个投射 $A[G]$-模. 证明, $F\otimes P$ 是一个自由 $F[G]$-模. [对由

P 通过在这样的素理想 $\mathfrak{p}$ 上作完备化所得到的模应用定理 37. 由此推出，$F\otimes P$ 的特征标在 G 的单位元以外都取值 0.]

这个习题特别可以应用到 A 是一个代数数域的整数环的情形.

16.3. 通过特征标对投射 $A[G]$-模的刻画

这种刻画等于是要定出 G 在 K 上一切这样的表示，这些表示包含一个在 G 之下稳定的格，这个格作为一个 $A[G]$-模，是投射模. 换句话说，就是要刻画 $P_K^+(G)=P_A^+(G)$ 在 e 之下的象. 我们只得到部分结果. 首先我们有:

引理 22 令 $x\in P_A(G)$ 而 $n\geqslant 1$ 是一个整数. 如果 $nx\in P_A^+(G)$，则 $x\in P_A^+(G)$.

这是明显的: 如果 $r=\mathrm{Card}(S_k)$，那么 $P_A(G)$ 可以与 $\boldsymbol{Z}^r$ 等同起来，而 $P_A^+(G)$ 可以与 $\boldsymbol{N}^r$ 等同起来，参看 14.3 和 14.4. □

命题 44 令 K' 是 K 的一个有限扩域，A' 是 K' 的整量环. 假设 $R_{K'}(G)$ 的一个元素 x 满足以下条件:

(a) x 的特征标在 K 内取值;

(b) 存在一个整数 $n\geqslant 1$，使得 nx 是由一个投射 $A'[G]$-模通过纯量扩张而得到的.

那么 x 是由一个投射 $A[G]$-模(通过纯量扩张)而得到的，并且除同构外，这个 $A[G]$-模是唯一确定的.

令 $N=[K':K]=[A':A]$. 令 E' 是一个投射 $A'[G]$-模，它的象 nx 在 $R_{K'}(G)$ 内;而 E 是由 E' 的系数限制到 $A[G]$ 上所得的 $A[G]$-模. 容易验证，$K\otimes E$ 的特征标等于 x 的特征标的 nN 倍. 于是在 $R_{K'}(G)$ 内，我们有

$$e([E])=nN\cdot x.$$

由定理 37，$e([E])$ 的特征标在 G 的 p-奇异元素上的值都是零; 因而 x 的特征标也是如此. 于是由定理 38，有 $y\in P_A(G)$，使得 $x=e(y)$. 因为 e 是单射 (定理 35)，所以 $[E]=nN\cdot y$. 由引理 22，y 属于 $P_A^+(G)$. 于是存在一个投射 $A[G]$-模 Y，使得在 $R_K(G)$ 内有 $[K\otimes Y]=x$. Y (确切到同构)的唯一性是定理 35，

推论 2 的直接结果. □

发生这样的问题：是否$c(P_A^+(G)) = c(P_A(G)) \cap R_K^+(G)$. 一般说来,这个等式不成立(参看习题 16.5 和 16.7). 然而我们有以下的判定:

命题 45 如果以下条件被满足:

(R) 存在K的一个有限扩域K'，它的剩余域是k'，使得
$d(R_{K'}^+(G)) = R_{k'}^+(G)$.

那么就有 $c(P_A^+(G)) = c(P_A(G)) \cap R_K^+(G)$.

由命题 44，只要证明，当K足够大时，等式

$$c(P_A^+(G)) = c(P_A(G)) \cap R_K^+(G)$$

成立. 当K足够大时，条件 (R) 就意味着，d将 $R_K^+(G)$ 映到 $R_k^+(G)$ 上. 现在令

$$x \in c(P_A(G)) \cap R_K^+(G).$$

因为 $x \in c(P_A(G))$，我们可以将x写成

$$x = \sum_{E \in S_k} n_E c([\tilde{P}_E])$$

的形式，这里 $\tilde{P}_E$ 表示一个投射 $A[G]$-模，它对$\mathfrak{m}$的约化就是E的投射包络P_E(参看 14.4).我们只需证明,整数n_E非负. 由 (R)，对于每一 $E \in S_k$，存在 $z_E \in R_K^+(G)$，使得 $d(z_E) = [E]$. 因为 $x \in R_K^+(G)$，我们有 $\langle x, z_E\rangle_K \geqslant 0$. 另一方面，由于$d$和$e$是相互伴随的，所以 $\langle x, z_E\rangle_K = n_E$. 特别，$n_E$是非负的. 命题被证明. □

命题 45 和定理 38 结合起来，我们得到:

推论 设G满足命题 45 的条件 (R). G在K上一个线性表示可以由一个投射 $A[G]$- 模通过纯量扩张而得到的充分且必要条件是它的特征标在G的 p-奇异元素上都取零值.

注记 条件 (R) 与以下条件等价:

(R′) 如果K足够大，那么每一单 $k[G]$-模都是某一 $K[G]$-模(必然是单的)对$\mathfrak{m}$的约化.

(换句话说，G在k上每一不可约线性表示都可以提升到K上)

定理 39（方-Swan）假设群 G 是 p-可解的，也就是说，G 有一个合成列，它的合成因子或者是 p-群，或者是阶与 p 互素的群。那么 G 满足上述条件（R）和（R′）。

证明见 17.6。

习　题

16.5　记号同命题 44 里一样。证明：

$$P_A^+(G) = P_{A'}^+(G) \cap P_A(G) = P_{A'}^+(G) \cap R_K(G).$$

16.6　证明，对于足够大的 K 来说，条件（R）等价于条件 $e(P_A^+(G)) = e(P_A(G)) \cap R_K^+(G)$。［注意 $P_A(G)$ 的一个元素 x 属于 $P_A^+(G)$ 的充分且必要条件是对于一切 $y \in R_K^+(G)$，都有 $\langle x, y\rangle_K \geqslant 0$。］

16.7　取 G 是群 $SL(V)$，这里 V 是域 $F_p = Z/pZ$ 上一个 2 维向量空间。证明，当 $i < p$ 时，G 在 V 的 i 次对称幂 V_i 内的自然表示是绝对不可约的。［因为 G 的 p-正则类的个数等于 p，由此推出，确切到同构，这些表示就是 G 的全部不可约表示，参看 18.2，定理 43，推论 3.］举例说明，即使在一个足够大的域 K 上，这些表示也不能提升到特征零。［对于 $p = 7$，$i = 4$，我们有 $\dim V_i = 5$，而 5 不能整除 G 的阶；因而 V_i 不能提升.］

16.4　投射 $A[G]$-模的例：亏指数为零的不可约表示

在这一节里，总假定 K 是一个足够大的域.

命题 46　设 E 是一个单 $K[G]$-模，P 是 E 中一个在 G 之下稳定的格。假设在 p 的幂中，能够整除 G 的阶 g 的最大幂是 p^r。如果 E 的维数 n 能被 p^r 整除，那么，

（a）　P 是一个投射 $A[G]$-模；

（b）　典范映射 $A[G] \to \mathrm{End}_A(P)$ 是满射，它的核（作为一个双边理想）是 $A[G]$ 中一个直因子；

（c）　P 的约化 $\overline{P} = P/\mathrm{m}P$ 是一个单的投射 $k[G]$-模.

注意由（a）推出（参看定理 38）：

推论　E 的特征标 χ_E 在 G 的 p-奇异元素上的值是零.

首先，因为 n 可以被 p^r 整除，所以商 n/g 属于环 A。这就使我们可以不必引入任何“分母”，即在环 A 内来应用 Fourier 反演公

式(6.2，命题 11)．说得更详细些，令 s_P 是由 $s\in G$ 所定义的 P 的自同态；如果 $\varphi\in \mathrm{End}_A(P)$，那么 $s_P^{-1}\varphi$ 的迹 $\mathrm{Tr}(s_P^{-1}\varphi)$ 属于 A，所以我们可以定义环 $A[G]$ 的元素

$$u_\varphi=\frac{n}{g}\sum_{s\in G}\mathrm{Tr}(s_P^{-1}\varphi)s.$$

由命题 11，u_φ 在 $\mathrm{End}_K(E)$ 里的象是 $1\otimes\varphi$，而对于任意一个不与 E 同构的单 $K[G]$-模 E' 来说，u_φ 在 $\mathrm{End}_K(E')$ 里的象是 0．特别，u_φ 在 $\mathrm{End}_A(P)$ 里的象是 φ，这就证明了 (b)．由 P 是环 $\mathrm{End}_A(P)$ 上的投射模这一基本事实就得出论断 (a)；对 (c) 也作同样的论证．□

注记　用块的理论（参看[9]，[20]）的语言来说，命题 46 就是一个具有唯一的不可约特征标(或亏指数为 0)的块的情形．

例　如果 G 是一个特征为 p 的有限域上的半单线性群，那么存在 G 的一个不可约线性表示(在 $\mathbf{Q}$ 上)，它的级等于 p^f；这是由 R. Steinberg 所发现的 G 的特殊表示(参看 *Canad. J. of Math.*, **8**, 1956, p. 580－591 和 **9**，1957，p. 347—351)．根据 Solomon-Tits 的一个结果，这个表示可以作为 G 所对应的 Tits 厦的最高维同调表示来实现[1]．

习　题

16.8　令 $G=\mathfrak{A}_4$ (参看 5.7)．证明，当 $p=2$ 时，群 G 没有在命题 46 里所描述的那种类型的不可约表示，然而当 $p=3$ 时，存在这样一个表示．对 $\mathfrak{S}_4$ 讨论同样的问题．

16.9　令 $S\in S_k$．证明下列性质等价：

(i)　S 是一个投射 $k[G]$-模．

(ii)　S 与一个满足命题46中条件的模 P 对于 $\mathfrak{m}$ 的约化同构．

(iii)　G 的 Cartan 矩阵的主对角线上元素 C_{SS} 都等于 1．

[关于 (i) 和 (iii) 的等价性可见习题 15.7.]

---

1) 参考 L. Solomon, The Steinberg Character of a finite group with BN-pair, R. Brauer 和 C.-H. Sah 编，Theory of Finite Groups. W. A. Benjamin, New York, 1969, p. 213—221.

第十七章　证　明

17.1　群的变更

令H是G的一个子群．我们已经定义过关于 R_K 的限制和诱导：

$$\mathrm{Res}_H^G: R_K(G) \to R_K(H) \text{ 和 } \mathrm{Ind}_H^G: R_K(H) \to R_K(G).$$

同样的定义对于 R_k 和 P_k 也适用；通过限制作用，每一$k[G]$-模定义了一个 $k[H]$-模．如果前者是投射模，那么后者也是投射模．过渡到 Grothendieck 群，我们得到同态

$$\mathrm{Res}_H^G: R_k(G) \to R_k(H) \text{ 和 } \mathrm{Res}_H^G: P_k(G) \to P_k(H).$$

另一方面，如果E是一个$k[G]$-模，那么 $\mathrm{Ind}E = k[G] \otimes_{k[H]} E$ 是一个$k[G]$-模（叫做E的诱导）．如果E是投射模，那么E 的诱导也是投射模．于是我们有以下的同态：

$$\mathrm{Ind}_H^G: R_k(H) \to R_k(G) \text{ 和 } \mathrm{Ind}_H^G: P_k(H) \to P_k(G).$$

利用张量积的结合性，容易证明，在下列每一情形：

(a)　$x \in R_K(H)$，$y \in R_K(G)$ 和 $\mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y \in R_K(G)$，

(b)　$x \in R_k(H)$，$y \in R_k(G)$ 和 $\mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y \in R_k(G)$，

(c)　$x \in R_k(H)$，$y \in P_k(G)$ 和 $\mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y \in P_k(G)$，

公式

$$(*) \qquad \mathrm{Ind}_H^G(x \cdot \mathrm{Res}_H^G y) = \mathrm{Ind}_H^G(x) \cdot y$$

成立．（因为 $P_k(G)$ 是 $R_k(G)$ 上的模，所以情形 (c) 有意义．）

最后，第十五章里的同态 c，d，e 都与同态 Res_H^G 和 Ind_H^G 可交换．

习　题

17.1　把 Res_H^G 和 Ind_H^G 的定义推广到这样的同态$H \to G$的情形，这个同态的核的阶与p互素（参看习题 7.1）．

17.2 在模表示情形的 Brauer 定理

定理 40 令 X 是 G 的一切 Γ_K- 初等子群所成的集合（参看 12.6）．由一切 Ind_H^G，$H\in X$，所定义的同态

$$\mathrm{Ind}:\bigotimes_{H\in X}R_k(H)\to R_k(G)$$

$$\mathrm{Ind}:\bigotimes_{H\in X}P_k(H)\to P_k(G)$$

都是满射．

（换句话说，定理 28 对于 R_k 和 P_k 来说也成立．）

令 1_K 和 1_k 分别表示环 $R_K(G)$ 和 $R_k(G)$ 的单位元．我们有 $d(1_K)=1_k$．由定理 28，我们可以将 1_K 写成以下形式：

$$1_K=\sum_{H\in X}\mathrm{Ind}_H(x_H),\ \text{这里}\ x_H\in R_K(H).$$

两端用 d 来作用，并且利用 d 与 Ind_H^G 可交换的事实，我们得到关于 1_k 的一个类似的公式：

$$1_k=\sum_{H\in X}\mathrm{Ind}_H(x'_H),\ \text{这里}\ x'_H=d(x_H)\in R_k(H).$$

设 $y\in R_k(G)$（或 $y\in P_k(G)$）．对上式两端乘以 y，就得到

$$\begin{aligned}y=1_k\cdot y&=\sum_{H\in X}\mathrm{Ind}_H(x'_H)\cdot y\\&=\sum_{H\in X}\mathrm{Ind}_H^G(x'_H\cdot\mathrm{Res}_H^G y).\end{aligned}$$

于是定理被证明．□

推论 如果 K 足够大，那么 $R_k(G)$ 的每一元素都是形如 $\mathrm{Ind}_H(y_H)$ 的元素的和，这里 H 是 G 的初等子群，而 y_H 属于 $R_k(H)$，对于 $P_k(G)$ 的元素也一样，这时 y_H 属于 $P_k(H)$．

事实上，当 K 足够大时，X 恰是 G 的一切初等子群所成的集合．

注记 定理 40 的论证方法在其它的许多场合也适用（参看 Swan [21]，§§ 3,4）．例如，可以推导出以下定理，这是 Artin 定

理（参看定理 27）的类比：

定理 41 令 T 是 G 的一切循环子群所成的集合．同态

$$\boldsymbol{Q}\otimes\mathrm{Ind}:\bigotimes_{H\in T}\boldsymbol{Q}\otimes R_k(H)\to\boldsymbol{Q}\otimes R_k(G)$$

和

$$\boldsymbol{Q}\otimes\mathrm{Ind}:\bigotimes_{H\in T}\boldsymbol{Q}\otimes P_k(H)\to\boldsymbol{Q}\otimes P_k(G)$$

都是满射．

17.3 定理 34 的证明

我们要证明，$d:R_K(G)\to R_k(G)$ 是满射．由定理 40，$R_k(G)$ 由一切 $\mathrm{Ind}_H^G(R_k(H))$ 生成，这里 H 是 G 的 Γ_K-初等子群．因为 d 与每一 Ind_H^G 可交换，所以只需证明，$R_k(H)=d(R_K(H))$．于是就归结为 G 是 Γ_K-初等子群的情形．在这一情形，我们有以下更为精确的结果：

定理 42 令 l 是一个素数．假设 G 是一个 l-群 P 与一个阶与 l 互素的循环正规子群 C 的半直积．那么每一单 $k[G]$-模 E 都可以被提升（即 E 是一个 A 上自由 $A[G]$-模对于 $\mathfrak{m}$ 的约化）．

（换句话说，d 将 $R_K^+(G)$ 映成 $R_k^+(G)$．）

设 $l\neq p$．令 C_p 是 C 的 p-准素成份，E' 是向量空间 E 中被 C_p 固定的元素所成的子空间．因为 C_p 是一个 p-群，所以 $E'\neq 0$（参看 8.3，命题 26）．又因为 C_p 是 G 的正规子群，所以子空间 E' 在 G 之下稳定．于是 $E'=E$；这就意味着 C_p 平凡地作用在 E 上，且 G 在 E 内的表示是由 G/C_p 的一个表示产生的．因为 G/C_p 的阶与 p 互素，显然这样一个表示可以提升（参看 15.5）．

现在设 $l=p$．我们对 G 的阶作归纳法．因为 C 的阶与 p 互素，所以 C 在 E 内的表示是半单的．它被分解为同型的 $k[C]$-模的直和（参看 8.1，命题 24）：

$$E=\bigotimes_{\alpha}E_\alpha.$$

群 G 置换所有的 E_α；因为 E 是单的，所以 G 可迁地置换这些非零的 E_α. 令 E_β 是其中的一个，而 G_β 是 G 中满足条件 $sE_\beta = E_\beta$ 的一切元素 s 所成的子群. 显然 E_β 是一个 $k[G_\beta]$-模，而 E 与对应的诱导模 $\mathrm{Ind}_{G_\beta}^G(E_\beta)$ 同构. 再者，G_β 是 P 的一个子群与群 C 的半直积. 如果 $E_\beta \neq E$，那么 $G_\beta \neq G$. 对 G_β 应用归纳法假设，则 E_β 可以提升；从而 E 也可以提升.

这样，我们可以假定 E 是一个同型的 $k[C]$-模. 令 ρ 表示在 E 上定义 $k[G]$-模结构的那个 $k[G]$ 到 $\mathrm{End}_k(E)$ 内的同态. E 是同型的 $k[C]$-模这一事实相当于 $k[C]$ 在 ρ 之下的象是 k 的一个有限扩域 k'. ρ 在 C 上的限制是同态 φ: $C \to k'^*$，而 k' 由 $\varphi(C)$ 在 k 上生成. 于是模 E 容有一个 k'-向量空间结构.

现在选取 E 中一个在 P 之下不变的元素 $v \neq 0$；这是可能的，因为 P 是一个 p-群，参看 8.3，命题 26. 对于 $x \in C$，$s \in P$，令 ${}^sx = sxs^{-1}$. 我们有

$$\rho(s)(\varphi(x)\cdot v) = \rho(sxs^{-1})\rho(s)\cdot v = \varphi({}^sx)\cdot v.$$

所以，E 中由一切 $\varphi(x)\cdot v$，$x \in C$，所生成的子空间 $k'v$ 在 C 和 D 之下稳定，从而等于 E. 因此，$\dim_{k'} E = 1$. 这样，我们可以将 E 与 k' 如此地等同起来，使得 v 成为 k' 的单位元. 对于任意 $t \in G$，$\rho(t)$ 是 k-向量空间 k' 的一个自同态 σ_t. 对于 $s \in P$，根据作法，我们有 $\sigma_s(1) = 1$. 上面的公式表明，对于任意 $x \in C$，

$$\sigma_s(\varphi(x)) = \varphi({}^sx),$$

因此，对于任意 $x, x' \in C$，

$$\sigma_s(\varphi(x)\varphi(x')) = \sigma_s(\varphi(x))\sigma_s(\varphi(x')).$$

因为 k' 由一切 $\varphi(x)$ 生成，所以，当 $a, a' \in k'$ 时，我们有

$$\sigma_s(aa') = \sigma_s(a)\sigma_s(a');$$

换句话说，σ_s 是域 k' 的一个自同构，并且映射 $s \mapsto \sigma_s$ 是一个同态 σ: $P \to \mathrm{Gal}(k'/k)$，这里 $\mathrm{Gal}(k'/k)$ 表示 k'/k 的 Galois 群. 现在容易定义 E 的提升：令 K' 是 K 的对应于剩余域的扩张 k'/k 的非分歧扩域，又令 A' 是 K' 的整量环；典范同态

$$\mathrm{Gal}(K'/K) \rightarrow \mathrm{Gal}(k'/k)$$

给出了 P 在 K' 上和在 A' 上的作用(利用 σ). 另一方面,同态 φ: $C\to k'^*$ 唯一地提升(例如,利用乘法代表系)到一个同态 $\tilde{\varphi}$: $C\to A'^*$, 这个同态给出 C 在 A' 上一个乘法作用. 于是立即得出(由唯一性),对于任意 $x\in C$, $s\in P$, 仍然有

$$\sigma_s(\tilde{\varphi}(x))=\tilde{\varphi}({}^sx).$$

这就是说,C 和 P 在 A' 上的作用共同给出 G 的一个作用. 对于这样一个 $A[G]$-模结构来说,A' 就是所要求的提升.

注记 当 K 足够大时,我们只需对于 G 是初等群,从而是 C 与 P 的直积的情形来证明定理 42. 这时上面的证明变得非常简单: 群 P 平凡地作用在单模 E 上,于是 E 可以看成一个单 $k[C]$-模,提升是没有困难的.

17.4 定理 36 的证明

设 p^n 是在 p 的一切幂中,能整除 G 的阶的最大者. 我们要证明, c: $P_k(G)\to R_k(G)$ 的余核被 p^n 零化. 我们分两个情形来讨论:

(a) K 是足够大的

由定理 40 的推论, $R_k(G)$ 由一切 $\mathrm{Ind}_H^G(R_k(H))$ 生成,这里 H 是 G 的初等子群. 于是就归结到为 G 是初等的情形, 这时 G 分解为直积 $S\times P$, 其中 S 的阶与 p 互素, 而 P 是一个 p-群. 在 15.7 已经看到,这样一个群的 Cartan 矩阵是纯量矩阵 p^n. 因此在这一情形定理成立.

(b) 一般情形

令 K' 是 K 的一个足够大的有限扩域, k' 是它的剩余域, 由 k 到 k' 的纯量扩张给出一个交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & P_k(G) & \to & P_{k'}(G) & \to & P & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c'} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \to & R_k(G) & \to & R_{k'}(G) & \to & R & \to & 0
\end{array}$$

这里 $P=P_{k'}(G)/P_k(G)$, $R=R_{k'}(G)/R_k(G)$. 于是就得到正合列

$$0 \to \mathrm{Ker}(c) \to \mathrm{Ker}(c') \to \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(c)$$
$$\to \mathrm{Coker}(c') \to \mathrm{Coker}(\gamma) \to 0.$$

由 (a), $\mathrm{Coker}(c')$ 被 p^n 零化. 因为 $P_{k'}(G)$ 和 $R_{k'}(G)$ 有相同的秩，所以 c' 是单射. 同样的结果对 c 也成立，从而 $\mathrm{Coker}(c)$ 是有限的. 然而我们已知 $P_k(G) \to P_{k'}(G)$ 是一个分裂内射（参看 14.6）. 于是群 P 是 $\mathbf{Z}$ 上一个自由群，从而 $\mathrm{Ker}(\gamma)$ 也是 $\mathbf{Z}$ 上自由群. 因为 $\mathrm{Ker}(c')=0$ 而 $\mathrm{Coker}(c)$ 是有限的，所以由上面的正合列得 $\mathrm{Ker}(\gamma)=0$; 于是 $\mathrm{Coker}(c)$ 被嵌入 $\mathrm{Coker}(c')$ 内. 由于后者被 p^n 零化，所以 $\mathrm{Coker}(c)$ 也被 p^n 零化，定理被证明.

17.5 定理 38 的证明

必要时对 K' 扩张，我们总可以假定 K' 是足够大的.

(i) 必要性

令 E 是一个投射 $A'[G]$-模，χ 是 $K'[G]$-模 $K'\otimes_{A'}E$ 的特征标. 设 $s\in G$ 是 p-奇异的. 我们要证明 $\chi(s)=0$. 用 s 所生成的循环子群来代替 G，我们可以假定 G 是循环群，因而有形状 $S\times P$，这里 S 的阶与 p 互素，而 P 是一个 p-群. 由 15.7，E 同构于 $F\otimes A'[P]$，这里 F 是 A' 上一个自由 $A'[S]$-模. 于是 $K'\otimes E$ 的特征标 χ 等于 $\phi\otimes r_P$，这里 ϕ 是 S 的一个特征标，而 r_P 是 P 的正则表示的特征标. 这样一个特征标显然在 S 以外是零，从而特别有 $\chi(s)=0$.

(ii) 充分性（第一部分）

令 $y\in R_{K'}(G)$，而 χ 是对应的虚特征标；又假设对于 G 的每一 p-奇异元素 s，都有 $\chi(s)=0$.

我们将证明，y 属于 $P_{A'}(G)$（这里群 $P_{A'}(G)$ 通过映射 e 与 $R_{K'}(G)$ 的一个子群等同起来）.

由定理 40 的推论，我们有

$$1=\sum \mathrm{Ind}(x_H),\quad x_H\in R_{K'}(G),$$

这里 H 遍历 G 的初等子群. 将上式乘以 y，我们得到

$$y=\sum \mathrm{Ind}(y_H),\quad 这里\ y_H=x_H\cdot \mathrm{Res}_H(y)\in R_{K'}(H).$$

y_H 的特征标在H的 p-奇异元素上是零. 如果能知道 y_H 属于 $P_{A'}(H)$，那么就得出 y 属于 $P_{A'}(G)$. 因此就归结到G是初等的情形.

现在如上地将G分解为 $G=S\times P$. 我们有

$$R_{K'}(G)=R_{K'}(S)\otimes R_{K'}(P).$$

因为χ在S以外取值零，我们可以将χ写成 $f\otimes r_P$ 的形式，这里 f 是 S 上一个类函数，而 r_P 是 P 的正则表示的特征标. 如果 ρ 是 S 的一个特征标，那么

$$\langle f\otimes r_P,\rho\otimes 1\rangle=\langle f,\rho\rangle\langle r_P,1\rangle=\langle f,\rho\rangle.$$

因为左端等于 $\langle\chi,\rho\otimes 1\rangle$，它是一个整数；因此对于一切 ρ 来说，$\langle f,\rho\rangle\in\boldsymbol{Z}$，这就证明了 f 是 S 的一个虚特征标. 这样，我们可以把 y 写成

$$y=y_S\otimes y_P$$

的形式，这里 $y_S\in R_{K'}(S)$ 而 y_P 是 P 的正则表示的类. 因为 $y_S\in P_{A'}(S)$，$y_P\in P_{A'}(P)$，所以我们确实有 $y\in P_{A'}(G)$.

(iii) 充分性(第二部分)

保留 (ii) 的记法，并且假定 y 的特征标 χ 的值在K内. 我们要证 y 属于 $P_A(G)$. 由 (ii)，我们至少知道 $y\in P_{A'}(G)$.

令 r 是扩域 K'/K 的次数. 通过限制作用，每一 $A'[G]$-模定义一个 $A[G]$-模，并且当前者是投射模时，后者也是投射模. 这样，我们得到一个同态:

$$\pi:\ P_{A'}(G)\to P_A(G).$$

令 $z=\pi(y)$. 那么 $z=r\cdot y$. 事实上，只要在 $R_{K'}(G)$ 里验证这个等式就够了. 为此，只需证明，与 z 对应的特征标 χ_z 等于 $r\cdot\chi$. 然而我们有

$$\chi_z=\mathrm{Tr}_{K'/K}(\chi);$$

又因为χ的值在K内，所以就得到 $\chi_z=r\cdot\chi$.

这样，$y\in P_{A'}(G)$ 而 $r\cdot y\in P_A(G)$. 然而包含映射 $P_A(G)\to P_{A'}(G)$ 是一个分裂内射(参看 14.6). 由于 $r\cdot y$ 在 $P_{A'}(G)$ 内可以被 r 整除，从而在 $P_A(G)$ 内也是一样，这就是说，$y\in P_A(G)$.

证明完毕。

17.6 定理 39 的证明

我们说，群 G 是一个高度为 h 的 p-可解群，如果它是 h 个群的逐次扩张，而这 h 个群的阶或者与 p 互素，或者是 p 的一个幂。我们要证明，当 K 足够大时，每一单 $k[G]$-模都可以提升到 A 上一个自由 $A[G]$-模。

我们对 h 作归纳法（当 $h=0$ 时是显然的），并且对于高度为 h 的群，再对群的阶作归纳法。

令 I 是 G 的一个正规子群，它的阶或者与 p 互素，或者是 p 的幂，且设 G/I 的高度是 $h-1$. 令 E 是一个单（因而绝对单）$k[G]$-模。如果 I 是一个 p-群，那么 E 中一切在 I 之下不变的元素所成的子空间 $E^I \neq 0$，因而等于 E；于是 E 是一个单 $k[G/I]$-模．由归纳法假设，它可以提升到 A 上一个自由 $A[G/I]$-模，因而在这一情形，上述结论成立．

现在假设 I 的阶与 p 互素．将 E 分解成一些同型 $k[I]$-模的直和(即同构的单模的和)：

$$E = \bigoplus E_\alpha,$$

这里 E_α 是一个 $\bar{S}_\alpha$ 型的同型 $k[I]$-模．

群 G 置换这些 E_α；因为 E 是单模，所以 G 可迁地置换那些非零的 E_α. 令 E_α 是这样的非零单模之中的一个，令 G_α 是由 G 中满足条件 $s(E_\alpha)=E_\alpha$ 的元素 s 所成的子群．那么 E_α 是一个 $k[G_\alpha]$-模，并且显然 E 是对应的诱导 $k[G]$-模．如果 $E_\alpha \neq E$，那么 $G_\alpha \neq G$，于是对 G_α 应用归纳法假设得出 E_α 可以被提升，从而 E 也同样地可以被提升．

现在可以假定 E 是一个 $\bar{S}$ 型的同型 $k[I]$-模，这里 $\bar{S}$ 是一个单 $k[I]$-模．因为 I 的阶与 p 互素，所以本质上是唯一的方式可以将 $\bar{S}$ 提升到 A 上一个自由 $A[I]$-模 S，显然 $K\otimes S$ 是绝对单的．由 6.5，命题 16 的推论 2 可知，$\dim S$ 能整除 I 的阶；特别，$\dim S$ 与 p 互素．

现在令 $s\in G$，又令 i_s 表示 I 的自同构 $x\mapsto sxs^{-1}$. 因为 E 是 $\bar{S}$ 型同型模，由此推出 $\bar{S}$（从而 S）与它被 i_s 变换所得的象同构. 这可以表述如下：

设 $\rho: I\to \mathrm{Aut}\, S$ 是在 S 上定义一个 I-模结构的那个同态，令 U_s 是一切这样的 $t\in \mathrm{Aut}(S)$ 所成的集合；对于任意 $x\in I$，

$$t\rho(x)t^{-1}=\rho(sxs^{-1}).$$

那么 U_s 不空.

令 G_1 是由一切元素对 (s,t)，$s\in S$，$t\in U_s$，所成的群. 映射 $(s,t)\mapsto s$ 是一个满同态 $G_1\to G$；它的核等于 U_1，就是 A 的乘法群 A^*. 这样，群 G_1 是群 G 通过 A^* 的中心扩张，它通过同态 $(s,t)\mapsto t$ 而作用在 S 上.

我们现在要用一个有限群来代替 G_1. 令 $d=\dim S$. 如果 $s\in G$，那么元素 $\det(t)$，$t\in U_s$，组成 A^* 模 A^{*d} 的一个陪集. 必要时扩大 K（这是可以的，因为这样做不改变 $R_K(G)$），我们总可以假定这些陪集都是平凡的，换句话说，每一 U_s 都含有一个行列式是 1 的元素. 令 C 是一切 $\det(\rho(x))$，$x\in I$，所组成的 A^* 的子群，而 G_2 是一切元素对 (s,t)，$t\in U_s$，$\det(t)\in C$，所组成的 G_1 的子群. 群 G_2 在上述的映射 $G_1\to G$ 之下被映到 G 上；$G_2\to G$ 的核 N 与 A^* 中满足条件 $a^d\in C$ 的元素 a 所成的子群同构. 因为 d 和 $\mathrm{Card}(C)$ 都与 p 互素，所以 N 是一个阶与 p 互素的循环群.

令 ρ_2: $G_2\to \mathrm{Aut}(S)$ 是 G_2 的表示 $(s,t)\mapsto t$. 如果通过 $x\mapsto (x,\rho(x))$ 将 I 与 G_2 的一个子群等同起来，那么 ρ_2 在 I 上的限制就等于 ρ. 这样，我们虽然没有将 ρ 开拓到 G 上，但至少已经开拓到 G 的一个中心扩张上（我们得到在 Schur 的意义下，G 的一个"射影"表示）. 注意 I 在 G_2 内是正规的，并且 $I\cap N=\{1\}$.

现在回到初始的 $k[G]$-模 E 上来. 令 $F=\mathrm{Hom}^I(\bar{S},E)$ 而 u: $\bar{S}\otimes F\to E$ 是一个同态，它对于每一 $a\in\bar{S}$，$b\in F$，使 E 中的元素 $b(a)$ 与 $a\otimes b$ 对应. 由于 E 是 $\bar{S}$ 型同型的，容易推出，u 是 $\bar{S}\otimes F$ 到 E 上的一个同构.

群 G_2 通过 ρ_2 的约化而作用在 $\bar{S}$ 上；又通过 $G_2 \to G$ 作用在 E 上；从而作用在 F 上．同构映射

$$u: \bar{S} \otimes F \to E$$

与 G_2 的作用是相容的．这样一来，看成一个 $k[G_2]$-模，E 可以与 $k[G_2]$-模 $\bar{S}$ 和 F 的张量积等同起来．于是为了提升 E，只要提升 $\bar{S}$ 和 F，再取它们的提升的张量积即可．这样就得到 A 上一个自由 $A[G_2]$-模 $\tilde{E}$．因为 N 的阶与 p 互素且 N 平凡地作用在 $\tilde{E}$ 的约化模 E 上，由此得出，N 平凡地作用在 $\tilde{E}$ 上（参看 15.5），所以 $\tilde{E}$ 可以看成一个 $A[G]$-模；从而 E 确实可以提升．

于是只剩下证明 F 可以提升（$\bar{S}$ 的情形已经解决）．然而 F 是一个单 $k[G_2]$-模（因为 E 是），根据它的构造法，I 平凡地作用在 F 上．所以我们可以将它看成一个单 $k[H]$-模，这里 $H = G_2/I$．

群 H 是 G/I（它是一个高度 $\leqslant h-1$ 的 p-可解群）通过群 N 的中心扩张，而 N 是一个阶与 p 互素的循环群．如果 $h=1$，那么 $H=N$，从而 F 可以提升（参看 15.5）．设 $h \geqslant 2$．群 H/N 含有一个正规子群 M/N，它满足以下两个条件：

(a) $H/M = (H/N)/(M/N)$ 的高度 $\leqslant h-2$．

(b) M/N 或者是一个 p-群，或者是一个阶与 p 互素的群．

如果 M/N 是 p-群，那么由于 N 的阶与 p 互素，所以 M 可以写成积 $N \times P$ 的形式，这里 P 是一个 p-群．用证明开始时的同样证法可知，P 平凡地作用在 F 上，从而 F 可以看成一个 $k[H/P]$-模．然而 H/P 的高度显然 $\leqslant h-1$．由归纳法的假定，F 可以提升．最后，只剩下 M/N 的阶与 p 互素的情形．这时 M 的阶也与 p 互素，而由于 H/M 的高度 $\leqslant h-2$，所以 H 的高度 $\leqslant h-1$．于是又可以应用归纳法假定．定理证毕．□

第十八章 模特征标

我们所讨论的结果，大部分是由 R. Brauer 给出的. 他使用了稍许不同的语言，即模特征标的语言来叙述的. 我们在这里将加以说明.

为了简单起见，总假定 K 是一个足够大的域.

18.1 表示的模特征标

令 G_{reg} 表示 G 的一切 p-正则元素所成的集合，m' 是 G_{reg} 中元素的阶的最小公倍. 由假定，K 包含 m' 次单位根的群 μ_K; 再者，因为 m' 与 p 互素，所以对 $\mathfrak{m}$ 的约化作用是 μ_K 到剩余域 k 中 m' 次单位根的群 μ_k 上的同构映射. 对于 $\lambda \in \mu_k$，我们令 $\tilde{\lambda}$ 表示 μ_K 中对 $\mathfrak{m}$ 约化后等于 λ 的那个元素.

令 E 是一个 n 维 $k[G]$-模，又令 $s \in G_{\text{reg}}$，而 s_E 是由 s 所定义的 E 的自同态. 因为 s 的阶与 p 互素，所以 s_E 可以对角化，它的特征值 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 属于 μ_k. 令

$$\varphi_E(s) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i.$$

这样定义的函数 $\varphi_E: G_{\text{reg}} \to A$ 叫做 E 的模特征标(或 Brauer 特征标). 容易得出下列性质:

(i) $\varphi_E(1) = n = \dim E$.

(ii) φ_E 是 G_{reg} 上的类函数. 即对于 $s \in G_{\text{reg}}$ 和 $t \in G$，我们有

$$\varphi_E(tst^{-1}) = \varphi_E(s).$$

(iii) 如果 $0 \to E \to E' \to E'' \to 0$ 是一个 $k[G]$-模正合列，那么

$$\varphi_{E'} = \varphi_E + \varphi_{E''}.$$

(iv) $$\varphi_{E_1\otimes E_2}=\varphi_{E_1}\cdot\varphi_{E_2}.$$

(v) 如果 $t\in G$ 的 p'-分支 s 属于 G_{reg}，那么 E 的自同态 t_E 的迹是 $\varphi_E(s)$ 对 m 的约化：

$$\mathrm{Tr}(t_E)=\overline{\varphi_E(s)},$$

这里横线表示对 m 的约化。(注意到 $(t^{-1}s)_E$ 的特征值都是 p^n 次单位根，而 k 的特征为 p，从而这些特征值都等于 1。由此推出 t_E 与 s_E 有相同的特征值，从而得出所求的公式。)

(vi) 令 F 是一个特征标为 χ 的 $K[G]$-模，E_1 是 F 的一个在 G 之下稳定的格，$E=E_1/\mathfrak{m}E_1$ 是 E_1 对 m 的约化。那么 φ_E 是 χ 在 G_{reg} 上的限制。

(只要对于 G 是阶与 p 互素的循环群的情形来证明就够了。再者，定理33表明，φ_E 不依赖于稳定格 E_1 的选取。这样就可以归结到 E_1 是由 G 的特征向量生成的情形，而在这一情形，结果是显然的。)

(vii) 如果 F 是一个投射 $k[G]$-模，而 $\tilde{F}$ 是一个投射 $A[G]$-模，它的约化就是 F。我们把 $\tilde{F}$ 的特征标(即 $K[G]$-模 $K\otimes\tilde{F}$ 的特征标)记作 Φ_F。如果 E 是任意一个 $k[G]$-模，我们知道，$E\otimes F$ 是一个投射 $k[G]$-模，从而 $\Phi_{E\otimes F}$ 有意义。我们有

$$\Phi_{E\otimes F}(s)=\begin{cases}\varphi_E(s)\Phi_F(s), & \text{如果 } s\in G_{reg},\\ 0, & \text{在其它情形.}\end{cases}$$

φ_E 在 G_{reg} 以外没有意义，上面的公式可以简单地写成 $\Phi_{E\otimes F}=\varphi_E\cdot\Phi_F$。

(我们知道，如果 $s\notin G_{reg}$，那么 $\Phi_{E\otimes F}(s)=0$，参看定理 37。另一方面，$\Phi_{E\otimes F}$ 在 G 上的限制等于 $E\otimes F$ 的模特征标。于是由 (iv)，它等于 $\varphi_E\cdot\Phi_F$)。

(viii) 在 (vii) 的假定下，我们有

$$\langle E,F\rangle_k=\frac{1}{g}\sum_{s\in G_{reg}}\Phi_F(s^{-1})\varphi_E(s)=\langle\varphi_E,\Phi_F\rangle,$$

这里 $g=\mathrm{Card}(G)$。

(根据定义，$\langle E,F\rangle_k$ 是 $H=\mathrm{Hom}(F,E)$ 中被 G 固定的元

素的全体所成的子空间 H^G 的维数．然而 H 是一个投射 $k[G]$-模。如果令 $\tilde{H}$ 表示对应的投射 $A[G]$-模，那么容易看出 $\dim_k H^G = \mathrm{rank}_A \tilde{H}^G$．如果 Φ_H 是 $K\otimes\tilde{H}$ 的特征标，那么

$$\langle E, F\rangle_k = \langle 1, \Phi_H\rangle = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\Phi_H(s)。$$

但是 H 与 E 和 F 的对偶的张量积同构．由 (vii)，对于 $s\in G_{\mathrm{reg}}$，我们有 $\Phi_H(s) = \Phi_F(s^{-1})\varphi_E(s)$，而在其它情形，$\Phi_H(s) = 0$．由此就得到所求的结果.)

特别考虑 E 是 G 的单位表示的情形，我们得到：

(ix) F 中在 G 之下不变的元素所成的子空间 F^G 的维数是

$$\langle 1, \Phi_F\rangle = \frac{1}{g}\sum_{s\in G_{\mathrm{reg}}}\Phi_F(s)。$$

注记 性质 (iii) 使我们有可能定义 $R_k(G)$ 的任意元素 x 的虚模特征标 φ_x．由 (vi)，如果 $x = d(y)$，$y\in R_K(G)$，那么 φ_x 就是 y 的虚特征标 χ_y 在 G_{reg} 上的限制.

对于 k 上任意一个线性代数群 G，也可以给出类似的定义(为了简单起见，假定 k 是一个代数闭域)．这时集合 G_{reg} 就定义为 G 的一切半单元素所成的集合。如果 E 是 G 的一个线性表示，而 $s\in G_{\mathrm{reg}}$，那么 $\varphi_E(s)$ 就定义为 s_E 的特征值的乘法代表的和；这时模特征标 φ_E 就定义为在 A 中取值的 G_{reg} 上的类函数.

18.2 模特征标的无关性

我们已经说过，S_k 表示单 $k[G]$-模的同构类所成的集合．与 S_k 的元素 E 对应的 φ_E 叫做群 G 的不可约模特征标.

定理 43 (R. Brauer) 全体不可约模特征标 $\varphi_E(E\in S_k)$ 构成在 K 内取值的 G_{reg} 上类函数所成的 K-向量空间的一个基.

这个定理也可以用以下的等价形式来表述：

定理 43′ 映射 $x\longmapsto\varphi_x$ 可以开拓为由 $K\otimes R_k(G)$ 映到在 K 内取值的 G_{reg} 上类函数所成的代数上的一个同构。

由这两个定理可以直接得到：

推论 1 令 F 和 F' 是具有相同的模特征标的两个 $k[G]$-模. 那么在 $R_k(G)$ 内, $[F]=[F']$; 如果 F 和 F' 都是半单的, 那么它们彼此同构。

推论 2 同态 $d: R_K(G)\to R_k(G)$ 的核由其虚特征标 χ_x 在 G_{reg} 上取零值的那些元素 x 组成。

(因为 d 是满射, 因此 $R_k(G)$ 就作为 $R_K(G)$ 的一个商群被具体地描述出来.)

推论 3 单 $k[G]$-模同构类的个数等于 G 的 p-正则共轭类的个数.

定理 43 的证明

(a) 首先证明, $\varphi_E(E\in S_k)$ 在 K 上线性无关. 事实上, 假设有一个关系式 $\sum a_E\varphi_E=0$, $a_E\in K$, 且 a_E 不全为零. 必要时用 K 的某一元素去乘这些 a_E, 我们总可以假定 a_E 都属于环 A, 并且至少有一个不属于 $\mathfrak{m}$. 对 $\mathfrak{m}$ 约化, 我们就得到, 对一切 $s\in G_{\mathrm{reg}}$ 都有

$$\sum_{E\in S_k}\bar{a}_E\,\overline{\varphi_E(s)}=0,$$

这里横线表示对于 $\mathfrak{m}$ 的约化, 并且至少有一个 $\bar{a}_E$ 不等于零. 由前一节的公式 (v), 对一切 $t\in G$, 我们有

$$\sum\bar{a}_E\mathrm{Tr}(t_E)=0.$$

于是对一切 $t\in k[G]$, 这个等式也成立. 然而 K 是足够大的, 模 E 是绝对单的, 所以由稠密性定理 ([8], § 4, no. 2), 同态

$$k[G]\to\bigotimes_{E\in S_k}\mathrm{End}_k(E)$$

是满的. 现在设 $E\in S_k$ 使得 $\bar{a}_E\neq 0$, 令 $u\in\mathrm{End}_k(E)$ 的迹是 1 (例如, 在一直线上的射影), 而 t 是 $k[G]$ 的一个元素, 它在 $\mathrm{End}_k(E)$ 内的象是 u 而在 $\mathrm{End}_k(E')$, $E'\neq E$, 内的象是 0. 于是就有 $\bar{a}_E\cdot 1=0$, 这是一个矛盾。

证明的这一部分对于线性代数群也完全适用.

(b) 我们要证明, 一切 φ_E 生成 G_{reg} 上类函数所成的向量空间。令 f 是这样一个类函数, 并且将它开拓为 G 上一个类函数

f'. 我们知道，f' 可以写成 $\sum\lambda_i\chi_i$ 的形式，$\lambda_i\in K$ 而 $\chi_i\in R_K(G)$。因此 $f=\sum\lambda_i d(\chi_i)$，这里 $d(\chi_i)$ 是 χ_i 在 G_{reg} 上的限制．因为每一 $d(\chi_i)$ 都是 φ_E 的线性组合，所以就得到所要求的结果。□

问题 (Brauer) 令 $E\in S_k$，p^e 是在 p 的一切幂中能整除 $\dim E$ 的最大者．问 p^e 能否整除 G 的阶？

习　题

18.1 (在这个习题里，并不假设 G 是有限群，也不假设 k 的特征 $\neq 0$。) 令 E 和 E' 是半单 $k[G]$-模．假设对于每一 $s\in G$，多项式 $\det(1+s_E T)$ 和 $\det(1+s_{E'}T)$ 都相等．证明 E 与 E' 同构．[归结到 k 是代数闭域的情形并且同定理 43 证明中的 (a) 部分一样来论证。]作为一个推论，证明，如果 E 是半单的并且所有 s_E 都是幺幂的，那么 G 平凡地作用在 E 上 (Kolchin 定理)。

18.2 令 H 是群 G 的一个子群，F 是一个 $k[H]$-模，又令 $E=\mathrm{Ind}_H^G(F)$．证明，E 的模特征标 φ_E 由 φ_F 通过与特征零的情形同样的公式得出。

18.3 环 $R_k(G)$ 的谱是什么？

18.4 证明，一切不可约特征标构成在 A 内取值的 G_{reg} 上类函数所成的 A-模的一个基．[利用 10.3，引理 8 证明，每一在 A 内取值的 G_{reg} 上类函数都可以开拓为一个属于 $A\otimes R_K(G)$ 的 G 上类函数.]

18.3 重新表述

我们在上一节已经看到，映射 $x\longmapsto\varphi_x$ 定义了 $K\otimes R_k(G)$ 到 G_{reg} 上类函数所成的向量空间上的一个同构．另一方面，映射 $K\otimes e: K\otimes P_k(G)\to K\otimes R_K(G)$ 将 $K\otimes P_k(G)$ 与在 G_{reg} 之外取零值的 G 上类函数所成的向量空间等同起来(例如，可以比较这两个空间的维数来验证这一点)．与 K 作张量积，cde 三角变成以下形式：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{在 } G_{\text{reg}} \text{ 之外取零值的 } G \text{ 上类函数}} \arrow[rr, "K\otimes c"] \arrow[dr, "K\otimes e"'] & & \boxed{G_{\text{reg}} \text{ 上类函数}} \\
& \boxed{G \text{ 上类函数}} \arrow[ur, "K\otimes d"'] &
\end{tikzcd}$$

映射 $K\otimes c$，$K\otimes d$，$K\otimes e$ 显然依次是限制映射，限制映射，包含映射. 注意根据定理 36 的推论 1，$K\otimes c$ 是一个同构映射.

矩阵 C 和 D 可以如下地解释：如果 $F\in S_K$，令 χ_F 表示 F 的特征标；如果 $E\in S_k$，令 φ_E 表示 E 的模特征标，令 Φ_E 表示 E 的投射包络的特征标. 那么

$$\chi_F=\sum_{E\in S_k}D_{EF}\varphi_E,\ 在\ G_{\mathrm{reg}}\ 上.$$

$$\Phi_E=\sum_{F\in S_K}D_{EF}\chi_F,\ 在\ G\ 上.$$

$$\Phi_E=\sum_{E'\in S_K}C_{E'E}\varphi_{E'},在\ G_{\mathrm{reg}}\ 上.$$

同时有以下的正交关系：

$$\langle\Phi_E,\varphi_{E'}\rangle=\delta_{EE'},\ 这里\ \langle\Phi_E,\varphi_{E'}\rangle=\frac{1}{g}\sum_{s\in G_{\mathrm{reg}}}\Phi_E(s^{-1})\varphi_{E'}(s).$$

我们还要提一下定理 36 的另一种表述：

定理 36′ 设在 p 的幂中，能整除 G 的阶的最大者是 p^n. 如果 φ 是 G 的一个模特征标，而 Φ 由公式

$$\Phi(s)=p^n\varphi(s),\ 若\ s\in G_{\mathrm{reg}},$$
$$\Phi(s)=0,\qquad 若\ s\notin G_{\mathrm{reg}}$$

定义，那么 Φ 是 G 的一个虚特征标.

关于这种类型的其它结果的重新表述，留给读者去做.

习　　题

18.5　设 $s\in G_{\mathrm{reg}}$. 令 $p^{Z(s)}$ 表示 s 在 G 内的中心化子的一个 Sylow p-子群的阶.

(a)　令 Φ 是 G 上一个类函数，且在 K 内取值. 证明 $\Phi\in A\otimes P_k(G)$ 必要且只要在 G_{reg} 以外，Φ 的值是零，而对于每一 $s\in G_{\mathrm{reg}}$，$\Phi(s)\in p^{Z(s)}A$. [利用习题18.4以及正交关系 $\langle\Phi_E,\varphi_{E'}\rangle=\delta_{EE'}$.]

(b)　利用 (a) 证明.

$$\mathrm{Coker}(c)\cong\prod\boldsymbol{Z}/p^{Z(s)}\boldsymbol{Z},\ 而\ \det(c)=p^{\Sigma Z(s)},$$

这里 s 遍历 G 的 p-正则类的一个代表系.

18.6 设G是一个p-可解群(参看16.3)。如果$F\in S_K$，令φ_F表示χ_F在G_{reg}上的限制。证明，G_{reg}上一个函数φ是一个单$k[G]$-模的模特征标，必要且只要以下两个条件被满足：

(a) 存在$F\in S_K$使得$\varphi=\varphi_F$。

(b) 如果$(n_F)_{F\in S_K}$是一组非负整数使得$\varphi=\sum n_F\varphi_F$，那么这些$n_F$中有一个是1而其余的都是0。[利用方-Swan定理.]

18.4 d 的一个截影

同态$d:R_K(G)\to R_k(G)$是满的(定理34)。我们现在将对d画出一个截影，也就是一个同态

$$\sigma:R_k(G)\to R_K(G),$$

使得$d\circ\sigma=1$。

对于$s\in G$，令s'表示s的p'-分支。如果f是G_{reg}上一个类函数，我们如下地定义G上一个类函数f'：

$$f'(s)=f(s')。$$

定理 44

(i) 如果f是G的一个模特征标，那么f'是G的一个虚特征标。

(ii) 映射$f\longmapsto f'$定义$R_k(G)$到$R_K(G)$内的一个同态，这个同态是d的一个截影。

要证f'是G的一个虚特征标(即属于$R_K(G)$)，只需证明，对于G的每一初等子群H来说，f'在H上的限制属于$R_K(H)$(参看11.1，定理21)。这样就归结到G是初等群的情形，从而G可以分解为$G=S\times P$，这里S的阶与p互素而P是一个p-群。再者，我们总可以假定f是一个单$k[G]$-模E的模特征标。根据在15.7里的讨论，E还是一个单$k[S]$-模，并且可以被提升到一个单$K[S]$-模。P在后者上的作用是平凡的，这个模的特征标显然就是f'。这就证明了(i)。

注意到f'在G_{reg}上的限制等于f，于是论断(ii)就由(i)得出。□

习　　题

18.7　令m是G的元素的阶的最小公倍．将m写成 $m=p^n m'$ 的形式，这里 $(p, m')=1$（参看18.1）．选取一个整数q使得 $q\equiv 0(\bmod p^n)$ 而 $q\equiv 1(\bmod m')$．

(a)　证明，如果 $s\in G$，那么s的p'-分支s'等于s^q．

(b)　令f是G的一个模特征标，φ是 $R_K(G)$ 的一个元素，它在 G_{reg} 上的限制等于f（由定理34，这样一个元素是存在的）．在定理44的记法之下，证明 $f'=\Psi^q\varphi$，这里Ψ^q是习题9.3里所定义的那个算子．由此推出关于f'属于 $R_K(G)$ 的另一证明．［注意 $R_K(G)$ 在Ψ^q之下稳定.］

18.8　不假定K足够大，证明定理44．［利用前一习题里的方法.］

18.5　例：对称群 $\mathfrak{S}_4$ 的模特征标

群 $\mathfrak{S}_4$ 是 $\{a, b, c, d\}$ 的一切置换所成的群．我们还记得它的特征标表是(参看5.8)：

	1	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_5	3	-1	-1	0	1

我们定出在特征为p的情形它的不可约模特征标．我们可以假定p能够整除G的阶，即$p=2$或$p=3$．

(a)　$p=2$ 的情形

有两个 p-正则类：就是1的类和(abc)的类．由定理43的推论3，在特征是2的情形，共有两个不可约的模表示（确切到同构）．唯一的一级表示是单位表示，它的模特征标是$\varphi_1=1$．另一方面，$\mathfrak{S}_4$的二级不可约表示对于 mod 2 约化给出一个表示ρ_2，它的特征标φ_2在元素(abc)上取值-1．由此可知ρ_2显然不是两个一级表示的扩张（否则将有$\varphi_2=2\varphi_1=2$），因而是不可约的．这样，$\mathfrak{S}_4$的不可约模特征标是φ_1和φ_2：

	1	(abc)
φ_1	1	1
φ_2	2	-1

将特征标 $\chi_1, \cdots, \chi_5$ 在 G_{reg} 上的限制表成 φ_1 和 φ_2 的函数，就得出分解矩阵 D. 在 G_{reg} 上，我们有：

$$\chi_1 = \varphi_1,$$
$$\chi_2 = \varphi_1,$$
$$\chi_3 = \varphi_2,$$
$$\chi_4 = \varphi_1 + \varphi_2,$$
$$\chi_5 = \varphi_1 + \varphi_2.$$

所以

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

与 φ_1 和 φ_2 对应的不可分解投射模的特征标 Φ_1 和 Φ_2 由 D 的转置矩阵给出：

$$\Phi_1 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_4 + \chi_5,$$
$$\Phi_2 = \chi_3 + \chi_4 + \chi_5.$$

相应的表示都是 8 级的. Cartan 矩阵是

$$C = D \cdot {}^tD = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

它的行列式等于 8. 这个矩阵给出 Φ_1 和 Φ_2 在 G_{reg} 上的分解：

$$\Phi_1 = 4\varphi_1 + 2\varphi_2, \text{ 在 } G_{reg} \text{ 上},$$
$$\Phi_2 = 2\varphi_1 + 3\varphi_2, \text{ 在 } G_{reg} \text{ 上}.$$

(b) $p = 3$ 的情形

有四个 p-正则类：1, (ab), $(ab)(cd)$, $(abcd)$. 因此，在特征 $p = 3$ 的情形，有四个不可约表示. 另一方面，特征标为 χ_1, χ_2, χ_4 和 χ_5 的表示的约化是不可约的：前两个是显然的，它们的级都是 1；关于后两个，可以由它们的级是能够整除群阶的 p 的最大幂这一事实得出(参看 16.4，命题 46). 因为它们的模特征标互不相同，所以它们就是 $\mathfrak{S}_4$ 的全部不可约模特征标. 将它们记作 $\varphi_1, \varphi_2,$

φ_3, φ_4, 就得到以下的表：

	1	(ab)	$(ab)(cd)$	$(abcd)$
φ_1	1	1	1	1
φ_2	1	-1	1	-1
φ_3	3	1	-1	-1
φ_4	3	-1	-1	1

因为在 G_{reg} 上，$\chi_3=\varphi_1+\varphi_2$，我们得到分解矩阵$D$和 Cartan 矩阵$C$如下：

$$D=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$C={D}\cdot{}^tD=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \det(C)=3.$$

不可分解投射模的特征标 $\Phi_1,\cdots,\Phi_4$ 是：

$$\Phi_1=\chi_1+\chi_3,$$
$$\Phi_2=\chi_2+\chi_3,$$
$$\Phi_3=\chi_4,$$
$$\Phi_4=\chi_5.$$

（注意 Φ_3 和 Φ_4 的简单的表示式，参看命题 46.）

习　　题

18.9　对于 $\mathfrak{S}_4$ 验证方-Swan 定理. [验证每一 φ_i 都是某一 χ_j 在 G_{reg} 上的限制.]

18.10　证明，$\mathfrak{S}_4$ 的不可约表示在(特征任意的)素域上可实现.

18.11　群 $\mathfrak{S}_4$ 有一个 4 阶正规子群N使得 $\mathfrak{S}_4/N$ 与 $\mathfrak{S}_3$ 同构. 证明，在特征是 2 的情形，N 平凡地作用在 $\mathfrak{S}_4$ 的每一不可约表示上. 利用这个事实对这样的表示分类.

18.6 例：交错群$\mathfrak{A}_5$的模特征标

$\mathfrak{A}_5$是 $\{a, b, c, d, e\}$ 的一切偶置换所成的群，它有 60 个元素，被分成五个共轭类：

单位元 1；

$(ab)(cd)$ 的 15 个共轭元素，它们的阶是 2；

(abc) 的 20 个共轭元素，它们的阶是 3；

$s=(abcde)$ 的 12 个共轭元素，它们的阶是 5；

s^2 的 12 个共轭元素，它们的阶是 5.

共有五个不可约特征标，由以下的表给出：

	1	$(ab)(cd)$	(abc)	s	s^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	z	z'
χ_3	3	-1	0	z'	z
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

$$z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad z'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

对应的表示是：

χ_1：单位表示.

χ_2和χ_3：两个三级表示．在域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ 上可实现，且在 $\boldsymbol{Q}$ 上共轭．这两个表示可以如下地得到：把$\{\pm 1\}\times\mathfrak{A}_5$ 看成一个图为 $\circ\overset{3}{—}\circ\overset{5}{—}\circ$的"Coxeter 群"，然后考虑这个群的反射表示（参看 Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Ch. VI, p. 231, *ex*. 11）.

χ_4：一个四级表示，在 $\boldsymbol{Q}$ 上可实现．从 $\mathfrak{A}_5$ 在 $\{a, b, c, d, e\}$ 上的置换表示里去掉单位表示，就得到这个表示，参看习题 2.6.

χ_5：一个五级表示，在 $\boldsymbol{Q}$ 上可实现．从 $\mathfrak{A}_5$ 在它的六个 5 阶子群所成的集上的置换表示里去掉单位表示，就得到这个表示.

我们对于 $p=2, 3, 5$ 的情形，定出 $\mathfrak{A}_5$ 的不可约模特征标.

(a) $p=2$的情形

有四个 p-正则类，因而有四个不可约模特征标．其中的两个是明显的：单位特征标和 χ_4 的约化(参看命题 46)。另一方面，在 G_{reg} 上我们有

$$\chi_2 + \chi_3 = \chi_1 + \chi_5.$$

这就证明了这两个三级不可约表示的约化都是不可约的（它们的特征标在 2-adic 数域 $\mathbf{Q}_2$ 上是共轭的，因为 $\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}_2$）．它们之中每一个在 $R_k(G)$ 内都应该分解为单位表示和一个二级表示的和；这个二级表示一定是不可约的．这样，不可约模特征标 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 由以下的表给出：

	1	(abc)	s	s^2
φ_1	1	1	1	1
φ_2	2	-1	$z-1$	$z'-1$
φ_3	2	-1	$z'-1$	$z-1$
φ_4	4	1	-1	-1

在 G_{reg} 上，我们有

$$\chi_1 = \varphi_1,$$
$$\chi_2 = \varphi_1 + \varphi_2,$$
$$\chi_3 = \varphi_1 + \varphi_3,$$
$$\chi_4 = \varphi_4$$
$$\chi_5 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

矩阵 D 和 C 是：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = 4.$$

(b) $p = 3$ 的情形

在特征是 3 的情形，有四个不可约表示，就是一级，三级(两个)和四级不可约表示的约化. 再者，在 G_{reg} 上，我们有

$$\chi_5 = 1 + \chi_4.$$

所以

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \det(C) = 3.$$

(c) $p = 5$ 的情形

在特征是 5 的情形有三个不可约表示，就是一级、三级和五级不可约表示的约化(注意这时两个三级表示约化后是同构的). 此外，在 G_{reg} 上，我们有

$$\chi_4 = \chi_1 + \chi_3.$$

所以

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det(C) = 3.$$

习　　题

18.12　验证论断 (b) 和 (e).

18.13　证明，在特征是 2 的情形，$\mathfrak{A}_5$ 的二级不可约表示在四个元素的域 $\boldsymbol{F}_4$ 上可实现；由此得出 $\mathfrak{A}_5$ 到群 $\mathbf{SL}_2(\boldsymbol{F}_4)$ 上的一个同构映射.

18.14 证明，$\mathfrak{A}_5$ 与 $\mathbf{SL}_2(\boldsymbol{F}_5)/\{\pm 1\}$ 同构；利用这个同构，给出在特征是 5 的情形 $\mathfrak{A}_5$ 的不可约表示的表.

18.15 证明，χ_1 是单项的，而 χ_2, χ_3, χ_4 不是单项的.

第十九章　对 Artin 表示的应用

19.1　Artin 和 Swan 表示

设 E 是关于一个离散赋值的完备域，F/E 是 E 的一个有限 Galois 扩张，它的 Galois 群是 G，并且为了简单起见，假设 E 和 F 有相同的剩余域．如果 $s \neq 1$ 是 G 的一个元素而 π 是 F 的一个素元，令

$$i_G(s) = v_F(s(\pi) - \pi),$$

这里 v_F 表示已被正规化为 $v_F(\pi) = 1$ 的 F 的赋值．

令

$$a_G(s) = -i_G(s) \text{ 若 } s \neq 1,$$

$$a_G(1) = \sum_{s \neq 1} i_G(s).$$

显然，a_G 是 G 上一个取整值的类函数．再者，我们有：

定理　函数 a_G 是 G 的（在一个足够大的域上的）一个表示的特征标．

换句话说，如果 χ 是 G 的任意一个特征标，那么数

$$f(\chi) = \langle a_G, \chi \rangle$$

是一个非负整数．

利用 a_G 的形式的性质（参看 [25]，Ch. VI），可以看出 $f(\chi) \geqslant 0$，并且很容易将整性的问题归结到 G 是循环群的情形（而且，如果我们愿意的话，甚至可以归结到 G 是一个阶为 E 的剩余特征的幂的循环群的情形）．于是我们可以用不同的方法来处理：

(i)　如果 χ 是 G 的一个一级特征标，可以证明，$f(\chi)$ 就是在局部类域论的意义下 χ 的前导子的赋值，而这个赋值显然是一整数．在剩余域是有限域的情形（最初是 Artin 这样做的），或者在剩余域是代数闭域的情形（利用局部类域论的一个"几何的"类比），

可以用这个方法去做；另一方面，一般的情形容易归结到剩余域是代数闭域的情形。

(ii) $f(\chi)$ 是整数这一论断等价于扩张 F/E 的"分歧数"的一些合同性质. 这些性质可以直接证明，参看 [25], Ch. V, § 7. 和 *S. Sen., Ann. of Math.*, 90, 1969, p. 33—46.

现在令 r_G 是 G 的正则表示的特征标，又令 $u_G = r_G - 1$. 定义 $sw_G = a_G - u_G$. 那么

$$sw_G(s) = 1 - i_G(s), \quad 若\ s \neq 1,$$

$$sw_G(1) = \sum_{s \neq 1} (i_G(s) - 1).$$

容易验证，如果 χ 是 G 的一个特征标，那么内积 $\langle sw_G, \chi \rangle \geqslant 0$. 利用以上的定理，可以看出，对于一切 χ，$\langle sw_G, \chi \rangle$ 是一个非负整数，这就是说，sw_G 是 G 的一个特征标。

特征标 a_G 叫做 Galois 群 G 的 Artin 特征标，而 sw_G 叫做 G 的 Swan 特征标；相应的表示分别叫做 G 的 Artin 表示和 Swan 表示. 这两个表示的具体构造是不知道的，然而我们可以给予特征标 $g \cdot a_G$ 和 $g \cdot sw_G$ 一个简单的描述，这里 $g = \mathrm{Card}(G)$.

令 $G_i (i = 0, 1, \cdots)$ 表示 G 的分歧群. $s \in G_i$ 必要且只要 $i_G(s) \geqslant i + 1$ 或 $s = 1$. 令 $\mathrm{Card}(G_i) = g_i$. 那么以下等式成立：

$$g \cdot a_G = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \cdot \mathrm{Ind}_{G_i}^{G}(u_{G_i}),$$

$$g \cdot sw_G = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \cdot \mathrm{Ind}_{G_i}^{G}(u_{G_i}),$$

$u_{G_i} = r_{G_i} - 1$.

特别，$sw_G = 0$ 必要且只要 $G_1 = \{1\}$，即 G 的阶与 E 的剩余特征互素(换句话说，$sw_G = 0$ 必要且只要 F/E 是驯分歧).

19.2 Artin 和 Swan 表示的有理性

尽管 a_G 和 sw_G 的值都在 $\boldsymbol{Z}$ 内，也可以给出对应的表示在 $\boldsymbol{Q}$

上不可能实现，甚至在$\boldsymbol{R}$上都不可能实现的例子(参看 [26]，§4 和 §5)。然而我们有

定理 45 令 l 是一个不等于 E 的剩余特征的素数.

(i) Artin 和 Swan 表示在 l-adic 数域 $\boldsymbol{Q}_l$ 上可实现.

(ii) 存在一个投射$\boldsymbol{Z}_l[G]$-模 Sw_G，使得 $\boldsymbol{Q}_l\otimes Sw_G$ 的特征标是 sw_G，并且确切到同构，这个$\boldsymbol{Z}_l[G]$-模是唯一的.

只需证明 (ii)；由此即可得出论断 (i)，因为 a_G 是由 sw_G 再加上 u_G 而得到的，而 u_G 是在任意域上可实现的.

为了证明 (ii)，我们应用 16.3 的命题 44，取 $p=l$，$K=\boldsymbol{Q}_l$，$n=g=\mathrm{Card}(G)$，并且选取 K' 是 $\boldsymbol{Q}_l$ 的一个足够大的有限扩域。这时命题的条件 (a) 成立，参看 19.1.

为了验证条件 (b) 成立，我们利用上面所给出的公式

$$g\cdot sw_G=\sum_{i\geq 1} g_i\cdot \mathrm{Ind}_{G_i}^{G}(u_{G_i}).$$

根据分歧理论，这些 $G_i(i\geq 1)$ 的阶都与 l 互素；由此推出，每一 $A'[G_i]$-模都是投射模(参看 15.5)，这里 A' 表示 K' 的整量环. 所以 u_{G_i} 由一个投射 $A'[G_i]$-模产生(如果需要的话，甚至可由一个投射 $\boldsymbol{Z}_l[G_i]$-模产生)；而相应的诱导 $A'[G]$-模同时也是投射模. 取这些模(每一个重复取 g_i 次)的直和，我们得到一个投射 $A'[G]$-模，它的特征标为 $g\cdot sw_G$. 于是命题44的所有条件都被满足，从而定理成立. □

注记

(1) 定理 45 的 (i) 在 [26] 里是用略微复杂一些的方法来证明的，然而在那里给出一个较强的结果：代数 $\boldsymbol{Q}_l[G]$ 是分裂的(参看 12.2).

(2) 结合着方-Swan 定理(定理 39)，由 (i) 可以得出 (ii).

(3) 有例子说明，Artin 和 Swan 表示在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上不可能实现，这里 p 是 E 的剩余特征. 然而，J. M. Fontaine 证明了这些表示在 c_0 的 Witt 向量域上可实现，这里 c_0 是 E 的剩余域中在素域上是代数的那些子域里面最大的(参看 [27]).

19.3 一个不变量

令 l 是一个不等于 E 的剩余特征的素数. 令 $k=\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$, 而 M 是一个 $k[G]$-模. 我们用以下的公式来定义 M 的一个不变量 $b(M)$:

$$b(M)=\langle\overline{Sw_G}, M\rangle_k=\dim\mathrm{Hom}^G(\overline{Sw_G}, M)$$
$$=\dim\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_l[G]}(Sw_G, M),$$

这里 $\overline{Sw_G}=Sw_G/l\cdot Sw_G$ 表示定理 45 里所定义的 $\mathbf{Z}_l[G]$-模 Sw_G 对 $\mathrm{mod}\, l$ 的约化. 内积 $\langle\overline{Sw_G},M\rangle_k$ 有意义,因为 $\overline{Sw_G}$ 是投射模,参看 14.5.

不变量 $b(M)$ 有以下性质:

(i) 如果 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是一个 $k[G]$-模的正合列,那么

$$b(M)=b(M')+b(M'').$$

(ii) 如果 φ_M 是M的模特征标,那么

$$b(M)=\langle sw_G, \varphi_M\rangle=\frac{1}{g}\sum_{s\in G_{\mathrm{reg}}} sw_G(s^{-1})\varphi_M(s),$$

参看 18.1, 公式 (viii).

(iii) $$b(M)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i}{g}\dim_k(M/M^{G_i}),$$

这里 M^{G_i} 表示 M 中被第 i 个分歧群 G_i 所固定的元素的全体所成的子空间.

(由公式 $g\cdot sw_G=\sum_{i\geqslant 1} g_i\mathrm{Ind}_{G_i}^G(u_{G_i})$, 并且注意, 如果 $i\geqslant 1$, 则 $\langle\mathrm{Ind}_{G_i}^G(u_{G_i}),\varphi_M\rangle$ 等于 $\dim_k(M/M^{G_i})$, 就得出这个公式.)

(iv) $b(M)=0$ 必要且只要 G_1 平凡地作用在M上,即G在M上的作用是"驯的". (这可以由 (iii) 推出.)

这样,不变量 $b(M)$ 测量了模M的"野分歧"程度. 这个不变量在许多问题里都会遇到: 代数曲线的上同调, ζ-函数的局部因子,椭圆曲线的前导子等(参看 [28], [29], [30]).

附　　录

Artin 环

一个环 A 叫做 Artin 环，如果下列等价的条件之一被满足(参看 Bourbaki，代数，Ch. VIII, §2)：

(a)　A 的每一左理想降链都是平稳的.

(b)　左 A-模 A 具有有限长度.

(c)　每一有限生成的左 A-模都具有有限长度.

如果 A 是一个 Artin 环，那么它的根 $\mathfrak{r}$ 是幂零的，而环 $S=A/\mathfrak{r}$ 是半单的. 环 S 可以分解为单环的积 ΠS_i，每一 S_i 都同构于一个体 D_i 上的矩阵代数 $\mathbf{M}_{n_i}(D_i)$，并且具有唯一的(确切到同构)单模 E_i，它是 D_i 上一个 n_i 维向量空间. 每一半单 A-模都被 $\mathfrak{r}$ 所零化，因而可以看成一个 S-模；如果这个模是单的，那么它与某一 E_i 同构.

例　一个域 k 上任意有限维代数都是 Artin 环；特别，一个有限群 G 的群代数 $k[G]$ 是一个 Artin 环.

Grothendieck 群

令 A 是一个环，$\mathscr{F}$ 是一个左 A-模范畴. $\mathscr{F}$ 的 Grothendieck 群，记作 $K(\mathscr{F})$，指的是由以下的生成元和关系所定义的 Abel 群：

生成元　对于每一 $E\in\mathscr{F}$，有一个生成元 $[E]$ 与它对应.

关系　对于每一正合列

$$0\to E'\to E\to E''\to 0,\quad E,E',E''\in\mathscr{F},$$

有关系 $[E]=[E']+[E'']$ 与它对应.

如果 H 是一个 Abel 群，同态 $f:K(\mathscr{F})\to H$ 与"加性的"映射 $\varphi:\mathscr{F}\to H$ 1-1 对应；映射 φ 是"加性的"意味着，对于如上类型的任意正合列，都有 $\varphi(E)=\varphi(E')+\varphi(E'')$.

两个最普通的例子就是 $\mathscr{F}$ 是一切有限生成 A-模的范畴，或是有限生成投射 A-模的范畴的情形。

投射模

令 A 是一个环，而 P 是一个左 A-模。P 叫做一个投射 A-模，如果下列等价的条件被满足（参看 Bourbaki，代数 Ch. II，§2）：

(a) 存在一个自由 A-模，而 P 是它的一个直因子.

(b) 对于每一左 A-模的满同态 $f: E \to E'$ 和每一同态 $g': P \to E'$，存在一个同态 $g: P \to E$，使得 $g' = f \circ g$.

(c) 函子 $E \to \mathrm{Hom}_A(P, E)$ 是正合的。

A 的一个左理想 $\mathfrak{a}$ 是 A（作为一个左 A-模）的一个直因子，必要且只要存在 $e \in A$，使得 $e^2 = e$ 且 $\mathfrak{a} = Ae$；这样一个理想是一个投射 A-模。

离散赋值

令 K 是一个域，K^* 是 K 的一切非零元素所成的乘法群. K 的一个离散赋值（参看 [24]）指的是具有以下性质的一个满同态 $v: K^* \to \mathbf{Z}$：对一切 $x, y \in K^*$，

$$v(x + y) \geqslant \mathrm{Inf}(v(x), v(y))。$$

再定义 $v(0) = +\infty$，则 v 可以开拓到 K 上.

由 K 中满足条件 $v(x) \geqslant 0$ 的元素 x 所成的集合 A 是 K 的一个子环，叫做 v 的赋值环（或者叫做 K 的整量环）. 这个环有唯一的极大理想，就是由 K 中满足条件 $v(x) \geqslant 1$ 的一切元素 x 所成的集合 $\mathfrak{m}$. 域 $k = A/\mathfrak{m}$ 叫做 A（或 v）的剩余域.

K 对于由 $\mathfrak{m}$ 的幂所定义的拓扑来说是完备的必要且充分条件是 A 到 $A/\mathfrak{m}^n$ 的射影极限内的典范映射是同构映射.

参考文献(第三部分)

关于模表示可以参看 Curtis and Reiner [9]以及:

[18] R. Brauer, Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern, *Act. Sci. Ind.*, **195**(1935).

[19] R.Brauer, Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. *Math. Zeit.*, **63** (1956), p. 406—444.

[20] W.Feit, Representations of Finite Groups I, Mimeographed notes, Yale University, 1969.

关于 Grothendieck 群和它们对于有限群表示的应用,可以参看文献:

[21] R.Swan, Induced representations and projective modules. *Ann. of Math.*, **71**(1960), p. 552—578.

[22] R.Swan, The Grothendieck group of a finite group. *Topology*, (1963), p. 85—110.

关于投射包络,可以参看文献:

[23] M. Demazure and P. Gabriel, Groupes algébriques. Tome I, Chapter V, §2, no.4, Masson and North-Holland, 1970.

[24] I. Giorgiutti, Groupes de Grothendieck, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, **26** (1962), p. 151—207.

关于局部域以及 Artin 和 Swan 表示,可以参看文献:

[25] J.-P. Serre, Corps Locaux, *Act. Sci. Ind.*, **1296**(1962).

[26] J.-P.Serre, Sur la rationalité des représentations d'Artin, *Ann. of Math.*, **72**(1960), p.406—420.

[27] J.-M.Fontaine, Groupes de ramification et représentations d'Artin, *Ann. Sci. E. N. S.* **4**, (1971), P. 337—392.

由 Swan 表示所得到的不变量被应用于:

[28] M. Raynaud, Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes. Séminaire Bourbaki, exposé 286, 1964/65, W. A. Benjamin Publishers, New York, 1966.

[29] A. P. Ogg, Elliptic curves and wild ramification, *Amer. J. of Math.*, **89** (1967), p. 1—21.

[30] J.-P. Serre, Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures), Séminaire Delange-Pisot-poitou, Paris, 1969/70, exposé 19.

记号索引

数码表示节数，即“1.1”表示第 1.1 节。

汉英名词索引

二画—三画

四　画

五　画

六　画

七　画

八 画

九 画

十 画

十 二 画

十四画—十六画

其 它

英汉名词索引