

Una pregunta incómoda Se desea saber que proporción de individuos de una población tienen una cierta característica pero para ello hay que hacer una pregunta incómoda. Por ejemplo, ¿Qué proporción de estudiantes de la universidad se copió alguna vez en un examen? Llamemos θ a esa proporción desconocida que se desea estimar.

1. **Método clásico:** elegir un conjunto de n estudiantes al azar y preguntales si se han copiado alguna vez en un examen.
 - (a) Hallar el EMV de θ asumiendo que todos los encuestados dicen la verdad y estudiar sus propiedades.
 - (b) Sea π la probabilidad (desconocida) de que un estudiante que se copió en algún examen diga que no en la encuesta y supongamos que la probabilidad de que un estudiante que no se copió en ningún examen diga que si en la encuesta es cero. Hallar el sesgo y el ECM del estimador de θ hallado en el ítem anterior. ¿Es consistente?
2. **Método de respuesta aleatorizada:** a cada entrevistado se le entrega un dado y una moneda y se le dan las siguientes instrucciones:
 - Tirá el dado
 - Si sale 1 o 2 tirá la moneda. Si sale cara contestá sí y si sale ceca contestá no.
 - Si sale 3, 4, 5 o 6 contestá la verdad.

Supongamos que todos los encuestados siguen fielmente estas instrucciones.

- (a) Hallar el estimador de momentos de θ . Calcular su sesgo y su ECM. ¿Es consistente?
- (b) Observar que el estimador de momentos puede dar fuera del $[0, 1]$ y corregirlo para que esto no ocurra.
- (c) Hallar el EMV de θ . Verificar que coincide con un estimador de momentos “corregido”. Probar que es consistente pero no insesgado. ¿Cuánto vale el sesgo si $n = 2$ y $\theta = 1/4$?
- (d) Graficar el sesgo del EMV en función del tamaño muestral n suponiendo que $\theta = 1/4$.
- (e) Graficar el ECM del EMV en función del tamaño muestral n suponiendo que $\theta = 1/4$. Superponer un gráfico del ECM del EMV calculado utilizando el método clásico suponiendo que la proporción de estudiantes que se copió alguna vez en un exámen y miente cuando se le hace la pregunta directa es $\pi = 1/3$.
- (f) Supongamos que se realiza una campaña de concientización para reducir la copia. Se quiere saber si luego de ella, la proporción que se copia es distinta de $1/4$. Después de la encuesta se entrevista a un

grupo de 100 estudiantes elegidos al azar de la población de interés mediante el método de respuesta aleatorizada y se obtiene que un 20% contesta que si. Hallar el test del cociente de máxima verosimilitud. Concluir. Deducir un intervalo de confianza para θ . Si conocen otros métodos para hallar intervalos de confianza, aplíquenlos y comparen los resultados.

Para los siguientes items utilice como semilla el mínimo entre los numeros de legajo de todos los integrantes del grupo.

- (g) Simular ambos experimentos en R suponiendo $\theta = 1/4$ y $p = 1/3$, es decir, generar las respuestas de los encuestados por el método clásico y por el método de respuesta aleatorizada, para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$ y calcular el ECM empírico. Presentar los resultados en una tabla y describirlos, verificando que son compatibles con los resultados teóricos hallados en los ítems anteriores.
- (h) Hallar un intervalo de confianza para θ por el método bootstrap y compararlo con los intervalos hallados en el ítem (e).
- (i) Hallar el nivel de significación empírico mediante simulaciones y graficarlo en función de n .
- (j) Hallar la función de potencia mediante simulaciones y graficarla para $n = 100$.