Esercizio $C_B(A\cap C) = C_B(A) \cup C_B(C)$ $\quad A, C \subseteq B$

Dobbiamo dimostrare due cose.

1) $C_B(A\cap C) \subseteq C_B(A) \cup C_B(C)$

2) $C_B(A) \cup C_B(C) \subseteq C_B(A\cap C)$

Dimostriamo 1) $C_B(A\cap C) = \{x \in B \mid x \notin A\cap C\}$

$x \in C_B(A\cap C) \Longrightarrow$

$x \in B$ e $x \notin A \cap C$

$\Longrightarrow x \in B$

$x \notin A$ oppure $x \notin C$

$\Longrightarrow x \in C_B(A)$ oppure $x \in C_B(C)$

$\Longrightarrow x \in C_B(A) \cup C_B(C)$

$x \in C_B(A \cap C) \Longrightarrow$

$x \in B$ e $x \notin A \cap C$

$\Longrightarrow x \in B$

$x \notin A$ oppure $x \notin C$

$\Longrightarrow x \in C_B(A)$ oppure

$x \in C_B(C)$

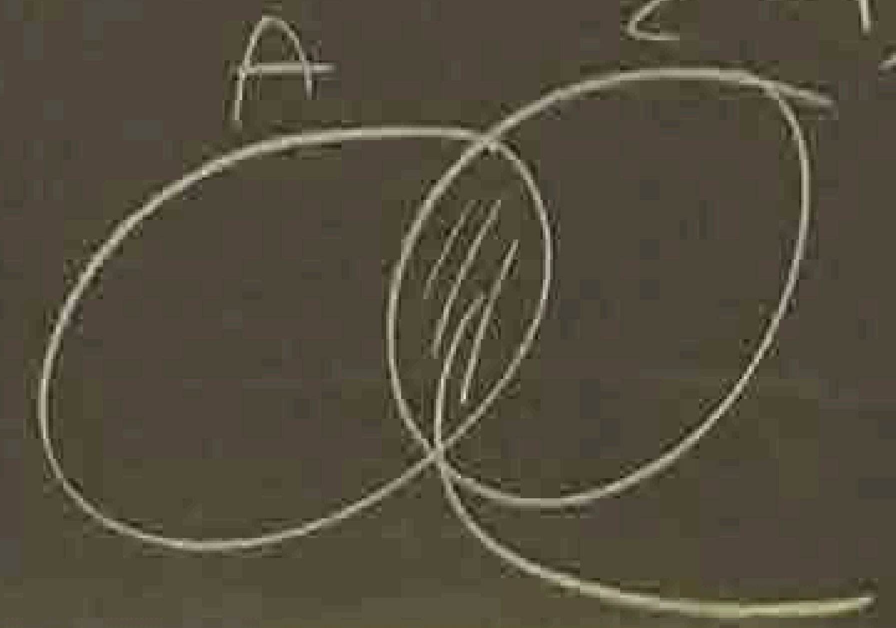
$\Longrightarrow x \in C_B(A) \cup C_B(C)$

2) Dimostriamo che $C_B(A) \cup C_B(C) \subseteq C_B(A \cap C)$

$x \in C_B(A) \cup C_B(C) \Longrightarrow x \in C_B(A)$ oppure $x \in C_B(C)$

$\Longrightarrow x \in B$ e $x \notin A$ oppure $x \in B$ e $x \notin C$

$\Longrightarrow x \in B$ e $x \notin A \cap C \Longrightarrow x \in C_B(A \cap C)$



$x \in A$ e $x \in C$

FUNZIONI

Def (FUNZIONE) Siano A e B due insiemi non vuoti. Una funzione (o applicazione) f dall'insieme A all'insieme B è una legge che ad ogni elemento dell'insieme A associa un unico elemento dell'insieme B

si indica

$$f : A \longrightarrow B$$

legge

insieme di partenza

insieme di arrivo

$$\forall a \in A \; \exists! \, b \in B \; f(a) = b$$

$f(a) = b$ "f ma[illegible]

$a \xmapsto{f} b$

b è [illegible]

si indica

$f : A \longrightarrow B$

gg

insieme di partenza

insieme di arrivo

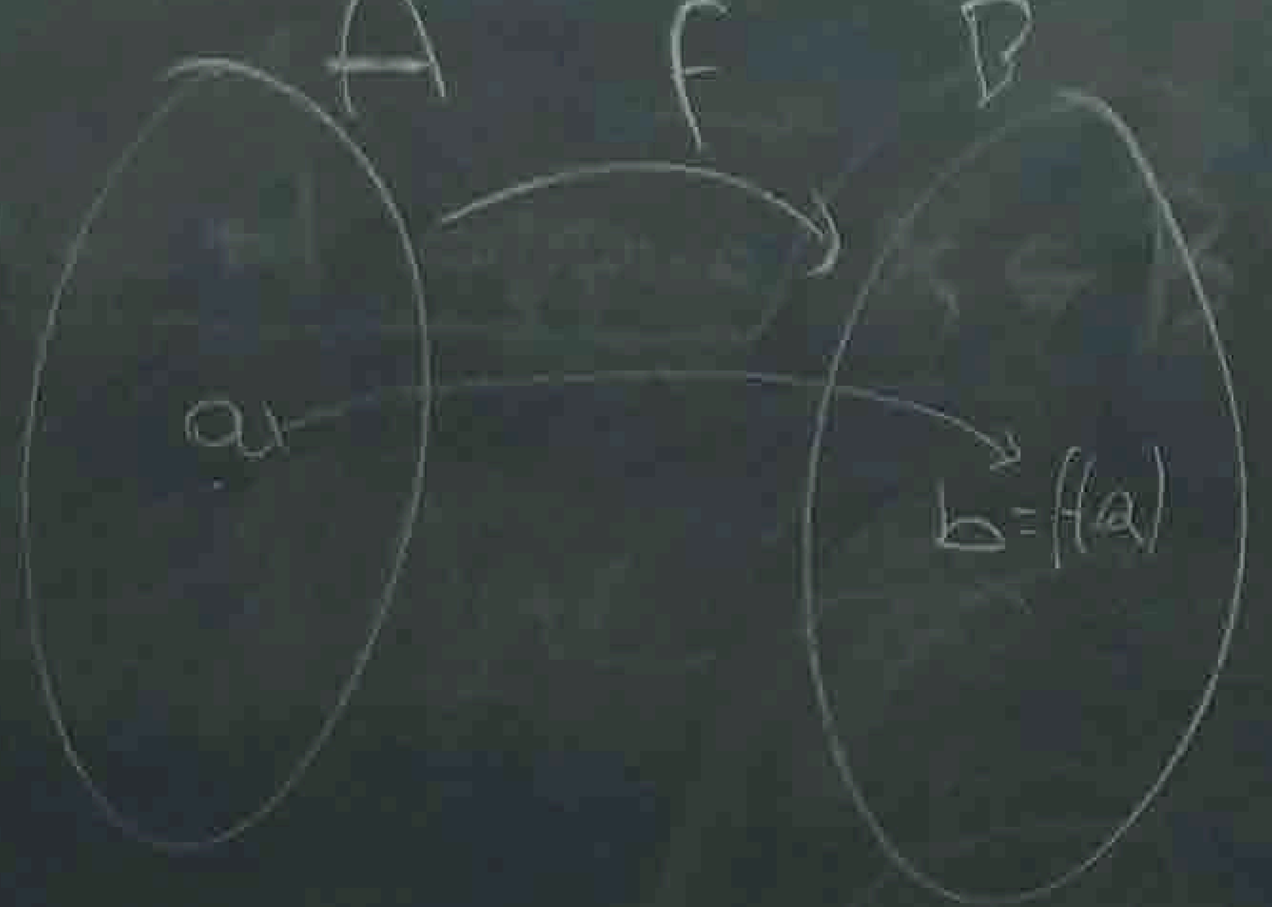
$\forall a \in A \ \exists!\, b \in B \ f(a)=b$

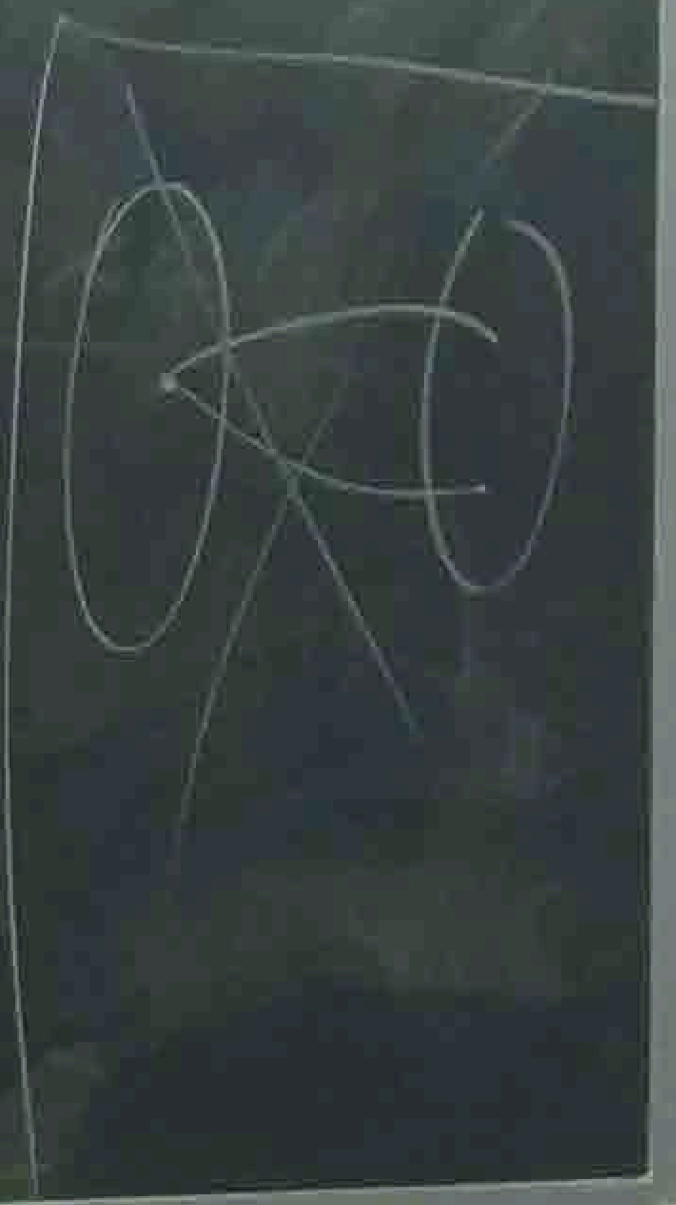
$f(a) = b$ "f manda a in b"

$a \overset{f}{\longmapsto} b$ b è immagine di a tramite f

$a \in A$

$b \in B$





Esempi

Sia $A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 4\}$

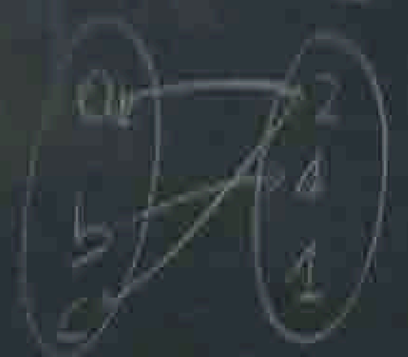
$f: A \to B$

$a \longmapsto$

$b \longmapsto 4$

$c \longmapsto 2$

SI



FUNZIONI

Esempio 2) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad f(m) = m+3$

SI

$f(0) = 0+3 = 3$

$f(11) = 11+3 = 14$

3) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$f(a) = a+3$

NO FUNZIONE

$-5 \in \mathbb{Z}$

$f(-5) = -5+3 = -2 \notin \mathbb{N}$

$\forall a \in A \ \exists! \, b \in B \ f(a) = b$

4) $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

3) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$

$f(a) = a + 3$

NO FUNZIONE

$-5 \in \mathbb{Z}$

$f(-5) = -5 + 3 = -2 \notin \mathbb{N}$

$\forall a \in A \ \exists! \, b \in B \ f(a) = b$

5) $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $\forall x \in \mathbb{Q}$ $g(x) = \dfrac{2}{x-4}$

$x = 4$ $\quad \dfrac{2}{4-4}$ $\cancel{\dfrac{2}{0}}$?

NO FUNZIONE

---

4) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$ $f(a) = a^2$

è una funzione

$f(-5) = (-5)^2 = 25 \in \mathbb{N}$

$f(5) = 5^2 = 25 \in \mathbb{N}$

5bis)

$g: \mathbb{Q} \setminus \{4\} \to \mathbb{Q}$

$\forall x \in \mathbb{Q}$

$g(x) = \dfrac{2}{x-4}$

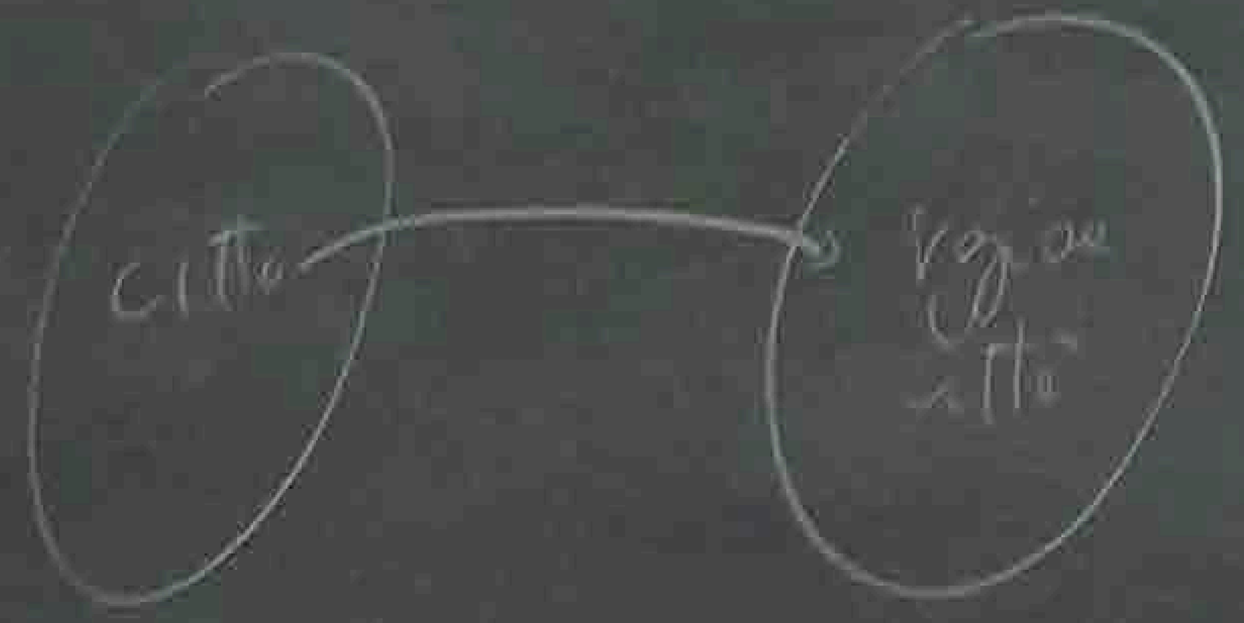
è una funzione

FUNZIONI

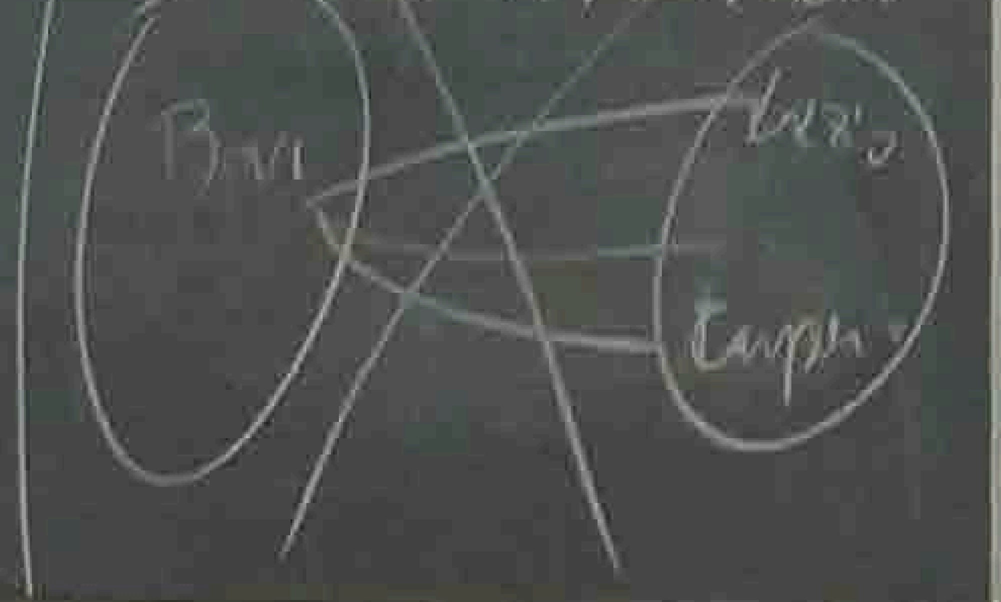
Esempio 6) $A = \{$città italiane$\}$ $B = \{$regioni$\}$

$f: A \to B$

$\forall$ città $\in A$ $f($città$)$ è la regione a cui appartiene



NON APPARTIEN



Def (UGUALI)

Due funzioni sono uguali e si dice che coincidono quando hanno stesso insieme di partenza, stesso insieme di arrivo e stessa legge

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

4) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\forall$

è una funzione

Def (UGUALI)

Due funzioni sono uguali o si dice che coincidono quando hanno stesso insieme di partenza, stesso insieme di arrivo e stessa legge

Esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(t) = 6t+3$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = (2x+1)3$

$6x+3$

sono uguali

Def (IMMAGINE)

L'immagine di una funzione $f : A \to B$ è il sottoinsieme di B costituito da tutti gli elementi di B che sono immagine di qualche elemento di A

FUNZIONI

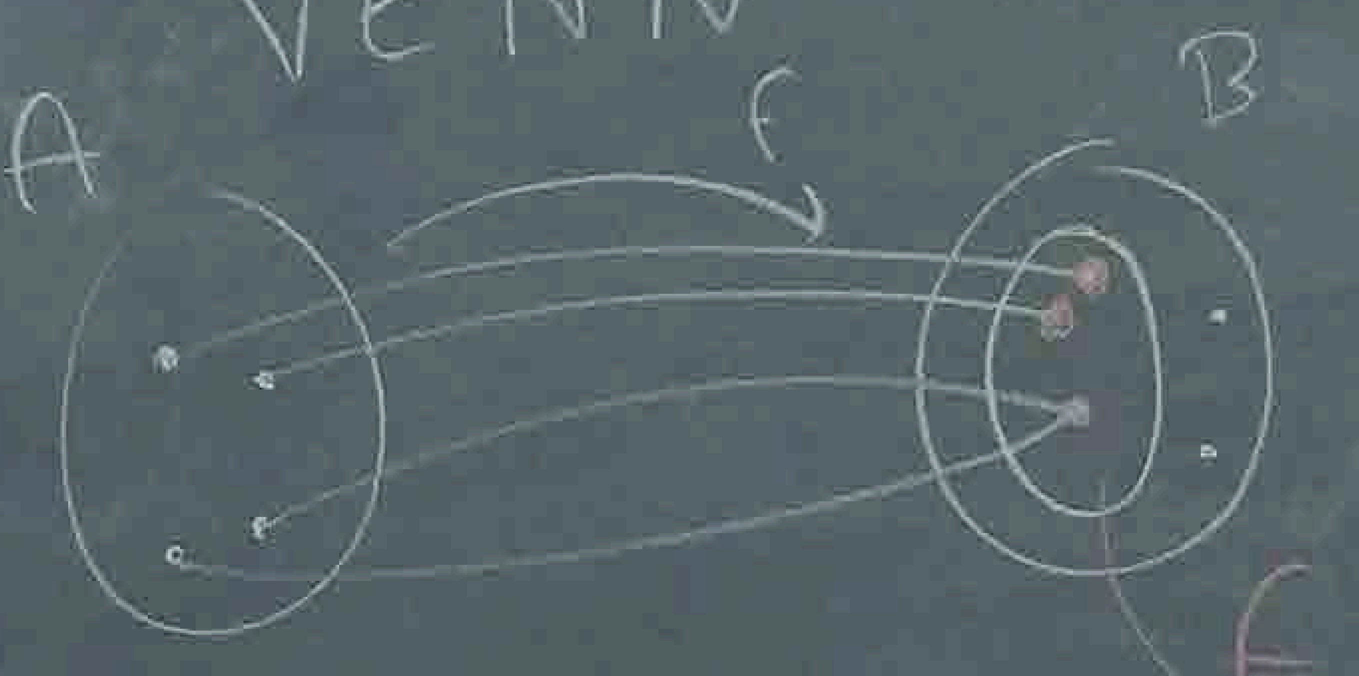
L'immagine di f si indica con $f(A)$ oppure $\operatorname{Im} f$

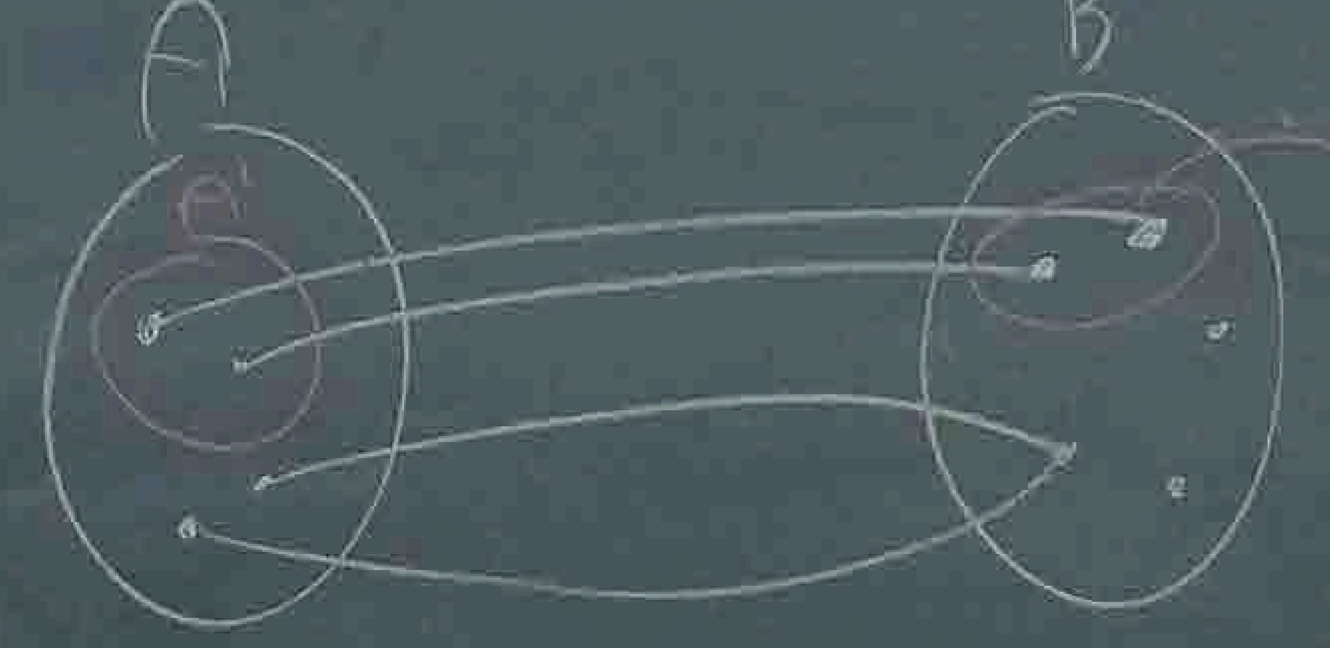
$f(A) \subseteq B$ $\qquad f(A) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \text{ con } f(a) = b \}$

In generale se $A' \subseteq A$ si definisce l'immagine di A'

$f(A') \subseteq B$ $\qquad f(A') = \{ b \in B \mid \exists a \in A' \text{ con } f(a) = b \}$

VENN



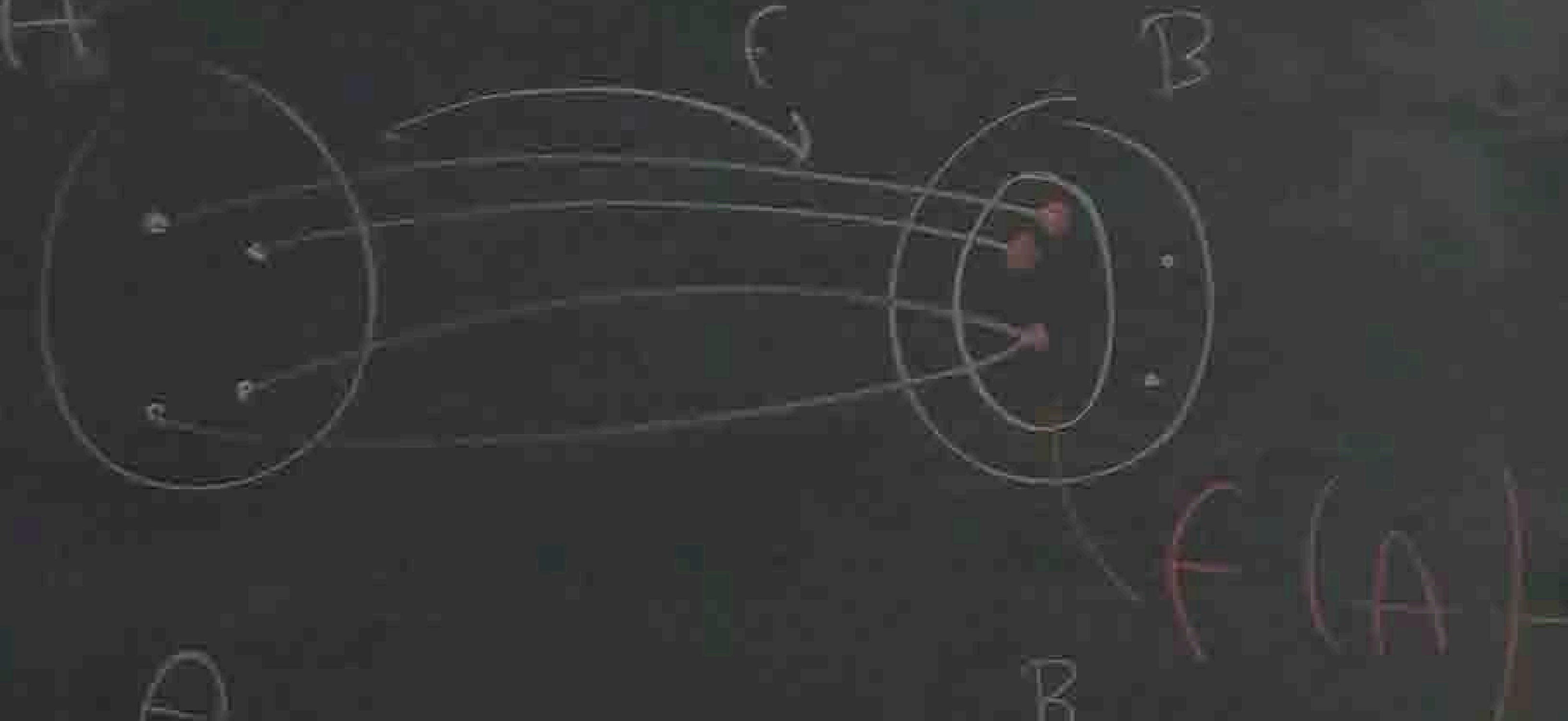


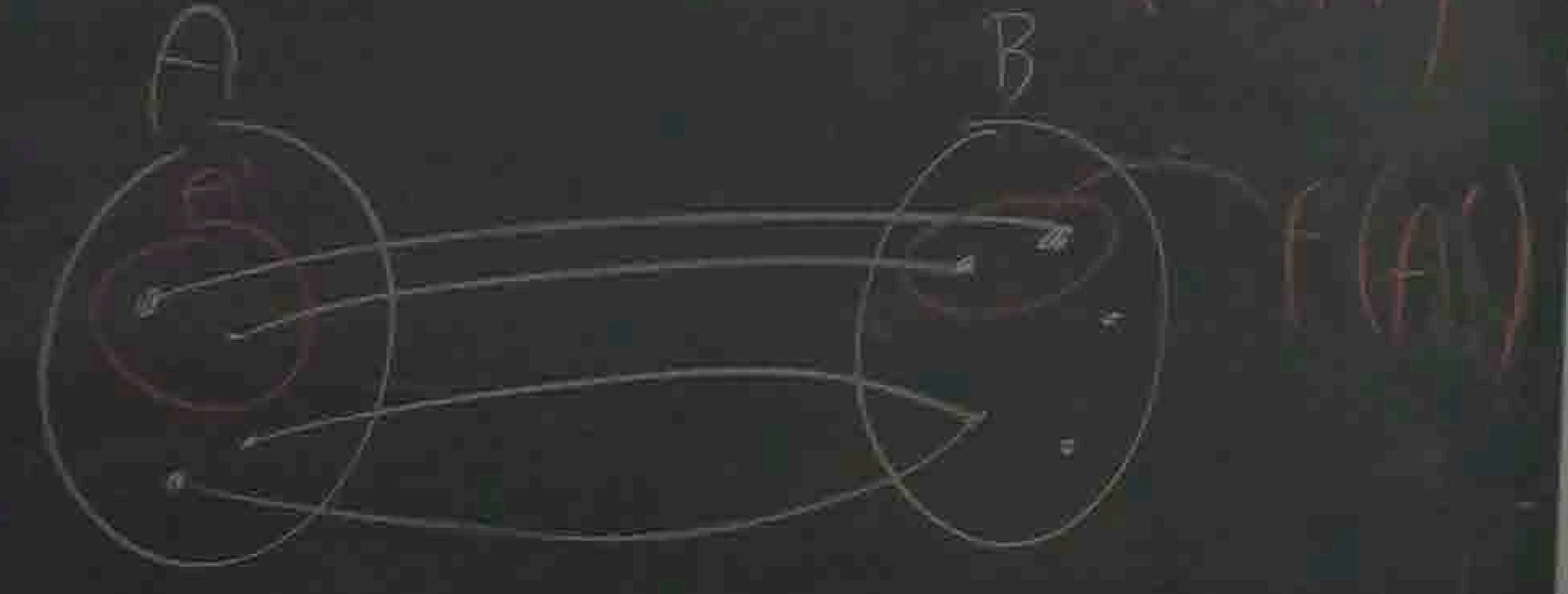
Esempio $\quad f: \mathbb{R} \to$

$g: \mathbb{R} \to$

Sono

VENN





Esempio $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$ $g(a) = 4a$

Determinare $g(\mathbb{Z})$ e $g(A')$ con

$A' = \{0, 1, -1, 3, -4\}$

$g(\mathbb{Z}) = \{ b \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in \mathbb{Z} \text{ con } g(a) = b \}$

$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in \mathbb{Z} \text{ con } 4a = b \} = \{\text{multipli di } 4\}$

$3 \in g(\mathbb{Z})$? NO

$\exists a \in \mathbb{Z}$ t.c.

$4a = 3$?

$a = \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$

$3 \notin g(\mathbb{Z})$

$4 \in g(\mathbb{Z})$? SI $\exists\, 1 \in \mathbb{Z}$ con $g(1) = 4$

$$1 \xmapsto{g} 4$$

$$g(A') = \{ b \in \mathbb{Z} \mid \exists\, a \in A' \text{ con } g(a) = b \}$$

$$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid \exists\, a \in \{0, 1, -1, -3, -4\} \text{ con } 4a = b \}$$

$$= \{ 0, 4, -4, -12, -16 \}$$

$\{g(0), g(1), g(-1), g(-3)$ $\quad g(-4) = 4(-4) = -16$

NOTAZIONE

$f\ A \to B$

$$f(A) = \{ f(a) \in B \mid a \in A \}$$

Esempio $f\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n + 3$

$f(\mathbb{N}) = ?$

NOTAZIONE

$f: A \to B$

$f(A) = \{ f(a) \in B \mid a \in A \}$

Esempio $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n+3$

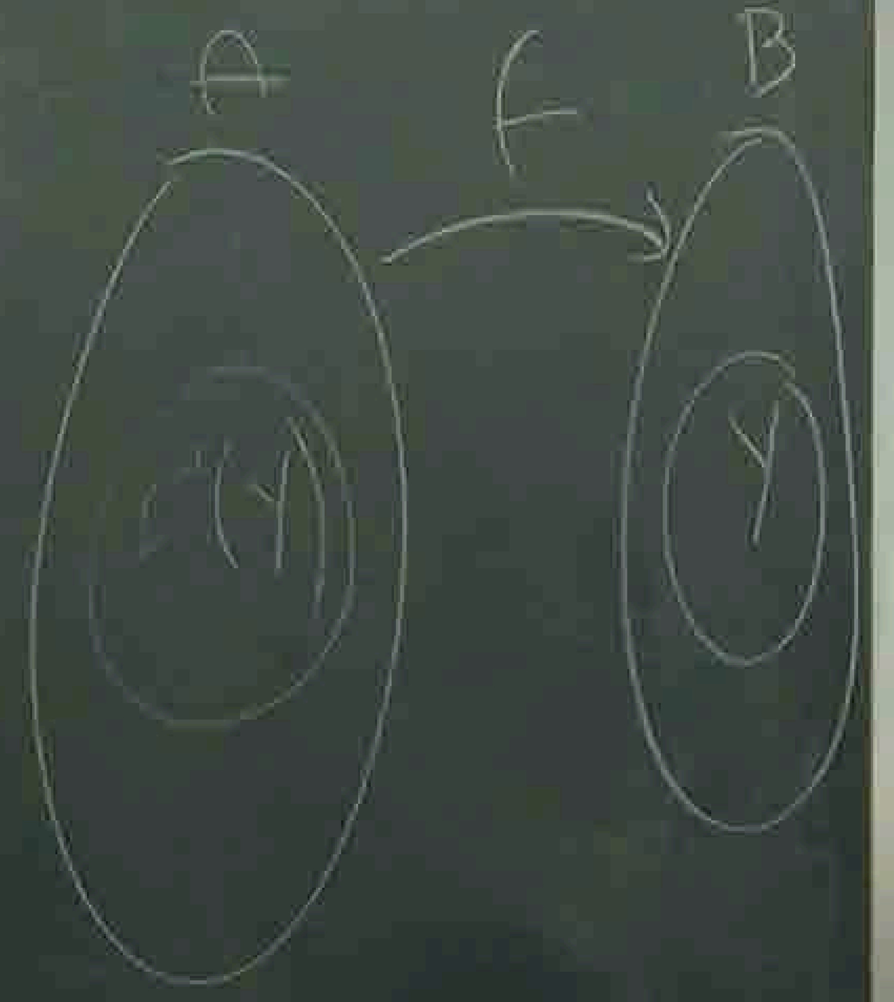
$f(\mathbb{N}) = ?$

$f(\mathbb{N}) = \{ b \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N} \text{ con } f(a) = b \}$

$= \{ b \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N} \text{ con } a+3 = b \} \subseteq \mathbb{N}$

$= \{ b \in \mathbb{N} \mid b \geq 3 \} \subsetneq \mathbb{N}$

$0, 1, 2 \notin f(\mathbb{N})$



<u>Def</u> (CONTROIMMAGINE)
Sia $f: A \to B$ una funzione e $Y \subseteq B$. La controimmagine di Y, si indica con $f^{-1}(Y)$ ed è il sottoinsieme di A i cui elementi sono mandati da f in Y

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad g(a) = 4a$

$Y' = \{4\} \quad C = \{2, -4, 0\}$

$Y'), \; g^{-1}(C)$

$f: A \to B \quad Y \subseteq B$

$f^{-1}(Y) \subseteq A \quad f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$

$f(\mathbb{N}) = \{b \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N} \text{ com } f(a) = b\}$

$= \{b \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N} \text{ com } a + 3$

$= \{b \in \mathbb{N} \mid b \geq 3\} \subsetneq \mathbb{N}$

$0, 1, 2 \notin f(\mathbb{N})$

Ejemplo $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$ $g(a) = 4a$

$Y = \{5, 7\}$ $Y' = \{4\}$ $C = \{2, -4, 0\}$

$g^{-1}(Y)$, $g^{-1}(Y')$, $g^{-1}(C)$

$f: A \to B$ $Y \subseteq B$

$f^{-1}(Y) \subseteq A$ $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$

$g^{-1}(Y) = \{a \in \mathbb{Z} \mid g(a) \in Y\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a \in Y\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a \in \{5, 7\}\}$

$= \{b \in \mathbb{N},$

$= \{b \in \mathbb{N} \mid$

$0, 1, 2 \notin f$

$f: A \to B \quad Y \subseteq B$

$f^{-1}(Y) \subseteq A \quad f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$

$g^{-1}(Y) = \{a \in \mathbb{Z} \mid g(a) \in Y\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a \in Y\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a \in \{5, 7\}\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a = 5 \text{ o } 4a = 7\} = \emptyset$

$a = \frac{5}{4} \notin \mathbb{Z} \qquad a = \frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}$

$g^{-1}(Y') = \{a \in \mathbb{Z} \mid g(a) \in Y'\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a \in \{4\}\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a = 4\} = \{1\} \qquad g(1) = 4$

$1 \mapsto 4$

$g^{-1}(C) = \{a \in \mathbb{Z} \mid g(a) \in C\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a \in C\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a \in \{0, 2, -4\}\}$

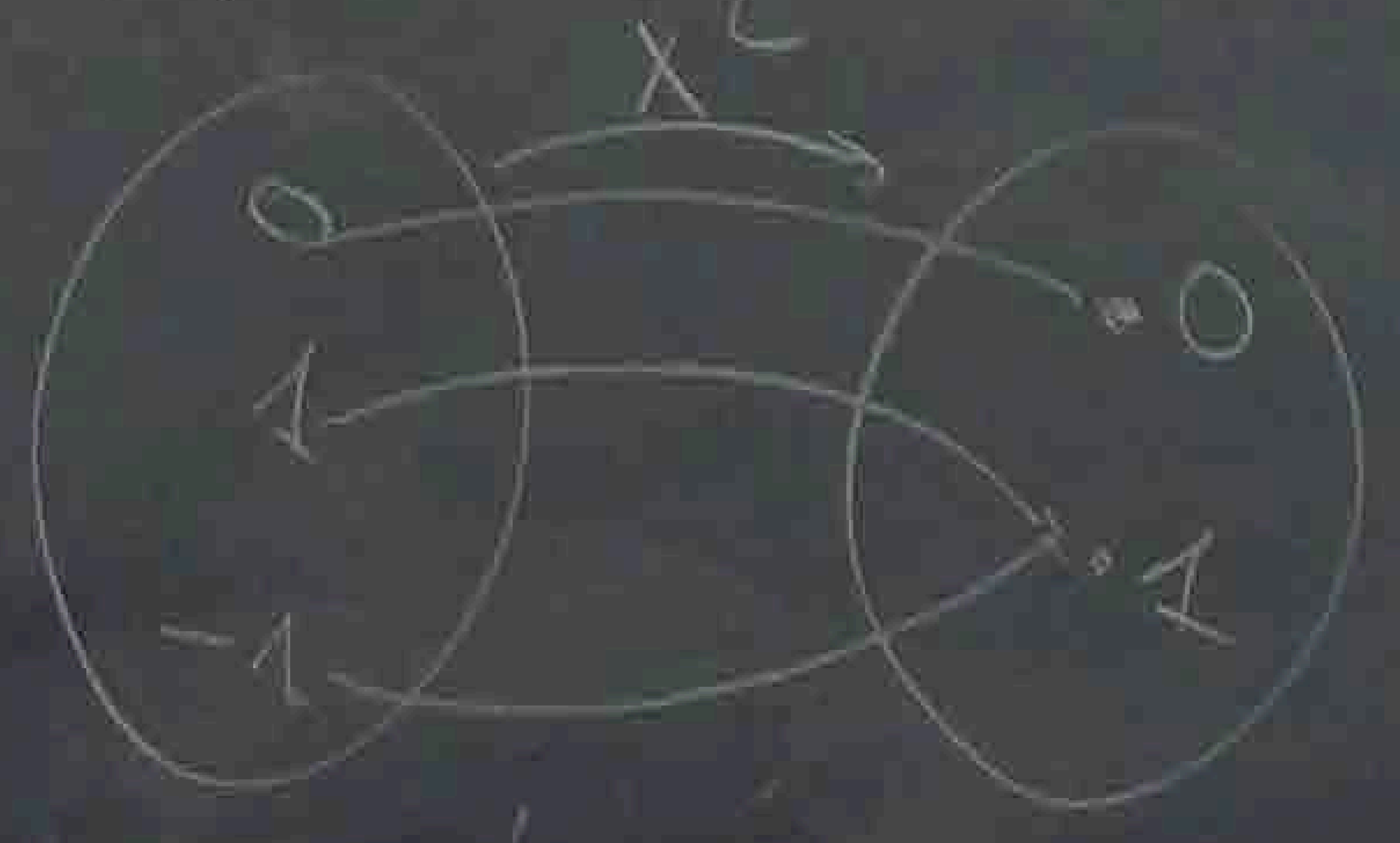
$= \{a \in \mathbb{Z} \mid 4a = 0 \text{ o } 4a = 2 \text{ o } 4a = -4\}$

$= \{-1, 0\}$

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

$Y = \{0, 1\}$

$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{0, 1\}\} = \{0, 1, -1\}$



$f(x) = x^2$

$x^2 = 0$

$x^2 = 1$

NOTazione

$f: A \to B$

$a \in A$ $\quad f(a) = b$

$\{a\} \subseteq A$ $\quad f(\{a\}) = \{b\}$

$f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$ $\quad f^{-1}(b) = a$

$f(a) = b$

NOTazione

$f: A \to B$

$a \in A \qquad f(a) = b$

$\{a\} \subseteq A \qquad f(\{a\}) = \{b\}$

$f^{-1}(\{b\}) = \{a\} \qquad f^{-1}(b) = a$

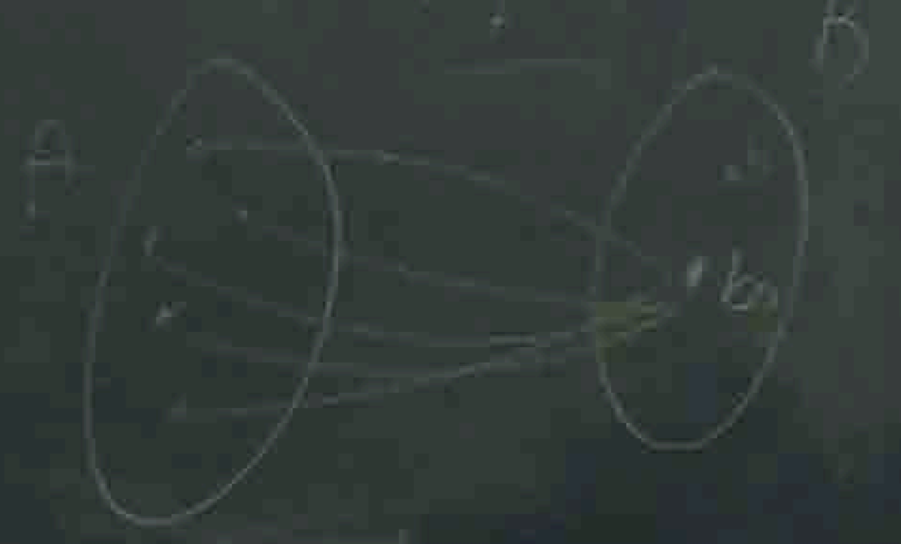
$f(a) = b$

Esempio (FUNZIONE COSTANTE) A, B insiemi $\neq \emptyset$

fissiamo $b_0 \in B$

la funzione costante di valore b_0 è

$f: A \to B \quad \forall a \in A \ f(a) = b_0$



$f(A) = \{b_0\}$

$f^{-1}(b_0) = A$

$b \neq b_0$

$f^{-1}(b) = \emptyset$

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4$

$f(0) = 4 \quad f(100) = 4 \quad f(-\sqrt{35}) = 4$

$f(\mathbb{R}) = \{ b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R} \text{ con } f(a) = b \}$
$= \{ b \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ con } 4 = b \} = \{4\}$

$f^{-1}(4) = \mathbb{R} \quad f^{-1}(0) = \emptyset$

Notazione

$f: A \to B$

$a \in A \qquad f(a) = b$

$\{a\} \subseteq A \quad f(\{a\}) = \{b\}$

$f^{-1}(\{b\}) = \{a\} \qquad f^{-1}(b) = a$

$f(a) = b$

NOTazione

$f: A \to B$

$a \in A \quad f(a) = b$

$\{a\} \subseteq A \quad f(\{a\}) = \{b\}$

$f^{-1}(\{b\}) = \{a\} \quad f^{-1}(b) = a$

$f(a) = b$

Def (FUNZIONE IDENTITÀ)

Sia A un insieme la funzione IDENTITÀ / IDENTICA è la funzione che manda ogni elemento in se stesso

si indica con id_A o Id_A

$$Id_A: A \to A \quad \forall a \in A \ Id_A(a) = a$$

Esempio

$Id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = x$

$f(1) = 1 \quad f(3) = 3$

$f(-100) = -100$

Def (GRAFICO) Il grafico di una funzione $f: A \to B$ è il sottoinsieme di $A \times B$ i cui elementi sono $(a, f(a))$ al variare di a in A

$$\Gamma(f) = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$$

PROPRIETÀ

$$f: A \to B$$

$X, X' \subseteq A$ e $Y, Y' \subseteq B$

1) $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$

2) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$

PROPRIETÀ

$f \; A \to B$

$X, X' \subseteq A$ e $Y, Y' \subseteq B$

1) $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$

2) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$

3) $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$ A'

$f(X \cap X') = \{b \in B \mid \exists\, a \in X \cap X' \text{ con } f(a) = b\}$

Esercizio dimostriamo 1) $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$

Sia $b \in f(X \cap X') \Rightarrow b$ è immagine di un elemento in $X \cap X'$

cioè $b = f(a)$ con $a \in X \cap X' \Rightarrow b = f(a)$ con

è

$a \in X$ e $a \in X'$

$\Rightarrow b \in f(X)$ e $b \in f(X')$

$\Rightarrow b \in f(X) \cap f(X')$

$f(X) = \{b \in B \mid \exists\, a \in X \text{ con } f(a) = b\}$

$= \{f(a) \mid a \in X\}$

NON é verdade $f(X) \cap f(X') \subseteq f(X \cap X')$

Exemplo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(a) = a^2$ $\forall a \in \mathbb{R}$

$X = \{-2, 0\}$ e $X' = \{0, 2\}$

$f(X) = \{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in X \text{ com } f(a) = b\}$

$= \{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \{-2, 0\} \text{ com } a^2 = b\} = \{4, 0\}$

$\{0, 2\}$

$f(X') = \{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in X' \text{ com } a^2 = b\}$

$= \{0, 4\}$

$f(X) \cap f(X') = \{0, 4\} \cap \{0, 4\}$

$= \{0, 4\}$

$$f(X') = \{b \in \mathbb{R} \mid \exists\, a \in \underbrace{X'}_{=\{0,2\}} \text{ con } a^2 = b\}$$

$$= \{0, 4\}$$

$$f(X) \cap f(X') = \{0,4\} \cap \{0,4\}$$

$$= \{0, 4\}$$

$$X \cap X' = \{-2, 0\} \cap \{0, 2\} = \{0\}$$

$$f(X \cap X') = f(0) = \{0\}$$

$$f(X) \cap f(X') = \{0, 4\}$$

$$\nsubseteq f(X \cap X') = \{0\}$$

<u>Esercizio</u> Sia P, Q, R proposizioni

Scrivere la T di V

di

$P \wedge (Q \vee R)$, $P \vee (Q \vee R)$

$P \vee (Q \wedge R)$, $P \wedge (Q \wedge R)$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \vee (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F

Esercizio

Stabilire se V o F e Neg

P. $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall y \in \mathbb{R}$

$x + y = 0 \quad y = -x$

$\bar{P}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $x + y \neq 0$

Falso. perchè fi

$\forall x \in \mathbb{R}$ basta

Vera

Esercizio

Stabilire se V o F e Neg

P: $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall y \in \mathbb{R}$

$x + y = 0$ $y = -x$

$\overline{P}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $x + y \neq 0$

Falso. perché fissato $x \in \mathbb{R}$ Non è vero che $\forall y \in \mathbb{R}$ è uguale a $-x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ basta scegliere $y \neq -x \in \mathbb{R}$

Vero $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ $y = -x + 2 \in \mathbb{R}$ t.c. $x + y = 2 \neq 0$

Vero

P: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ tale che $\forall z \in \mathbb{R}$ $x = y^4 + z^2$

$\overline{P}$: $\exists x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists z \in \mathbb{R}$ $x \neq y^4 + z^2$

FALSA

P $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall z \in \mathbb{R}$ $x = y^4 + z^2$

$-1 = y^4 + z^2 \geq 0$

Falsa $x = -1$

$\bar{P}$ $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists z \in \mathbb{R}$ $x \neq y^4 + z^2$

Vero. $\exists x = -1 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$

$-1 \neq y^4 + 0$

$y = \sqrt[4]{-z^2 + x}$

$\notin \mathbb{R}$

per ogni scelta

Esercizio

Stabilire se V o F

P $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c.

$x + y =$

$\bar{P}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$