Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 10

Esercizio 10.2 (pag 135)

Dire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

1. $15^{355} \equiv 1(mod\ 8)$;

2. $11^{48} \equiv 1(mod\ 104)$;

3. $(-5)^{433} \equiv 7(mod\ 12)$.

Soluzione

1. Poichè $15 \equiv -1(mod\ 8)$, segue che $15^{355} \equiv (-1)^{355} \equiv -1(mod\ 8)$ e quindi l'affermazione è falsa.

2. Poichè $\phi(104) = \phi(2^3)\phi(13) = 4 \cdot 12 = 48$ e $M.C.D(11, 104) = 1$, per il Teorema di Eulero-Fermat (10.3, pag 135), segue che la proprietà è vera.

3. Poichè $(-5)^2 = 25 \equiv 1(mod\ 12)$ si ha che

$$(-5)^{433} \equiv (-5)^{432} \cdot (-5) \equiv 1 \cdot (-5) \equiv 7(mod\ 12),$$

e quindi l'affermazione è vera.

Esercizio 10.3 (pag. 135)

Sia $(Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ l'anello delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Gli elementi unitari sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0.$$

Soluzione

Gli elementi unitari di un anello sono gli elementi invertibili: poichè nel caso delle matrici quadrate, in particolare per le matrici di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è $\neq 0$, segue la tesi.

Esercizio 10.4 (pag. 135)

Determinare l'insieme D dei divisori dello zero e il gruppo U degli elementi unitari dei seguenti anelli:

1. $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$

2. $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$

3. $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$.

Soluzione

Premettiamo che in $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ i divisori dello zero (cfr. Def. 10.3, pag. 132) sono le classi $[a]_n,\ [b]_n$ che soddisfano le condizioni:

i) $[a]_n \neq [0]_n,\ [b]_n \neq [0]_n$
ii) $[a]_n \cdot [b]_n = [0]_n$,

mentre gli elementi unitari sono le classi $[c]_n \neq [0]_n$ per le quali esiste un inverso, cioè una classe $[x]_n$ tale che $[c]_n \cdot [x]_n = [1]_n$.

1.i) $[a]_{12} \cdot [b]_{12} = [ab]_{12} = [0]_{12}$ se e e solo se $ab = 12t$, con $a \neq 12h,\ b \neq 12k$. Otteniamo

$$D = \{[2]_{12}, [3]_{12},\ [4]_{12},\ [6]_{12},\ [8]_{12},\ [9]_{12},\ [10]_{12}\}.$$

1.ii) $[c]_{12} \cdot [x]_{12} = [1]_{12} \Leftrightarrow cx = 1 + 12t \Leftrightarrow cx - 12t = 1 \Leftrightarrow MCD(c, 12) = 1:$ e otteniamo

$$U = \{[1]_{12},\ [5]_{12},\ [7]_{12},\ [11]_{12}, \}.$$

2. Con calcoli analoghi si ha che, per $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$:

$$D = \{[3]_9,\ [6]_9\}$$

$$U = \{[1]_9,\ [2]_9,\ [4]_9,\ [5]_9,\ [7]_9,\ [8]_9\}.$$

3. Per $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ si ottiene che $D = \emptyset$, mentre

$$U = \{[1]_{11},\ [2]_{11},\ [3]_{11},\ [4]_{11},\ [5]_{11},\ [6]_{11},\ [7]_{11},\ [8]_{11},\ [9]_{11},\ [10]_{11}\}.$$

Osserviamo quindi che $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ risulta essere un campo.

Esercizio 10.5 (pag.143)

[1] Determinare $MCD(\ a(x), b(x))$, ove

$a(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1$ e $b(x) = 3x^3 - 5$ (in $\mathbb{R}[x]$).

Soluzione

Dall'esempio 10.8 (pag. 139) si ha che $a(x) = b(x)(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}) + x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{13}{3}$.

Procediamo con le divisioni successive, determinando $q_2(x)$ ed $r_2(x)$ tali che :

$$b(x) = (x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{13}{3})q_2(x) + r_2(x).$$

$$
\begin{array}{cccc|cc}
3x^3 & & & -5 & x^2 & +\frac{8}{3}x - \frac{13}{3}. \\ \cline{5-6}
-3x^3 & -8x^2 & +13x & & 3x & -8 \\ \cline{1-4}
0 & -8x^2 & +13x & -5 & & \\
 & 8x^2 & +64x/3 & -104/3 & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & 103x/3 & -119/3 & &
\end{array}
$$

Otteniamo $q_2(x) = 3x - 8$ e $r_2(x) = \dfrac{103}{3}x - \dfrac{119}{3}$, e quindi

$$3x^3 - 5 = (x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{13}{3})(3x - 8) + \frac{103}{3}x - \frac{119}{3}.$$

Effettuiamo ora la successiva divisione:
$x^2 + \dfrac{8}{3}x - \dfrac{13}{3} = (\dfrac{103}{3}x - \dfrac{119}{3})q_3(x) + r_3(x)$:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
x^2 & +\frac{8}{3}x & -\frac{13}{3} & \frac{103}{3}x & -\frac{119}{3} \\ \cline{4-5}
-x^2 & +\frac{119}{103}x & & \frac{3}{103}x & +\frac{1181}{10609} \\ \cline{1-3}
0 & \frac{1181}{309}x & -\frac{13}{3} & & \\
 & -\frac{1181}{309}x & +\frac{140\,539}{31\,827} & & \\ \cline{1-3}
 & 0 & \frac{874}{10\,609} & &
\end{array}
$$

Si ottiene quindi che l'ultimo resto non nullo è $\dfrac{874}{10\,609}$ (un elemento di $\mathbb{R}$), quindi i due polinomi sono primi fra loro.

[2] Determinare un $MCD(c(x), d(x))$ ove $c(x) = x^3+x^2+3x+1$ e $d(x) = x^2-2$ (in $\mathbb{Z}_5[x]$).

Soluzione

Nell'esempio 10.9 abbiamo trovato quoziente e resto della divisione di $c(x)$ per $d(x)$, cioè

$$x^3 + x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 2)(x + 1) + 3.$$

Possiamo quindi concludere che l'ultimo resto non nullo è 3 e quindi i due polinomi sono coprimi essendo $MCD(c(x), d(x)) = 3$.

[3] Determinare un $MCD(f(x), g(x))$ ove $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ e $g(x) = 3x^3 - 2$ (in $\mathbb{Z}_7[x]$).

Soluzione

Ancora, utilizzando i calcoli fatti nell'esempio 10.10 (pag. 140), si ha che

$$x^4 + x^2 + 1 = (3x^3 - 2)(5x) + x^2 + 3x + 1.$$

Proseguiamo nelle divisioni:

$$
\begin{array}{llll|lll}
3x^3 & & & -2 & x^2 & +3x & +1 \\ \cline{5-7}
-3x^3 & -9x^2 & -3x & & 3x & -9 & \\ \cline{1-4}
0 & -9x^2 & -3x & -2 & & & \\
 & 9x^2 & +27x & +9 & & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & +24x & +7 & & &
\end{array}
$$

Osservando che $24 \equiv 3(mod\ 7)$ e $9 \equiv 2(mod\ 7)$, otteniamo:

$$3x^3 - 2 = (x^2 + 3x + 1)(3x - 9) + 24x + 7 = (x^2 + 3x + 1)(3x - 2) + 3x.$$

Poichè il resto è un polinomio di primo grado, dobbiamo effettuare ancora una divisione e precisamente dobbiamo dividere $(x^2 + 3x + 1)$ per $3x$; otteniamo:

$$
\begin{array}{lll|ll}
x^2 & +3x & +1 & 3x & \\ \cline{4-5}
-15x^2 & & & 5x & +1 \\ \cline{1-3}
0 & 3x & +1 & & \\
 & -3x & & & \\ \cline{1-3}
 & 0 & +1 & &
\end{array}
$$

e quindi $\qquad x^2 + 3x + 1 = 3x(5x + 1) + 1.$

Poichè l'ultimo resto non nullo è un polinomio di grado zero, i polinomi dati sono primi fra loro.

Esercizio 10.6 (pag.146)

1. Siano $a(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ e $b(x) = x^3 - 4$ due polinomi di $\mathbb{Z}_7$.
Determinare il loro MCD monico ed esprimerlo come combinazione lineare di $a(x)$ e $b(x)$.

Soluzione

Operiamo le divisioni, tenendo conto delle congruenze modulo 7:

a.) da

$$
\begin{array}{llll|ll}
x^4 & +3x^2 & +2x & +1 & x^3 & -4 \\ \cline{5-6}
-x^4 & & +4x & & x & \\ \cline{1-4}
0 & +3x^2 & +6x & +1 & &
\end{array}
$$

otteniamo:

$x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^3 - 4)x + 3x^2 + 6x + 1.$

b.) da

$$\begin{array}{llll|lll}
x^3 & & & -4 & 3x^2 & +6x & +1 \\ \cline{5-7}
-15x^3 & -30x^2 & -5x & & 5x & +4 & \\ \cline{1-4}
0 & +5x^2 & -5x & -4 & & & \\
 & -12x^2 & -24x & -4 & & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & -x & -1 & & &
\end{array}$$

otteniamo:

$$x^3 - 4 = (3x^2 + 6x + 1)(5x + 4) - x - 1.$$

Infine:

c.)

$$\begin{array}{lll|ll}
3x^2 & +6x & +1 & -x & -1 \\ \cline{4-5}
\text{-}3x^2 & -3x & & -3x & -3 \\ \cline{1-3}
0 & +3x & +1 & & \\
 & -3x & -3 & & \\ \cline{1-3}
 & 0 & -2 & &
\end{array}$$

E quindi si ha:
$3x^2 + 6x + 1 = (-x - 1)(-3x - 3) - 2 = (x + 1)(3x + 3) - 2.$

Si conclude che i due polinomi sono coprimi (o primi tra loro o relativamente primi). Esprimiamo questo MCD come loro combinazione lineare:
Ricaviamo dal punto **c.)**:

$$-2 = 3x^2 + 6x + 1 - (3x + 3)(x + 1) \qquad (\star)$$

e dal punto **b.)**:

$$x + 1 = (3x^2 + 6x + 1)(5x - 3) - (x^3 - 4) = (3x^2 + 6x + 1)(5x - 3) - b(x);$$

sostituendo nella $(\star)$ si ha:

$$-2 = 3x^2 + 6x + 1 - (3x + 3)\left[(3x^2 + 6x + 1)(5x - 3) - b(x)\right] =$$

$$(3x^2 + 6x + 1)\left[1 - (3x + 3)(5x - 3)\right] + b(x)(3x + 3).$$

Infine, da **a.)** ricaviamo

$$-2 = a(x)(6x^2 + x + 3) + b(x)(x^3 - x^2 + 3). \qquad (\star\star)$$

Per ottenere 1 espresso come combinazione di $a(x)$ e di $b(x)$, basta moltiplicare entrambi i membri dell'espressione $(\star\star)$ per l'inverso dell'elemento -2, che, in $\mathbb{Z}_7$ è 3. Si ottiene:

$$1 = a(x)(18x^2+3x+9)+b(x)(3x^3-3x^2+9) = a(x)(4x^2+3x+2)+b(x)(3x^3+4x^2+2).$$

2. In $\mathbb{R}[x]$ si considerino i polinomi $f(x) = x^4 + 3x^3 - 12x - 36$ e $g(x) = x^2 - 9$. Decomporre $f(x)$ e $g(x)$ nel prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ e determinare un loro MCD.

Soluzione

Poichè $g(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, applichiamo il Teorema di Ruffini per verificare se $f(x)$ è divisibile per $(x-3)$ e/o per $(x+3)$.

$$f(3) = 3^4 + 3 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 - 36 = 81 + 81 - 36 - 36 \neq 0.$$

$$f(-3) = (-3)^4 - 3 \cdot 27 + 36 - 36 = 0.$$

Il polinomio $f(x)$ è quindi divisibile per $(x+3)$.

Operando la divisione otteniamo:

$x^4 + 3x^3 - 12x - 36 = (x+3)(x^3 - 12) = (x+3)(x - \sqrt[3]{12})(x^2 + \sqrt[3]{12}x + \sqrt[3]{(12)^2})$.

Poichè il polinomio di secondo grado che compare nella fattorizzazione è irriducibile, segue che $MCD(f(x), g(x)) = (x+3)$.

3. Dati i polinomi $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^7 - x$ in $\mathbb{Z}_7$, determinarne le radici.

Soluzione

$$f(x) = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1),$$

$$g(x) = x(x^6 - 1) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 8) =$$

$$x(x-1)(x^2 + x + 1)(x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

Ora resta da vedere se $h(x) = (x^2 + x + 1)$ e $k(x) = (x^2 - 2x + 4)$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}_7$.

Essendo i polinomi $h(x)$ e $k(x)$ di grado 2, si può osservare che o essi sono irriducibili, oppure devono essere decomponibili nel prodotto di due polinomi di primo grado e quindi, per il teorema di Ruffini, devono ammettere una radice. Poichè il campo $\mathbb{Z}_7$ è finito basta calcolare $h(\alpha)$ e $k(\alpha)$ $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_7$; se non ci sono radici, per il discorso precedente sulla riducibilità dei polinomi di grado due, essi saranno irriducibili.

- $h(0) = 1 \neq 0$, $h(1) = 3 \neq 0$, $h(2) = 7 = 0$ (in $\mathbb{Z}_7$) $\Rightarrow (x-2)$ è un divisore di $h(x)$ e precisamente $h(x) = (x-2)(x-4)$, (infatti anche $h(4) = 21 = 0$ in $\mathbb{Z}_7$).

- $k(0) = 4 \neq 0$, $k(1) = 3 \neq 0$, $k(2) = 4 \neq 0$, $k(3) = 7 = 0$: quindi anche $k(x)$ è riducibile in $\mathbb{Z}_7$. Cerchiamo l'altra radice. Poichè $k(5) = k(-2) \neq 0$ e $k(6) = k(-1) = 0$, il polinomio $k(x)$ è divisibile per $(x-6) = (x+1)$.

Pertanto si può concludere che:

$$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-4)(x+2)(x+1)(x-3).$$

4. Sia K un campo e siano $f(x)$ e $g(x)$ due polinomi coprimi (o relativamente primi o primi fra loro) in $K[x]$. Si provi che $f(x)$ e $g(x)$ non hanno radici in comune.

Soluzione

Se per assurdo avessero una radice $\alpha \in K$ in comune, sarebbero entrambi divisibili per $(x-\alpha)$ e quindi il loro MCD , dovendo essere divisibile per $(x-\alpha)$, avrebbe grado almeno 1 e questo contrasta con la definizione di polinomi coprimi (cfr. Definizione 10.10 pag. 142 del testo).

Esercizio 10.7 (pag.152)

Scrivere in forma algebrica e trigonometrica i seguenti numeri complessi:

1. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

2. $(1+i)^{10}$

3. $(2i+1)(3i-1)$

Soluzione

1. Per esprimere in forma algebrica il numero complesso dato, procediamo moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore, al fine di ottenere un numero reale al denominatore (ricordiamo che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato dà come risultato un numero reale (cfr. definizione 10.15, pag 149).

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{i(1+\sqrt{3})}{2}.$$

Per trovare la forma trigonometrica conviene ripartire dall'espressione data ed esprimere separatamente numeratore e denominatore.

$$1+i\sqrt{3}=2(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})),$$

$$1-i=\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})).$$

Il quoziente diventa:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2}{\sqrt{2}}(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12})+i\sin(\frac{7\pi}{12}).$$

Osservazione Dai calcoli eseguiti, si puó anche dedurre che

$$\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}))=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ i\sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{i(1+\sqrt{3})}{2} \quad \text{e quindi}$$

$$\cos(\frac{7\pi}{12})=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\quad \sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

2. Questa volta il calcolo è più semplice se si utilizza la forma trigonometrica:

Poichè $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$, usando la formula della potenza (pag. 151), si ottiene:

$(1 + i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos(\frac{10\pi}{4}) + i\sin(\frac{10\pi}{4})) = 2^5(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = 32i.$

Il calcolo della potenza decima effettuato a partire dalla forma algebrica, sarebbe lungo e richiederebbe l'utilizzo dello sviluppo del binomio.

3. $(2i + 1)(3i - 1) = -6 - 2i + 3i - 1 = -7 + i$

Questa volta il calcolo che utilizza la forma trigonometrica risulta pesante e complicato, poiché gli angoli non sono quelli notevoli.

Scriviamo comunque il risultato in forma trigonometrica, per esercizio.

Otteniamo: modulo $\rho = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$, mentre l' argomento θ viene determinato sapendo che $\cos(\theta) = \frac{-7}{\sqrt{50}}$, $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{50}}$.

Esercizio 10.8 (pag.152)

Calcolare le radici terze e quinte del numero complesso $-i$.

Soluzione

Scriviamo in forma trigonometrica il numero dato:

$$-i = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}).$$

Radici terze:

$$\alpha_k = \cos(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}),\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

Otteniamo:

$\alpha_0 = \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2})$, $\alpha_1 = \cos(\frac{7\pi}{6}) + \sin(\frac{7\pi}{6})$, $\alpha_2 = \cos(\frac{11\pi}{6}) + \sin(\frac{11\pi}{6})$.

Radici quinte:

$\alpha_k = \cos(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5})$ per $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Otteniamo:

$\alpha_0 = \cos(\frac{3\pi}{10}) + i\sin(\frac{3\pi}{10})$, $\alpha_1 = \cos(\frac{7\pi}{10}) + i\sin(\frac{7\pi}{10})$,

$\alpha_2 = \cos(\frac{11\pi}{10}) + i\sin(\frac{11\pi}{10})$, $\alpha_3 = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})$,

$\alpha_4 = \cos(\frac{19\pi}{10}) + i\sin(\frac{19\pi}{10})$.

Esercizio 10.9 (pag.152)

Dati $z = (1 - i)$, $w = (-1 + i\sqrt{3})$, $t = (-1 + i)$ determinare:

1. $\bar{z}$, $\bar{w}$, $\bar{t}$, z^{-1}, w^{-1}, t^{-1};

2. z^{25}, w^9, t^{25}.

Soluzione

1. $\bar{z} = 1 + i$, $\bar{w} = -1 - i\sqrt{3}$, $\bar{t} = -1 - i$

$$z^{-1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2},$$

$$w^{-1} = \frac{1}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{-1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{-1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{1+3} = \frac{-1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4},$$

$$t^{-1} = \frac{1}{-1+i} = \frac{1}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-1-i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{i}{2}.$$

2. Per calcolare le potenze, è consigliabile utilizzare la forma trigonometrica del numero complesso.

$$z = (1 - i) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})\right),$$

$$w = 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right),$$

$$t = (-1 + i) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right).$$

Si ottiene:

$$z^{25} = (1-i)^{25} = (\sqrt{2})^{25}\left(\cos(25\frac{7\pi}{4}) + i\sin(25\frac{7\pi}{4})\right) = 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})\right) =$$

$$= 2^{12}(1 - i), \quad (\frac{25 \cdot 7 \cdot \pi}{4} = 42 \cdot \pi + \frac{7}{4}\pi).$$

$$w^9 = 2^9\left(\cos(\frac{18\pi}{3}) + i\sin(\frac{18\pi}{3})\right) = 2^9\left(\cos(6\pi) + i\sin(6\pi)\right) = 2^9\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 2^9,$$

$$t^{25} = (-1 + i)^{25} = (\sqrt{2})^{25}\left(\cos(25\frac{3\pi}{4}) + i\sin(25\frac{3\pi}{4})\right) =$$

$$2^{12}\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right) = 2^{12}(-1 + i).$$