

PROVA DI AUTOVALUTAZIONE DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 13 Dicembre 2018

Esercizio 1. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $*$: $A \times A \rightarrow A$, tale che

$$\forall (x, y), (a, b) \in A \quad (x, y) * (a, b) = \left(\frac{1}{2}xa, 5 + b + y\right).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
- (4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(1, 1)$ in $(A, *)$.

Esercizio 2. Consideriamo 7 Canadesi, 9 Messicani e 8 Venezuelani. I Canadesi sono tutte Donne, tra i Messicani ci sono 4 Donne e tra i Venezuelani ci sono 5 Uomini.

- a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 9 persone?
- b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
- c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
- d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 4. Siano $A \in \text{Mat}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ e $B \in \text{Mat}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calcolare se possibile AB e $A^2 = AA$.
- (2) Calcolare se possibile il determinante di A , B e AB .
- (3) Calcolare se possibile le matrici inverse di A e AB .

Esercizio 5. In S_9 , sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (1) Descrivere l'elemento g come prodotto di cicli disgiunti.
- (2) Individuare l'ordine di g nel gruppo S_9 .
- (3) Determinare esplicitamente l'inverso di g .
- (4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g .
- (5) Indicare se l'elemento g è pari o dispari.

Esercizio 6. Stabilire con il principio di induzione se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{i=-1}^n (6i - 2) = 3n^2 + n - 10.$$