Soluzione degli esercizi del capitolo 11

Esercizio 11.1 (*pag. 158*)

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^2$, ogni retta passante per l'origine può essere descritta come un particolare sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ della forma

$$L = \{(x, y) | \alpha x + \beta y = 0\}.$$

Si verichi che L è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione

L è un sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ si ha che

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in L \ \ e \ \ k(x_1, y_1) \in L.$$

Per ipotesi $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 & = 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 & = 0 \end{cases}$
da cui, sommando membro a membro, si ottiene $\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = 0$ e quindi $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in L$.
Inoltre $\alpha(kx_1) + \beta(ky_1) = k\alpha x_1 + k\beta y_1 = k(\alpha x_1 + \beta y_1) = 0$ da cui segue $(kx_1, ky_1) = k(x_1, y_1) \in L$.

Possiamo quindi concludere che L è sottospazio vettoriale.

Esercizio 11.2 (*pag. 158*)

Nello spazio vettoriale $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, verificare che il sottoinsieme costituito dalle matrici diagonali costituisce un sottospazio.

Soluzione

Sia D l'insieme delle matrici diagonali di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Come nell'esercizio precedente verifichiamo che $\forall\ A, B \in D$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ si ha che $A + B \in D$ e $kA \in D$.

Siano $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$;
allora
$A + B = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{bmatrix} \in D$ e $kA = \begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & kc \end{bmatrix} \in D$.

Si può concludere che D è un sottospazio vettoriale di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 11.3 (*pag. 158*)

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ di tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme delle funzioni continue e si mostri che esso costituisce un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soluzione

Sia $\mathcal{C}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ costituito dalle funzioni continue. Per le proprietà viste nei corsi di Analisi si ha che la somma di due funzioni continue è continua ($\forall\ f, g \in \mathcal{C} \ \Rightarrow f + g \in \mathcal{C}$) e che $\forall\ f \in \mathcal{C}\ \forall k \in \mathbb{R}$ si ha che $kf \in \mathcal{C}$.

Segue quindi la tesi.

Esercizio 11.4 (*pag. 163*)

Nello spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$, l'insieme $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base.

Soluzione

Si tratta di verificare che:

a) i vettori di $\mathcal{B}$ sono un sistema di generatori, cioè che qualsiasi polinomio di grado minore od uguale a n si puó scrivere come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

Sia $a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_i \in \mathbb{R}$, un polinomio di grado minore o uguale a n. Si vede immediatamente che $a(x)$ è combinazione lineare dei polinomi $1, x, x^2, \ldots, x^n$, con coefficienti dati dagli a_i.

b) i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti (cfr. def 11.7 pag 160). Infatti sia $b_0 + b_1 x + \cdots b_n x^n = 0$ una combinazione lineare che dá il vettore nullo. L'unica soluzione è $b_0 = b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

Esercizio 11.5 (*pag. 164*)

Dati i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$, dire, senza fare calcoli, se sono linearmente indipendenti:

1. $v_1 = (1, 4, -1), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (1, 0, 1), v_4 = (-1, 1, 0)$.

2. $w_1 = (1, 0, -1), w_2 = (0, -1, 1), w_3 = (1, -1, 0)$.

3. $u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (0, 1, 2)$.

Soluzione

1. I vettori dati sono quattro; poiché appartengono ad uno spazio vettoriale di dimensione 3 essi saranno necessariamente dipendenti.

2. Si vede immediatamente che $w_3 = w_1 + w_2$: i tre vettori sono quindi linearmente dipendenti.

3. Poiché i vettori sono due e non esiste un $k \in \mathbb{R}$ tale che $u_1 = ku_2$, essi sono linearmente indipendenti.

Esercizio 11.6 (*pag. 164*)

Si determini per quali valori di h e di k sono linearmente indipendenti i vettori
$v_1 = (h, 1, 0),\ v_2 = (k, h, 1),\ v_3 = (-2, 0, 2).$

Soluzione

I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti se (cfr. Definizione 11.7, pag. 160 del testo):

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Poichè da $a = b = c = 0$ segue $av_1 + bv_2 + cv_3 = (0, 0, 0)$, resta da mostrare l'implicazione inversa. Consideriamo la combinazione:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = a(h, 1, 0) + b(k, h, 1) + c(-2, 0, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(ah, a, 0) + (bk, bh, b) + (-2c, 0, 2c) = (ah + bk - 2c, a + bh, b + 2c) = (0, 0, 0).$$

Poichè due vettori sono uguali se e solo se hanno ordinatamente uguali le componenti, si ottiene il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} ah + bk - 2c & = 0 \\ a + bh & = 0 \\ b + 2c & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ah + bk - 2c & = 0 \\ a & = -bh \\ b & = -2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(-h^2 + k + 1) & = 0 \\ a & = -bh \\ -2c & = b. \end{cases}$$

Se $-h^2 + k + 1 = 0$ cioè se $h^2 = k + 1$, la prima equazione è verificata per ogni b.
Se ad esempio assumiamo $b = -2$, otteniamo $a = 2h,\ b = -2,\ c = 1$ che quindi sono una terna di coefficienti non tutti nulli tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 = (0, 0, 0)$: i vettori sono perció linearmente dipendenti.

Se invece $h^2 \neq k + 1 \Rightarrow b = 0$, e quindi si ottiene anche $a = 0$ e $c = 0$ e in questo caso i vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 11.7 (*pag. 164*)

Dati i vettori:

a) $v = (8, 2, k, -10)$ e $v_1 = (3, 1, 2, -3)$ $v_2 = (0, 0, 0, 1)$ $v_3 = (1, 0, 1, 0)$,
b) $v = (1, 2, k)$ e $v_1 = (0, 1, 2)$ $v_2 = (1, 1, 1)$ $v_3 = (1, 0, -3)$,

rispettivamente in $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, determinare, in ciascun caso, i valori del parametro reale k per i quali il vettore $v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, cioè v appartenga al sottospazio generato da $v_1,\ v_2,\ v_3$.

Soluzione

a) Dobbiamo trovare i valori di k per cui esistano tre scalari $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ tali che

$$(8, 2, k, -10) = a(3, 1, 2, -3)+b(0, 0, 0, 1)+c(1, 0, 1, 0) = (3a+c, a, 2a+c, -3a+b).$$

Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3a+c &= 8 \\ a &= 2 \\ 2a+c &= k \\ -3a+b &= -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6+c &= 8 \\ a &= 2 \\ 4+c &= k \\ -6+b &= -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c &= 2 \\ a &= 2 \\ c &= k-4 &= 2 \\ b &= -4 \end{cases}$$

Si conclude che $k = 6$.

b) Dobbiamo determinare il valore del parametro reale k in modo che esistano $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ per cui valga l'uguaglianza:

$$(1,2,k) = a(0,1,2) + b(1,1,1) + c(1,0,-3) = (b+c, a+b, 2a+b-3c).$$

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a+b &= 2 \\ 2a+b-3c &= k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c &= 1-b \\ a &= 2-b \\ 2(2-b)+b-3(1-b) &= k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c &= 1-b \\ a &= 2-b \\ 2b &= k-1 \end{cases}$$

Otteniamo quindi $c = \dfrac{3-k}{2},\ a = \dfrac{5-k}{2},\ b = \dfrac{k-1}{2}$, e possiamo concludere che ci sono infinite terne soddisfacenti la condizione, cioè le scritture di v come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono infinite.

Esercizio 11.8 (*pag. 164*)

Sia $\mathbb{R}^3 = V_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle terne di numeri reali e siano $S = \langle(1,1,2),(1,1,1)\rangle$ e $T = \langle(1,2,3),(2,1,2)\rangle$ due sottospazi. Determinare $\dim S,\ \dim T,\ \dim S\cap T,\ \dim(S+T)$.

Soluzione

Innanzi tutto $\dim S = 2$ in quanto i due vettori $(1,1,2)$ e $(1,1,1)$ sono linearmente indipendenti, poiché $(1,1,2) \neq k(1,1,1), \forall\, k \in \mathbb{R}$.

Analogamente $\dim T = 2$.

Poiché per la formula di Grassmann (cfr Prop. 11.7 pag. 164) si ha che

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S\cap T),$$

ci basta determinare la dimensione di $S\cap T$ oppure quella di $S+T$.

Determiniamo $S\cap T$ e la sua dimensione.

$S\cap T = \{(x,y,z)\,|\,(x,y,z) = a(1,1,2) + b((1,1,1) = c(1,2,3) + d(2,1,2)\}$.

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a+b &= c+2d \\ a+b &= 2c+d \\ 2a+b &= 3c+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= c+2d \\ c+2d &= 2c+d \\ 2a+b &= 3c+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= c+2d = 3c \\ d &= c \\ 2a+b &= 5c \end{cases}$$

da cui segue $a = 2c,\ b = c,\ d = c$.

Quindi i vettori appartenenti ad $S \cap T$ sono tutti e soli i vettori della forma

$$(x, y, z) = c(1, 2, 3) + c(2, 1, 2) = c(3, 3, 5).$$

Si può concludere che $S \cap T = \langle (3, 3, 5) \rangle$ ha dimensione 1 e quindi $\dim(S+T) = 3$.

Esercizio 11.9 (*pag. 165*)

Analogamente al punto precedente si considerino i sottospazi

$$S = \langle (1, -1, 2), (0, 1, 1) \rangle \quad \text{e} \quad T = \langle (1, 2, -1), (0, 3, 1) \rangle$$

e si determinino $\dim S,\ \dim T,\ \dim S \cap T,\ \dim(S + T)$.

Soluzione

Come nell'esercizio precedente $\dim S = 2$ e $\dim T = 2$ poiché né $(1, -1, 2)$ è multiplo di $(0, 1, 1)$, né $(1, 2, -1)$ è multiplo di $(0, 3, 1)$.

$$S \cap T = \{ (x, y, z) \,|\, (x, y, z) = a(1, -1, 2) + b(0, 1, 1) = c(1, 2, -1) + d(0, 3, 1) \}.$$

Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a = c \\ -a + b = 2c + 3d \\ 2a + b = -c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 3c + 3d \\ b = -3c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 3c + 3d = -3c + d \\ b = -3c + d \end{cases}$$

e quindi $a = c,\ d = -3c,\ b = -6c$.

Deduciamo che gli elementi appartenenti ad $S \cap T$ sono tutti e soli i vettori della forma:

$(x, y, z) = c(1, -1, 2) - 6c(0, 1, 1) = (c, -c, 2c) + (0, -6c, -6c) = (c, -7c, -4c)$, e che il sottospazio $S \cap T = \langle (1, -7, -4) \rangle$ ha dimensione 1 e di conseguenza $\dim(S + T) = 3$.

Esercizio 11.10 (*pag. 168*)

Si provi che la funzione da $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita da $f(u, v) = u^\top v$ è un prodotto scalare.

Soluzione

Per verificare che f è prodotto scalare dobbiamo verificare che sono soddisfatte le condizioni della definizione 11.11 (pag 165) per ogni $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni terna di vettori $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ v = (y_1, y_2, \cdots, y_n),\ w = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

1. Simmetria: Verifichiamo che $f(u, v) = f(v, u)$ cioé che $u^\top v = v^\top u$.

$$u^\top v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (y_1, y_2 \cdots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_1^n x_i y_i.$$

$$v^\top u = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} (x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots y_nx_n = \sum_1^n y_ix_i.$$

I due prodotti sono uguali per la commutatività del prodotto in $\mathbb{R}$.

2. Bilinearità. Verifichiamo che $f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w)$.

Infatti:
$f(\alpha u+\beta v, w) = (\alpha u+\beta v)^\top w = [(\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)+(\beta y_1, \cdots, \beta y_n)]^\top (z_1, \cdots, z_n) =$
$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \cdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{bmatrix} (z_1, z_2, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i$ e

$\alpha f(u, v) + \beta f(u, w) = \alpha u^\top w + \beta v^\top w =$
$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (z_1, z_2, \cdots, z_n)+\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (z_1, z_2, \cdots, z_n) = \alpha \sum_{i=1}^n x_iz_i+\beta \sum_{i=1}^n y_iz_i =$
$\sum_{i=1}^n \alpha x_iz_i + \beta y_iz_i = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_1.$

Analogamente
$f(w, \alpha u+\beta v) = w^\top (\alpha u+\beta v) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{bmatrix} (\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \cdots, \alpha x_n+\beta y_n) =$
$\sum_{i=1}^n z_i(\alpha x_i + \beta y_i)) = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \alpha u^\top w + \beta v^\top w = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w).$

3. Per ogni u si deve ottenere che $f(u, u) \geq 0$ e che $f(u, u) = 0 \iff u = 0$. Nel nostro caso abbiamo:
$f(u, u) = u^\top u = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ se e solo se $x_i = 0 \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Esercizio 11.11 (*pag. 168*)

Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ (dotato del prodotto scalare canonico, definito nell'Esempio **11.14**). Si dica se i seguenti insiemi sono ortogonali:

1. $A = \{a, b\}$ con $a = (1, 2, 2),\ b = (2, 1, -2)$.

2. $C = \{a,\ b,\ c\}$ con $a = (1, 2, 2),\ b = (2, 1, -2),\ c = (0, 1, 0)$.

3. $X = \{x,\ y,\ z\}$ con $x = (0, 2, 1),\ y = (2, 0, 0),\ z = (0, -1, 2)$.

Soluzione

Verifichiamo se i vettori di ciascun insieme sono a due a due ortogonali (cfr. Def. 11.14 pag.166).

1. Poiché il prodotto scalare $(a, b) = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 + 2(-2) = 2 + 2 - 4 = 0$, i due vettori sono ortogonali.

2. Per il punto precedente a e b sono ortogonali.
Consideriamo ora $(a, c) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$, quindi a e c non sono ortogonali.
Concludiamo quindi che C non è un insieme di vettori ortogonali.

3. $(x, y) = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
$(x, z) = 0 \cdot 0 + 2(-1) + 1 \cdot 2 = 0$
$(y, z) = 2 \cdot 0 + 0(-1) + 0 \cdot 2) = 0.$

Poiché tutti i prodotti scalari sono nulli si puó concludere che X è un insieme ortogonale.

Esercizio 11.12 (*pag. 168*)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ (dotato del prodotto scalare canonico):

1.a si determini l'insieme S dei vettori ortogonali al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

1.b si verifichi che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$;

2.a si determini l'insieme T dei vettori ortogonali ai vettori

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

2.b si verifichi che T è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione

1.a $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0 \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | z = -x - y \right\}.$$

1.b S è un sottospazio: infatti per ogni coppia di vettori s_1, s_2 di S e per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha che $s_1 + s_2 \in S$ e $ks_1 \in S$. Infatti, siano

$$s_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S$$

cioé $s_1,\ s_2$ soddisfino le condizioni $x+y+z=0,\ a+b+c=0$.

Si ha che

$$s_1+s_2=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}$$

e quindi s_1+s_2 appartiene ad S in quanto le sue componenti soddisfano la condizione data, $((x+a)+(y+b)+(z+c)=(x+y+z)+(a+b+c)=0)$.

Inoltre

$k\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kx \end{pmatrix}$ e quindi anche questo elemento sta in S in quanto $kx+ky+kz=k(x+y+z)=0$.

Osserviamo che il sottospazio S puó essere descritto anche nel modo seguente:

$$S=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} | x,\ y\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle.$$

1.a $T=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\middle|\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=0,\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=0\right\}=$

$$=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\middle|\left\{\begin{array}{c} x+z=0 \\ y=0 \end{array}\right\}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | z=-x, y=0\right\}.$$

2.b T è un sottospazio: infatti per ogni coppia di vettori $t_1,\ t_2$ di T e per ogni $k\in\mathbb{R}$ si ha che $t_1+t_2\in T$ e $kt_1\in T$. Siano

$t_1=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t_2=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, allora $k\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kx \end{pmatrix}$ e

$$t_1+t_2=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}.$$

Tali vettori appartengono a T poiché sono soddisfatte le condizioni: $ky=0$ e $x+a+z+c=(x+z)+(a+c)=0$, $y+b=0$ e $kx+ky=k(x+z)=0$.

Come al punto precedente, il sottospazio puó essere descritto anche nel modo seguente:

$$T=\left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} | \forall x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle.$$