

Assegnato un insieme  $X$ , con  $|X| \geq 2$ , verrà denotato con  $\mathcal{P}_2(X)$  l'insieme dei sottoinsiemi di  $X$  di cardinalità 2.

**Definizione 1.** Si dice *grafo* una terna ordinata  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$ , dove  $V$  è un insieme tale che  $|V| \geq 2$ , i cui elementi sono detti *vertici* o *nodi*,  $L$  è un insieme non vuoto, i cui elementi sono detti *lati* o *archi*, e

$$\varphi : L \rightarrow \mathcal{P}_2(V).$$

Se  $l_1, \dots, l_h \in L$  sono lati di  $\mathcal{G}$  tali che  $\varphi(l_1) = \dots = \varphi(l_h) = \{v, w\} \in \mathcal{P}_2(V)$ , si dice che tra i vertici  $v$  e  $w$  c'è un *lato multiplo*. Se  $\varphi$  è iniettiva, il grafo  $\mathcal{G}$  si dice *semplice*.

**Nomenclatura** Sia  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo. Se  $l \in L$  e  $\varphi(l) = \{v, w\}$ , si dice che  $v$  e  $w$  sono *estremi* di  $l$  e i due vertici  $v$  e  $w$  si dicono *adiacenti*. Un vertice che non sia estremo di alcun lato si dice *isolato*. Se due lati hanno un estremo in comune, allora si dice che sono *incidenti*. Infine,  $|V|$  si dice *ordine* di  $\mathcal{G}$ .

**Osservazione 1.** Viene esclusa da questa trattazione la possibilità di considerare il caso limite di grafi con vertici tutti isolati, perché l'insieme dei lati è non vuoto. Inoltre viene escluso il caso che un vertice sia adiacente a se stesso, visto che l'applicazione  $\varphi$  è a valori in  $\mathcal{P}_2(V)$ .

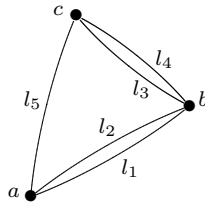
**Nota Bene** Nel seguito si considereranno esclusivamente grafi finiti, vale a dire con numero dei vertici e numero dei lati entrambi finiti. In tal caso i grafi possono essere rappresentati mediante un diagramma. Si osservi che ci sono diverse rappresentazioni di uno stesso grafo.

**Definizione 2.** Siano  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo,  $v \in V$ . Si dice *grado* o *valenza* di  $v$  il numero  $d(v)$  dei lati dei quali  $v$  è estremo. Un vertice si dice *pari* se il suo grado è pari, si dice *dispari* se il suo grado è dispari.

**Esempio 1.** Si consideri il grafo  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$ , dove  $V = \{a, b, c\}$ ,  $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$  e  $\varphi : L \rightarrow \mathcal{P}_2(V)$  è così definita:

$$\varphi(l_1) = \varphi(l_2) = \{a, b\}; \quad \varphi(l_3) = \varphi(l_4) = \{b, c\}; \quad \varphi(l_5) = \{a, c\}.$$

Una rappresentazione di  $\mathcal{G}$  è la seguente:



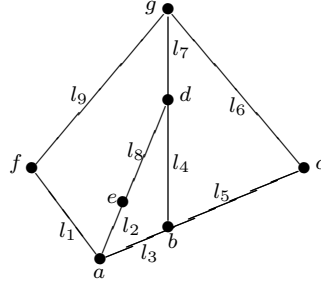
I gradi dei vertici di  $\mathcal{G}$  sono:  $d(a) = 3$ ,  $d(b) = 4$ ,  $d(c) = 3$ .

**Esempio 2.** Si consideri il grafo semplice  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$ , dove  $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ,  $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9\}$  e  $\varphi : L \rightarrow \mathcal{P}_2(V)$  è tale che

$$\varphi(l_1) = \{a, f\}, \quad \varphi(l_2) = \{a, e\}, \quad \varphi(l_3) = \{a, b\}, \quad \varphi(l_4) = \{b, d\}, \quad \varphi(l_5) = \{b, c\},$$

$$\varphi(l_6) = \{c, g\}, \quad \varphi(l_7) = \{d, g\}, \quad \varphi(l_8) = \{d, e\}, \quad \varphi(l_9) = \{f, g\}.$$

Il grafo  $\mathcal{G}$  si può rappresentare graficamente nel modo seguente:



I gradi dei vertici di  $\mathcal{G}$  sono:

$$d(a) = 3, d(b) = 3, d(c) = 2, d(d) = 3, d(e) = 2, d(f) = 2, d(g) = 3.$$

**Osservazione 2.** Si osservi che un grafo semplice  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  può essere individuato soltanto dall'insieme  $V$  dei suoi vertici e dall'insieme  $L$  dei suoi lati. Infatti, se  $\varphi$  è iniettiva, si può identificare  $L$  con la sua immagine  $\varphi(L)$  in  $\mathcal{P}_2(V)$ . Quindi, nel seguito, un grafo semplice verrà indicato con  $\mathcal{G} = (V, L)$ .

**Definizione 3.** Sia  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo, con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Si dice *matrice di adiacenza di  $\mathcal{G}$*  la matrice  $A = (a_{ij}^i)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , quadrata di ordine  $n$ , con  $a_{ij}^i =$  numero dei lati aventi  $v_i$  e  $v_j$  come estremi.

**Osservazione 3.** Si osservi la matrice di adiacenza è una matrice simmetrica. Inoltre, se  $\mathcal{G}$  è un grafo semplice, gli elementi della matrice di adiacenza sono 0 o 1. Infine, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , la somma degli elementi della  $i$ -ma riga (o colonna) della matrice di adiacenza corrisponde al grado del vertice  $v_i$ .

**Definizione 4.** Sia  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo, con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $L = \{l_1, \dots, l_h\}$ . Si dice *matrice di incidenza di  $\mathcal{G}$*  la matrice  $A = (a_{ij}^j)$ ,  $j = 1, \dots, h$ ,  $i = 1, \dots, n$ , di tipo  $h, n$  con  $a_{ij}^j = 1$  se  $v_i$  è estremo di  $l_j$ ,  $a_{ij}^j = 0$  altrimenti.

**Osservazione 4.** Si osservi che, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , la somma degli elementi della  $i$ -ma colonna della matrice di incidenza corrisponde al grado del vertice  $v_i$ .

**Esempio 3.** La matrice di adiacenza del grafo dell'Esempio 1 è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

dove si è considerato  $v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c$ . Invece la matrice di incidenza è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio 4.** Le matrici di adiacenza e di incidenza del grafo dell'Esempio 2 sono rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Proposizione 1.** (*Lemma delle strette di mano*) Sia  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo. Risulta:

$$(1) \quad \sum_{v \in V} d(v) = 2|L|.$$

**Dimostrazione.** La somma

$$\sum_{v \in V} d(v)$$

si dice *grado complessivo* di  $\mathcal{G}$  e rappresenta il numero di tutti i possibili “estremi di lato”. Poichè ogni lato ha due estremi, si ottiene (1).

**Proposizione 2.** *Il numero dei vertici dispari (cioè di grado dispari) di un grafo è pari.*

**Dimostrazione.** Sia  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo. Poichè  $V$  è finito, senza ledere la generalità si può porre:  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Siano  $V_d$  e  $V_p$  rispettivamente i sottoinsiemi di  $V$  formati dai vertici pari e dai vertici dispari. Si ha, ovviamente,  $V_d \cup V_p = V$ ,  $V_d \cap V_p = \emptyset$ , per cui si può porre  $V_d = \{v_1, \dots, v_s\}$ ,  $V_p = \{v_{s+1}, \dots, v_n\}$ . Risulta:

$$2|L| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^s d(v_i) + \sum_{i=s+1}^n d(v_i)$$

da cui si ha

$$\sum_{i=1}^s d(v_i) + \sum_{i=s+1}^n d(v_i) = 2|L|$$

e quindi

$$(2) \quad \sum_{i=1}^s d(v_i) = 2|L| - \sum_{i=s+1}^n d(v_i).$$

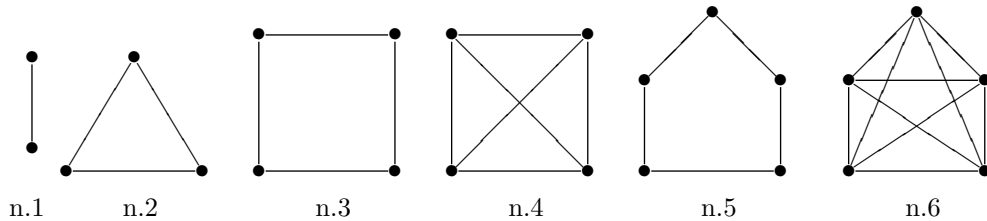
Si osservi che  $\sum_{i=s+1}^n d(v_i)$  è la somma dei gradi dei vertici pari, per cui è un numero pari. Segue che il termine a destra dell’uguale in (2) è pari e dunque è pari anche quello a sinistra, che rappresenta la somma dei gradi dei vertici dispari. Ma la somma di numeri dispari è pari solo quando il numero degli addendi è pari: ciò prova che il numero dei vertici dispari di  $\mathcal{G}$  è pari.

**Esercizio 1.** Esiste un grafo semplice  $\mathcal{G} = (V, L)$ , con  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{15}\}$ , in modo tale che per ogni  $1 = 1, 2, \dots, 15$ ,  $d(v_i) = i$ ?

**Definizione 5.** Si dice *regolare* di grado  $d$  un grafo semplice  $\mathcal{G} = (V, L)$  tale che ogni suo vertice abbia grado  $d$ . Se  $\mathcal{G}$  ha ordine  $n$  ed è regolare di grado  $n - 1$  si dice *completo*.

**Osservazione 5.** Se  $\mathcal{G} = (V, L)$  è un grafo di ordine  $n$ , regolare di grado  $d$ , allora  $|L| = \frac{1}{2}nd$ . In particolare se  $\mathcal{G}$  è completo allora  $|L| = \frac{1}{2}n(n - 1)$ . Il grafo regolare completo di ordine  $n$  si denota con  $K_n$ .

I seguenti diagrammi mostrano grafi regolari. In particolare i grafi n.1,2,4,6 sono i grafi completi  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$  rispettivamente.



**Osservazione 6.** Si osservi che sono completi tutti e soli i grafi aventi i vertici adiacenti a due a due.

**Esercizio 2.** Esiste un grafo di ordine 9, regolare di grado 5?

**Definizione 6.** Siano  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo,  $v_0, \dots, v_h \in V$ . Si dice *cammino* da  $v_0$  a  $v_h$  una successione  $l_1, \dots, l_h$  di lati di  $\mathcal{G}$  distinti, tali che per ogni  $i \in \{1, \dots, h-1\}$ ,  $l_i$  risulti incidente a  $l_{i+1}$  e  $\varphi(l_1) = \{v_0, v_1\}$ ,  $\varphi(l_h) = \{v_{h-1}, v_h\}$ ; il numero  $h$  dei lati, si dice lunghezza del cammino. Se  $v_0 = v_h$  si parla di *circuito* di lunghezza  $h$  da  $v_0$  a  $v_0$ .

**Osservazione 7.** Siano  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo,  $v \in V$ . Esiste un unico cammino di lunghezza 0 (ovvero privo di lati) da  $v$  a  $v$  che si dice *cammino nullo* da  $v$  a  $v$ .

Siano  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo,  $v, w \in V$ . In generale ci sono più cammini da  $v$  a  $w$ , e di diversa lunghezza. Ciò giustifica la seguente:

**Definizione 7.** Siano  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo,  $v, w \in V$ . Si dice *geodetica* da  $v$  a  $w$  un cammino di lunghezza minima da  $v$  a  $w$ . La lunghezza di una geodetica da  $v$  a  $w$  viene detta *distanza* tra  $v$  e  $w$ .

**Esempio 5.** Nel grafo dell'Esempio 2, si possono considerare i seguenti cammini da  $e$  a  $g$ :  $c_1 = l_2, l_3, l_4, l_7$  di lunghezza 4,  $c_2 = l_2, l_1, l_9$  di lunghezza 3,  $c_3 = l_2, l_3, l_5, l_6$  di lunghezza 4 e  $c_4 = l_8, l_7$  che ha lunghezza 2 ed è una geodetica (in questo caso l'unica) da  $e$  a  $g$ . Quindi la distanza tra  $e$  e  $g$  è 2.

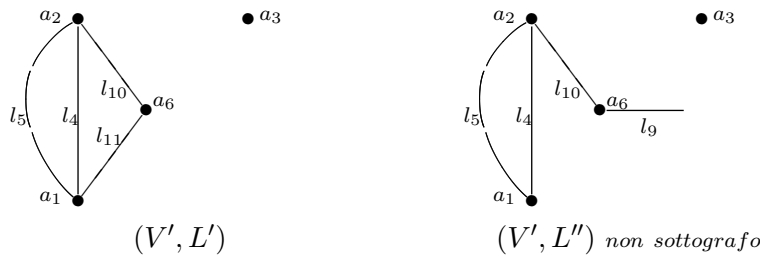
**Definizione 8.** Un grafo  $\mathcal{G} = \{V, L, \varphi\}$  si dice *connesso* se comunque si considerino due vertici  $v, w \in V$  esiste un cammino da  $v$  a  $w$ .

**Osservazione 8.** I grafi considerati fino a questo punto sono tutti connessi.

**Definizione 9.** Siano  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo,  $V' \subseteq V$ ,  $L' \subseteq L$ . Si dice che  $(V', L')$  è un sottografo di  $\mathcal{G}$  se  $\forall l \in L'$  si ha  $\varphi(l) = \{v, w\}$  con  $v, w \in V'$ .

In altre parole, perché  $(V', L')$  sia un sottografo, gli estremi di ogni lato di  $L'$  devono essere in  $V'$ .

**Esempio 6.** Si consideri il grafo  $\mathcal{G}$  dell'Esempio 10. La coppia  $(V', L')$ , dove  $V' = \{a_1, a_2, a_3, a_6\}$ ,  $L' = \{l_4, l_5, l_{10}, l_{11}\}$ , è un sottografo di  $\mathcal{G}$ . Invece la coppia  $(V', L'')$ , dove  $L'' = \{l_4, l_5, l_{10}, l_9\}$  non forma un sottografo, in quanto l'estremo  $a_5$  di  $l_9$  non appartiene a  $V'$ .



**Definizione 10.** Siano  $\mathcal{G} = \{V, L, \varphi\}$  un grafo,  $v \in V$ . Si dice *componente connessa* di  $v$  l'insieme

$$C_v = \{w \in V : \text{esiste un cammino da } v \text{ a } w\}.$$

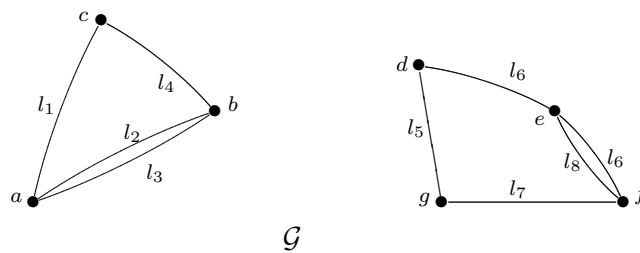
**Osservazione 9.** Se  $\mathcal{G} = \{V, L, \varphi\}$  è un grafo connesso, allora  $\forall v \in V$ ,  $C_v = V$ .

**Osservazione 10.** Siano  $\mathcal{G} = \{V, L, \varphi\}$  un grafo,  $v \in V$ . Se si pone

$$L' = \{l \in L : \text{gli estremi di } l \text{ sono entrambi in } C_v\}$$

allora si vede che la coppia  $(C_v, L')$  è un sottografo di  $\mathcal{G}$ .

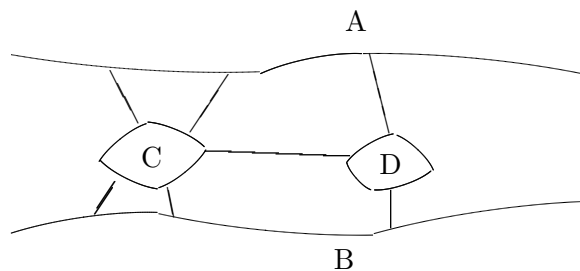
**Esempio 7.** Il grafo  $\mathcal{G}$  rappresentato nella seguente figura non è connesso:



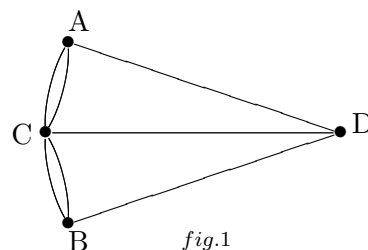
Infatti non esiste un cammino tra i vertici  $c$  e  $g$ , per esempio.  $\mathcal{G}$  presenta due componenti connesse  $C_a = \{a, c, b\}$ ,  $C_d = \{d, e, f, g\}$ . I sottografi da esse individuati sono  $(C_a, L')$  e  $(C_d, L'')$ , dove  $L' = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ ,  $L'' = \{l_5, l_6, l_7, l_8\}$ .

**Definizione 11.** Sia  $\mathcal{G}$  un grafo. Si dice *Euleriano* un cammino o un circuito che contenga tutti i lati di  $\mathcal{G}$ .

La teoria dei grafi fu originata da Eulero grazie ad un problema pratico: il famoso problema dei ponti di Königsberg, schematizzato in figura:



La città di Königsberg è attraversata da un fiume nel quale ci sono due isole, C e D della figura, collegate alle rive A e B e tra loro da sette ponti. Eulero si pose il seguente problema: è possibile partire da un punto e ritornare allo stesso punto percorrendo tutti i sette ponti una sola volta e passando per le due isole e per le due rive? La situazione geografica si può rappresentare con il seguente diagramma:



e pertanto il problema di Eulero si traduce nel capire se esiste un circuito Euleriano del grafo rappresentato dal precedente diagramma. La risposta venne data da Eulero stesso.

**Teorema 1.** (Eulero 1736) *Un grafo privo di vertici isolati ammette un circuito Euleriano se e soltanto se è connesso e non ha vertici dispari.*

Quindi la risposta al problema dei ponti di Königsberg è negativa, poiché i vertici del grafo che lo schematizza sono tutti dispari. Usando il Teorema di Eulero si può provare il seguente risultato.

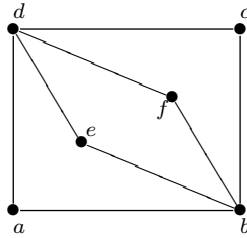
**Teorema 2.** *Un grafo privo di vertici isolati ammette un cammino Euleriano se e soltanto se è connesso e ha 0 o 2 vertici dispari.*

**Esempio 8.** Il grafo dell'esempio 1 ammette un cammino Euleriano, in quanto ha 2 vertici dispari: per esempio  $l_3, l_4, l_5, l_2, l_1$  è un cammino Euleriano.

**Definizione 12.** Sia  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo. Si dice *Hamiltoniano* un cammino o un circuito che passi per ogni vertice di  $\mathcal{G}$  una sola volta (ad esclusione al più del primo vertice del cammino, se si tratta di circuito).

**Osservazione 11.** Non ci sono criteri generali che permettano di stabilire se un grafo ammette un cammino Hamiltoniano. Si vede che tutti i grafi completi ammettono un cammino Hamiltoniano, mentre non ammettono cammini Euleriani tutti i grafi completi di ordine  $n$  pari,  $n \geq 4$ , perché hanno un numero di vertici dispari superiore a 2.

**Esempio 9.** Il seguente grafo semplice



non ammette un cammino Hamiltoniano, ma ammette un circuito Euleriano perché non ha vertici dispari. Quindi, ci sono esempi di grafi che ammettono cammini Hamiltoniani ma non Euleriani ed esempi di grafi che ammettono cammini Euleriani ma non Hamiltoniani.

**Definizione 13.** Due grafi  $\mathcal{G} = (V, F, \varphi)$ ,  $\mathcal{G}' = (V', F', \varphi')$  si dicono isomorfi se esiste un'applicazione bigettiva

$$f : V \cup L \rightarrow V' \cup L'$$

tale che

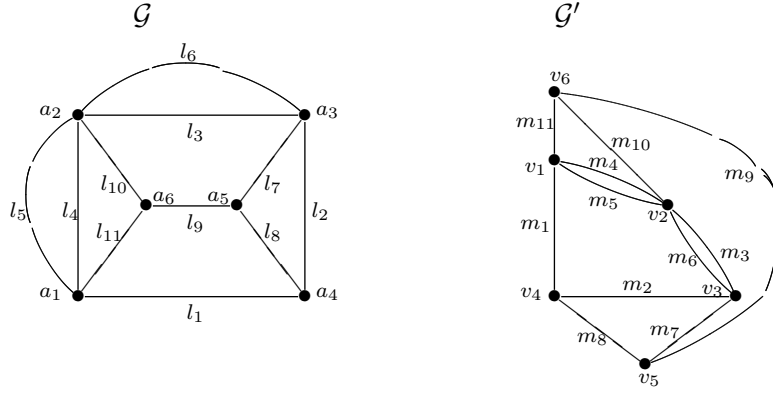
- $f(V) = V'$ ,  $f(L) = L'$
- $\forall l \in L$  tale che  $\varphi(l) = \{v, w\} \in \mathcal{P}_2(V)$  risulti  $\varphi'(f(l)) = \{f(v), f(w)\}$ .

**Osservazione 12.** Si verifica che se due grafi sono isomorfi allora hanno:

- (a) lo stesso numero di vertici e lo stesso numero di lati
- (b) lo stesso numero di vertici di grado fissato
- (c) lo stesso numero di cammini di lunghezza fissata.

Nessuna di queste condizioni è sufficiente (da sola) per affermare che due grafi siano isomorfi. Si osservi infine che vertici di ugual grado nei due grafi non possono avere distanze diverse.

**Esempio 10.** I grafi  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$   $\mathcal{G}' = (V', L', \varphi')$  rappresentati nella seguente figura sono isomorfi.

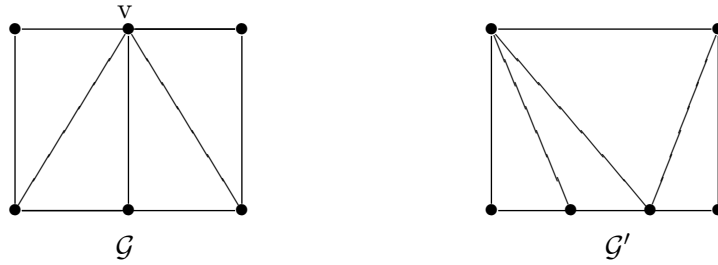


Come facilmente si verifica, l'isomorfismo è realizzato dall'applicazione

$$f : V \cup L \rightarrow V' \cup L'$$

tale che per ogni  $i = 1, \dots, 6$  risulti  $f(a_i) = v_i$  e per ogni  $j = 1, \dots, 11$ ,  $f(l_j) = m_j$ .

**Esempio 11.** I grafi  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}'$  in figura



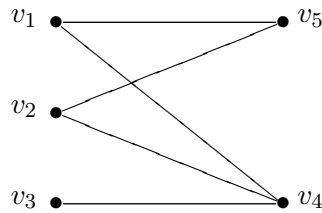
hanno entrambi 6 vertici e 9 lati, però non sono isomorfi perché  $\mathcal{G}$  ha il vertice  $v$  di grado 5, mentre i vertici di  $\mathcal{G}'$  hanno al massimo grado 4.

**Definizione 14.** Un grafo semplice  $\mathcal{G} = (V, L)$  si dice *bipartito* se esistono due sottoinsiemi non vuoti  $V_1$  e  $V_2$  di  $V$  tali che

1.  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \cup V_2 = V$
2.  $\forall v, w \in V_1$ ,  $v$  e  $w$  non sono adiacenti
3.  $\forall v, w \in V_2$ ,  $v$  e  $w$  non sono adiacenti.

Quando 1., 2., 3. sono verificate,  $V_1$  e  $V_2$  si dicono i due *partiti* di  $V$ .

**Esempio 12.** Il seguente grafo



è bipartito: i due partiti sono  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  e  $V_2 = \{v_4, v_5\}$ .

**Teorema 3.** Un grafo è bipartito se e soltanto se non ammette circuiti di lunghezza dispari.

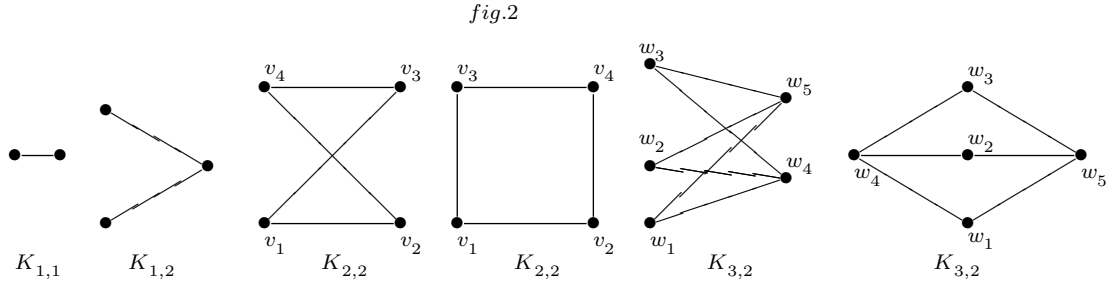
**Esempio 13.** Il grafo dell'Esempio 2 non è bipartito: infatti ammette il circuito  $l_1, l_2, l_8, l_7, l_9$  di lunghezza dispari.

**Esempio 14.** Il grafo dell'Esempio 9 non ammette circuiti di lunghezza dispari, per cui è bipartito. I due partiti sono  $V_1 = \{a, c, e, f\}$ ,  $V_2 = \{b, d\}$

**Definizione 15.** Sia  $G = (V, L)$  un grafo bipartito, con partiti  $V_1$  e  $V_2$ . Si dice *bipartito completo* se ogni vertice di  $V_1$  è adiacente a ogni vertice di  $V_2$ .

**Osservazione 13.** Fissati  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , a meno di una diversa rappresentazione, esiste un unico grafo bipartito completo tale che  $|V_1| = n$ ,  $|V_2| = m$ , che si indica con  $K_{n,m}$  (o con  $K_{m,n}$ ).

Nella seguente figura sono rappresentati i grafi bipartiti completi  $K_{1,1}$ ,  $K_{2,1}$ ,  $K_{2,2}$ ,  $K_{3,2}$ . Si osservino le due diverse rappresentazioni di  $K_{2,2}$  e di  $K_{3,2}$ .



**Definizione 16.** Un grafo  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  si dice *planare* se ammette una rappresentazione nella quale i suoi lati si intersecano soltanto negli estremi.

**Teorema 4.** Per un grafo planare avente  $|V|$  vertici,  $|L|$  lati e  $|F|$  facce, si ha:

$$|V| - |L| + |F| = 2 \quad \text{formula di Eulero.}$$

Nel computo delle facce si tiene conto anche di quella esterna.

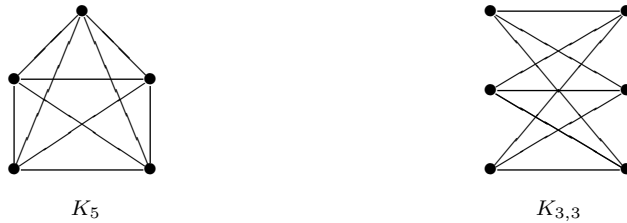
**Proposizione 3.** Per un grafo planare avente  $|V|$  vertici,  $|L|$  lati risulta:

$$|L| \leq 3|V| - 6$$

**Corollario 1.**  $K_5$  non è planare.

**Dimostrazione.** Per  $K_5$  si ha  $|L| = \frac{1}{2}(5 \cdot 4) = 10$ , mentre  $3|V| - 6 = 15 - 6 = 9$ . Poiché  $10 > 9$ ,  $K_5$  non può essere planare.

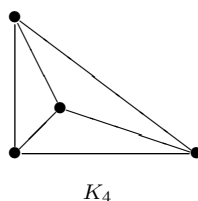
**Osservazione 14.** Si dimostra che anche  $K_{3,3}$  non è planare.



**Teorema 5.** (Kuratowski) Un grafo finito è planare se e solo se non ammette sottografi isomorfi a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$ .

**Esempio 15.** Sono planari i grafi degli Esempi 1, 2, 9, 10, 11; inoltre sono planari  $K_1, K_2, K_3, K_4$ . In particolare  $K_4$  ammette la seguente rappresentazione planare:



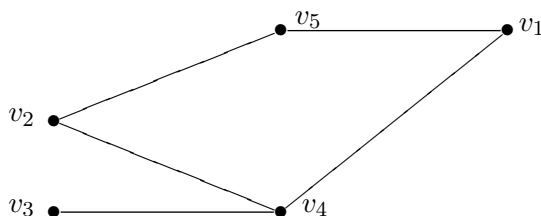


Sono planari  $K_{1,1}$ ,  $K_{2,1}$ ,  $K_{2,2}$ ,  $K_{3,2}$ : in fig.2 ci sono anche le rappresentazioni planari di  $K_{2,2}$  e di  $K_{3,2}$ . Infine è planare anche il grafo di fig.1, che schematizza il problema dei ponti di Königsberg,

**Esercizio 3.** Si verifichi la formula di Eulero per tutti i grafi planari menzionati.

**Proposizione 4.** Un grafo con numero di lati  $|L| < 9$  è planare.

**Esempio 16.** Il grafo dell'esempio 12 è planare poichè ha 5 lati. Infatti ammette la seguente rappresentazione:



**Definizione 17.** Si dice *foresta* un grafo semplice privo di circuiti. Si dice *albero* un grafo connesso privo di circuiti.

Relativamente ad un albero si dimostrano i seguenti risultati.

**Proposizione 5.** Sia  $\mathcal{G} = (V, L)$  un albero. Se  $|V| = n$ , allora  $|L| = n - 1$ .

**Proposizione 6.** Un albero ammette sempre almeno un vertice di grado 1.

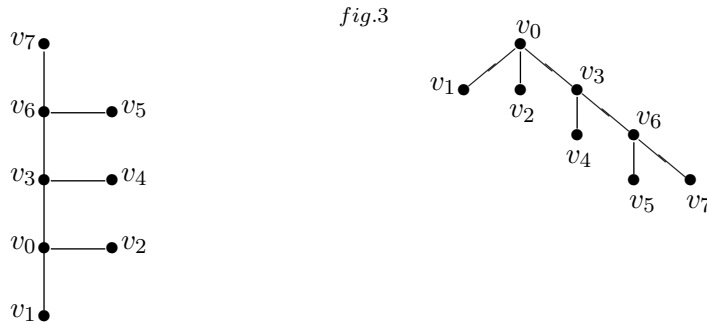
**Teorema 6.** Sia  $\mathcal{G} = (V, L)$  un grafo, con  $|V| = n$ . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- (a)  $\mathcal{G}$  è un albero
- (b)  $\forall v, w \in V$  esiste un unico cammino da  $v$  a  $w$
- (c)  $\forall v, w \in V$  tali che  $\{v, w\} \notin L$ , il grafo  $\mathcal{G}' = (V, L \cup \{\{v, w\}\})$  ammette un circuito
- (d)  $\forall l \in L$  il sottografo  $= (V, L \setminus \{l\})$  non è connesso
- (e)  $\mathcal{G}$  ha  $n - 1$  lati ed è connesso
- (f)  $\mathcal{G}$  ha  $n - 1$  lati ed è privo di circuiti.

**Definizione 18.** Sia  $\mathcal{G} = (V, L)$  un albero. In virtù della (b) del Teorema 6, per ogni  $v, w \in V$  esiste un unico cammino da  $v$  a  $w$ : la lunghezza di tale cammino si dice *distanza* tra  $v$  e  $w$ .

A questo punto si può chiarire il significato del nome “albero”. Scelto arbitrariamente un vertice  $v_0$  (al quale si dà il nome di radice), si pongono su un livello più basso tutti i vertici che hanno distanza 1 da  $v_0$ , poi, su un livello ancora più basso, i vertici aventi distanza 2 da  $V_0$  e così via, ponendo a livello sempre più basso i vertici che hanno

distanza maggiore da  $V_0$ . In questa maniera si ottiene la classica figura di albero con i rami rivolti verso il basso. Il procedimento è illustrato nella seguente figura.



**Proposizione 7.** *Un albero  $\mathcal{G} = (V, L)$  è sempre un grafo bipartito.*

**Osservazione 15.** In generale, si possono individuare i due partiti  $V_1$  e  $V_2$  di un grafo bipartito fissando un vertice  $v_0$  e considerando i due sottoinsiemi di  $V$

$$V_1 = \{v \in V : \text{la distanza di } v \text{ da } v_0 \text{ è pari} \}$$

$$V_2 = \{w \in V : \text{la distanza di } w \text{ da } v_0 \text{ è dispari} \}.$$

Naturalmente  $v_0 \in V_1$ .

**Esempio 17.** Nel grafo illustrato in fig.3, i due partiti sono

$$V_1 = \{v_0, v_4, v_6\} \quad V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_7\}.$$

**Esempio 18.** Il grafo dell'Esempio 9 è bipartito, perchè non ammette circuiti di lunghezza dispari. I due partiti sono

$$V_1 = \{a, e, f, c\} \quad V_2 = \{b, d\}.$$

**Proposizione 8.** *Un albero è sempre un albero planare.*

**Osservazione 16.** Un albero  $\mathcal{G}$  ha, ovviamente, un'unica faccia. In tal caso la formula di Eulero si riduce a:

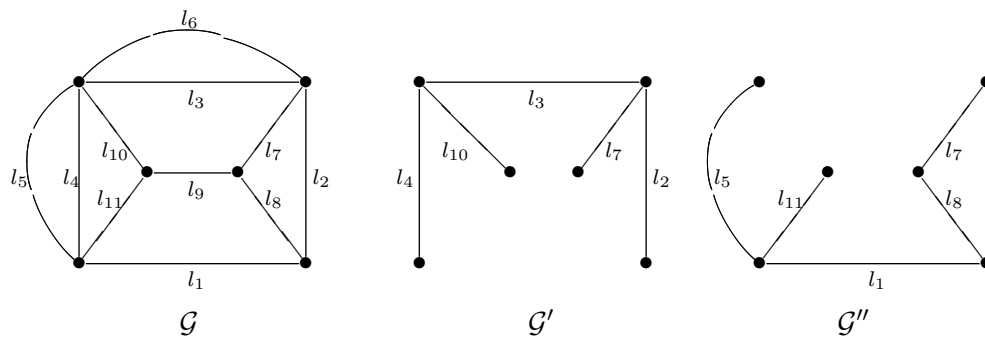
$$n - (n - 1) + 1 = 2,$$

dove  $n$  è l'ordine di  $G$ .

**Definizione 19.** Sia  $\mathcal{G} = (V, L, \varphi)$  un grafo. Si dice *albero di supporto* o *albero generatore* di  $\mathcal{G}$  un albero avente  $V$  come insieme dei vertici e insieme dei lati contenuto in  $L$ .

**Osservazione 17.** Ogni grafo ammette almeno un albero di supporto: basta eliminare alcuni lati in modo tale che non ci siano circuiti. Ne consegue che un grafo di ordine  $n$  non può avere meno di  $n - 1$  lati.

**Esempio 19.** Nel seguente diagramma sono rappresentati due alberi di supporto  $\mathcal{G}'$  e  $\mathcal{G}''$  dello stesso grafo  $\mathcal{G}$ .



Si osservi che  $\mathcal{G}'$  e  $\mathcal{G}''$  non sono isomorfi perchè  $\mathcal{G}'$  ha due vertici di grado 3, mentre  $\mathcal{G}''$  ha un solo vertice di grado 3.