BREVE CENNO DI LOGICA CLASSICA

La **logica** può essere definita come la scienza che studia le condizioni in base alle quali un ragionamento risulta *corretto* e *vero*. Un ragionamento è corretto se segue uno schema logico valido. Per esempio:

"se A è B e B è C allora A è C".

L'esempio più classico di questo tipo di ragionamento è:

" Socrate è un uomo, tutti gli uomini sono mortali, allora Socrate è mortale".

In questo caso

- A: Socrate
- B: uomo
- C: mortale

Si tratta di un ragionamento non solo corretto, ma anche vero nella sua conclusione. Il ragionamento:
"l'asino è un animale, gli animali sono volatili, allora l'asino vola" è corretto come il primo, ma non è vero nella sua conclusione, perchè si basa su un giudizio ("gli animali sono volatili") falso. Infine il ragionamento:

"il canguro è un marsupiale, i marsupiali sono animali, dunque Socrate è mortale"

non è corretto nel suo schema logico, ma il giudizio finale è corretto.

Si pongono alcune definizioni.

Definizione 1. Il **concetto** è la rappresentazione universale di qualcosa.

Bisogna fare attenzione a non confondere il concetto e l'immagine: entrambi contengono un certo messaggio, ma si distinguono in quanto uno dipende dal "pensare" e l'altra dal "sentire". Le immagini rappresentano aspetti sensibili delle cose, i concetti ne rappresentano il contenuto intelligibile. Ad esempio, quando si parla del concetto di uomo, non si pensa ad un particolare essere umano, ma all'essere vivente che ha tutte le caratteristiche umane. Se si vede un oggetto di colore giallo, se ne riconosce il colore proprio perchè si ha il concetto di giallo.

Definizione 2. Il **giudizio** è l'operazione per la quale viene negato o affermato un concetto rispetto ad un'altro: in altre parole, il giudizio, rispettivamente, unisce o divide tra loro due concetti.

Esempio 1. Dicendo: "l'informatico è un uomo", si uniscono i concetti "informatico" e "uomo"; dicendo "il serpente non è un mammifero", i concetti "serpente" e "mammifero" vengono separati.

Definizione 3. I due concetti che vengono "uniti" o "divisi" nel giudizio costituiscono la **materia** del giudizio. In particolare la materia è formata da

- **soggetto**
- **predicato**.

L'*affermazione* e la *negazione*, che, rispettivamente uniscono o dividono soggetto e predicato, costituiscono la **forma** del giudizio.

Esempio 2. Nell'Esempio 1, nel giudizio "l'informatico è un uomo", naturalmente "informatico" è il soggetto, "uomo" è predicato e la forma del giudizio è un'affermazione; nel giudizio "il serpente non è un mammifero" il soggetto è "serpente", il predicato è "mammifero" e il giudizio è una negazione.

La branca della logica detta **logica formale** si occupa della correttezza di un ragionamento, che dipende esclusivamente dalla *forma*, ovvero dal fatto che il ragionamento si adatti a certe regole formali.

D'altra parte, la **logica materiale** riguarda la *materia* del ragionamento e studia la verità di un ragionamento.

Definizione 4. Una **proposizione** è una frase mediante la quale un soggetto viene legato mediante il verbo essere (**copula**) ad un predicato. Quindi la proposizione è formata dai seguenti elementi:

- soggetto
- predicato
- copula.

Osservazione 1. Definita in questi termini, una proposizione potrebbe essere vera o falsa: questo può essere stabilito tramite il *giudizio*, che è un'operazione dell'intelletto.

Esempio 3. "L'informatico è un uomo" è una proposizione ed è vera, mentre "il serpente è un mammifero" è una proposizione falsa.

Bisogna dire che logica classica è riduttiva perchè incapace di render conto finanche del linguaggio naturale. Inoltre ci sono aspetti di questo linguaggio, come il contesto o l'intonazione, che certamente la logica non riesce ad esprimere, ma spesso il significato della frase dipende proprio da questi elementi.

Invece, nel caso del linguaggio matematico, la logica è abbastanza appropriata. Anche in questo caso, però non si usa rigorosamente la formalizzazione logica, perchè il discorso ne risulterebbe eccessivamente appesantito.

CENNI DI LOGICA

Alla base della logica (matematica) ci sono le così dette *proposizioni atomiche*, o *dichiarative*, ovvero le proposizioni (nel senso della logica classica) delle quali (tramite giudizio) si possa affermare con certezza se sono vere o false. Se una proposizione atomica è vera, ad essa si attribuisce valore di verità V (o T o anche 1), se è falsa si attribuisce ad essa valore di verità F (o 0).

Esempio 4.

1. P: 8 è un numero primo
2. Q: il cane è un mammifero.

Certamente la proposizione P è falsa, la proposizione Q è vera. Quindi il valore di verità di P è F, il valore di verità di Q è V.

Esempio 5. Le proposizioni

3. R: Marco è simpatico
4. S: x è pari

non possono essere classificate come proposizioni atomiche: R perchè presenta un predicato che non è di carattere oggettivo, per cui ciascuno può attribuire valore di verità V o F secondo i propri sentimenti; S presenta una variabile e quindi, come si vedrà in seguito, è una *funizone proposizionale.* Si può assegnare a S valore di verità se si definisce l'universo in cui varia x e inoltre si effettua una delle seguenti operazioni

(1) si sostituisce a x un determinato valore
(2) si fa precedere la x da un quantificatore.

I quantificatori sono:

- il *quantificatore universale* $\forall$ (si legge "per ogni")
- il *quantificatore esistenziale* $\exists$ (si legge "esiste")

Se l'universo nel quale varia x è l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, sostituendo a x i valori 6 e -3, per esempio, S diventa:
"6 è positivo" che ha valore di verità V;
"-3 è positivo" che ha valore di verità F.
Se si usano i quantificatori, si ha:
"$(\forall x)$ (x è positivo)" che ha valore di verità F;
"$(\exists x)$ (x è positivo)" che ha valore di verità V.

Le proposizioni atomiche possono essere combinate tramite i connettivi logici.

Definizione 5. (NEGAZIONE)
Data una proposizione P, la negazione della proposizione P si indica con

$$\bar{P} \text{ oppure } \neg P.$$

Se P è vera allora $\neg P$ è falsa. Se P è falsa allora $\neg P$ è vera.

Esempio 6. P: "Gli iscritti al primo anno di Informatica presso l'università di Bari sono meno di 100" ha valore di verità F.
Allora
$\neg P$: "Non è vero che gli iscritti al primo anno di Informatica presso l'università di Bari sono meno di 100" ha valore di verità V.
$\neg P$ si può scrivere anche: "Gli iscritti al primo anno di Informatica presso l'università di Bari sono più di 100" (sempre con valore di verità V).

Esempio 7. P: "L'Italia è una Repubblica" ha valore di verità V.
Allora
$\neg P$: "L'Italia non è una Repubblica" ha valore di verità F.

Dalla definizione si deduce subito la tavola di verità della negazione

P	$\neg P$
V	F
F	V

Definizione 6. (CONGIUNZIONE)
Siano P e Q due proposizioni. La proposizione "P e Q"(congiunzione di P e Q) si denota con

$$P \wedge Q.$$

È vera quando P e Q sono entrambe vere ed è falsa altrimenti (ovvero falsa quando almeno una delle due è falsa).

La tavola di verità della congiunzione è:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esempio 8.

P: Torino è la capitale d'Italia.
Q: 16 è un numero pari.

Allora la congiunzione di P e Q è:

$P \wedge Q$: Roma è la capitale d'Italia e 16 è un numero pari.

Certamente $P \wedge Q$ ha valore di verità F perchè Q ha valore di verità V ma P ha valore di verità F.

Esempio 9.

P: 12 è multiplo di 3
Q: $\frac{1}{2}$ non è un numero intero.

Allora la congiunzione di P e Q è:

$P \wedge Q$: 12 è multiplo di 3 e $\frac{1}{2}$ non è un numero intero.

Certamente $P \wedge Q$ ha valore di verità V perchè P e Q hanno valore di verità V.

Definizione 7. (DISGIUNZIONE)
Siano P e Q due proposizioni. La proposizione "P o Q"(disgiunzione di P e Q) si denota con

$$P \vee Q$$

ed è falsa quando P e Q sono entrambe false ed è vera altrimenti (ovvero vera quando almeno una delle due è vera).

Si deduce la tavola di verità della disgiunzione:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio 10.

P: La macchina ha il motore diesel.
Q: La macchina ha il motore a benzina.

Allora la disgiunzione di P e Q:

$P \vee Q$: La macchina ha il motore diesel o a benzina.

Naturalmente $P \vee Q$ ha valore di verità V.

Definizione 8. (IMPLICAZIONE)
Siano P e Q due proposizioni. La proposizione implicazione "P implica Q"si denota con

$$P \longrightarrow Q.$$

È falsa quando P è vera e Q è falsa ed è vera altrimenti.

Si può scrivere la tavola di verità della implicazione

P	Q	$P \longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Quindi se P è vera Q, è vera, se P è falsa non si può stabilire la verità di Q.

Esempio 11.

P: Il cellulare funziona.
Q: La batteria del cellulare è carica.

L'implicazione è:

$P \longrightarrow Q$: Se il cellulare funziona, allora la batteria è carica.

Se il cellulare non funziona, potrebbe essere scarica la batteria o potrebbe esserci qualche altro problema e quindi .

Definizione 9. (DOPPIA IMPLICAZIONE o EQUIVALENZA)
Due proposizioni P e Q si dicono equivalenti e si scrive

$$P \longleftrightarrow Q,$$

se $(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$.

La tavola di verità dell'equivalenza è:

P	Q	$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow P$	$(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V