Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 5

Esercizio 5.1 (pag. 73)

1. Sia K_n un grafo completo. Allora K_n ha $\dfrac{n(n-1)}{2}$ lati.

Soluzione
Per definizione (cfr. testo Def. 5.5, pag 71) il grafo K_n ha n vertici ed inoltre due vertici distinti sono sempre adiacenti.
Quindi, se indichiamo con $v_1, v_2, \cdots, v_n$ gli n vertici, possiamo contare quanti sono i lati:

$$\begin{array}{rcl}
v_1v_2, v_1v_3, \cdots, v_1v_n : & n-1 & \text{lati} \\
v_2v_3, v_2v_4, \cdots, v_2v_n : & n-2 & \text{lati} \\
v_3v_4, v_3v_5, \cdots, v_3v_n : & n-3 & \text{lati} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-2}v_n : & 2 & \text{lati} \\
v_{n-1}v_n : & 1 & \text{lato}
\end{array}$$

In totale i lati sono quindi $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \dfrac{(n-1)n}{2}$.
(Per questo calcolo, confronta l' Esempio 2.11 a pag. 13 del testo).

2. Sia ora Γ un grafo regolare di grado r con n vertici: allora Γ ha $\frac{1}{2}r \cdot n$ lati.

Soluzione
Poichè il grafo Γ è regolare di grado r, ogni vertice ha esattamente r lati incidenti ($r > 0$) (Definizione 5.4 pag. 71 del testo).
Detti $v_1, v_2, \cdots, v_n$ gli n vertici, contiamo i lati.
Poichè ogni vertice v_j è adiacente ad altri r vertici, in totale avremo $n \cdot r$ spigoli. Inoltre poichè $v_jv_i = v_iv_j \ \forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e quindi ogni lato viene contato due volte, si può concludere che il numero di lati distinti è $\dfrac{r \cdot n}{2}$.

Esercizio 5.2 (pag. 78)
Dimostrare che un albero pienamente binario con 5 vertici interni, possiede 11 vertici.

Soluzione
Ricordiamo che un grafo si dice albero se non contiene cicli (definizione 5.9 pag. 73 del testo), ed è pienamente binario se ogni vertice ha esattamente due "figli" (pag. 74).

Si può dimostrare che *in un albero pienamente binario, detto n il numero dei vertici interni ed f il numero delle* foglie, s*i ha che* $f = n + 1$. (E quindi il numero totale di vertici è $2n + 1$: nel nostro caso $2 \cdot 5 + 1 = 11$).

Dimostriamo per induzione l'uguaglianza $f = n + 1$.

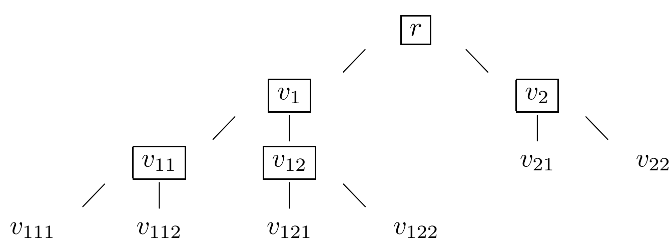
Se $n = 1$ l'albero ha 1 solo vertice interno, che sarà la radice, e quindi avrà due foglie, cioè $f = 2$.

Sia vera l'uguaglianza per $n-1$, cioè un albero pienamente binario avente $n-1$ vertici interni abbia $(n-1)+1 = n$ foglie (Ipotesi di induzione).

Consideriamo ora un albero Γ (pienamente binario) con n vertici interni.
Per sfruttare l'ipotesi di induzione togliamo un vertice interno che non sia la radice e di conseguenza togliamo le due foglie uscenti da esso (e quindi questo vertice interno diventa foglia). Otteniamo così un albero Γ' (pienamente binario) che ha $(n-1)$ vertici interni e quindi n foglie, per l'ipotesi di induzione.
Contiamo ora le foglie di Γ : poichè nel passaggio da Γ' a Γ una foglia diventa un vertice interno, ad esso dovranno essere aggiunte le due foglie terminali, per cui il numero delle foglie di Γ è uguale al numero delle foglie di Γ' più 2, cioè $f = (n-1)+2 = n+1$, come volevasi dimostrare.

Osservazione
Poichè il numero degli alberi pienamente binari con 5 vertici interni è limitato (sono solo 4) la verifica si poteva fare con un'osservazione diretta.
Sia r il vertice "radice" (che è interno per definizione). Siano v_1 e v_2 i vertici "figli" di primo livello.
Abbiamo 4 casi.

1. Supponiamo che v_1 e v_2 siano entrambi interni. Allora avremo soltanto altri due vertici interni (di secondo livello) che possono essere entrambi discendenti di v_1 (e allora li diremo v_{11} e v_{12}) oppure entrambi discendenti di v_2 (e allora li diremo v_{21} e v_{22}). Da questi vertici interni partiranno le foglie (che non sono interni). In questo caso si avrà che in totale i vertici sono 5 (interni) +6 (foglie)= 11.

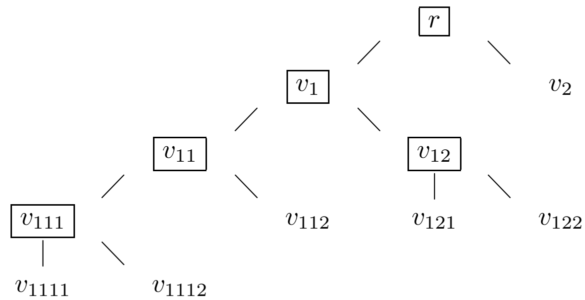


2. Siano v_1 e v_2 non entrambi interni. Senza ledere la generalità del discorso, supponiamo che v_1 sia interno e che v_2 sia una foglia.

Allora v_1 avrà due discendenti v_{11} e v_{12}.

Si possono presentare due casi: v_{11}e v_{12} entrambi interni oppure uno interno e l'altro foglia.

2.1 Siano v_{11}e v_{12} entrambi interni: allora c'è un solo altro vertice interno, che, senza ledere la generalità, supponiamo sia figlio di v_{11} e lo diciamo v_{111}. Allora i vertici interni sono $r, v_1, v_{11}, v_{12}, v_{111}$. Le foglie saranno quindi: $v_2, v_{112}, v_{121}, v_{122}, v_{1111}, v_{1112}$

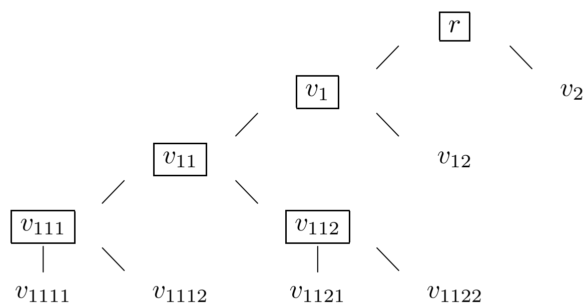


e quindi sono 6.

2.2 Sia v_{11} interno e v_{12} una foglia. Anche in questo caso avremo due possibilità: i "figli" di v_{11} sono entrambi interni oppure uno interno e uno foglia.

Consideriamo i due sottocasi.

2.2.1 Siano v_{111} e v_{112} entrambi interni: abbiamo allora 5 vertici interni. Le foglie saranno $v_2, v_{12}, , v_{1111}, v_{1112}, v_{1121}, v_{1122}.$



2.2.2 Sia infine v_{111} vertice interno e v_{112} foglia. Allora uno dei "figli" di v_{111} dovrà essere interno e l'altro foglia. In questo caso le foglie saranno

$v_2, v_{12}, , v_{112}, v_{1112}, v_{11111}, v_{11112}.$