1 Soluzione degli esercizi del capitolo 7

Esercizio 7.1 (*pag.89*)

Nell'insieme $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y)|x,\ y \in \mathbb{Z}\}$ si consideri l'operazione $\star$ così definita:

$$(x, y) \star (z, t) = (x + z, yt).$$

Si stabilisca se è commutativa, associativa e si determinino gli elementi invertibili.

Soluzione

a) Proprietà commutativa:

Poiché $(x, y) \star (z, t) = (x + z, yt)$ e $(z, t) \star (x, y) = (z + x, ty)$, per la proprietà commutativa della somma e del prodotto in $\mathbb{Z}$, i risultati sono uguali per ogni coppia di elementi $(x, y),\ (z, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Proprietà associativa:

$((x, y) \star (z, t)) \star (u, v) = (x + z, yt) \star (u, v) = ((x + z) + u, (yt)v)$

e

$(x, y) \star ((z, t) \star (u, v)) = (x, y) \star (z + u, tv) = (x + (z + u), y(tv))$.

Ancora i risultati sono uguali per la proprietà associativa di somma e prodotto validi in $\mathbb{Z}$ e quindi è verificata la proprietà associativa per ogni terna di elementi in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

c) Prima di determinare gli eventuali elementi invertibili, stabiliamo se esiste l'elemento neutro (poiché l'operazione è commutativa, un eventuale elemento neutro a sinistra o a destra sarà bilatero e quindi unico), cioè l'elemento (h, k) di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si abbia:

$(h, k) \star (x, y) = (h + x, ky) = (x, y)$.

L'elemento neutro sarà quindi l'elemento le cui componenti soddisfano contemporaneamente le condizioni: $h + x = x$ e $ky = y$ per ogni $h,\ k \in \mathbb{Z}$ e quindi è l'elemento $(0, 1)$.

Cerchiamo ora gli elementi unitari (o invertibili), cioè gli elementi $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ per i quali esista un elemento (x, y) tale che $(a, b) \star (x, y) = (a + x, by) = (0, 1)$. Si ottiene $x = -a$ e $b = \pm 1$. Quindi $U = \{(a, 1), (a, -1)|a \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 7.2 (*pag. 89*)

Nell'insieme $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x, y)|x,\ y \in \mathbb{Q}\}$, ove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali si consideri l'operazione $\circ$ così definita:

$$(x, y) \circ (z, t) = (xz, yz + 2t).$$

Si stabilisca se è commutativa, associativa e se ammette elemento neutro.

Soluzione

a) Poiché $(x, y) \circ (z, t) = (xz, yz + 2t)$ e $(z, t) \circ (x, y) = (zx, tx + 2y)$, in generale i risultati non sono uguali, come si puó vedere dal controesempio seguente:
$(0, 1) \circ (2, 1) = (0, 2 + 2) = (0, 4)$ mentre $(2, 1) \circ (0, 1) = (0, 0 + 2) = (0, 2)$.

b) Analogamente non vale la proprietà associativa, come mostra il seguente controesempio:
$[(1, 0) \circ (2, 1)] \circ (0, 1) = (2, 2) \circ (0, 1) = (0, 2)$ mentre
$(1, 0) \circ [(2, 1) \circ (0, 1)] = (1, 0) \circ (0, 2) = (0, 4)$.

c) Eventuale elemento neutro: cerchiamo un elemento $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ valgano le relazioni:

i) $(a, b) \circ (x, y) = (ax, bx + 2y) = (x, y)$

e

ii) $(x, y) \circ (a, b) = (xa, ya + 2b) = (x, y)$.

In questo caso la condizione i) implica: $a = 1$ e $bx = -y$: quindi non esiste elemento neutro a sinistra poiché un tale elemento dipenderebbe dalla scelta di x e di y.

Invece la ii) ha come soluzioni $a = 1$ e $b = 0$, quindi esiste elemento neutro a destra.

Esercizio 7.3 (*pag. 89*)

Nell'insieme $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) | a,\ b \in \mathbb{R}\}$, ove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, si consideri l'operazione $\circ$ così definita:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Si verifichi che l'operazione $\circ$ è associativa e commutativa. Si determini inoltre l'elemento neutro e l'insieme degli elementi invertibili.

Soluzione

a) Proprietà commutativa:
Poiché $(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ e $(c, d) \circ (a, b) = (ca - db, cb + da)$, per la proprietà commutativa della somma e del prodotto in $\mathbb{R}$, i risultati sono uguali per ogni coppia di elementi $(a, b),\ (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Proprietà associativa:
$((a, b) \circ (c, d)) \circ (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \circ (e, f) =$
$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$
$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$

e

$(a, b) \circ ((c, d) \circ (e, f)) = (a, b) \circ (ce - df, cf + de) =$
$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))) =$
$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)$.

Ancora i risultati sono uguali per le proprietà associativa e commutativa di somma e prodotto valide in $\mathbb{R}$ e quindi è verificata la proprietà associativa per ogni terna di elementi in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) L'eventuale elemento neutro sarà un elemento $(h, k) \in \mathbb{R}$ tale che $\forall (a, b) \in \mathbb{R}$ soddisfi la relazione $(a, b) \circ (h, k) = (ah - bk, ak + bh) = (a, b)$.

Dobbiamo risolvere il sistema in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ah - bk & = a \\ ak + bh & = b \end{cases} \text{ che ha soluzione: } h = 1, \; k = 0.$$

L'elemento neutro è quindi $(1, 0)$

d) Elementi invertibili saranno gli elementi $(h, k) \in \mathbb{R}$ per i quali esista un elemento $(a, b) \in \mathbb{R}$ tale che $(a, b) \circ (h, k) = (1, 0)$. Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} ah - bk & = 1 \\ ak + bh & = 0 \end{cases}$$

Otteniamo le soluzioni $a = \dfrac{h}{h^2 + k^2}$ e $b = \dfrac{-k}{h^2 + k^2}$. Gli elementi invertibili saranno quindi tutte le coppie (h, k) con h e k non contemporaneamente nulli.