Definizione 1. Siano A e B insiemi. Si definisce *prodotto cartesiano* l'insieme:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Osservazione 1. Si osservi che nella Definizione 1. le coppie sono **ordinate**, vale a dire la coppia $(x, y) \neq (y, x)$ se $x \neq y$. È quindi chiaro che $A \times B \neq B \times A$, se $A \neq B$. Risulta inoltre: $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Da ora in poi, in questo capitolo, si supporrà di considerare insiemi non vuoti, a meno di esplicito avviso contrario.

Definizione 2. Siano A e B insiemi. Si dice *relazione tra gli A elementi di A e gli elementi di B* un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Se $A = B$, si parla semplicemente di *relazione tra gli elementi di A*; quindi, in questo caso, $\mathcal{R} \subset A \times A$.

Esempio 1. L'insieme

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ ;\ y = -x\}$$

è una relazione tra gli elementi di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Si ha

$$\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -3), \dots\}.$$

Esempio 2. L'insieme

$$\mathcal{R}' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ ;\ y = -x\}$$

è una relazione tra gli elementi di $\mathbb{Z}$. Risulta

$$\mathcal{R}' = \{\dots, (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2), \dots\}.$$

Definizione 3. Siano A un insieme non vuoto, $\mathcal{R}$ una relazione tra gli elementi di A. Si dice che $\mathcal{R}$ è *riflessiva* se è verificata la sequente condizione:

$$(\forall a \in A)\ ((a, a) \in \mathcal{R}).$$

Osservazione 2. Ovviamente, perchè $\mathcal{R}$ non sia riflessiva basta che esista un solo elemento $x \in A$ tale che $(x, x) \notin A$.

Esempio 3. Non ha senso chiedersi se la relazione $\mathcal{R}$ dell'Esempio 1 sia riflessiva, visto che si tratta di una relazione tra elementi di due insiemi diversi.

Esempio 4. Delle relazioni sull'insieme $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\mathcal{R}_1 = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\gamma, \gamma), (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\alpha, \beta), (\beta, \gamma)\}$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\gamma, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \gamma)\}$$
$$\mathcal{R}_4 = \{(\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\alpha, \gamma)\}$$
$$\mathcal{R}_5 = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\gamma, \gamma), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha)\}$$

sono riflessive $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_5$ mentre $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_4$ non sono riflessive.

Definizione 4. Siano A un insieme non vuoto, $\mathcal{R}$ una relazione tra gli elementi di A. Si dice che $\mathcal{R}$ è *simmetrica* se è verificata la sequente condizione:

$$(\forall a, b \in A)\ ((a, b) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ (b, a) \in \mathcal{R}).$$

Osservazione 3. Naturalmente è sufficiente che esista una sola coppia $(x, y) \in \mathcal{R}$, con $x \neq y$, tale che $(y, x) \notin \mathcal{R}$, perchè $\mathcal{R}$ non sia simmetrica.

Definizione 5. Si dice che $\mathcal{R}$ è *antisimmetrica* se è verificata la sequente condizione:

$$(\forall a, b \in A)\ \big(\ ((a, b) \in \mathcal{R}\ \wedge (b, a) \in \mathcal{R})\ \Rightarrow\ a = b\big).$$

Osservazione 4. La condizione di antisimmetria può essere riscritta nel modo che segue:

$$\forall a, b \in A, a \neq b\ \ \big((a, b) \in \mathcal{R}\big) \Rightarrow (b, a) \notin \mathcal{R}.$$

Esempio 5. $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sono antisimmetriche, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_5$ sono simmetriche, $\mathcal{R}_4$ non è simmetrica ne' antisimmetrica.

Definizione 6. Siano A un insieme non vuoto, $\mathcal{R}$ una relazione tra gli elementi di A. Si dice che $\mathcal{R}$ è *transitiva* se è verificata la sequente condizione:

$$(\forall a, b, c \in A) \ \big(\ ((a,b) \in \mathcal{R} \ \wedge (b,c) \in \mathcal{R}) \ \Rightarrow \ (a,c) \in \mathcal{R} \ \big).$$

Osservazione 5. Anche in questo caso è sufficiente che esistano $(x,y), \ (y,z) \in \mathcal{R}$ tali che $(x,z) \notin \mathcal{R}$ perchè $\mathcal{R}$ non sia transitiva.

Esempio 6. $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_5$ sono transitive, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_4$ non lo sono.

Esempio 7. La relazione $\mathcal{R}'$ dell'Esempio 2 non è riflessiva perchè, per esempio, $(1,1) \notin \mathcal{R}$, è simmetrica, perchè

$$(x,y) \in \mathcal{R}' \Rightarrow y = -x \Rightarrow x = -y \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{R}'$$

$\mathcal{R}'$ e non è transitiva: $((1,-1) \in \mathcal{R} \wedge (-1,1) \in \mathcal{R})$ ma $(1,1) \notin \mathcal{R}$

Osservazione 6. Si osservi che spesso si usa la notazione $a\mathcal{R}b$ in luogo di $(a,b) \in \mathcal{R}$.

Definizione 7. Si dice che $\mathcal{R}$ è *una relazione d'ordine* se è **riflessiva, antisimmetrica e transitiva**. La coppia ordinata $(A, \mathcal{R})$ (ovvero l'insieme A munito della relazione d'ordine) si chiama insieme ordinato.

Esempio 8. La relazione

$$\mathcal{R}_1 = \{(\alpha,\alpha), (\beta,\beta), (\gamma,\gamma), (\alpha,\beta), (\alpha,\gamma)\}$$

è d'ordine.

Esempio 9. Sia X un insieme. Allora la relazione " $\subset$ " è una relazione d'ordine su $\mathscr{P}(X)$. Infatti si è osservato in precedenza che per ogni A, B, C sottoinsiemi di X

(1) $A \subset A$
(2) se $A \subset B$ e $B \subset A$ allora $A = B$
(3) se $A \subset B$ e $B \subset C$ allora $A \subset C$.

Esempio 10. L'ordinamento naturale " $\leq$ " sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri relativi è la relazione definita come segue:
$\forall m, n \in \mathbb{Z}$, si dice che $m \leq n$ se e solo se $\exists h \in \mathbb{N}$ tale che $n = m + h$.
Si verifica che " $\leq$ " è una relazione d'ordine su $\mathbb{Z}$.

- riflessività:
  se $n \in \mathbb{Z}$, allora $\exists \ 0 \in \mathbb{N}$ tale che $n = n + 0$ e pertanto $n \leq n$
- antisimmetria:
  siano $n, m \in \mathbb{Z}$, in modo che $n \leq m \wedge m \leq n$. Si ha:

$$(n \leq m \wedge m \leq n) \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = m + h) \wedge (\exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = m + k)$$

$$\Rightarrow n = m + h = n + k + h \Rightarrow h + k = 0 \Rightarrow h = k = 0 \Rightarrow n = m.$$

- transitività:
  siano $n, m, p \in \mathbb{Z}$, in modo che $m \leq n \wedge n \leq p$. Allora:

$$(m \leq n \wedge n \leq p) \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{N} \text{ tale che } m = m + h) \wedge (\exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } p = n + k)$$

$$\Rightarrow p = n + k = m + h + k \Rightarrow \exists h + k \in \mathbb{N} \text{ tale che } p = m + (h + k) \Rightarrow m \leq p.$$

Esempio 11. Si può considerare su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione: $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, si pone $m < n$ se e solo se $\exists \ h \in \mathbb{N}^*$ tale che $n = m + h$. Questa relazione non è d'ordine in quanto non riflessiva. Si osservi che

$$m < n \Leftrightarrow (m \leq n \ \wedge \ m \neq n).$$

Definizione 8. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Si dice che *a divide b* o che *è un divisore di b* o anche che *b moltiplica a* o *b è un multiplo di a* e si scrive $a \mid b$ se esiste $h \in \mathbb{Z}$ tale che $b = ha$. Quindi

$$a \mid b \;\Leftrightarrow\; \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } b = ha$$

Esercizio 1. La relazione " $\mid$ " sull'insieme $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dei numeri naturali non nulli è una relazione d'ordine. Si tratta di provare che la relazione definita $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ da

$$m \mid n \iff \exists h \in \mathbb{N}^* \text{ tale che } n = hm$$

è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. La verifica è del tutto analoga a quella dell'Esempio 10.

Osservazione 7. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, $B \subset A$. Allora si può considerare la relazione $\leq_B$ tra gli elementi di B definita come segue:

$$(\forall x, y \in B)\ \big(\ x \leq_B y \;\Leftrightarrow\; x \leq y\ \big).$$

Si verifica facilmente che $\leq_B$ è una relazione d'ordine su B che si dice *relazione d'ordine indotta* da A su B. Per non appesantire la notazione, la relazione d'ordine indotta su B si denota con lo stesso simbolo "$\leq$".

Esempio 12. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ si indica con $\mathcal{D}_n$ l'insieme dei divisori di n. Di particolare interesse è la relazione d'ordine " $\mid$ " indotta sull'insieme $\mathcal{D}_n$.
Se in particolare $n = 30$, $\mathcal{D}_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ e per ogni $x \in \mathcal{D}_{30}$ risulta

$$1 \mid x, \quad x \mid x, \quad x \mid 30$$

e inoltre

$$2 \mid 6, \ \ 2 \mid 10, \ \ 3 \mid 6, \ \ 3 \mid 15, \ \ 5 \mid 10, \ \ 5 \mid 15.$$

Definizione 9. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, X un sottoinsieme di A, $x_0 \in X$. Si dice che x_0 *è minimo di X* se:

$$(\forall x \in X)\ (x_0 \leq x).$$

Si dice che x_0 *è massimo di X* se

$$(\forall x \in X)\ (x \leq x_0).$$

Se $X = A$, si parla di minimo o di massimo di A.

Proposizione 1. *Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, X un sottoinsieme di A. Se esiste un massimo (o un minimo) di X, esso è unico.*

Dimostrazione. Siano, infatti, x_0 e x_1 due massimi di X. Allora, poichè x_0 è massimo e $x_1 \in X$, si ha $x_1 \leq x_0$ e, scambiando i ruoli di x_0 e x_1, si ha $x_0 \leq x_1$. Per la proprietà antisimmetrica delle relazioni d'ordine deve essere $x_0 = x_1$. (Analoga la dimostrazione dell'unicità del minimo.)

Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, X un sottoinsieme di A, $x_0 \in X$. Grazie alla Proposizione 1, è possibile utilizzare un simbolo specifico per il minimo (che si dice anche *il più piccolo elemento*) di X, e per il massimo (che si dice anche *il più grande elemento*) di X, quando esistono. Essi sono rispettivamenete

$$min(X) \ \text{ e } \ max(X).$$

Esempio 13.

1. Sia $(A, \mathcal{R}_1)$ l'insieme ordinato dell'esempio 4. È evidente che $\alpha = min(A)$ ma non esiste il massimo di A.
2. se si considera l'insieme $(\mathbb{N}, \leq)$, dove "$\leq$" è l'ordinamento naturale di $\mathbb{N}$, risulta $0 = min(\mathbb{N})$, ma non esiste il massimo
3. nell'insieme ordinato $(\mathbb{N}^*, \mid)$ dell'esempio 1, si ha $1 = min(\mathbb{N}^*)$, ma non esiste il massimo di $\mathbb{N}^*$

4. considerando il sottoinsieme $X = \{2, 3, 9, 18\}$ come sottoinsieme dell'insieme ordinato $(\mathbb{N}^*, \mid)$, esiste $max(X) = 18$ ma non esiste il minimo di X
5. nell'insieme ordinato $(D_n, \mid)$ dell'Esempio 12, si ha $min(D_n) = 1$, $max(D_n) = n$.

Definizione 10. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, $X \subset A$. Un elemento $y \in A$ si dice *minorante* di X se

$$(\forall x \in X)(y \leq x).$$

Se X è dotato di minoranti si dice *minorato* o *limitato inferiormente*.

Definizione 11. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, $X \subset A$. Un elemento $y \in A$ si dice *maggiorante* di X se

$$(\forall x \in X)(x \leq y).$$

Se X è dotato di maggioranti si dice *maggiorato* o *limitato superiormente*.

Osservazione 8. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, $X \subset A$. Si osservi che se X ha minimo (rispettivamente un massimo), esso è sicuramente un minorante (rispettivamente maggiorante), ma in generale un minorante (rispettivamente maggiorante) non è un minimo (rispettivamente un massimo) perchè non appartiene a X.

Definizione 12. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, X un sottoinsieme di A, limitato inferiormente, $\alpha \in A$. Si dice che α è *estremo inferiore di* X se è il più grande dei minoranti.

In altri termini α è estremo inferiore di se verifica le seguenti condizioni:
(1) $(\forall x \in X)\ (\alpha \leq x)$
(2) $\forall\ \beta \in A$ tale che $(\forall x \in X)\ (\beta \leq x)$ si ha $\beta \leq \alpha$.
Si vede subito che se esiste un estremo inferiore, esso è unico, per cui è lecito scrivere $\alpha = inf(X)$.

Definizione 13. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, X un sottoinsieme di A, limitato superiormente, $\alpha \in A$. Si dice che α è *estremo superiore* di X se è il più piccolo dei maggioranti.

In altre parole α è estremo superiore verifica le seguenti condizioni:
(1) $(\forall x \in X)\ (x \leq \alpha)$
(2) $\forall\ \beta \in A$ tale che $(\forall x \in X)\ (x \leq \beta)$ si ha $\alpha \leq \beta$.
Si vede subito che se esiste un estremo superiore di X, esso è unico, per cui è lecito scrivere $\alpha = sup(X)$.

Osservazione 9. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato, $X \subset A$. Se X ammette minimo esso è anche estremo inferiore di X. Non vale il viceversa: ovvero se X ammette estremo inferiore, non è detto che questo sia il minimo di X. Ciò accade soltanto nel caso in cui l'estremo inferiore appartenga a X. Naturalmente lo stesso discorso vale per l'eventuale massimo o estremo inferiore di X.

Osservazione 10. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato. Nel caso $X = \{x, y\} \subset A$, $\alpha = sup(x, y)$ vuol dire
(1) $x \leq \alpha,\ y \leq \alpha$
(2) $\forall\ \beta \in A$ tale che $x \leq \beta,\ y \leq \beta$ si ha $\alpha \leq \beta$.
Analogamente $\alpha = inf(x, y)$ si scrive
(1) $\alpha \leq x,\ \alpha \leq y$
(2) $\forall\ \beta \in A$ tale che $\beta \leq x,\ \beta \leq y$ si ha $\beta \leq \alpha$.

Esercizio 2. Esplicitando la definizione di estremo superiore e inferiore per una coppia sottoinsiemi di un insieme X nell'insieme ordinato in $(\mathscr{P}(X), \subset)$ cosa si ottiene ?

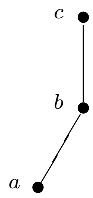
Definizione 14. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato. Si dice che "$\leq$ " è una *relazione di ordine totale* ovvero che $(A, \leq)$ è *totalmente ordinato* se e soltanto se

$$(\forall x, y \in A)\ (x \leq y \vee y \leq x).$$

Nel caso contrario, cioè se $\exists x, y$ tali che $x \nleq y \wedge y \nleq x$, si dice che "$\leq$ " è una *relazione di ordine parziale* oppure che $(A, \leq)$ è *parzialmente ordinato.*

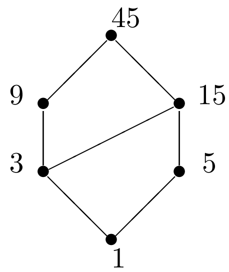
Esempio 14. Sono totalmente ordinati $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$; sono parzialmente ordinati $(\mathbb{N}^*, \mid)$, $(D_n, \mid)$, $(\mathscr{P}(A), \subset)$, $(A, \mathcal{R}_1)$.

Un insieme $(A, \leq)$ ordinato finito può essere rappresentato mediante un *diagramma di Hasse*: se $a, b \in A$, $a \leq b$ e se non ci sono elementi intermedi basta collegare a con b mediante un segmento ascendente. Siano ora $a, b, c \in A$, con $a \leq b$ e $b \leq c$. Poichè vale la proprietà transitiva, a viene collegato con b mediante un segmento ascendente, b viene collegato con c mediante un altro segmento ascendente, e a sarà collegato con c mediante una spezzata ascendente.

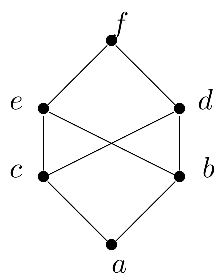


Quindi, guardando semplicemente il diagramma si può stabilire se due elementi x e y si possono paragonare.

Esempio 15. Per esempio il diagramma di Hasse dei divisori di 45 ordinato per divisibilità $(D_{45}, \mid)$ è:



Esercizio 3. Si consideri l'insieme $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ sul quale sia assegnata la relazione d'ordine "$\leq$" rappresentata dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Descrivere la relazione d'ordine "$\leq$"
(2) determinare l'insieme dei minoranti di $A = \{e, d\}, B = \{e, d, b\}$
(3) determinare l'insieme dei maggioranti di $C = \{c, b\}, D = \{c, b, d\}$

(4) determinare gli eventuali estremi inferiori di A, B, X
(5) determinare gli eventuali estremi superiori di C, D, X
(6) determinare gli eventuali massimi e minimi di A, B, C, D, X.

Soluzione

(1) Poichè si è specificato che "$\leq$" è una relazione d'ordine, la riflessività è scontata. Si deduce dal diagramma che:

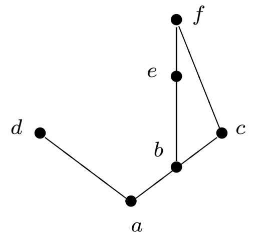
$$\forall x \in X \ a \leq x, \quad x \leq f;$$

inoltre

$$c \leq e, \ c \leq d, \ b \leq e, \ b \leq d.$$

(2) L'insieme dei minoranti di A è $\{c, b, a\}$, quello di B è $\{a\}$.
(3) L'insieme dei maggioranti di C è $\{e, d, f\}$, quello di D è $\{f\}$.
(4) Poichè b e c non sono paragonabili, non esiste l'estremo inferiore di A, ma esiste l'estremo inferiore di B, che ne è l'unico minorante: a. X ha estremo inferiore a.
(5) Poichè e e d non sono paragonabili, non esiste l'estremo superiore di C, ma esiste l'estremo superiore di D, che ne è l'unico maggiorante: f. X ha estremo superiore f.
(6) X ha minimo e massimo: rispettivamente a e f. A, B, C, D non hanno ne' minimo ne' massimo.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ sul quale sia assegnata la relazione d'ordine "$\leq$" rappresentata dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Descrivere la relazione d'ordine "$\leq$"
(2) determinare l'insieme dei minoranti e dei maggioranti di $A = \{e, d, b\}$
(3) determinare l'insieme dei minoranti e dei maggioranti di $B = \{c, e\}$
(4) determinare gli eventuali estremi inferiori e superiori di A, B, X
(5) determinare gli eventuali massimi e minimi di A, B, X.

Definizione 15. Un insieme ordinato $(R, \leq)$ si dice *reticolo ordinato* se ogni coppia di elementi di R ammette estremo superiore ed estremo inferiore. In altri termini

$$\forall x, y \in R \ \ \exists \sup(x, y), \ \ \exists \inf(x, y).$$

Esempio 16.

1. Sia X un insieme. Allora l'insieme $\mathscr{P}(X)$ delle parti di X, ordinato per inclusione, ovvero $(\mathscr{P}(X), \subset)$, è un reticolo ordinato in quanto
$$\forall A, B \in \mathscr{P}(X) \quad \inf(A, B) = A \cap B, \quad \sup(A, B) = A \cup B.$$
2. L'insieme ordinato $(D_{45}, \ | \ )$ dell'esempio 15 è un reticolo, come si può facilmente verificare. Questo fa parte della più ampia classe di esempi $(\mathcal{D}_n, \ | \ )$ che verrà esaminata più a fondo.
3. L'insieme ordinato $(X, \leq)$ dell'Esercizio 3 non è un reticolo, perchè la coppia (e, d) non ammette estremo inferiore.

Esercizio 5. Verificare che l'insieme ordinato dell'esercizio 4 non è un reticolo.