GRAFI

Def (GRAFO) Un grafo semplice G è una coppia (V, L) dove

1) $V \neq \emptyset$ insieme non vuoto i cui elementi sono detti vertici del grafo (o NODI o PUNTI)

2) L insieme dei lati ed è sottoinsieme dell'insieme costituito dai sottoinsiemi di V con 2 elementi

$L \subseteq \{$ Sottoinsiemi di V con 2 elementi $\}$

$l \in L \quad l = \{v, w\}$ è un lato

$v, w \in V$

lato o arco o edge

$(L = E)$

Noi studiamo il caso V insieme finito $|V| = n \geq 0$

$$\Rightarrow |L| \leq \left| \left\{ \begin{array}{c} \text{sottoinsiemi} \\ \text{di } V \text{ con 2 elementi} \end{array} \right\} \right| = \binom{n}{2}$$

<u>Def</u> Se $l = \{v, w\}$ v e w sono detti estremi del lato

Se tra v e w c'è un lato in G v e w sono detti ADIACENTI

Se $l \cap l' \neq \emptyset$, ovvero l e l' hanno un estremo in comune, allora vengono detti incidenti

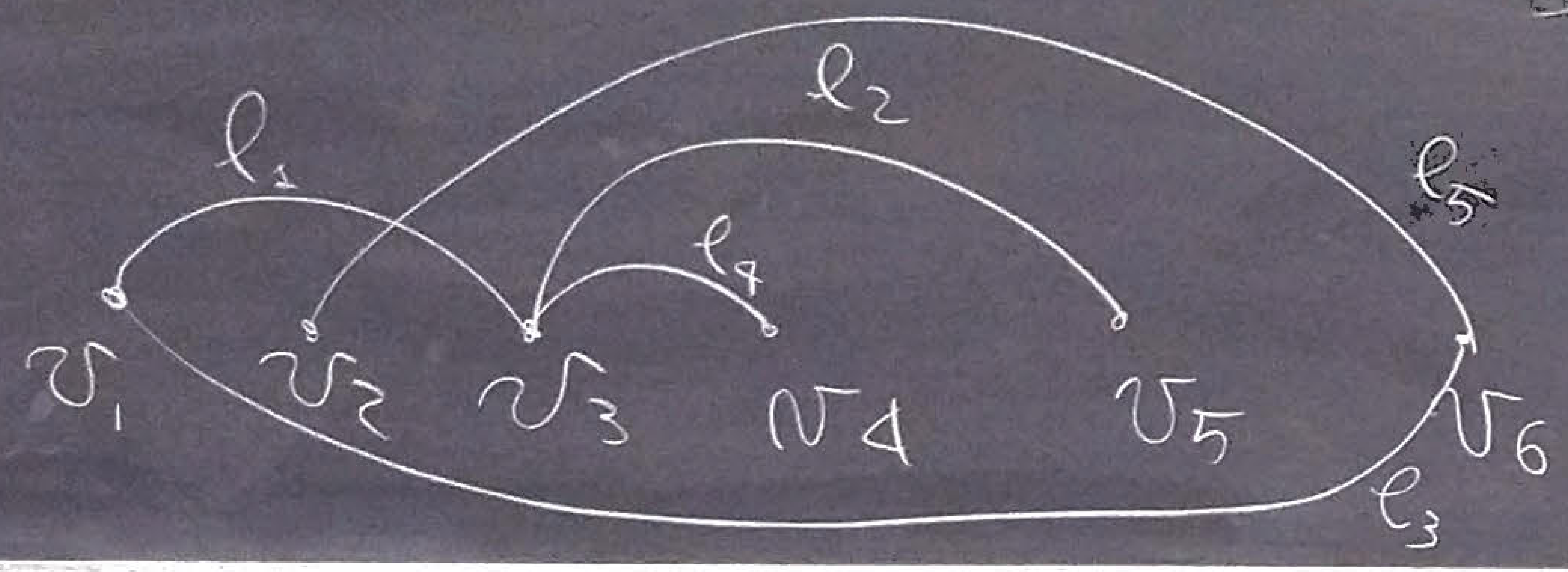
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Disegniamo un punto per ogni vertice e una linea per ogni lato

GRAFI

Esempio $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$L=\{l_1=\{v_1, v_3\},\ l_2=\{v_3, v_5\},\ l_3=\{v_1, v_6\},$
$l_4=\{v_3, v_4\},\ l_5=\{v_2, v_6\}\}$



l_1 ed l_3 sono incidenti.

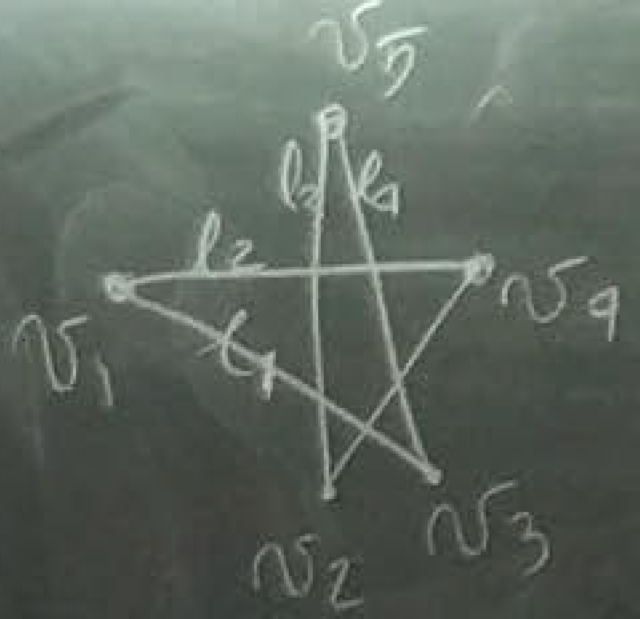
$l_1=\{v_1, v_3\}$ $l_3=\{v_1, v_6\}$

$l_1 \cap l_3 = \{v_1\} \neq \emptyset$

l_1 e l_2 incidenti

v_3 e v_5 sono Adiacenti

Esempio



5 vertici

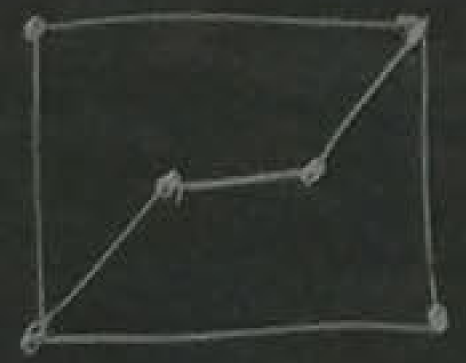
i lati

$l_1=\{v_1,v_3\}$, $l_2=\{v_1,v_4\}$

$l_3=\{v_5,v_2\}$, $l_4=\{v_5,v_3\}$

$l_5=\{v_4,v_2\}$

Esempio



6 vertici

7 lati

Def (ISOMORFISMO)

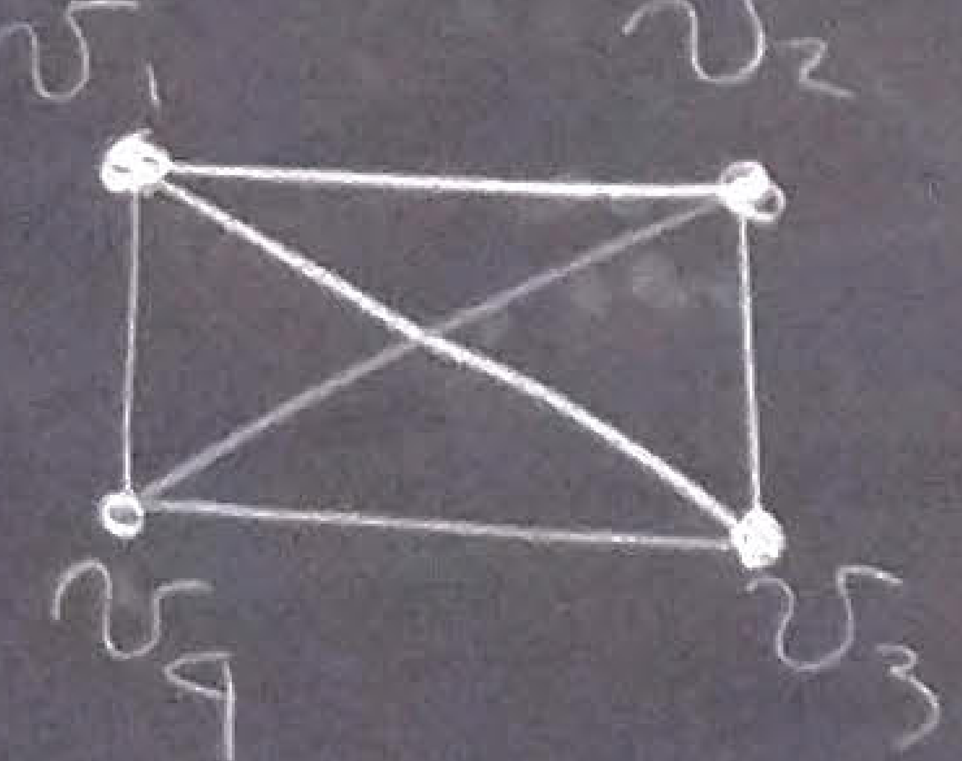
Un isomorfismo tra i grafi $G=(V,L)$ e $G'=(V',L')$ è una funzione biettiva $f: V \to V'$ tale che $\forall v,w \in V$

$\{v,w\} \in L \iff \{f(v),f(w)\} \in L'$

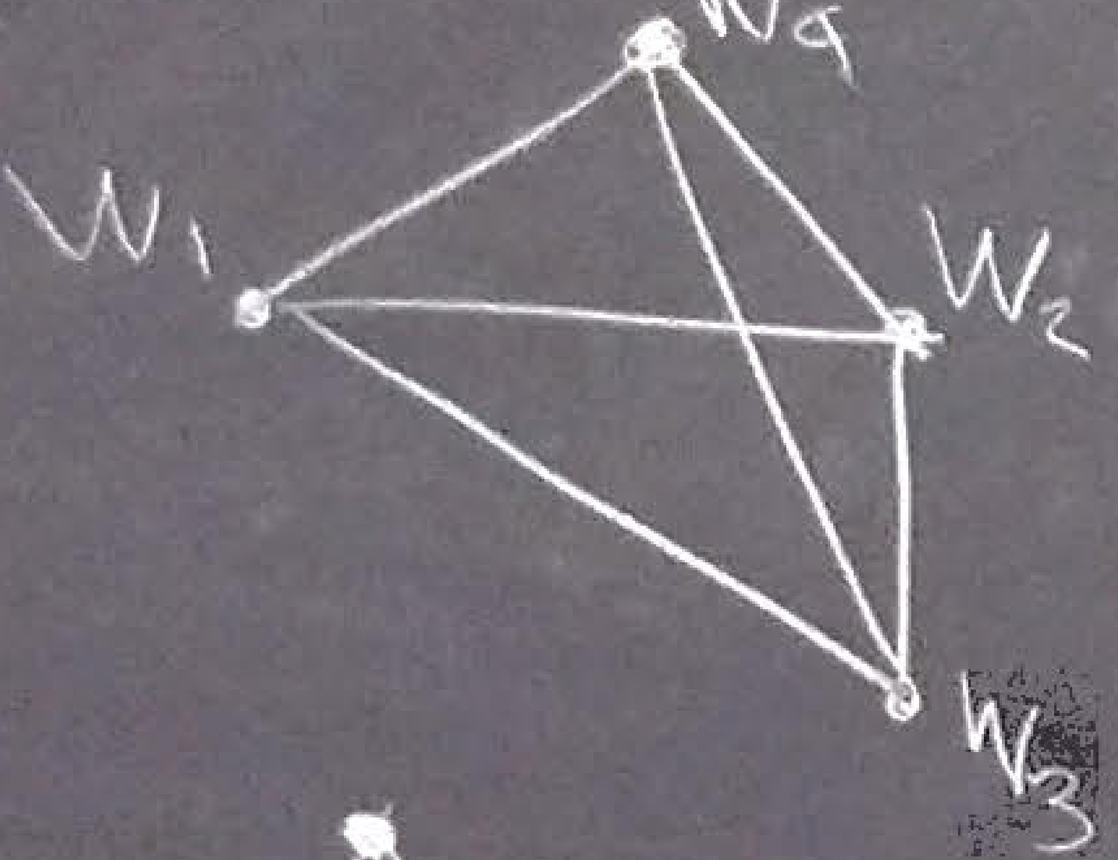
Esempi

1) 

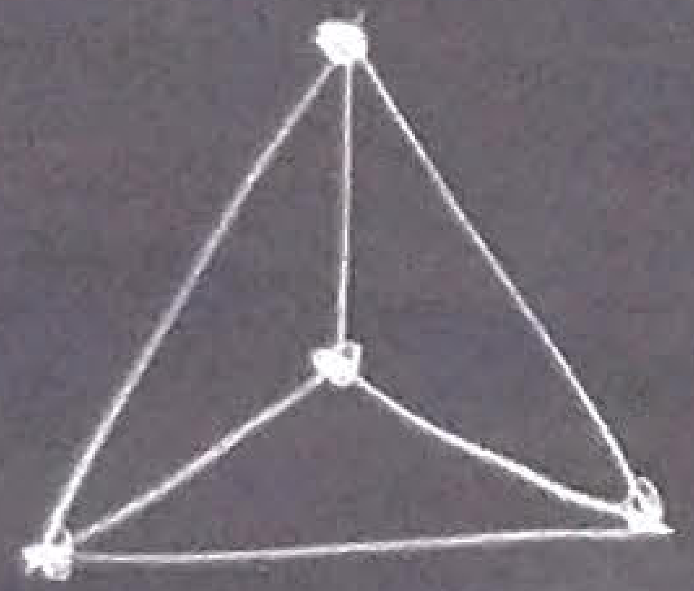
è isomorfo a

2) 

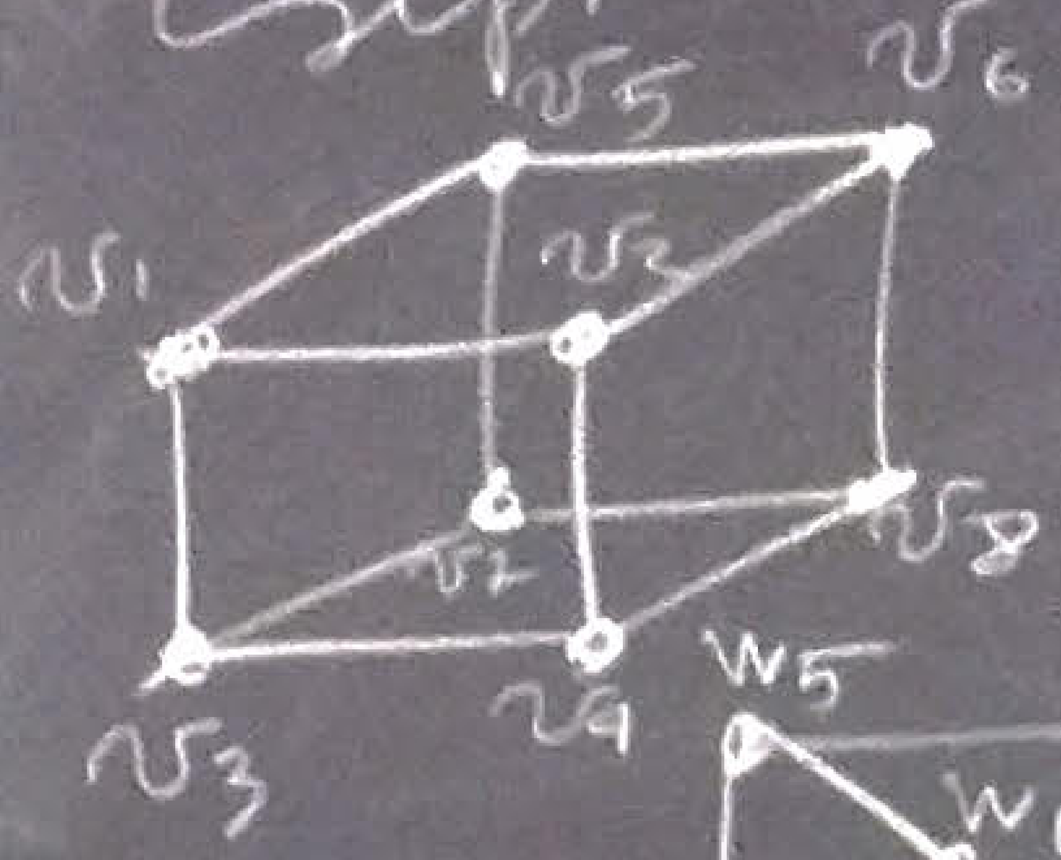
è isomorfo



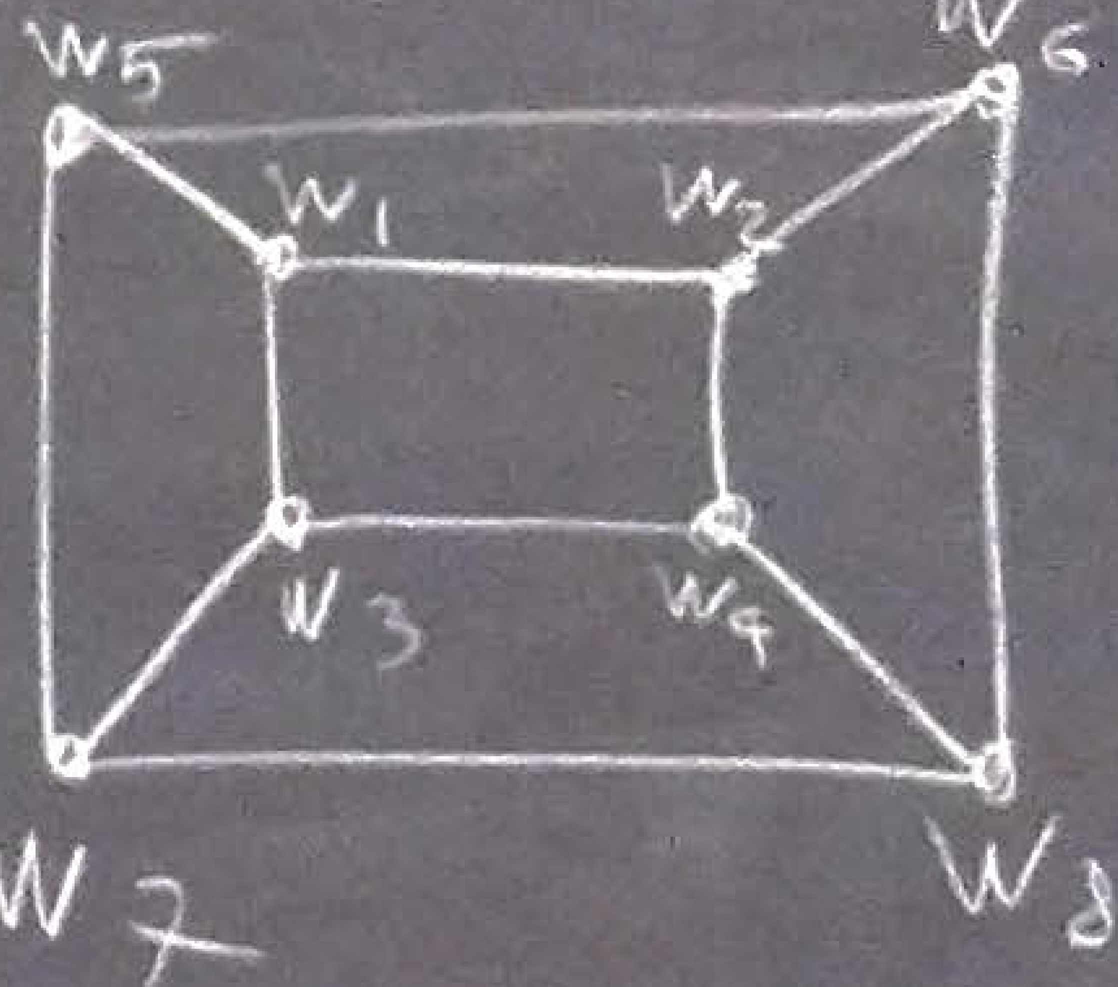
è isomorfo a



Esempi



è isomorfo a



$v_i \longrightarrow w_i$

OSS GRAFO SEMPLICE

$\ell = \{v, w\} \longleftrightarrow$

— escludiamo $\{v\}$

CAPPIO o LOOP

— escludiamo orientazione

$\ell = \{v, w\} = \{w, v\}$ ESCLUDENDO

— escludendo i lati multipli

$L \subseteq \{$sottoinsiemi con 2 elementi di $V\}$ escludendo

Def (MULTIGRAFO)

Un multigrafo è una terna $G = (V, L, f)$ con $V \neq \emptyset$ e

$f : L \longrightarrow \{$sottoinsiemi di V con 2 elementi$\}$

Se f non è iniettiva aggiungono i lati multipli

Def (GRAFO ORIENTATO) DIGRAFI

Un grafo orientato è una coppia $G=(V,L)$ con $L \subseteq V \times V$

Abbiamo aggiunto $(v,v) \in V \times V \rightarrow$

$(v,w) \neq (w,v)$

Def (MULTIGRAFO ORIENTATO)

Un multigrafo orientato è una terna $G=(V,L,f)$ con $f: L \rightarrow V \times V$

In questo caso includiamo loop, orientazione, lati multipli

Noi GRAFI SEMPLICI NO LOOPS

NO LATI MULTIPLI

e li chiamiamo GRAFI NO ORIENTAZIONE

GRAFI

NO LOOP
NO MULTIPLI
NO ORIENTAZIONE

Esempio se $|V| = 1$

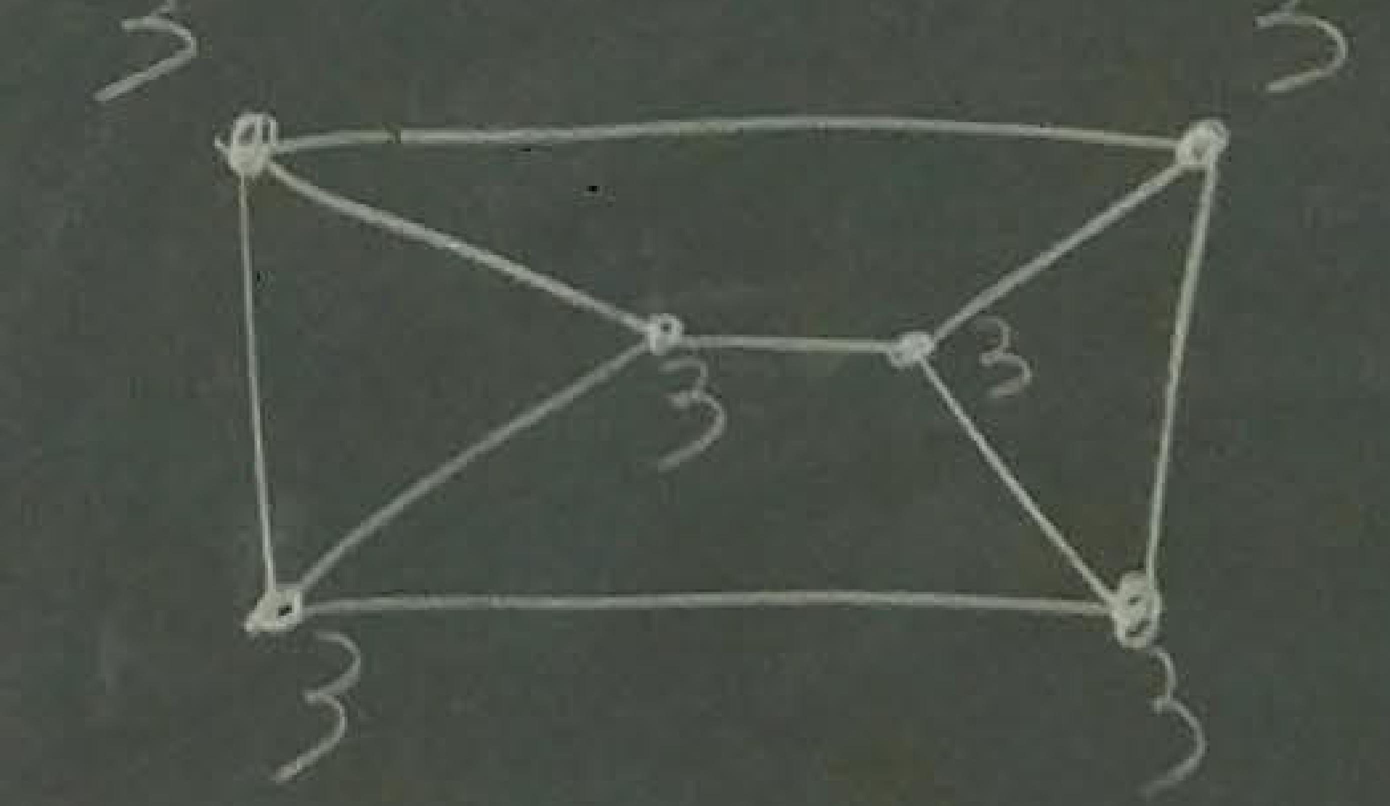
se $|V| \geq 2$ allora $|L| \leq \binom{n}{2}$

Def (VALENZA o GRADO). Sia $G = (V, L)$ un grafo e $v \in V$. La valenza o grado di v si indica con $d(v)$ ed è il numero dei lati a cui v appartiene

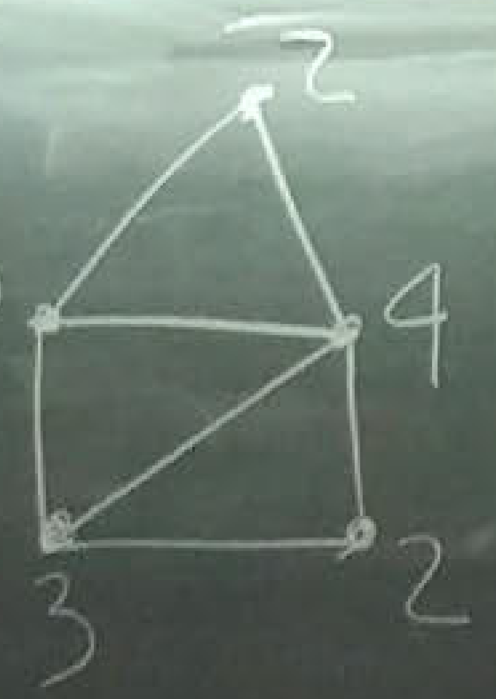
v si dice pari se $d(v)$ è pari

v si dice dispari se $d(v)$ è dispari

Esempi



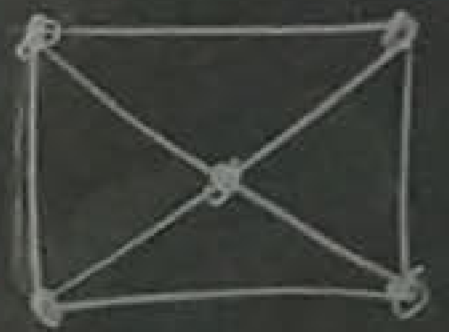
Esempio



OSS In un grafo con $|V|=n$ si ha che $d(v) \leq n-1$

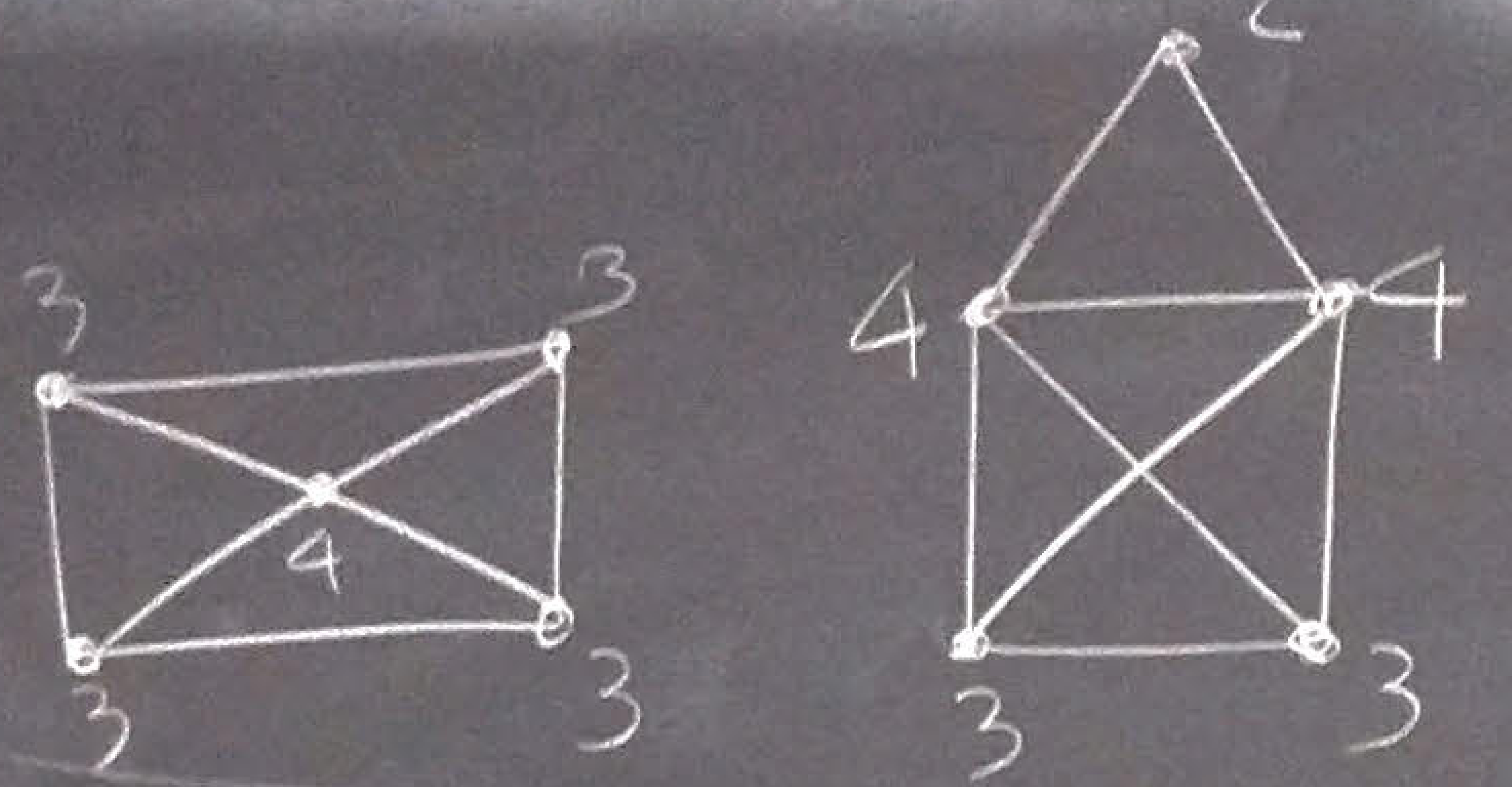
OSS Se due grafi sono isomorfi
vertici corrispondenti hanno lo stesso grado

Esempio Sono isomorfi

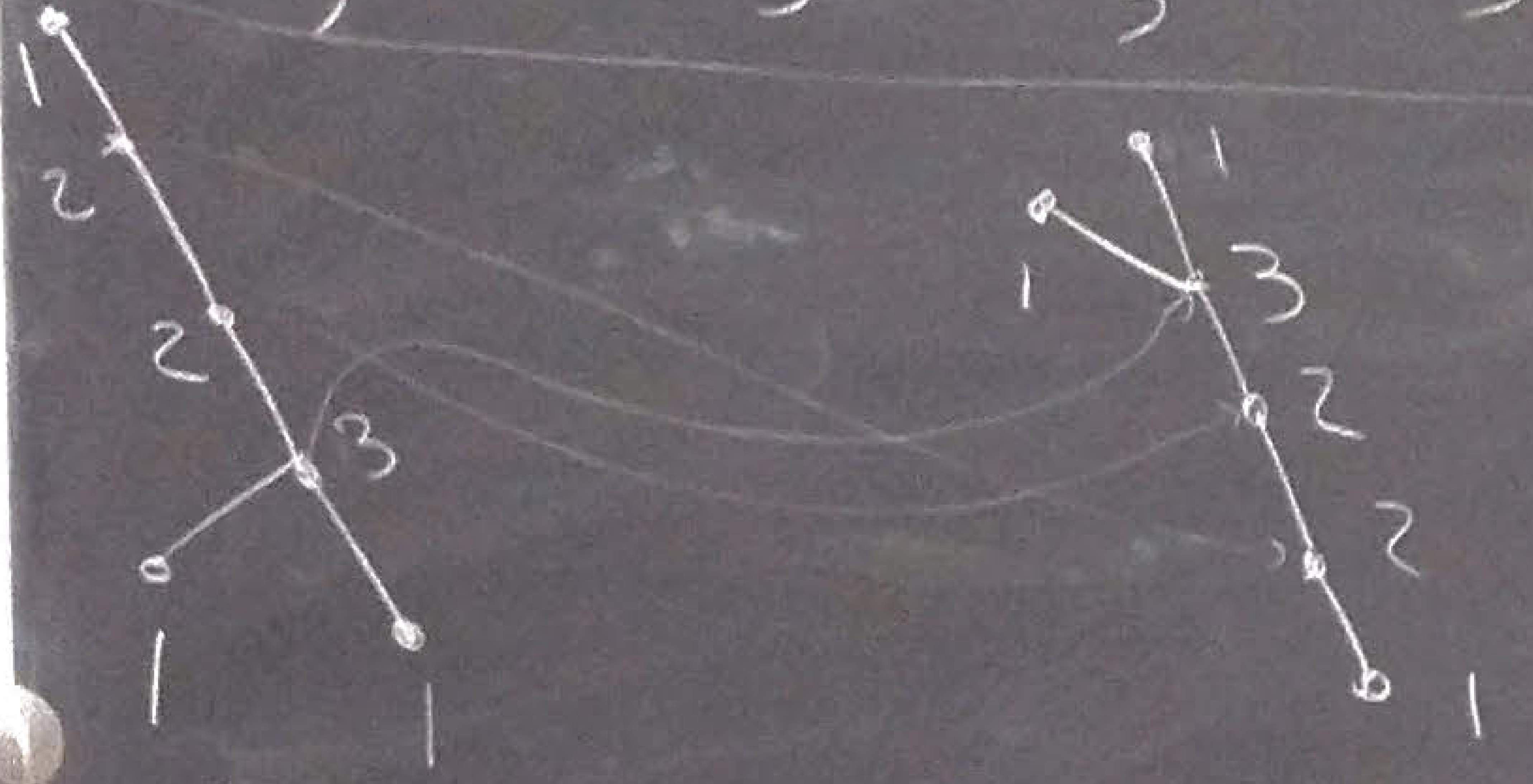


?

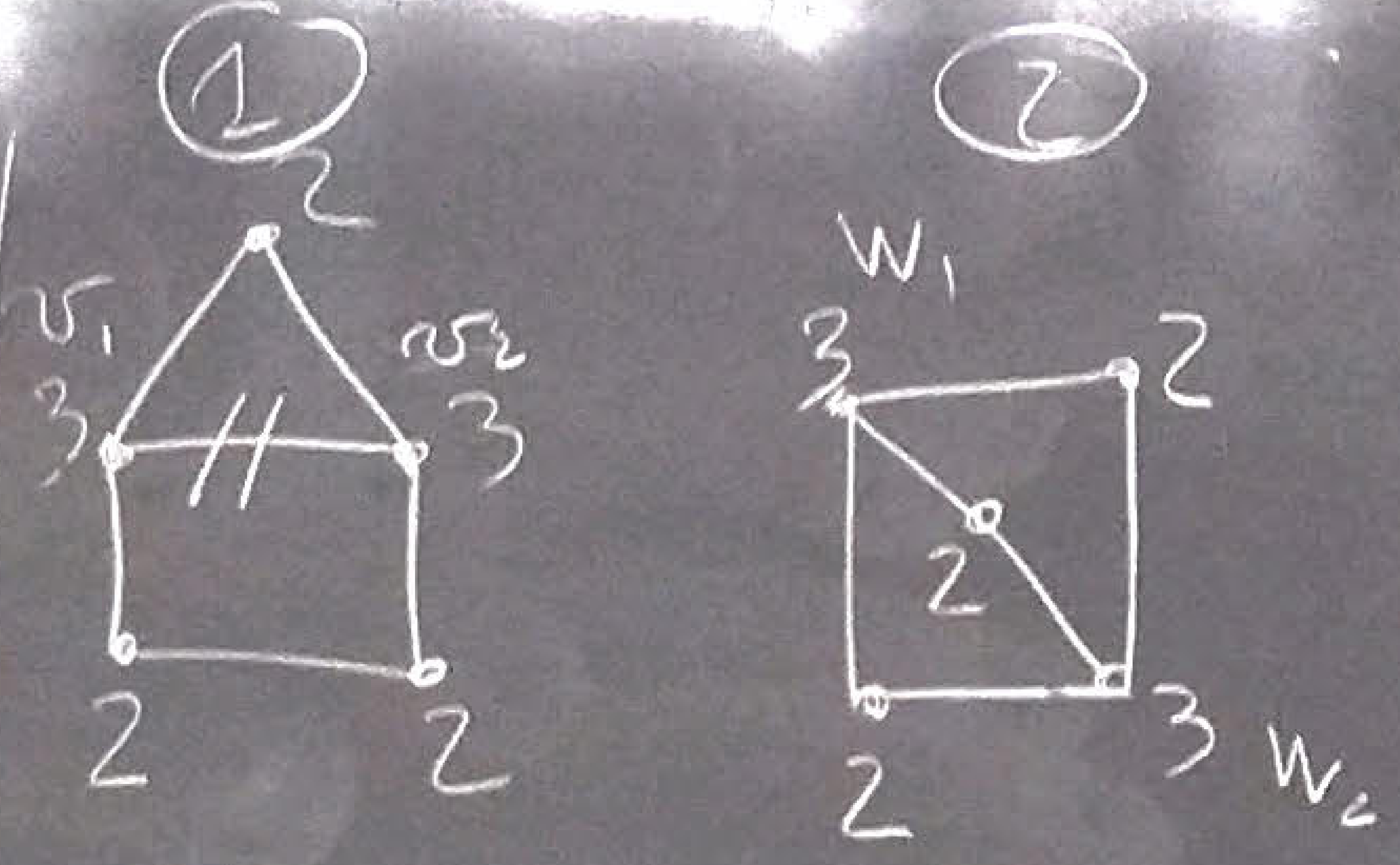
No # lati è diverso
oppure
No perché in uno c'è un vertice di valenza ?



NO



Si



NO ISOMORFI

Nel grafo 1 esiste un lato tra vertici di valenza 3 nel grafo 2 non esiste

$$f : V \to V'$$

$$\underset{\in E}{\{v, w\}} \iff \underset{\in E'}{\{f(v), f(w)\}}$$

TEOREMA (STRETTE DI MANI)

In un grafo finito $G=(V,L)$ si ha che

$$2|L| = \sum_{v \in V} d(v).$$

Dim: Contare gli estremi dei lati in 2 modi

Usiamo i lati. Ogni lato ha 2 estremi $\Rightarrow$ ci sono

$2 \cdot |L|$ estremi

Usando i vertici

Ogni vertice è estremo di $d(v)$ lati

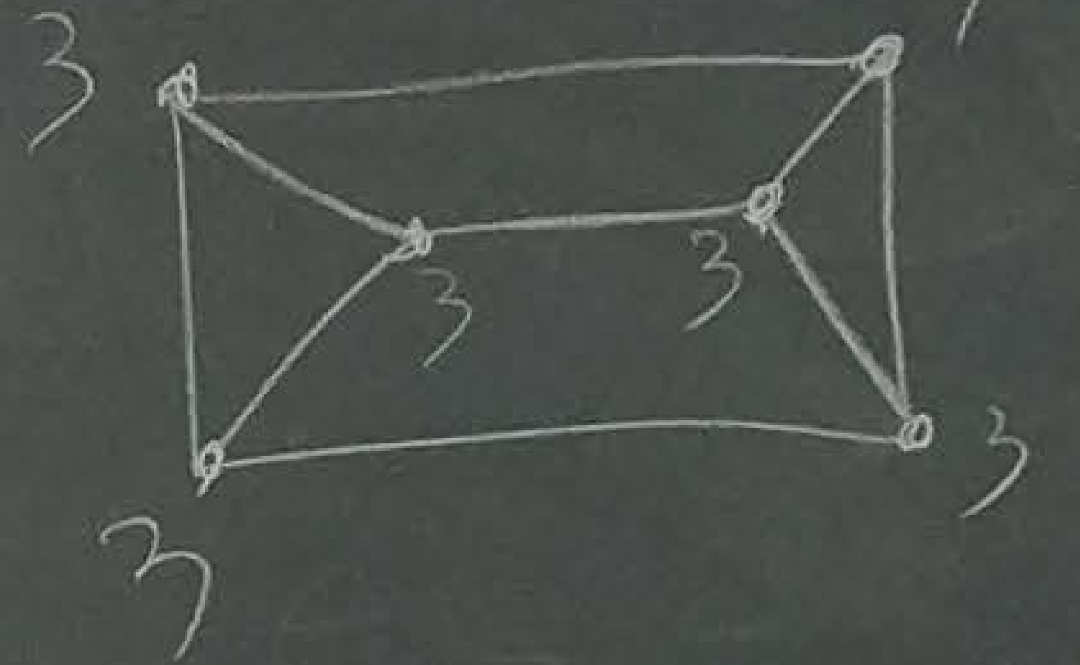
quindi ci sono

$\sum_{v \in V} d(v)$ estremi

CONSEGUENZA. Ogni grafo finito $G=(V,L)$ ha un numero PARI di vertici dispari (valenza dispari)

perché $\sum_{v \in V} d(v)$ è PARI

Esempio 1)



6 vertici dispari

2) Esiste un grafo con 3 vertici tutti di valenza 1?

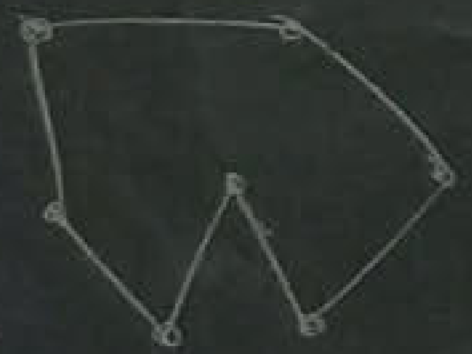
NO

Def (REGOLARE) Un grafo si dice regolare
se i vertici hanno tutti la stessa valenza

Esempi 1)

6 vertici tutti
di valenza 1

2)



7 vertici tutti
di valenza 2

Def (COMPLETO)

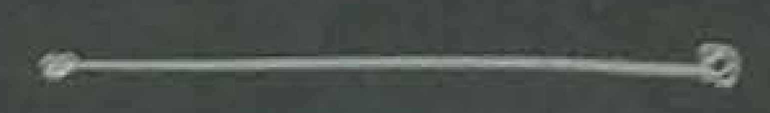
Un grafo si dice
COMPLETO se
i suoi vertici sono
tutti adiacenti fra
loro

$\forall\, n \geq 1$ $\exists!$ grafo completo con $|V| = n$
e si chiamano K_n

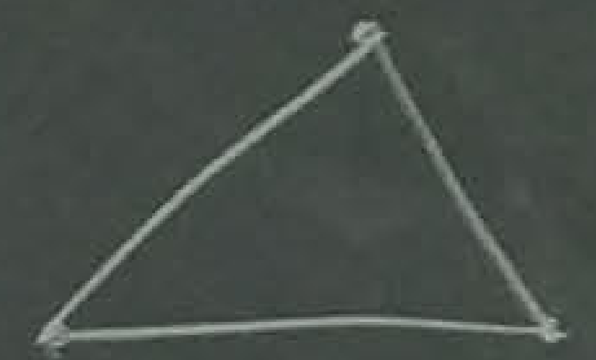
K_1 $\bullet$

$\forall\, n \geq 2$
$$\left[\begin{array}{l} |L| = \binom{n}{2} \text{ prendiamo tutti i lati possibili} \\ \forall v \in K_n \quad d(v) = n-1 \quad (\text{sono regolari}) \end{array}\right.$$

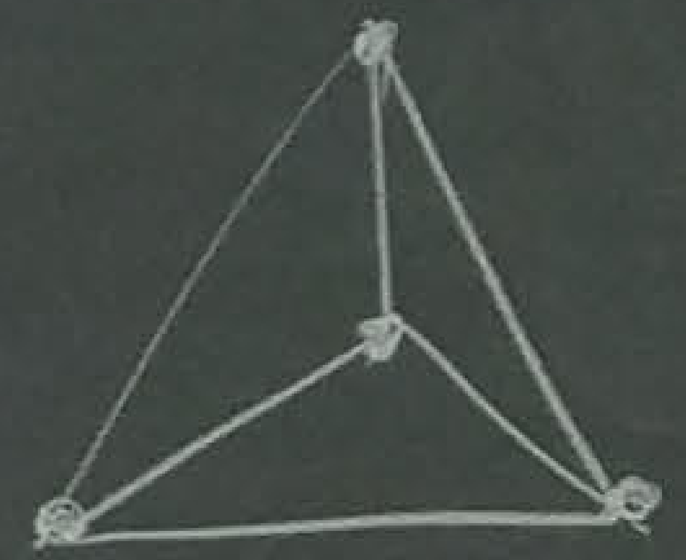
K_2



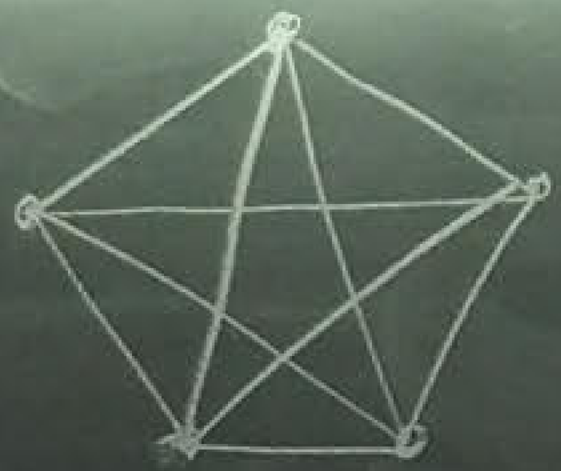
K_3



K_4



K_5



K_6, K_7 x CASA

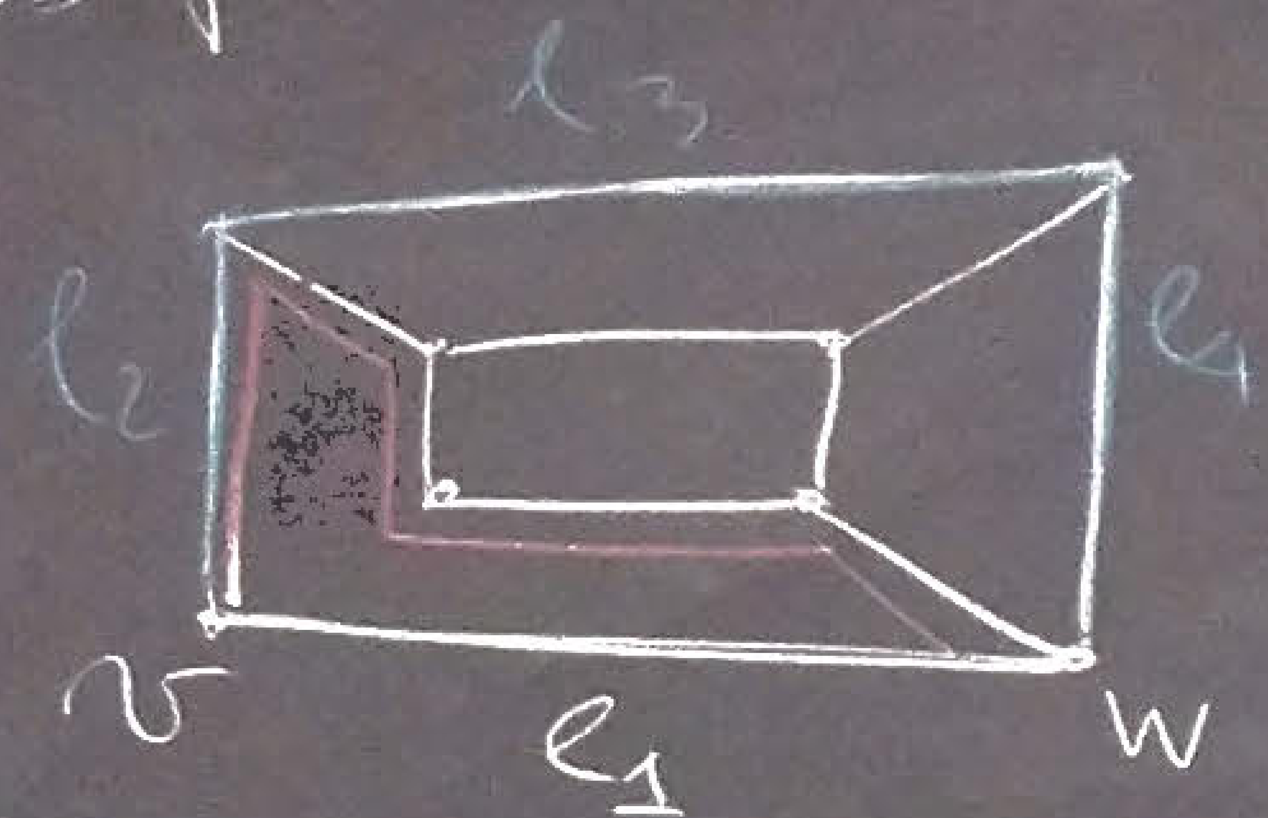
Def (CAMMINO) Sia $G = (V, L)$ grafo

Un cammino tra i vertici v e w è una successione finita di lati a due a due distinti

$\ell_1 = \{v, v_2\}$ $\ell_2 = \{v_2, v_3\}, \dots, \ell_n = \{v_n, w\}$.

In tal caso diremo che il cammino di estremi v e w ha lunghezza n.

Esempio

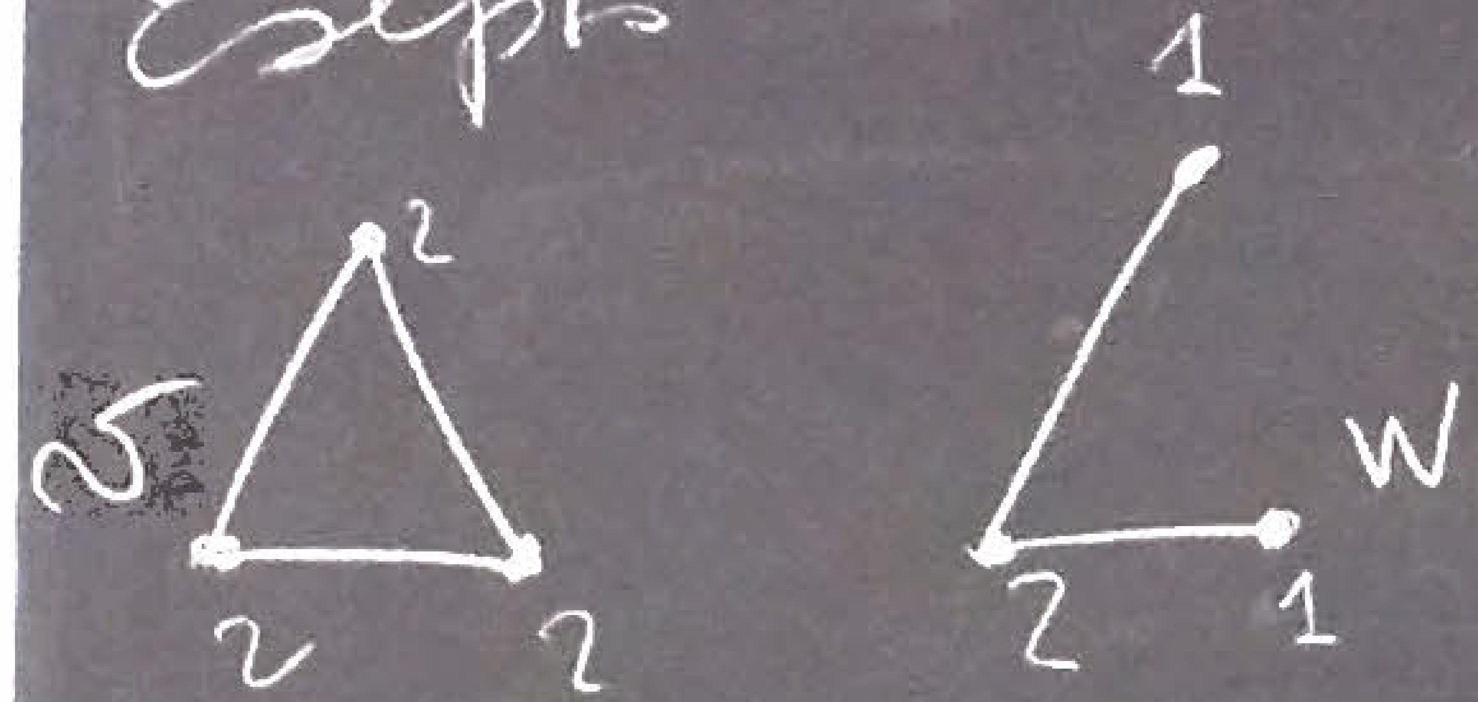


$l_2\, l_3\, l_4$ è un cammino di lunghezza 3

— è un cammino di lunghezza 5

$l_1 = \{v, w\}$ è un cammino di lunghezza 1

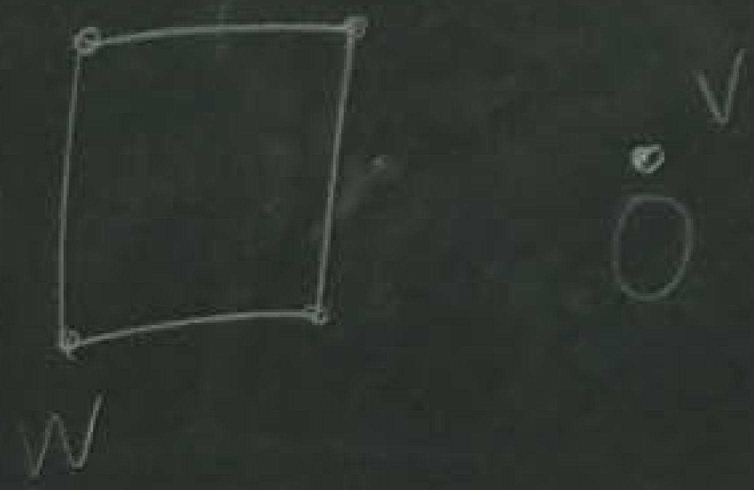
Esempio



NON ci SONO CAMMINI TRA v e W

Def. Un grafo si dice CONNESSO se per ogni coppia di vertici c'è sempre un cammino tra loro. Altrimenti si dice SCONNESSO.

Esempio



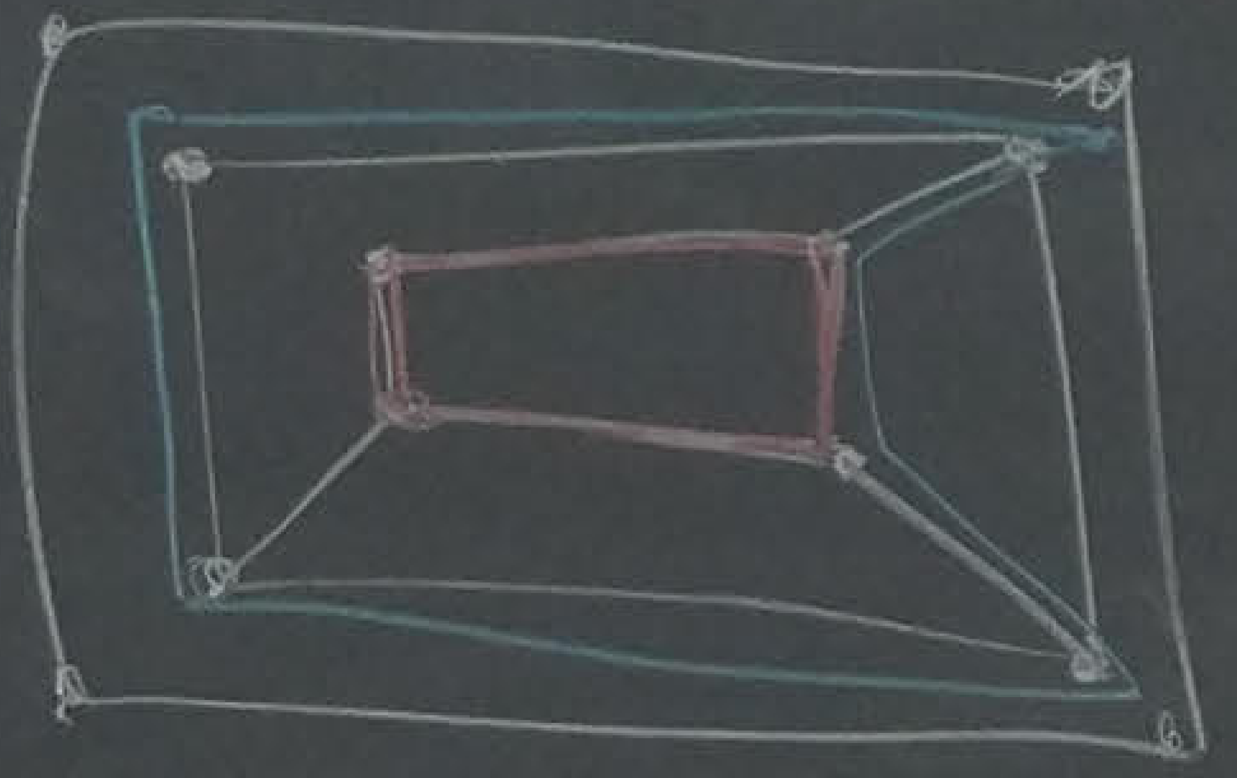
$d(v)=0$

e non esistono cammini tra v e w

OSS. Se in un grafo esiste un vertice di valenza 0 allora il grafo è SCONNESSO.

Def (CIRCUITO) Un circuito è un cammino di lunghezza $n > 0$ con gli estremi coincidenti

Esempio



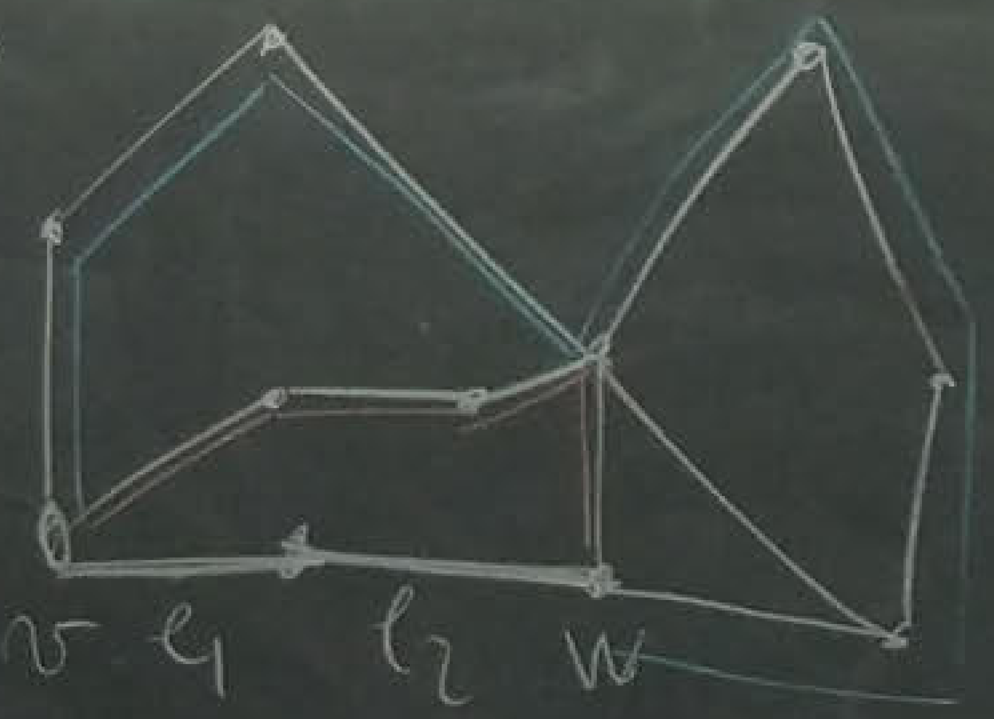
Def (DISTANZA)

Sia G un grafo CONNESSO

La distanza tra i vertici v e w si indica con

$d(v, w)$ = minima lunghezza di un cammino tra v e w.

Esempio



 di lunghezza 2

<u>OSS</u>. Se in un grafo esiste un vertice di valenza 0 allora il grafo è SCONNESSO.

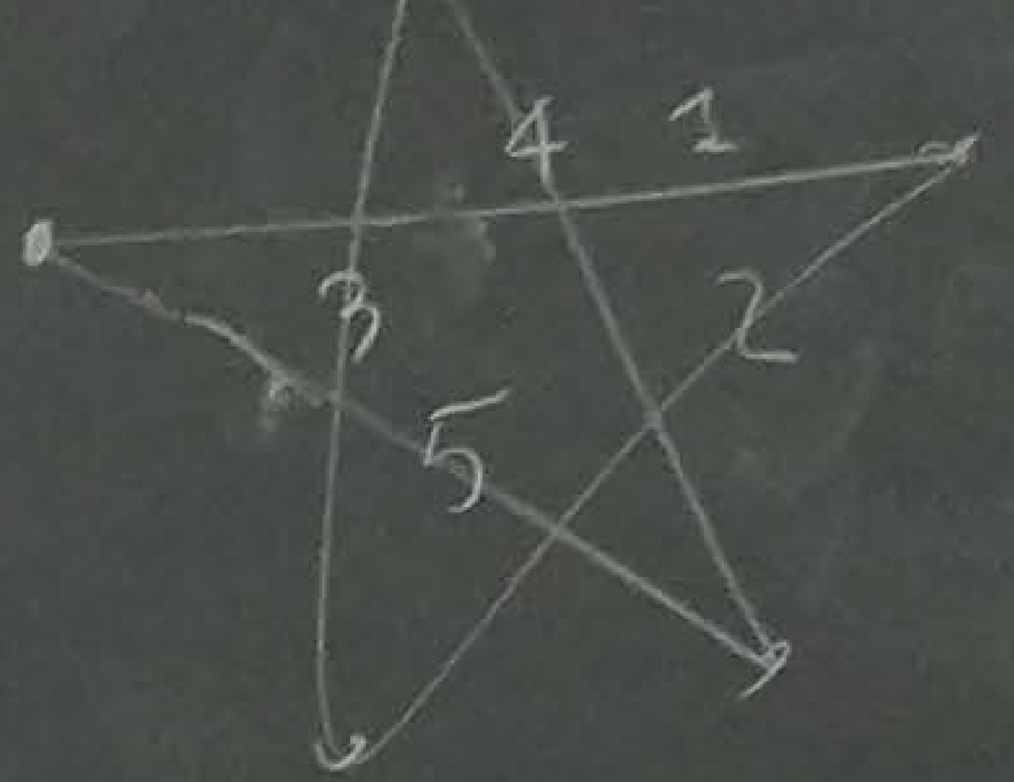
Def (CAMMINO EULERIANO)

Un cammino euleriano è un cammino che passa per tutti i lati una unica volta

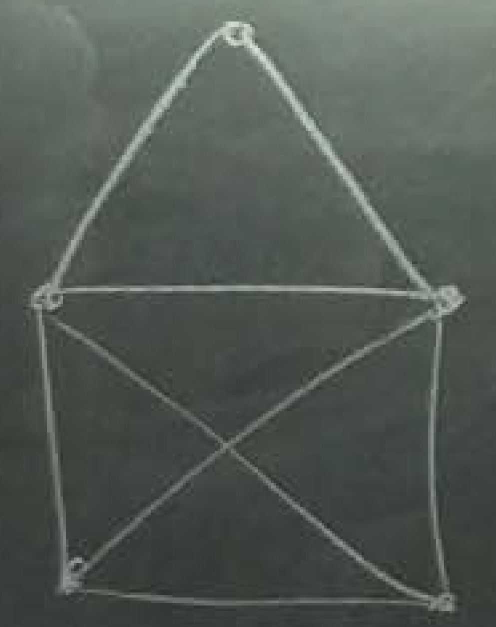
Def (CIRCUITO EULERIANO)

Un circuito euleriano è un circuito che passa da tutti i lati del grafo una unica volta

Esempi

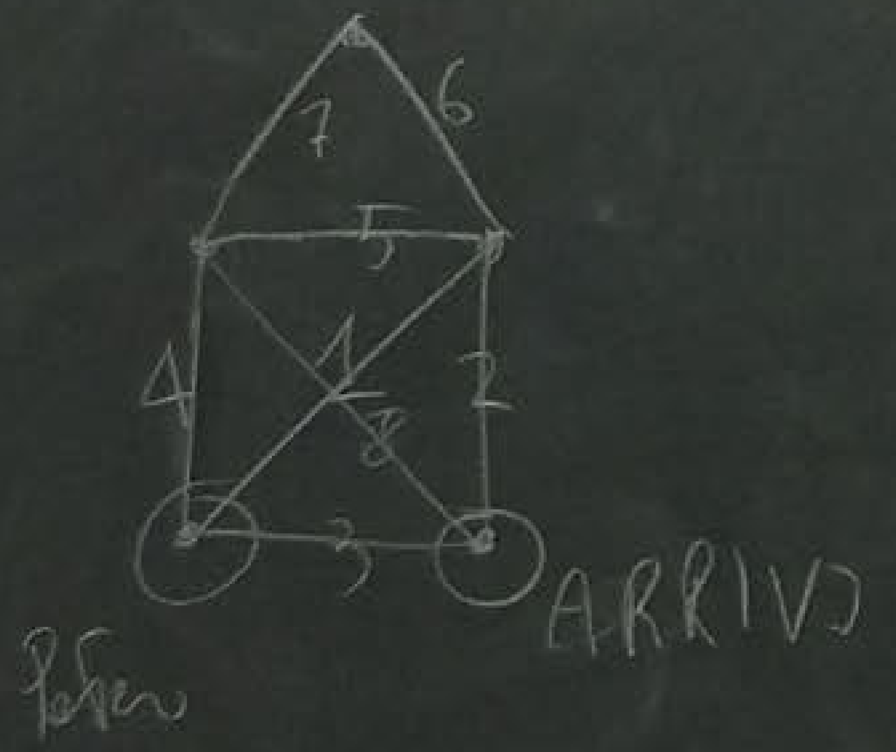


∃ circuito euleriano che è anche un cammino euleriano

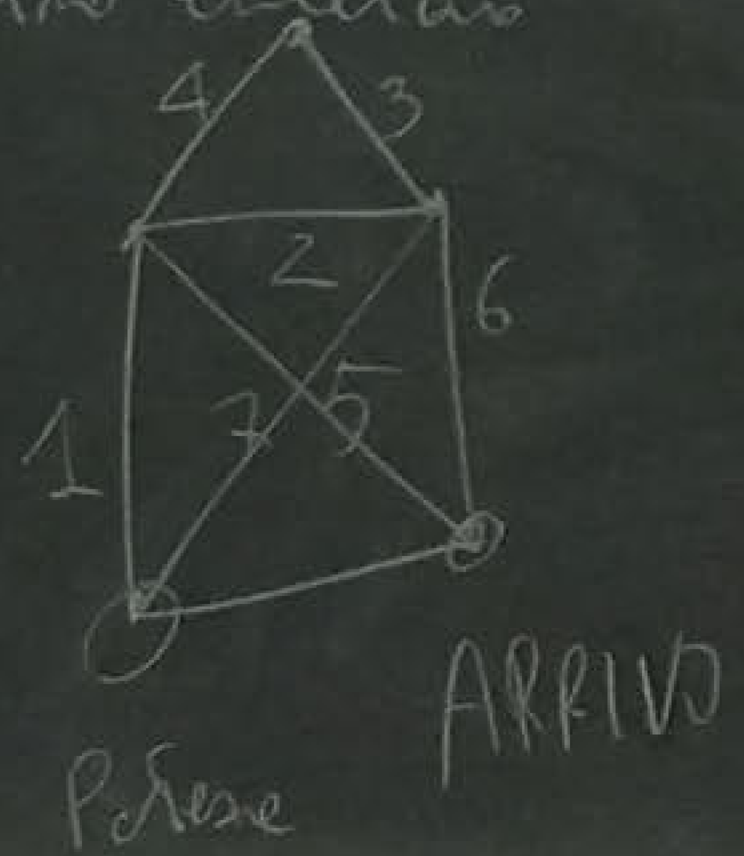


∃ circuito Euleriano?

∃ cammino Euleriano?



∃ cammino euleriano



TEOREMA di EULERO

Un grafo finito connesso con almeno 2 vertici ammette un circuito Euleriano se e solo se tutti i vertici sono PARI

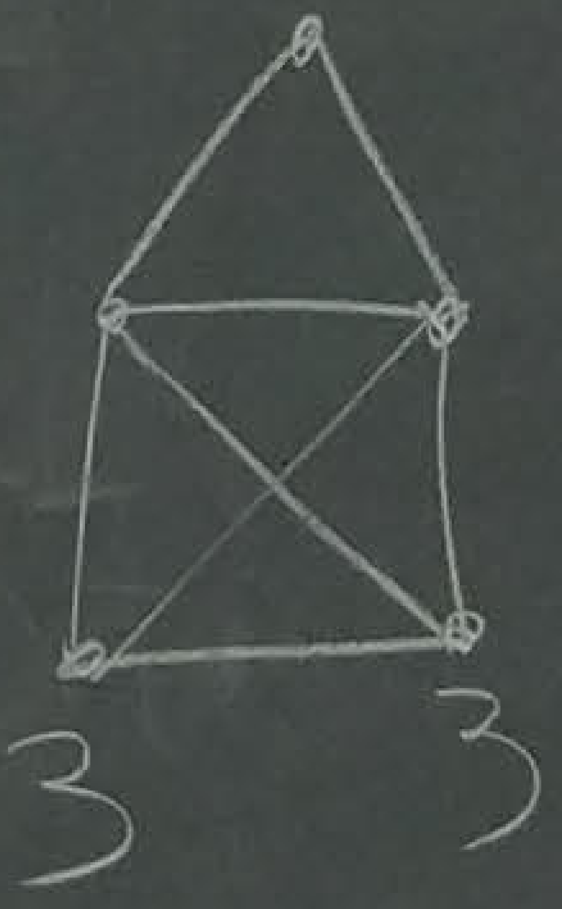
COROLLARIO (EULERO) Un grafo finito connesso con almeno 2 vertici ammette un cammino Euleriano se e solo se ha al massimo 2 vertici dispari

(se sono 0 esiste circuito euleriano

se sono 2 c'è un cammino euleriano con estremi nei vertici dispari)

Esempi

tutti vertici pari $\Rightarrow \exists$ circuito

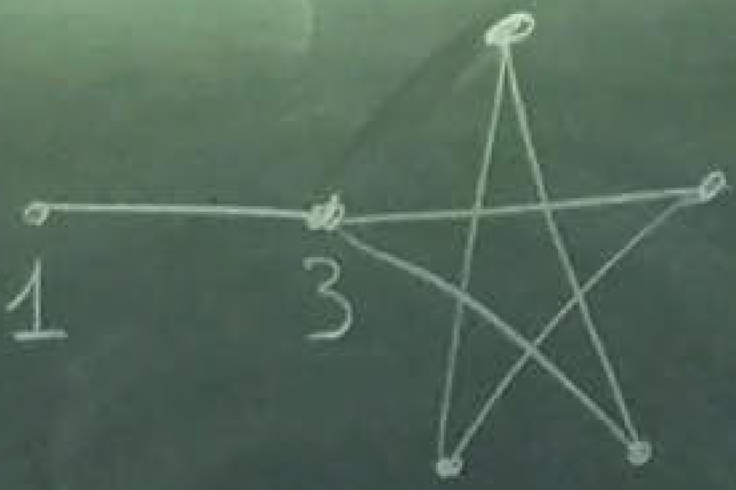


2 vertici dispari

$\nexists$ circuito

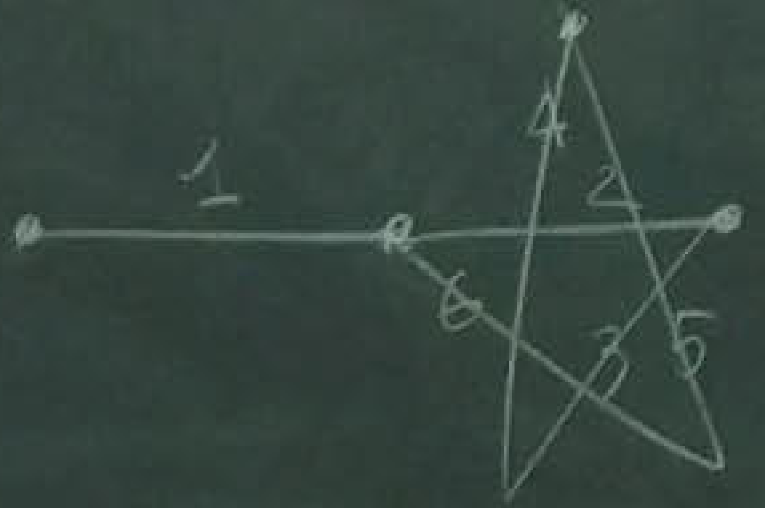
$\exists$ cammino euleriano

Esempio



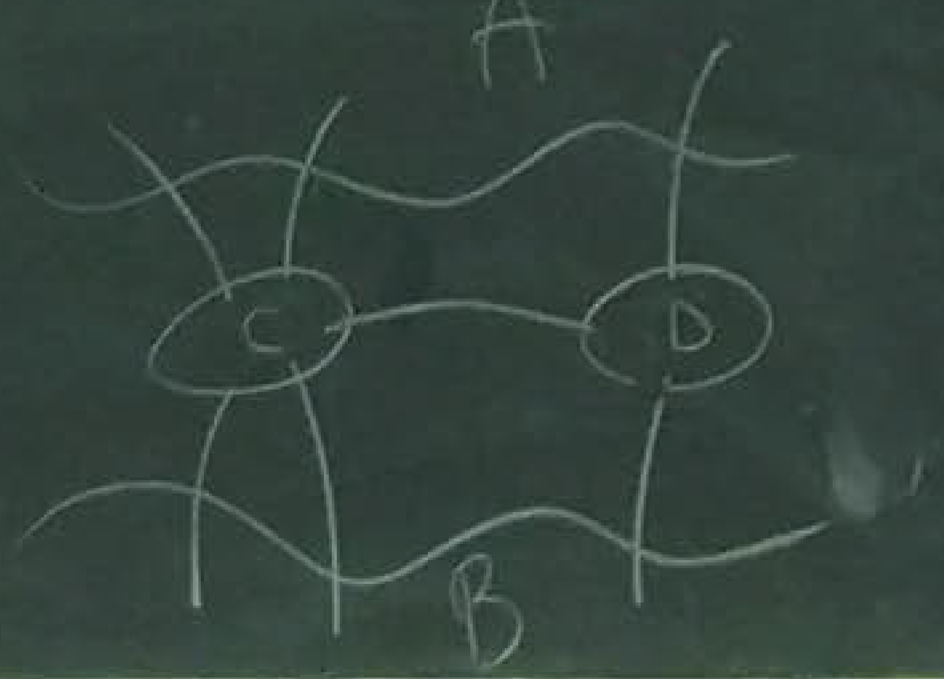
∄ circuito euleriano

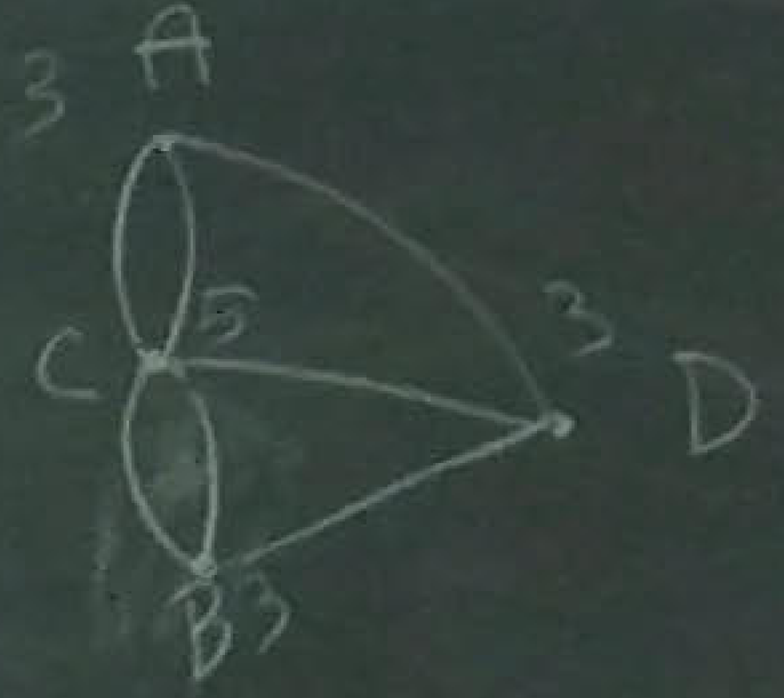
ma ∃ cammino euleriano



Problemi 7 ponti

Storia



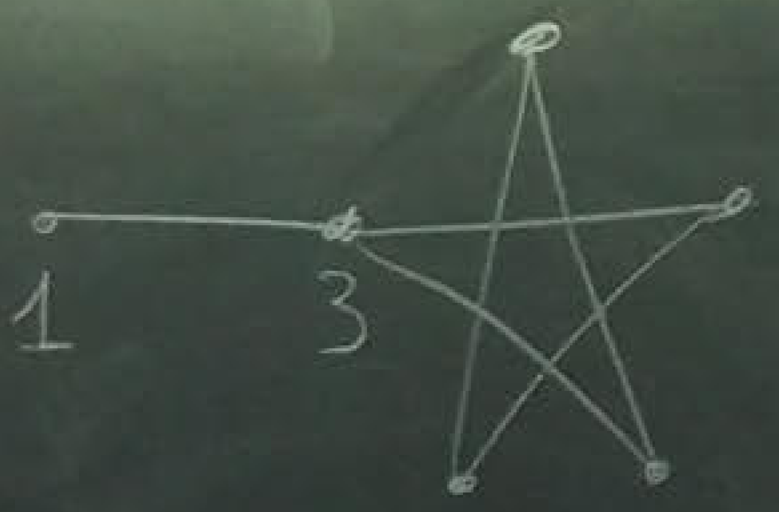


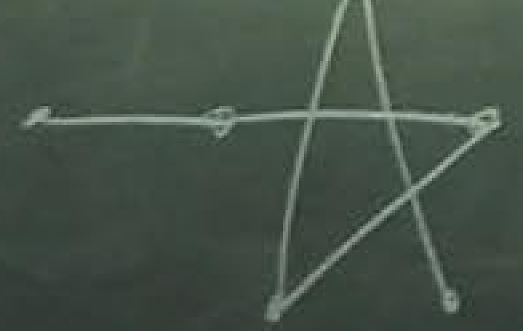
Def (CAMMINO HAMILTONIANO)
Un cammino hamiltoniano è un cammino che passa per tutti i vertici del grafo una unica volta

Def (CIRCUITO HAMILTONIANO) Un circuito hamiltoniano è un circuito che passa per tutti i vertici del grafo una unica volta

Esempi
Stabilire se esistono
cammini euleriani
circuiti euleriani
o
cammini hamiltoniani
nei grafi

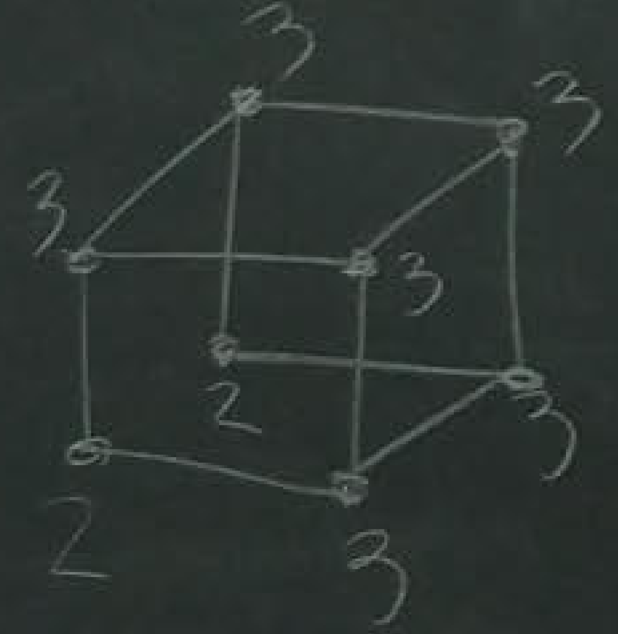
1)





OK
∃ cammino hamiltoniano

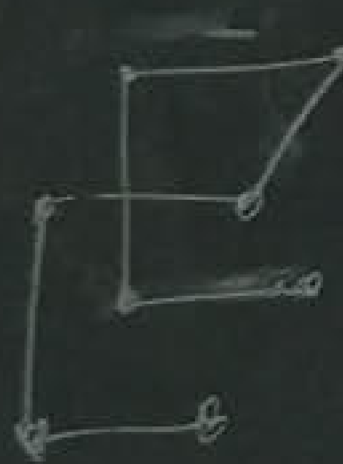
2)



∃ cammino Euleriano? NO

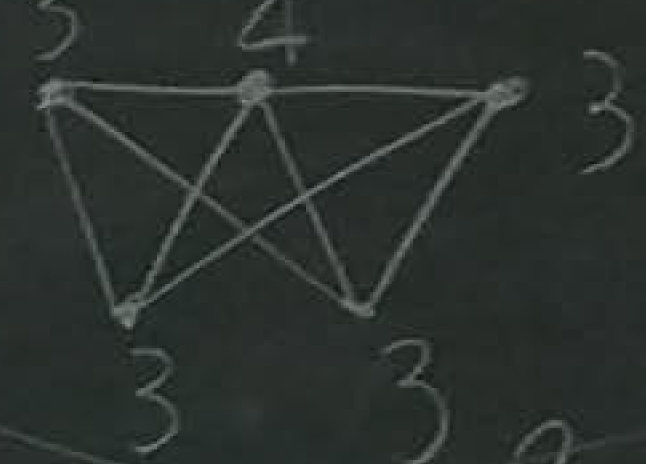
∃ circuito Euleriano? NO

\# vertici dispari > 2



∃ cammino Hamiltoniano

3)

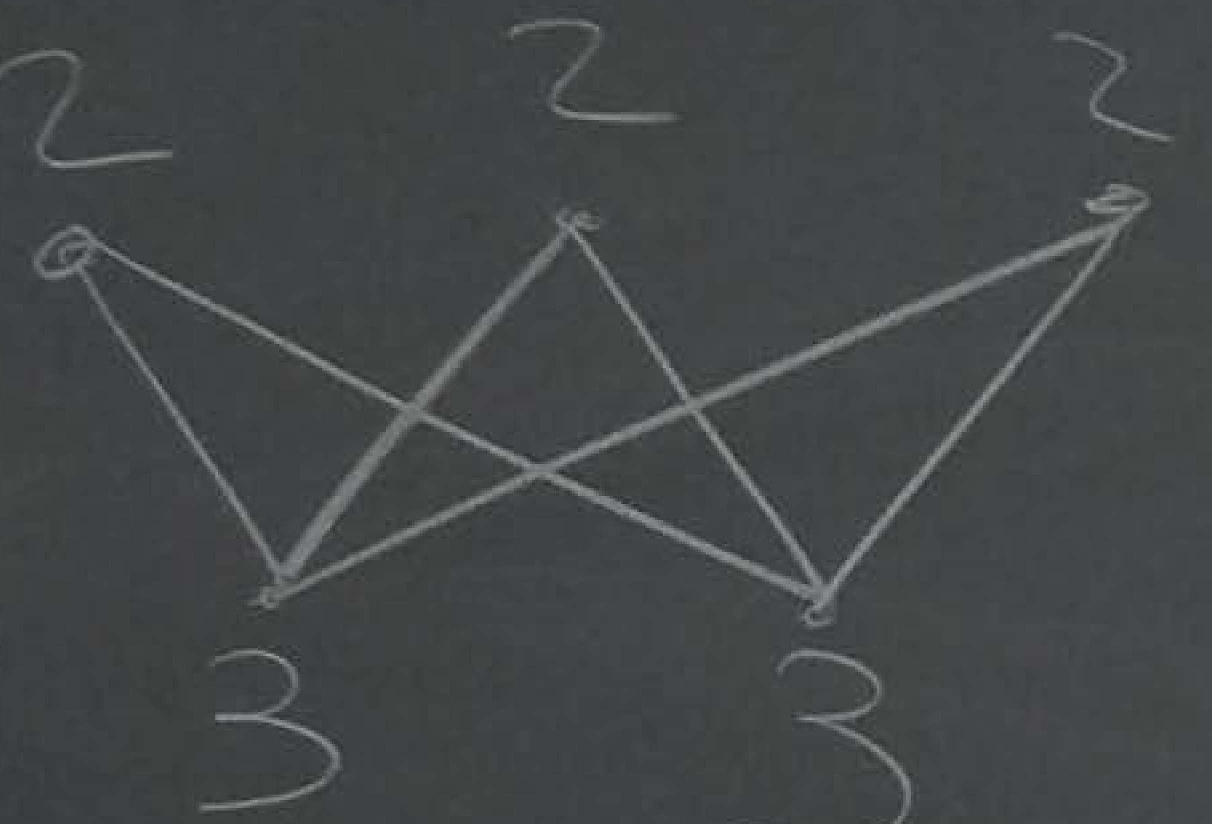


∃ cammino euleriano? NO

∃ circuito euleriano? NO

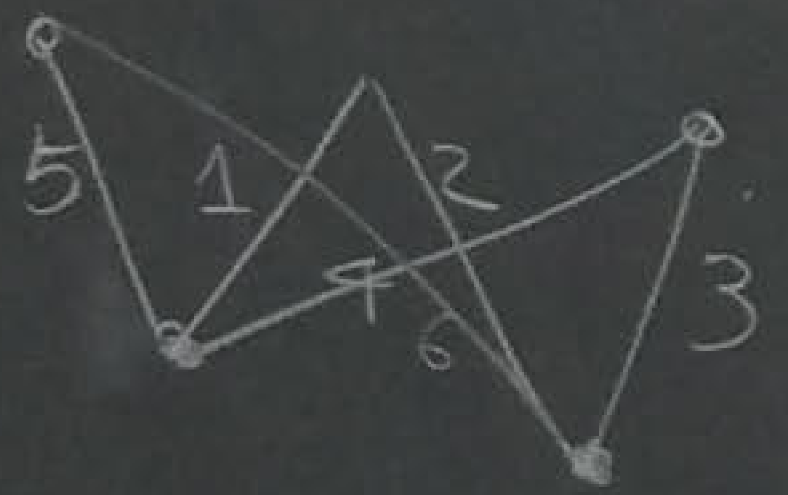
∃ cammino hamiltoniano?

4)



∃ circuito euleriano?
NO perché NON TUTTI
i vertici sono pari

∃ cammino euleriano?
Si perché ∃ solo 2
vertici dispari



∃ cammino hamiltoniano? SI