Definizione 1. Sia $f\colon A \to B$ una funzione. La funzione f si dice INIETTIVA o INGETTIVA se

$$\forall a, a' \in A, \quad a \neq a' \implies f(a) \neq f(a'),$$

cioè se elementi distinti di A hanno necessariamente immagini distinte in B.

Tenendo conto che $P \implies Q$ è equivalente a $\neg Q \implies \neg P$, si ottiene la seguente definizione equivalente alla precedente.

Definizione 2. Sia $f\colon A \to B$ una funzione. La funzione f si dice INIETTIVA o INGETTIVA se

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \implies a = a'$$

Esempio 1. Si consideri la funzione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad f(n) = 3n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

f è iniettiva??
La risposta è affermativa perchè $\forall n, n' \in \mathbb{Z}$ se $f(n) = f(n') \implies 3n - 4 = 3n' - 4 \implies 3n = 3n' \implies n = n'$, quindi è verificata la seconda definizione.

Esempio 2. Si consideri la funzione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad f(n) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

f è iniettiva??
La risposta è NO perchè se, per esempio, si considerano i due numeri interi $n = 2$ e $n' = -2$ si ha che $f(2) = 4 = f(-2)$, quindi non è soddisfatta la prima definizione.

Esempio 3. Si consideri la funzione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad f(n) = |n| \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

f è iniettiva??
La risposta è NO perchè se, per esempio, si considerano i due numeri interi $n = 3$ e $n' = -3$ si ha che $f(3) = 3 = f(-3)$, quindi non è soddisfatta la prima definizione.

Osservazione 1. Se $f\colon A \to B$ è una funzione iniettiva, allora per ogni $b \in B$ l'insieme controimmagine $f^{-1}(b)$ ha al più un elemento.

Osservazione 2. La nozione di iniettività dipende dall'insieme di partenza della funzione. Infatti se consideriamo la funzione

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad f(n) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

questa è iniettiva in quanto, comunque si scelgono due numeri naturali distinti i loro quadrati sono ancora distinti.
Se invece consideriamo

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad f(n) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

allora in tal caso f non è iniettiva. (Esempio 2)

Definizione 3. Sia $f\colon A \to B$ una funzione. La funzione f si dice SURIETTIVA o SURGETTIVA se

$$\forall b \in B, \exists a \in A \quad \text{tale che} \quad f(a) = b,$$

cioè se $Im(f) = B$.

Esempio 4. Si consideri la funzione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad f(n) = 3n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

f è suriettiva??
La risposta è NO perchè, $\forall n' \in \mathbb{Z}$ se $f(n) = n' \implies 3n - 4 = n' \implies 3n = n' + 4 \implies n = \frac{n'+4}{3}$, ma ora questo n tovato non appartiene sempre a $\mathbb{Z}$, al variare di n' in $\mathbb{Z}$.

Esempio 5. Si consideri la funzione

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad f(q) = 3q - 4 \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

f è suriettiva??
La risposta è SI perchè $\forall q' \in \mathbb{Q}$ se $f(q) = q' \implies 3q - 4 = q' \implies q = \frac{q'+4}{3}$ e questo q tovato appartiene sempre a $\mathbb{Q}$, al variare di q' in $\mathbb{Q}$.

Osservazione 3. Questi due ultimi esempi mettono in mostra come la suriettività di una funzione dipenda sia dall'insieme di partenza che dall'insieme di arrivo della funzione stessa.

Osservazione 4. Una funzione $f\colon A \to B$ è suriettiva se e solo se $f^{-1}(b) \neq \varnothing$, per ogni $b \in B$.

Osservazione 5. Sia $f\colon A \to B$ una funzione. Allora $f\colon A \to Im(f)$ è suriettiva.