Definizione 1. Siano P e Q formule della logica proposizionale. Si dice che Q è conseguenza logica di P e si scrive

$$P \Longrightarrow Q$$

quando Q è vera ogni qualvolta è vera P.

Dalla definizione segue subito che Q non può essere falsa quando P è vera.

Osservazione 1. Dire che Q è conseguenza logica di P vuol dire che certamente Q ha valore di verità V quando P ha valore di verità V.

Definizione 2. Si dice che P e Q sono semanticamente equivalenti se P è conseguenza logica di Q e Q è conseguenza logica di P; ovvero se $P \Longrightarrow Q$ e $Q \Longrightarrow P$. Si scrive

$$P \Longleftrightarrow Q$$

Osservazione 2. Si può anche parlare di conseguenza logica di più di una formula della logica proposizionale: vale a dire se $P_1, \ldots, P_k, Q$ sono $k+1$ formule e se Q è vera quando sono vere $P_1, \ldots, P_k$, si dice che Q è consegueza logica di $P_1, \ldots, P_k$ e si scrive:

$$(P_1, \ldots, P_k) \Longrightarrow Q$$

Esempio 1. Siano P e Q due formule della logica proposizionale. Allora Q è conseguenza logica di P e di $P \longrightarrow Q$. In simboli:

$$(P, P \longrightarrow Q) \Longrightarrow Q.$$

Infatti, considerata la tavola di verità:

P	**Q**	**P $\longrightarrow$ Q**	**Q**
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

si osserva che nell'unico caso (il primo) nel quale sia P che $P \longrightarrow Q$ hanno valore di verità V, anche Q ha valore di verità V.
Dalla tavola di verità si evince anche che P non è conseguenza logica di Q e di $P \longrightarrow Q$, perchè nella terza riga Q e $P \longrightarrow Q$ hanno valore di verità V, ma P ha valore di verità F.

Esempio 2. Siano A e B due formule. Si osserva facilmente che $A \wedge B$ non è conseguenza logica di $A \vee B$, in quanto se A ha valore di verità V e B ha valore di verità F, allora $A \vee B$ ha valore di verità V, ma $A \wedge B$ ha valore di verità F.

Proposizione 1. *Siano P e Q due formule della logica proposizionale. Allora P e Q sono semanticamente equivalenti se e solo se hanno la stessa tavola di verità.*

Dimostrazione. Se P ha valore di verità V, allora anche Q deve avere valore di verità V, perchè Q è conseguenza logica di P. Se P ha valore di verità F, allora anche Q deve avere valore di verità F, altrimenti P non potrebbe essere conseguenza logica di Q. La dimostrazione si completa facilmente scambiando i ruoli di P e Q fra loro.

Osservazione 3. Si osserva facilmente, come conseguenza della precedente proposizione, che due formule sono semanticamente equivalenti se e soltanto se $P \longleftrightarrow Q$ è una tautologia.

Esempio 3. Siano P e Q formule. Allora sono semanticamente equivalenti $P \longrightarrow Q$ e $\neg Q \longrightarrow \neg P$, ovvero:

$$(P \longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \longrightarrow \neg P).$$

Si prova utilizzando la proposizione precedente, con la seguente tavola di verità:

$\mathbf{P}$	$\mathbf{Q}$	$\neg\mathbf{P}$	$\neg\mathbf{Q}$	$\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Q}$	$\neg\mathbf{Q} \longrightarrow \neg\mathbf{P}$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Esercizi 1. Siano P e Q formule. Provare che valgono le seguenti equivalenze semantiche:

(1) $P \longrightarrow Q \Longleftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$
(2) $P \longrightarrow Q \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$
(3) $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
(4) $\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q$.

Una teoria matematica si basa su un certo numero di assiomi assegnati su una certe struttura, a partire dai quali si dimostrano i **Teoremi**. Ma cos'è una dimostrazione? è la costruzione di una serie di argomentazioni consistenti che portino infine ad un'affermazione vera. Per dimostrare la validità di un argomento si potrebbe sempre far ricorso alle tavole di verità. Però questo potrebbe essere un procedimento molto lungo e noioso: se ci sono molte variabili proposizionali, le relative tavole di verità possono diventare ingestibili. Per questo si utilizzano le **regole di inferenza** o **metateoremi** che forniscono dei modelli per costruire argomentazioni anche molto complicate. La più usata delle regole di inferenza è

$$(P \wedge (P \longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q \qquad \text{MODUS PONENS.}$$

Sostanzialmente: dalla validità in contemporanea di P e di $P \longrightarrow Q$ segue la validità di Q. Questa regola di inferenza dà luogo al classico metodo di dimostrazione diretta.

Un altra regola di inferenza è

$$(P \longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \longrightarrow \neg P) \qquad \text{MODUS TOLLENS,}$$

che permette di eseguire le dimostrazioni usando il metodo di dimostrazione indiretta o per contrapposizione.

Si segnalano, inoltre:

$$((P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R)) \longrightarrow (P \longrightarrow R)$$

$$(P \wedge Q) \longrightarrow P$$

$$P \longrightarrow (P \vee Q).$$

Un altro tipo di dimostrazioni sono quelle per **contraddizione** o **assurdo**. Si procede nel modo seguente: si vuol provare che P è vero, allora si suppone che $\neg P$ non sia vero e si ottiene una contraddizione di tipo $Q \wedge \neg Q$.

Predicati

La logica proposizionale naturalmente non è in grado di comprendere tutti i possibili enunciati della matematica. Si pone la seguente:

Definizione 3. Un **predicato** è un'affermazione che coinvolge una o più variabili: $x, y, z \ldots$, ciascuna delle quali sia variabile in un *dominio* o *universo* D_x, D_y, $D_z, \ldots$.

Ad un predicato, in generale, non si può attribuire valore di verità: lo si può a fare nel momento in cui si inseriscono opportunamente i quantificatori o si effettuano sostutuzioni al posto delle variabili.

Per approfondimenti sulla logica, lo studente può consultare il libro

A. FACCHINI: **ALGEBRA E MATEMATICA DISCRETA**, ed. ZANICHELLI

alle pagine 283-298 (capitolo 5)