PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 16 Gennaio 2018
Traccia: A

Esercizio 1. In S_{10}, sia assegnata la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 10 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento h è dispari o pari.
(3) Calcolare l'ordine dell'elemento h nel gruppo S_{10}.
(4) Scrivere esplicitamente l'inverso di h.
(5) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.

Esercizio 2. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$5 \sum_{i=-1}^{n} \left(\frac{1}{6}\right)^i = 36 - \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Esercizio 3. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$180x + 138y = 12.$$

Esercizio 4. Si consideri un sottoinsieme E di B. Dare la definizione di insieme complementare $\complement_B(E)$ di E in B. Inoltre, si considerino due sottoinsiemi E e F di B. Si dimostri che

$$\complement_B(E) \cup \complement_B(F) = \complement_B(E \cap F).$$

Esercizio 5. Sia assegnato l'anello $(\mathbb{Z}_{26}, +, \cdot)$. Determinare quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Infine, scrivere esplicitamente l'inverso degli elementi invertibili.

Esercizio 6. Siano $C \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $F \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, FC e CF.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di F e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di F e di C.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 16 Gennaio 2018
Traccia: 1

Esercizio 1. Stabilire quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili nell'anello $(\mathbb{Z}_{26}, +, \cdot)$. Per ogni elemento invertibile, stabilire esplicitamente l'inverso.

Esercizio 2. Sia B un sottoinsieme di D. Si dia la definizione di insieme complementare $\complement_D(B)$ di B in D. Inoltre, dati A e B sottoinsiemi di D si dimostri che

$$\complement_D(A \cup B) = \complement_D(A) \cap \complement_D(B).$$

Esercizio 3. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Descrivere l'elmento g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Individuare l'ordine di g nel gruppo S_9.
(3) Determinare esplicitamente l'inverso di g.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.
(5) Indicare se l'elemento g è pari o dispari.

Esercizio 4. Siano $E \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, ED e DE.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di E e di D.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di E e di D.

Esercizio 5. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$172x + 120y = 8.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 6. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$7 \sum_{i=-1}^{n} \left(\frac{1}{8}\right)^i = 64 - \left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 16 Gennaio 2018
Traccia: X

Esercizio 1. Si consideri una funzione $g : A \to B$. Dare la definizione di immagine di un sottoinsieme di A. Inoltre, siano $Y, Y' \subseteq A$; dimostrare se è vero che

$$g(Y \cup Y') = g(Y) \cup g(Y').$$

Esercizio 2. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$6 \sum_{i=-1}^{n} \left(\frac{1}{7}\right)^i = 49 - \left(\frac{1}{7}\right)^n.$$

Esercizio 3. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare esplicitamente l'inverso di f.
(3) Individuare l'ordine di f nel gruppo S_9.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.
(5) Indicare se l'elemento f è pari o dispari.

Esercizio 4. Nell'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$, stabilire quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Stabilire esplicitamente l'inverso di ogni elemento invertibile.

Esercizio 5. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$231x + 96y = 8.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 6. Siano $G \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AG e GA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di G e di A.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di G.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 1 Febbraio 2018
Traccia: 2

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, e \in \mathbb{N} \qquad h(e) = \frac{2e-1}{e+3}$$

e

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{2}{9} - \frac{3}{4}x^5$$

sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ h$ e $h \circ g$ e le funzioni inverse h^{-1} e g^{-1}.

Esercizio 2. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 3i - 2,\ z_2 = 4 - 2i.$$

(1) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(2) Scrivere il modulo di z_1 e z_2.
(3) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 3. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, y), (s, t) \in A \qquad (x, y) * (s, t) = (\frac{1}{4}sx, 4 + y + t).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(0, -1)$ in $(A, *)$.

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 3x \equiv 12 \pmod{18} \\ 50x \equiv 54 \pmod{7} \\ 6x \equiv 42 \pmod{66}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Date tre proposizioni T, S e Q, scrivere la tabella di verità di $(Q \vee S) \wedge (T \implies Q)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall s \in \mathbb{Z} \quad \exists\ c \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad s = -2c^3y^3 + s + 5yc.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 6. Scrivere la definizione di monoide e di elemento invertibile in un monoide. Inoltre, dimostrare l'unicità dell'inverso di un elemento invertibile.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 1 Febbraio 2018
Traccia: B

Esercizio 1. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 3x \equiv 15 \pmod{21} \\ 67x \equiv 18 \pmod{11} \\ 67x \equiv 40 \pmod{6}. \end{cases}$$

Esercizio 2. In un anello commutativo unitario $(A, +, \cdot)$, dare la definizione di elemento invertibile e di divisore dello zero. Inoltre, dimostrare che se a è un elemento invertibile allora a non è un divisore dello zero.

Esercizio 3. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (a, e), (c, d) \in A \qquad (a, e) * (c, d) = (5 + a + c, \frac{1}{5}de).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa.
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Descrivere, se esiste, in modo esplicito l'inverso di $(2, 0)$ in $(A, *)$.

Esercizio 4. Stabilire se le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = \frac{3}{7} - \frac{1}{5}x^3$$

e

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ c \in \mathbb{N} \qquad g(c) = \frac{c-2}{c+5}$$

sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$ e le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}.

Esercizio 5. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 3 - 3i,\ \ z_2 = 2i - 5.$$

(1) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(2) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(3) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\frac{1}{z_2}$, $z_1 z_2$ e $\frac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 6. Date tre proposizioni P, S e R, scrivere la tabella di verità di $(R \implies S) \vee (P \wedge R)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists\ b \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\ a \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad y = 3b^2a^2 + y - 4a^3b.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 15 Febbraio 2018
Traccia: A

Esercizio 1.
(1) Stabilire se esiste un albero con 14 vertici, dei quali: 3 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 14 vertici, dei quali: 3 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 2. Siano $D \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ e $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ le seguenti matrici

$$D = \begin{pmatrix} 0 & i & 3 \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, CD e DC.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di D e di C.

Esercizio 3. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$7 \mid 8^n + 6.$$

Esercizio 4. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Dare la definizione di insieme $\mathscr{P}(A)$ della parti di A. Inoltre stabilire la cardinalità di $\mathscr{P}(A)$ e dare una dimostrazione dettagliata della risposta.

Esercizio 5. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 6. Si considerino 6 Etiopi, 7 Arabi e 9 Turchi. Gli Etiopi sono tutti Uomini, tra i Turchi ci sono 3 Uomini e tra gli Arabi ci sono 3 Donne.

a) Stabilire in quanti modi diversi si può formare un comitato di 8 persone.
b) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità.
c) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente una donna.
d) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno una donna.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 15 Febbraio 2018
Traccia: 2

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$6 \mid 7^n + 5.$$

Esercizio 2. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Dare la definizione di insieme $\mathscr{P}(A)$ della parti di A. Inoltre stabilire la cardinalità di $\mathscr{P}(A)$ e dare una dimostrazione dettagliata della risposta.

Esercizio 3. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 4. Consideriamo 6 Tunisini, 5 Russi e 10 Estoni. I Russi sono tutte Donne, tra gli Estoni ci sono 4 Donne e tra i Tunisini ci sono 4 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 7 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 5. (1) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 5 di grado 3, 4 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

(2) Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 5 di grado 3, 4 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 6. Siano $E \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ le seguenti matrici

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} i & 2 & 0 \\ -i & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, EB e BE.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di E e di B.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di E e di B.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 19 Aprile 2018

Esercizio 1. Usando la formula del binomio di Newton, dimostrare che $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ e ogni primo p si ha che

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}.$$

Esercizio 2. Consideriamo 7 Canadesi, 9 Messicani e 8 Venezuelani. I Canadesi sono tutte Donne, tra i Messicani ci sono 4 Donne e tra i Venezuelani ci sono 5 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 9 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$63x + 99y = 18.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = i - 3, \;\; z_2 = 2 - \sqrt{2}i.$$

(1) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(2) Scrivere il modulo di z_1 e z_2.
(3) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 5. Verificare se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_n = & a_{n-1} + 2(2n+1) \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $b_n = 2n(n+2)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 6. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall \; (x,y), (a,b) \in A \qquad (x,y) * (a,b) = (\frac{1}{2}xa, 5 + b + y).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(1,1)$ in $(A, *)$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 23 Luglio 2018

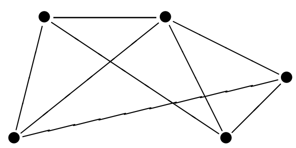
Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$8 \mid 9^n + 7.$$

Esercizio 2. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 3. Dare la definizione di coefficiente binomiale. Inoltre, dimostrare che $\forall k \leq n$ si ha
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari
$$\begin{cases} 41x \equiv 3 \pmod{4} \\ 5x \equiv 3 \pmod{7} \\ 2x \equiv 6 \pmod{10}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $\mathcal{G}$ il grafo seguente.



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è planare e determinare la valenza dei suoi vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.
(3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e le stesse valenze.
(4) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è bipartito.

Esercizio 6. Dati i seguenti numeri complessi:
$$z_1 = 1 + \frac{1}{3}i, \quad z_2 = -2 - 3i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ e $z_1 + z_2$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 5 Settembre 2018

Esercizio 1. (1) Stabilire se esiste un albero con 13 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 4 di grado 3, 1 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con con 13 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 4 di grado 3, 1 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 2. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 17 \mid 7b + 10a\},$$

(ovvero $a\,\mathcal{R}\,b \iff 17 \mid 7b + 10a$). Stabilire se $\mathcal{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Se è di equivalenza, scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 3. Date tre proposizioni P, S e R, scrivere la tabella di verità di $(R \vee P) \wedge (P \wedge S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad t = 7(ka)^3 + t + ak.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 4. Stabilire con una dimostrazione se le seguenti congruenze sono vere o false:

$$43^{20} \equiv 2 \pmod{44} \qquad\qquad 16^{25} \equiv 16 \pmod{45}.$$

Esercizio 5. Dare la definizione di gruppo abeliano. Si dimostri che per ogni numero primo p, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 6. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare esplicitamente l'inverso di f.
(3) Individuare l'ordine di f nel gruppo S_9.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.
(5) Indicare se l'elemento f è pari o dispari.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 19 Settembre 2018

Esercizio 1. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$4\sum_{i=0}^{n+1}(5)^i = 5^{n+2} - 1.$$

Esercizio 2. Consideriamo 7 Danesi, 8 Estoni e 9 Turchi. I Danesi sono tutte Donne, tra i Turchi ci sono 4 Donne e tra gli Estoni ci sono 5 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 9 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$57x + 96y = 6.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Siano $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AC e CA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di A e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di C.

Esercizio 5. Scrivere la definizione di monoide e di elemento invertibile in un monoide. Inoltre, dimostrare l'unicità dell'inverso di un elemento invertibile.

Esercizio 6. Sia assegnato l'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$. Determinare quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Infine, scrivere esplicitamente l'inverso degli elementi invertibili.