Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 2

Esercizio 2.1

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$.
Infatti al primo membro abbiamo $1^2 = 1$ e al secondo membro $\frac{1(2)(3)}{6} = 1$.
Supponiamo vera la proprietà per $n-1$ e dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6},$$

quindi

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \left[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right] + n^2 =$$
$$\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1) + 6n^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 2.2

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$.
Infatti al primo membro abbiamo $1^3 = 1$ e al secondo membro $\frac{1(2)^2}{4} = 1$.
Supponendo vera la proprietà per $n-1$ dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

quindi

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \left[1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3\right] + n^3 =$$
$$\frac{(n-1)^2 n^2}{4} + n^3 = \frac{(n-1)^2 n^2 + 4n^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Esercizio 2.3

$\sum_{j=0}^{n-1} 2j + 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ (la somma dei primi n numeri positivi dispari)

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$.
Infatti al primo membro abbiamo 1 e al secondo membro abbiamo $1^2 = 1$.
Supponiamo vera la proprietà per $n-1$ e dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{j=0}^{n-2} 2j+1 = 1 + 3 + ... + 2n-3 = (n-1)^2$$

quindi

$$\sum_{j=0}^{n-1} 2j+1 = [1 + 3 + ... + 2n-3\ ] + 2n-1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2.$$

Esercizio 2.4

$\sum_{j=1}^{n} 2j = 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$ (la somma dei primi n numeri positivi pari).

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$.
Infatti al primo membro abbiamo 2 e al secondo membro abbiamo $1(1+1) = 2$.
Supponendo vera la proprietà per $n-1$, dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = 2+4+\cdots+2(n-1) = (n-1)n$$

quindi, aggiungendo ad entrambi i membri $2n$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{n} 2j = [2+4+\cdots+2(n-1)] + 2n = (n-1)n + 2n = \quad n(n+1).$$

Esercizio 2.5

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 0$.
Infatti al primo membro abbiamo 1 e al secondo membro $\frac{3^{0+1}-1}{2} = 1$.
Supponendo vera la proprietà per $n-1$, dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 3^i = 1+3+\cdots+3^{n-1} = \frac{3^n-1}{2}$$

quindi, aggiungendo ad entrambi i membri 3^n, si ottiene

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \left[1+3+\cdots+3^{n-1}\right] + 3^n = \frac{3^n-1}{2} + 3^n = \frac{3^n - 1 + 2\cdot 3^n}{2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$