

ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

Informatica - Corso B - A. A. 2018-2019
4 Ottobre 2018 ¹

Esercizio 1. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Esercizio 2. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 3. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Esercizio 4. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Esercizio 5. Dimostrare col principio di induzione che per ogni fisato $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$q^0 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Esercizio 6. ² Tutti i gatti hanno lo stesso colore.

È come dire in ogni insieme di gatti tutti hanno lo stesso colore.

Vogliamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, in ogni insieme con n gatti questi hanno tutti lo stesso colore.

1) Base induzione: Mostriamo che $P(1)$ è vera.

$P(1)$: In un insieme di un gatto hanno tutti lo stesso colore.

Questo è vero, quindi $P(1)$ è vera.

2) Passo Induttivo: Mostriamo che $\forall k \geq 1$ $P(k)$ vera implica $P(k+1)$ vera

$P(k)$: In ogni insieme con k gatti questi hanno tutti lo stesso colore.

$P(k+1)$: In ogni insieme con $k+1$ gatti questi hanno tutti lo stesso colore.

Prendiamo un insieme con $k+1$ gatti, numeriamo i gatti da 1 a $k+1$. Per induzione quelli numerati da 1 a k hanno tutti lo stesso colore (sono un insieme con k gatti). Ad esempio hanno tutti lo stesso colore del gatto 2. Analogamente per i gatti numerati da 2 a $k+1$, questi sono k gatti e quindi hanno tutti lo stesso colore del gatto numero 2. Allora tutti i gatti hanno lo stesso colore..... eppure qualche dubbio rimane....

¹Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata. Tra questi esercizi, alcuni sono stati presi da alcuni testi, o da esami passati. L'aggiunta di eventuali errori è opera mia.

²La domanda è completamente indipendente dal corso. Capire la risposta o essere curiosi della risposta è del tutto facoltativo.