Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 14

Esercizio 14.1 (pag. 213)
Si considerino le seguenti applicazioni $f_i,\ i \in \{1,2,3,4\}$, $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Per ognuna di esse dire se è lineare. In caso affermativo determinare la matrice A_i associata all'applicazione f_i (rispetto alla base canonica). Stabilire quindi se A_i è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare la matrice diagonale associata.

1. $f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ c \end{pmatrix}$.

2. $f_2\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ c-a \end{pmatrix}$

3. $f_3\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b+c \\ a+b \\ c-a \end{pmatrix}$

4. $f_4\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ a+b+c \\ c-b \end{pmatrix}$

Soluzione

1.a) Verifichiamo che l'applicazione f_1 è lineare.

Per ogni $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\bar{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $\forall\ k \in \mathbb{R}$, consideriamo

- $f_1(\bar{v}+\bar{w}) = f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f_1\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) =$
  $= \begin{pmatrix} 2(a+a') \\ a+a'+b+b' \\ c+c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a' \\ a'+b' \\ c' \end{pmatrix} = f_1(\bar{v}) + f_1(\bar{w})$.
- $f_1(k\bar{v}) = f_1\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_1\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2ka \\ ka+kb \\ kc \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ c \end{pmatrix} = kf_1(\bar{v})$.

1.b) Consideriamo ora la matrice A_1 associata all'applicazione f_1, rispetto alla base canonica
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

- $f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_1(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  La matrice cercata è quindi $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.c) Per trovare gli autovalori di f_1, consideriamo la matrice

- $A_1 - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

e ne calcoliamo il determinante (polinomio caratteristico).
Otteniamo

- $\det(A_1 - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, cioè le soluzioni dell'equazione $\det(A_1 - \lambda I_3) = 0$.
Essi sono: $\lambda = 2$ (autovalore di molteplicità 1) e $\lambda = 1$ (autovalore di molteplicità 2).
Poichè tali autovalori non sono tutti distinti, la matrice sarà diagonalizzabile se e solo se essi sono regolari e la somma delle loro molteplicità è $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (Cfr. Teorema 14.1).

- $\lambda = 1 : A_1 - 1I_3 = \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

  In questo caso $car(A_1 - \lambda I_3) = 1$ e quindi l'autovalore $\lambda = 1$ è regolare (infatti $1 = 3 - 2$, dove $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e 2 è la molteplicità dell'autovalore).

- $\lambda = 2 : A_1 - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

  In questo caso $car(A_1 - 2I_3) = 2$

  e quindi anche l'autovalore $\lambda = 2$ è regolare essendo $2 = 3 - 1$ (dove $3 = \dim \mathbb{R}^3$ e la molteplicità dell'autovalore è 1).

1.d) Una matrice diagonale D_1 associata ad A_1 è $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.e) Se vogliamo determinare una matrice diagonalizzante C tale che $C^{-1}A_1C = D_1$, ricordando che la si può ottenere per accostamento dei vettori colonna che generano gli autospazi relativi agli autovalori regolari trovati (cfr Es 14.2 e 14.3), possiamo procedere nel modo seguente:

- Determiniamo l'autospazio V_1 relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

  $$(A_1 - 1I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0.$$

  Si ha che $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} |y, z \in \mathbb{R} \right\}$ ed è quindi puó essere generato dai vettori

  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- L'autospazio V_2 relativo all'autovalore $\lambda = 2$ si ottiene risolvendo il sistema

$$(A_1 - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \text{ e quindi } V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

1.f) Si ottiene $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e quindi

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D_1.$$

2.a) Verifichiamo che f_2 è un'applicazione lineare:

- $f_2(\bar{v} + \bar{w}) = f_2\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f_2\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} a+a' \\ (a+a')+(b+b')+(c+c') \\ (c+c')-(a+a') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ c-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ a'+b'+c' \\ c'-a' \end{pmatrix} =$$

$$= f_2(\bar{v}) + f_2(\bar{w}).$$

- $f_2(k\bar{v}) = f_2\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_2\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ka \\ ka+kb+kc \\ kc-ka \end{pmatrix} =$

$$= k\begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ c-a \end{pmatrix} = kf_2(\bar{v}).$$

2.b) Determiniamo l'immagine tramite l'applicazione f_2 degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$f_2(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_2(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è quindi: $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Autovalori:

$$\det(A_2 - \lambda I_3) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Si ottiene che $\lambda = 1$ è un autovalore con molteplicità 3.

In questo caso λ è regolare se e solo se $car(A_2 - \lambda I_3) = 3 - 3 = 0$: cioè se e solo se la matrice $A_2 - 1I_3$ è la matrice nulla, il che non è vero essendo:

$$A_2 - 1I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Si conclude che la matrice A_2 non è diagonalizzabile.

3.a) Verifichiamo che l'applicazione f_3 è lineare:

- $f_3(\bar{v}+\bar{w}) = f_3\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f_3\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{pmatrix} (b+b')+(c+c') \\ (a+a')+(b+b') \\ (c+c')-(a+a') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ a+b \\ c-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'+c' \\ a'+b' \\ c'-a' \end{pmatrix} = f_3(\bar{v}) + f_3(\bar{w}).$

- $f_3(k\bar{v}) = f_3\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_3\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} kb+kc \\ ka+kb \\ kc-ka \end{pmatrix} =$

$= k\begin{pmatrix} b+c \\ a+b \\ c-a \end{pmatrix} = kf_3(\bar{v}).$

3.b) Ancora determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$f_3(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_3(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_3(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice cercata è quindi: $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Autovalori:

$$\det(A_3 - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda = 0, \lambda = 1.$

- Gli autovalori sono: $\lambda = 0$ di molteplicità 1 e $\lambda = 1$ di molteplicità 2.

Saranno regolari se $car(A_3 - 0I_3) = 3 - 1 = 2$ e $car(A_3 - 1I_3) = 3 - 2 = 1$.

- $(A_3 - 0I_3) = A_3$: si ha che $car(A_3) = 2$, perchè $\det(A_3) = 0$ e $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$.

- $(A_3 - 1I_3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3 - I_3) = 0.$

- Poichè $\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ segue che $car(A_3 - I_3) = 2 \neq 1$, per cui l'autovalore non è regolare.

- Si conclude che A_3 non è diagonalizzabile.

4.a) L'applicazione f_4 è lineare. Infatti:

- $f_4(\bar{v}+\bar{w}) = f_4\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f_4\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) =$
  $= \begin{pmatrix} 0 \\ (a+a')+(b+b')+(c+c') \\ (c+c')-(b+b') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+b+c \\ c-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a'+b'+c' \\ c'-b' \end{pmatrix} =$
  $= f_4(\bar{v}) + f_4(\bar{w})$.

- $f_4(k\bar{v}) = f_4\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_4\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ ka+kb+kc \\ kc-kb \end{pmatrix} =$
  $= k\begin{pmatrix} 0 \\ a+b+c \\ c-b \end{pmatrix} = kf_4(\bar{v})$.

4.b) Determiniamo l'immagine tramite l'applicazione f_4 degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

- $f_4(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_4(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_4(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- La matrice è quindi: $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- $\det(A_4 - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda[(1-\lambda)^2+1] = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$.

  Quindi $\det(A_4 - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, (il polinomio di secondo grado è irriducibile in $\mathbb{R}$).

- Abbiamo quindi un solo autovalore ($\lambda = 0$) di molteplicità 1.

- Per il teorema 14.1, la matrice non è quindi diagonalizzabile.