Definizione 1. Si dice che due insiemi X e Y sono _equipotenti_ Y se esiste una bigezione tra X e Y.

Definizione 2. Si dice che un insieme X è _infinito_ se esiste un'applicazione ingettiva ma non surgettiva di X in X.

Esempio 1. Sicuramente l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è infinito in quanto per esempio l'applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = 2n$, è ingettiva ma non surgettiva.

Osservazione 1. Se X è un insieme infinito ed è contenuto in un insieme Y, allora anche Y è infinito. Quindi gli insiemi numerici $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono infiniti in quanto contengono $\mathbb{N}$.

Definizione 3. Si dice che un insieme X è _finito_ se è vuoto o se non è infinito.

Teorema 1. *Sia X un insieme finito non vuoto. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ ed ed esiste un'applicazione bigettiva $\gamma : J_n \to X$, dove $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$.*

Osservazione 2. Nella situazione del Teorema 1, si può scrivere

$$X = \{\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(n)\}.$$

Inoltre si dice che X ha _cardinalità_ n e si scrive:

$$|X| = n.$$

Osservazione 3. Due insiemi finiti X e Y sono equipotenti se e solo se hanno la stessa cardinalità (verificata a lezione).

Definizione 4. Un'applicazione bigettiva di un insieme finito in se si dice _permutazione_

Osservazione 4. Si denoterà con $\mathcal{S}_n$ l'insieme delle permutazioni dell'insieme $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$. S_n si chiama insieme delle perumutazioni su n oggetti perché un qualunque insieme di cardinalità n è bigettivo a J_n e quindi studiare le permutazioni su J_n equivale a studiare le permutazioni su un qualunque insieme di cardinalità n.

Osservazione 5. Siano X, Y due insiemi finiti. Allora può esistere un'applicazione ingettiva avente X come insieme di partenza e Y come insieme di arrivo solo se $|X| \leq |Y|$; invece può esistere un'applicazione surgettiva solo se $|X| \geq |Y|$. Infine, se $|X| = |Y|$ allora un'applicazione $f : X \to Y$ è ingettiva se e soltanto se è surgettiva e quindi se e soltanto se è bigettiva.

Definizione 5. Siano $n, k \in \mathbb{N}^*$. Si dice *disposizione con ripetizioni di k elementi di classe n* una n-pla ordinata con ripetizioni di k oggetti.
Si dice *combinazione con ripetizioni di k elementi di classe n* una n-pla non ordinata con ripetizioni di k oggetti.

Definizione 6. Siano $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n \leq k$. Si dice *disposizione semplice di k elementi* di classe n una n-pla ordinata senza ripetizioni di k oggetti.
Si dice *combinazione semplice di k elementi di classe n* una n-pla non ordinata senza ripetizioni di k oggetti.

Proposizione 1. *Il numero delle disposizioni con ripetizioni di k elementi di classe n è k^n. (Dimostrato a lezione).*

Proposizione 2. *Il numero delle disposizioni semplici di k elementi di classe n è*

$$(k)_n = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-n+1).$$

(Dimostrato a lezione)
In particolare il numero delle disposizioni semplici di n elementi di classe n è

$$(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

dove il numero $n!$ si indica con il nome di n fattoriale.

Osservazione 6. Si possono riguardare le disposizioni semplici o con ripetizioni come applicazioni tra insiemi finiti, queste ultime pensate con il modello delle parole. Allora è facile rendersi conto del fatto che il numero delle permutazioni di un insieme di cardinalità n è $n!$, ovvero:

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$

Osservazione 7. Si definisce anche

$$0! = 1.$$

Corollario 1. *Sia A un insieme finito con $|A| = n$. Allora*

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

(Dimostrato a lezione)

Definizione 7. Siano r, s interi positivi, con $r \leq s$, $s \neq 0$. Si dice *coefficiente binomiale* il numero

$$\binom{s}{r} = \frac{(s)_r}{r!} = \frac{s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot (s-r+1)}{r!} = \frac{s!}{r!(s-r)!}$$

Osservazione 8. Si ha: $\binom{s}{0} = 1$, $\binom{s}{1} = s$, $\binom{s}{s} = 1$, $\binom{s}{s-1} = s$, $\binom{s}{r} = \binom{s-1}{r} + \binom{s-1}{r-1}$.

Teorema 2. *Vale la formula del binomio di Newton:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Proposizione 3. *Il numero dei sottoinsiemi di n elementi di un insieme di k elementi, ovvero il numero delle combinazioni semplici di k elementi di classe n è proprio $\binom{k}{n}$. (dimostrato a lezione)*

Osservazione 9. La Proposizione 3 e la formula del binomio di Newton forniscono una diversa dimostrazione del Corollario 1.

Proposizione 4. *Il numero delle combinazioni con ripetizione di k elementi di classe n è dato da $\binom{k+n-1}{n}$. (dimostrato a lezione)*

Proposizione 5. *Il numero delle applicazioni surgettive di un insieme di cardinalità n in un insieme di cardinalità m, $n \geq m$ è:*
$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^n.$$

Esempio 2. Per $n = 3$, $m = 2$
$$\sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k}(-1)^{2-k}k^3 = \binom{2}{1}(-1)^1 + \binom{2}{2}(-1)^0 8 = -2 + 8 = 6.$$

Esempio 3. Per $n = 4$, $m = 3$
$$\sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k}(-1)^{3-k}k^4 = \binom{3}{1}(-1)^2 + \binom{3}{2}(-1)^1 2^4 + \binom{3}{3}(-1)^0 3^4$$
$$= 3 - 3 \cdot 16 + 81 = 3 - 48 + 81 = 36.$$