Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 13

Proposizione 13.7 (pag. 198)

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita ed $f : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare tra V e W, allora
a) f è suriettiva $\Leftrightarrow \dim f(V) = \dim W$.
b) f è iniettiva $\Leftrightarrow \dim \ker f = 0$.

Dimostrazione
a) f suriettiva $\Rightarrow \dim f(V) = \dim W$.
Poichè f è suriettiva, $f(V) = W$ quindi $\dim f(V) = \dim W$.

Viceversa se $\dim f(V) = \dim W$, poichè $f(V)$ è un sottospazio di W, si ha che $f(V) \subseteq W$ e una base di $f(V)$ è inclusa in W. Poichè i due spazi hanno la stessa dimensione segue che $f(V) = W$ e quindi la f è suriettiva (per definizione).

b) f iniettiva $\Rightarrow \dim \ker f = 0$.
Infatti, se f è iniettiva, ogni elemento di W ha al più una controimmagine in V, in particolare $\ker f = \{v \in V \,|\, f(v) = 0_W\} = \{0_V\}$ e quindi $\dim \ker f = 0$.

Viceversa se $\dim \ker f = 0$ segue che f è iniettiva. Infatti se, per assurdo, esistessero due vettori distinti v_1, v_2 tali che $f(v_1) = f(v_2)$, avremmo anche $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0_W$ e quindi l'elemento $v_1 - v_2 \neq 0_V$ apparterrebbe al $\ker f$: assurdo (perchè per ipotesi $\ker f = \{0_V\}$, avendo dimensione 0.)

Esercizio 13.1 (pag 202)

Date le seguenti applicazioni, dire quali sono lineari:

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ c-b \end{pmatrix}$.

2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -a \\ -a+b \\ -a+b+2 \end{pmatrix}$.

3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $h\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = 2a + b$.

4. $l : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $l\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a+b \end{pmatrix}$.

Soluzione

1. Verifichiamo che $\forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ siano verificate le uguaglianze: $f(v+w) = f(v) + f(w)$ e $kf(v) = f(kv)$.

- $f(v+w) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (a+a')+(b+b') \\ b+b' \\ (c+c')-(b+b') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)+(a'+b') \\ b+b' \\ (c-b)+(c'-b') \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ c-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b' \\ b' \\ c'-b' \end{pmatrix} = f(v) + f(w).$$

- $kf(v) = kf\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = k\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ c-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a+b) \\ kb \\ k(c-b) \end{pmatrix} = f(kv).$

2. Ancora dovremmo verificare che $\forall k \in \mathbb{R}$, e per ogni vettore $\bar{v}, \bar{w}$ di $\mathbb{R}^2$ sono verificate le uguaglianze $g(\bar{v}+\bar{w}) = g(\bar{v}) + g(\bar{w})$ e $kg(\bar{v}) = g(k\bar{v})$.

Si vede però che, considerando ad esempio i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ha che

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mentre

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Si conclude che l'applicazione g non è lineare.

Osservazione È molto piú rapido concludere che l'applicazione g non è lineare osservando che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\forall\ \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ consideriamo

$$h(\bar{v}+\bar{w}) = h\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix} =$$
$$= 2(a+a') + (b+b') = (2a+b) + (2a'+b') = h(\bar{v}) + h(\bar{w}).$$

Inoltre $h(k\bar{v}) = h\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = 2ka+kb = k(2a+b) = kh(\bar{v})$
e quindi l'applicazione h è lineare.

4. Come l'applicazione g del punto 2, anche 'applicazione l non è lineare.
Infatti $l\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 13.2 (pag. 202)

Determinare la matrice associata alle seguenti applicazioni lineari da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica:

1. $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$.

2. $g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ a+b \end{pmatrix}$.

3. $h\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

4. $t\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3a \\ a-b \\ b-c \end{pmatrix}$.

Soluzione

1. Determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Ancora determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Ancora determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$h\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_h = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

4. Ancora determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$t\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},t\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_t = \begin{bmatrix}3&0&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Esercizio 13.3 (pag.202)

Sia $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da:

$$g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\x+y\\z\\z+x\end{pmatrix}$$

a) Verificare che g è lineare.

b) Determinare la matrice associata all'applicazione g (rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$).

c) Determinare $\ker g$ e Img.

Soluzione

a) L'applicazione g è lineare. Infatti $\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ e $\forall k\in\mathbb{R}$ si ha

i) $$g\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=g\left(\begin{pmatrix}x+a\\y+b\\z+c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2(x+a)\\(x+a)+(y+b)\\z+c\\(z+c)+(x+a)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2x+2a\\(x+y)+(a+b)\\z+c\\(z+x)+(c+a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\(x+y)\\z\\(z+x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2a\\(a+b)\\c\\(c+a)\end{pmatrix}=$$

$$= g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right);$$

ii) $g\left(k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2kx \\ kx+ky \\ kz \\ kz+kx \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ z \\ z+x \end{pmatrix} = kg\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right).$

b) Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica:

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice associata all'applicazione g, rispetto alla base canonica, è

$$M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Per il punto precedente si ha che $Img = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi avrà dimensione al più 3, anzi la dimensione sará 3 perché il rango della matrice M_g è 3. Segue quindi che $\dim kerg = 0$ e quindi $\ker g = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Osservazione Si poteva procedere anche nel seguente modo:
determiniamo $\ker g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ z \\ z+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Le componenti dei vettori in $\ker g$ hanno quindi le componenti che soddisfano le condizioni:

$$\begin{cases} 2z & = 0 \\ x+y & = 0 \\ z & = 0 \\ z+x & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Si conclude che $\ker g = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ e quindi ha dimensione 0 (e la g è iniettiva).

La dimensione di Img sarà 3 per il teorema 13.1 (e da questo segue ancora che 3 è la caratteristica della matrice M_g).

Esercizio 13.4 (pag. 203)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione definita da $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$.

Verificare che f è lineare e determinare $\ker f$ e Imf.

Soluzione

- f è lineare: infatti $\forall \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ si ha:

  $f(\bar{v}+\bar{w}) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ (a+a')+(b+b') \end{pmatrix} =$

  $= \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ a'+b' \end{pmatrix} = f(\bar{v}) + f(\bar{w}).$

  $f(k\bar{v}) = f\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ k(a+b) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} =$

  $kf(\bar{v})$.

- $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Quindi $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$,

$\dim(\ker f) = 0$, e quindi la f è iniettiva.

Segue che $\dim(Imf) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

Esercizio 13.5 (pag 203)

Considerate le applicazioni dell'esercizio **13.2,** per ciascuna di esse

a) determinare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) determinare, quando esistono, le preimmagini dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

c) determinare la matrice associata.

Soluzione

a1. $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a2. $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a3. $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a4. $t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Determiniamo, se esistono, le controimmagini richieste:

b1. Rispetto ad f. Poiché $f{:}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$, si tratta di vedere se esistono soluzioni delle uguaglianze

i) $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **iii)** $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
iv) $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si conclude che **i), ii), iv)** non hanno soluzione poiché il vettore al primo membro ha la seconda componente nulla, mentre al secondo membro la seconda componente è diversa da zero e quindi gli elementi corrispondenti non hanno controimmagine, mentre **iii)** ha soluzioni $x = 1, y = 1$ quindi

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b2. Rispetto a g. Poiché $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix}$, si tratta di vedere se esistono soluzioni delle uguaglianze

i) $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $= \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
iii) $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **iv)** $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In tutti e quattro i casi non ci sono soluzioni in quanto le condizioni sulla prima e seconda componente sono incompatibili.

b3. Rispetto ad h. Poiché $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, si tratta di vedere se esistono soluzioni delle uguaglianze

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $= \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **iv)** $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Questa volta ci sono soluzioni solo nel caso **ii)** e precisamente si ha $y = 1,\ z = 1$ quindi $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre le altre uguaglianze sono impossibili.

b4. rispetto a t. Poiché $t\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix}$, si tratta di vedere se esistono soluzioni delle uguaglianze:

i) $\begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $= \begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
iii) $\begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **iv)** $\begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

in questo caso tutte le uguaglianze hanno soluzione, precisamente:
i) $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{-2}{3},\ z = \frac{-5}{3}$, quindi $t\left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

ii) $x = 0,\ y = -1,\ z = -2$, quindi $t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

iii) $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{3},\ z = \frac{-2}{3}$, quindi $t\left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

iv) $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{5}{3},\ z = \frac{5}{3}$, quindi $t\left(\begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Determiniamo la matrice associata alle applicazioni lineari date. Poiché non si specificano le basi, utilizziamo le basi canoniche sia per il dominio che per il codominio.

c1.
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Poiché $car(M_f) = 2$ si ha $\dim(Imf) = 2$.

c2.
$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ancora $car(M_f) = 2$ e quindi $\dim(Imf) = 2$.

c3.
$$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ancora $car(M_f) = 2$ e quindi $\dim(Imf) = 2$.

c4.

$$t\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\ t\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_t=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

Questa volta $detM_t\neq 0$ quindi $car(M_t)=3$ e quindi $\dim(Imt)=3$.

Osservazione

Nell'ultimo caso l'applicazione t è suriettiva, quindi non è casuale che tutti i vettori dati avessero controimmagine.