Definizione 1. Sia $f\colon A \to B$ una funzione. La funzione f si dice BIETTIVA o BIGETTIVA se è sia iniettiva che suriettiva, cioè

$$\forall b \in B, \exists! a \in A \quad \text{t.c} \quad f(a) = b$$

Esempio 1. Si consideri la funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad f(x) = x^5 - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f è biettiva??
La risposta è SI poichè f è sia iniettiva che suriettiva. Infatti:
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ se $f(x) = f(y) \implies x^5 - 4 = y^5 - 4 \implies x^5 = y^5 \implies x = y$, quindi f è iniettiva; inoltre $\forall y \in \mathbb{R}$ se $f(x) = y \implies x^5 - 4 = y \implies x^5 = y + 4 \implies x = \sqrt[5]{y+4}$ e tale x appartiene ad $\mathbb{R}$, comunque si scelga $y \in \mathbb{R}$. Quindi f è anche suriettiva.

Esempio 2. Si consideri la funzione

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad f(n) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

f è biettiva??
Osserviamo che f è non iniettiva, infatti se si considerano gli interi $n = 2$ e $n' = -2$, pur essendo diversi, le loro immagini, mediante f, coincidono.
Quindi la funzione f NON è biettiva, poichè per esserlo dovrebbe essere sia iniettiva che suriettiva.

Definizione 2. Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni. Si chiama FUNZIONE COMPOSIZIONE di f e g, si indica con $g \circ f$ (si legge g cerchietto f), la funzione

$$g \circ f\colon A \to C \quad \text{tale che} \quad \forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a)),$$

cioè

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a & \mapsto & f(a) & \mapsto & g(f(a)) \end{array}$$

Osservazione 1. Come si evince dalla definizione precedente, affinchè esita la funzione composta $g \circ f$ è fondamentale che l'insieme di arrivo di f (funzione che si trova scritta più a destra, cioè quella che viene applicata per prima) coincida con l'insieme di partenza di g (funzione più a sinistra).
Questa è la regola generale per stabilire se, assegnate due funzioni f e g esiste la loro funzione composizione $g \circ f$

Osservazione 2. Se esiste la funzione $g \circ f$, come si evince dalla definizione, $g \circ f$ ha come insieme di partenza l'insieme di partenza di f e come insieme di arrivo quello della funzione g.

Osservazione 3. Come segue dalla definizione, assegnate due funzioni f e g è ben diverso determinare, se è possibile, $g \circ f$ e $f \circ g$.
Nell'ipotesi che esistano entrambe le funzioni composizioni, in generale si ha $g \circ f \neq f \circ g$. Spesso questo si esprime dicendo che l'operazione di composizione $\circ$, in generale, non è commutativa.

Esempio 3. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad f(n) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad f(t) = t + 2 \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Esiste $g \circ f$? La risposta è SI poichè l'insieme di arrivo di f coincide con l'insieme di partenza di g.
Esiste $f \circ g$? La risposta è SI poichè l'insieme di arrivo di g coincide con l'insieme di partenza di f.
Osservato ciò, tenendo conto dell' Osservazione 2 e della Definizione 2, si ha

$$g \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n^2) = n^2 + 2$$

e

$$f \circ g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n + 2) = (n + 2)^2$$

Osserviamo che $g \circ f \neq f \circ g$

Esempio 4. Si considerino le seguenti funzioni:

$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^* \quad \text{tale che} \quad h(n) = \frac{n}{3} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad f(q) = \frac{1}{q} \quad \forall q \in \mathbb{Q}^*$$

Esiste $h \circ f$? La risposta è NO poichè l'insieme di arrivo di f non coincide con l'insieme di partenza di h.
Esiste $f \circ h$? SI, perchè l'insieme di arrivo di h è uguale all'insieme di partenza di f. In tal caso si ha:

$$f \circ h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(f \circ h)(n) = f(h(n)) = f(\frac{n}{3} + 1) = \frac{1}{\frac{n}{3} + 1} = \frac{3}{n + 3}$$