PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 29 Gennaio 2019
Traccia: X

Esercizio 1. Siano $E \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare, se possibile, ED e DE.
(2) Determinare, se possibile, il determinante di E e di D.
(3) Determinare, se possibile, le matrici inverse di E e di D.

Esercizio 2. Date tre proposizioni T, Q e S, scrivere la tabella di verità di $(T \longrightarrow Q) \wedge (Q \vee S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, c \in \mathbb{Z} \quad \exists\, s \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad c = s + x^5.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 3. In S_{10}, sia assegnata la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(1) Descrivere l'elemento h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento h è pari o dispari.
(3) Descrivere esplicitamente l'inverso di h.
(4) Stabilire l'ordine di h nel gruppo S_{10}.
(5) Descrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.

Esercizio 4. Stabilire se le seguenti leggi

$$f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ c \in \mathbb{Z} \qquad f(c) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c$$

e

$$h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ y \in \mathbb{R} \qquad h(y) = \frac{4}{7}y^3 - \frac{2}{7}$$

sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $f \circ h$ e $h \circ f$ e le funzioni inverse h^{-1} e f^{-1}.

Esercizio 5. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{22}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 6. Dare la definizione di relazione di equivalenza $\mathscr{R}$ su un insieme non vuoto A e di classe di equivalenza di un elemento. Dimostrare che

$$\forall a, b \in A \text{ si ha } [b]_{\mathscr{R}} \neq [a]_{\mathscr{R}} \Longleftrightarrow [a]_{\mathscr{R}} \cap [b]_{\mathscr{R}} = \emptyset.$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 29 Gennaio 2019
Traccia: B

Esercizio 1. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{26}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 2. Dare la definizione di relazione di equivalenza $\mathscr{R}$ su un insieme non vuoto A e di classe di equivalenza di un elemento. Dimostrare che

$$\forall a, b \in A \text{ si ha } [b]_{\mathscr{R}} \neq [a]_{\mathscr{R}} \Longleftrightarrow [a]_{\mathscr{R}} \cap [b]_{\mathscr{R}} = \emptyset.$$

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, s \in \mathbb{N} \qquad h(s) = \frac{2+3s}{2+s}$$

e

$$g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, e \in \mathbb{Q} \qquad g(e) = \frac{1}{9} + \frac{3}{5}e$$

sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ h$ e $h \circ g$ e le funzioni inverse h^{-1} e g^{-1}.

Esercizio 4. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 & 4 & 8 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare l'ordine di g nel gruppo S_9.
(3) Determinare esplicitamente l'inverso di g.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.
(5) Determinare se l'elemento g è pari o dispari.

Esercizio 5. Date tre proposizioni P, S e R, scrivere la tabella di verità di $(P \vee S) \longrightarrow (R \wedge S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, x \in \mathbb{Q} \quad \exists\, b \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, z \in \mathbb{R} \quad x + z^3 + b = 0.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 6. Siano $C \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, CB e BC.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di C e di B.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di C e di B.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 15 Gennaio 2019
Traccia: 3

Esercizio 1. Stabilire, usando il principio di induzione, se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n+1}\left(\frac{6}{7}\right)^i = \frac{7}{6} - \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}.$$

Esercizio 2. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 41x \equiv 50 \pmod{4} \\ 11x \equiv 17 \pmod{3} \\ 5x \equiv 1 \pmod{7}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 3 - \sqrt{3}i, \;\; z_2 = 3i - 4.$$

(1) Stabilire la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(2) Stabilire il modulo di z_1 e z_2.
(3) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(4) Determinare in forma algebrica i numeri complessi $\frac{1}{z_1}$, $z_1 z_2$ e $\frac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 4. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, y), (a, b) \in A \qquad (x, y) * (a, b) = (2 + x + a, \frac{2}{7}by).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Stabilire, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Determinare , se esiste, in modo esplicito l'inverso di $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in $(A, *)$.

Esercizio 5. (1) S Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 2 di grado 5, 4 di grado 4, 3 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 2 di grado 5, 4 di grado 4, 3 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 6. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che l'equazione

$$ax + by = c$$

ammette soluzioni intere se e soltanto se $MCD(a, b) \mid c$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 15 Gennaio 2019
Traccia: A

Esercizio 1. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (y, x), (s, t) \in A \qquad (y, x) * (s, t) = (\frac{7}{4} ys, 4 + t + x).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa.
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Descrivere, se esiste, in modo esplicito l'inverso di $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ in $(A, *)$.

Esercizio 2. Siano $a, b, c, \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che se $c \mid a$ e $c \mid b$ allora per ogni $x, y, \in \mathbb{Z}$ si ha che $c \mid xa + yb$.

Esercizio 3. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^i = \frac{5}{4} - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 31x \equiv 32 \pmod{3} \\ 3x \equiv 5 \pmod{4} \\ 15x \equiv 36 \pmod{7}. \end{cases}$$

Esercizio 5. (1) Stabilire se esiste un grafo con 18 vertici, dei quali: 3 di grado 5, 3 di grado 4, 2 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 18 vertici, dei quali: 3 di grado 5, 3 di grado 4, 2 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 6. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 4 - 4i,\ z_2 = -2i - \sqrt{3}.$$

(1) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(2) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(3) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\frac{1}{z_2}$, $z_1 z_2$ e $\frac{z_2}{z_1}$.