PROPRIETA' 1. *1) (Associativa) Siano* $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ *e* $h\colon C \to D$ *tre funzioni.Allora*
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
2) Sia $f\colon A \to B$ *una funzione e siano* id_A *e* id_B *le funzioni identità su* A *e* B*, rispettivamente. Allora*
$$f \circ id_A = f = id_B \circ f.$$
3) Siano $f\colon A \to B$ *e* $g\colon B \to C$ *due funzioni.*
Se f *e* g *sono iniettive, allora* $g \circ f$ *è iniettiva.*
Se f *e* g *sono suriettive, allora* $g \circ f$ *è suriettiva.*
Se f *e* g *sono biettive, allora* $g \circ f$ *è biettiva.*

Osservazione 1. Per ciascuna di queste tre implicazioni non vale il viceversa.
A supporto di tale affermazione, forniamo il seguente controesempio.
Si considerino i seguenti tre insiemi:
$$A = \{1\}; \quad B = \{a, b, c\}; \quad C = \{t\}.$$
A partire da essi, definiamo le seguenti due funzioni:
$$f\colon A \to B \quad \text{tale che} \quad f(1) = a$$
$$g\colon B \to C \quad \text{tale che} \quad g(a) = g(b) = g(c) = t.$$
Si osserva, facilmente, per come sono definite, che f è una funzione iniettiva ma non suriettiva e g è una funzione suriettiva ma non iniettiva.
Inoltre possiamo considerare la funzione composta
$$g \circ f\colon A \to C \quad \text{tale che} \quad (g \circ f)(1) = t.$$
Si verifica facilmente che $g \circ f$ è una funzione iniettiva e suriettiva, quindi anche biettiva.
Dunque, $g \circ f$ è una funzione iniettiva ma f e g non sono entrambe iniettive.
Questo mostra che non vale il viceversa della prima implicazione della Proprietà 3.
Analogamente per le altre due implicazioni.

Definizione 1. Sia $f\colon A \to B$ una funzione. La funzione f si dice INVERTIBILE se esiste una funzione $g\colon B \to A$ tale che $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$.
Tale funzione g si dice FUNZIONE INVERSA di f

Osservazione 2. Se f è una funzione invertibile, la sua funzione inversa è UNICA.

Proposizione 1. *Sia* $f\colon A \to B$ *una funzione.* f *è invertibile se e solo se* f *è biettiva.*
Inoltre, nell'ipotesi che f *sia invertibile, la funzione inversa di* f *è la funzione* $f^{-1}\colon B \to A$ *tale che* $b \in B \mapsto f^{-1}(b) \in A$

Dimostrazione. Per provare l'equivalenza bisogna provare la doppia implicazione.
Iniziamo col provare la seconda implicazione, cioè proviamo che se f è biettiva allora f è invertibile.
Supponiamo f biettiva, dunque, per definizione, si ha che $\forall b \in B, \exists! a \in A$ tale che $f(a) = b$ ma questo equivale a dire che $\forall b \in B, \exists! a \in A$ tale che $f^{-1}(b) = \{a\}$.
Dunque ha senso definire la funzione $f^{-1}\colon B \to A$ tale che $b \in B \mapsto f^{-1}(b) \in A$.
Per provare che f è invertibile, resta da dimostrare che f^{-1} è la sua funzione inversa, cioè $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$. Questo è di verifica immediata.
Proviamo, ora, la prima implicazione.
Supponiamo f invertibile, dunque, per definizione, esiste (ed è unica) $g\colon B \to A$ tale che $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$.
Sotto tale ipotesi dimostriamo che f è biettiva, cioè iniettiva e suriettiva.
Per ogni $x, x' \in A$ se $f(x) = f(x') \implies g(f(x)) = g(f(x')) \implies (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies id_A(x) = id_A(x') \implies x = x'$, dunque f è iniettiva.
Ora, per ogni $b \in B$ possiamo considerare $g(b) \in A$.
Poniamo $a = g(b) \in A$ e dunque $f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = id_B(b) = b$.
Ciò dimostra che f è suriettiva.
Infine, è facile osservare che questa funzione g è proprio la funzione f^{-1}. $\square$

Osservazione 3. Se f è una funzione invertibile(equivalentemente, biettiva), allora lo è anche la sua funzione inversa f^{-1}.

PROPRIETA' 2. *1) Siano* $f\colon A \to B$ *e* $g\colon B \to C$ *due funzioni invertibili. Allora* $g \circ f$ *è una funzione invertibile, inoltre*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2) La funzione identità id_A *è invertibile, inoltre* $(id_A)^{-1} = id_A$.
3) Sia $f\colon A \to B$ *una funzione invertibile. Allora* $(f^{-1})^{-1} = f$.