1 Soluzione degli esercizi del capitolo 4

Esercizio 4.1 (*pag. 47*) Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e sia $\mathcal{R}_1$ la relazione su X così definita:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,2)\}.$$

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

1. $\mathcal{R}_1$ è riflessiva;

2. $\mathcal{R}_1$ è simmetrica;

3. $\mathcal{R}_1$ è antisimmetrica;

4. $\mathcal{R}_1$ è transitiva;

5. $\mathcal{R}_1$ è un'applicazione da X a X.

Soluzione

1. $\mathcal{R}_1$ non è riflessiva poichè manca la coppia $(4,4)$;

2. $\mathcal{R}_1$ è simmetrica: infatti $(1,2) \in \mathcal{R}_1$ e $(2,1) \in \mathcal{R}_1$; $(2,4) \in \mathcal{R}_1$ e $(4,2) \in \mathcal{R}_1$;

3. $\mathcal{R}_1$ non è antisimmetrica perchè, ad esempio, $(1,2)$ e $(2,1) \in \mathcal{R}_1$;

4. $\mathcal{R}_1$ non è transitiva perchè, ad esempio, $(4,2)$ e $(2,4) \in \mathcal{R}_1$ ma $(4,4) \notin \mathcal{R}_1$;

5. $\mathcal{R}_1$ non è un'applicazione da X a X poichè, ad esempio, sia $(1,1)$ sia $(1,2)$ appartengono a $\mathcal{R}_1$.

Esercizio 4.2 (*pag. 47*) Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $\mathcal{R}_2$ la relazione su X così definita:

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5)\}.$$

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

1. $\mathcal{R}_2$ è riflessiva;

2. $\mathcal{R}_2$ è simmetrica;

3. $\mathcal{R}_2$ è antisimmetrica;

4. $\mathcal{R}_2$ è transitiva;

5. $\mathcal{R}_2$ è un'applicazione da X a X.

Soluzione

1. $\mathcal{R}_2$ è riflessiva: infatti $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) \in \mathcal{R}_2$;

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

2. $\mathcal{R}_2$ non è simmetrica: infatti $(2,1) \in \mathcal{R}_2$ e $(1,2) \notin \mathcal{R}_2$;

3. $\mathcal{R}_2$ non è antisimmetrica: infatti sia $(2,4)$ che $(4,2)$ stanno in $\mathcal{R}_2$;

4. $\mathcal{R}_2$ non è transitiva: infatti $(4,2),(2,1) \in \mathcal{R}_2$ ma $(4,1) \notin \mathcal{R}_2$.

5. $\mathcal{R}_2$ non è un'applicazione da X a X poichè, come nell'esercizio precedente, ci sono coppie distinte che hanno la prima componente uguale, ad esempio $(2,1)$ e $(2,2)$.

Esercizio 4.3 (*pag. 47*) Sia $X = \{1,2,3,4\}$ e sia $\mathcal{R}_3$ la relazione su X così definita:

$$\mathcal{R}_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\}.$$

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

1. $\mathcal{R}_3$ è riflessiva;

2. $\mathcal{R}_3$ è simmetrica;

3. $\mathcal{R}_3$ è antisimmetrica;

4. $\mathcal{R}_3$ è transitiva;

5. $\mathcal{R}_3$ è un'applicazione da X a X.

Soluzione

1. $\mathcal{R}_3$ è riflessiva in quanto $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in \mathcal{R}_3$;

2. $\mathcal{R}_3$ non è simmetrica in quanto, ad esempio, $(1,2) \in \mathcal{R}_3$ e $(2,1) \notin \mathcal{R}_3$;

3. $\mathcal{R}_3$ è antisimmetrica infatti $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(4,3)\} \subseteq \mathcal{R}_3$ e nessuno degli elementi $(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(3,4)$ appartiene ad $\mathcal{R}_3$;

4. $\mathcal{R}_3$ è transitiva, come si verifica, con procedimento analogo a quello utilizzato nel successivo esercizio 4.8 pag 49, verificando che $\forall i,j,k \in \{1,2,3,4\}$ sono soddisfatte le disuguaglianze $r_{ik}r_{ki} \leq r_{ij}$.

Come in 4.8 non è necessario verificare tutte le 4^3 disuguaglianze, ma solo quelle in cui $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$, quindi solo 4! disuguaglianze.

Osservazione: invece della verifica diretta, si può utilizzare il seguente metodo equivalente.

Indichiamo con $T = (r_{ij})$ la matrice di incidenza associata alla relazione $\mathcal{R}_3$ (cfr successivo paragrafo 4.1) e definiamo il seguente "prodotto booleano" $T \odot T = (p_{ij})$ ove $p_{ij} = 1$ se $\exists k \in \{1,2,3,4\}$ tale che $r_{ik}r_{kj} = 1$ e $p_{ij} = 0$ se $\forall k \in \{1,2,3,4\}$ si ha $r_{ik}r_{kj} = 0$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Sarà verificata la proprietà transitiva solo se nella matrice $T \odot T = (p_{ij})$ si ha $p_{ij} \leq r_{ij}$. Nel nostro caso:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si vede che T e $T \odot T$ sono uguali, quindi la condizione $p_{ij} \leq r_{ij}$ è verificata e si può concludere che $\mathcal{R}_3$ è transitiva.

5. $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione da X a X in quanto, ad esempio $(1,1)$ e $(1,2)$ appartengono entrambi a $\mathcal{R}_3$.

Esercizio 4.4 (*pag.51*) Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si consideri la relazione ρ così definita:

$$(a,b)\rho(c,d) \iff a+d=b+c$$

e si mostri che è una relazione di equivalenza.

Soluzione

1. Mostriamo che ρ è riflessiva, cioè che $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si ha $(a,b)\rho(a,b)$.

Questo è vero, in quanto $a+b=b+a$ per la commutatività della somma in $\mathbb{N}$.

2. ρ è simmetrica: cioè $(a,b)\rho(c,d) \Rightarrow (c,d)\rho(a,b)$. Infatti:

$(a,b)\rho(c,d) \iff a+d=b+c \iff c+b=d+a \iff (c,d)\rho(a,b)$.

3. ρ è transitiva: cioè da $(a,b)\rho(c,d)$ e $(c,d)\rho(e,f)$ segue $(a,b)\rho(e,f)$. Infatti per ipotesi $\begin{cases} a+d & = b+c \\ c+f & = d+e \end{cases} \Rightarrow a+d+c+f=b+c+d+e.$

Per la proprietà commutativa della somma e per le proprietà di cancellazione valide in $\mathbb{N}$, in quanto sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, si ottiene $a+f=b+e$ e quindi $(a,b)\rho(e,f)$.

Esercizio 4.5 (*pag. 57*) Dire se sono risolubili le seguenti congruenze e, in caso affermativo, determinarne le soluzioni:

1. $3x \equiv 8(mod\ 4)$.

2. $5x \equiv 1(mod\ 10)$.

3. $-3x \equiv 2(mod\ 5)$.

4. $50x \equiv 8(mod\ 7)$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Soluzione

1. Poichè MCD $(3,4) = 1$ è un divisore di 8, la congruenza $3x \equiv 8\ (mod\ 4)$ è risolubile.

Una soluzione è $x = 4$, quindi la soluzione generale è: $x = 4 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Poichè MCD $(5,10) = 5$ non è un divisore di 1, la congruenza non ha soluzioni intere (infatti non esiste alcun $x \in \mathbb{Z}$ tale che $5x - 10k = 1$).

3. Poichè MCD $(-3,5) = 1$ è un divisore di 2, la congruenza è risolubile. Una soluzione particolare è $x = 1$, quindi le soluzioni sono $x = 1 + 5k,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Ancora MCD $(50,7) = 1$ è un divisore di 8, quindi la congruenza è risolubile. Una soluzione è $x = 1$ e quindi le soluzioni sono $x = 1 + 7h,\ h \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 4.6 (*pag.59*) Dire se i seguenti sistemi di congruenze lineari ammettono soluzioni e, in caso affermativo, determinarle:

1. $\begin{cases} x & \equiv 1(mod\ 4) \\ 3x & \equiv 2(mod\ 5) \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x & \equiv 1(mod\ 5) \\ 3x & \equiv 2(mod\ 10) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x & \equiv 3(mod\ 4) \\ 5x & \equiv 4(mod\ 3) \\ 6x & \equiv 1(mod\ 7) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x & \equiv 5(mod\ 3) \\ x & \equiv 1(mod\ 9) \end{cases}$

Soluzione

[1.] Per il Teorema cinese del resto, il sistema è risolubile. Per trovare le soluzioni si può seguire il procedimento costruttivo indicato dalla dimostrazione del teorema stesso, oppure, trattandosi di sole due equazioni, si può procedere direttamente.

a) Procediamo direttamente determinando le soluzioni comuni alle due congruenze. La prima ha come soluzione particolare $x = 1$ (ad esempio) e quindi la soluzione generale è $x = 1 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$; la seconda ha soluzione generale $\bar{x} = 4 + 5h,\ h \in \mathbb{Z}$ (a partire da una soluzione particolare $x' = 4$). Le soluzioni comuni si otterranno determinando le soluzioni dell'equazione diofantea in h e k: $1 + 4k = 4 + 5h$ ovvero le soluzioni dell'equazione $3 = 4k - 5h$. Si ricava $h = -3 + 4t$ e $k = -3 + 5t$ da cui si ottiene $x \equiv -11(mod\ 20)$.

b) Seguiamo ora il metodo utilizzato nella dimostrazione del teorema. Per prima cosa sostituiamo al sistema dato un sistema equivalente, che soddisfi le ipotesi del teorema, in particolare moltiplichiamo la seconda equazione per 2 ottenendo:

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

$$\begin{cases} x & \equiv 1(mod\ 4) \\ x & \equiv 4(mod\ 5) \end{cases}$$

Osserviamo che: $N = 5 \cdot 4$, $N_1 = 5$, $N_2 = 4$. Il sistema ausiliario è quindi

$$\begin{cases} 5y & \equiv 1(mod\ 4) \\ 4y & \equiv 1(mod\ 5). \end{cases}$$

Soluzioni particolari del sistema sono $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Le soluzioni saranno quindi $c = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \equiv 69(mod\ 20)$ ovvero $c \equiv -11(mod\ 20)$.

[2.] Il sistema non soddisfa le condizioni del Teorema cinese del resto poiché MCD $(10, 5) = 5 \neq 1$. Essendo la condizione solo sufficiente per l'esistenza di soluzioni, procediamo direttamente verificando se ciascuna congruenza ammette soluzione e poi cercando le eventuali soluzioni comuni.

Ciascuna delle due equazioni ammette soluzioni poiché sia MCD $(2, 5) = 1$ è un divisore di 1, sia MCD $(3, 10) = 1$ è un divisore di 2.

Le soluzioni della prima equazione sono $x \equiv 3(mod\ 5)$ e quelle della seconda equazione sono $x \equiv 4(mod\ 10)$ e quindi sono incompatibili.

Si conclude che, in questo caso, il sistema non è risolubile.

[3.] Poiché 4, 3, 7 sono coprimi a due a due si puó applicare il teorema cinese del resto, pur di sostituire al sistema dato uno equivalente che soddisfi le ipotesi. A questo scopo moltiplichiamo la seconda congruenza per 2 e la terza per 6 e otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x & \equiv 3(mod\ 4) \\ x & \equiv 2(mod\ 3) \\ x & \equiv 6(mod\ 7) \end{cases} \text{ o, meglio, } \begin{cases} x & \equiv -1(mod\ 4) \\ x & \equiv 2\ (mod\ 3) \\ x & \equiv -1(mod\ 7). \end{cases}$$

Osserviamo che: $N = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, $N_1 = 21$, $N_2 = 28$, $N_3 = 12$ e quindi il sistema ausiliario è:

$$\begin{cases} 21y & \equiv 1(mod\ 4) \\ 28y & \equiv 1(mod\ 3) \\ 12y & \equiv 1(mod\ 7) \end{cases}$$

Soluzioni particolari del sistema sono $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ e $y_3 = 3$. Le soluzioni saranno quindi $c = -1 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot \cdot 28 \cdot 1 + (-1) \cdot 12 \cdot 3 \equiv -1(mod\ 84)$.

[**4**.] Il sistema non soddisfa le ipotesi del Teorema cinese del resto. Verifichiamo quindi direttamente se entrambe le congruenze hanno soluzione e se ne esistono di comuni. Poiché MCD $(2, 3) = 1$ e MCD $(1, 9) = 1$ certamente le congruenze hanno soluzione.

Avremo $x = 1 + 3k$ per la prima congruenza e $x = 1 + 9h$ per la seconda, con $h, k \in \mathbb{Z}$.

Quindi le soluzioni comuni saranno $x = 1 + 9h$, con $h \in \mathbb{Z}$ cioé $x \equiv 1(mod\ 9)$ (poiché $1 + 9h = 1 + 3(3h)$).

Esercizio 4.7

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid \ y|30\}$ rispetto alla relazione $\leq$ definita (come nell'esempio 4.14) cioè $a \leq b \Leftrightarrow a|b$.

Soluzione

L'insieme Y è l'insieme dei divisori di 30 cioè $Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Il diagramma di Hasse richiesto è analogo a quello disegnato in figura 4.2 (vedi testo pag. 62), ove si operino le seguenti sostituzioni:

$$\emptyset \to 1, \quad \{a\} \to 2, \quad \{b\} \to 3, \quad \{c\} \to 5,$$
$$\{a,b\} \to 6, \quad \{b,c\} \to 15, \quad \{a,c\} \to 10, \quad \{a,b,c\} \to 30.$$

Esercizio 4.8

Disegnare il diagramma di Hasse di $(\mathcal{P}(X), \leq)$, dove la relazione d'ordine è l'inclusione insiemistica e $X = \{a, b\}$.

Soluzione

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$

Il diagramma è:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & / & & \backslash & \\ \{a\} & & & & \{b\} \\ & \backslash & & / & \\ & & \emptyset & & \end{array}$$

Esercizio 4.9 (*pag. 64*) Considerate le applicazioni ϕ_1 e ϕ_2 dell'esempio 4.18 e precisamente: ϕ_1 e ϕ_2 applicazioni da $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $\phi_1(x) = x^3$ e $\phi_2(x) = 2x+1$,

1) determinare $\phi_1(-2)$, $\phi_1(3)$, $\phi_2(-1)$, $\phi_2(4)$.

2) Determinare $\phi_1^{-1}(27)$, $\phi_1^{-1}(-8)$, $\phi_2^{-1}(1)$, $\phi_2^{-1}(-3)$, $\phi_2^{-1}(9)$.

3) Per ciascuno degli elementi dell'insieme $A = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, -4, -5\}$, dire se ammettono preimmagine (sia attraverso la ϕ_1 che la ϕ_2) e in caso affermativo, determinarle.

Soluzione

1) $\phi_1(-2) = -8$, $\phi_1(3) = 27$, $\phi_2(-1) = -1$, $\phi_2(4) = 9$.

2) $\phi_1^{-1}(27) = 3$, $\phi_1^{-1}(-8) = -2$, $\phi_2^{-1}(1) = 0$, $\phi_2^{-1}(-3) = -2$, $\phi_2^{-1}(9) = 4$.

3) $\phi_1^{-1}(0) = 0, \phi_1^{-1}(1) = 1$; $\phi_2^{-1}(1) = 0$ mentre $\phi_2^{-1}(0)$ non esiste; 2, 6 e 4 non hanno controimmagine né per ϕ_1, né per ϕ_2; 8 non ha preimmagine per ϕ_2 in quanto numero pari, mentre $\phi_1^{-1}(8) = 2$; -5 non ha preimmagine per ϕ_1 in quanto non è il cubo di nessun numero intero, mentre $\phi_2^{-1}(-5) = -3$.

Esercizio 4.10 (*pag. 64*) Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da:

$$f(a, b) = (2a - b, 3b).$$

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

1. f è iniettiva.

2. f è suriettiva.

3. $f(3,4) = (2,8)$.

4. $f^{-1}(2,0) = (1,0)$.

Soluzione

1. (VERO) f è iniettiva: infatti $f(a,b) = f(c,d) \Rightarrow (2a-b, 3b) = (2c-d, 3d) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$.

2. (FALSO) f non è suriettiva: infatti, ad esempio, l'elemento $(2,1)$ non ha controimmagine, in quanto non esiste alcuna coppia $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $f(x,y) = (2x-y, 3y) = (2,1)$.

3. (FALSO): infatti $f(3,4) = (2,12)$.

4. (VERO): infatti $f(1,0) = (2,0)$.

Esercizio 4.11 (*pag. 68*) Sia $f : A \longrightarrow B$ un'applicazione. Provare che f ammette inversa sinistra se e solo se f è iniettiva, ammette inversa destra se e solo se f è suriettiva.

Soluzione

1. Per ipotesi l'applicazione f ammetta una inversa sinistra, cioè esista una applicazione $g : B \longrightarrow A$ tale che

$$g \circ f = I_A, \quad \text{cioè tale che } \forall a \in A \text{ sia } g(f(a)) = a.$$

Mostriamo che l'applicazione f è iniettiva.

Siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $f(a_1) = f(a_2)$. Allora

$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ e quindi $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow I_A(a_1) = I_A(a_2)$ da cui segue che $a_1 = a_2$ e quindi risulta che f è iniettiva.

Viceversa sia f iniettiva; allora $\forall b \in B$ esiste al più un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Costruiamo una applicazione

$$g : B \longrightarrow A$$

in modo tale che $g(b) = \begin{cases} a, \text{ se } b \in f(A) \text{ ed } a \text{ è una sua preimmagine} \\ \bar{a} \in A \text{ (scelto arbitrariamente) se } b \notin f(A). \end{cases}$

Si ha quindi che $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$, per ogni $a \in A$ cioè $g \circ f = I_A$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

2. Per ipotesi l'applicazione f ammetta una inversa destra, cioè esista una applicazione $g : B \longrightarrow A$ tale che $f \circ g = I_B$, cioè $\forall b \in B$ sia $f(g(b)) = b$.

Mostriamo che l'applicazione f è suriettiva.

Per ogni $b \in B$ si ha $b = I(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$ e quindi $g(b) \in A$ è preimmagine di b per f.

Viceversa sia f suriettiva: allora $\forall b \in B,\ \exists\ a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Posto $g(b) = a$ si ha:

$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$, da cui segue che $f \circ g = I_B$.

Esercizio 4.12 (*pag. 68*) Data l'applicazione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita ponendo: $f(a, b) = (a + 2b, 3b)$, dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione

f è iniettiva. Infatti:
$f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow (a + 2b, 3b) = (c + 2d, 3d) \Rightarrow b = d$ e $a = c \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.
f non è suriettiva poiché, ad esempio, l'elemento $(2, 1)$ non ha controimmagine (non esiste alcun $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $f(x, y) = (x + 2y, 3y) = (2, 1)$).

Esercizio 4.13 (*pag. 68*) Date le applicazioni f e $g : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definite ponendo: $f(a, b) = (a + 2b, -b)$ e $g(c, d) = (-c, 3d)$, determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$. Per ciascuna di esse dire se è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione

1. $(f \circ g)(a, b) = f(g(a, b)) = f(-a, 3b) = (-a + 6b, -3b)$,
$(g \circ f)(a, b) = g(f(a, b)) = g(a + 2b, -b) = (-a - 2b, -3b)$.

2. $f \circ g$ e $g \circ f$ sono entrambe iniettive, nessuna delle due è suriettiva: ad esempio $(2, 1)$ non ha controimmagine.

Esercizio 4.14 (*pag. 68*) Si consideri l'applicazione $h : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, definita ponendo $h(x, y) = (x + 2y, -x + y)$:

1. verificare che h è iniettiva;

2. determinare la funzione inversa sinistra;

3. dire se l'applicazione h è anche suriettiva.

Soluzione

1. h è iniettiva, infatti: $h(a, b) = h(c, d) \Rightarrow (a+2b, -a+b) = (c+2d, -c+d) \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} a + 2b & = c + 2d \\ -a + b & = -c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b & = c + 2d \\ 3b & = 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = c \\ b & = d. \end{cases}$$
Si conclude che $(a, b) = (c, d)$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

2. La funzione inversa sinistra esiste poiché l'applicazione è iniettiva. Per determinarla utilizziamo la definizione cioè cerchiamo una funzione

$$g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

tale che $g \circ h = i$, cioè tale che $(g \circ h)(x, y) = g(x + 2y, -x + y) = (x, y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Possiamo procedere cercando dapprima l'inversa g tra le applicazioni da $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, del tipo $g(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, quindi provando a determinare $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tali che:

$$\begin{cases} a(x+2y) + b(-x+y) & = x \\ c(x+2y) + d(-x+y) & = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + 2ay - bx + by & = x \\ cx + 2cy - dx + dy & = y \end{cases}$$

e quindi $\begin{cases} a - b = 1, \quad 2a + b = 0 \\ c - d = 0, \quad 2c + d = 1. \end{cases}$

Si ottengono quindi le soluzioni: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{-2}{3}$, $c = d = \frac{1}{3}$, da cui si conclude che l'inversa cercata è l'applicazione g tale che

$g(x, y) = (\frac{1}{3}x - \frac{-2}{3}y, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y), \forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3. L'applicazione h è suriettiva. Infatti, $\forall (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\ \exists (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $h(x, y) = (x + 2y, -x + y) = (a, b)$.

Risolviamo il sistema $\begin{cases} x + 2y & = a \\ -x + y & = b \end{cases}$

Sommando membro a membro otteniamo le soluzioni:

$$\begin{cases} x = & \dfrac{a - 2b}{3} \\ y = & \dfrac{a + b}{3} \end{cases}$$

Quindi la controimmagine cercata è $(\frac{a - 2b}{3}, \frac{a + b}{3})$.

Esercizio 4.15 (*pag. 68*) Date le applicazioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$, definite da:

$f(n) = \dfrac{n^2 + 1}{2}$, $g(q) = \sqrt{q}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$,

si determini la funzione composta $f \circ g$ e si dica se è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione Si osserva che si può definire la relazione composta $f \circ g$ che non è una applicazione da $\mathbb{Q}^+$ a $\mathbb{Q}$, poiché esiste qualche elemento di $\mathbb{Q}^+$ che non ha immagine in $\mathbb{Q}$. Infatti ad esempio

$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ma non esiste $f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ in quanto $\sqrt{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{Z}$.

Si conclude che $f \circ g$ non puó essere né iniettiva né suriettiva.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Esercizio 4.16 (*variante del precedente*) Date le applicazioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$, definite da:

$f(n) = \dfrac{n^2+1}{2}$, $g(q) = \sqrt{q}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$,

si determini la funzione composta $g \circ f$ e si dica se è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha che $f(n) = \frac{n^2+1}{2}$ e quindi $g\left(\frac{n^2+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{n^2+1}{2}}$.

$g \circ f$ non è iniettiva: ad esempio 1 e -1 hanno la stessa immagine.

Infatti $(g \circ f)\ (1) = 1 = (g \circ f)\ (-1)$

$g \circ f$ non è suriettiva: ad esempio $0 \in \mathbb{R}$ ma non ha controimmagine in $\mathbb{Z}$. Infatti non esiste alcun $n \in \mathbb{Z}$ tale che $(g \circ f)\ (n) = \sqrt{\frac{n^2+1}{2}} = 0$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl