Soluzione degli esercizi del capitolo 12

Esercizio 12.2 (*pag.177*)

Siano

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Dimostrare che vale l'uguaglianza:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)^2.$$

Soluzione

Basta applicare il Teorema di Binet (cfr. Teor. 12.12, pag. 176).

Esercizio 12.3 (*pag.177*)

Determinare il valore del parametro reale k per il quale è singolare la matrice A ottenuta come prodotto delle matrici

$$B = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Calcoliamo il prodotto $BC = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2+2 & 3k \\ 3k & 2+k^2 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det BC = (2+k^2)^2 - 9k^2 = k^4 - 5k^2 + 4 = 0 \iff k^2 = 1, k^2 = 4$, si ottengono i valori: $k = \pm 1,\ k = \pm 2$.

Esercizio 12.4 (*pag. 177*)

Mostrare che sono linearmente dipendenti i vettori:

$$v_1 = (1,2,3),\ v_2 = (-2,1,-5),\ v_3 = (0,5,1) \in \mathbb{R}^3.$$

Soluzione

Utilizziamo la prop. 12.1 (pag. 176). Poiché:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 30 + 25 + 4 = 0,$$

si conclude che i tre vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti.

(Senza calcoli si puó anche vedere che $v_3 = 2v_1 + v_2$.)

Esercizio 12.5 (*pag.177*)

Determinare il valore del parametro reale k per cui i vettori

$$v_1 = (1,2,k,k-1),\ v_2 = (0,1,-1,k),\ v_3 = (1,0,0,1),\ v_4 = (k,0,0,0) \in \mathbb{R}^4.$$

sono linearmente indipendenti.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Soluzione

Il problema posto equivale (cfr prop. 12.1) a determinare il valore del parametro reale k per cui:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & 0 \\ k-1 & k & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Calcoliamo $\det A$ utilizzando il teorema di Laplace e sviluppando rispetto alla quarta colonna.

Ponendo $k \neq 0$ (altrimenti $\det A = 0$), otteniamo:

$$detA = k \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ k-1 & k & 1 \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ k & -1 \end{bmatrix} = k(-2-k).$$

Quindi $detA \neq 0$ per $k \neq 0,\ k \neq -2$ e i vettori sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,\ k \neq -2$.

Esercizio 12.6 (*pag. 179*)

Nel caso in cui esistano, scrivere le matrici inverse di:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

1. $\det(A) = 1 \neq 0$, per cui la matrice è invertibile.

La sua inversa è $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $\det(B) = 0$ per cui la matrice B non è invertibile.

3. $\det(C) = 9$, per cui la matrice è invertibile.

La sua inversa è $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

4. $\det D = 1$, per cui la matrice è invertibile.

La sua inversa è $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Esercizio 12.7 (*pag. 181*)

Risolvere, usando il metodo di Cramer, i seguenti sistemi lineari:

1) $\begin{cases} & y & +4z & = & 5 \\ x & +y & -3z & = & -4 \\ 4x & +2y & +z & = & -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x & +3y & +2z & = & 3 \\ 2x & -y & -3z & = & -8 \\ & y & +z & = & 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 1. \end{cases}$

Soluzione

1) Matrice associata al sistema lineare:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \det A_1 = -12 + 8 - 16 - 1 = -21 \neq 0.$$

Quindi il sistema ammette una ed una sola soluzione.

Determiniamo la soluzione usando il metodo esposto nell'osservazione 12.5 (pag. 180).

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{\det A_1} = \frac{42}{-21} = -2,$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 1 & -4 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}}{\det A_1} = \frac{-21}{-21} = 1,$$

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}}{\det A_1} = \frac{-21}{-21} = 1.$$

La soluzione pertanto é $(-2, 1, 1)$.

2)La matrice associata al sistema lineare è

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det A_2 = -1+4+3-6 = 0$, il sistema **non** ammette una ed una sola soluzione (cfr. Es. 12.7 bis).

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

3) La matrice associata al sistema lineare è $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

poiché $\det A_3 = 2+2+9-6-6-1 = 0$, il sistema **non** ammette una ed una sola soluzione (cfr. Es. 12.7 bis).

Dopo l'esercizio 12.8, utilizzando i metodi presentati a partire dalla pag. 186, per esercizio, completeremo le risposte ai punti **2)** e **3)**

Esercizio 12.8 (*pag. 185*)

Stabilire, al variare del parametro reale k il rango delle matrici seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ k & 0 & k & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3k & 0 & k \\ 2 & 2k & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & k & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

[**1.**] Poiché la matrice A ha tre righe, $car A \leq 3$. Consideriamo la sottomatrice M_2 formata dagli elementi che stanno sulla I e IV colonna e sulla I e II riga, cioè la matrice i cui elementi sono a_{11}, a_{14}, a_{21} e a_{24}, quindi $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det(M_2) = -1 \neq 0$ segue che $car(A) \geq 2$.
Vediamo se esistono valori del parametro reale k per cui $car(A) = 3$.

Per il procedimento di orlatura di Kroneker (12.4.1, pag 183 del testo) possiamo limitarci a considerare le due seguenti sottomatrici di ordine 3:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ k & k & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(M_3) = -k^2 + 2k = k(2-k) \neq 0$ se e solo se $k \neq 0, 2$ e $\det(M_3') = k \neq 0$ se e solo se $k \neq 0$, si può concludere che $car(A) = 2$ se $k = 0$, mentre $car(A) = 3$ se $k \neq 0$.

[**2.**] Poiché la matrice B ha quattro righe e tre colonne, $car(B) \leq 3 = \min\{3, 4\}$.

Cerchiamo una sottomatrice di ordine 2, non singolare, possibilmente priva di parametri, ad esempio $M_2 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det(M_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow car(B) \geq 2$.
Orliamo M_2 in tutti i modi possibili e otteniamo

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2k & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } M_3' = \begin{bmatrix} 3k & 0 & k \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiché

$\det(M_3) = 20 - 2 + 4k = 18 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{2}$ e

$\det(M_3') = 30k + k - 3k = 28k = 0 \Leftrightarrow k = 0$,

si conclude che $car(B) = 3$, perchè esiste un minore di ordine 3 non singolare per ogni valore di k.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

[3.] Poiché la matrice C ha 4 righe e 4 colonne, $car(C) \leq 4$.

Consideriamo la sottomatrice $M_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Si ha che $\det(M_2) = -1 \neq 0$ e quindi $car(C) \geq 2$.

Orliamo e otteniamo 4 sottomatrici di dimensione 3, precisamente:

$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 2 & k & k \end{bmatrix}$; $M_3' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & k & 0 \end{bmatrix}$; $M_3'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$;

$M_3''' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$.

Facendo i calcoli si ottiene: $\det(M_3) = k^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \pm\sqrt{2}$;

$\det(M_3') = k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$.

Non è necessario eseguire altri calcoli poiché $\forall k$ esiste un minore di ordine 3 non singolare e quindi $car(C) \geq 3$.

Poiché la caratteristica (rango) della matrice C può essere 4, non resta che calcolare il determinante di C.

Sviluppando rispetto alla prima colonna otteniamo:

$$\det(C) = -k \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ k & k & 0 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix} =$$

$-k(k^3-k^2-k)+2(1+k^2-k-1) = -k^4+k^3+3k^2-2k = -k(k^3-k^2+3k-2)$.

Tale determinante si annulla per $k = 0$ e per $k = \alpha$, ove α è soluzione dell'equazione $k^3 - k^2 + 3k - 2 = 0$.

(In questo caso, utilizzando la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado, si ottiene l'unica radice

$\alpha = \frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(116 + 12\sqrt{321}\right)} - \frac{16}{3\sqrt[3]{\left(116+12\sqrt{321}\right)}} + \frac{1}{3}$).

Quindi la matrice data ha rango 4 per ogni $k \neq 0, k \neq \alpha$, e rango tre per $k = 0$ e $k = \alpha$.

Esercizio 12.7 bis (*pag. 181*)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

2) $\begin{cases} x & +3y & +2z & = & 3 \\ 2x & -y & -3z & = & -8 \\ & y & +z & = & 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 1. \end{cases}$

Soluzione

2) Abbiamo visto (esercizio 12.7) che la matrice A_2 associata al sistema è singolare. Occorre quindi determinare $car A_2$ e confrontarla con $car A_2|b_2$, ove b_2 è il vettore dei termini noti.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Se $carA_2 = carA_2|b_2$ si avranno soluzioni (infinite, dipendenti da uno o più parametri), se $carA_2 \neq carA_2|b_2$ il sistema non ammette soluzioni.

Si vede che $carA_2 = 2$ poiché $det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -7 \neq 0$,

quindi $2 \leq carA_2|b_2 \leq 3$.

Consideriamo le due sottomatrici orlate della sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ che sono:

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_2' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Sappiamo (eser. 12.7) che $detA_2 = 0$.
Poiché anche $detA_2' = -2 + 6 + 8 - 12 = 0$, si conclude che $carA_2 = carA_2|b_2$, quindi il sistema ammette soluzioni, che possiamo determinare con il metodo di Cramer.
Essendo $carA_2 = 2$, in quanto $det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$, il sistema dato è equivalente al sistema di due equazioni e due incognite:

$\begin{cases} x + 3y & = 3 - 2z \\ 2x - y & = -8 + 3z \end{cases}$ che ha come matrice associata $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det \bar{A} \neq 0$, per il teorema di Cramer, avremo soluzioni (che dipenderanno dal parametro reale $k = z$):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 2h & 3 \\ -8 - 3h & -1 \end{vmatrix}}{\det \bar{A}} = \frac{21 - 7h}{-7} = -3 + h,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - 2h \\ 2 & -8 - 3h \end{vmatrix}}{\det \bar{A}} = \frac{-14 + 7h}{-7} = 2 - h,$$

Le infinite soluzioni sono le terne $(-3 + h, 2 - h, h)$, $\forall h \in \mathbb{R}$.

3) Procediamo come al punto **2)**.
La matrice associata al sistema lineare è singolare, quindi la sua caratteristica è minore o uguale a 2.
Poiché $det\bar{A}_3 = det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$, la caratteristica è esattamente 2.

Determiniamo ora la caratterica della matrice completa $A_3|b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Consideriamo le due sottomatrici orlate di $\bar{A}_3$: una di esse è la matrice A_3 che era singolare. Calcoliamo quindi $detA_3' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$.

In questo caso $carA_3 \neq carA_3|b_3$, quindi il sistema dato non ammette soluzioni.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Osservazione: il fatto che il sistema non ammetta soluzioni, è equivalente a dire che il vettore dei termini noti $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ non si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ovvero $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Esercizio 12.9 (*pag. 192*)

Determinare gli eventuali valori del parametro reale k per i quali ammettono soluzione i seguenti sistemi:

$$\textbf{1)} \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & ky & = & k-1 \\ x & + & (k+2)ky & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\textbf{2)} \left\{ \begin{array}{cccccc} x & +y & & & = & -k \\ x & +(k+1)y & & +z & = & 2 \\ 3x & +(2k+3)y & & +(1-k)z & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\textbf{3)} \left\{ \begin{array}{ccccl} x & +(k-1)y & +3z & +2t & = 2 \\ x & +2y & +(1+k)z & +4t & = 2+k \\ & & z & +2t & = 3 \end{array} \right.$$

Soluzione

La richiesta dell'esercizio è soltanto quella di decidere se i sistemi dati sono risolubili oppure no.

Basta quindi, in accordo con il teorema di Rouché -Capelli (pag. 187), stabilire quando la caratteristica della matrice dei coefficienti associata al sistema è uguale alla caratteristica della matrice completa.

1) Matrice dei coefficienti del primo sistema è $B_1 = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & (k+2)k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

la matrice completa è $B_1|b_1 = \begin{bmatrix} 2 & k & k-1 \\ 1 & (k+2)k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Poiché la caratteristica di B_1 è minore o uguale a 2, consideriamo i minori di ordine 2:

$\det \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 - k \neq 0 \iff k \neq 2;$

$\det \begin{bmatrix} 1 & (k+2)k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - k^2 - 2k \neq 0 \iff k \neq -1 \pm \sqrt{2}.$

Quindi per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ esiste un minore non nullo, perciò $carB_1 = 2$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Calcoliamo ora $det B_1|b_1 = \begin{bmatrix} 2 & k & k-1 \\ 1 & (k+2)k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -k^3 + 3k^2 + 10k - 3.$

Quindi il sistema ammetterà soluzioni soltanto per i valori di k che annullano il determinante di $B_1|b_1$ (in questo caso sono tre radici reali che si possono determinare con la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado).

2) Matrice dei coefficienti del secondo sistema è $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 3 & 2k+3 & 1-k \end{bmatrix}$,

la matrice completa è $B_2|b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -k \\ 1 & k+1 & 1 & 2 \\ 3 & 2k+3 & 1-k & 5 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow car B_2 \geq 2$ (e quindi anche $car B_2|b_2 \geq 2$).

Si ha che $\det B_2 = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2k+3 \end{vmatrix} + (1-k) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} =$
$= -(2k+3-3) + (1-k)(k+1-1) = -k(k+1)$,

quindi $det B_2 = 0 \iff k = 0$ oppure $k = -1$.

Se $k \neq 0, -1$ la caratteristica di B_2 è uguale a 3 ed è uguale alla caratteristica di $B_2|b_2$ (che ha solo tre righe) e quindi il sistema ha una ed una sola soluzione che si puó calcolare con il procedimento di Cramer.

Se $k = 0$ oppure $k = -1$, $car(B_2) = 2$ e occorre precisare la caratteristica di $B_2|b_2$ (che puó essere 2 oppure 3.

Consideriamo separatamente i due casi:

$k = 0$: in questo caso si ha $B_2|b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$, e $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0$ si conclude che anche $car B_2|b_2 = 2$ e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

$k = -1$: in questo caso si ha $B_2|b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0$, e $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 0$ si conclude che anche in questo caso $car B_2|b_2 = 2$ e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

3) Matrice dei coefficienti del terzo sistema è $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & k+1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

la matrice completa $B_3|b_3 = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & k+1 & 4 & 2+k \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Poiché le righe sono tre, $car(B_3) \leq 3$ e poiché $\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow car(B_3) \geq 2$.

Consideriamo le sottomatrici orlate:

$$B_3' = \begin{bmatrix} k-1 & 3 & 2 \\ 2 & k+1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ B_3'' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k+1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B_3''' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ k+1 & 4 & 2+k \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si ha che $\det B_3' = 2k^2 - 4k - 6 = 2(k^2 - 2k - 3)$, $\det B_3'' = 2(k-3)$ e $\det B_3''' = -6k + 18$.

Quindi i minori sono contemporaneamente nulli solo per $k = 3$.

Possiamo concludere che per $k \neq 3$ la caratteristica di B_3 è 3, e in tal caso ci saranno soluzioni (∞^1), in quanto la caratteristica della matrice completa non puó che essere 3.

Se $k = 3$ allora $\det B_3' = \det B_3'' = det B_3''' = 0$ quindi $car B_3 = 2$. Occorre determinare la caratteristica della matrice completa:

$$B_3|b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Senza fare calcoli, si vede che la terza riga è la differenza tra la seconda e la prima: quindi concludiamo che $car B_3|b_3 = 2$ e il sistema ammette soluzioni (∞^2).

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl