PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 19 Settembre 2018

Esercizio 1. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha
$$4\sum_{i=0}^{n+1}(5)^i = 5^{n+2} - 1.$$

Esercizio 2. Consideriamo 7 Danesi, 8 Estoni e 9 Turchi. I Danesi sono tutte Donne, tra i Turchi ci sono 4 Donne e tra gli Estoni ci sono 5 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 9 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Sia assegnata la seguente equazione diofantea
$$57x + 96y = 6.$$
Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Siano $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AC e CA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di A e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di C.

Esercizio 5. Scrivere la definizione di monoide e di elemento invertibile in un monoide. Inoltre, dimostrare l'unicità dell'inverso di un elemento invertibile.

Esercizio 6. Sia assegnato l'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$. Determinare quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Infine, scrivere esplicitamente l'inverso degli elementi invertibili.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 5 Settembre 2018

Esercizio 1.
(1) Stabilire se esiste un albero con 13 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 4 di grado 3, 1 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con con 13 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 4 di grado 3, 1 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 2. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 17 \mid 7b + 10a\},$$

(ovvero $a\,\mathcal{R}\,b \iff 17 \mid 7b + 10a$). Stabilire se $\mathcal{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Se è di equivalenza, scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 3. Date tre proposizioni P, S e R, scrivere la tabella di verità di $(R \vee P) \wedge (P \wedge S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad t = 7(ka)^3 + t + ak.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 4. Stabilire con una dimostrazione se le seguenti congruenze sono vere o false:

$$43^{20} \equiv 2 \pmod{44} \qquad\qquad 16^{25} \equiv 16 \pmod{45}.$$

Esercizio 5. Dare la definizione di gruppo abeliano. Si dimostri che per ogni numero primo p, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 6. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare esplicitamente l'inverso di f.
(3) Individuare l'ordine di f nel gruppo S_9.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.
(5) Indicare se l'elemento f è pari o dispari.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 23 Luglio 2018

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$8 \mid 9^n + 7.$$

Esercizio 2. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

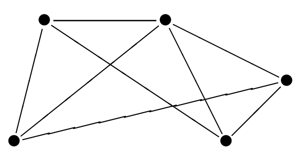
Esercizio 3. Dare la definizione di coefficiente binomiale. Inoltre, dimostrare che $\forall k \leq n$ si ha

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 41x \equiv 3 \pmod{4} \\ 5x \equiv 3 \pmod{7} \\ 2x \equiv 6 \pmod{10}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $\mathcal{G}$ il grafo seguente.



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è planare e determinare la valenza dei suoi vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.
(3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e le stesse valenze.
(4) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è bipartito.

Esercizio 6. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 1 + \frac{1}{3}i, \quad z_2 = -2 - 3i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ e $z_1 + z_2$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 19 Aprile 2018

Esercizio 1. Usando la formula del binomio di Newton, dimostrare che $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ e ogni primo p si ha che

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}.$$

Esercizio 2. Consideriamo 7 Canadesi, 9 Messicani e 8 Venezuelani. I Canadesi sono tutte Donne, tra i Messicani ci sono 4 Donne e tra i Venezuelani ci sono 5 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 9 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$63x + 99y = 18.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = i - 3, \ z_2 = 2 - \sqrt{2}i.$$

(1) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(2) Scrivere il modulo di z_1 e z_2.
(3) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\frac{1}{z_1}$ e $\frac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 5. Verificare se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_n = & a_{n-1} + 2(2n+1) \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $b_n = 2n(n+2)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 6. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x,y), (a,b) \in A \qquad (x,y) * (a,b) = (\frac{1}{2}xa, 5 + b + y).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(1,1)$ in $(A, *)$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 15 Febbraio 2018
Traccia: 2

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$6 \mid 7^n + 5.$$

Esercizio 2. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Dare la definizione di insieme $\mathscr{P}(A)$ della parti di A. Inoltre stabilire la cardinalità di $\mathscr{P}(A)$ e dare una dimostrazione dettagliata della risposta.

Esercizio 3. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 4. Consideriamo 6 Tunisini, 5 Russi e 10 Estoni. I Russi sono tutte Donne, tra gli Estoni ci sono 4 Donne e tra i Tunisini ci sono 4 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 7 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 5. (1) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 5 di grado 3, 4 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 5 di grado 3, 4 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 6. Siano $E \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$ e $B \in M_{2\times3}(\mathbb{C})$ le seguenti matrici

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} i & 2 & 0 \\ -i & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, EB e BE.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di E e di B.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di E e di B.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 15 Febbraio 2018
Traccia: A

Esercizio 1. (1) Stabilire se esiste un albero con 14 vertici, dei quali: 3 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 14 vertici, dei quali: 3 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 2. Siano $D \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ e $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ le seguenti matrici

$$D = \begin{pmatrix} 0 & i & 3 \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, CD e DC.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di D e di C.

Esercizio 3. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$7 \mid 8^n + 6.$$

Esercizio 4. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Dare la definizione di insieme $\mathscr{P}(A)$ della parti di A. Inoltre stabilire la cardinalità di $\mathscr{P}(A)$ e dare una dimostrazione dettagliata della risposta.

Esercizio 5. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 6. Si considerino 6 Etiopi, 7 Arabi e 9 Turchi. Gli Etiopi sono tutti Uomini, tra i Turchi ci sono 3 Uomini e tra gli Arabi ci sono 3 Donne.

a) Stabilire in quanti modi diversi si può formare un comitato di 8 persone.
b) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità.
c) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente una donna.
d) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno una donna.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 1 Febbraio 2018
Traccia: B

Esercizio 1. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 3x \equiv 15 \pmod{21} \\ 67x \equiv 18 \pmod{11} \\ 67x \equiv 40 \pmod{6}. \end{cases}$$

Esercizio 2. In un anello commutativo unitario $(A, +, \cdot)$, dare la definizione di elemento invertibile e di divisore dello zero. Inoltre, dimostrare che se a è un elemento invertibile allora a non è un divisore dello zero.

Esercizio 3. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (a, e), (c, d) \in A \qquad (a, e) * (c, d) = (5 + a + c, \frac{1}{5}de).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa.
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Descrivere, se esiste, in modo esplicito l'inverso di $(2, 0)$ in $(A, *)$.

Esercizio 4. Stabilire se le seguenti leggi

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = \frac{3}{7} - \frac{1}{5}x^3$$

e

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ c \in \mathbb{N} \qquad g(c) = \frac{c-2}{c+5}$$

sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$ e le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}.

Esercizio 5. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 3 - 3i,\ z_2 = 2i - 5.$$

(1) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(2) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(3) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\frac{1}{z_2}$, $z_1 z_2$ e $\frac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 6. Date tre proposizioni P, S e R, scrivere la tabella di verità di $(R \Longrightarrow S) \vee (P \wedge R)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists\ b \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\ a \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad y = 3b^2a^2 + y - 4a^3b.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 1 Febbraio 2018
Traccia: 2

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ e \in \mathbb{N} \qquad h(e) = \frac{2e-1}{e+3}$$

e

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{2}{9} - \frac{3}{4}x^5$$

sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ h$ e $h \circ g$ e le funzioni inverse h^{-1} e g^{-1}.

Esercizio 2. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 3i - 2,\ \ z_2 = 4 - 2i.$$

(1) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(2) Scrivere il modulo di z_1 e z_2.
(3) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 3. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, y), (s, t) \in A \qquad (x, y) * (s, t) = (\frac{1}{4}sx, 4 + y + t).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(0, -1)$ in $(A, *)$.

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 3x \equiv 12 \pmod{18} \\ 50x \equiv 54 \pmod{7} \\ 6x \equiv 42 \pmod{66}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Date tre proposizioni T, S e Q, scrivere la tabella di verità di $(Q \vee S) \wedge (T \implies Q)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall s \in \mathbb{Z} \quad \exists\ c \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad s = -2c^3y^3 + s + 5yc.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 6. Scrivere la definizione di monoide e di elemento invertibile in un monoide. Inoltre, dimostrare l'unicità dell'inverso di un elemento invertibile.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 16 Gennaio 2018
Traccia: X

Esercizio 1. Si consideri una funzione $g : A \to B$. Dare la definizione di immagine di un sottoinsieme di A. Inoltre, siano $Y, Y' \subseteq A$; dimostrare se è vero che

$$g(Y \cup Y') = g(Y) \cup g(Y').$$

Esercizio 2. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$6 \sum_{i=-1}^{n} \left(\frac{1}{7}\right)^{i} = 49 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n}.$$

Esercizio 3. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare esplicitamente l'inverso di f.
(3) Individuare l'ordine di f nel gruppo S_9.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.
(5) Indicare se l'elemento f è pari o dispari.

Esercizio 4. Nell'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$, stabilire quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Stabilire esplicitamente l'inverso di ogni elemento invertibile.

Esercizio 5. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$231x + 96y = 8.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 6. Siano $G \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AG e GA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di G e di A.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di G.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 16 Gennaio 2018
Traccia: 1

Esercizio 1. Stabilire quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili nell'anello $(\mathbb{Z}_{26}, +, \cdot)$. Per ogni elemento invertibile, stabilire esplicitamente l'inverso.

Esercizio 2. Sia B un sottoinsieme di D. Si dia la definizione di insieme complementare $\complement_D(B)$ di B in D. Inoltre, dati A e B sottoinsiemi di D si dimostri che

$$\complement_D(A \cup B) = \complement_D(A) \cap \complement_D(B).$$

Esercizio 3. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Descrivere l'elmento g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Individuare l'ordine di g nel gruppo S_9.
(3) Determinare esplicitamente l'inverso di g.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.
(5) Indicare se l'elemento g è pari o dispari.

Esercizio 4. Siano $E \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, ED e DE.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di E e di D.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di E e di D.

Esercizio 5. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$172x + 120y = 8.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 6. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$7 \sum_{i=-1}^{n} \left(\frac{1}{8}\right)^i = 64 - \left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 16 Gennaio 2018
Traccia: A

Esercizio 1. In S_{10}, sia assegnata la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 10 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento h è dispari o pari.
(3) Calcolare l'ordine dell'elemento h nel gruppo S_{10}.
(4) Scrivere esplicitamente l'inverso di h.
(5) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.

Esercizio 2. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$5 \sum_{i=-1}^{n} \left(\frac{1}{6}\right)^{i} = 36 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n}.$$

Esercizio 3. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$180x + 138y = 12.$$

Esercizio 4. Si consideri un sottoinsieme E di B. Dare la definizione di insieme complementare $\complement_B(E)$ di E in B. Inoltre, si considerino due sottoinsiemi E e F di B. Si dimostri che

$$\complement_B(E) \cup \complement_B(F) = \complement_B(E \cap F).$$

Esercizio 5. Sia assegnato l'anello $(\mathbb{Z}_{26}, +, \cdot)$. Determinare quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Infine, scrivere esplicitamente l'inverso degli elementi invertibili.

Esercizio 6. Siano $C \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $F \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, FC e CF.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di F e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di F e di C.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 21 Settembre 2017
Traccia: 2

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$8 \mid 9^n + 7.$$

Esercizio 2. Si considerino 6 Brasiliani, 5 Argentini e 8 Colombiani. Gli Argentini sono tutti Uomini, tra i Brasiliani ci sono 4 Uomini e tra i Colombiani ci sono 3 Donne.

a) Stabilire in quanti modi diversi si può formare un comitato di 7 persone.
b) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità.
c) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente una donna.
d) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno una donna.

Esercizio 3. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 4. Dati i seguenti numeri complessi:
$$z_1 = -4i + 3 \qquad \text{e} \qquad z_2 = \sqrt{2} + i.$$

(1) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(2) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(3) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\frac{1}{z_2}$, $z_1 z_2$ e $\frac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 5. Sia assegnato il reticolo D_{140} dei divisori di 140, ordinato per divisibilità.

(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{140}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{140}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

Esercizio 6. Dare la definizione di numero primo. Inoltre stabilire se la cardinalità dell'insieme dei numeri primi è finita o infinta e fornire una dimostrazione dettagliata.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 11 Luglio 2017
Traccia: 2

Esercizio 1. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione

$$\mathscr{R} = \{(e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 15 \mid 7f + 8e\},$$

(ovvero $\forall e, f \in \mathbb{Z}$, $e \mathscr{R} f \iff 15 \mid 7f + 8e$).

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Inoltre, se tale relazione è di equivalenza, descrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 2. Si consideri in S_9 la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento g è dispari o pari.
(3) Calcolare l'ordine dell'elemento g nel gruppo S_9.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.

Esercizio 3. Sia assegnato il reticolo D_{182} dei divisori di 182, ordinato per divisibilità.

(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{182}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{182}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

Esercizio 4. Scrivere quali elementi sono invertibili e quali sono divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{26}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 5. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$62x + 150y = 12.$$

Esercizio 6. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Dare la definizione di insieme $\mathscr{P}(A)$ della parti di A. Inoltre, stabilire la cardinalità di $\mathscr{P}(A)$ e dare una dimostrazione dettagliata della risposta.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 11 Aprile 2017
Traccia: 1

Esercizio 1. Date tre proposizioni P, S e R, scrivere la tabella di verità di $(S \Longrightarrow P) \wedge (R \Longrightarrow S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, y \in \mathbb{Z} \quad \exists\, a \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad y - b = a + \frac{1}{2}.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 2. Dare la definizione di coefficiente binomiale. Inoltre, dimostrare che $\forall k \leq n$ si ha

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Esercizio 3. Sia assegnato l'anello $(\mathbb{Z}_{24}, +, \cdot)$. Determinare quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Infine, scrivere esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 4. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione

$$\mathscr{R} = \{(a, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 19 \mid 3x + 16a\},$$

(ovvero $\forall a, x \in \mathbb{Z}$, $a \mathscr{R} x \Longleftrightarrow 19 \mid 3x + 16a$).

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Inoltre, se tale relazione è di equivalenza, descrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 5. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, a), (y, b) \in A \qquad (x, a) * (y, b) = (x - 1 + y, \frac{3}{4}ba).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa.
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Descrivere, se esiste, in modo esplicito l'inverso di $(0, -2)$ in $(A, *)$.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo D_{260} dei divisori di 260, ordinato per divisibilità.

(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{260}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{260}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 20 Febbraio 2017
Traccia: X

Esercizio 1. Sia assegnato l'anello $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$. Determinare quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Infine, scrivere esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 2. Sia $h : B \to A$ una funzione, e siano $X, X' \subseteq A$. Dare la definizione di immagine inversa di un sottoinsieme di A. Inoltre, dimostrare se è vero che

$$h^{-1}(X \cap X') = h^{-1}(X) \cap h^{-1}(X').$$

Esercizio 3. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^{*}, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 4. Determinare se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = & \frac{63}{10} \\ a_n = & \frac{7}{2} + a_{n-1} + \frac{7}{5}n \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $b_n = \frac{7}{10}(n+3)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5. (1) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 4 di valenza 4, 1 di valenza 3, 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

(2) Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 4 di valenza 4, 1 di valenza 3, 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 6. Si considerino 5 Messicani, 7 Venezuelani e 9 Peruviani. I Messicani sono tutti Uomini, tra i Venezuelani ci sono 3 Uomini e tra i Peruviani ci sono 4 Donne.

a) Stabilire in quanti modi diversi si può formare un comitato di 8 persone.
b) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità.
c) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente una donna.
d) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno una donna.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 20 Febbraio 2017
Traccia: X

Esercizio 1. Sia assegnato l'anello $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$. Determinare quali sono i divisori dello zero e quali sono gli elementi invertibili. Infine, scrivere esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 2. Sia $h : B \to A$ una funzione, e siano $X, X' \subseteq A$. Dare la definizione di immagine inversa di un sottoinsieme di A. Inoltre, dimostrare se è vero che

$$h^{-1}(X \cap X') = h^{-1}(X) \cap h^{-1}(X').$$

Esercizio 3. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^{*}, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 4. Determinare se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = & \frac{63}{10} \\ a_n = & \frac{7}{2} + a_{n-1} + \frac{7}{5}n \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $b_n = \frac{7}{10}(n+3)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5.
(1) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 4 di valenza 4, 1 di valenza 3, 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 4 di valenza 4, 1 di valenza 3, 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 6. Si considerino 5 Messicani, 7 Venezuelani e 9 Peruviani. I Messicani sono tutti Uomini, tra i Venezuelani ci sono 3 Uomini e tra i Peruviani ci sono 4 Donne.

a) Stabilire in quanti modi diversi si può formare un comitato di 8 persone.
b) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità.
c) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente una donna.
d) Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno una donna.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 20 Febbraio 2017
Traccia: 2

Esercizio 1. Consideriamo 6 Vietnamiti, 4 Birmani e 10 Cambogiani. I Birmani sono tutte Donne, tra i Vietnamiti ci sono 2 Donne e tra i Cambogiani ci sono 3 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 6 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 2. Si consideri il gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^{*}, \cdot)$. Stabilire l'ordine del gruppo e se il gruppo è ciclico. Inoltre, stabilire l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 3. Verificare se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = & \frac{24}{7} \\ a_n = & \frac{12}{7}n + a_{n-1} + \frac{18}{7} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $b_n = \frac{6}{7}(n+2)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4. (1) Stabilire se esiste un grafo con 14 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 3 di valenza 3, 4 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 14 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 3 di valenza 3, 4 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 5. Scrivere quali elementi sono invertibili e quali sono divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{22}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 6. Si consideri una funzione $g : A \to B$. Dare la definizione di immagine di un sottoinsieme di A. Inoltre, siano $Y, Y' \subseteq A$; dimostrare se è vero che

$$g(Y \cup Y') = g(Y) \cup g(Y').$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 2 Febbraio 2017
Traccia: D

Esercizio 1. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Dare la definizione di insieme $\mathscr{P}(A)$ della parti di A. Inoltre stabilire la cardinalità di $\mathscr{P}(A)$ e dare una dimostrazione dettagliata della risposta.

Esercizio 2. Siano assegnate le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, s \in \mathbb{N} \qquad h(s) = 2s^2$$

e

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, n \in \mathbb{R} \qquad g(n) = \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{3}.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso, se sono suriettive, iniettive o biettive. Se possibile, determinare le funzioni inverse g^{-1}, h^{-1} e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Esercizio 3. Siano $E \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $F \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ le seguenti matrici

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ 2 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, EF e FE.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di E e di F.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di E e di F.

Esercizio 4. Si considerino tre proposizioni T, R e Q. Scrivere la tabella di verità di $(R \wedge T) \vee (Q \implies R)$. Determinare, motivandone la risposta, se la proposizione

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, y \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad \forall\, b \in \mathbb{N} \quad 2x - y - 2b = 0.$$

è vera o falsa e scriverne la sua negazione.

Esercizio 5. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$122x + 54y = 6.$$

Esercizio 6. Si consideri in S_9 la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 9 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare l'ordine dell'elemento g nel gruppo S_9.
(3) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.
(4) Determinare se l'elemento g è dispari o pari.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 2 Febbraio 2017
Traccia: 3

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R} \qquad h(c) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3}c^3$$

e

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, y \in \mathbb{Z} \qquad g(y) = -3 \mid y \mid$$

sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ h$ e $h \circ g$ e le funzioni inverse h^{-1} e g^{-1}.

Esercizio 2. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento h è dispari o pari.
(3) Calcolare l'ordine dell'elemento h nel gruppo S_8.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.

Esercizio 3. Dare la definizione di numero primo. Inoltre stabilire se la cardinalità dell'insieme dei numeri primi è finita o infinta e fornire una dimostrazione dettagliata.

Esercizio 4. Date tre proposizioni P, S e R, scrivere la tabella di verità di $(S \implies P) \vee (R \wedge S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\exists\, y \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall\, s \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall\, a \in \mathbb{Z} \quad \text{si ha} \quad y - s + a \neq 0.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 5. Siano $D \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$ e $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ le seguenti matrici

$$D = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 2 & 0 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, CD e DC.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di D e di C.

Esercizio 6. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$174x + 76y = 8.$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 18 Gennaio 2017
Traccia: A

Esercizio 1. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A\times A \to A$, tale che
$$\forall\ (x,b),(t,r) \in A \qquad (x,b)*(t,r) = (t+4+x, \frac{1}{5}br).$$
(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A,*)$.
(4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(2,-3)$ in $(A,*)$.

Esercizio 2. Dati i seguenti numeri complessi:
$$z_1 = \sqrt{2} - 3i \qquad \text{e} \qquad z_2 = 4i + 2.$$
(1) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(2) Scrivere il modulo di z_1 e z_2.
(3) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi z_1z_2, $\frac{1}{z_1}$ e $\frac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema di congruenze lineari
$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod 5 \\ 61x \equiv 15 \pmod 6 \\ 8x \equiv 16 \pmod{56}. \end{cases}$$
Se possibile, risolverlo determinandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha
$$\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^i = \frac{5}{4} - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$

Esercizio 5. Sia assegnato il reticolo D_{154} dei divisori di 154, ordinato per divisibilità.
(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{154}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{154}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

Esercizio 6. Dare la definizione di funzione suriettiva e descrivere un esempio. Dimostrare che la composizione di due funzioni suriettive è una funzione suriettiva.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 18 Gennaio 2017
Traccia: 1

Esercizio 1. Applicando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = \frac{3}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Esercizio 2. Si dia la definizione di funzione iniettiva e si fornisca un esempio. Dare la dimostrazione che la composizione di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva.

Esercizio 3. Sia assegnato il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 71x \equiv 16 \pmod{7} \\ 6x \equiv 24 \pmod{30} \\ 5x \equiv 3 \pmod{6}. \end{cases}$$

Risolvere se possibile il sistema, determinandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (a, c), (p, s) \in A \qquad (a, c) * (p, s) = (2 + a + p, \frac{1}{3}sc).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa.
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Descrivere, se esiste, in modo esplicito l'inverso di $(-1, 2)$ in $(A, *)$.

Esercizio 5. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 3i + 3 \qquad \text{e} \qquad z_2 = \sqrt{3} - 2i.$$

(1) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(2) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(3) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\frac{1}{z_2}$, $z_1 z_2$ e $\frac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo D_{165} dei divisori di 165, ordinato per divisibilità.

(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{165}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{165}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 18 Novembre 2016

Esercizio 1. Siano assegnate le seguenti leggi

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, a \in \mathbb{R} \qquad g(a) = 3 - \frac{1}{3}a^5$$

e

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, s \in \mathbb{N} \qquad f(s) = \frac{4}{3s+2}.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso, se sono suriettive, iniettive o biettive. Se possibile, determinare le funzioni inverse g^{-1}, f^{-1} e le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 2. Dati $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dimostrare che l'equazione diofantea

$$ax + by = c$$

ammette soluzioni intere se e solo se $MCD(a, b) \mid c$.

Esercizio 3. Verificare se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = & 4 \\ a_n = & 2n + a_{n-1} + 3 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $b_n = (n+2)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 5. Siano $D \in M_{3\times 2}(\mathbb{C})$ e $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ le seguenti matrici

$$D = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \\ 3 & i \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, CD e DC.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di D e di C.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo D_{140} dei divisori di 140, ordinato per divisibilità.
(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{140}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{140}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 22 Settembre 2016

Esercizio 1. Dare la definizione di numero primo. Inoltre stabilire se la cardinalità dell'insieme dei numeri primi è finita o infinta e fornire una dimostrazione dettagliata.

Esercizio 2. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento h è dispari o pari.
(3) Calcolare l'ordine dell'elemento h nel gruppo S_8.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (a,x),(b,y) \in A \qquad (a,x) * (b,y) = (\frac{2}{5}ab, \frac{3}{4} + y + x).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa.
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Determinare in modo esplicito, se esiste, l'inverso di $(2, -3)$ in $(A, *)$.

Esercizio 4. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione

$$\mathscr{R} = \{(a,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid\ 13 \mid 6d + 7a\},$$

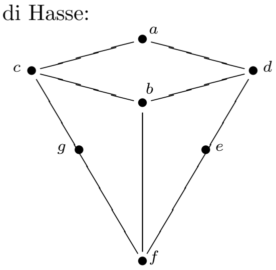
(ovvero $\forall a, d \in \mathbb{Z}$, $a \mathscr{R} d \iff 13 \mid 6d + 7a$).

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Inoltre, se tale relazione è di equivalenza, descrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 5. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$6 \sum_{i=-1}^{n} (7)^i = 7^{n+1} - \frac{1}{7}.$$

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e la relazione $\leq$ è descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Scrivere esplicitamente gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R è distributivo.
(3) Stabilire se il reticolo R è di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 9 Settembre 2016

Esercizio 1. (1) Stabilire se esiste un grafo con 15 vertici, dei quali: 3 di valenza 4, 4 di valenza 3, 6 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

(2) Stabilire se esiste un albero con 15 vertici, dei quali: 3 di valenza 4, 4 di valenza 3, 6 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 2. Si considerino 7 Islandesi, 8 Americani e 6 Giapponesi. Gli Islandesi sono tutti Uomini, tra gli Americani ci sono 4 Donne e tra i Giapponesi ci sono 4 Donne.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 6 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità ed esattamente una Donna?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità ed almeno una Donna?

Esercizio 3. Scrivere quali elementi sono invertibili e quali sono divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 4. Scrivere la definizione di gruppo e descrivere un esempio. Scrivere la definizione di gruppo abeliano e descrivere un esempio.

Esercizio 5. Date tre proposizioni P, S e Q, scrivere la tabella di verità di $(P \wedge S) \vee (P \Longrightarrow Q)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \quad \exists\, a \in \mathbb{N} \text{ tale che } \quad y^2 = a - 2.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 6. Stabilire con una dimostrazione se le seguenti congruenze sono vere o false:

$$7^{48} \equiv 2 \pmod{104} \qquad\qquad 11^{17} \equiv 11 \pmod{60}.$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 11 Luglio 2016

Esercizio 1. Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su un insieme non vuoto A. Dimostrare che

$$\forall\ a, b \in A \text{ si ha } \ a\mathscr{R}b \iff [a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}.$$

Esercizio 2. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$4\sum_{k=-1}^{n}(5)^k = 5^{n+1} - \frac{1}{5}.$$

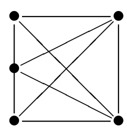
Esercizio 3. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$51x + 123y = 9.$$

Esercizio 4. Sia assegnato il reticolo D_{150} dei divisori di 150, ordinato per divisibilità.

(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{150}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{150}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

Esercizio 5. Sia assegnato il seguente grafo $\mathcal{G}$



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è planare e determinare la valenza dei suoi vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.
(3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e le stesse valenze.

Esercizio 6. Siano $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AC e CA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di A e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di C.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 13 Aprile 2016
Traccia: 1

Esercizio 1. (1) Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 6 di valenza 3, 4 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 6 di valenza 3, 4 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 2. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{24}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathscr{R} = \{(b, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\mid\; 17 \mid 15b + 2y\},$$

(ovvero $b \mathscr{R} y \iff 17 \mid 15b + 2y$). Stabilire se $\mathscr{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ ed, in tal caso, determinare la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 4. Scrivere la definizione di monoide e di inverso di un elemento. Dimostrare l'unicita dell'inverso di un elemento.

Esercizio 5. Si considerino le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad \forall\, b \in \mathbb{Q} \qquad h(b) = \frac{4}{7}b - \frac{5}{3}$$

e

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad g(n) = \frac{3}{n+2}.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Esercizio 6. Usando il principio di induzione verificare se la seguente successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza

$$a_n = \begin{cases} a_0 = & \dfrac{1}{4} & n = 0 \\ a_n = & a_{n-1} + \dfrac{1}{4}(3n(n+1)+1) & n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \dfrac{1}{4}(n+1)^3$, $\forall n \geq 0$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Brindisi, 17 Febbraio 2016

Esercizio 1. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A\times A \to A$, tale che

$$\forall\ (a,b),(s,u) \in A \qquad (a,b)*(s,u) = (\frac{2}{3}as, u - \frac{1}{2} + b).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A,*)$.
(4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(3,-3)$ in $(A,*)$.

Esercizio 2. Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su un insieme non vuoto A. Dimostrare che

$$\forall a,b \in A \text{ si ha } [b]_{\mathscr{R}} \neq [a]_{\mathscr{R}} \Longleftrightarrow [a]_{\mathscr{R}} \cap [b]_{\mathscr{R}} = \emptyset$$

Esercizio 3. Verificare se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_1 = & 1 \\ a_n = & a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_n$ con

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \forall\ n \geq 0.$$

Esercizio 4. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathscr{R} = \{(a,t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ \mid\ at \leq 0\},$$

(ovvero $\forall\ a,t \in \mathbb{Z} \quad a\mathscr{R}t \Longleftrightarrow$ il prodotto at è minore o uguale a zero). Stabilire se $\mathscr{R}$ è una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, d'ordine, d'equivalenza.

Esercizio 5. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*,\cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 6. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$123x + 177y = 12.$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 16 Febbraio 2016
Traccia: 3

Esercizio 1. Sia assegnata la seguente equazione diofantea
$$76x + 284y = 16.$$
Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 2. Si considerino 7 Greci, 5 Portoghesi e 10 Arabi. I Portoghesi sono tutte Donne, tra i Greci ci sono 4 Donne e tra gli Arabi ci sono 5 Donne.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 6 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A\times A \to A$, tale che
$$\forall\ (x, y), (c, s) \in A \qquad (x, y) * (c, s) = (\frac{1}{3}xc, \frac{2}{3} + s + y).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa.
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Determinare in modo esplicito, se esiste, l'inverso di $(-1, 2)$ in $(A, *)$.

Esercizio 4. In un anello commutativo unitario $(A, +, \cdot)$, dare la definizione di elemento invertibile e di divisore dello zero. Inoltre, dimostrare che se a è un elemento invertibile allora a non è un divisore dello zero.

Esercizio 5. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione
$$\mathscr{R} = \{(x, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ xz > 0\},$$
(ovvero $\forall\, x, z \in \mathbb{Z} \quad x\,\mathscr{R}\,z \iff$ il prodotto xz è strettamente maggiore di zero). Determinare se $\mathscr{R}$ è una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, d'ordine, d'equivalenza.

Esercizio 6. Si consideri il gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^{*}, \cdot)$. Stabilire l'ordine del gruppo e stabilire se il gruppo è ciclico. Inoltre, stabilire l'ordine di tutti i suoi elementi.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 16 Febbraio 2016
Traccia: D

Esercizio 1. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la seguente operazione $* \, : \, A\times A \to A$, tale che

$$\forall \ (a,b),(r,p) \in A \qquad (a,b)*(r,p) = (\frac{1}{4}ar, b+p-\frac{1}{2}).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A,*)$.
(4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(2,-1)$ in $(A,*)$.

Esercizio 2. Scrivere la definizione di monoide e di elemento invertibile in un monoide. Inoltre, dimostrare l'unicita dell'inverso di un elemento invertibile.

Esercizio 3. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathscr{R} = \{(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ \mid \ cd \leq 0\},$$

(ovvero $\forall \ c,d \in \mathbb{Z} \quad c\,\mathscr{R}\,d \iff$ il prodotto cd è minore o uguale a zero). Stabilire se $\mathscr{R}$ è una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, d'ordine, d'equivalenza.

Esercizio 4. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*,\cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 5. Consideriamo 9 studenti di Informatica, 8 studenti di Farmacia e 6 studenti di Lettere. Gli studenti di Lettere sono tutti Uomini, tra gli studenti di Informatica ci sono 6 Uomini e tra gli studenti di Farmacia ci sono 3 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 5 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni materia?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni materia ed esattamente una donna?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni materia ed almeno una donna?

Esercizio 6. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$93x + 225y = 9.$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 12 Gennaio 2016
Traccia: A

Esercizio 1. Stabilire, con il principio di induzione, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è vero che

$$\sum_{k=-1}^{n} \left(\frac{1}{7}\right)^k = \frac{49}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\right)^n.$$

Esercizio 2. Si considerino le matrici $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare, se possibile, AC e CA.
(2) Determinare se possibile, il determinante di A e di C.
(3) Determinare, se possibile, le matrici inverse di A e di C.

Esercizio 3. Sia assegnata la seguente permutazione in S_8:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 8 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere l'elmento f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento f è pari o dispari.
(3) Scrivere esplicitamente l'inverso di f.
(4) Stabilire l'ordine di f in S_8.
(5) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.

Esercizio 4. (1) Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 3 di valenza 4, 4 di valenza 3, 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 3 di valenza 4, 4 di valenza 3, 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 5. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 26x \equiv 14 \pmod{3} \\ 25x \equiv 45 \pmod{8} \\ 6x \equiv 12 \pmod{42}. \end{cases}$$

Esercizio 6. Si dia la definizione di funzione iniettiva. Dimostrare che la composizione di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 12 Gennaio 2016
Traccia: 1

Esercizio 1. Scrivere la definizione di funzione suriettiva. Dimostrare che la composizione di due funzioni suriettive è una funzione suriettiva.

Esercizio 2.
(1) Stabilire se esiste un grafo con 15 vertici, dei quali: 4 di valenza 4, 3 di valenza 3, 3 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 15 vertici, dei quali: 4 di valenza 4, 3 di valenza 3, 3 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 3. Sia assegnato il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 78x \equiv 16 \pmod 7 \\ 6x \equiv 30 \pmod{48} \\ 14x \equiv 8 \pmod 3. \end{cases}$$

Se possibile, risolverlo determinandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Usando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=-1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Esercizio 5. In S_{10}, sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 9 & 4 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

(1) Descrivere l'elmento g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Individuare l'ordine di g nel gruppo S_{10}.
(3) Determinare esplicitamente l'inverso di g.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.
(5) Indicare se l'elemento g è pari o dispari.

Esercizio 6. Siano $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, DB e BD.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di B e di D.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di B e di D.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 19 Novembre 2015

Esercizio 1. Sia dato il gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$. Stabilire l'ordine del gruppo e stabilire se il gruppo è ciclico. Inoltre, determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 2. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$15 \mid 4^{2n} - 1.$$

Esercizio 3. Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su un insieme A non vuoto. Dare la definizione di classe di equivalenza e dimostrare che

$$\forall a, b \in A \quad : \quad a\mathscr{R}b \iff [a]_{\mathscr{R}} = [b]_{\mathscr{R}}.$$

Esercizio 4. Si considerino 9 Indiani, 7 Norvegesi e 4 Portoghesi. I Portoghesi sono tutte Donne, tra gli Indiani ci sono 4 Donne e tra i Norvegesi ci sono 3 Donne.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 5 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità ed un unico uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 5.
(1) Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 2 di valenza 5, 3 di valenza 4, 2 di valenza 3, 3 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 2 di valenza 5, 3 di valenza 4, 2 di valenza 3, 3 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 6. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \sqrt{8}i - 1, \; z_2 = -2 - 4i.$$

(1) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(2) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\dfrac{1}{z_1}$, $z_1 z_2$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Brindisi , 8 Settembre 2015

Esercizio 1. Sia assegnato il reticolo algebrico $(R, \wedge, \vee, \hat{0}, \hat{1})$, dove $\hat{0}$ e $\hat{1}$ denotano gli elementi neutri. Dare la definizione di complemento di un elemento e dimostrare che se R è un reticolo distributivo allora il complemento se esiste è unico.

Esercizio 2. Si considerino 5 Australiani, 9 Cinesi e 8 Giapponesi. Gli Australiani sono tutti Uomini, tra i Cinesi ci sono 4 Donne e tra i Giapponesi ci sono 3 Donne.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 5 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità ed un unica donna?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentate per ogni nazionalità ed almeno una donna?

Esercizio 3. Consideriamo le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}\setminus\{3\}, \qquad h(a) = \frac{3a-4}{a+2}$$

e

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\setminus\{-2\} \qquad g(s) = s^2.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Esercizio 4. Sia assengato il reticolo D_{195} dei divisori di 195 ordinato per divisibilità.

(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{195}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{195}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

Esercizio 5. (1) Determinare se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 1 di valenza 5, 4 di valenza 4, 3 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare un grafico di un tale grafo.
(2) Determinare se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 1 di valenza 5, 4 di valenza 4, 3 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare un grafico di un tale albero.

Esercizio 6. Provare col principio di induzione che la seguente successione $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza

$$c_n = \begin{cases} c_0 = & 0 \qquad n = 0 \\ c_n = & c_{n-1} + \frac{3}{2}n \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $d_n = \frac{3}{4}n(n+1)$, $\forall n \geq 0$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Brindisi, 17 Luglio 2015

Esercizio 1. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{5}i.$$

(1) Calcolare il modulo dei numeri complessi z_1 e z_2.
(2) Scrivere $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ in forma algebrica.
(3) Scrivere $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$ in forma algebrica.

Esercizio 2. Si considerino 4 Ingegneri, 8 Fisici e 7 Matematici. Gli Ingegneri sono tutte Donne, tra i Fisici ci sono 4 Donne e tra i Matematici ci sono 5 Donne.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 4 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni materia?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni materia ed un unico uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni materia ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Sia assegnato il reticolo algebrico $(R, \wedge, \vee, \hat{0}, \hat{1})$, dove $\hat{0}$ e $\hat{1}$ denotano gli elementi neutri. Dare la definizione di complemento di un elemento e dimostrare che se R è un reticolo distributivo allora il complemento se esiste è unico.

Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, y), (z, w) \in A \qquad (x, y) * (z, w) = (z + 4 + x, 5wy).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, determinare l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Se esiste, determinare in modo esplicito l'inverso di $(1, -1)$ in $(A, *)$.

Esercizio 5. Sia assegnata sull'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 13 \mid 11x + 2y\},$$

(ovvero $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \mathscr{R} y \iff 13 \mid 11x + 2y$).

Stabilire se $\mathscr{R}$ definisce una relazione di equivalenza o d'ordine sull'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$. Se $\mathscr{R}$ è di equivalenza, determinare la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 6. Sia assegnato il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 51x \equiv 3 \pmod{5} \\ 8x \equiv 40 \pmod{56} \\ 91x \equiv 10 \pmod{9}. \end{cases}$$

Se possibile, risolverlo determinandone tutte le soluzioni.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 16 Luglio 2015
Traccia: A

Esercizio 1. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{14}\, i.$$

(1) Calcolare il modulo dei numeri complessi z_1 e z_2.
(2) Scrivere $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ in forma algebrica.
(3) Scrivere $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$ in forma algebrica.

Esercizio 2. Date tre proposizioni R, T e S, scrivere la tabella di verità di $(S \wedge R) \Longrightarrow (T \vee R)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad z^2 + 3 - b^2 = 0.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 3. Consideriamo in S_9 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 9 & 6 & 5 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Esprimere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare l'ordine di f in S_9.
(3) Stabilire se f è pari o dispari.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.

Esercizio 4. (1) Determinare se esiste un albero con 15 vertici, dei quali: 5 di valenza 4, 2 di valenza 3, 4 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con con 15 vertici, dei quali: 5 di valenza 4, 2 di valenza 3, 4 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 5. Sia assegnato il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 91x \equiv 19 \pmod{9} \\ 8x \equiv 24 \pmod{40} \\ 10x \equiv 50 \pmod{70}. \end{cases}$$

Se possibile, risolverlo determinandone tutte le soluzioni.

Esercizio 6. Sia B un sottoinsieme di A. Si dia la definizione di insieme complementare $\complement_A(B)$ di B in A. Inoltre, dati B e D sottoinsiemi di A si dimostri che

$$\complement_A(B \cup D) = \complement_A(B) \cap \complement_A(D).$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 16 Luglio 2015
Traccia: 1

Esercizio 1. Sia assegnato il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 142x \equiv 10 \pmod{14} \\ 80x \equiv 8 \pmod{72} \\ 46x \equiv 13 \pmod{5}. \end{cases}$$

Se possibile, risolverlo determinandone tutte le soluzioni.

Esercizio 2.
(1) Determinare se esiste un albero con 14 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 4 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 14 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 4 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 3. Si consideri un sottoinsieme E di B. Dare la definizione di insieme complementare $\complement_B(E)$ di E in B. Inoltre, si considerino due sottoinsiemi E e F di B. Si dimostri che

$$\complement_B(E \cap F) = \complement_B(E) \cup \complement_B(F).$$

Esercizio 4. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = -\sqrt{3} + \sqrt{5}i, \quad z_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

(1) Calcolare il modulo dei numeri complessi z_1 e z_2.
(2) Scrivere $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ in forma algebrica.
(3) Scrivere $z_1 z_2$, $\frac{1}{z_1}$ e $\frac{z_1}{z_2}$ in forma algebrica.

Esercizio 5. Date tre proposizioni P, Q e S, scrivere la tabella di verità di $(P \vee S) \Longrightarrow (Q \wedge S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, x \in \mathbb{Q} \quad \exists\, y \in \mathbb{Z} \qquad \text{tale che} \qquad x^2 = y^4 + 4.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 6. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Esprimere g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare l'ordine di g in S_8.
(3) Stabilire se g è pari o dispari.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 24 Febbraio 2015
Traccia: 2

Esercizio 1. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$72x + 243y = 45.$$

Esercizio 2. Si considerino tre proposizioni P, R e Q. Scrivere la tabella di verità di $(P \Longrightarrow Q) \vee (P \wedge R)$. Determinare, motivando la risposta, se la proposizione

$$\exists\, s \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall b \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in \mathbb{R} \text{ con } \quad b + s - q = 0$$

è vera o falsa e scriverne la sua negazione.

Esercizio 3. Si consideri l'anello $(\mathbb{Z}_{22}, +, \cdot)$. Scrivere quali elementi sono invertibili e quali sono divisori dello zero. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 4. Sia assegnato il reticolo algebrico $(R, \wedge, \vee)$. Si scriva la definizione di $\hat{0}$ e $\hat{1}$, di complemento, di reticolo distributivo e di reticolo di Boole. Si diano esempi e controesempi delle varie definizioni.

Esercizio 5. Siano $A \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $C \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AC e CA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di A e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di C.

Esercizio 6. Si considerino 6 Polacchi, 7 Russi e 9 Svedesi. I Polacchi sono tutti Uomini, tra i Russi ci sono 4 Uomini e tra gli Svedesi ci sono 3 Uomini.

a) Quanti sono i modi diversi in cui si può formare un comitato con un rappresentante per ogni nazionalità?
b) Quanti sono i modi diversi in cui si può formare un comitato di 5 persone?
c) Quanti sono i modi diversi in cui si può formare un comitato con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente una donna?
d) Quanti sono i modi diversi in cui si può formare un comitato con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno una donna?

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 24 Febbraio 2015
Traccia: A

Esercizio 1. Siano $B \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $D \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, DB e BD.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di B e di D.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di B e di D.

Esercizio 2. Si considerino 5 Inglesi, 6 Francesi e 8 Spagnoli. I Francesi sono tutte Donne, tra gli Spagnoli ci sono 3 Donne e tra gli Inglesi ci sono 2 Donne.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 4 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Date tre proposizioni R, S e T, scrivere la tabella di verità di $(R \vee S) \wedge (R \Longrightarrow T)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{N} \text{ tale che } \quad \forall a \in \mathbb{R} \qquad a = x + y.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{G}$ un grafo. Sia dia la definizione di grafo connesso, di cammino euleriano, di circuito euleriano e di cammino hamiltoniano. Si diano esempi e controesempi delle varie definizioni.

Esercizio 5. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$63x + 162y = 99.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 6. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{24}, +, \cdot)$. Calcolare esplicitamente l'inverso degli elementi invertibili.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 16 Febbraio 2015

Esercizio 1. Usando il principio di induzione verificare che la seguente successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza

$$b_n = \begin{cases} b_0 = & 0 & n = 0 \\ b_n = & b_{n-1} + 6n & n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 3n(n+1)$, $\forall n \geq 0$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente equazione diofantea

$$144x + 200y = 56.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 3. Siano assegnate le seguenti leggi

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad f(s) = \frac{1}{5}s - \frac{3}{4}$$

e

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \qquad g(b) = \mid b \mid -4.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse f^{-1} e g^{-1}, e le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 4. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = -1 + \frac{2}{3}i, \quad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i.$$

(1) Calcolare il modulo dei numeri complessi z_1 e z_2.
(2) Scrivere $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ in forma algebrica.
(3) Scrivere $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$ in forma algebrica.

Esercizio 5. Consideriamo sull'insieme $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : B \times B \to B$, tale che

$$\forall\ (x, y), (c, d) \in B \qquad (x, y) * (c, d) = (x - 3 + c, 2yd).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare se, nella struttura algebrica $(B, *)$, esiste l'elemento neutro.
(4) Scrivere esplicitamente l'inverso di $(-1, 1)$ in $(B, *)$, se esiste.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo algebrico $(R, \wedge, \vee, \hat{0}, \hat{1})$, dove $\hat{0}$ e $\hat{1}$ denotano gli elementi neutri. Dare la definizione di complemento di un elemento e dimostrare che se R è un reticolo distributivo allora il complemento se esiste è unico.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 10 Febbraio 2015
Traccia: B

Esercizio 1. Dare la definizione di numero primo. Inoltre stabilire se la cardinalità dell'insieme dei numeri primi è finita o infinta e fornire una dimostrazione dettagliata.

Esercizio 2. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione

$$\mathscr{R} = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 14 \mid 9c + 5d\},$$

(ovvero $\forall c, d \in \mathbb{Z}$, $c \mathscr{R} d \Longleftrightarrow 14 \mid 9c + 5d$).

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Inoltre, se tale relazione è di equivalenza, descrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 3. Risolvere, se possibile, e indicare tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze lineari

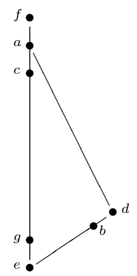
$$\begin{cases} 78x \equiv 10 \pmod{7} \\ 102x \equiv 16 \pmod{5} \\ 20x \equiv 170 \pmod{90}. \end{cases}$$

Esercizio 4. Consideriamo sull'insieme $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : B \times B \to B$, tale che

$$\forall\ (x,y),(c,d) \in B \qquad (x,y) * (c,d) = (x - 3 + c, 2yd).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare se, nella struttura algebrica $(B,*)$, esiste l'elemento neutro.
(4) Scrivere esplicitamente l'inverso di $(-1,1)$ in $(B,*)$, se esiste.

Esercizio 5. Sia assegnato il reticolo $(R, \leq)$, dove $R = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ e la relazione $\leq$ è descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Determinare in modo esplicito gli eventuali complementi di tutti gli elementi.
(2) Determinare se il reticolo R è distributivo.
(3) Determinare se il reticolo R è di Boole.

Esercizio 6. Si considerino i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 2 + \sqrt{5}i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - \frac{5}{3}i.$$

(1) Determinare il modulo di z_2 e z_1.
(2) Determinare la forma algebrica dei numeri complessi $\overline{z_2}$, $\overline{z_1}$.
(3) Determinare la forma algebrica dei numeri complessi $z_2 z_1$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

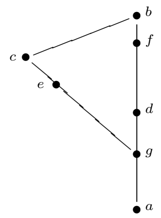
C.L. Informatica
Bari, 10 Febbraio 2015
Traccia: 1

Esercizio 1. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = -1 + \frac{2}{3}i, \quad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i.$$

(1) Calcolare il modulo dei numeri complessi z_1 e z_2.
(2) Scrivere $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ in forma algebrica.
(3) Scrivere $z_1 z_2$, $\frac{1}{z_1}$ e $\frac{z_1}{z_2}$ in forma algebrica.

Esercizio 2. Sia assegnato il reticolo $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e la relazione $\leq$ è descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Scrivere esplicitamente gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R è distributivo.
(3) Stabilire se il reticolo R è di Boole.

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (a, b), (s, t) \in A \qquad (a, b) * (s, t) = (a + s + 2, 3bt).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Se esiste, determinare in modo esplicito l'inverso di $(1, -1)$ in $(A, *)$.

Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathscr{R} = \{(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 16 \mid 7t + 9s\},$$

(ovvero $\forall s, t \in \mathbb{Z}$, $s \mathscr{R} t \iff 16 \mid 7t + 9s$).

Stabilire se $\mathscr{R}$ definisce una relazione di equivalenza o d'ordine sull'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$. Se $\mathscr{R}$ è di equivalenza, determinare la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 5. Sia assegnato il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 14x \equiv 7 \pmod{35} \\ 20x \equiv 8 \pmod{18} \\ 30x \equiv 20 \pmod{70}. \end{cases}$$

Se possibile, risolverlo determinandone tutte le soluzioni.

Esercizio 6. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Dare la definizione di insieme $\mathscr{P}(A)$ della parti di A. Inoltre stabilire la cardinalità di $\mathscr{P}(A)$ dare una dimostrazione dettagliata della risposta.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 26 Gennaio 2015
Traccia: A

Esercizio 1. Scrivere la definizione di elemento invertibile in un anello commutativo unitario e dimostrare che ogni elemento in $(\mathbb{Z}_p^*, +, \cdot)$ è invertibile.

Esercizio 2.
(1) Stabilire se esiste un albero con 15 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 2 di valenza 3 e 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare un grafico di un tale albero.
(2) Determinare se esiste un grafo con 15 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 2 di valenza 3 e 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare un grafico di un tale grafo.

Esercizio 3. Sia assegnata in S_8 la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare l'ordine dell'elemento h in S_8.
(3) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.
(4) Determinare se h è dispari o pari.

Esercizio 4. Si consideri la seguente equazione diofantea

$$144x + 200y = 56.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 5. Applicando il principio di induzione, dimostrare che la seguente successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza

$$b_n = \begin{cases} b_0 = & -\frac{1}{2} & n = 0 \\ b_n = & b_{n-1} + \frac{3}{2}n - \frac{3}{4} & n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 0$.

Esercizio 6. Stabilire se le seguenti leggi

$$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad g(t) = \sqrt[3]{t^4},$$

e

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(y) = -4 - \frac{13}{17}y$$

sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse h^{-1}, g^{-1}, e le composizioni $g \circ h$ e $h \circ g$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 26 Gennaio 2015
Traccia: C

Esercizio 1. Verificare, usando il principio di induzione, che la seguente successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza

$$a_n = \begin{cases} a_0 = & \frac{1}{2} & n = 0 \\ a_n = & a_{n-1} + \frac{3}{4}(2n-1) & n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \frac{3}{4}(\frac{2}{3} + n^2)$, $\forall n \geq 0$.

Esercizio 2. Date le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = \frac{1+x}{x+5},$$

e

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(z) = \frac{1}{4}z^3 + 7.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse h^{-1} e f^{-1}, e le composizioni $h \circ f$ e $f \circ h$.

Esercizio 3. Sia assegnata la seguente equazione diofantea

$$162x + 225y = 18.$$

Risolverla se possibile, indicandone tutte le soluzioni.

Esercizio 4. Scrivere la definizione di gruppo e dimostrare le leggi di cancellazione.

Esercizio 5.
(1) Determinare se esiste un albero con 11 vertici, dei quali: 1 di valenza 4, 4 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 11 vertici, dei quali: 1 di valenza 4, 4 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 6. Consideriamo in S_9 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Esprimere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare l'ordine di f in S_9.
(3) Stabilire se f è pari o dispari.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 26 Gennaio 2015
Traccia: 4

Esercizio 1. Si consideri in S_7 la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se l'elemento h è dispari o pari.
(3) Calcolare l'ordine dell'elemento h nel gruppo S_7.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.

Esercizio 2. Dare la definizione di $(A, +, \cdot)$ anello commutativo unitario e dimostrare che se a è un elemento invertibile allora a non è un divisore dello zero.

Esercizio 3. (1) Determinare se esiste un grafo con 14 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 5 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare un grafico di un tale grafo.
(2) Determinare se esiste un albero con 14 vertici, dei quali: 2 di valenza 4, 5 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare un grafico di un tale albero.

Esercizio 4. Siano assegnate le seguenti leggi

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad f(s) = \frac{1}{3}s - \frac{3}{4}$$

e

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \qquad g(b) = \mid b \mid -2.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse f^{-1} e g^{-1}, e le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 5. Risolvere se possibile la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$144x + 198y = 90.$$

Esercizio 6. Provare col principio di induzione che la seguente successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza

$$a_n = \begin{cases} a_0 = & 1 & n = 0 \\ a_n = & 6n + a_{n-1} & n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = 3(n + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$, $\forall n \geq 0$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica
Bari, 26 Gennaio 2015
Traccia: 1

Esercizio 1. Consideriamo le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(a) = a^5 - 2$$

e

$$g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \qquad g(n) = 2 - n^2.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Esercizio 2. Usando il principio di induzione verificare che la seguente successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza

$$b_n = \begin{cases} b_0 = & 0 \quad & n = 0 \\ b_n = & b_{n-1} + 6n \quad & n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = 3n(n+1)$, $\forall n \geq 0$.

Esercizio 3. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$200x + 325y = 75.$$

Esercizio 4. In S_{10}, sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Descrivere l'elmento g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Individuare l'ordine di g nel gruppo S_{10}.
(3) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.
(4) Indicare se l'elemento g è pari o dispari.

Esercizio 5.
(1) Stabilire se esiste un grafo con 13 vertici, dei quali: 1 di valenza 5, 2 di valenza 4, 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 13 vertici, dei quali: 1 di valenza 5, 2 di valenza 4, 5 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 6. Scrivere la definizione di monoide e dimostrare l'unicita dell'inverso di un elemento.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 21 Novembre 2014

Esercizio 1. Risolvere se possibile la seguente equazione Diofantea indicandone tutte le soluzioni
$$135x + 260y = 25.$$

Esercizio 2. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$7 \mid 8^n + 6.$$

Esercizio 3. In una classe ci sono 20 studenti.

a) In quanti modi distinti si possono scegliere 3 studenti?
b) In quanti modi distinti si possono assegnare un 20 e un 22 e un 24 a tre studenti diversi?
c) In quanti modi diversi si possono formare 4 gruppi di 5 studenti?

Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che
$$\forall\ (s,t),(x,y) \in A \qquad (s,t) * (x,y) = (3xs, t + 5 + y).$$

(1) Stabilire se l'operazione $*$ verifica la proprietà associativa e commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.
(3) Determinare, se esistono, gli elementi invertibili.

Esercizio 5. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario. Dimostrare che se a è un elemento invertibile allora a non è un divisore dello zero.

Esercizio 6. Dati i seguenti numeri complessi:
$$z_1 = 2 - \frac{1}{5}i, \quad z_2 = -3i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ e $z_1 + z_2$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 22 Settembre 2014

Esercizio 1. Date tre proposizioni P, S ed Q, scrivere la tabella di verità di $(P \wedge Q) \Longrightarrow S$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, x \in \mathbb{Z} \quad \exists\, t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \exists\, y \in \mathbb{N} \qquad x = \sqrt{t^2} + y.$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 2. Risolvere se possibile la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$170x + 55y = 15.$$

Esercizio 3. Scrivere la definizione di gruppo e di gruppo abeliano. Descrivere un esempio di gruppo e di gruppo abeliano.

Esercizio 4. Siano assegnate le seguenti leggi

$$h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \qquad h(a) = \frac{1}{2} + 2a^2,$$

e

$$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad g(x) = 2 - \frac{4}{3}x.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Esercizio 5. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \frac{1}{3} - i, \quad z_2 = -3 + 3i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 6. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se f è pari o dispari.
(3) Calcolare l'ordine di f in S_8.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

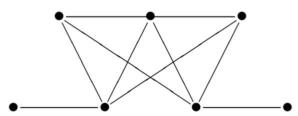
C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 10 Settembre 2014

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha
$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n+1} 3^i = \frac{3^{n+2}-1}{6}.$$

Esercizio 2. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}$ la relazione
$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 11 \mid 4x+7y\},$$
(ovvero $x\,\mathcal{R}\,y \iff 11 \mid 4x+7y$). Verificare che $\mathcal{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 3. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Qual'è la cardinalità dell'insieme $\mathcal{P}(A)$ della parti di A? Dare una dimostrazione della risposta.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{G}$ il grafo seguente.



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è planare e determinare i gradi dei suoi vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.
(3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e gli stessi gradi.

Esercizio 5. Siano $D \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $E \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{C})$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$
(1) Calcolare, se possibile, DE ed ED.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di E.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di D e di E.

Esercizio 6. Sia assengato il reticolo D_{126} dei divisori di 126 ordinato per divisibilità.
(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{126}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{126}.
(3) Stabilire se il reticolo è distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo è di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 7 Luglio 2014

Esercizio 1. Verificare che la seguente successione $\{a_n\}_n$ definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_n = & 2a_{n-1} + 1 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_n$ con $b_n = 2^n - 1$, $\forall n \geq 0$.

Esercizio 2. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 17x \equiv 5 \pmod{8} \\ 4x \equiv 16 \pmod{44} \\ 5x \equiv 10 \pmod{7}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}$ la seguente operazione $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z} \qquad x * y = -xy + 2x.$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa, commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Z}, *)$.
(3) Determinare, se esiste, l'inverso di 1 e di -1 in $(\mathbb{Z}, *)$.

Esercizio 4. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario. Dimostrare che se x è un elemento invertibile allora x non è un divisore dello zero.

Esercizio 5. Si considerino 4 studenti di Chimica, 5 studenti di Fisica e 3 studenti di Matematica.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 5 studenti?
b) In quanti modi diversi si possono assegnare un 20 e un 29 a due studenti distinti?
c) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 3 studenti, con un rappresentante per ogni materia?
d) In quanti modi diversi si possono formare 2 gruppi di 6 studenti?

Esercizio 6. Siano $D \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, DC e CD.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di D e di C.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 23 Giugno 2014

Esercizio 1. Date le seguenti leggi

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad\qquad f(n) = 2 \mid n \mid + \frac{1}{2},$$

e

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad\qquad g(x) = 1 - \frac{3}{4}x^5$$

stabilire se sono funzioni. In tal caso, stabilire se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse f^{-1} e g^{-1}, e le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 2. Date tre proposizioni R, S ed T, scrivere la tabella di verità di $(R \Longrightarrow S) \wedge (R \Longrightarrow T)$.

Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \exists t \in \mathbb{R} \text{ tale che } \quad \forall c \in \mathbb{N} \qquad a - c = t^2.$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 3. Risolvere se possibile la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$132x + 140y = 16.$$

Esercizio 4. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$. Calcolare esplicitamente l'inverso degli elementi invertibili.

Esercizio 5.
(1) Stabilire se esiste un albero con 8 vertici, dei quali: 4 di valenza 2, 2 di valenza 3 e 2 di valenza 1. Se esiste, disegnare un grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 8 vertici, dei quali: 4 di valenza 2, 2 di valenza 3 e 2 di valenza 1. Se esiste, disegnare un grafico di un tale grafo.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo algebrico $(R, \wedge, \vee, \hat{0}, \hat{1})$, dove $\hat{0}$ e $\hat{1}$ denotano gli elementi neutri. Dare la definizione di complemento di un elemento e dimostrare che se R è un reticolo distributivo allora il complemento se esiste è unico.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 9 Giugno 2014

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$6 \mid 7^n + 5.$$

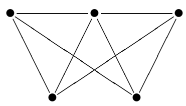
Esercizio 2. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Qual'è la cardinalità dell'insieme $\mathcal{P}(A)$ della parti di A? Dare una dimostrazione della risposta.

Esercizio 3. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 17 \mid 6b + 11a\},$$

(ovvero $a \,\mathcal{R}\, b \iff 17 \mid 6b + 11a$). Stabilire se $\mathcal{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Se è di equivalenza, scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{G}$ il grafo seguente.



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è planare e determinare la valenza dei sui vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.
(3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e le stesse valenze.

Esercizio 5. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = -3 - 3i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ e $z_1 + z_2$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 6. Si consideri in S_9 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se f è pari o dispari.
(3) Calcolare l'ordine di f in S_9.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 24 Febbraio 2014

Esercizio 1. Siano assegnate le seguenti leggi

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \qquad h(a) = 1 - \frac{2}{3}a$$

e

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(n) = 1 - n^3.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Esercizio 2. Verificare che la seguente successione $\{a_n\}_n$ definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_n = & 2a_{n-1} + 1 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_n$ con $b_n = 2^n - 1$.

Esercizio 3. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 11x \equiv 22 \pmod{33} \\ x \equiv 39 \pmod{7} \\ 4x \equiv 16 \pmod{5}. \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia dato il gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$.

(1) Stabilire l'ordine del gruppo.
(2) Stabilire se il gruppo è ciclico
(3) Se il gruppo è ciclico determinare tutti i generatori.

Esercizio 5. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \frac{1}{2} + i, \quad z_2 = -2 - 2i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ e $z_1 + z_2$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo algebrico $(R, \wedge, \vee, \hat{0}, \hat{1})$, dove $\hat{0}$ e $\hat{1}$ denotano gli elementi neutri. Dare la definizione di complemento di un elemento e dimostrare che se R è un reticolo distributivo allora il complemento se esiste è unico.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 20 Novembre 2013

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$3 \mid 4^n + 2.$$

Esercizio 2. Date tre proposizioni T, Q ed S, scrivere la tabella di verità di $T \wedge (Q \vee \bar{S})$, dove $\bar{S}$ indica la negazione di S. Inoltre, stabilire se la proposizione

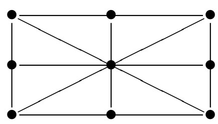
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\, y \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \qquad x = 5y^2 + 3a^4$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 3. Risolvere se possibile la seguente equazione Diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$945x + 240y = 15.$$

Esercizio 4. Sia assegnato il seguente grafo $\mathcal{G}$



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è planare e determinare la valenza dei suoi vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.
(3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e le stesse valenze.

Esercizio 5. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario. Dimostrare che se a è un elemento invertibile allora a non è un divisore dello zero.

Esercizio 6. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \sqrt{2} - i, \;\; z_2 = 2i - 4.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 25 Settembre 2013

Esercizio 1. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione
$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid f(a) = f(b)\},$$
dove f e' la seguente funzione
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad f(x) = x^2 + 3$$
(ovvero $a\,\mathcal{R}\,b \iff f(a) = f(b)$). Stabilire se $\mathcal{R}$ e' una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, d'ordine o di equivalenza. Nel caso in cui sia una relazione di equivalenza, determinare la classe di equivalenza di 1.

Esercizio 2. Date le seguenti funzioni
$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} - \{0\}, \qquad g(n) = |-2n| - \frac{1}{3}$$
e
$$h : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{2\} \qquad h(z) = 2 - z^5,$$
stabilire se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Esercizio 3. Quanti sono i numeri primi? Finiti o infiniti? Dare una dimostrazione della risposta.

Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tale che
$$\forall\, x, y \in \mathbb{Q} \qquad x * y = -xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$
(1) Determinare se l'operazione e' associativa, commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Q}, *)$.
(3) Determinare, se esiste, l'inverso di 1 e di -1 in $(\mathbb{Q}, *)$.

Esercizio 5. Siano $D \in Mat_{3\times3}(\mathbb{C})$ e $C \in Mat_{3\times2}(\mathbb{C})$:
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -2 & 0 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$
(1) Calcolare, se possibile, DC e CD.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di D e di C.

Esercizio 6. Si consideri in S_9 la seguente permutazione
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$
a) Scrivere g come prodotto di cicli disgiunti e stabilire se g è pari o dispari.
b) Calcolare l'ordine di g in S_9.
c) Calcolare g^{-1}.
d) Calcolare l'ordine degli elementi del sottogruppo G generato da g.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 11 Settembre 2013

Esercizio 1. Risolvere se possibile la seguente equazione Diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$945x + 240y = 15.$$

Esercizio 2. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{4}.$$

Esercizio 3. Date tre proposizioni P, Q ed R, scrivere la tabella di verità di $(P \Longrightarrow R) \wedge (P \vee Q)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\exists\, v \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad \exists\, c \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \qquad c - v^2 + t = 0$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 4.
(1) Stabilire se esiste un grafo con 9 vertici, dei quali 1 di ordine 5, 1 di ordine 4, 3 di ordine 3, 2 di ordine 2 e i restanti di ordine 1. Se esiste disegnare un grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 9 vertici, dei quali 1 di ordine 5, 1 di ordine 4, 3 di ordine 3, 2 di ordine 2 e i restanti di ordine 1. Se esiste disegnare un grafico di un tale albero.

Esercizio 5. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario. Dimostrare che se x e' un elemento invertibile allora x non e' un divisore dello zero.

Esercizio 6. Sia assengato il reticolo D_{198} dei divisori di 198 ordinato per divisibilità.
(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{198}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{198}.
(3) Stabilire se il reticolo e' distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo e' di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 1 Luglio 2013

Esercizio 1. Si considerino 7 studenti di Biologia, 4 studenti di Lettere e 4 studenti di Architettura.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 5 studenti?
b) In quanti modi diversi si possono assegnare un 25 e un 27 a due studenti distinti?
c) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 5 studenti, con un rappresentante per ogni materia?
d) In quanti modi diversi si possono formare 3 gruppi di 5 studenti?

Esercizio 2. Stabilire con il principio di induzione se la seguente affermazione è falsa o vera:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{si ha} \qquad 5 \mid 6^n + 4.$$

Esercizio 3. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

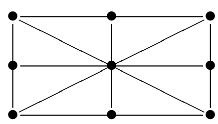
$$\begin{cases} 11x \equiv 9 \pmod 8 \\ 71x \equiv 142 \pmod 7 \\ 88x \equiv 3 \pmod 5. \end{cases}$$

Esercizio 4. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \sqrt{2} - i, \ z_2 = 2i - 4.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 5. Sia assegnato il seguente grafo $\mathcal{G}$



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ è planare e determinare la valenza dei suoi vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.
(3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e le stesse valenze.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo algebrico $(R, \wedge, \vee, \hat{0}, \hat{1})$, dove $\hat{0}$ e $\hat{1}$ denotano gli elementi neutri. Dare la definizione di complemento di un elemento e dimostrare che se R è un reticolo distributivo allora il complemento se esiste è unico.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 27 Marzo 2013

Esercizio 1. Date tre proposizioni P, Q ed R, scrivere la tabella di verità di $P \wedge (Q \vee \bar{R})$, dove $\bar{R}$ indica la negazione di R. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad a = 2c^2 + 4b^4$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 2. Verificare che la seguente successione $\{a_n\}_n$ definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_n = & 2a_{n-1} + 1 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_n$ con $b_n = 2^n - 1$.

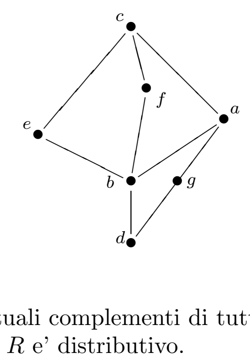
Esercizio 3. Risolvere se possibile la seguente equazione Diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$434x + 308y = 14.$$

Esercizio 4. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$. Per ogni elemento invertibile determinarne l'inverso.

Esercizio 5. Scrivere la definizione di cammino hamiltoniano in un grafo. Descrivere un esempio di un grafo che ammette un cammino hamiltoniano.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e la relazione $\leq$ e' descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R e' distributivo.
(3) Stabilire se il reticolo R e' di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 8 Febbraio 2013 Traccia B

Esercizio 1. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Scrivere g come prodotto di cicli disgiunti.
b) Stabilire se g è pari o dispari.
c) Calcolare l'ordine di g in S_8.
d) Calcolare g^{-1}.
e) Calcolare l'ordine degli elementi del sottogruppo G generato da g.

Esercizio 2. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(y, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 16 \mid 12y + 4b\},$$

(ovvero $y \,\mathcal{R}\, b \iff 16 \mid 12y + 4b$). Verificare che $\mathcal{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 3. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 3i - 4, \ z_2 = 3 - \sqrt{7}i.$$

(1) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
(3) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(4) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\frac{1}{z_1}$, $z_1 z_2$ e $\frac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 4. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$3 \mid 4^n + 2.$$

Esercizio 5. Sia dato il gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$. Stabilire l'ordine del gruppo e stabilire se il gruppo è ciclico. Inoltre, determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 6. Siano A e B due insieme finiti della stessa cardinalità ed $g : A \to B$ una funzione da A a B. Dimostrare che g è una funzione iniettiva se e solo se g è suriettiva.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 8 Febbraio 2013 Traccia A

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$3 \mid 4^n + 2.$$

Esercizio 2. Siano A e B due insieme finiti della stessa cardinalità ed $f : A \to B$ una funzione da A a B. Dimostrare che f è una funzione iniettiva se e solo se f è suriettiva.

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}$ la relazione
$$\mathcal{R} = \{(a, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid\ 14 \mid 4a + 10x\},$$
(ovvero $a\,\mathcal{R}\,x \iff 14 \mid 4a+10x$). Verificare che $\mathcal{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 4. Sia dato il gruppo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$. Stabilire l'ordine del gruppo e stabilire se il gruppo è ciclico. Inoltre, determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 5. Si consideri in S_7 la seguente permutazione
$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se h è pari o dispari.
(3) Calcolare l'ordine di h in S_7.
(4) Calcolare h^{-1}.
(5) Calcolare l'ordine degli elementi del sottogruppo H generato da h.

Esercizio 6. Dati i seguenti numeri complessi:
$$z_1 = \sqrt{5}i - 2,\ z_2 = 3 - 4i.$$

a) Determinare la parte reale e la parte immaginaria di z_1 e z_2.
b) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
c) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
d) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 8 Febbraio 2013 Traccia 1

Esercizio 1. Sia dato il gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$.

(1) Stabilire l'ordine del gruppo.
(2) Stabilire se il gruppo è ciclico
(3) Se il gruppo e' ciclico determinare tutti i generatori.

Esercizio 2. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = i - 5, \;\; z_2 = \sqrt{6} - 2i.$$

i) Determinare la parte reale e la parte complessa di z_1 e z_2.
ii) Scrivere in forma algebrica il coniugato di z_1 e z_2.
iii) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
iv) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ e $\dfrac{1}{z_1}$.

Esercizio 3. Siano A e B due insieme finiti della stessa cardinalità ed $h : A \to B$ una funzione da A a B. Dimostrare che h è una funzione iniettiva se e solo se h è suriettiva.

Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(c, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\;|\;\; 18 \mid 10c + 8z\},$$

(ovvero $c\,\mathcal{R}\,z \iff 18 \mid 10c+8z$). Verificare che $\mathcal{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 5. Dimostrare con il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$3 \mid 4^n + 2.$$

Esercizio 6. Si consideri in S_9 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se f è pari o dispari.
(3) Calcolare l'ordine di f in S_9.
(4) Calcolare f^{-1}.
(5) Calcolare esplicitamente gli elementi del sottogruppo F generato da f ed il loro ordine.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 25 Gennaio 2013 Traccia 3

Esercizio 1. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario. Dimostrare che se x e' un elemento invertibile allora x non e' un divisore dello zero.

Esercizio 2. Date tre proposizioni P, Q ed R, scrivere la tabella di verità di $(P \vee Q) \Longrightarrow R$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall v \in \mathbb{Z} \quad \exists\, u \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \qquad -11u^2t^2 - 2v = u^3t^3 - 2v.$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 3. Risolvere se possibile la seguente equazione Diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$533x + 377y = 13.$$

Esercizio 4. Sia assengato il reticolo D_{220} dei divisori di 220, ordinato per divisibilità.

(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{220}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{220}.
(3) Stabilire se il reticolo e' distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo e' di Boole.

Esercizio 5. In una classe ci sono 21 studenti.

i) In quanti modi distinti si possono scegliere 6 studenti?
ii) In quanti modi distinti si possono assegnare un 5 e un 7 a due studenti diversi?
iii) In quanti modi diversi si possono formare 3 gruppi di 7 studenti?

Esercizio 6. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (a, x), (t, z) \in A \qquad (a, x) * (t, z) = (3at, x + 2 + z).$$

a) Stabilire se l'operazione $*$ verifica la proprietà associativa e commutativa.
b) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.
c) Determinare, se esistono, gli elementi invertibili.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 25 Gennaio 2013 Traccia A

Esercizio 1. Sia assegnato il reticolo D_{140} dei divisori di 140, ordinato per divisibilità.

(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{140}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{140}.
(3) Stabilire se il reticolo e' distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo e' di Boole.

Esercizio 2. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario. Dimostrare che se x e' un elemento invertibile allora x non e' un divisore dello zero.

Esercizio 3. In una classe ci sono 15 studenti.

1) In quanti modi distinti si possono scegliere 5 studenti?
2) In quanti modi distinti si possono assegnare un 5 e un 7 a due studenti diversi?
3) In quanti modi diversi si possono formare 3 gruppi di 5 studenti?

Esercizio 4. Date tre proposizioni P, Q ed R, scrivere la tabella di verità di $(P \implies Q) \vee R$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists\, b \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \qquad 5zb^2 + a - 4bz^2 = a.$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 5. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, y), (s, t) \in A \qquad (x, y) * (s, t) = (4xs, y + t + 1).$$

a) Stabilire se l'operazione $*$ verifica la proprietà associativa e commutativa.
b) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.
c) Determinare, se esistono, gli elementi invertibili.

Esercizio 6. Risolvere se possibile la seguente equazione Diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$748x + 440y = 44.$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 25 Gennaio 2013 Traccia 1

Esercizio 1. Risolvere se possibile la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni
$$682x + 374y = 22.$$

Esercizio 2. In una classe ci sono 18 studenti.
a) In quanti modi distinti si possono scegliere 4 studenti?
b) In quanti modi distinti si possono assegnare un 3 e un 8 a due studenti diversi?
c) In quanti modi diversi si possono formare 3 gruppi di 6 studenti?

Esercizio 3. Date tre proposizioni P, Q ed R, scrivere la tabella di verità di $P \wedge (Q \Longrightarrow R)$. Inoltre, stabilire se la proposizione
$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \qquad x = 2yc^2 + x - 3cy^2.$$
è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che
$$\forall\ (a, b), (x, y) \in A \qquad (a, b) * (x, y) = (2ax, 3 + b + y).$$
(1) Stabilire se l'operazione $*$ verifica la proprietà associativa e commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.
(3) Determinare, se esistono, gli elementi invertibili.

Esercizio 5. Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario. Dimostrare che se a e' un elemento invertibile allora a non e' un divisore dello zero.

Esercizio 6. Sia assegato il reticolo D_{132} dei divisori di 132, ordinato per divisibilità.
(1) Tracciare il diagramma di Hasse di D_{132}.
(2) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di D_{132}.
(3) Stabilire se il reticolo e' distributivo.
(4) Stabilire se il reticolo e' di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 15 Gennaio 2013: Traccia A

Esercizio 1. Siano $E \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{C})$ e $F \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{C})$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & i & 0 \\ i & 2 & -i \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, EF e FE.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di E e di F.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di E e di F.

Esercizio 2. Scrivere la definizione di elemento invertibile in un anello commutativo unitario e dimostrare che ogni elemento in $(\mathbb{Z}_p^*, +, \cdot)$, con p primo, e' invertibile.

Esercizio 3. (1) Stabilire se esiste un albero con 17 vertici, dei quali 1 ha ordine 6 e gli altri hanno ordine 2. Se esiste un tale albero disegnare un grafico.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 17 vertici, dei quali 1 ha ordine 6 e gli altri hanno ordine 2. Se esiste un tale grafo disegnare un grafico.

Esercizio 4. Siano assegnate le seguenti leggi

$$g\colon \mathbb{Q} - \{2\} \to \mathbb{Q}, \qquad g(t) = \frac{1}{2-t} - 1$$

e

$$f\colon \mathbb{Q} - \{4\} \to \mathbb{Q} - \{2\} \qquad f(y) = \frac{3}{4}y - 1.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e f^{-1}, e le composizioni $g \circ f$ e $f \circ g$.

Esercizio 5. Verificare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{b_n\}_n = \begin{cases} b_0 = & 0 \\ b_1 = & 1 \\ b_n = & b_{n-1} + b_{n-2} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{a_n\}_n$ con

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \forall\ n \geq 0.$$

Esercizio 6. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 10x \equiv 20 \pmod{130} \\ 71x \equiv 75 \pmod{7} \\ 7x \equiv 14 \pmod{42}. \end{cases}$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 15 Gennaio 2013 Traccia 1

Esercizio 1. Siano assegnate le seguenti leggi

$$f : \mathbb{Q} - \{5\} \to \mathbb{Q} - \{0\}, \qquad f(n) = \frac{1}{5}n - 1$$

e

$$h : \mathbb{Q} - \{0\} \to \mathbb{Q} \qquad h(z) = \frac{3}{z} + 2.$$

Stabilire se sono funzioni, ed in tal caso se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse f^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ f$ e $f \circ h$.

Esercizio 2. Verificare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_1 = & 1 \\ a_n = & a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_n$ con

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \qquad \forall\ n \geq 0.$$

Esercizio 3. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 10x \equiv 50 \pmod{70} \\ 11x \equiv 22 \pmod{66} \\ 131x \equiv 132 \pmod{13}. \end{cases}$$

Esercizio 4. Scrivere la definizione di elemento invertibile in un anello commutativo unitario e dimostrare che ogni elemento in $(\mathbb{Z}_p^*, +, \cdot)$, con p primo, e' invertibile.

Esercizio 5. Siano $A \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{C})$ e $C \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & -i \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AC e CA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di A e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di C.

Esercizio 6. (1) Stabilire se esiste un albero con 13 vertici, dei quali 1 ha ordine 6 e gli altri hanno ordine 2. Se esiste un tale albero disegnare un grafico.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 13 vertici, dei quali 1 ha ordine 6 e gli altri hanno ordine 2. Se esiste un tale grafo disegnare un grafico.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 19 Novembre 2012

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{i=-1}^{n+1}(3\,i+1) = \frac{3}{2}(n+1)(n+2)+n.$$

Esercizio 2. Date le seguenti funzioni

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \qquad\qquad g(n) = \frac{1-n}{2n+2},$$

e

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad\qquad f(z) = \frac{7}{5}z + 11$$

stabilire se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse f^{-1} e g^{-1}, e le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 3. Risolvere se possibile la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$396x + 156y = 12.$$

Esercizio 4. a) Scrivere la definizione di relazione di ordine parziale su un insieme.
b) Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;\mid\; cd \geq 0\},$$

(ovvero $c\,\mathcal{R}\,d \iff$ il prodotto cd e' maggiore o uguale a zero). Stabilire se $\mathcal{R}$ e' riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, d'ordine, d'equivalenza.

Esercizio 5. Scrivere la definizione di gruppo e di gruppo abeliano. Dare un esempio di entrambe le definizioni.

Esercizio 6. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 4i-1, \;\; z_2 = 3-\sqrt{3}i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 4 Settembre 2012

Esercizio 1. Date le seguenti funzioni

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{2}x - 1$$

e

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = 2x^2 + 1,$$

stabilire se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse f^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ f$ e $f \circ h$.

Esercizio 2. Date due proposizioni P e Q scrivere la tabella di verità di $P \vee \overline{Q}$, dove $\overline{Q}$ indica la negazione di Q. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x^2 = n^2 + 1$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 3. Si considerino 3 studenti di Informatica, 4 studenti di Matematica e 5 studenti di Fisica. Gli studenti di Informatica e Matematica sono tutti maschi, gli studenti di Fisica sono 3 maschi e due femmine.

a) In quanti modi diversi si puo' formare un comitato di 4 studenti?
b) In quanti modi diversi si puo' formare un comitato di 3 studenti, con un rappresentante per ogni materia?
c) In quanti modi diversi si puo' formare un comitato di 3 studenti, con un rappresentante per ogni materia ed almeno una donna?

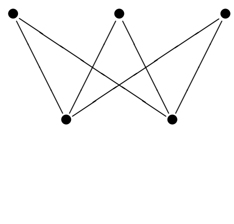
Esercizio 4. Scrivere la definizione di anello commutativo unitario e descrivere almeno un esempio.

Esercizio 5. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere g come prodotto di cicli disgiunti e stabilire se g e' pari o dispari.
(2) Calcolare g^{-1} e l'ordine di g in S_8.
(3) Calcolare l'ordine del sottogruppo H generato da g e scrivere esplicitamente tutti gli elementi.
(4) Calcolare l'ordine degli elementi del sottogruppo H.

Esercizio 6. Sia $\mathcal{G}$ il grafo seguente.



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ e' planare e determinare la valenza dei sui vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.

(3) Stabilire se il reticolo R e' di Boole.

Soluzione 6. Quale e' la definizione di complemento? a parte i complementi banali ovvero g ed e. Si ha che f e d sono complementari. a, b, c non hanno complemento.

Quale e' la definizione di reticolo distributivo? Il reticolo non e' distributivo perche' contiene un sottoreticolo isomorfo al reticolo pentagonale N 5. Quale e'? Oppure si poteva applicare la definizione di distributivita'? a quali vertici? Quale e' la definizione di reticolo di Boole? Il reticolo non e' di Boole perche' non distributivo. Oppure esistono elementi senza complemento? Quindi?

Soluzione 4. Quale e' la definizione di elemento invertibile? e di divisore dello zero? Un elemento puo' essere invertibile e divisore dello zero contemporaneamente? Un elemento ammette piu' di un inverso?

Abbiamo che $21 = 3 * 7$.

Quindi : $[3]_{21}, [6]_{21}, [7]_{21}, [9]_{21}, [12]_{21}, [14]_{21}, [15]_{21}, [18]_{21}$.

sono divisori dello zero (ovviamenti diversi da zero!!!) Perche' sono loro? Come li abbiamo determinati?

Gli invertibili $[1]_{21}, [2]_{21}, [4]_{21}, [5]_{21}, [8]_{21}, [10]_{21}, [11]_{21}, [13]_{21}, [16]_{21}, [17]_{21}, [19]_{21}, [20]_{21}$.

(Solo per facilitare i conti, controlliamo che sono congrui ad 1 modulo 18 i seguenti numeri 22,43,64,85, 106,127,148, 169, 190, 211 , 399=21*19....)

Quindi $[1]_{21}$ inverso se stesso,

$[2]_{21}$ ha inverso $[11]_{21}$ (22) e viceversa

$[4]_{21}$ ha inverso $[16]_{21}$ (64)

$[5]_{21}$ ha inverso $[17]_{21}$ (85)

$[8]_{21}$ ha inverso $[8]_{21}$ (64)

$[10]_{21}$ ha inverso $[19]_{21}$ (190)

$[13]_{21}$ ha inverso $[13]_{21}$ (169) $[20]_{21}$ ha inverso $[20]_{21}$ (400=1+399

Esercizio. 5 Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \sqrt{2} - 3i, \ z_2 = 4i - 2.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\frac{1}{z_2}$ e $\frac{z_2}{z_1}$.

Soluzione 5. quale e' la definizione di modulo?

$|z_1| = \sqrt{2+9} = \sqrt{11}, \qquad |z_2| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Quale e' la definizione di coniugato? $\overline{z_1} = \sqrt{2} + 3i, \qquad \overline{z_2} = -2 - 4i$

Quale e' la regola per il prodotto?

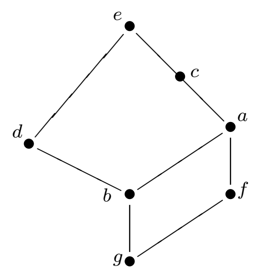
$z_1 z_2 = (\sqrt{2} - 3i)(4i - 2) = (-2\sqrt{2} + 12) + i(4\sqrt{(2)} + 6)$.

Come si calcola l'inverso?

$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{4i-2} = \frac{-2-4i}{20} = \frac{-1}{10} - \frac{1}{5}i$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{4i-2}{\sqrt{2}-3i} = \frac{(\sqrt{2}+3i)(4i-2)}{11} = \frac{(-2\sqrt{2}-12) + i(4\sqrt{(2)}-6)}{11}$.

Esercizio. 6 Sia assegnato il reticolo $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e la relazione $\leq$ e' descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R e' distributivo.

ATTENZIONE: Qui di seguito riportiamo un accenno alle soluzione degli esercizi, spesso mancano dettagl spesso le risposte non sono motivate o non contengono tutti i dettagli necessari. Piu' che soluzioni vere e proprie, sono da considerarsi linee guide per lo svolgimento. Pertanto, non sono sufficienti ad avere il massimo punteggio.

Inoltre, Sono state inserite come EXTRA per questo appello, in via del tutto eccezionale

Esercizio. 1 Assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; | \;\; 15 \mid 4b + 11a\},$$

(ovvero $a \,\mathcal{R}\, b \iff 15 \mid 4b + 11a$), verificare che $\mathcal{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e scrivere la classe di equivalenza di 0.

Soluzione 1. Quale e' la definizione di relazione di equivalenza su un insieme? Quali sono le proprieta' che deve soddisfare la relazione?

La relazione e' riflessiva infatti, per ogni $a \in A$ si ha $a \,\mathcal{R}\, a$ dato che $15 \mid 4a+11a = 15a$

La relazione e' simmetrica infatti se $a \,\mathcal{R}\, b$ allora $15 \mid 4b + 11a$. Inoltre, per ogni a e b si ha che $15 \mid 15b + 15a$. Quindi $15 \mid 15b + 15a - 4b - 11a = 4a + 11b$. Perche' possiamo fare la somma? Ne segue che $b \,\mathcal{R}\, a$.

La relazione e' transitiva, infatti supponiamo $a \,\mathcal{R}\, b$ e $b \,\mathcal{R}\, c$.

Dato che $a \,\mathcal{R}\, b$ allora si ha $15 \mid 4b + 11a$.

Da $b \,\mathcal{R}\, c$ si ha che $15 \mid 4c + 11b$

Quindi, facendo la somma si ha che $15 \mid 4b + 11a + 4c + 11b$. Di nuovo, siamo sicuri che 15 divide la somma? Quindi $15 \mid 11a + 4c$ e quindi $a \,\mathcal{R}\, c$.

La classe di zero e': $a \,\mathcal{R}\, 0 \iff 15 \mid 11a$ ovvero i multipli di 15.

Esercizio. 2 Calcolare il massimo comun divisore tra i numeri 5775 e 1120 ed esprimerlo come combinazione di 5775 e 1120.

Soluzione 2. Osserviamo che $5775 = 5^2 * 3 * 11 * 7$

$1120 = 5 * 2^5 * 7$

Quindi MCD= 35=$5 * 7$

Procediamo comunque con l'algoritmo dele divisioni per determinare il MCD.

$5775 = 5 * 1120 + 175$

$1120 = 175 * 6 + 70$

$175 = 70 * 2 + 35$

$70 = 35 * 2$. Quindi 35 e' effettivamente MCD. Perche'? Quale e' l'ultimo resto non nullo?

Inoltre, $35 = 175 - 70 * 2$

$70 = 1120 - 6 * 175$

$35 = 175 - 2 * 1120 + 12 * 175 = 13 * 175 - 2 * 1120$

$175 = 5775 - 5 * 1120$ quindi

$35 = 13 * 5775 - 65 * 1120 - 2 * 1120 = 13 * 5775 - 67 * 1120 = 75075 - 75040$

Esercizio. 3 Sia A un insieme finito di cardinalita' n (ovvero A possiede n elementi). Quale e' la cardinalita' dell'insieme $\mathcal{P}(A)$ della parti di A? Dare una dimostrazione della risposta.

Soluzione 3. Se $\mid A \mid= n$, allora $\mid \mathcal{P}(A) \mid= 2^n$. A lezione sono state date tre dimostrazioni. Ne bastava scrivere una corretta. Vedere un qualsiasi libro di testo.

Esercizio. 4 Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$. Per ogni elemento invertibile determinarne l'inverso

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 2 Luglio 2012

Esercizio 1. Assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 15 \mid 4b + 11a\},$$

(ovvero $a \mathcal{R} b \iff 15 \mid 4b + 11a$), verificare che $\mathcal{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 2. Calcolare il massimo comun divisore tra i numeri 5775 e 1120 ed esprimerlo come combinazione di 5775 e 1120.

Esercizio 3. Sia A un insieme finito di cardinalita' n (ovvero A possiede n elementi). Quale e' la cardinalita' dell'insieme $\mathcal{P}(A)$ della parti di A? Dare una dimostrazione della risposta.

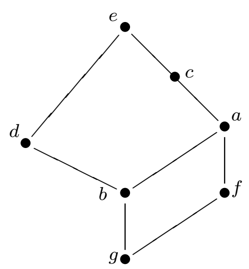
Esercizio 4. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$. Per ogni elemento invertibile determinarne l'inverso.

Esercizio 5. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \sqrt{2} - 3i, \;\; z_2 = 4i - 2.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e la relazione $\leq$ e' descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R e' distributivo.
(3) Stabilire se il reticolo R e' di Boole.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 12 Aprile 2012

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{3}{(2+k)} \frac{1}{(3+k)} = \frac{n+1}{n+4} + \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 10x \equiv 9 \pmod{7} \\ 7x \equiv 14 \pmod{35} \\ 10x \equiv 10 \pmod{30}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri in S_7 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

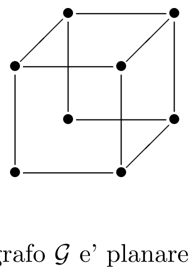
(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti e stabilire se f e' pari o dispari.
(2) Calcolare f^{-1} e l'ordine di f in S_7.
(3) Calcolare l'ordine del sottogruppo H generato da f e scrivere esplicitamente tutti gli elementi.
(4) Calcolare l'ordine degli elementi del sottogruppo H.

Esercizio 4. Siano $A \in Mat_{2\times 5}(\mathbb{C})$ e $B \in Mat_{5\times 2}(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & i & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-4}{3} \\ 1 & i \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare se possibile AB, BB e AA.
(2) Calcolare se possibile il determinante di A, B e AB.
(3) Calcolare se possibile le matrice inverse di A e AB.

Esercizio 5. Sia $\mathcal{G}$ il grafo seguente.



(1) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ e' planare e determinare la valenza dei sui vertici.
(2) Stabilire se il grafo $\mathcal{G}$ ammette cammini euleriani e/o cammini hamiltoniani.
(3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e le stesse valenze.

(1) Stabilire se esiste un albero con 8 vertici, dei quali 2 di ordine 3, 4 di ordine 2 e i restanti di ordine 1. Se esiste disegnare un grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 8 vertici, dei quali 2 di ordine 3, 4 di ordine 2 e i restanti di ordine 1.

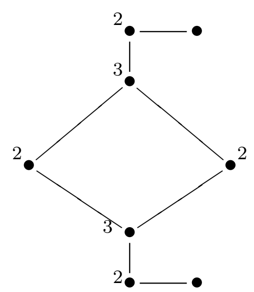
Soluzione 6. Abbiamo 2 veritici ordine 3, 4 ordine 2 e quindi 2 di ordine 1. I vertici dispari sono in numeri pari, ok. Perche' faccimao questa verifica? se non fosse stata soddisfatta? Nei grafi abbiamo

$2|l| = \sum_v d(v) = 2 * 3 + 4 * 2 + 2 * 1 = 6 + 8 + 2 = 16.$

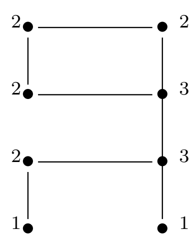
Quindi $|l| = 8$.

Risposta 1) Quindi un tale albero non esiste perche un tale albero dovrebbe avere $|L| = |V| - 1 = 7$. giusto?

Risposta 2) Esistono tali grafi ad esempio



OPPURE



Perche' abbiamo fatto questa riduzione? Controllare le ipotesi del teorema cinese dei resti, (non potevamo applicarlo subito, perche'?)

Applichiamo il teorema cinese dei resti, cosa dice? cosa dobbiamo fare?

Studiamo le singole congruenze (notare ora non e' piu' un sistema, niente parentesi graffe!!)

- $30x \equiv 2 \pmod{11}$ ovvero $8x \equiv 2 \pmod{11}$; inoltre $MCD(8,11) = 1 \mid 2$, unica soluzione modulo 11 che e' 3.

- $66x \equiv 3 \pmod{5}$ ovvero $x \equiv 3 \pmod{5}$ unica soluzione modulo 5 e' 3 (perche'?)

-$55x \equiv 1 \pmod{6}$, ovvero $x \equiv 1 \pmod{6}$ unica soluzione modulo 6 e' 1

$11 * 6 * 5 = 330$, quindi teorema cinese dei resti, soluzione unica modulo 330 e'

$3 * 30 + 66 * 3 + 55 * 1 = 90 + 198 + 55 = 288 + 55 = 343 \equiv 13 (\mathrm{mod}\, 330)$.

Perche' e' unica?

Esercizio. 3 Quanti sono i numeri primi, finiti o infiniti? Dare una dimostrazione della risposta.

Soluzione 3. Per fortuna sono infiniti, come dimostrato da Euclide. Vedere un qualsiasi libro, ad esempio pag 84 del libro Matematica Discreta, Piacentini-Cattaneo.

Esercizio. 4 Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \sqrt{2}i - 1, \;\; z_2 = 5 - 5i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Soluzione 4. quale e' la definizione di modulo?

$|z_1| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}, \qquad |z_2| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

Quale e' la definizione di coniugato? $\overline{z_1} = -\sqrt{2}i - 1, \qquad \overline{z_2} = 5 + 5i$

Quale e' la regola per il prodotto? $z_1 z_2 = (\sqrt{2}i - 1)(5 - 5i) = -5 + 5\sqrt{(2)} + i(5\sqrt{2} + 5)$,

$\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{5-5i} = \dfrac{5+5i}{50} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{i}{10}$

$\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{5-5i}{\sqrt{2}i - 1} = \dfrac{(-\sqrt{2}i - 1)(5-5i)}{3} = \dfrac{-5 - 5\sqrt{2} + i(-5\sqrt{2} + 5)}{3}$.

Esercizio. 5 Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$. Per ogni elemento invertibile determinarne l'inverso.

Soluzione 5. Quale e' la definizione di elemento invertibile? e di divisore dello zero? Un elemento puo' essere invertibile e divisore dello zero contemporaneamente?

Abbiamo che $18 = 3^2 * 2$.

Quindi : $[2]_{18}, [3]_{18}, [4]_{18}, [6]_{18}, [8]_{18}, [9]_{18}, [10]_{18}, [12]_{18}, [14]_{18}, [15]_{18}, [16]_{18}$.

sono divisori dello zero (ovviamenti diversi da zero!!!) Perche' sono loro? Come li abbiamo determinati?

Gli invertibili sono $[1]_{18}, [5]_{18}, [7]_{18}, [11]_{18}, [13]_{18}, [17]_{18}$. perche?

(Solo per facilitare i conti, controlliamo che sono congrui ad 1 modulo 18 i seguenti numeri 1,19,37,55,73, 91,109,127....)

INVERSI:

$[1]_{18}$ inverso se stesso,

$[5]_{18}$ ha inverso $[11]_{18}$ (55)

$[7]_{18}$ ha inverso $[13]_{18}$ (91)

$[11]_{18}$ ha inverso $[5]_{18}$

$[13]_{18}$ ha inverso $[7]_{18}$

$[17]_{18}$ ha inverso $[17]_{18}$ (obbligato ad essere inverso di se stesso) Infatti 17*17=289=1+288=1+18*16.

Esercizio. 6

ATTENZIONE: Qui di seguito riportiamo un accenno alle soluzione degli esercizi, solo un accenno mancano dettagli. Contengono tutte le risposte anche se spesso non motivate o senza tutti i dettagli necessari. Piu' che soluzioni vere e proprie, sono da considerarsi come linee guide per lo svolgimento. Non sono sufficienti a prendere il massimo punteggio dell'esercizio, proprio perché non sono complete.

Inoltre, Sono state inserite come EXTRA per questo appello, in via del tutto eccezionale

Esercizio. 1 Date le seguenti funzioni

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad g(n) = \sqrt{n} - 4$$

e

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = x^3 + 5,$$

stabilire se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Soluzione 1. Per quanto riguarda

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad g(n) = \sqrt{n} - 4$$

g non e' suriettiva, ad esempio perche' assume solo valori maggiori di -4 (quindi $g^{-1}(-10) =$ insieme vuoto. Quindi g non e' suriettiva. (quale e' la definizione?)

g e' iniettiva in quanto soddisfa la definizione di g iniettiva (che e'?): $\sqrt{n}-4 = \sqrt{m}-4$ se e solo se $\sqrt{n} = \sqrt{m}$ se e solo se $n = \pm m$, ma il dominio di g sono i numeri naturali e quindi $n = \pm m$ se e solo se n=m quindi g e' iniettiva.

g non e' biettiva, perche' non e' suriettiva (quale e' la definizione di funzione biettiva?). Quindi non si puo' calcolare g^{-1}.

Per quanto riguarda h

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = x^3 + 5,$$

h e' iniettiva: $x^3 + 5 = y^3 + 5$ se e solo se $x^3 = y^3$ se e solo se $y = x$.

h e' suriettiva, infatti per ogni y fissato in $\mathbb{R}$, l'equazione $y = x^3 + 5$ ha soluzione: $x^3 = y - 5$, ovvero $x = \sqrt[3]{y-5}$. Quindi l'insieme contro immagine di ogni elemento del codominio $\mathbb{R}$ e' diverso dall'insieme vuoto. Quindi h e' suriettiva.

Quindi h e' biettiva (perche'?) e l'inversa e' data dalla funzione

$$h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5},$$

Infine $g \circ h$ non si puo' calcolare in quanto g e' definita solo sui naturali (ad esempio dovremmo fare radici di cose negative)

$h \circ g$ si puo' calcolare:

$$h \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \to R, \qquad h(g(n)) = h(\sqrt{n} - 4) = (\sqrt{n} - 4)^3 + 5$$

Esercizio. 2 Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 3x \equiv 6 \pmod{33} \\ 7x \equiv 21 \pmod{5} \\ 5x \equiv 5 \pmod{30}. \end{cases}$$

Soluzione 2. Riduciamo il sistema al seguente sistema equivalente,

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

dividendo la prima per 3, la seconda per 7 e la terza congruenza per 5. Perche' lo possiamo fare: ovvero otteniamo un sistema equivalente? Si, perche'?

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 13 Febbraio 2012

Esercizio 1. Date le seguenti funzioni

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad g(n) = \sqrt{n} - 4$$

e

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = x^3 + 5,$$

stabilire se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1}, e le composizioni $h \circ g$ e $g \circ h$.

Esercizio 2. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 3x \equiv 6 \pmod{33} \\ 7x \equiv 21 \pmod{5} \\ 5x \equiv 5 \pmod{30}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Quanti sono i numeri primi, finiti o infiniti? Dare una dimostrazione della risposta.

Esercizio 4. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \sqrt{2}i - 1, \; z_2 = 5 - 5i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi z_1z_2, $\dfrac{1}{z_2}$ e $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Esercizio 5. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$. Per ogni elemento invertibile determinarne l'inverso.

Esercizio 6. (1) Stabilire se esiste un albero con 8 vertici, dei quali 2 di ordine 3, 4 di ordine 2 e i restanti di ordine 1. Se esiste disegnare un grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 8 vertici, dei quali 2 di ordine 3, 4 di ordine 2 e i restanti di ordine 1.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 30 Gennaio 2012

Esercizio 1. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=-1}^{n} (6k-2) = 3n^2 + n - 10.$$

Esercizio 2. Assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ 12 \mid 7b + 5a\},$$

(ovvero $a \,\mathcal{R}\, b \iff 12 \mid 7b + 5a$), verificare che $\mathcal{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 3. Date tre proposizioni P, Q, R scrivere la tabella di verità di $(P \vee Q) \wedge R$.
Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\exists\, a \in \mathbb{N} \ \text{ tale che } \ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \exists\, y \in \mathbb{R} \qquad a = x^2 - y^3$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 4. Si consideri in S_9 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 4 & 3 & 8 & 6 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se f e' pari o dispari.
(3) Calcolare f^{-1} e l'ordine di f in S_9.
(4) Calcolare l'ordine del sottogruppo H generato da f e scrivere esplicitamente tutti gli elementi.
(5) Calcolare l'ordine degli elementi del sottogruppo H.

Esercizio 5. Siano $A \in Mat_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $B \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare se possibile AB e $A^2 = AA$.
(2) Calcolare se possibile il determinante di A, B e AB.
(3) Calcolare se possibile le matrice inverse di A e AB.

Esercizio 6. Scrivere la definizione di cammino euleriano e di circuito euleriano in un grafo. Descrivere un esempio.

PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 16 Gennaio 2012

Esercizio 1. Calcolare il massimo comun divisore tra i numeri 4080 e 225 ed esprimerlo come combinazione di 4080 e 225.

Esercizio 2. Ci sono 6 amici.

a) In quanti modi diversi si possono formare delle coppie.
b) In quanti modi diversi si possono regalare un libro, una penna e un cappello (a persone diverse).
c) In quanti modi diversi si possono formare 2 gruppi di 3 amici?
d) In quanti modi diversi si possono formare 3 gruppi di 2 amici?

Esercizio 3. Verificare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & \frac{1}{3} \\ a_n = & a_{n-1} + n(n+1) + \frac{1}{3} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_n$ con $b_n = \frac{1}{3}(n+1)^3$, per ogni $n \geq 0$.

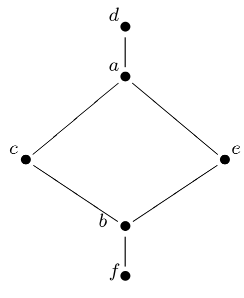
Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}_9$ la seguente operazione $* : \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$, tale che

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_9 \qquad x * y = x + y - [5]_9.$$

(1) Verificare che l'operazione e' associativa e commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Z}_9, *)$.
(3) Determinare, se esiste, l'inverso di ogni elemento in $(\mathbb{Z}_9, *)$.
(4) Verificare che $(\mathbb{Z}_9, *)$ e' un gruppo ciclico, perche' generato da $[3]_9$.

Esercizio 5. Scrivere la definizione di gruppo abeliano e dare due esempi.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f\}$ e la relazione $\leq$ e' descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R e' distributivo.
(3) Stabilire se il reticolo R e' di Boole.