Definizione 1. Sia A insieme, naturalmente non vuoto, $\mathcal{R}$ relazione su A. Si dice che $\mathcal{R}$ è una *relazione di equivalenza* se è **riflessiva, simmetrica e transitiva**.

Esercizio 1. Sono di equivalenza le seguenti relazioni:
(1) $\mathcal{R}_5 = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\}$ su $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$
(2) $\mathcal{R}_6 = \{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,; 2|\ (n-m)\}$
(3) $\mathcal{R}_7 = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ ;\ a^2 = b^2\}$
(4) $\mathcal{R}_8 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*\ ;\ x\cdot y > 0\}$.

Esercizio 2. Siano A un insieme non vuoto, $f : A \to B$ un'applicazione. La relazione $\mathcal{R}_f$ così definita:

$$\forall x,y \in A \quad (x,y) \in \mathcal{R}_f \Leftrightarrow\ f(x) = f(y)$$

è una relazione di equivalenza.

Definizione 2. Siano A un insieme, $\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\}$ un sottoinsieme dell'insieme $\mathscr{P}(A)$ delle parti di A. Si dice unione degli degli elementi di $\mathcal{A}$ o unione degli A_i, $i \in I$, l'insieme

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{a \in A; \exists i \in I \text{ tale che } a \in A_i\}$$

Osservazione 1. Ovviamente si ha

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A.$$

Definizione 3. Siano A un insieme, $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A, $a \in A$. Si dice *classe di equivalenza di a* il sottoinsieme di A:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A; (a,x) \in \mathcal{R}\}.$$

Esempio 1. Considerata sull'insieme $A = \{a,b,c,d\}$ la relazione di equivalenza

$$\mathcal{R} = \{(a,a)(b,b),(c,c)(d,d),(a,b)(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$$

si ha: $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} = [c]_{\mathcal{R}} = \{a,b,c\}$; $[d]_{\mathcal{R}} = \{d\}$.

Esempio 2. Sia Σ l'insieme delle rette di un piano fissato e $\mathcal{E}$ la relazione su Σ così definita: per ogni $r,s \in \Sigma$, $(r,s) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r$ e s sono parallele. Sapendo che ogni retta è parallela a sè stessa, si si vede subito che $\mathcal{E}$ è una relazione di equivalenza. Inoltre fissata una retta r, la sua classe di equivalenza è

$$[r]_{\mathcal{E}} = \text{insieme di tutte le rette parallele ad r.}$$

Esempio 3. Nella stessa situazione dell'Esempio 2, la perpendicolarità tra rette non è una relazione di equivalenza: infatti non è riflessiva ne' transitiva.

Proposizione 1. *Siano A un insieme, $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A. Allora si ha:*
(1) $(\forall a \in A)\ ([a]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset)$
(2) $(\forall a,b \in A)\ ((a,b) \notin \mathcal{R} \iff [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset)$
(3) $(\forall a,b \in A)\ ((a,b) \in \mathcal{R} \iff [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}})$
(4) $\bigcup_{a\in A}[a]_{\mathcal{R}} = A$.

Dimostrazione. (1) discende subito dalla riflessività: infatti

$$\forall a \in A, \quad (a,a) \in \mathcal{R} \iff a \in [a]_{\mathcal{R}}$$

Per provare (2) si considerino $a,b \in A$ in modo che $(a,b) \notin \mathcal{R}$. Usando la tecnica di dimostrazione per assurdo, si suppone che esista $c \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$. Allora, per la definizione di classe di equivalenza, risulterebbe: $(a,c) \in \mathcal{R}\ \wedge\ (b,c) \in \mathcal{R}$ e quindi, per la simmetria di $\mathcal{R}$ $(a,c) \in \mathcal{R} \wedge (c,b) \in \mathcal{R}$ da cui, per la transitività di $\mathcal{R}$, $(a,b) \in \mathcal{R}$, in contraddizione con $(a,b) \notin \mathcal{R}$.

Viceversa, se $[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} = \emptyset$, non può essere $(a,b) \in \mathcal{R}$, altrimenti $a \in [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R}$ (si osservi che si è usata la tecnica di dimostrazione per contrapposizione).
Per dimostrare (3), si considerino $a, b \in A$, con $(a,b) \in \mathcal{R}$. Poichè si deve provare che i due insiemi $[a]_\mathcal{R}$ e $[b]_\mathcal{R}$ coincidono, si dimostrano le due inclusioni:

$$[a]_\mathcal{R} \subseteq [b]_\mathcal{R} \ \wedge \ [b]_\mathcal{R} \subseteq [a]_\mathcal{R}.$$

Sia $x \in [a]_\mathcal{R}$; questo vuol dire che $(a,x) \in \mathcal{R}$. Però anche $(a,b) \in \mathcal{R}$ e quindi, per la simmetria, $(b,a) \in \mathcal{R}$. Per la transitività di $\mathcal{R}$, $(b,x) \in \mathcal{R}$ e ciò significa che $x \in [b]_\mathcal{R}$, pertanto $[a]_\mathcal{R} \subseteq [b]_\mathcal{R}$. L'inclusione $[b]_\mathcal{R} \subseteq [a]_\mathcal{R}$ si prova nella stessa maniera.
Viceversa, se $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$, allora $a \in [a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$ e quindi $(a,b) \in \mathcal{R}$.
Infine per l'Osservazione 1, si ha $\bigcup_{a\in A} [a]_\mathcal{R} \subseteq A$. Per provare l'altra inclusione, si fissi $x \in A$; per (1), $x \in [x]_\mathcal{R}$ e quindi $x \in \bigcup_{a\in A} [a]_\mathcal{R}$. Pertanto le due inclusioni sono verificate e quindi vale (4).

Definizione 4. Siano A un insieme, $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A. L'insieme

$$A/\mathcal{R} = \{[a]_\mathcal{R} ; a \in A\}$$

si chiama *insieme quoziente di A per $\mathcal{R}$*.

Definizione 5. Siano A un insieme, $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in I\}$ un sottoinsieme (non vuoto) dell'insieme $\mathscr{P}(A)$ delle parti di A. Si dice che $\mathcal{A}$ è una *partizione* se

- $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$
- $\forall i, j \in I,\ i \neq j,\ A_j \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

Osservazione 2. Sia A un insieme, $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A. Per la Proposizione 1, sicuramente l'insieme quoziente di A rispetto ad una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ è una partizione. Si può verificare anche il viceversa: sia $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in I\}$ una partizione sull'insieme A. Si definisce la relazione $\mathcal{R}$ nel modo che segue:

$$(a,b) \in \mathcal{R} \iff \exists i \in I \text{ tale che } a, b \in A_i.$$

Si prova che $\mathcal{R}$ è di equivalenza e che $A/\mathcal{R} = \mathcal{A}$.

Esercizio 3. È assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ ; \ 5 \mid (4x + y)\}.$$

(1) Verificare che $\mathcal{R}$ è di equivalenza
(2) determinare la classe di equivalenza di 2.

SOLUZIONE

1.(a) Si ricorda che se a, b, n sono numeri interi, $n \neq 0$ allora vale la proprietà:

$$\big(n \mid a \ \wedge \ n \mid b\big) \ \Rightarrow \ n \mid (a \pm \ b).$$

- Poichè per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $5 \mid (4x + x)$, certamente $(x,x) \in \mathcal{R}$ e quindi la relazione è <u>riflessiva</u>.
- Sia $(x,y) \in \mathcal{R}$, ovvero $5 \mid (4x + y)$. Allora, poichè $5 \mid (5x + 5y)$ si ha

  $$5 \mid (4x + y - (5x + 5y)) \ \Rightarrow \ 5 \mid (-x - 4y) \ \Rightarrow \ 5 \mid (4y + x).$$

  Pertanto $(y,x) \in \mathcal{R}$, cioè $\mathcal{R}$ è <u>simmetrica</u>.
- Siano $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,z) \in \mathcal{R}$. Quindi

  $$\big(5 \mid (4x + y) \wedge 5 \mid (4y + z)\big) \ \Rightarrow \ 5 \mid (4x + y + 4y + z)$$

  $$\Rightarrow \ 5 \mid (4x + 5y + z) \ \Rightarrow \ 5 \mid \big((4x + 5y + z) - 5y\big) \ \Rightarrow \ 5 \mid (4x + z),$$

  ovvero $(x,z) \in \mathcal{R}$. Si è pertanto provato che $\mathcal{R}$ <u>transitiva</u> e quindi la relazione è di equivalenza.

1.(b) $x \in [2] \;\Leftrightarrow\; (2,x) \in \mathcal{R} \;\Leftrightarrow\; 5 \mid (8+x) \;\Leftrightarrow\; (\exists h \in \mathbb{Z}$ tale che $x = -8+5h)$
$\Leftrightarrow\; (\exists k \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 2+5k)$. Quindi

$$[2] = \{2+5k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$