Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 1

Esercizio 1.1

Dimostrare che per ogni terna di sottoinsiemi $A, B, C \subseteq U$ valgono le seguenti proprietà (dette distributive):

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Soluzione
1) Per mostrare che i due insiemi $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ coincidono, dimostriamo la "doppia inclusione", cioè che
$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e che $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Dimostriamo che $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Per far questo consideriamo un generico $x \in A \cup (B \cap C)$: allora $x \in A$ oppure
$\begin{cases} x \in B \\ x \in C. \end{cases}$
Sia $x \in A$: poichè $A \subseteq A \cup B$ e $A \subseteq (A \cup C) \Longrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Sia $x \notin A$: allora $\begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{cases} \Longrightarrow x \in (\ A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Mostriamo ora l'inclusione inversa, cioè che $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.
Sia $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Allora $\begin{cases} y \in (A \cup B) \\ y \in (A \cup C). \end{cases}$
Si possono avere due casi: $y \in A$ oppure $y \notin A$.
Se $y \in A \Longrightarrow y \in A \cup (B \cap C)$.
Se $y \notin A \Longrightarrow \begin{cases} y \in B \\ y \in C \end{cases}$, da cui segue comunque che $y \in A \cup (B \cap C)$ e quindi la tesi è dimostrata.

2) Mostriamo ora la seconda uguaglianza mediante la doppia inclusione, cioè mostriamo che
$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.
Sia $x \in A \cap (B \cup C)$, allora $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \cup C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases}$ e quindi, per definizione, $seguechex \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Viceversa, sia $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Allora $y \in A \cap B$ oppure $y \in A \cap C$. In ogni caso $y \in A$ ed inoltre $y \in B$ oppure $y \in C \Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$.
Si è così dimostrato che $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ e quindi segue la tesi.

Esercizio 1.2.1

Verificare che, per ogni coppia di sottoinsiemi $A, B \subseteq U$, si ha:
$A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

Soluzione
Sia $A \subseteq B$. Per definizione di sottoinsieme si ha che $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ e quindi, ancora per definizione, $A \cup B = \{x \in U \ |x \in A \text{ oppure } x \in B\} = \{x \in U \ |x \in B\} = B$.
Viceversa sia $A \cup B = B$. Per assurdo supponiamo che $A \not\subseteq B$. Allora $\exists a \in A$, $a \notin B$ e quindi $A \cup B \not\supseteq B$ che è contrario all'ipotesi.

Esercizio 1.2.2

Verificare che, per ogni coppia di sottoinsiemi $A, B \subseteq U$, si ha:
$A \cap B = A \iff A \subseteq B$.

Soluzione
Sia $A \cap B = A$: gli elementi comuni ad A e a B sono tutti e soli gli elementi di A, quindi per definizione $A \subseteq B$.
Viceversa, sia $A \subseteq B$. Allora $A \cap B = \{x \in A \ |x \in B\} = A$.

Esercizio 1.2.3

Verificare che, per ogni terna di sottoinsiemi $A, B, C \subseteq U$, si ha:
$A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$ (Proprietà di assorbimento).

Soluzione
Verifichiamo che $A \cap (A \cup B) = A$.
Osserviamo che $A \subseteq A$ ed anche $A \subseteq A \cup B$ quindi $A \subseteq A \cap (A \cup B)$. Inoltre $A \cap (A \cup B) \subseteq A$ (e anche $A \cap (A \cup B) \subseteq A \cup B$) da cui segue la tesi.
Verifichiamo ora che $A \cup (A \cap B) = A$.
Per definizione $A \subseteq A \cup (A \cap B)$. Inoltre $A \subseteq A$ e $(A \cap B) \subseteq A$ da cui segue $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.
Essendo verificata la doppia inclusione segue la tesi.

Esercizio

Dimostrare che, dati due insiemi A e B, e detti A' e B' i rispettivi insiemi complementari, vale l'uguaglianza $(A \cup B)' = A' \cap B'$.(legge di De Morgan, pag 6).

Soluzione
Mostriamo che $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ e che $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$.
Sia $x \in (A \cup B)'$; allora $x \in U$, ma $x \notin A \cup B$ per cui x non appartiene ad A nè a B. Ne segue che x appartiene ad A' e anche a B' e quindi ad $A' \cap B'$.

Viceversa se $y \in A' \cap B'$: si ha che y appartiene ad entrambi gli insiemi A' e B'. Pertanto $y \in U$, ma y non appartiene ad A nè a B per cui $y \in (A \cup B)'$.

Esercizio 1.3

Provare che $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Soluzione
Mostriamo che $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ e che $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Sia $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, cioè $\begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x \in B \\ x \notin A. \end{cases}$
Poichè $x \in A$ oppure $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$.
Inoltre, se $x \in A$ segue che $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$, se $x \in B$ segue che $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B$, si conclude allora che $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Viceversa sia $y \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Allora $y \in A$ oppure $y \in B$ e contemporaneamente $y \notin A \cap B$.
Quindi o $\begin{cases} y \in A \\ y \notin A \cap B \end{cases} \Rightarrow y \in A \setminus B$, oppure $\begin{cases} y \in B \\ y \notin A \cap B \end{cases} \Rightarrow y \in B \setminus A$;
in ogni caso $y \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Esercizio 1.4

Sia $A = \{a, b, c\}$. Si dica se sono vere o false le seguenti affermazioni:

i) $\{a\} \subseteq A$

ii) $\{a\} \in A$

iii) $a \in A$

iv) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

Soluzione
i) vera
ii) falsa : infatti $\{a\}$ è un sottoinsieme di A e non un suo elemento.
iii) vera
iv) vera.

Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 2

Esercizio 2.1

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$.

Infatti al primo membro abbiamo $1^2 = 1$ e al secondo membro $\frac{1(2)(3)}{6} = 1$.
Supponiamo vera la proprietà per $n-1$ e dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6},$$

quindi

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \left[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right] + n^2 =$$
$$\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1) + 6n^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

Esercizio 2.2

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$.

Infatti al primo membro abbiamo $1^3 = 1$ e al secondo membro $\frac{1(2)^2}{4} = 1$.
Supponendo vera la proprietà per $n-1$ dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

quindi

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \left[1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3\right] + n^3 =$$
$$\frac{(n-1)^2 n^2}{4} + n^3 = \frac{(n-1)^2 n^2 + 4n^3}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Esercizio 2.3

$\sum_{j=0}^{n-1} 2j + 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ (la somma dei primi n numeri positivi dispari)

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$.
Infatti al primo membro abbiamo 1 e al secondo membro abbiamo $1^2 = 1$.
Supponiamo vera la proprietà per $n-1$ e dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{j=0}^{n-2} 2j+1 = 1 + 3 + ... + 2n-3 = (n-1)^2$$

quindi

$$\sum_{j=0}^{n-1} 2j+1 = [1 + 3 + ... + 2n-3\ ] + 2n-1 = (n-1)^2 + 2n-1 = n^2.$$

Esercizio 2.4

$\sum_{j=1}^{n} 2j = 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$ (la somma dei primi n numeri positivi pari).

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$.
Infatti al primo membro abbiamo 2 e al secondo membro abbiamo $1(1+1) = 2$.
Supponendo vera la proprietà per $n-1$, dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = 2+4+\cdots+2(n-1) = (n-1)n$$

quindi, aggiungendo ad entrambi i membri $2n$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{n} 2j = [2+4+\cdots+2(n-1)] + 2n = (n-1)n + 2n = \quad n(n+1).$$

Esercizio 2.5

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

Soluzione
La proprietà $P(n)$ è vera per $n = 0$.
Infatti al primo membro abbiamo 1 e al secondo membro $\frac{3^{0+1}-1}{2} = 1$.
Supponendo vera la proprietà per $n-1$, dimostriamola vera per n.
$P(n-1)$ è:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 3^i = 1+3+\cdots+3^{n-1} = \frac{3^n-1}{2}$$

quindi, aggiungendo ad entrambi i membri 3^n, si ottiene

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \left[1+3+\cdots+3^{n-1}\right] + 3^n = \frac{3^n-1}{2} + 3^n = \frac{3^n-1+2\cdot 3^n}{2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

1 Soluzione degli esercizi del capitolo 3

Esercizi (*pag. 31*)

a] Verificare che $(10011)_2 = (19)_{10}$ e che $(1010100)_2 = (84)_{10}$.

b] Dati i seguenti numeri in base $\neq 10$, trasformarli in numeri in base 10:

1. $(1111111)_2$

2. $(111111)_4$

3. $(10011011)_3$

4. $(127)_8$.

c] Dati i seguenti numeri in base 10, scriverli in base 2:

5. $(1365)_{10}$

6. $(2523)_{10}$.

d] Calcolare:

7. $(1111111)_2 + (10011)_2$

8. $(1010100)_2 + (11111)_2$

9. $(1111111)_2 \cdot (10011)_2$.

Soluzione

a] $(10011)_2 = (1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4)_{10} = (1 + 2 + 16)_{10} = (19)_{10}$;

$(1010100)_2 = (0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6)_{10} = (4 + 16 + 64)_{10} =$
$= (84)_{10}$.

b] [**1.**] $(1111111)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 =$
$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = (127)_{10}$.

[**2.**] $(111111)_4 = 1 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^5 =$
$= 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = (1365)_{10}$.

[**3.**] $(10011011)_3 = 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^7 =$
$= 1 + 3 + 27 + 81 + 2187 = (2299)_{10}$.

[**4.**] $(127)_8 = 7 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 = 7 + 16 + 64 = (87)_{10}$.

c] Utilizziamo la procedura introdotta con l'Osservazione 3.11 e illustrata nell'Esempio 3.4 (pag 30).

5.

$$\begin{aligned}
1365 &= 2 \cdot 682 + 1\\
682 &= 2 \cdot 341 + 0\\
341 &= 2 \cdot 170 + 1\\
170 &= 2 \cdot 85 + 0\\
85 &= 2 \cdot 42 + 1\\
42 &= 2 \cdot 21 + 0\\
21 &= 2 \cdot 10 + 1\\
10 &= 2 \cdot 5 + 0\\
5 &= 2 \cdot 2 + 1\\
2 &= 2 \cdot 1 + 0\\
1 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}$$

da cui si ottiene $(1365)_{10} = (10101010101)_2$, (mentre $(1364)_{10} = (10101010100)_2$).

6. $(2523)_{10}$

$$\begin{aligned}
2523 &= 2 \cdot 1261 + 1\\
1261 &= 2 \cdot 630 + 1\\
630 &= 2 \cdot 315 + 0\\
315 &= 2 \cdot 157 + 1\\
157 &= 2 \cdot 78 + 1\\
78 &= 2 \cdot 39 + 0\\
39 &= 2 \cdot 19 + 1\\
19 &= 2 \cdot 9 + 1\\
9 &= 2 \cdot 4 + 1\\
4 &= 2 \cdot 2 + 0\\
2 &= 2 \cdot 1 + 0\\
1 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}$$

Quindi $\quad (2523)_{10} = (100111011011)_2$.

d] Effettuiamo le operazioni indicate

7.

$$\begin{array}{cccccccc c}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & + \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

8.

$$\begin{array}{ccccccc c}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & + \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & = \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}$$

9.

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Esercizio 3.2 (*pag. 39*)

Dire quali delle seguenti relazioni ricorsive sono lineari omogenee a coefficienti costanti:

1. $a_n = 3na_{n-1}$
2. $b_n = b_{n-1} + n$
3. $c_n = 5c_{n-2} - 6c_{n-3}$ (nel testo compare $6a_{n-3}$ al posto di $6c_{n-3}$)
4. $d_n = -3d_{n-1}$
5. $e_n = -e_{n-1} + 5e_{n-2}$.

Soluzione

1. Il coefficiente di a_{n-1} è $3n$, quindi non è costante.
2. Il coefficiente di b_{n-1} è 1, ma compare l'addendo n per cui non è lineare a coefficienti costanti.
3. Lineare a coefficienti costanti
4. Lineare a coefficienti costanti
5. Lineare a coefficienti costanti.

Esercizio 3.3 (*pag. 39*)

Risolvere le seguenti relazioni lineari ricorsive a coefficienti costanti:

1. $a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$
2. $b_n = 10b_{n-1} - 24b_{n-2}$
3. $c_n = 4c_{n-1} - 4c_{n-2}$
4. $d_n = -3d_{n-1}$
5. $e_n = 10e_{n-1} - 25e_{n-2}$.

Soluzione

1. Equazione lineare omogenea di grado 2. L'equazione caratteristica è:

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

Le soluzioni sono: $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1$. Quindi $t_1 = 3,\ t_2 = 5$.
Poiché le radici sono distinte, le soluzioni sono:

$$a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 5^n.$$

Le costanti c_1 e c_2 possono essere determinate imponendo condizioni iniziali.
Poiché nel testo non sono date, imponiamo, ad esempio, che sia $a_0 = a_1 = 1$.

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a_0 = & c_1 \cdot 3^0 + c_2 \cdot 5^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = & c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 5^1 = 3c_1 + 5c_2 = 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, quindi $a_n = 2 \cdot 3^n - 5^n$.

2. Ancora lineare omogenea di grado 2. L'equazione caratteristica è:

$$t^2 - 10t + 24 = 0$$

e le radici sono $t_1 = 4,\ t_2 = 6$.
Le soluzioni sono quindi: $b_n = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot 6^n$, con c_1 e c_2 che dipendono dalle condizioni iniziali.

Come prima, per esercizio, determiniamo c_1 e c_2 a partire da condizioni iniziali a nostra scelta. Per esempio scegliamo $b_0 = 2, b_1 = 2$.

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} b_0 & = c_1 + c_2 = 2 \\ b_1 & = c_1 \cdot 4^1 + c_2 \cdot 6^1 \quad = 4c_1 + 6c_2 = 2. \end{cases}$$

Otteniamo $c_1 = 5, c_2 = -3$ e quindi $b_n = 5 \cdot 4^n - 3 \cdot 6^n$.

3. L'equazione (corretta) è $c_n = 4c_{n-1} - 4c_{n-2}$ ed è ancora lineare omogenea di secondo grado.

L'equazione caratteristica è:

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

ed in questo caso la radice 2 è doppia (l'equazione cartteristica è $(t-2)^2 = 0$).
Le soluzioni sono quindi:

$$c_n = (c_{1,0} + c_{1,1}n) \cdot 2^n.$$

Ancora, imponendo condizioni iniziali, ad esempio $c_0 = 1, c_1 = 1$, si possono determinare i valori di $c_{1,0}$ e di $c_{1,1}$.

$$c_0 = (c_{1,0} + c_{1,1} \cdot 0) \cdot 2^0 = 1 \ \Rightarrow c_{1,0} = 1$$

$$c_1 = (c_{1,0} + c_{1,1} \cdot 1) \cdot 2^1 = 1 \Rightarrow c_{1,1} = \frac{-1}{2}$$

e quindi $c_n = (1 - \frac{n}{2}) \cdot 2^n$.

4. L'equazione $d_n = -3d_{n-1}$ è lineare omogenea di primo grado. In questo caso possiamo ricavare il risultato direttamente, ponendo:
$d_0 = k,\ d_1 = -3d_0 = -3k,\ d_2 = -3d_1 = (-3)^2k,\ \ldots, d_n = (-3)^n d_0 = (-3)^n k$
e verificando per induzione la correttezza del risultato.

5. L'equazione è lineare omogenea di secondo grado. La sua equazione caratteristica è:

$$t^2 - 10t + 25 = 0.$$

Poiché $t^2 - 10t + 25 = (t-5)^2 = 0$ si ha la radice doppia $t = 5$.

Le soluzioni saranno quindi del tipo:

$$e_n = (c_{1,0} + c_{1,1}n)5^n.$$

Ancora, se fissiamo condizioni iniziali, ad esempio, $e_0 = 1,\ e_1 = 5$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 1 & = (c_{1,0} + c_{1,1} \cdot 0)5^0 \\ 5 & = (c_{1,0} + c_{1,1} \cdot 1) \cdot 5^1 \end{cases}$$

da cui si ricava $c_{1,0} = 1$ e $c_{1,1} = 0$.

Le soluzioni sono quindi $e_n = 5^n$.

1 Soluzione degli esercizi del capitolo 4

Esercizio 4.1 (*pag. 47*) Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e sia $\mathcal{R}_1$ la relazione su X così definita:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,2)\} .$$

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

1. $\mathcal{R}_1$ è riflessiva;

2. $\mathcal{R}_1$ è simmetrica;

3. $\mathcal{R}_1$ è antisimmetrica;

4. $\mathcal{R}_1$ è transitiva;

5. $\mathcal{R}_1$ è un'applicazione da X a X.

Soluzione

1. $\mathcal{R}_1$ non è riflessiva poichè manca la coppia $(4, 4)$;

2. $\mathcal{R}_1$ è simmetrica: infatti $(1, 2) \in \mathcal{R}_1$ e $(2, 1) \in \mathcal{R}_1$; $(2, 4) \in \mathcal{R}_1$ e $(4, 2) \in \mathcal{R}_1$;

3. $\mathcal{R}_1$ non è antisimmetrica perchè, ad esempio, $(1, 2)$ e $(2, 1) \in \mathcal{R}_1$;

4. $\mathcal{R}_1$ non è transitiva perchè, ad esempio, $(4, 2)$ e $(2, 4) \in \mathcal{R}_1$ ma $(4, 4) \notin \mathcal{R}_1$;

5. $\mathcal{R}_1$ non è un'applicazione da X a X poichè, ad esempio, sia $(1, 1)$ sia $(1, 2)$ appartengono a $\mathcal{R}_1$.

Esercizio 4.2 (*pag. 47*) Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $\mathcal{R}_2$ la relazione su X così definita:

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5)\} .$$

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

1. $\mathcal{R}_2$ è riflessiva;

2. $\mathcal{R}_2$ è simmetrica;

3. $\mathcal{R}_2$ è antisimmetrica;

4. $\mathcal{R}_2$ è transitiva;

5. $\mathcal{R}_2$ è un'applicazione da X a X.

Soluzione

1. $\mathcal{R}_2$ è riflessiva: infatti $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) \in \mathcal{R}_2$;

2. $\mathcal{R}_2$ non è simmetrica: infatti $(2,1) \in \mathcal{R}_2$ e $(1,2) \notin \mathcal{R}_2$;

3. $\mathcal{R}_2$ non è antisimmetrica: infatti sia $(2,4)$ che $(4,2)$ stanno in $\mathcal{R}_2$;

4. $\mathcal{R}_2$ non è transitiva: infatti $(4,2),(2,1) \in \mathcal{R}_2$ ma $(4,1) \notin \mathcal{R}_2$.

5. $\mathcal{R}_2$ non è un'applicazione da X a X poichè, come nell'esercizio precedente, ci sono coppie distinte che hanno la prima componente uguale, ad esempio $(2,1)$ e $(2,2)$.

Esercizio 4.3 (*pag. 47*) Sia $X = \{1,2,3,4\}$ e sia $\mathcal{R}_3$ la relazione su X così definita:

$$\mathcal{R}_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\}\,.$$

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

1. $\mathcal{R}_3$ è riflessiva;

2. $\mathcal{R}_3$ è simmetrica;

3. $\mathcal{R}_3$ è antisimmetrica;

4. $\mathcal{R}_3$ è transitiva;

5. $\mathcal{R}_3$ è un'applicazione da X a X.

Soluzione

1. $\mathcal{R}_3$ è riflessiva in quanto $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in \mathcal{R}_3$;

2. $\mathcal{R}_3$ non è simmetrica in quanto, ad esempio, $(1,2) \in \mathcal{R}_3$ e $(2,1) \notin \mathcal{R}_3$;

3. $\mathcal{R}_3$ è antisimmetrica infatti $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(4,3)\} \subseteq \mathcal{R}_3$ e nessuno degli elementi $(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(3,4)$ appartiene ad $\mathcal{R}_3$;

4. $\mathcal{R}_3$ è transitiva, come si verifica, con procedimento analogo a quello utilizzato nel successivo esercizio 4.8 pag 49, verificando che $\forall i,j,k \in \{1,2,3,4\}$ sono soddisfatte le disuguaglianze $r_{ik}r_{ki} \leq r_{ij}$.

Come in 4.8 non è necessario verificare tutte le 4^3 disuguaglianze, ma solo quelle in cui $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$, quindi solo 4! disuguaglianze.

Osservazione: invece della verifica diretta, si può utilizzare il seguente metodo equivalente.

Indichiamo con $T = (r_{ij})$ la matrice di incidenza associata alla relazione $\mathcal{R}_3$ (cfr successivo paragrafo 4.1) e definiamo il seguente "prodotto booleano" $T \odot T = (p_{ij})$ ove $p_{ij} = 1$ se $\exists k \in \{1,2,3,4\}$ tale che $r_{ik}r_{kj} = 1$ e $p_{ij} = 0$ se $\forall k \in \{1,2,3,4\}$ si ha $r_{ik}r_{kj} = 0$.

Sarà verificata la proprietà transitiva solo se nella matrice $T \odot T = (p_{ij})$ si ha $p_{ij} \leq r_{ij}$. Nel nostro caso:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si vede che T e $T \odot T$ sono uguali, quindi la condizione $p_{ij} \leq r_{ij}$ è verificata e si può concludere che $\mathcal{R}_3$ è transitiva.

5. $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione da X a X in quanto, ad esempio $(1,1)$ e $(1,2)$ appartengono entrambi a $\mathcal{R}_3$.

Esercizio 4.4 (*pag.51*) Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si consideri la relazione ρ così definita:

$$(a,b)\rho(c,d) \iff a+d = b+c$$

e si mostri che è una relazione di equivalenza.

Soluzione

1. Mostriamo che ρ è riflessiva, cioè che $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si ha $(a,b)\rho(a,b)$.

Questo è vero, in quanto $a+b = b+a$ per la commutatività della somma in $\mathbb{N}$.

2. ρ è simmetrica: cioè $(a,b)\rho(c,d) \Rightarrow (c,d)\rho(a,b)$. Infatti:

$(a,b)\rho(c,d) \iff a+d = b+c \iff c+b = d+a \iff (c,d)\rho(a,b)$.

3. ρ è transitiva: cioè da $(a,b)\rho(c,d)$ e $(c,d)\rho(e,f)$ segue $(a,b)\rho(e,f)$. Infatti per ipotesi $\begin{cases} a+d & = b+c \\ c+f & = d+e \end{cases} \Rightarrow a+d+c+f = b+c+d+e.$

Per la proprietà commutativa della somma e per le proprietà di cancellazione valide in $\mathbb{N}$, in quanto sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, si ottiene $a+f = b+e$ e quindi $(a,b)\rho(e,f)$.

Esercizio 4.5 (*pag. 57*) Dire se sono risolubili le seguenti congruenze e, in caso affermativo, determinarne le soluzioni:

1. $3x \equiv 8(mod\ 4)$.

2. $5x \equiv 1(mod\ 10)$.

3. $-3x \equiv 2(mod\ 5)$.

4. $50x \equiv 8(mod\ 7)$.

Soluzione

1. Poichè MCD $(3,4) = 1$ è un divisore di 8, la congruenza $3x \equiv 8 \ (mod\ 4)$ è risolubile.

Una soluzione è $x = 4$, quindi la soluzione generale è: $x = 4 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Poichè MCD $(5,10) = 5$ non è un divisore di 1, la congruenza non ha soluzioni intere (infatti non esiste alcun $x \in \mathbb{Z}$ tale che $5x - 10k = 1$).

3. Poichè MCD $(-3,5) = 1$ è un divisore di 2, la congruenza è risolubile. Una soluzione particolare è $x = 1$, quindi le soluzioni sono $x = 1 + 5k,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Ancora MCD $(50,7) = 1$ è un divisore di 8, quindi la congruenza è risolubile. Una soluzione è $x = 1$ e quindi le soluzioni sono $x = 1 + 7h,\ h \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 4.6 (*pag.59*) Dire se i seguenti sistemi di congruenze lineari ammettono soluzioni e, in caso affermativo, determinarle:

1. $\begin{cases} x & \equiv 1 (mod\ 4) \\ 3x & \equiv 2 (mod\ 5) \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x & \equiv 1 (mod\ 5) \\ 3x & \equiv 2 (mod\ 10) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x & \equiv 3 (mod\ 4) \\ 5x & \equiv 4 (mod\ 3) \\ 6x & \equiv 1 (mod\ 7) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x & \equiv 5 (mod\ 3) \\ x & \equiv 1 (mod\ 9) \end{cases}$

Soluzione

[1.] Per il Teorema cinese del resto, il sistema è risolubile. Per trovare le soluzioni si può seguire il procedimento costruttivo indicato dalla dimostrazione del teorema stesso, oppure, trattandosi di sole due equazioni, si può procedere direttamente.
a) Procediamo direttamente determinando le soluzioni comuni alle due congruenze. La prima ha come soluzione particolare $x = 1$ (ad esempio) e quindi la soluzione generale è $x = 1 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$; la seconda ha soluzione generale $\bar{x} = 4 + 5h,\ h \in \mathbb{Z}$ (a partire da una soluzione particolare $x' = 4$). Le soluzioni comuni si otterranno determinando le soluzioni dell'equazione diofantea in h e k: $1 + 4k = 4 + 5h$ ovvero le soluzioni dell'equazione $3 = 4k - 5h$. Si ricava $h = -3 + 4t$ e $k = -3 + 5t$ da cui si ottiene $x \equiv -11 (mod\ 20)$.
b) Seguiamo ora il metodo utilizzato nella dimostrazione del teorema. Per prima cosa sostituiamo al sistema dato un sistema equivalente, che soddisfi le ipotesi del teorema, in particolare moltiplichiamo la seconda equazione per 2 ottenendo:

$$\begin{cases} x & \equiv 1(mod\ 4) \\ x & \equiv 4(mod\ 5) \end{cases}$$

Osserviamo che: $N = 5 \cdot 4,\ N_1 = 5,\ N_2 = 4$. Il sistema ausiliario è quindi

$$\begin{cases} 5y & \equiv 1(mod\ 4) \\ 4y & \equiv 1(mod\ 5). \end{cases}$$

Soluzioni particolari del sistema sono $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Le soluzioni saranno quindi $c = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \equiv 69(mod\ 20)$ ovvero $c \equiv -11(mod\ 20)$.

[2.] Il sistema non soddisfa le condizioni del Teorema cinese del resto poiché $\mathrm{MCD}\,(10, 5) = 5 \neq 1$. Essendo la condizione solo sufficiente per l'esistenza di soluzioni, procediamo direttamente verificando se ciascuna congruenza ammette soluzione e poi cercando le eventuali soluzioni comuni.

Ciascuna delle due equazioni ammette soluzioni poiché sia $\mathrm{MCD}\,(2, 5) = 1$ è un divisore di 1, sia $\mathrm{MCD}\,(3, 10) = 1$ è un divisore di 2.

Le soluzioni della prima equazione sono $x \equiv 3(mod\ 5)$ e quelle della seconda equazione sono $x \equiv 4(mod\ 10)$ e quindi sono incompatibili.

Si conclude che, in questo caso, il sistema non è risolubile.

[3.] Poiché 4, 3, 7 sono coprimi a due a due si puó applicare il teorema cinese del resto, pur di sostituire al sistema dato uno equivalente che soddisfi le ipotesi. A questo scopo moltiplichiamo la seconda congruenza per 2 e la terza per 6 e otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x & \equiv 3(mod\ 4) \\ x & \equiv 2(mod\ 3) \\ x & \equiv 6(mod\ 7) \end{cases} \quad \text{o, meglio,} \begin{cases} x & \equiv -1(mod\ 4) \\ x & \equiv 2\ (mod\ 3) \\ x & \equiv -1(mod\ 7). \end{cases}$$

Osserviamo che: $N = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84,\ N_1 = 21,\ N_2 = 28,\ N_3 = 12$ e quindi il sistema ausiliario è:

$$\begin{cases} 21y & \equiv 1(mod\ 4) \\ 28y & \equiv 1(mod\ 3) \\ 12y & \equiv 1(mod\ 7) \end{cases}$$

Soluzioni particolari del sistema sono $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ e $y_3 = 3$. Le soluzioni saranno quindi $c = -1 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot \cdot 28 \cdot 1 + (-1) \cdot 12 \cdot 3 \equiv -1(mod\ 84)$.

[**4**.] Il sistema non soddisfa le ipotesi del Teorema cinese del resto. Verifichiamo quindi direttamente se entrambe le congruenze hanno soluzione e se ne esistono di comuni. Poiché $\mathrm{MCD}\,(2, 3) = 1$ e $\mathrm{MCD}\,(1, 9) = 1$ certamente le congruenze hanno soluzione.

Avremo $x = 1 + 3k$ per la prima congruenza e $x = 1 + 9h$ per la seconda, con $h, k \in \mathbb{Z}$.

Quindi le soluzioni comuni saranno $x = 1 + 9h$, con $h \in \mathbb{Z}$ cioé $x \equiv 1(mod\ 9)$ (poiché $1 + 9h = 1 + 3(3h)$).

Esercizio 4.7

Disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid \; y|30\}$ rispetto alla relazione $\leq$ definita (come nell'esempio 4.14) cioè $a \leq b \Leftrightarrow a|b$.

Soluzione

L'insieme Y è l'insieme dei divisori di 30 cioè $Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Il diagramma di Hasse richiesto è analogo a quello disegnato in figura 4.2 (vedi testo pag. 62), ove si operino le seguenti sostituzioni:

$$\emptyset \to 1, \quad \{a\} \to 2, \quad \{b\} \to 3, \quad \{c\} \to 5,$$
$$\{a,b\} \to 6, \quad \{b,c\} \to 15, \quad \{a,c\} \to 10, \quad \{a,b,c\} \to 30.$$

Esercizio 4.8

Disegnare il diagramma di Hasse di $(\mathcal{P}(X), \leq)$, dove la relazione d'ordine è l'inclusione insiemistica e $X = \{a, b\}$.

Soluzione

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$

Il diagramma è:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & / & & \backslash & \\ \{a\} & & & & \{b\} \\ & \backslash & & / & \\ & & \emptyset & & \end{array}$$

Esercizio 4.9 (*pag. 64*) Considerate le applicazioni ϕ_1 e ϕ_2 dell'esempio 4.18 e precisamente: ϕ_1 e ϕ_2 applicazioni da $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $\phi_1(x) = x^3$ e $\phi_2(x) = 2x+1$,

1) determinare $\phi_1(-2)$, $\phi_1(3)$, $\phi_2(-1)$, $\phi_2(4)$.

2) Determinare $\phi_1^{-1}(27)$, $\phi_1^{-1}(-8)$, $\phi_2^{-1}(1)$, $\phi_2^{-1}(-3)$, $\phi_2^{-1}(9)$.

3) Per ciascuno degli elementi dell'insieme $A = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, -4, -5\}$, dire se ammettono preimmagine (sia attraverso la ϕ_1 che la ϕ_2) e in caso affermativo, determinarle.

Soluzione

1) $\phi_1(-2) = -8$, $\phi_1(3) = 27$, $\phi_2(-1) = -1$, $\phi_2(4) = 9$.

2) $\phi_1^{-1}(27) = 3$, $\phi_1^{-1}(-8) = -2$, $\phi_2^{-1}(1) = 0$, $\phi_2^{-1}(-3) = -2$, $\phi_2^{-1}(9) = 4$.

3) $\phi_1^{-1}(0) = 0, \phi_1^{-1}(1) = 1$; $\phi_2^{-1}(1) = 0$ mentre $\phi_2^{-1}(0)$ non esiste; 2, 6 e 4 non hanno controimmagine né per ϕ_1, né per ϕ_2; 8 non ha preimmagine per ϕ_2 in quanto numero pari, mentre $\phi_1^{-1}(8) = 2$; -5 non ha preimmagine per ϕ_1 in quanto non è il cubo di nessun numero intero, mentre $\phi_2^{-1}(-5) = -3$.

Esercizio 4.10 (*pag. 64*) Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da:

$$f(a, b) = (2a - b, 3b).$$

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

1. f è iniettiva.

2. f è suriettiva.

3. $f(3,4) = (2,8)$.

4. $f^{-1}(2,0) = (1,0)$.

Soluzione

1. (VERO) f è iniettiva: infatti $f(a,b) = f(c,d) \Rightarrow (2a-b, 3b) = (2c-d, 3d) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$.

2. (FALSO) f non è suriettiva: infatti, ad esempio, l'elemento $(2,1)$ non ha controimmagine, in quanto non esiste alcuna coppia $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $f(x,y) = (2x-y, 3y) = (2,1)$.

3. (FALSO): infatti $f(3,4) = (2,12)$.

4. (VERO): infatti $f(1,0) = (2,0)$.

Esercizio 4.11 (*pag. 68*) Sia $f : A \longrightarrow B$ un'applicazione. Provare che f ammette inversa sinistra se e solo se f è iniettiva, ammette inversa destra se e solo se f è suriettiva.

Soluzione

1. Per ipotesi l'applicazione f ammetta una inversa sinistra, cioè esista una applicazione $g : B \longrightarrow A$ tale che

$$g \circ f = I_A, \quad \text{cioè tale che } \forall a \in A \text{ sia } g(f(a)) = a.$$

Mostriamo che l'applicazione f è iniettiva.

Siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $f(a_1) = f(a_2)$. Allora

$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ e quindi $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow I_A(a_1) = I_A(a_2)$ da cui segue che $a_1 = a_2$ e quindi risulta che f è iniettiva.

Viceversa sia f iniettiva; allora $\forall b \in B$ esiste al più un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Costruiamo una applicazione

$$g : B \longrightarrow A$$

in modo tale che $g(b) = \begin{cases} a, \text{ se } b \in f(A) \text{ ed } a \text{ è una sua preimmagine} \\ \bar{a} \in A \text{ (scelto arbitrariamente) se } b \notin f(A). \end{cases}$

Si ha quindi che $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$, per ogni $a \in A$ cioè $g \circ f = I_A$.

2. Per ipotesi l'applicazione f ammetta una inversa destra, cioè esista una applicazione $g : B \longrightarrow A$ tale che $f \circ g = I_B$, cioè $\forall b \in B$ sia $f(g(b)) = b$.

Mostriamo che l'applicazione f è suriettiva.

Per ogni $b \in B$ si ha $b = I(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$ e quindi $g(b) \in A$ è preimmagine di b per f.

Viceversa sia f suriettiva: allora $\forall b \in B$, $\exists\ a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Posto $g(b) = a$ si ha:

$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$, da cui segue che $f \circ g = I_B$.

Esercizio 4.12 (*pag. 68*) Data l'applicazione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita ponendo: $f(a, b) = (a + 2b, 3b)$, dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione

f è iniettiva. Infatti:
$f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow (a + 2b, 3b) = (c + 2d, 3d) \Rightarrow b = d$ e $a = c \Rightarrow (a, b) = (c, d)$.
f non è suriettiva poiché, ad esempio, l'elemento $(2, 1)$ non ha controimmagine (non esiste alcun $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $f(x, y) = (x + 2y, 3y) = (2, 1)$).

Esercizio 4.13 (*pag. 68*) Date le applicazioni f e $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definite ponendo: $f(a, b) = (a + 2b, -b)$ e $g(c, d) = (-c, 3d)$, determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$. Per ciascuna di esse dire se è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione

1. $(f \circ g)(a, b) = f(g(a, b)) = f(-a, 3b) = (-a + 6b, -3b)$,

$(g \circ f)(a, b) = g(f(a, b)) = g(a + 2b, -b) = (-a - 2b, -3b)$.

2. $f \circ g$ e $g \circ f$ sono entrambe iniettive, nessuna delle due è suriettiva: ad esempio $(2, 1)$ non ha controimmagine.

Esercizio 4.14 (*pag. 68*) Si consideri l'applicazione $h : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, definita ponendo $h(x, y) = (x + 2y, -x + y)$:

1. verificare che h è iniettiva;

2. determinare la funzione inversa sinistra;

3. dire se l'applicazione h è anche suriettiva.

Soluzione

1. h è iniettiva, infatti: $h(a, b) = h(c, d) \Rightarrow (a + 2b, -a + b) = (c + 2d, -c + d) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + 2b & = c + 2d \\ -a + b & = -c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b & = c + 2d \\ 3b & = 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = c \\ b & = d. \end{cases}$$

Si conclude che $(a, b) = (c, d)$.

2. La funzione inversa sinistra esiste poiché l'applicazione è iniettiva. Per determinarla utilizziamo la definizione cioè cerchiamo una funzione

$$g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

tale che $g \circ h = i$, cioè tale che $(g \circ h)(x, y) = g(x + 2y, -x + y) = (x, y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Possiamo procedere cercando dapprima l'inversa g tra le applicazioni da $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, del tipo $g(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, quindi provando a determinare $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tali che:

$$\begin{cases} a(x+2y) + b(-x+y) & = x \\ c(x+2y) + d(-x+y) & = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + 2ay - bx + by & = x \\ cx + 2cy - dx + dy & = y \end{cases}$$

e quindi $\begin{cases} a - b = 1, \quad 2a + b = 0 \\ c - d = 0, \quad 2c + d = 1. \end{cases}$

Si ottengono quindi le soluzioni: $a = \dfrac{1}{3}, \ b = \dfrac{-2}{3}, \ c = d = \dfrac{1}{3}$, da cui si conclude che l'inversa cercata è l'applicazione g tale che

$g(x, y) = (\frac{1}{3}x - \frac{-2}{3}y, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y), \forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

3. L'applicazione h è suriettiva. Infatti, $\forall (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ \exists (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $h(x, y) = (x + 2y, -x + y) = (a, b)$.

Risolviamo il sistema $\begin{cases} x + 2y & = a \\ -x + y & = b \end{cases}$

Sommando membro a membro otteniamo le soluzioni:

$$\begin{cases} x = & \dfrac{a - 2b}{3} \\ y = & \dfrac{a + b}{3} \end{cases}$$

Quindi la controimmagine cercata è $(\dfrac{a - 2b}{3}, \dfrac{a + b}{3})$.

Esercizio 4.15 (*pag. 68*) Date le applicazioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$, definite da:

$f(n) = \dfrac{n^2 + 1}{2}$, $g(q) = \sqrt{q}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$,

si determini la funzione composta $f \circ g$ e si dica se è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione Si osserva che si può definire la relazione composta $f \circ g$ che non è una applicazione da $\mathbb{Q}^+$ a $\mathbb{Q}$, poiché esiste qualche elemento di $\mathbb{Q}^+$ che non ha immagine in $\mathbb{Q}$. Infatti ad esempio

$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \ g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ma non esiste $f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ in quanto $\sqrt{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{Z}$.

Si conclude che $f \circ g$ non puó essere né iniettiva né suriettiva.

Esercizio 4.16 (*variante del precedente*) Date le applicazioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$, definite da:

$f(n) = \dfrac{n^2+1}{2}$, $g(q) = \sqrt{q}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$,

si determini la funzione composta $g \circ f$ e si dica se è iniettiva e/o suriettiva.

Soluzione

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha che $f(n) = \frac{n^2+1}{2}$ e quindi $g\left(\frac{n^2+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{n^2+1}{2}}$.

$g \circ f$ non è iniettiva: ad esempio 1 e -1 hanno la stessa immagine.

Infatti $(g \circ f)\ (1) = 1 = (g \circ f)\ (-1)$

$g \circ f$ non è suriettiva: ad esempio $0 \in \mathbb{R}$ ma non ha controimmagine in $\mathbb{Z}$. Infatti non esiste alcun $n \in \mathbb{Z}$ tale che $(g \circ f)\ (n) = \sqrt{\frac{n^2+1}{2}} = 0$.

Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 5

Esercizio 5.1 (pag. 73)

1. Sia K_n un grafo completo. Allora K_n ha $\dfrac{n(n-1)}{2}$ lati.

Soluzione
Per definizione (cfr. testo Def. 5.5, pag 71) il grafo K_n ha n vertici ed inoltre due vertici distinti sono sempre adiacenti.
Quindi, se indichiamo con $v_1, v_2, \cdots, v_n$ gli n vertici, possiamo contare quanti sono i lati:

$$\begin{array}{ccc}
v_1v_2, v_1v_3, \cdots, v_1v_n : & n-1 & \text{lati} \\
v_2v_3, v_2v_4, \cdots, v_2v_n : & n-2 & \text{lati} \\
v_3v_4, v_3v_5, \cdots, v_3v_n : & n-3 & \text{lati} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-2}v_n : & 2 & \text{lati} \\
v_{n-1}v_n : & 1 & \text{lato}
\end{array}$$

In totale i lati sono quindi $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \dfrac{(n-1)n}{2}$.
(Per questo calcolo, confronta l' Esempio 2.11 a pag. 13 del testo).

2. Sia ora Γ un grafo regolare di grado r con n vertici: allora Γ ha $\frac{1}{2}r \cdot n$ lati.

Soluzione
Poichè il grafo Γ è regolare di grado r, ogni vertice ha esattamente r lati incidenti $(r > 0)$ (Definizione 5.4 pag. 71 del testo).
Detti $v_1, v_2, \cdots, v_n$ gli n vertici, contiamo i lati.
Poichè ogni vertice v_j è adiacente ad altri r vertici, in totale avremo $n \cdot r$ spigoli. Inoltre poichè $v_jv_i = v_iv_j \ \forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e quindi ogni lato viene contato due volte, si può concludere che il numero di lati distinti è $\dfrac{r \cdot n}{2}$.

Esercizio 5.2 (pag. 78)
Dimostrare che un albero pienamente binario con 5 vertici interni, possiede 11 vertici.

Soluzione
Ricordiamo che un grafo si dice albero se non contiene cicli (definizione 5.9 pag. 73 del testo), ed è pienamente binario se ogni vertice ha esattamente due "figli" (pag. 74).

Si può dimostrare che *in un albero pienamente binario, detto n il numero dei vertici interni ed f il numero delle* foglie, s*i ha che* $f = n + 1$. (E quindi il numero totale di vertici è $2n + 1$: nel nostro caso $2 \cdot 5 + 1 = 11$).

Dimostriamo per induzione l'uguaglianza $f = n + 1$.

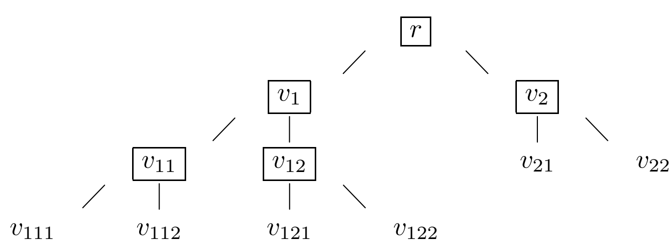
Se $n = 1$ l'albero ha 1 solo vertice interno, che sarà la radice, e quindi avrà due foglie, cioè $f = 2$.

Sia vera l'uguaglianza per $n-1$, cioè un albero pienamente binario avente $n-1$ vertici interni abbia $(n-1)+1 = n$ foglie (Ipotesi di induzione).

Consideriamo ora un albero Γ (pienamente binario) con n vertici interni.
Per sfruttare l'ipotesi di induzione togliamo un vertice interno che non sia la radice e di conseguenza togliamo le due foglie uscenti da esso (e quindi questo vertice interno diventa foglia). Otteniamo così un albero Γ' (pienamente binario) che ha $(n-1)$ vertici interni e quindi n foglie, per l'ipotesi di induzione.
Contiamo ora le foglie di Γ : poichè nel passaggio da Γ' a Γ una foglia diventa un vertice interno, ad esso dovranno essere aggiunte le due foglie terminali, per cui il numero delle foglie di Γ è uguale al numero delle foglie di Γ' più 2, cioè $f = (n-1)+2 = n+1$, come volevasi dimostrare.

Osservazione
Poichè il numero degli alberi pienamente binari con 5 vertici interni è limitato (sono solo 4) la verifica si poteva fare con un'osservazione diretta.
Sia r il vertice "radice" (che è interno per definizione). Siano v_1 e v_2 i vertici "figli" di primo livello.
Abbiamo 4 casi.

1. Supponiamo che v_1 e v_2 siano entrambi interni. Allora avremo soltanto altri due vertici interni (di secondo livello) che possono essere entrambi discendenti di v_1 (e allora li diremo v_{11} e v_{12}) oppure entrambi discendenti di v_2 (e allora li diremo v_{21} e v_{22}). Da questi vertici interni partiranno le foglie (che non sono interni). In questo caso si avrà che in totale i vertici sono 5 (interni) +6 (foglie)= 11.

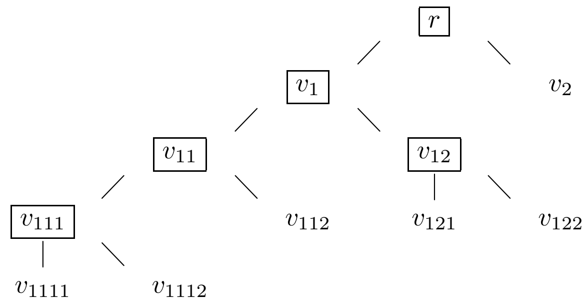


2. Siano v_1 e v_2 non entrambi interni. Senza ledere la generalità del discorso, supponiamo che v_1 sia interno e che v_2 sia una foglia.

Allora v_1 avrà due discendenti v_{11} e v_{12}.

Si possono presentare due casi: v_{11}e v_{12} entrambi interni oppure uno interno e l'altro foglia.

2.1 Siano v_{11}e v_{12} entrambi interni: allora c'è un solo altro vertice interno, che, senza ledere la generalità, supponiamo sia figlio di v_{11} e lo diciamo v_{111}. Allora i vertici interni sono $r, v_1, v_{11}, v_{12}, v_{111}$. Le foglie saranno quindi: $v_2, v_{112}, v_{121}, v_{122}, v_{1111}, v_{1112}$

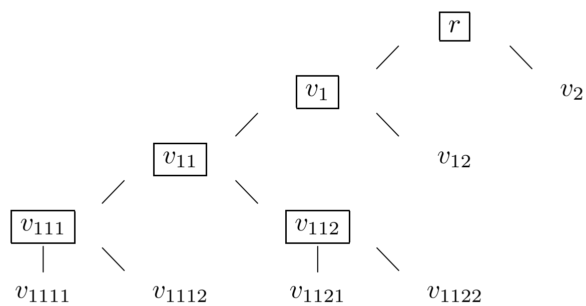


e quindi sono 6.

2.2 Sia v_{11} interno e v_{12} una foglia. Anche in questo caso avremo due possibilità: i "figli" di v_{11} sono entrambi interni oppure uno interno e uno foglia.

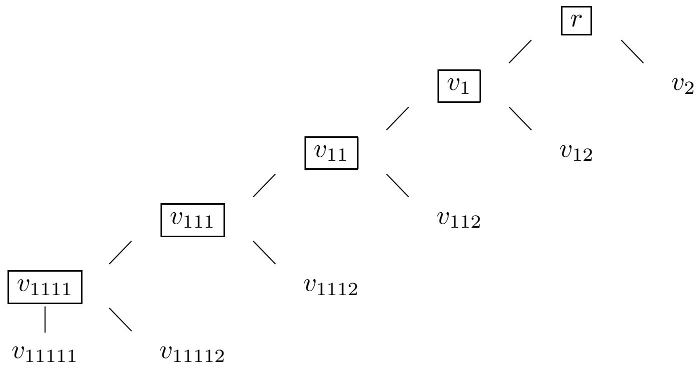
Consideriamo i due sottocasi.

2.2.1 Siano v_{111} e v_{112} entrambi interni: abbiamo allora 5 vertici interni. Le foglie saranno $v_2, v_{12}, , v_{1111}, v_{1112}, v_{1121}, v_{1122}$.



2.2.2 Sia infine v_{111} vertice interno e v_{112} foglia. Allora uno dei "figli" di v_{111} dovrà essere interno e l'altro foglia. In questo caso le foglie saranno

$v_2, v_{12}, , v_{112}, v_{1112}, v_{11111}, v_{11112}.$



1 Soluzione degli esercizi del capitolo 7

Esercizio 7.1 (*pag.89*)

Nell'insieme $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y)|x,\ y \in \mathbb{Z}\}$ si consideri l'operazione $\star$ così definita:

$$(x, y) \star (z, t) = (x + z, yt).$$

Si stabilisca se è commutativa, associativa e si determinino gli elementi invertibili.

Soluzione

a) Proprietà commutativa:

Poiché $(x, y) \star (z, t) = (x + z, yt)$ e $(z, t) \star (x, y) = (z + x, ty)$, per la proprietà commutativa della somma e del prodotto in $\mathbb{Z}$, i risultati sono uguali per ogni coppia di elementi $(x, y),\ (z, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) Proprietà associativa:

$((x, y) \star (z, t)) \star (u, v) = (x + z, yt) \star (u, v) = ((x + z) + u, (yt)v)$

e

$(x, y) \star ((z, t) \star (u, v)) = (x, y) \star (z + u, tv) = (x + (z + u), y(tv))$.

Ancora i risultati sono uguali per la proprietà associativa di somma e prodotto validi in $\mathbb{Z}$ e quindi è verificata la proprietà associativa per ogni terna di elementi in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

c) Prima di determinare gli eventuali elementi invertibili, stabiliamo se esiste l'elemento neutro (poiché l'operazione è commutativa, un eventuale elemento neutro a sinistra o a destra sarà bilatero e quindi unico), cioè l'elemento (h, k) di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si abbia:

$(h, k) \star (x, y) = (h + x, ky) = (x, y)$.

L'elemento neutro sarà quindi l'elemento le cui componenti soddisfano contemporaneamente le condizioni: $h + x = x$ e $ky = y$ per ogni $h,\ k \in \mathbb{Z}$ e quindi è l'elemento $(0, 1)$.

Cerchiamo ora gli elementi unitari (o invertibili), cioè gli elementi $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ per i quali esista un elemento (x, y) tale che $(a, b) \star (x, y) = (a + x, by) = (0, 1)$. Si ottiene $x = -a$ e $b = \pm 1$. Quindi $U = \{(a, 1), (a, -1)|a \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 7.2 (*pag. 89*)

Nell'insieme $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x, y)|x,\ y \in \mathbb{Q}\}$, ove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali si consideri l'operazione $\circ$ così definita:

$$(x, y) \circ (z, t) = (xz, yz + 2t).$$

Si stabilisca se è commutativa, associativa e se ammette elemento neutro.

Soluzione

a) Poiché $(x, y) \circ (z, t) = (xz, yz + 2t)$ e $(z, t) \circ (x, y) = (zx, tx + 2y)$, in generale i risultati non sono uguali, come si puó vedere dal controesempio seguente:
$(0, 1) \circ (2, 1) = (0, 2 + 2) = (0, 4)$ mentre $(2, 1) \circ (0, 1) = (0, 0 + 2) = (0, 2)$.

b) Analogamente non vale la proprietà associativa, come mostra il seguente controesempio:
$[(1, 0) \circ (2, 1)] \circ (0, 1) = (2, 2) \circ (0, 1) = (0, 2)$ mentre
$(1, 0) \circ [(2, 1) \circ (0, 1)] = (1, 0) \circ (0, 2) = (0, 4)$.

c) Eventuale elemento neutro: cerchiamo un elemento $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ valgano le relazioni:

i) $(a, b) \circ (x, y) = (ax, bx + 2y) = (x, y)$

e

ii) $(x, y) \circ (a, b) = (xa, ya + 2b) = (x, y)$.

In questo caso la condizione i) implica: $a = 1$ e $bx = -y$: quindi non esiste elemento neutro a sinistra poiché un tale elemento dipenderebbe dalla scelta di x e di y.

Invece la ii) ha come soluzioni $a = 1$ e $b = 0$, quindi esiste elemento neutro a destra.

Esercizio 7.3 (*pag. 89*)

Nell'insieme $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) | a,\ b \in \mathbb{R}\}$, ove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, si consideri l'operazione $\circ$ così definita:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Si verifichi che l'operazione $\circ$ è associativa e commutativa. Si determini inoltre l'elemento neutro e l'insieme degli elementi invertibili.

Soluzione

a) Proprietà commutativa:

Poiché $(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ e $(c, d) \circ (a, b) = (ca - db, cb + da)$, per la proprietà commutativa della somma e del prodotto in $\mathbb{R}$, i risultati sono uguali per ogni coppia di elementi $(a, b),\ (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Proprietà associativa:

$((a, b) \circ (c, d)) \circ (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \circ (e, f) =$
$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$
$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$

e

$(a, b) \circ ((c, d) \circ (e, f)) = (a, b) \circ (ce - df, cf + de) =$
$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))) =$
$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)$.

Ancora i risultati sono uguali per le proprietà associativa e commutativa di somma e prodotto valide in $\mathbb{R}$ e quindi è verificata la proprietà associativa per ogni terna di elementi in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) L'eventuale elemento neutro sarà un elemento $(h, k) \in \mathbb{R}$ tale che $\forall (a, b) \in \mathbb{R}$ soddisfi la relazione $(a, b) \circ (h, k) = (ah - bk, ak + bh) = (a, b)$.

Dobbiamo risolvere il sistema in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ah - bk & = a \\ ak + bh & = b \end{cases} \quad \text{che ha soluzione: } h = 1, \ k = 0.$$

L'elemento neutro è quindi $(1, 0)$

d) Elementi invertibili saranno gli elementi $(h, k) \in \mathbb{R}$ per i quali esista un elemento $(a, b) \in \mathbb{R}$ tale che $(a, b) \circ (h, k) = (1, 0)$. Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} ah - bk & = 1 \\ ak + bh & = 0 \end{cases}$$

Otteniamo le soluzioni $a = \dfrac{h}{h^2 + k^2}$ e $b = \dfrac{-k}{h^2 + k^2}$. Gli elementi invertibili saranno quindi tutte le coppie (h, k) con h e k non contemporaneamente nulli.

Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 8

Esercizio 8.1 (pag. 95)

Verificare che, data una matrice quadrata A, la matrice $S = A^T + A$ è una matrice simmetrica, mentre la matrice $R = A^T - A$ è emisimmetrica (Def. 8.2, pag. 92 del testo).

Soluzione Basta osservare che, per le proprietà delle matrici trasposte è:

$$S^T = (A^T + A)^T = (A^{T)^T} + A^T = A + A^T = S$$

quindi S è simmetrica.
Inoltre si ha

$$R^T = (A^T - A)^T = (A^{T)^T} - A^T = A - A^T = -(A - A^T) = -R$$

e quindi R è antisimmetrica.

Esercizio 8.2 (pag. 100)

Sotto quali condizioni sul tipo delle matrici A, B, C, vale la proprietà distributiva destra cioè vale l'uguaglianza:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C?$$

Soluzione

Detto (m, n) il tipo della matrice A (cioè sia m il numero di righe ed n il numero di colonne di A), (r, s) quello della matrice B, e (h, k) quello della matrice C, si hanno le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} m = r \quad \text{e} \quad n = s & \text{(affinchè sia definita la somma } A + B\text{)} \\ n = h = s & \text{(affinchè sia definito il prodotto } (A + B) \cdot C\text{).} \end{cases}$$

Con queste condizioni sono definite anche le operazioni al secondo membro.

Esercizio 8.3 (pag. 100)

Sotto quali condizioni sul tipo delle matrici A e B è possibile effettuare il prodotto $A \cdot B$ e il prodotto $B \cdot A$?

Soluzione

Detto (m, n) il tipo della matrice A ed (r, s) quello della matrice B, la condizione affinchè sia definito il prodotto AB è che $n = r$, mentre la condizione affinchè sia definito il prodotto BA è che $s = m$.

Esercizio 8.4 (pag. 101)

Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, svolgere i calcoli indicati:

1. $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$.

2. $A^2 = A \cdot A$, $B^2 = B \cdot B$, $C^2 = C \cdot C$.

3. $A + B$, $A + C$, $3A$, $2B + 4C$.

Soluzione

1. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2-4+1 & 4+1 & 1+2-1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2-4-1 & 4-1 & 1+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C \cdot B. = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. $$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2B + 4C = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 8.5 (pag. 101)

Mostrare che una matrice diagonale $D = (d_{ij})$ di ordine tre, con $d_{11} = d_{22} = = d_{33} = d$, permuta con qualsiasi matrice $A \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ e che il prodotto di due matrici diagonali D_1 e $D_2 \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ è ancora una matrice diagonale in $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$.

Soluzione

1. Sia $D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ la matrice diagonale (del tipo indicato) e sia

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ una matrice di $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$.

Consideriamo i due prodotti DA e DB e verifichiamo che sono uguali $\forall d, a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$DA = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{bmatrix}$$

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{bmatrix}.$$

2. Siano $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ed $H = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix}$ due matrici diagonali:

il prodotto $DH = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah & 0 & 0 \\ 0 & bk & 0 \\ 0 & 0 & cj \end{bmatrix}$

è ancora una matrice diagonale.

Esercizio 8.6 (pag 106)

Dire se le seguenti matrici sono stocastiche e, in caso positivo, dire se sono regolari:

1. $A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Osservazione: Ricordiamo che una matrice stocastica si dice **regolare** se tutti gli elementi di una generica potenza A^n con $n \geq 2$, sono positivi (cfr Def. 8.16, pag 105, da correggere aggiungendo la condizione $n \geq 2$).

Soluzione

1.1 Dopo aver osservato che ogni $a_{ij} \in A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ è non negativo, verifichiamo che ogni vettore riga sia vettore di probabilità.

Infatti: $a_{11} + a_{12} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$, $a_{21} + a_{22} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. Si conclude che la matrice è stocastica (cfr. def. 8.15, pag.104).

1.2 Vediamo ora se la matrice A è regolare, calcolandone le potenze successive.

Otteniamo $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/16 & 5/16 \\ 5/8 & 3/8 \end{bmatrix}$

e $A^3 = \begin{bmatrix} 43/64 & 21/64 \\ 21/32 & 11/32 \end{bmatrix}$.

Inoltre possiamo generalizzare il risultato ottenendo:

$A^n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ove

$$a = \frac{2^{2n-1} + 2^{2n-3} + 2^{2n-5} + \cdots + 2^3 + 2 + 1}{2^{2n}},$$

$$b = \frac{2^{2n-2} + 2^{2n-4} + 2^{2n-6} + \cdots 2^2 + 1}{2^{2n}},$$

$$c = \frac{2^{2n-2} + 2^{2n-4} + 2^{2n-6} + \cdots 2^2 + 1}{2^{2n-1}},$$

$$d = \frac{2^{2n-3} + 2^{2n-5} + \cdots + 2^3 + 2 + 1}{2^{2n-1}}.$$

(Tralasciamo la dimostrazione, che si può fare per induzione su n).

2.1 Consideriamo ora la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e osserviamo che le righe sono vettori di probabilità (gli elementi sono non negativi e la somma in ogni riga è 1), quindi B è matrice stocastica.

2.2 Inoltre la matrice B non è regolare perché la seconda potenza contiene elementi nulli (cfr. def 8.16 pag 105), essendo $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 8.7 (pag 112)

Determinare il rango delle seguenti matrici:

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Soluzione

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché il minore $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, segue che $car A \geq 2$.
Poiché $\det A = 0$ (senza fare calcoli, osservando che la terza riga è somma della I e della II), si conclude che $car A = 2$.

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Poiché ci sono solo tre colonne $carB \leq 3$.
Il minore $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ implica che $carB \geq 2$.
Orliamo e otteniamo che $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Segue quindi che $carB = 3$.

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché ci sono solo due righe, $carC \leq 2$, e poiché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ si conclude che $carC = 2$.

Esercizio 8.8 (pag 114)

Calcolare la matrice inversa delle seguenti matrici:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}; \ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}; \ K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix};$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -5/27 & -4/27 & 8/27 \\ -4/27 & 13/27 & 1/27 \\ 8/27 & 1/27 & -2/27 \end{bmatrix}.$$

Soluzione degli esercizi del capitolo 9

Esercizio 9.1 (*pag.120*)

Sia $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Verificare che H è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$.[1]
H è commutativo?

Soluzione

Per verificare che H è un sottogruppo, basta verificare, utilizzando la precedente proposizione 9.4, che $\forall h_1,\ h_2 \in H$ si ha che $h_1 h_2^{-1} \in H$.

Siano $h_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $h_2 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$. Poiché $h_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, il prodotto $h_1 h_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b^{-1}+a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$.

Inoltre H è commutativo: infatti per ogni h_1. $h_2 \in H$ si ha:
$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 9.2 (*pag.120*)

Dato un gruppo abeliano G e un intero $n \geq 1$, si consideri il sottoinsieme $K = \{a \in G \mid a^n = 1_G\}$ e si mostri che K è un sottogruppo di G.

Soluzione

Come nell'esercizio precedente, verifichiamo che K è un sottogruppo mostrando che $\forall a, b \in K$ anche $ab^{-1} \in K$.

Per ipotesi si ha che $a^n = b^n = b^{-n}$. Poiché G è commutativo segue che $(ab^{-1})^n = a^n b^{-n} = 1_G$ e quindi $ab^{-1} \in K$, che quindi risulta essere sottogruppo.

Esercizio 9.3 (*pag. 47*)

Determinare le sostituzioni pari di S_4.

Soluzione

Le sostituzioni pari di S_4 (che sono gli elementi di A_4), sono tutte e sole le sostituzioni che si possono scrivere come prodotto di un numero pari di scambi (cfr. Def 9.10, pag. 122 del testo). Saranno quindi:

$$\begin{array}{cccc} I & (12)(34) & (13)(24) & (14)(23) \\ (123) = (13)(12) & (132) = (12)(13) & (124) = (14)(12) & (142) = (12)(14) \\ (134) = (14)(13) & (143) = (13)(14) & (234) = (24)(23) & (243) = (23)(24). \end{array}$$

[1] vedi Esempio 9.3, 4 pag. 117

Esercizio 9.4 (*pag.123*)

Si consideri l'insieme $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e la permutazione α su X così definita:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Si decomponga α in prodotto di cicli disgiunti;

2. Si dica se α è una sostituzione pari oppure dispari;

3. Si indichi l'immagine di 6 tramite la permutazione α.

Soluzione

1. $\alpha = (13)(24)(567)$;

2. Decomponiamo α in prodotto di scambi. Si ottiene $\alpha = (13)(24)(57)(56)$ e quindi si deduce che α è una sostituzione pari;

3. $\alpha(6) = 7$.

Esercizio 9.5 (*pag. 123*) Considerate le seguenti permutazioni di S_5:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \; e \;\; \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

si dica se le seguenti affermazioni sono vere oppure false:

1. β ha periodo 5;

2. $\gamma^{-1} = \gamma$;

3. $\beta \cdot \gamma = \gamma \cdot \beta$;

4. $\beta^2 = (1\ 2\ 4\ 3\ 5)$.

Soluzione

Scriviamo β e γ come prodotto di cicli disgiunti. Otteniamo:
$\beta = (13254)$, $\gamma = (12)(45)$.

1. (VERO) β è un ciclo di lunghezza 5, quindi ha periodo 5;

2. (VERO) γ ha periodo 2 quindi coincide con la sua inversa γ^{-1};

3. (FALSO) $\beta \cdot \gamma = (15)(32)(4)$, $\gamma \cdot \beta = (13)(24)$; quindi $\beta \cdot \gamma \neq \gamma \cdot \beta$;

4. (VERO) $\beta^2 = (1\ 2\ 4\ 3\ 5)(1\ 2\ 4\ 3\ 5) = (1\ 2\ 4\ 3\ 5)$.

Esercizio 9.6 (*pag. 127*)

Dati i sottogruppi $H = \{2h \mid h \in \mathbb{Z}\}$ e $K = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ di $\mathbb{Z}$, determinare i sottogruppi $H \cup K$ e $H \cap K$.

Soluzione

Verifichiamo che $H \cup K = \langle H, K \rangle = H + K = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2h + 3k\} = \mathbb{Z}$.

Infatti è sempre vero che $H + K \subseteq \mathbb{Z}$, essendo H e K sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$.

Mostriamo ora che ogni intero $t \in \mathbb{Z}$ si può scrivere come combinazione lineare di 2 e di 3.

Dalla definizione di numeri relativamente primi (Definizione 3.5 pag. 25 del testo) si ha che esistono due interi, diciamoli x e $y \in \mathbb{Z}$, tali che $1 = 2x + 3y$.

Allora, moltiplicando entrambi i membri per t, si ottiene

$$t = 2tx + 3ty \Rightarrow t \in H + K.$$

Avendo dimostrato la doppia inclusione segue l'uguaglianza dei due insiemi e quindi la tesi.

$H \cap K = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists h, k \in \mathbb{Z} \text{ per cui } n = 2h = 3k\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 6m\}$.

Osserviamo che il risultato dipende ancora dal fatto che $M.C.D.(2, 3) = 1$, e quindi che $2h = 3k$ implica che h sia multiplo di 3 e quindi n multiplo di 6.

Esercizio 9.7 (*pag.130*)

1. Determinare i generatori del gruppo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

Soluzione

I generatori sono tutte e sole le classi che hanno rappresentante primo con 12 e quindi $[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}$ (Cfr. Es. 9.5, pag 107).

2. Determinare i generatori del gruppo $(\mathbb{Z}_{16,+})$.

Soluzione

I generatori sono tutte e sole le classi che hanno rappresentante primo con 16 e quindi $[1]_{16}, [3]_{16}, [5]_{16}, [7]_{16}, [9]_{16}, [11]_{16}, [13]_{16}, [15]_{16}$ (Cfr. Es. 9.5, pag 107).

3. Determinare il periodo degli elementi di $(\mathbb{Z}_8, +)$.

Soluzione

Il periodo di un elemento di un gruppo ciclico finito di ordine n è individuato dalla formula indicata nell'esercizio 9.4 (pag. 106).

Quindi $\begin{array}{llll} |[1]_8| & = 8; & |[2]_8| & = 4; \\ |[3]_8| & = 8; & |[4]_8| & = 2; \\ |[5]_8| & = 8; & |[6]_8| & = 4; \\ |[7]_8| & = 8; & |[0]_8| & = 1. \end{array}$

4. Determinare il periodo degli elementi di $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

Soluzione

$$\begin{array}{llll} |[0]_{10}| & = 1, & |[1]_{10}| & = 10, \\ |[2]_{10}| & = 5, & |[3]_{10}| & = 10, \\ |[4]_{10}| & = 5, & |[5]_{10}| & = 2, \\ |[6]_{10}| & = 5, & |[7]_{10}| & = 10, \\ |[8]_{10}| & = 5, & |[9]_{10}| & = 10. \end{array}$$

Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 10

Esercizio 10.2 (pag 135)

Dire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

1. $15^{355} \equiv 1(mod\ 8)$;

2. $11^{48} \equiv 1(mod\ 104)$;

3. $(-5)^{433} \equiv 7(mod\ 12)$.

Soluzione

1. Poichè $15 \equiv -1(mod\ 8)$, segue che $15^{355} \equiv (-1)^{355} \equiv -1(mod\ 8)$ e quindi l'affermazione è falsa.

2. Poichè $\phi(104) = \phi(2^3)\phi(13) = 4 \cdot 12 = 48$ e $M.C.D(11, 104) = 1$, per il Teorema di Eulero-Fermat (10.3, pag 135), segue che la proprietà è vera.

3. Poichè $(-5)^2 = 25 \equiv 1(mod\ 12)$ si ha che

$$(-5)^{433} \equiv (-5)^{432} \cdot (-5) \equiv 1 \cdot (-5) \equiv 7(mod\ 12),$$

e quindi l'affermazione è vera.

Esercizio 10.3 (pag. 135)

Sia $(Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ l'anello delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Gli elementi unitari sono tutte e sole le matrici del tipo

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$.

Soluzione

Gli elementi unitari di un anello sono gli elementi invertibili: poichè nel caso delle matrici quadrate, in particolare per le matrici di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è $\neq 0$, segue la tesi.

Esercizio 10.4 (pag. 135)

Determinare l'insieme D dei divisori dello zero e il gruppo U degli elementi unitari dei seguenti anelli:

1. $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$

2. $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$

3. $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$.

Soluzione

Premettiamo che in $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ i divisori dello zero (cfr. Def. 10.3, pag. 132) sono le classi $[a]_n,\ [b]_n$ che soddisfano le condizioni:

i) $[a]_n \neq [0]_n,\ [b]_n \neq [0]_n$
ii) $[a]_n \cdot [b]_n = [0]_n$,

mentre gli elementi unitari sono le classi $[c]_n \neq [0]_n$ per le quali esiste un inverso, cioè una classe $[x]_n$ tale che $[c]_n \cdot [x]_n = [1]_n$.

1.i) $[a]_{12} \cdot [b]_{12} = [ab]_{12} = [0]_{12}$ se e e solo se $ab = 12t$, con $a \neq 12h,\ b \neq 12k$. Otteniamo

$$D = \{[2]_{12}, [3]_{12},\ [4]_{12},\ [6]_{12},\ [8]_{12},\ [9]_{12},\ [10]_{12}\}.$$

1.ii) $[c]_{12} \cdot [x]_{12} = [1]_{12} \Leftrightarrow cx = 1 + 12t \Leftrightarrow cx - 12t = 1 \Leftrightarrow MCD(c, 12) = 1$: e otteniamo

$$U = \{[1]_{12},\ [5]_{12},\ [7]_{12},\ [11]_{12}, \}.$$

2. Con calcoli analoghi si ha che, per $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$:

$$D = \{[3]_9,\ [6]_9\}$$

$$U = \{[1]_9,\ [2]_9,\ [4]_9,\ [5]_9,\ [7]_9,\ [8]_9\}.$$

3. Per $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ si ottiene che $D = \emptyset$, mentre

$$U = \{[1]_{11},\ [2]_{11},\ [3]_{11},\ [4]_{11},\ [5]_{11},\ [6]_{11},\ [7]_{11},\ [8]_{11},\ [9]_{11},\ [10]_{11}\}.$$

Osserviamo quindi che $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ risulta essere un campo.

Esercizio 10.5 (pag.143)

[1] Determinare $MCD(\ a(x), b(x))$, ove

$a(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1$ e $b(x) = 3x^3 - 5$ (in $\mathbb{R}[x]$).

Soluzione

Dall'esempio 10.8 (pag. 139) si ha che $a(x) = b(x)(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}) + x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{13}{3}$.

Procediamo con le divisioni successive, determinando $q_2(x)$ ed $r_2(x)$ tali che :

$$b(x) = (x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{13}{3})q_2(x) + r_2(x).$$

$$
\begin{array}{cccc|cc}
3x^3 & & & -5 & x^2 & +\frac{8}{3}x - \frac{13}{3}. \\ \cline{5-6}
-3x^3 & -8x^2 & +13x & & 3x & -8 \\ \cline{1-4}
0 & -8x^2 & +13x & -5 & & \\
 & 8x^2 & +64x/3 & -104/3 & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & 103x/3 & -119/3 & &
\end{array}
$$

Otteniamo $q_2(x) = 3x - 8$ e $r_2(x) = \frac{103}{3}x - \frac{119}{3}$, e quindi

$$3x^3 - 5 = (x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{13}{3})(3x - 8) + \frac{103}{3}x - \frac{119}{3}.$$

Effettuiamo ora la successiva divisione:
$x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{13}{3} = (\frac{103}{3}x - \frac{119}{3})q_3(x) + r_3(x)$:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
x^2 & +\frac{8}{3}x & -\frac{13}{3} & \frac{103}{3}x & -\frac{119}{3} \\ \cline{4-5}
-x^2 & +\frac{119}{103}x & & \frac{3}{103}x & +\frac{1181}{10609} \\ \cline{1-3}
0 & \frac{1181}{309}x & -\frac{13}{3} & & \\
 & -\frac{1181}{309}x & +\frac{140\,539}{31\,827} & & \\ \cline{1-3}
 & 0 & \frac{874}{10\,609} & &
\end{array}
$$

Si ottiene quindi che l'ultimo resto non nullo è $\frac{874}{10\,609}$ (un elemento di $\mathbb{R}$), quindi i due polinomi sono primi fra loro.

[**2**] Determinare un $MCD(c(x), d(x))$ ove $c(x) = x^3+x^2+3x+1$ e $d(x) = x^2-2$ (in $\mathbb{Z}_5[x]$).

Soluzione

Nell'esempio 10.9 abbiamo trovato quoziente e resto della divisione di $c(x)$ per $d(x)$, cioè

$$x^3 + x^2 + 3x + 1 = (x^2 - 2)(x + 1) + 3.$$

Possiamo quindi concludere che l'ultimo resto non nullo è 3 e quindi i due polinomi sono coprimi essendo $MCD(c(x), d(x)) = 3$.

[**3**] Determinare un $MCD(f(x), g(x))$ ove $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ e $g(x) = 3x^3 - 2$ (in $\mathbb{Z}_7[x]$).

Soluzione

Ancora, utilizzando i calcoli fatti nell'esempio 10.10 (pag. 140), si ha che

$$x^4 + x^2 + 1 = (3x^3 - 2)(5x) + x^2 + 3x + 1.$$

Proseguiamo nelle divisioni:

$$\begin{array}{llll|lll}
3x^3 & & & -2 & x^2 & +3x & +1 \\ \cline{5-7}
-3x^3 & -9x^2 & -3x & & 3x & -9 & \\ \cline{1-4}
0 & -9x^2 & -3x & -2 & & & \\
 & 9x^2 & +27x & +9 & & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & +24x & +7 & & &
\end{array}$$

Osservando che $24 \equiv 3(mod\ 7)$ e $9 \equiv 2(mod\ 7)$, otteniamo:

$$3x^3 - 2 = (x^2 + 3x + 1)(3x - 9) + 24x + 7 = (x^2 + 3x + 1)(3x - 2) + 3x.$$

Poichè il resto è un polinomio di primo grado, dobbiamo effettuare ancora una divisione e precisamente dobbiamo dividere $(x^2 + 3x + 1)$ per $3x$; otteniamo:

$$\begin{array}{lll|ll}
x^2 & +3x & +1 & 3x & \\ \cline{4-5}
-15x^2 & & & 5x & +1 \\ \cline{1-3}
0 & 3x & +1 & & \\
 & -3x & & & \\ \cline{1-3}
 & 0 & +1 & &
\end{array}$$

e quindi $\qquad x^2 + 3x + 1 = 3x(5x + 1) + 1.$

Poichè l'ultimo resto non nullo è un polinomio di grado zero, i polinomi dati sono primi fra loro.

Esercizio 10.6 (pag.146)

1. Siano $a(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ e $b(x) = x^3 - 4$ due polinomi di $\mathbb{Z}_7$.

Determinare il loro MCD monico ed esprimerlo come combinazione lineare di $a(x)$ e $b(x)$.

Soluzione

Operiamo le divisioni, tenendo conto delle congruenze modulo 7:

a.) da

$$\begin{array}{llll|ll}
x^4 & +3x^2 & +2x & +1 & x^3 & -4 \\ \cline{5-6}
-x^4 & & +4x & & x & \\ \cline{1-4}
0 & +3x^2 & +6x & +1 & &
\end{array}$$

otteniamo:

$x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^3 - 4)x + 3x^2 + 6x + 1.$

b.) da

$$
\begin{array}{llll|lll}
x^3 & & & -4 & 3x^2 & +6x & +1 \\ \cline{5-7}
-15x^3 & -30x^2 & -5x & & 5x & +4 & \\ \cline{1-4}
0 & +5x^2 & -5x & -4 & & & \\
 & -12x^2 & -24x & -4 & & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & -x & -1 & & &
\end{array}
$$

otteniamo:

$$x^3 - 4 = (3x^2 + 6x + 1)(5x + 4) - x - 1.$$

Infine:

c.)

$$
\begin{array}{lll|ll}
3x^2 & +6x & +1 & -x & -1 \\ \cline{4-5}
\text{-}3x^2 & -3x & & -3x & -3 \\ \cline{1-3}
0 & +3x & +1 & & \\
 & -3x & -3 & & \\ \cline{1-3}
 & 0 & -2 & &
\end{array}
$$

E quindi si ha:
$3x^2 + 6x + 1 = (-x - 1)(-3x - 3) - 2 = (x + 1)(3x + 3) - 2.$

Si conclude che i due polinomi sono coprimi (o primi tra loro o relativamente primi). Esprimiamo questo MCD come loro combinazione lineare:
Ricaviamo dal punto **c.)**:

$$-2 = 3x^2 + 6x + 1 - (3x + 3)(x + 1) \qquad (\star)$$

e dal punto **b.)**:

$$x + 1 = (3x^2 + 6x + 1)(5x - 3) - (x^3 - 4) = (3x^2 + 6x + 1)(5x - 3) - b(x);$$

sostituendo nella $(\star)$ si ha:

$$-2 = 3x^2 + 6x + 1 - (3x + 3)\left[(3x^2 + 6x + 1)(5x - 3) - b(x)\right] =$$

$$(3x^2 + 6x + 1)\left[1 - (3x + 3)(5x - 3)\right] + b(x)(3x + 3).$$

Infine, da **a.)** ricaviamo

$$-2 = a(x)(6x^2 + x + 3) + b(x)(x^3 - x^2 + 3). \qquad (\star\star)$$

Per ottenere 1 espresso come combinazione di $a(x)$ e di $b(x)$, basta moltiplicare entrambi i membri dell'espressione $(\star\star)$ per l'inverso dell'elemento -2, che, in $\mathbb{Z}_7$ è 3. Si ottiene:

$$1 = a(x)(18x^2+3x+9)+b(x)(3x^3-3x^2+9) = a(x)(4x^2+3x+2)+b(x)(3x^3+4x^2+2).$$

2. In $\mathbb{R}[x]$ si considerino i polinomi $f(x) = x^4 + 3x^3 - 12x - 36$ e $g(x) = x^2 - 9$. Decomporre $f(x)$ e $g(x)$ nel prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ e determinare un loro MCD.

Soluzione

Poichè $g(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, applichiamo il Teorema di Ruffini per verificare se $f(x)$ è divisibile per $(x-3)$ e/o per $(x+3)$.

$$f(3) = 3^4 + 3 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 - 36 = 81 + 81 - 36 - 36 \neq 0.$$

$$f(-3) = (-3)^4 - 3 \cdot 27 + 36 - 36 = 0.$$

Il polinomio $f(x)$ è quindi divisibile per $(x+3)$.

Operando la divisione otteniamo:

$x^4 + 3x^3 - 12x - 36 = (x+3)(x^3 - 12) = (x+3)(x - \sqrt[3]{12})(x^2 + \sqrt[3]{12}x + \sqrt[3]{(12)^2})$.

Poichè il polinomio di secondo grado che compare nella fattorizzazione è irriducibile, segue che $MCD(f(x), g(x)) = (x+3)$.

3. Dati i polinomi $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^7 - x$ in $\mathbb{Z}_7$, determinarne le radici.

Soluzione

$$f(x) = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1),$$

$$g(x) = x(x^6 - 1) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 8) =$$
$$x(x-1)(x^2 + x + 1)(x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

Ora resta da vedere se $h(x) = (x^2 + x + 1)$ e $k(x) = (x^2 - 2x + 4)$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}_7$.

Essendo i polinomi $h(x)$ e $k(x)$ di grado 2, si può osservare che o essi sono irriducibili, oppure devono essere decomponibili nel prodotto di due polinomi di primo grado e quindi, per il teorema di Ruffini, devono ammettere una radice. Poichè il campo $\mathbb{Z}_7$ è finito basta calcolare $h(\alpha)$ e $k(\alpha)$ $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_7$; se non ci sono radici, per il discorso precedente sulla riducibilità dei polinomi di grado due, essi saranno irriducibili.

- $h(0) = 1 \neq 0$, $h(1) = 3 \neq 0$, $h(2) = 7 = 0$ (in $\mathbb{Z}_7$) $\Rightarrow (x-2)$ è un divisore di $h(x)$ e precisamente $h(x) = (x-2)(x-4)$, (infatti anche $h(4) = 21 = 0$ in $\mathbb{Z}_7$).
- $k(0) = 4 \neq 0$, $k(1) = 3 \neq 0$, $k(2) = 4 \neq 0$, $k(3) = 7 = 0$: quindi anche $k(x)$ è riducibile in $\mathbb{Z}_7$. Cerchiamo l'altra radice. Poichè $k(5) = k(-2) \neq 0$ e $k(6) = k(-1) = 0$, il polinomio $k(x)$ è divisibile per $(x-6) = (x+1)$.

Pertanto si può concludere che:

$$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-4)(x+2)(x+1)(x-3).$$

4. Sia K un campo e siano $f(x)$ e $g(x)$ due polinomi coprimi (o relativamente primi o primi fra loro) in $K[x]$. Si provi che $f(x)$ e $g(x)$ non hanno radici in comune.

Soluzione

Se per assurdo avessero una radice $\alpha \in K$ in comune, sarebbero entrambi divisibili per $(x-\alpha)$ e quindi il loro MCD, dovendo essere divisibile per $(x-\alpha)$, avrebbe grado almeno 1 e questo contrasta con la definizione di polinomi coprimi (cfr. Definizione 10.10 pag. 142 del testo).

Esercizio 10.7 (pag.152)

Scrivere in forma algebrica e trigonometrica i seguenti numeri complessi:

1. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

2. $(1+i)^{10}$

3. $(2i+1)(3i-1)$

Soluzione

1. Per esprimere in forma algebrica il numero complesso dato, procediamo moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore, al fine di ottenere un numero reale al denominatore (ricordiamo che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato dà come risultato un numero reale (cfr. definizione 10.15, pag 149).

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{i(1+\sqrt{3})}{2}.$$

Per trovare la forma trigonometrica conviene ripartire dall'espressione data ed esprimere separatamente numeratore e denominatore.

$$1+i\sqrt{3}=2(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})),$$

$$1-i=\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})).$$

Il quoziente diventa:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2}{\sqrt{2}}(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12})+i\sin(\frac{7\pi}{12}).$$

Osservazione Dai calcoli eseguiti, si puó anche dedurre che

$$\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}))=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ i\sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{i(1+\sqrt{3})}{2}\quad \text{e quindi}$$

$$\cos(\frac{7\pi}{12})=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\quad \sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

2. Questa volta il calcolo è più semplice se si utilizza la forma trigonometrica:

Poichè $1+i=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$, usando la formula della potenza (pag. 151), si ottiene:

$(1+i)^{10}=(\sqrt{2})^{10}(\cos(\frac{10\pi}{4})+i\sin(\frac{10\pi}{4}))=2^5(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}))=32i.$

Il calcolo della potenza decima effettuato a partire dalla forma algebrica, sarebbe lungo e richiederebbe l'utilizzo dello sviluppo del binomio.

3. $(2i+1)(3i-1)=-6-2i+3i-1=-7+i$

Questa volta il calcolo che utilizza la forma trigonometrica risulta pesante e complicato, poiché gli angoli non sono quelli notevoli.

Scriviamo comunque il risultato in forma trigonometrica, per esercizio.

Otteniamo: modulo $\rho=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$, mentre l' argomento θ viene determinato sapendo che $\cos(\theta)=\frac{-7}{\sqrt{50}}$, $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{50}}$.

Esercizio 10.8 (pag.152)

Calcolare le radici terze e quinte del numero complesso $-i$.

Soluzione

Scriviamo in forma trigonometrica il numero dato:

$$-i=\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2}).$$

Radici terze:

$$\alpha_k=\cos(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3})+i\sin(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}),\ k\in\{0,1,2\}.$$

Otteniamo:

$\alpha_0=\cos(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2})$, $\alpha_1=\cos(\frac{7\pi}{6})+\sin(\frac{7\pi}{6})$, $\alpha_2=\cos(\frac{11\pi}{6})+\sin(\frac{11\pi}{6})$.

Radici quinte:

$\alpha_k=\cos(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{5})+i\sin(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{5})$ per $k\in\{0,1,2,3,4\}$.

Otteniamo:

$\alpha_0=\cos(\frac{3\pi}{10})+i\sin(\frac{3\pi}{10})$, $\quad\alpha_1=\cos(\frac{7\pi}{10})+i\sin(\frac{7\pi}{10})$,

$\alpha_2=\cos(\frac{11\pi}{10})+i\sin(\frac{11\pi}{10})$, $\quad\alpha_3=\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})$,

$\alpha_4=\cos(\frac{19\pi}{10})+i\sin(\frac{19\pi}{10})$.

Esercizio 10.9 (pag.152)

Dati $z = (1-i)$, $w = (-1+i\sqrt{3})$, $t = (-1+i)$ determinare:

1. $\bar{z},\ \bar{w},\ \bar{t},\ z^{-1},\ w^{-1},\ t^{-1}$;

2. $z^{25},\ w^{9},\ t^{25}$.

Soluzione

1. $\bar{z} = 1+i,\ \bar{w} = -1-i\sqrt{3},\ \bar{t} = -1-i$

$z^{-1} = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$,

$w^{-1} = \dfrac{1}{-1+i\sqrt{3}} = \dfrac{1}{-1+i\sqrt{3}}\cdot\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{1+3} = \dfrac{-1}{4}-\dfrac{i\sqrt{3}}{4}$,

$t^{-1} = \dfrac{1}{-1+i} = \dfrac{1}{-1+i}\cdot\dfrac{-1-i}{-1-i} = \dfrac{-1-i}{2} = \dfrac{-1}{2}-\dfrac{i}{2}$.

2. Per calcolare le potenze, è consigliabile utilizzare la forma trigonometrica del numero complesso.

$z = (1-i) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})\right)$,

$w = 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$,

$t = (-1+i) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$.

Si ottiene:

$$z^{25} = (1-i)^{25} = (\sqrt{2})^{25}\left(\cos(25\frac{7\pi}{4}) + i\sin(25\frac{7\pi}{4})\right) = 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4})\right) =$$

$$= 2^{12}(1-i), \quad (\frac{25\cdot 7\cdot\pi}{4} = 42\cdot\pi + \frac{7}{4}\pi).$$

$$w^{9} = 2^{9}\left(\cos(\frac{18\pi}{3}) + i\sin(\frac{18\pi}{3})\right) = 2^{9}\left(\cos(6\pi) + i\sin(6\pi)\right) = 2^{9}\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 2^{9},$$

$$t^{25} = (-1+i)^{25} = (\sqrt{2})^{25}\left(\cos(25\frac{3\pi}{4}) + i\sin(25\frac{3\pi}{4})\right) =$$

$$2^{12}\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right) = 2^{12}(-1+i).$$

Soluzione degli esercizi del capitolo 11

Esercizio 11.1 (*pag. 158*)

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^2$, ogni retta passante per l'origine può essere descritta come un particolare sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ della forma

$$L = \{(x,y) | \alpha x + \beta y = 0\}.$$

Si verichi che L è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione

L è un sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow \forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in L$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ si ha che

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \in L \quad e \quad k(x_1,y_1) \in L.$$

Per ipotesi $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in L \Rightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 &= 0 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 &= 0 \end{cases}$
da cui, sommando membro a membro, si ottiene $\alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2) = 0$ e quindi $(x_1+x_2, y_1+y_2) \in L$.
Inoltre $\alpha(kx_1)+\beta(ky_1) = k\alpha x_1 + k\beta y_1 = k(\alpha x_1 + \beta y_1) = 0$ da cui segue $(kx_1, ky_1) = k(x_1,y_1) \in L$.

Possiamo quindi concludere che L è sottospazio vettoriale.

Esercizio 11.2 (*pag. 158*)

Nello spazio vettoriale $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, verificare che il sottoinsieme costituito dalle matrici diagonali costituisce un sottospazio.

Soluzione

Sia D l'insieme delle matrici diagonali di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Come nell'esercizio precedente verifichiamo che $\forall\ A,B \in D$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ si ha che $A+B \in D$ e $kA \in D$.

Siano $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$;
allora
$A+B = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{bmatrix} \in D$ e $kA = \begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & kc \end{bmatrix} \in D$.

Si può concludere che D è un sottospazio vettoriale di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 11.3 (*pag. 158*)

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ di tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme delle funzioni continue e si mostri che esso costituisce un sottospazio di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soluzione

Sia $\mathcal{C}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ costituito dalle funzioni continue. Per le proprietà viste nei corsi di Analisi si ha che la somma di due funzioni continue è continua ($\forall\ f, g \in \mathcal{C} \ \Rightarrow f + g \in \mathcal{C}$) e che $\forall\ f \in \mathcal{C}\ \forall k \in \mathbb{R}$ si ha che $kf \in \mathcal{C}$.

Segue quindi la tesi.

Esercizio 11.4 (*pag. 163*)

Nello spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$, l'insieme $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base.

Soluzione

Si tratta di verificare che:

a) i vettori di $\mathcal{B}$ sono un sistema di generatori, cioè che qualsiasi polinomio di grado minore od uguale a n si puó scrivere come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

Sia $a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_i \in \mathbb{R}$, un polinomio di grado minore o uguale a n. Si vede immediatamente che $a(x)$ è combinazione lineare dei polinomi $1, x, x^2, \ldots, x^n$, con coefficienti dati dagli a_i.

b) i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti (cfr. def 11.7 pag 160). Infatti sia $b_0 + b_1 x + \cdots b_n x^n = 0$ una combinazione lineare che dá il vettore nullo. L'unica soluzione è $b_0 = b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

Esercizio 11.5 (*pag. 164*)

Dati i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$, dire, senza fare calcoli, se sono linearmente indipendenti:

1. $v_1 = (1, 4, -1), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (1, 0, 1), v_4 = (-1, 1, 0)$.

2. $w_1 = (1, 0, -1), w_2 = (0, -1, 1), w_3 = (1, -1, 0)$.

3. $u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (0, 1, 2)$.

Soluzione

1. I vettori dati sono quattro; poiché appartengono ad uno spazio vettoriale di dimensione 3 essi saranno necessariamente dipendenti.

2. Si vede immediatamente che $w_3 = w_1 + w_2$: i tre vettori sono quindi linearmente dipendenti.

3. Poiché i vettori sono due e non esiste un $k \in \mathbb{R}$ tale che $u_1 = ku_2$, essi sono linearmente indipendenti.

Esercizio 11.6 (*pag. 164*)

Si determini per quali valori di h e di k sono linearmente indipendenti i vettori
$v_1 = (h, 1, 0)$, $v_2 = (k, h, 1)$, $v_3 = (-2, 0, 2)$.

Soluzione

I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti se (cfr. Definizione 11.7, pag. 160 del testo):

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Poichè da $a = b = c = 0$ segue $av_1 + bv_2 + cv_3 = (0, 0, 0)$, resta da mostrare l'implicazione inversa. Consideriamo la combinazione:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = a(h, 1, 0) + b(k, h, 1) + c(-2, 0, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(ah, a, 0) + (bk, bh, b) + (-2c, 0, 2c) = (ah + bk - 2c, a + bh, b + 2c) = (0, 0, 0).$$

Poichè due vettori sono uguali se e solo se hanno ordinatamente uguali le componenti, si ottiene il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} ah + bk - 2c & = 0 \\ a + bh & = 0 \\ b + 2c & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ah + bk - 2c & = 0 \\ a & = -bh \\ b & = -2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(-h^2 + k + 1) & = 0 \\ a & = -bh \\ -2c & = b. \end{cases}$$

Se $-h^2 + k + 1 = 0$ cioè se $h^2 = k + 1$, la prima equazione è verificata per ogni b.
Se ad esempio assumiamo $b = -2$, otteniamo $a = 2h$, $b = -2$, $c = 1$ che quindi sono una terna di coefficienti non tutti nulli tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 = (0, 0, 0)$: i vettori sono perció linearmente dipendenti.

Se invece $h^2 \neq k + 1 \Rightarrow b = 0$, e quindi si ottiene anche $a = 0$ e $c = 0$ e in questo caso i vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 11.7 (*pag. 164*)

Dati i vettori:

a) $v = (8, 2, k, -10)$ e $v_1 = (3, 1, 2, -3)$ $v_2 = (0, 0, 0, 1)$ $v_3 = (1, 0, 1, 0)$,
b) $v = (1, 2, k)$ e $v_1 = (0, 1, 2)$ $v_2 = (1, 1, 1)$ $v_3 = (1, 0, -3)$,

rispettivamente in $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, determinare, in ciascun caso, i valori del parametro reale k per i quali il vettore $v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, cioè v appartenga al sottospazio generato da v_1, v_2, v_3.

Soluzione

a) Dobbiamo trovare i valori di k per cui esistano tre scalari a, b, $c \in \mathbb{R}$ tali che

$$(8, 2, k, -10) = a(3, 1, 2, -3) + b(0, 0, 0, 1) + c(1, 0, 1, 0) = (3a + c, a, 2a + c, -3a + b).$$

Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3a+c &= 8 \\ a &= 2 \\ 2a+c &= k \\ -3a+b &= -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6+c &= 8 \\ a &= 2 \\ 4+c &= k \\ -6+b &= -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c &= 2 \\ a &= 2 \\ c &= k-4 \quad = 2 \\ b &= -4 \end{cases}$$

Si conclude che $k = 6$.

b) Dobbiamo determinare il valore del parametro reale k in modo che esistano $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ per cui valga l'uguaglianza:

$$(1,2,k) = a(0,1,2) + b(1,1,1) + c(1,0,-3) = (b+c, a+b, 2a+b-3c).$$

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a+b &= 2 \\ 2a+b-3c &= k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c &= 1-b \\ a &= 2-b \\ 2(2-b)+b-3(1-b) &= k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c &= 1-b \\ a &= 2-b \\ 2b &= k-1 \end{cases}$$

Otteniamo quindi $c = \dfrac{3-k}{2},\ a = \dfrac{5-k}{2},\ b = \dfrac{k-1}{2}$, e possiamo concludere che ci sono infinite terne soddisfacenti la condizione, cioè le scritture di v come combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono infinite.

Esercizio 11.8 (*pag. 164*)

Sia $\mathbb{R}^3 = V_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle terne di numeri reali e siano $S = \langle (1,1,2), (1,1,1) \rangle$ e $T = \langle (1,2,3), (2,1,2) \rangle$ due sottospazi. Determinare $\dim S,\ \dim T,\ \dim S \cap T,\ \dim(S+T)$.

Soluzione

Innanzi tutto $\dim S = 2$ in quanto i due vettori $(1,1,2)$ e $(1,1,1)$ sono linearmente indipendenti, poiché $(1,1,2) \neq k(1,1,1), \forall\ k \in \mathbb{R}$.

Analogamente $\dim T = 2$.

Poiché per la formula di Grassmann (cfr Prop. 11.7 pag. 164) si ha che

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T),$$

ci basta determinare la dimensione di $S \cap T$ oppure quella di $S+T$.

Determiniamo $S \cap T$ e la sua dimensione.

$S \cap T = \{(x,y,z) \,|(x,y,z) = a(1,1,2) + b((1,1,1) = c(1,2,3) + d(2,1,2)\}$.

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a+b &= c+2d \\ a+b &= 2c+d \\ 2a+b &= 3c+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= c+2d \\ c+2d &= 2c+d \\ 2a+b &= 3c+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= c+2d = 3c \\ d &= c \\ 2a+b &= 5c \end{cases}$$

da cui segue $a = 2c,\ b = c,\ d = c$.

Quindi i vettori appartenenti ad $S \cap T$ sono tutti e soli i vettori della forma

$$(x, y, z) = c(1, 2, 3) + c(2, 1, 2) = c(3, 3, 5).$$

Si può concludere che $S \cap T = \langle (3, 3, 5) \rangle$ ha dimensione 1 e quindi $\dim(S+T) = 3$.

Esercizio 11.9 (*pag. 165*)

Analogamente al punto precedente si considerino i sottospazi

$$S = \langle (1, -1, 2), (0, 1, 1) \rangle \quad \text{e} \quad T = \langle (1, 2, -1), (0, 3, 1) \rangle$$

e si determinino $\dim S,\ \dim T,\ \dim S \cap T,\ \dim(S + T)$.

Soluzione

Come nell'esercizio precedente $\dim S = 2$ e $\dim T = 2$ poiché né $(1, -1, 2)$ è multiplo di $(0, 1, 1)$, né $(1, 2, -1)$ è multiplo di $(0, 3, 1)$.

$$S \cap T = \{(x, y, z) \,|(x, y, z) = a(1, -1, 2) + b(0, 1, 1) = c(1, 2, -1) + d(0, 3, 1)\,\}.$$

Otteniamo il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c \\ -a + b = & & 2c + 3d \\ 2a + b = & & -c + d \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} a = & c \\ b = & 3c + 3d \\ b = & -3c + d \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c \\ 3c + 3d = & & -3c + d \\ b & = & -3c + d \end{array} \right.$$

e quindi $a = c,\ d = -3c,\ b = -6c$.

Deduciamo che gli elementi appartenenti ad $S \cap T$ sono tutti e soli i vettori della forma:

$(x, y, z) = c(1, -1, 2) - 6c(0, 1, 1) = (c, -c, 2c) + (0, -6c, -6c) = (c, -7c, -4c)$, e che il sottospazio $S \cap T = \langle (1, -7, -4) \rangle$ ha dimensione 1 e di conseguenza $\dim(S + T) = 3$.

Esercizio 11.10 (*pag. 168*)

Si provi che la funzione da $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita da $f(u, v) = u^\top v$ è un prodotto scalare.

Soluzione

Per verificare che f è prodotto scalare dobbiamo verificare che sono soddisfatte le condizioni della definizione 11.11 (pag 165) per ogni $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni terna di vettori $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ v = (y_1, y_2, \cdots, y_n),\ w = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

1. Simmetria: Verifichiamo che $f(u, v) = f(v, u)$ cioé che $u^\top v = v^\top u$.

$$u^\top v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (y_1, y_2 \cdots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n = \sum_1^n x_iy_i.$$

$$v^\top u = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} (x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots y_nx_n = \sum_1^n y_ix_i.$$

I due prodotti sono uguali per la commutatività del prodotto in $\mathbb{R}$.

2. Bilinearità. Verifichiamo che $f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w)$.

Infatti:
$f(\alpha u+\beta v, w) = (\alpha u+\beta v)^\top w = [(\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)+(\beta y_1, \cdots, \beta y_n)]^\top (z_1, \cdots, z_n) =$
$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \cdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{bmatrix} (z_1, z_2, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i$ e

$\alpha f(u, v) + \beta f(u, w) = \alpha u^\top w + \beta v^\top w =$
$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (z_1, z_2, \cdots, z_n) + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} (z_1, z_2, \cdots, z_n) = \alpha \sum_{i=1}^n x_iz_i + \beta \sum_{i=1}^n y_iz_i =$
$\sum_{i=1}^n \alpha x_iz_i + \beta y_iz_i = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_1.$

Analogamente
$f(w, \alpha u+\beta v) = w^\top (\alpha u+\beta v) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{bmatrix} (\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \cdots, \alpha x_n+\beta y_n) =$
$\sum_{i=1}^n z_i(\alpha x_i + \beta y_i)) = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \alpha u^\top w + \beta v^\top w = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w).$

3. Per ogni u si deve ottenere che $f(u, u) \geq 0$ e che $f(u, u) = 0 \iff u = 0$. Nel nostro caso abbiamo:
$f(u, u) = u^\top u = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ se e solo se $x_i = 0 \; \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Esercizio 11.11 (*pag. 168*)

Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ (dotato del prodotto scalare canonico, definito nell'Esempio **11.14**). Si dica se i seguenti insiemi sono ortogonali:

1. $A = \{a, b\}$ con $a = (1, 2, 2),\ b = (2, 1, -2)$.

2. $C = \{a,\ b,\ c\}$ con $a = (1, 2, 2),\ b = (2, 1, -2),\ c = (0, 1, 0)$.

3. $X = \{x,\ y,\ z\}$ con $x = (0, 2, 1),\ y = (2, 0, 0),\ z = (0, -1, 2)$.

Soluzione

Verifichiamo se i vettori di ciascun insieme sono a due a due ortogonali (cfr. Def. 11.14 pag.166).

1. Poiché il prodotto scalare $(a, b) = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 + 2(-2) = 2 + 2 - 4 = 0$, i due vettori sono ortogonali.

2. Per il punto precedente a e b sono ortogonali.
Consideriamo ora $(a, c) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$, quindi a e c non sono ortogonali. Concludiamo quindi che C non è un insieme di vettori ortogonali.

3. $(x, y) = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
$(x, z) = 0 \cdot 0 + 2(-1) + 1 \cdot 2 = 0$
$(y, z) = 2 \cdot 0 + 0(-1) + 0 \cdot 2) = 0.$

Poiché tutti i prodotti scalari sono nulli si puó concludere che X è un insieme ortogonale.

Esercizio 11.12 (*pag. 168*)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ (dotato del prodotto scalare canonico):

1.a si determini l'insieme S dei vettori ortogonali al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

1.b si verifichi che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$;

2.a si determini l'insieme T dei vettori ortogonali ai vettori

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

2.b si verifichi che T è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione

1.a $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x + y + z = 0 \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | z = -x - y \right\}.$$

1.b S è un sottospazio: infatti per ogni coppia di vettori $s_1,\ s_2$ di S e per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha che $s_1 + s_2 \in S$ e $ks_1 \in S$. Infatti, siano

$$s_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S$$

cioé $s_1,\ s_2$ soddisfino le condizioni $x+y+z=0,\ a+b+c=0$.

Si ha che

$$s_1+s_2=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+a\\ y+b\\ z+c\end{pmatrix}$$

e quindi s_1+s_2 appartiene ad S in quanto le sue componenti soddisfano la condizione data, $((x+a)+(y+b)+(z+c)=(x+y+z)+(a+b+c)=0)$.

Inoltre

$k\begin{pmatrix} x\\ y\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx\\ ky\\ kx\end{pmatrix}$ e quindi anche questo elemento sta in S in quanto $kx+ky+kz=k(x+y+z)=0$.

Osserviamo che il sottospazio S puó essere descritto anche nel modo seguente:

$$S=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ -x-y\end{pmatrix}|x,\ y\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

1.a $T=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\middle|\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)=0,\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)=0\right\}=$

$$=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\middle|\left\{\begin{array}{c} x+z=0\\ y=0\end{array}\right\}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}|z=-x,y=0\right\}.$$

2.b T è un sottospazio: infatti per ogni coppia di vettori $t_1,\ t_2$ di T e per ogni $k\in\mathbb{R}$ si ha che $t_1+t_2\in T$ e $kt_1\in T$. Siano

$t_1=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},t_2=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$, allora $k\begin{pmatrix} x\\ y\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx\\ ky\\ kx\end{pmatrix}$ e

$$t_1+t_2=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+a\\ y+b\\ z+c\end{pmatrix}.$$

Tali vettori appartengono a T poiché sono soddisfatte le condizioni: $ky=0$ e $x+a+z+c=(x+z)+(a+c)=0$, $y+b=0$ e $kx+ky=k(x+z)=0$. Come al punto precedente, il sottospazio puó essere descritto anche nel modo seguente:

$$T=\left\{\begin{pmatrix} x\\ 0\\ -x\end{pmatrix}|\forall x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Soluzione degli esercizi del capitolo 12

Esercizio 12.2 (*pag.177*)

Siano

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Dimostrare che vale l'uguaglianza:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)^2.$$

Soluzione

Basta applicare il Teorema di Binet (cfr. Teor. 12.12, pag. 176).

Esercizio 12.3 (*pag.177*)

Determinare il valore del parametro reale k per il quale è singolare la matrice A ottenuta come prodotto delle matrici

$$B = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Calcoliamo il prodotto $BC = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2+2 & 3k \\ 3k & 2+k^2 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det BC = \ (2+k^2)^2 - 9k^2 = k^4 - 5k^2 + 4 = 0 \iff k^2 = 1, k^2 = 4$, si ottengono i valori: $k = \pm 1,\ k = \pm 2$.

Esercizio 12.4 (*pag. 177*)

Mostrare che sono linearmente dipendenti i vettori:

$$v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (-2, 1, -5),\ v_3 = (0, 5, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

Soluzione

Utilizziamo la prop. 12.1 (pag. 176). Poiché:

$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 30 + 25 + 4 = 0,$

si conclude che i tre vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti.

(Senza calcoli si puó anche vedere che $v_3 = 2v_1 + v_2$.)

Esercizio 12.5 (*pag.177*)

Determinare il valore del parametro reale k per cui i vettori

$$v_1 = (1, 2, k, k-1),\ v_2 = (0, 1, -1, k),\ v_3 = (1, 0, 0, 1),\ v_4 = (k, 0, 0, 0) \ \in \mathbb{R}^4.$$

sono linearmente indipendenti.

Soluzione

Il problema posto equivale (cfr prop. 12.1) a determinare il valore del parametro reale k per cui:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & 0 \\ k-1 & k & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Calcoliamo $\det A$ utilizzando il teorema di Laplace e sviluppando rispetto alla quarta colonna.

Ponendo $k \neq 0$ (altrimenti $\det A = 0$), otteniamo:

$$detA = k \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ k-1 & k & 1 \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ k & -1 \end{bmatrix} = k(-2-k).$$

Quindi $detA \neq 0$ per $k \neq 0,\ k \neq -2$ e i vettori sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0,\ k \neq -2$.

Esercizio 12.6 (*pag. 179*)

Nel caso in cui esistano, scrivere le matrici inverse di:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

1. $\det(A) = 1 \neq 0$, per cui la matrice è invertibile.

La sua inversa è $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $\det(B) = 0$ per cui la matrice B non è invertibile.

3. $\det(C) = 9$, per cui la matrice è invertibile.

La sua inversa è $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

4. $\det D = 1$, per cui la matrice è invertibile.

La sua inversa è $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 12.7 (*pag. 181*)

Risolvere, usando il metodo di Cramer, i seguenti sistemi lineari:

1) $\begin{cases} & y & +4z & = & 5 \\ x & +y & -3z & = & -4 \\ 4x & +2y & +z & = & -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x & +3y & +2z & = & 3 \\ 2x & -y & -3z & = & -8 \\ & y & +z & = & 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 1. \end{cases}$

Soluzione

1) Matrice associata al sistema lineare:

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\det A_1 = -12 + 8 - 16 - 1 = -21 \neq 0$.

Quindi il sistema ammette una ed una sola soluzione.

Determiniamo la soluzione usando il metodo esposto nell'osservazione 12.5 (pag. 180).

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{\det A_1} = \frac{42}{-21} = -2,$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 1 & -4 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}}{\det A_1} = \frac{-21}{-21} = 1,$$

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}}{\det A_1} = \frac{-21}{-21} = 1.$$

La soluzione pertanto é $(-2, 1, 1)$.

2)La matrice associata al sistema lineare è

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det A_2 = -1 + 4 + 3 - 6 = 0$, il sistema **non** ammette una ed una sola soluzione (cfr. Es. 12.7 bis).

3) La matrice associata al sistema lineare è $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

poiché $\det A_3 = 2+2+9-6-6-1 = 0$, il sistema **non** ammette una ed una sola soluzione (cfr. Es. 12.7 bis).

Dopo l'esercizio 12.8, utilizzando i metodi presentati a partire dalla pag. 186, per esercizio, completeremo le risposte ai punti **2)** e **3)**

Esercizio 12.8 (*pag. 185*)

Stabilire, al variare del parametro reale k il rango delle matrici seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ k & 0 & k & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3k & 0 & k \\ 2 & 2k & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & k & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

[**1.**] Poiché la matrice A ha tre righe, $carA \leq 3$. Consideriamo la sottomatrice M_2 formata dagli elementi che stanno sulla I e IV colonna e sulla I e II riga, cioè la matrice i cui elementi sono a_{11}, a_{14}, a_{21} e a_{24}, quindi $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det(M_2) = -1 \neq 0$ segue che $car(A) \geq 2$.

Vediamo se esistono valori del parametro reale k per cui $car(A) = 3$.

Per il procedimento di orlatura di Kroneker (12.4.1, pag 183 del testo) possiamo limitarci a considerare le due seguenti sottomatrici di ordine 3:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ k & k & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(M_3) = -k^2 + 2k = k(2-k) \neq 0$ se e solo se $k \neq 0, 2$ e $\det(M_3') = k \neq 0$ se e solo se $k \neq 0$, si può concludere che $car(A) = 2$ se $k = 0$, mentre $car(A) = 3$ se $k \neq 0$.

[**2.**] Poiché la matrice B ha quattro righe e tre colonne, $car(B) \leq 3 = \min\{3, 4\}$.

Cerchiamo una sottomatrice di ordine 2, non singolare, possibilmente priva di parametri, ad esempio $M_2 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det(M_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow car(B) \geq 2$.

Orliamo M_2 in tutti i modi possibili e otteniamo

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2k & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } M_3' = \begin{bmatrix} 3k & 0 & k \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiché

$\det(M_3) = 20 - 2 + 4k = 18 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{2}$ e

$\det(M_3') = 30k + k - 3k = 28k = 0 \Leftrightarrow k = 0$,

si conclude che $car(B) = 3$, perchè esiste un minore di ordine 3 non singolare per ogni valore di k.

[3.] Poiché la matrice C ha 4 righe e 4 colonne, $car(C) \leq 4$.

Consideriamo la sottomatrice $M_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Si ha che $\det(M_2) = -1 \neq 0$ e quindi $car(C) \geq 2$.

Orliamo e otteniamo 4 sottomatrici di dimensione 3, precisamente:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 2 & k & k \end{bmatrix}; M_3' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & k & 0 \end{bmatrix}; M_3'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix};$$

$$M_3''' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Facendo i calcoli si ottiene: $\det(M_3) = k^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \pm\sqrt{2}$;

$\det(M_3') = k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$.

Non è necessario eseguire altri calcoli poiché $\forall k$ esiste un minore di ordine 3 non singolare e quindi $car(C) \geq 3$.

Poiché la caratteristica (rango) della matrice C può essere 4, non resta che calcolare il determinante di C.

Sviluppando rispetto alla prima colonna otteniamo:

$$\det(C) = -k \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ k & k & 0 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix} =$$

$-k(k^3-k^2-k)+2(1+k^2-k-1) = -k^4+k^3+3k^2-2k = -k(k^3-k^2+3k-2)$.

Tale determinante si annulla per $k = 0$ e per $k = \alpha$, ove α è soluzione dell'equazione $k^3 - k^2 + 3k - 2 = 0$.

(In questo caso, utilizzando la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado, si ottiene l'unica radice

$\alpha = \frac{1}{6}\sqrt[3]{(116 + 12\sqrt{321})} - \frac{16}{3\sqrt[3]{(116+12\sqrt{321})}} + \frac{1}{3}$).

Quindi la matrice data ha rango 4 per ogni $k \neq 0, k \neq \alpha$, e rango tre per $k = 0$ e $k = \alpha$.

Esercizio 12.7 bis (*pag. 181*)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

2) $\begin{cases} x & +3y & +2z & = & 3 \\ 2x & -y & -3z & = & -8 \\ & y & +z & = & 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 1. \end{cases}$

Soluzione

2) Abbiamo visto (esercizio 12.7) che la matrice A_2 associata al sistema è singolare. Occorre quindi determinare $car A_2$ e confrontarla con $car A_2|b_2$, ove b_2 è il vettore dei termini noti.

Se $carA_2 = carA_2|b_2$ si avranno soluzioni (infinite, dipendenti da uno o più parametri), se $carA_2 \neq carA_2|b_2$ il sistema non ammette soluzioni.

Si vede che $carA_2 = 2$ poiché $det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -7 \neq 0$,

quindi $2 \leq carA_2|b_2 \leq 3$.

Consideriamo le due sottomatrici orlate della sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ che sono:

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_2' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Sappiamo (eser. 12.7) che $detA_2 = 0$.
Poiché anche $detA_2' = -2 + 6 + 8 - 12 = 0$, si conclude che $carA_2 = carA_2|b_2$, quindi il sistema ammette soluzioni, che possiamo determinare con il metodo di Cramer.
Essendo $carA_2 = 2$, in quanto $det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$, il sistema dato è equivalente al sistema di due equazioni e due incognite:

$\begin{cases} x + 3y & = 3 - 2z \\ 2x - y & = -8 + 3z \end{cases}$ che ha come matrice associata $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det \bar{A} \neq 0$, per il teorema di Cramer, avremo soluzioni (che dipenderanno dal parametro reale $k = z$):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 2h & 3 \\ -8 - 3h & -1 \end{vmatrix}}{\det \bar{A}} = \frac{21 - 7h}{-7} = -3 + h,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - 2h \\ 2 & -8 - 3h \end{vmatrix}}{\det \bar{A}} = \frac{-14 + 7h}{-7} = 2 - h,$$

Le infinite soluzioni sono le terne $(-3 + h, 2 - h, h)$, $\forall h \in \mathbb{R}$.

3) Procediamo come al punto **2)**.
La matrice associata al sistema lineare è singolare, quindi la sua caratteristica è minore o uguale a 2.
Poiché $det\bar{A}_3 = det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$, la caratteristica è esattamente 2.

Determiniamo ora la caratterica della matrice completa $A_3|b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Consideriamo le due sottomatrici orlate di $\bar{A}_3$: una di esse è la matrice A_3 che era singolare. Calcoliamo quindi $detA_3' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$.

In questo caso $carA_3 \neq carA_3|b_3$, quindi il sistema dato non ammette soluzioni.

Osservazione: il fatto che il sistema non ammetta soluzioni, è equivalente a dire che il vettore dei termini noti $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ non si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ovvero $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Esercizio 12.9 (*pag. 192*)

Determinare gli eventuali valori del parametro reale k per i quali ammettono soluzione i seguenti sistemi:

1) $$\begin{cases} 2x + ky = k-1 \\ x + (k+2)ky = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x + y = -k \\ x + (k+1)y + z = 2 \\ 3x + (2k+3)y + (1-k)z = 5 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x + (k-1)y + 3z + 2t = 2 \\ x + 2y + (1+k)z + 4t = 2+k \\ z + 2t = 3 \end{cases}$$

Soluzione

La richiesta dell'esercizio è soltanto quella di decidere se i sistemi dati sono risolubili oppure no.

Basta quindi, in accordo con il teorema di Rouché -Capelli (pag. 187), stabilire quando la caratteristica della matrice dei coefficienti associata al sistema è uguale alla caratteristica della matrice completa.

1) Matrice dei coefficienti del primo sistema è $B_1 = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & (k+2)k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

la matrice completa è $B_1|b_1 = \begin{bmatrix} 2 & k & k-1 \\ 1 & (k+2)k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Poiché la caratteristica di B_1 è minore o uguale a 2, consideriamo i minori di ordine 2:

$\det \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 - k \neq 0 \iff k \neq 2;$

$\det \begin{bmatrix} 1 & (k+2)k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - k^2 - 2k \neq 0 \iff k \neq -1 \pm \sqrt{2}.$

Quindi per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ esiste un minore non nullo, perciò $carB_1 = 2$.

Calcoliamo ora $detB_1|b_1 = \begin{bmatrix} 2 & k & k-1 \\ 1 & (k+2)k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -k^3 + 3k^2 + 10k - 3.$

Quindi il sistema ammetterà soluzioni soltanto per i valori di k che annullano il determinante di $B_1|b_1$ (in questo caso sono tre radici reali che si possono determinare con la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado).

2) Matrice dei coefficienti del secondo sistema è $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 3 & 2k+3 & 1-k \end{bmatrix}$,

la matrice completa è $B_2|b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -k \\ 1 & k+1 & 1 & 2 \\ 3 & 2k+3 & 1-k & 5 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow carB_2 \geq 2$ (e quindi anche $carB_2|b_2 \geq 2$).

Si ha che $\det B_2 = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2k+3 \end{vmatrix} + (1-k) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} =$
$= -(2k+3-3) + (1-k)(k+1-1) = -k(k+1),$

quindi $detB_2 = 0 \iff k = 0$ oppure $k = -1$.

Se $k \neq 0, -1$ la caratteristica di B_2 è uguale a 3 ed è uguale alla caratteristica di $B_2|b_2$ (che ha solo tre righe) e quindi il sistema ha una ed una sola soluzione che si puó calcolare con il procedimento di Cramer.

Se $k = 0$ oppure $k = -1$, $car(B_2) = 2$ e occorre precisare la caratteristica di $B_2|b_2$ (che puó essere 2 oppure 3.

Consideriamo separatamente i due casi:

$k = 0$: in questo caso si ha $B_2|b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$, e $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0$ si conclude che anche $carB_2|b_2 = 2$ e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

$k = -1$: in questo caso si ha $B_2|b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0$, e $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 0$ si conclude che anche in questo caso $carB_2|b_2 = 2$ e quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

3) Matrice dei coefficienti del terzo sistema è $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & k+1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

la matrice completa $B_3|b_3 = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & k+1 & 4 & 2+k \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Poiché le righe sono tre, $car(B_3) \leq 3$ e poiché det $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow car(B_3) \geq 2$.

Consideriamo le sottomatrici orlate:

$B_3' = \begin{bmatrix} k-1 & 3 & 2 \\ 2 & k+1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_3'' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k+1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B_3''' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ k+1 & 4 & 2+k \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Si ha che $\det B_3' = 2k^2 - 4k - 6 = 2(k^2 - 2k - 3)$, $\det B_3'' = 2(k-3)$ e $\det B_3''' = -6k + 18$.

Quindi i minori sono contemporaneamente nulli solo per $k = 3$.

Possiamo concludere che per $k \neq 3$ la caratteristica di B_3 è 3, e in tal caso ci saranno soluzioni (∞^1), in quanto la caratteristica della matrice completa non puó che essere 3.

Se $k = 3$ allora $\det B_3' = \det B_3'' = detB_3''' = 0$ quindi $carB_3 = 2$. Occorre determinare la caratteristica della matrice completa:

$B_3|b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Senza fare calcoli, si vede che la terza riga è la differenza tra la seconda e la prima: quindi concludiamo che $carB_3|b_3 = 2$ e il sistema ammette soluzioni (∞^2).

Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 13

Proposizione 13.7 (pag. 198)

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita ed $f : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare tra V e W, allora
a) f è suriettiva $\Leftrightarrow \dim f(V) = \dim W$.
b) f è iniettiva $\Leftrightarrow \dim \ker f = 0$.

Dimostrazione
a) f suriettiva $\Rightarrow \dim f(V) = \dim W$.
Poichè f è suriettiva, $f(V) = W$ quindi $\dim f(V) = \dim W$.

Viceversa se $\dim f(V) = \dim W$, poichè $f(V)$ è un sottospazio di W, si ha che $f(V) \subseteq W$ e una base di $f(V)$ è inclusa in W. Poichè i due spazi hanno la stessa dimensione segue che $f(V) = W$ e quindi la f è suriettiva (per definizione).

b) f iniettiva $\Rightarrow \dim \ker f = 0$.
Infatti, se f è iniettiva, ogni elemento di W ha al più una controimmagine in V, in particolare $\ker f = \{v \in V \,|\, f(v) = 0_W\} = \{0_V\}$ e quindi $\dim \ker f = 0$.

Viceversa se $\dim \ker f = 0$ segue che f è iniettiva. Infatti se, per assurdo, esistessero due vettori distinti v_1, v_2 tali che $f(v_1) = f(v_2)$, avremmo anche $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0_W$ e quindi l'elemento $v_1 - v_2 \neq 0_V$ apparterrebbe al $\ker f$: assurdo (perchè per ipotesi $\ker f = \{0_V\}$, avendo dimensione 0.)

Esercizio 13.1 (pag 202)

Date le seguenti applicazioni, dire quali sono lineari:

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ c-b \end{pmatrix}$.

2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -a \\ -a+b \\ -a+b+2 \end{pmatrix}$.

3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $h\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = 2a + b$.

4. $l : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $l\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a+b \end{pmatrix}$.

Soluzione

1. Verifichiamo che $\forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ siano verificate le uguaglianze: $f(v+w) = f(v) + f(w)$ e $kf(v) = f(kv)$.

- $f(v+w) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (a+a')+(b+b') \\ b+b' \\ (c+c')-(b+b') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)+(a'+b') \\ b+b' \\ (c-b)+(c'-b') \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ c-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b' \\ b' \\ c'-b' \end{pmatrix} = f(v) + f(w).$$

- $kf(v) = kf\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = k\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ c-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a+b) \\ kb \\ k(c-b) \end{pmatrix} = f(kv).$

2. Ancora dovremmo verificare che $\forall k \in \mathbb{R}$, e per ogni vettore $\bar{v}, \bar{w}$ di $\mathbb{R}^2$ sono verificate le uguaglianze $g(\bar{v}+\bar{w}) = g(\bar{v}) + g(\bar{w})$ e $kg(\bar{v}) = g(k\bar{v})$.

Si vede però che, considerando ad esempio i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ha che

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mentre

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Si conclude che l'applicazione g non è lineare.

Osservazione È molto piú rapido concludere che l'applicazione g non è lineare osservando che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\forall\ \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ consideriamo

$h(\bar{v}+\bar{w}) = h\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix} =$

$= 2(a+a') + (b+b') = (2a+b) + (2a'+b') = h(\bar{v}) + h(\bar{w}).$

Inoltre $h(k\bar{v}) = h\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = 2ka+kb = k(2a+b) = kh(\bar{v})$
e quindi l'applicazione h è lineare.

4. Come l'applicazione g del punto 2, anche 'applicazione l non è lineare.
Infatti $l\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 13.2 (pag. 202)

Determinare la matrice associata alle seguenti applicazioni lineari da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica:

1. $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$.

2. $g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ a+b \end{pmatrix}$.

3. $h\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

4. $t\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3a \\ a-b \\ b-c \end{pmatrix}$.

Soluzione

1. Determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:
$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
La matrice è quindi: $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Ancora determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:
$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
La matrice è quindi: $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Ancora determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$h\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_h=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

4. Ancora determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$t\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},t\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_t=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Esercizio 13.3 (pag.202)

Sia $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da:

$$g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\x+y\\z\\z+x\end{pmatrix}$$

a) Verificare che g è lineare.

b) Determinare la matrice associata all'applicazione g (rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$).

c) Determinare $\ker g$ e Img.

Soluzione

a) L'applicazione g è lineare. Infatti $\forall\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ e $\forall k\in\mathbb{R}$ si ha

i) $$g\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=g\left(\begin{pmatrix}x+a\\y+b\\z+c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2(x+a)\\(x+a)+(y+b)\\z+c\\(z+c)+(x+a)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2x+2a\\(x+y)+(a+b)\\z+c\\(z+x)+(c+a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\(x+y)\\z\\(z+x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2a\\(a+b)\\c\\(c+a)\end{pmatrix}=$$

$$= g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right);$$

ii) $g\left(k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2kx \\ kx+ky \\ kz \\ kz+kx \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ z \\ z+x \end{pmatrix} = kg\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right).$

b) Determiniamo le immagini dei vettori della base canonica:

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice associata all'applicazione g, rispetto alla base canonica, è

$$M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Per il punto precedente si ha che $Img = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi avrà dimensione al più 3, anzi la dimensione sará 3 perché il rango della matrice M_g è 3. Segue quindi che $\dim kerg = 0$ e quindi $\ker g = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Osservazione Si poteva procedere anche nel seguente modo:
determiniamo $\ker g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ z \\ z+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Le componenti dei vettori in $\ker g$ hanno quindi le componenti che soddisfano le condizioni:

$$\begin{cases} 2z & = 0 \\ x+y & = 0 \\ z & = 0 \\ z+x & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Si conclude che $\ker g = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ e quindi ha dimensione 0 (e la g è iniettiva).

La dimensione di Img sarà 3 per il teorema 13.1 (e da questo segue ancora che 3 è la caratteristica della matrice M_g).

Esercizio 13.4 (pag. 203)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione definita da $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$.

Verificare che f è lineare e determinare $\ker f$ e Imf.

Soluzione

- f è lineare: infatti $\forall \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ si ha:

  $f(\bar{v}+\bar{w}) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ (a+a')+(b+b') \end{pmatrix} =$

  $= \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ a'+b' \end{pmatrix} = f(\bar{v}) + f(\bar{w}).$

  $f(k\bar{v}) = f\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ k(a+b) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} =$
  $kf(\bar{v}).$

- $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Quindi $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$,
$\dim(\ker f) = 0$, e quindi la f è iniettiva.

Segue che $\dim(Imf) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

Esercizio 13.5 (pag 203)

Considerate le applicazioni dell'esercizio **13.2,** per ciascuna di esse

a) determinare l'immagine del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) determinare, quando esistono, le preimmagini dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

c) determinare la matrice associata.

Soluzione

a1. $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a2. $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a3. $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a4. $t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Determiniamo, se esistono, le controimmagini richieste:

b1. Rispetto ad f. Poiché $f\colon\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$, si tratta di vedere se esistono soluzioni delle uguaglianze

i) $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **iii)** $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
iv) $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si conclude che **i), ii), iv)** non hanno soluzione poiché il vettore al primo membro ha la seconda componente nulla, mentre al secondo membro la seconda componente è diversa da zero e quindi gli elementi corrispondenti non hanno controimmagine, mentre **iii)** ha soluzioni $x = 1, y = 1$ quindi

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b2. Rispetto a g. Poiché $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix}$, si tratta di vedere se esistono soluzioni delle uguaglianze

i) $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $= \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

iii) $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **iv)** $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In tutti e quattro i casi non ci sono soluzioni in quanto le condizioni sulla prima e seconda componente sono incompatibili.

b3. Rispetto ad h. Poiché $h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, si tratta di vedere se esistono soluzioni delle uguaglianze

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $= \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **iv)** $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Questa volta ci sono soluzioni solo nel caso **ii)** e precisamente si ha $y = 1,\ z = 1$ quindi $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre le altre uguaglianze sono impossibili.

b4. rispetto a t. Poiché $t\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix}$, si tratta di vedere se esistono soluzioni delle uguaglianze:

i) $\begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **ii)** $= \begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

iii) $\begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, **iv)** $\begin{pmatrix} 3x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

in questo caso tutte le uguaglianze hanno soluzione, precisamente:

i) $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{-2}{3},\ z = \frac{-5}{3}$, quindi $t\left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

ii) $x = 0,\ y = -1,\ z = -2$, quindi $t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

iii) $x = \dfrac{1}{3},\ y = \dfrac{1}{3},\ z = \dfrac{-2}{3}$, quindi $t\left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

iv) $x = \dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{5}{3},\ z = \dfrac{5}{3}$, quindi $t\left(\begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Determiniamo la matrice associata alle applicazioni lineari date. Poiché non si specificano le basi, utilizziamo le basi canoniche sia per il dominio che per il codominio.

c1.
$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

La matrice è quindi: $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Poiché $car(M_f) = 2$ si ha $\dim(Imf) = 2$.

c2.
$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

La matrice è quindi: $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ancora $car(M_f) = 2$ e quindi $\dim(Imf) = 2$.

c3.
$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

La matrice è quindi: $M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ancora $car(M_f) = 2$ e quindi $\dim(Imf) = 2$.

c4.

$$t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è quindi: $M_t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

Questa volta $detM_t \neq 0$ quindi $car(M_t) = 3$ e quindi $\dim(Imt) = 3$.

Osservazione

Nell'ultimo caso l'applicazione t è suriettiva, quindi non è casuale che tutti i vettori dati avessero controimmagine.

Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 14

Esercizio 14.1 (pag. 213)
Si considerino le seguenti applicazioni f_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Per ognuna di esse dire se è lineare. In caso affermativo determinare la matrice A_i associata all'applicazione f_i (rispetto alla base canonica). Stabilire quindi se A_i è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare la matrice diagonale associata.

1. $f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ c \end{pmatrix}$.

2. $f_2\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ c-a \end{pmatrix}$

3. $f_3\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b+c \\ a+b \\ c-a \end{pmatrix}$

4. $f_4\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ a+b+c \\ c-b \end{pmatrix}$

Soluzione

1.a) Verifichiamo che l'applicazione f_1 è lineare.

Per ogni $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\bar{w} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $\forall\, k \in \mathbb{R}$, consideriamo

- $f_1(\bar{v}+\bar{w}) = f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f_1\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) =$

  $= \begin{pmatrix} 2(a+a') \\ a+a'+b+b' \\ c+c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a' \\ a'+b' \\ c' \end{pmatrix} = f_1(\bar{v}) + f_1(\bar{w})$.

- $f_1(k\bar{v}) = f_1\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_1\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2ka \\ ka+kb \\ kc \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ c \end{pmatrix} = kf_1(\bar{v})$.

1.b) Consideriamo ora la matrice A_1 associata all'applicazione f_1, rispetto alla base canonica

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

- $f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_1(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  La matrice cercata è quindi $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.c) Per trovare gli autovalori di f_1, consideriamo la matrice

- $A_1 - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

e ne calcoliamo il determinante (polinomio caratteristico).
Otteniamo

- $\det(A_1 - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, cioè le soluzioni dell'equazione $\det(A_1 - \lambda I_3) = 0$.
Essi sono: $\lambda = 2$ (autovalore di molteplicità 1) e $\lambda = 1$ (autovalore di molteplicità 2).
Poichè tali autovalori non sono tutti distinti, la matrice sarà diagonalizzabile se e solo se essi sono regolari e la somma delle loro molteplicità è $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ (Cfr. Teorema 14.1).

- $\lambda = 1 : A_1 - 1I_3 = \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

  In questo caso $car(A_1 - \lambda I_3) = 1$ e quindi l'autovalore $\lambda = 1$ è regolare (infatti $1 = 3 - 2$, dove $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e 2 è la molteplicità dell'autovalore).

- $\lambda = 2 : A_1 - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

  In questo caso $car(A_1 - 2I_3) = 2$

  e quindi anche l'autovalore $\lambda = 2$ è regolare essendo $2 = 3 - 1$ (dove $3 = \dim \mathbb{R}^3$ e la molteplicità dell'autovalore è 1).

1.d) Una matrice diagonale D_1 associata ad A_1 è $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.e) Se vogliamo determinare una matrice diagonalizzante C tale che $C^{-1}A_1C = D_1$, ricordando che la si può ottenere per accostamento dei vettori colonna che generano gli autospazi relativi agli autovalori regolari trovati (cfr Es 14.2 e 14.3), possiamo procedere nel modo seguente:

- Determiniamo l'autospazio V_1 relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

  $(A_1 - 1I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0.$

  Si ha che $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} | y, z \in \mathbb{R} \right\}$ ed è quindi puó essere generato dai vettori

  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- L'autospazio V_2 relativo all'autovalore $\lambda = 2$ si ottiene risolvendo il sistema

$$(A_1 - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \text{ e quindi } V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

1.f) Si ottiene $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e quindi

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D_1.$$

2.a) Verifichiamo che f_2 è un'applicazione lineare:

- $f_2(\bar{v} + \bar{w}) = f_2\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f_2\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} a+a' \\ (a+a')+(b+b')+(c+c') \\ (c+c')-(a+a') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ c-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ a'+b'+c' \\ c'-a' \end{pmatrix} =$$

$$= f_2(\bar{v}) + f_2(\bar{w}).$$

- $f_2(k\bar{v}) = f_2\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_2\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ka \\ ka+kb+kc \\ kc-ka \end{pmatrix} =$

$$= k\begin{pmatrix} a \\ a+b+c \\ c-a \end{pmatrix} = kf_2(\bar{v}).$$

2.b) Determiniamo l'immagine tramite l'applicazione f_2 degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$f_2(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f_2(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è quindi: $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Autovalori:

$$\det(A_2 - \lambda I_3) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Si ottiene che $\lambda = 1$ è un autovalore con molteplicità 3.

In questo caso λ è regolare se e solo se $car(A_2 - \lambda I_3) = 3 - 3 = 0$: cioè se e solo se la matrice $A_2 - 1I_3$ è la matrice nulla, il che non è vero essendo:

$$A_2 - 1I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Si conclude che la matrice A_2 non è diagonalizzabile.

3.a) Verifichiamo che l'applicazione f_3 è lineare:

- $f_3(\bar{v}+\bar{w}) = f_3\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f_3\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) =$

  $= \begin{pmatrix} (b+b')+(c+c') \\ (a+a')+(b+b') \\ (c+c')-(a+a') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ a+b \\ c-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'+c' \\ a'+b' \\ c'-a' \end{pmatrix} = f_3(\bar{v}) + f_3(\bar{w}).$

- $f_3(k\bar{v}) = f_3\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_3\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} kb+kc \\ ka+kb \\ kc-ka \end{pmatrix} =$

  $= k\begin{pmatrix} b+c \\ a+b \\ c-a \end{pmatrix} = kf_3(\bar{v}).$

3.b) Ancora determiniamo l'immagine degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$f_3(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_3(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_3(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice cercata è quindi: $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Autovalori:

$$\det(A_3 - \lambda I_3) = \det\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

  $\lambda = 0, \lambda = 1.$

- Gli autovalori sono: $\lambda = 0$ di molteplicità 1 e $\lambda = 1$ di molteplicità 2.

Saranno regolari se $car(A_3 - 0I_3) = 3 - 1 = 2$ e $car(A_3 - 1I_3) = 3 - 2 = 1$.

- $(A_3 - 0I_3) = A_3$: si ha che $car(A_3) = 2$, perchè $\det(A_3) = 0$ e $\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$.

- $(A_3 - 1I_3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3 - I_3) = 0.$

- Poichè $\det\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ segue che $car(A_3 - I_3) = 2 \neq 1$, per cui l'autovalore non è regolare.

- Si conclude che A_3 non è diagonalizzabile.

4.a) L'applicazione f_4 è lineare. Infatti:

- $f_4(\bar{v}+\bar{w}) = f_4\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f_4\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) =$
  $= \begin{pmatrix} 0 \\ (a+a')+(b+b')+(c+c') \\ (c+c')-(b+b') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+b+c \\ c-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a'+b'+c' \\ c'-b' \end{pmatrix} =$
  $= f_4(\bar{v}) + f_4(\bar{w}).$

- $f_4(k\bar{v}) = f_4\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_4\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ ka+kb+kc \\ kc-kb \end{pmatrix} =$
  $= k\begin{pmatrix} 0 \\ a+b+c \\ c-b \end{pmatrix} = kf_4(\bar{v}).$

4.b) Determiniamo l'immagine tramite l'applicazione f_4 degli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$:

- $f_4(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_4(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_4(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- La matrice è quindi: $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- $\det(A_4 - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda[(1-\lambda)^2+1] = -\lambda(\lambda^2-2\lambda+2).$

  Quindi $\det(A_4 - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, (il polinomio di secondo grado è irriducibile in $\mathbb{R}$).

- Abbiamo quindi un solo autovalore ($\lambda = 0$) di molteplicità 1.

- Per il teorema 14.1, la matrice non è quindi diagonalizzabile.