Esercizi e soluzioni relativi al Capitolo 8

Esercizio 8.1 (pag. 95)

Verificare che, data una matrice quadrata A, la matrice $S = A^T + A$ è una matrice simmetrica, mentre la matrice $R = A^T - A$ è emisimmetrica (Def. 8.2, pag. 92 del testo).

Soluzione Basta osservare che, per le proprietà delle matrici trasposte è:

$$S^T = (A^T + A)^T = (A^{T)})^T + A^T = A + A^T = S$$

quindi S è simmetrica.
Inoltre si ha

$$R^T = (A^T - A)^T = (A^{T)})^T - A^T = A - A^T = -(A - A^T) = -R$$

e quindi R è antisimmetrica.

Esercizio 8.2 (pag. 100)

Sotto quali condizioni sul tipo delle matrici A, B, C, vale la proprietà distributiva destra cioè vale l'uguaglianza:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C?$$

Soluzione

Detto (m, n) il tipo della matrice A (cioè sia m il numero di righe ed n il numero di colonne di A), (r, s) quello della matrice B, e (h, k) quello della matrice C, si hanno le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} m = r \ \text{ e } \ n = s & \text{(affinchè sia definita la somma } A + B) \\ n = h = s & \text{(affinchè sia definito il prodotto } (A + B) \cdot C). \end{cases}$$

Con queste condizioni sono definite anche le operazioni al secondo membro.

Esercizio 8.3 (pag. 100)

Sotto quali condizioni sul tipo delle matrici A e B è possibile effettuare il prodotto $A \cdot B$ e il prodotto $B \cdot A$?

Soluzione

Detto (m, n) il tipo della matrice A ed (r, s) quello della matrice B, la condizione affinchè sia definito il prodotto AB è che $n = r$, mentre la condizione affinchè sia definito il prodotto BA è che $s = m$.

Esercizio 8.4 (pag. 101)

Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
svolgere i calcoli indicati:

1. $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$.

2. $A^2 = A \cdot A$, $B^2 = B \cdot B$, $C^2 = C \cdot C$.

3. $A + B$, $A + C$, $3A$, $2B + 4C$.

Soluzione

1. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2-4+1 & 4+1 & 1+2-1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2-4-1 & 4-1 & 1+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C \cdot B. = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2B + 4C = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 8.5 (pag. 101)

Mostrare che una matrice diagonale $D = (d_{ij})$ di ordine tre, con $d_{11} = d_{22} = d_{33} = d$, permuta con qualsiasi matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e che il prodotto di due matrici diagonali D_1 e $D_2 \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è ancora una matrice diagonale in $Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Soluzione

1. Sia $D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ la matrice diagonale (del tipo indicato) e sia

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ una matrice di $Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Consideriamo i due prodotti DA e DB e verifichiamo che sono uguali $\forall d, a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$DA = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{bmatrix}$$

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{bmatrix}.$$

2. Siano $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ed $H = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix}$ due matrici diagonali:

il prodotto $DH = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah & 0 & 0 \\ 0 & bk & 0 \\ 0 & 0 & cj \end{bmatrix}$

è ancora una matrice diagonale.

Esercizio 8.6 (pag 106)

Dire se le seguenti matrici sono stocastiche e, in caso positivo, dire se sono regolari:

1. $A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Osservazione: Ricordiamo che una matrice stocastica si dice **regolare** se tutti gli elementi di una generica potenza A^n con $n \geq 2$, sono positivi (cfr Def. 8.16, pag 105, da correggere aggiungendo la condizione $n \geq 2$).

Soluzione

1.1 Dopo aver osservato che ogni $a_{ij} \in A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ è non negativo, verifichiamo che ogni vettore riga sia vettore di probabilità.

Infatti: $a_{11} + a_{12} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$, $a_{21} + a_{22} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. Si conclude che la matrice è stocastica (cfr. def. 8.15, pag.104).

1.2 Vediamo ora se la matrice A è regolare, calcolandone le potenze successive.

Otteniamo $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/16 & 5/16 \\ 5/8 & 3/8 \end{bmatrix}$

e $A^3 = \begin{bmatrix} 43/64 & 21/64 \\ 21/32 & 11/32 \end{bmatrix}$.

Inoltre possiamo generalizzare il risultato ottenendo:

$A^n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ove

$$a = \frac{2^{2n-1} + 2^{2n-3} + 2^{2n-5} + \cdots + 2^3 + 2 + 1}{2^{2n}},$$

$$b = \frac{2^{2n-2} + 2^{2n-4} + 2^{2n-6} + \cdots 2^2 + 1}{2^{2n}},$$

$$c = \frac{2^{2n-2} + 2^{2n-4} + 2^{2n-6} + \cdots 2^2 + 1}{2^{2n-1}},$$

$$d = \frac{2^{2n-3} + 2^{2n-5} + \cdots + 2^3 + 2 + 1}{2^{2n-1}}.$$

(Tralasciamo la dimostrazione, che si può fare per induzione su n).

2.1 Consideriamo ora la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e osserviamo che le righe sono vettori di probabilità (gli elementi sono non negativi e la somma in ogni riga è 1), quindi B è matrice stocastica.

2.2 Inoltre la matrice B non è regolare perché la seconda potenza contiene elementi nulli (cfr. def 8.16 pag 105), essendo $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 8.7 (pag 112)

Determinare il rango delle seguenti matrici:

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Soluzione

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché il minore $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, segue che $car A \geq 2$.
Poiché $\det A = 0$ (senza fare calcoli, osservando che la terza riga è somma della I e della II), si conclude che $car A = 2$.

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Poiché ci sono solo tre colonne $carB \leq 3$.
Il minore $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ implica che $carB \geq 2$.
Orliamo e otteniamo che $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Segue quindi che $carB = 3$.

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché ci sono solo due righe, $carC \leq 2$, e poiché $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ si conclude che $carC = 2$.

Esercizio 8.8 (pag 114)

Calcolare la matrice inversa delle seguenti matrici:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix};\ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix};\ K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix};$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -5/27 & -4/27 & 8/27 \\ -4/27 & 13/27 & 1/27 \\ 8/27 & 1/27 & -2/27 \end{bmatrix}.$$