1 Soluzione degli esercizi del capitolo 3

Esercizi (*pag. 31*)

a] Verificare che $(10011)_2 = (19)_{10}$ e che $(1010100)_2 = (84)_{10}$.

b] Dati i seguenti numeri in base $\neq 10$, trasformarli in numeri in base 10:

1. $(1111111)_2$

2. $(111111)_4$

3. $(10011011)_3$

4. $(127)_8$.

c] Dati i seguenti numeri in base 10, scriverli in base 2:

5. $(1365)_{10}$

6. $(2523)_{10}$.

d] Calcolare:

7. $(1111111)_2 + (10011)_2$

8. $(1010100)_2 + (11111)_2$

9. $(1111111)_2 \cdot (10011)_2$.

Soluzione

a] $(10011)_2 = (1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4)_{10} = (1 + 2 + 16)_{10} = (19)_{10}$;

$(1010100)_2 = (0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6)_{10} = (4 + 16 + 64)_{10} =$
$= (84)_{10}$.

b] [**1.**] $(1111111)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 =$
$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = (127)_{10}$.

[**2.**] $(111111)_4 = 1 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^5 =$
$= 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = (1365)_{10}$.

[**3.**] $(10011011)_3 = 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^7 =$
$= 1 + 3 + 27 + 81 + 2187 = (2299)_{10}$.

[**4.**] $(127)_8 = 7 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 = 7 + 16 + 64 = (87)_{10}$.

c] Utilizziamo la procedura introdotta con l'Osservazione 3.11 e illustrata nell'Esempio 3.4 (pag 30).

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

5.

$$\begin{aligned}
1365 &= 2 \cdot 682 + 1 \\
682 &= 2 \cdot 341 + 0 \\
341 &= 2 \cdot 170 + 1 \\
170 &= 2 \cdot 85 + 0 \\
85 &= 2 \cdot 42 + 1 \\
42 &= 2 \cdot 21 + 0 \\
21 &= 2 \cdot 10 + 1 \\
10 &= 2 \cdot 5 + 0 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0 \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}$$

da cui si ottiene $(1365)_{10} = (10101010101)_2$, (mentre $(1364)_{10} = (10101010100)_2$).

6. $(2523)_{10}$

$$\begin{aligned}
2523 &= 2 \cdot 1261 + 1 \\
1261 &= 2 \cdot 630 + 1 \\
630 &= 2 \cdot 315 + 0 \\
315 &= 2 \cdot 157 + 1 \\
157 &= 2 \cdot 78 + 1 \\
78 &= 2 \cdot 39 + 0 \\
39 &= 2 \cdot 19 + 1 \\
19 &= 2 \cdot 9 + 1 \\
9 &= 2 \cdot 4 + 1 \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0 \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1
\end{aligned}$$

Quindi $\quad (2523)_{10} = (100111011011)_2$.

d] Effettuiamo le operazioni indicate

7.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & + \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

8.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & + \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & = \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

9.

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & = \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Esercizio 3.2 (*pag. 39*)

Dire quali delle seguenti relazioni ricorsive sono lineari omogenee a coefficienti costanti:

1. $a_n = 3na_{n-1}$
2. $b_n = b_{n-1} + n$
3. $c_n = 5c_{n-2} - 6c_{n-3}$ (nel testo compare $6a_{n-3}$ al posto di $6c_{n-3}$)
4. $d_n = -3d_{n-1}$
5. $e_n = -e_{n-1} + 5e_{n-2}$.

Soluzione

1. Il coefficiente di a_{n-1} è $3n$, quindi non è costante.
2. Il coefficiente di b_{n-1} è 1, ma compare l'addendo n per cui non è lineare a coefficienti costanti.
3. Lineare a coefficienti costanti
4. Lineare a coefficienti costanti
5. Lineare a coefficienti costanti.

Esercizio 3.3 (*pag. 39*)

Risolvere le seguenti relazioni lineari ricorsive a coefficienti costanti:

1. $a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$
2. $b_n = 10b_{n-1} - 24b_{n-2}$
3. $c_n = 4c_{n-1} - 4c_{n-2}$
4. $d_n = -3d_{n-1}$
5. $e_n = 10e_{n-1} - 25e_{n-2}$.

Soluzione

1. Equazione lineare omogenea di grado 2. L'equazione caratteristica è:

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

Le soluzioni sono: $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$. Quindi $t_1 = 3,\ t_2 = 5$.
Poiché le radici sono distinte, le soluzioni sono:

$$a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 5^n.$$

Le costanti c_1 e c_2 possono essere determinate imponendo condizioni iniziali. Poiché nel testo non sono date, imponiamo, ad esempio, che sia $a_0 = a_1 = 1$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a_0 = \quad c_1 \cdot 3^0 + c_2 \cdot 5^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = \quad c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 5^1 = 3c_1 + 5c_2 = 1, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, quindi $a_n = 2 \cdot 3^n - 5^n$.

2. Ancora lineare omogenea di grado 2. L'equazione caratteristica è:

$$t^2 - 10t + 24 = 0$$

e le radici sono $t_1 = 4,\ t_2 = 6$.
Le soluzioni sono quindi: $b_n = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot 6^n$, con c_1 e c_2 che dipendono dalle condizioni iniziali.

Come prima, per esercizio, determiniamo c_1 e c_2 a partire da condizioni iniziali a nostra scelta. Per esempio scegliamo $b_0 = 2, b_1 = 2$.

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} b_0 \quad = c_1 + c_2 = 2 \\ b_1 \quad = c_1 \cdot 4^1 + c_2 \cdot 6^1 \quad = 4c_1 + 6c_2 = 2. \end{cases}$$

Otteniamo $c_1 = 5, c_2 = -3$ e quindi $b_n = 5 \cdot 4^n - 3 \cdot 6^n$.

3. L'equazione (corretta) è $c_n = 4c_{n-1} - 4c_{n-2}$ ed è ancora lineare omogenea di secondo grado.

L'equazione caratteristica è:

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

ed in questo caso la radice 2 è doppia (l'equazione cartteristica è $(t-2)^2 = 0$).
Le soluzioni sono quindi:

$$c_n = (c_{1,0} + c_{1,1}n) \cdot 2^n.$$

Ancora, imponendo condizioni iniziali, ad esempio $c_0 = 1, c_1 = 1$, si possono determinare i valori di $c_{1,0}$ e di $c_{1,1}$.

$$c_0 = (c_{1,0} + c_{1,1} \cdot 0) \cdot 2^0 = 1 \ \Rightarrow c_{1,0} = 1$$

$$c_1 = (c_{1,0} + c_{1,1} \cdot 1) \cdot 2^1 = 1 \Rightarrow c_{1,1} = \frac{-1}{2}$$

e quindi $c_n = (1 - \frac{n}{2}) \cdot 2^n$.

4. L'equazione $d_n = -3d_{n-1}$ è lineare omogenea di primo grado. In questo caso possiamo ricavare il risultato direttamente, ponendo:
$d_0 = k,\ d_1 = -3d_0 = -3k,\ d_2 = -3d_1 = (-3)^2k,\ \ldots, d_n = (-3)^n d_0 = (-3)^n k$
e verificando per induzione la correttezza del risultato.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl

5. L'equazione è lineare omogenea di secondo grado. La sua equazione caratteristica è:

$$t^2 - 10t + 25 = 0.$$

Poiché $t^2 - 10t + 25 = (t-5)^2 = 0$ si ha la radice doppia $t = 5$.

Le soluzioni saranno quindi del tipo:

$$e_n = (c_{1,0} + c_{1,1}n)5^n.$$

Ancora, se fissiamo condizioni iniziali, ad esempio, $e_0 = 1,\ e_1 = 5$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 1 & = (c_{1,0} + c_{1,1} \cdot 0)5^0 \\ 5 & = (c_{1,0} + c_{1,1} \cdot 1) \cdot 5^1 \end{cases}$$

da cui si ricava $c_{1,0} = 1$ e $c_{1,1} = 0$.

Le soluzioni sono quindi $e_n = 5^n$.

Copyright © 2005 - The McGraw-Hill Companies srl