Integrali – Concetti di base

● Definizione di Primitiva

Una funzione $F(x)$ si dice primitiva di un'altra funzione $f(x)$ se:

$D[F(x)] = f(x)$

Esempi:

$f(x) = 2\text{x} \;\; \rightarrow \;\; F(x) = x^2 \;\; \rightarrow$ infatti: $D(x^2) = 2x$

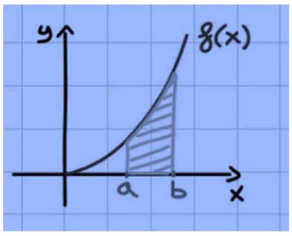
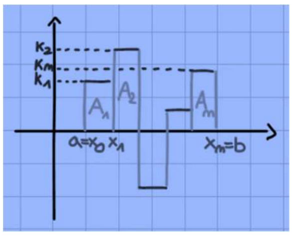
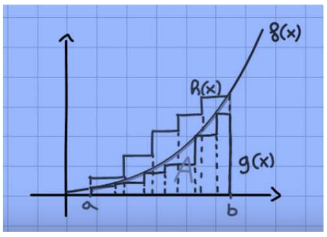
$f(x) = \cos(x) \;\; \rightarrow \;\; F(x) = sen(x) \;\; \rightarrow$ infatti: $D\big(sen(x)\big) = \cos(x)$

NB:
$F(x) = x^2$ non è l'unica funzione la cui derivata è uguale a $f(x) = 2x$.
Anche ad esempio $F'(x) = x^2 + 5$ è una primitiva di $f(x)$, infatti: $D(x^2+5) = D(x^2) + D(5) = (2x) + (0)$.
Questo è valido per qualsiasi costante, in quanto la derivata di una costante è nulla.

Quindi:
Ogni funzione $f(x)$ ha infinite primitive, che si possono scrivere nella forma $F(x) + c$ (con c costante).
Ovvero:

$D[F(x) + c] = f(x)$

● Curiosità: Definizione "geometrica" di Integrale Definito in un intervallo [a, b]

	$\int_a^b f(x) \cdot dx = A$ A rappresenta l'area con segno della regione di piano compresa tra il grafico di f(x), l'asse delle x, e le rette verticali $x = a$, $x = b$. Per area con segno si intende che A > 0 se si trova sopra l'asse delle x, A < 0 se si trova sotto l'asse delle x.
	In caso di funzioni che, all'interno dell'intervallo [a, b], si trovano sopra l'asse delle x in alcuni punti, e sotto l'asse delle x in altri punti, l'integrale di f(x) in [a, b] è uguale alla somma (con segno) delle aree. Ovvero: $\int_a^b f(x) \cdot dx = \sum_{i\,=\,1}^{n} A_i$
	Per calcolare l'area di una funzione f(x) curva, posso approssimare la funzione: - per difetto con una g(x) definita come tanti sottili rettangoli PIU BASSI della curva - per eccesso con una h(x) definita come tanti sottili rettangoli PIU ALTI della curva Tendendo ad infiniti rettangoli, la sommatoria delle aree di g(x), o di h(x) ≅ f(x) Quindi per calcolare l'area di f(x) in [a, b], si risolve: $\sum_{i=1}^{+\infty} Aree\ g(x) \leq A \leq \sum_{i=1}^{+\infty} Aree\ h(x)$, con A = $\int_a^b f(x) \cdot dx$ Se questi 3 valori coincidono, allora si dice che $f(x)$ è Riemann-Integrabile su [a, b].

● Definizione algebrica di Integrale Definito su un intervallo [a, b]

L'integrale di f(x) in [a, b] è uguale alla differenza della primitiva F(X) con input x = b, meno F(X) con input x = a.

Ovvero:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Esempio:

$$\int_0^5 3x^2 dx \rightarrow D(?) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 \rightarrow \left[x^3\right]_0^5 = (5)^3 - (0)^3 = 125$$

● Definizione algebrica di Integrale Indefinito

Si chiama integrale indefinito di f(x) l'insieme di tutte le sue primitive, in forma: F(x) + c.

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$$

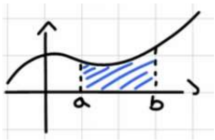
$f(x)$ si chiama "funzione integranda", e dx si chiama "differenziale di x".

NB: Il "+c" viene scritto in quanto qualsiasi costante, quando derivata, scompare, quindi $D(F(x) + c) = D\big(F(x)\big) = f(x)$

NB: Integrale "Indefinito" significa che non è definito su un intervallo [a, b], ma sull'intero dominio D di f(x).

● Definizione di Integrali Impropri (detti anche Integrali Generalizzati)

Ricordiamo:
Un integrale proprio:
1) ha una funzione integranda limitata in [a, b]
2) ha un intervallo [a, b] finito



Se almeno una di queste proprietà NON è valida, si parla di <u>Integrale Improprio</u>.

Come risolvere (per tutti i possibili casi):

Considero un intervallo I' "appena più piccolo" in cui l'integrale è proprio.
Riscrivo l'integrale improprio come il limite (per $I' \to [a,b]$) di un integrale proprio, e risolvo l'integrale proprio.
Procedo a calcolare come di norma l'integrale proprio che si trova all'interno del limite.

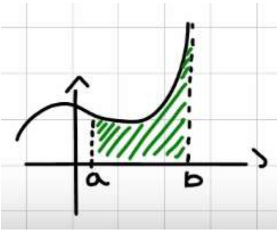
In genere, ci sono 3 possibilità:

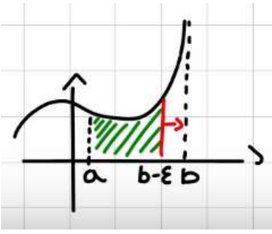
ℓ esiste ed è un numero finito	$f(x)$ si dice integrabile in [a, b]. L'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE
$\ell = \pm\infty$	L'integrale improprio DIVERGE (rispettivamente a $\pm\infty$)
ℓ non esiste	L'integrale improprio non esiste o è indeterminato

● Integrali Impropri – Funzioni Illimitate

Caso 1) $b \notin D\big(f(x)\big)$

Sia $f(x)\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e illimitata a sinistra di b, ovvero: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$



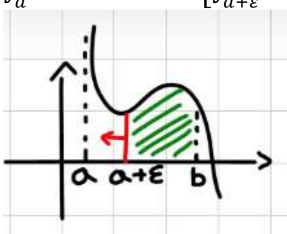


$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\right]$$

Caso 2) $a \notin D\big(f(x)\big)$

Sia $f(x)\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e illimitata a destra di a, ovvero: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$$



Caso 3) $c \in (a,b)\,, c \notin D\big(f(x)\big)$

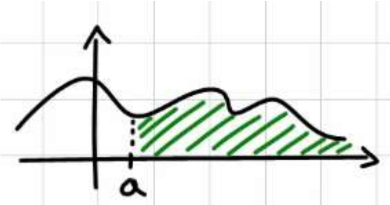
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$$

Esempio: $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \to$ Controllo dominio: $D = \mathbb{R} - \{0\} \to$

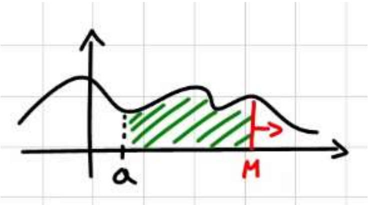
$$\to \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{0+\varepsilon}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\sqrt{x}\right]_{0+\varepsilon}^{4}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{4} - \sqrt{0+\varepsilon}\right) = \sqrt{4} - \sqrt{0+(0)} = 2$$

● Integrali Impropri – Intervallo infinito

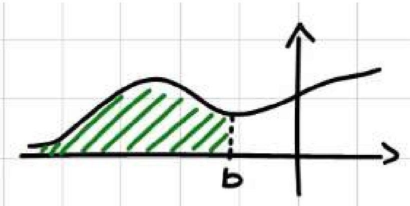
Caso 1) Sia $f(x)$: $[\mathrm{a}, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua



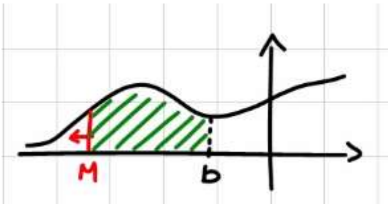
$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M \to +\infty} \left[\int_{a}^{M} f(x)\,dx\right]$$



Caso 2) Sia $f(x)$: $(-\infty, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ una funzione continua



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M \to -\infty} \left[\int_{M}^{b} f(x)\,dx\right]$$



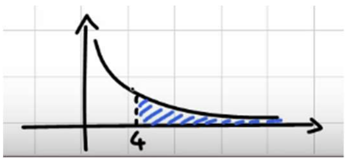
Caso 3) Sia $f(x)$: $(-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \left(\lim_{M \to -\infty} \left[\int_{M}^{c} f(x)\,dx\right]\right) + \left(\lim_{M \to +\infty} \left[\int_{c}^{M} f(x)\,dx\right]\right)$$

NB: Se $\ell_1 = +\infty$ ed $\ell_2 = -\infty$ (o viceversa), l'integrale improprio di partenza è indeterminato.

Esempio Caso 1:

$$\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M \to +\infty} \left(\int_{4}^{M} \frac{1}{x^2}\,dx\right) = \lim_{M \to +\infty} \left(\left[P\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]_4^M\right) = \lim_{M \to +\infty} \left(\left[-\frac{1}{x}\right]_4^M\right) = \lim_{M \to +\infty} \left(-\frac{1}{(M)} - \left[-\frac{1}{4}\right]\right) = -\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



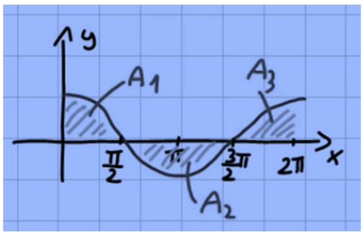
Esempio Caso 3:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \to \mathit{Scelgo\ un\ numero} \to \int_{-\infty}^{+3} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{+3}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\ldots]$$

● Curiosità: Cenni pratici sul calcolo dell'area sotto una curva

Esempio 1:

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\ dx$$



$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\ dx = A1 - A2 + A3 = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos(x) = +\Big[\cos(x)\ \Big]_0^{\pi} - \Big[\cos(x)\ \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + \Big[\cos(x)\ \Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = \dots$$

Esempio 2:

"Calcola l'area fra 2 curve f(x) e g(x) nell'intervallo [a, b]"

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$