Analisi Matematica - 8.6.2018 - Traccia A

1. $f(x) = (x^2+2x-3)e^{-x}$

(a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

$f(0) = -3$

$f(x) = 0 \iff x^2+2x-3=0 \iff$

$x = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 \begin{cases} \nearrow -3 \\ \searrow 1 \end{cases}$

$(-3,0), \ (1,0) \in \text{Graf } f$

$f(x) > 0 \iff x^2+2x-3>0 \iff x<-3 \text{ o } x>1$

Limiti significativi : $\pm\infty$

$x \to +\infty \quad f(x) \sim x^2 e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x} \to 0$

$y=0$ asintoto orizzontale a $+\infty$

$x \to -\infty \quad f(x) \sim \underbrace{x^2}_{+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{+\infty} \to +\infty$

Esiste un asintoto obliquo a $-\infty$?

$\dfrac{f(x)}{x} \sim \underbrace{x}_{-\infty}\underbrace{e^{-x}}_{+\infty} \to -\infty$

Non esiste.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x-3)e^{-x}$

$= e^{-x}(\cancel{2x}+2-x^2-\cancel{2x}+3)$

$= e^{-x}(-x^2+5)$

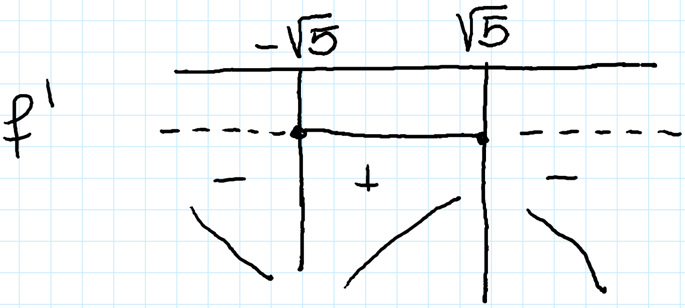
$f'(x) \geq 0 \iff -x^2+5 \geq 0$

$x^2-5 \leq 0$

$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

$-\sqrt{5} \qquad \sqrt{5}$

$$-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$$

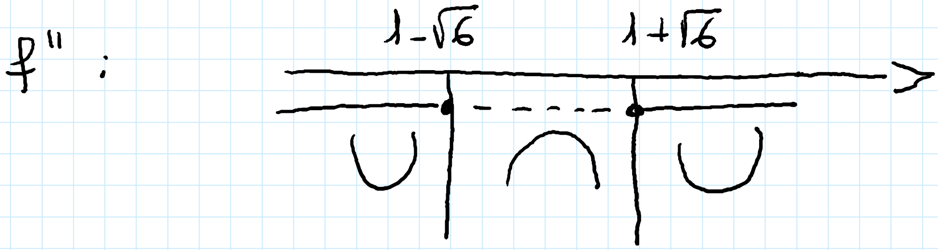


f è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{5})$ e in $(\sqrt{5}, +\infty)$;
f è crescente in $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.
$x = -\sqrt{5}$ p.to di min. relativo
$x = \sqrt{5}$ p.to di max. relativo

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$

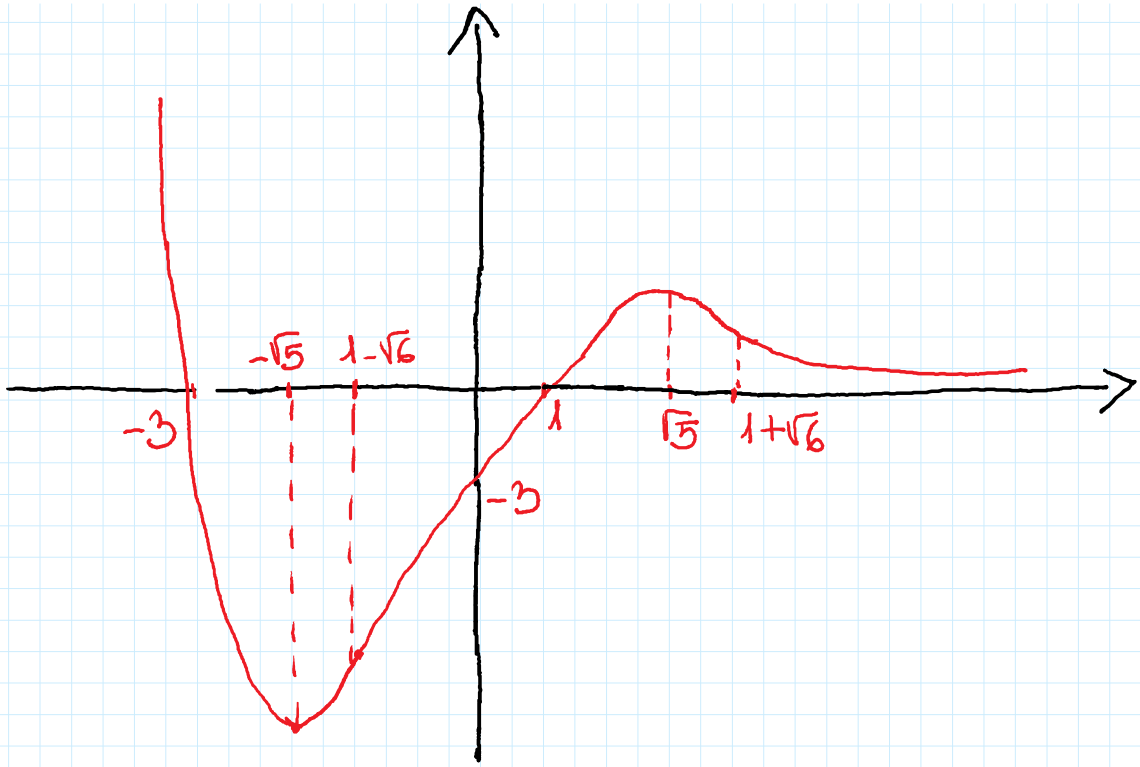
$$f''(x) = -2x\, e^{-x} - (-x^2+5)\, e^{-x}$$
$$= e^{-x}(-2x + x^2 - 5)$$
$$= e^{-x}(x^2 - 2x - 5)$$

$$f''(x) \geq 0 \iff x^2 - 2x - 5 \geq 0$$
$$x = 1 \pm \sqrt{1+5} = 1 \pm \sqrt{6}$$
$$x \leq 1-\sqrt{6} \qquad x \geq 1+\sqrt{6}$$



f è convessa in $(-\infty, 1-\sqrt{6})$ e in $(1+\sqrt{6}, +\infty)$,
f è concava in $(1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6})$.
$x = 1-\sqrt{6}$ e $x = 1+\sqrt{6}$ sono punti di flesso.

(d) Grafico di f



(e) $\operatorname{Im} f = [f(-\sqrt{5}), +\infty)$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha

0 soluzioni se $\lambda < f(-\sqrt{5})$;

1 soluzioni se $\lambda = f(-\sqrt{5})$;

2 soluzioni se $f(-\sqrt{5}) < \lambda \leq 0$;

3 soluzioni se $0 < \lambda < f(\sqrt{5})$;

2 soluzioni se $\lambda = f(\sqrt{5})$;

1 soluzione se $\lambda > f(\sqrt{5})$.

2.

$$\ell_1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{n \log_e n + \sqrt{n}}{n^3 + n \operatorname{sen} n}$$

$$n \log_e n + \sqrt{n} = n \log_e n \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n \log_e n}\right) = n \log_e n \left(1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \log_e n}}_{\to 0}\right) \sim n \log_e n$$

$$n^3 + n \operatorname{sen} n = n^3 \left(1 + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}}_{\to 0}\right) \sim n^3$$

limitato

$$\ell_1 = \lim_{u \to +\infty} \frac{u \log u}{u^3} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\log u}{u^2} = 0$$

limite notevole

$$\ell_2 = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1) \, x \, (\cos(2x) - 1)}{tg\, x^3}$$

Per $x \to 0$ $\quad x^2+1 \to 1 \Rightarrow x^2+1 \sim 1$

$x \sim x$

$$\cos(2x) - 1 = -(1 - \cos(2x)) \sim -\frac{1}{2}(2x)^2 = -\frac{1}{2} 4 x^2 = -2x^2$$

$2x \to 0$

$$tg(x^3) \sim x^3$$

$x^3 \to 0$

$$\ell_2 = \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot x \cdot (-2x^2)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$$

3. $$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} \, dx$$

$e^x = De^x \qquad e^{2x} + 2e^x + 1 = (e^x)^2 + 2e^x + 1$

Applicando la tecnica di integrazione per sostituzione

$$I_1 = \int_{e^0}^{e} \frac{dt}{t^2 + 2t + 1} = \int_1^e \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= \left[-\frac{1}{t+1} \right]_1^e = -\frac{1}{e+1} + \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\log(x+1)}{(x+2)^2} \, dx$$

$$I_2 = \int_0 \frac{\log_e(x+1)}{(x+2)^2}\,dx$$

Applicando la tecnica di integrazione per parti:

$$I_2 = \int_0^1 D\left(-\frac{1}{x+2}\right)\log_e(x+1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x+2}\log_e(x+1)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+1)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log_e 2 + \frac{1}{2}\underbrace{\log_e 1}_{=0} + \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} = \frac{ax+a+bx+2b}{(x+1)(x+2)}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-b \\ -b+2b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$I_1 = -\frac{1}{3}\log_e 2 + \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log_e 2 + \Big[-\log_e|x+2| + \log_e|x+1|\Big]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3}\log_e 2 - \log_e 3 + \log_e 2 + \log_e 2 - \underbrace{\log_e 1}_{=0}$$

$$= \frac{5}{3}\log_e 2 - \log_e 3$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} 3^n \cdot \log_e\left(1+\frac{n^4}{3^n}\right)$$

Sia $a_n = \operatorname{sen} 3^n \log_e\left(1+\frac{n^4}{3^n}\right)$.

Sia $a_n = \operatorname{sen} 3^n \log\left(1+\frac{n^4}{3^n}\right)$.

$\{a_n\}$ non è una succ. di numeri positivi quindi occorre studiare la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \left|\operatorname{sen} 3^n \cdot \log\left(1+\frac{n^4}{3^n}\right)\right|$$

$$= |\operatorname{sen} 3^n| \cdot \log\left(1+\frac{n^4}{3^n}\right)$$

$$\leq 1 \cdot \log\left(1+\frac{n^4}{3^n}\right) = b_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge: infatti $b_n \sim \frac{n^4}{3^n}$ e

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ è convergente (per il criterio del rapporto)

$$\frac{(n+1)^4}{\underset{3}{\cancel{3^{n+1}}}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n^4} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1.$$

Quindi anche $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (criterio del confronto).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2} x^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

È una serie di potenze di centro $x_0 = 0$.

Calcolo del raggio di convergenza: sia $a_n = \frac{n+3}{n^2+2}$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+4}{(n+1)^2+2} \cdot \frac{n^2+2}{n+3} \sim \frac{n^3}{n^3} = 1 \longrightarrow 1 \implies$$

Il raggio di convergenza è $R = 1$.

La serie di potenze converge assolutamente se $x \in (-1, 1)$.

Bisogna analizzare cosa succede per $x = \pm 1$.

Se $x = 1$ la serie diventa

--

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2}$$

Poiché $\frac{n+3}{n^2+2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ e la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, tale serie diverge.

Se $x=-1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+2}$$

(e non converge assolutamente). Tale serie converge per il criterio di Leibniz. Infatti se

$$b_n = \frac{n+3}{n^2+2}$$

si ha

1. $b_n > 0 \quad \forall n$
2. $b_n \to 0$
3. $b_{n+1} \leq b_n \iff$

$$\frac{n+4}{\underbrace{(n+1)^2+2}_{n^2+2n+3}} \leq \frac{n+3}{n^2+2} \iff$$

$$\cancel{n^3} + 2n + 4n^2 + 8 \leq \cancel{n^3} + 2n^2 + 3n + 3n^2 + 6n + 9 \iff$$

$$n^2 + 7n + 1 \geq 0 \qquad (\text{vero } \forall n \in \mathbb{N})$$

In conclusione la serie converge assolutamente se $x \in (-1, 1)$ e converge se $x \in [-1, 1)$.