Capitolo 14

Funzioni derivabili su un intervallo

Abbiamo dato la definizione di funzione derivabile in un punto (nozione puntuale). Ora, analogamente a quanto fatto per la continuità, diamo una definizione di carattere globale.

Definizione 14.1 *Una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ si dice derivabile se è derivabile in ogni punto $x \in A$.*

14.1 Teorema di Lagrange

Lemma 14.2 (di Rolle) *Sia $w : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Se $w(a) = w(b)$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $w'(c) = 0$.*

Dimostrazione. Poiché la funzione w è continua su un intervallo chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass, essa ammette massimo e minimo assoluti, precisamente esistono due punti $c_1, c_2 \in [a, b]$ tali che, per ogni $x \in [a, b]$

$$w(c_1) \leq w(x) \leq w(c_2).$$

Dobbiamo distinguere due casi.

Esista $c \in \{c_1, c_2\} \cap (a, b)$. Tale c è un punto di estremo che cade in (a, b). A tale punto si può applicare il Teorema di Fermat e si conclude che $w'(c) = 0$.

Se invece $\{c_1, c_2\} \cap (a, b) = \varnothing$, allora si dimostra facilmente che w è costante. Infatti avremo $\{c_1, c_2\} \subset \{a, b\}$ e quindi

$$c_1 = a \qquad \text{e} \qquad c_2 = b$$

(o viceversa), da cui si deduce

$$w(c_1) = w(a) = w(b) = w(c_2).$$

Avendo ottenuto w costante non c'è niente altro da dimostrare, infatti per ogni $x \in [a, b]$ risulta $w'(x) = 0$. ■

Teorema 14.3 (di Lagrange) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *una funzione derivabile. Allora esiste* $c \in (a, b)$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{14.1}$$

Dimostrazione. Accanto alla funzione f consideriamo una funzione ausiliaria

$$w(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Osserviamo subito che la funzione $w : [a, b] \to \mathbf{R}$ è derivabile in quanto somma di funzioni derivabili; risulta inoltre

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned} w(a) &= f(a), \\ w(b) &= f(a). \end{aligned}$$

Alla funzione w si può applicare il Lemma di Rolle, dunque esiste $c \in (a, b)$ tale che $w'(c) = 0$. Sostituendo nell'espressione di w' che abbiamo calcolato, si ottiene

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ossia la tesi che si voleva dimostrare. ■

Osservazione 14.4 *Interpretazione geometrica del Teorema di Lagrange: esiste un punto* $c \in (a, b)$ *tale che la retta tangente al grafico nel punto* $(c, f(c))$ *è parallela alla retta passante per i punti* $(a, f(a)), (b, f(b))$*. Infatti, in base alla (14.1), le suddette rette hanno lo stesso coefficiente angolare.*

Osservazione 14.5 *Il Lemma di Rolle ed il Teorema di Lagrange possono essere enunciati e dimostrati con un piccolo alleggerimento di ipotesi: funzioni continue su* $[a, b]$ *e derivabili in* (a, b) *(in sostanza rinunciando alla derivabilità agli estremi).*

14.1.1 Conseguenze del Teorema di Lagrange

Come al solito I denota un generico intervallo.

Teorema 14.6 (caratterizzazione delle funzioni costanti) *Sia* $f : I \to \mathbf{R}$ *derivabile; le seguenti proposizioni sono equivalenti*

a) f *è costante;*

b) $f'(x) = 0$ *per ogni* $x \in I$.

L'implicazione **a)** $\Rightarrow$ **b)** sfrutta solo la definizione di derivata. Essa continua ad essere valida anche per funzioni definite in un insieme $A \subset \mathbf{R}$ generico.

L'implicazione **b**) $\Rightarrow$ **a**) sfrutta il Teorema di Lagrange quindi vale solo su intervalli. Controesempio

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

avente derivata nulla e tuttavia non costante (se consideriamo tutto il dominio $\mathbf{R} - \{0\}$).

Dimostrazione. ... ■

Teorema 14.7 (caratterizzazione delle funzioni monotone) *Sia* $f : I \to \mathbf{R}$ *derivabile; le seguenti proposizioni sono equivalenti*

a) f *è monotona crescente;*

b) $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in I$.

L'implicazione **a**) $\Rightarrow$ **b**) sfrutta solo la definizione di derivata ed il Teorema di confronto. Essa continua ad essere valida anche per funzioni definite in un insieme $A \subset \mathbf{R}$ generico.

L'implicazione **b**) $\Rightarrow$ **a**) sfrutta il Teorema di Lagrange quindi vale solo su intervalli. Controesempio

$$f(x) = -1/x$$

avente derivata positiva e tuttavia non monotona (se consideriamo tutto il dominio $\mathbf{R} - \{0\}$).

Dimostrazione. ... ■

Teorema 14.8 (criterio di stretta monotonia) *Sia* $f : I \to \mathbf{R}$ *derivabile. Se*

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I. \tag{b1}$$

allora

$$f \text{ è strettamente monotona crescente.} \tag{a1}$$

L'implicazione si prova esattamente come **b**) $\Rightarrow$ **a**) di sopra. Osserviamo che questa volta non siamo in presenza di una caratterizzazione, infatti l'implicazione **a**1) $\Rightarrow$ **b**1) è falsa. Come controesempio possiamo considerare la funzione strettamente crescente $f(x) = x^3$; evidentemente è falso che $f'(x) = 3x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

14.2 Risoluzione qualitativa di equazioni

La conoscenza dell'andamento di una funzione (limiti agli estremi del dominio, intervalli di monotonia) ha molte importanti applicazioni. Grazie al Teorema di caratterizzazione delle funzioni monotone, anzi al criterio di monotonia, questo problema viene ricondotto alla risoluzione di una disequazione.

Vediamo di seguito alcune applicazioni tipiche.

Esempio 14.9 *Nell'Esempio ... si chiedeva di risolvere la disequazione*

$$e^x - x > 0$$

Per una disequazione di questo tipo non disponiamo di una risoluzione analitica e quindi ci accontiamo di una soluzione qualitativa: stabilire in quanti intervalli (limitati o illimitati) essa è verificata, oppure stabilire che essa è verificata per ogni $x \in \mathbf{R}$*, oppure stabilire che essa non è mai verificata.*

Consideriamo la funzione

$$g(x) = e^x - x$$

che è definita su tutto $\mathbf{R}$*. Abbiamo*

$$g'(x) = e^x - 1$$

e pertanto

$$g'(x) \geq 0$$

se e solo se

$$x \geq 0.$$

Pertanto la funzione g *presenta due intervalli di monotonia:*

- $(-\infty, 0]$ *in cui è strettamente decrescente;*
- $[0, +\infty)$ *in cui è strettamente crescente.*

In sintesi abbiamo la situazione

$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Il punto 0 *è di minimo assoluto. Poiché il valore minimo assoluto di* g *è dato da* $g(0) = 1 > 0$*, possiamo concludere che la disequazione () è verificata, come avevamo scritto a suo tempo, per ogni* $x \in \mathbf{R}$*.*

Ora passiamo ad esaminare situazioni più complesse, in cui è coinvolto anche il Teorema degli zeri.

Consideriamo l'equazione

$$f(x) = 0.$$

Nel Capitolo ... abbiamo enunciato il Corollario ... che consentiva di trarre un'importante conclusione: il numero di soluzioni dell'equazione è minore o al più uguale al numero di sottointervalli del dominio in cui f è strettamente monotona; precisamente in ciascun sottointervallo di stretta monotonia la soluzione esiste se e solo se f cambia segno agli estremi. Ovviamente può anche capitare che f si annulli proprio ad un estremo di un intervallo di stretta monotonia. Considerazioni analoghe consentono di trattare disequazioni o equazioni del tipo

$$f(x) = \lambda.$$

Esempio 14.10 *Si consideri l'equazione*

$$4x^7 - 7x^4 + 2 = 0$$

Si tratta di un'equazione algebrica, ma non sembra possibile individuarne le radici con i tradizionali metodi algebrici.

Se applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = 4x^7 - 7x^4 + 2$$

osserviamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

pertanto vi è almeno uno zero.

Se calcoliamo $f(0) = 2$*, possiamo concludere che una soluzione è collocata in* $(-\infty, 0]$.

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = 28x^3(x^3 - 1).$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- *In* $(-\infty, 0]$ *la funzione* f *cresce, da* $-\infty$ *a* $f(0) = 2$*; dunque in questo intervallo abbiamo una soluzione (esattamente una!).*
- *In* $[0, 1]$ *la funzione decresce e cambia segno agli estremi; dunque in questo intervallo abbiamo un'altra soluzione.*
- *Infine in* $[1, +\infty)$ *la funzione cresce e cambia segno agli estremi. Pertanto in questo intervallo abbiamo una terza soluzione.*

In definitiva l'equazione assegnata ammette esattamente tre soluzioni.

In maniera del tutto analoga (e sempre utilizzando il calcolo differenziale), potremmo dimostrare che l'equazione

$$4x^7 - 7x^4 + 3 = 0$$

ammette esattamente due soluzioni.

Esempio 14.11 *Si consideri la disequazione*

$$e^x - 4x \geq 0$$

Studiamo la monotonia della funzione

$$f(x) = e^x - 4x$$

definita su tutto $\mathbf{R}$.

Abbiamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi non abbiamo informazioni utili.

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = e^x - 4$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- *In* $(-\infty, \log 4)$ *la funzione* f *decresce, da* $+\infty$ *a* $f(\log 4) = 4(1-\log 4) < 0$. *Pertanto vi è un unico punto* $x_1 \in (-\infty, \log 4)$ *in cui la funzione si annulla e la funzione risulta positiva in* $(-\infty, x_1)$.
- *In* $(\log 4, +\infty)$ *la funzione* f *cresce, da* $f(\log 4) < 0$ *a* $+\infty$. *Pertanto vi è un unico punto* $x_2 \in (\log 4, +\infty)$ *in cui la funzione si annulla e la funzione risulta positiva in* $(x_2, +\infty)$.

Dunque la disequazione è verificata nei due intervalli descritti sopra.

Esempio 14.12 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{1}{6}x^3 = \log x^4.$$

Il secondo membro dell'equazione è definito per $x \neq 0$. *Pertanto applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione*

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \log x^4$$

in due distinti intervalli: $(-\infty, 0)$ *e* $(0, +\infty)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to0^-} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

quindi esiste almeno una soluzione in $(-\infty, 0)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

quindi in $(0, +\infty)$ *non abbiamo informazioni utili.*

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x}$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- *In* $(-\infty, 0)$ *la funzione* f *cresce, da* $-\infty$ *a* $+\infty$*; dunque in questo intervallo abbiamo esattamente una soluzione.*
- *In* $(0, 2)$ *la funzione decresce da* $+\infty$ *a* $f(2) = \frac{4}{3}(1-\log 8) < 0$, *cioè cambia segno agli estremi; dunque in questo intervallo abbiamo un'altra soluzione.*
- *Infine in* $[2, +\infty)$ *la funzione cresce e cambia segno agli estremi. Pertanto in questo intervallo abbiamo una terza soluzione.*

In definitiva l'equazione assegnata ammette esattamente tre soluzioni.

Esempio 14.13 *Calcolare l'immagine della funzione*

$$f(x) = x^2 + 8x + 4 - 20 \arctan x.$$

Abbiamo due possibilità:

- *calcolare gli intervalli di monotonia ed applicare il Teorema ...*
- *studiare l'andamento della funzione e trarre le dovute conclusioni.*

In larga parte i due approcci sono equivalenti. Calcoliamo anzitutto

$$f'(x) = \frac{2}{x^2+1}(x+3)(x+2)(x-1)$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Otteniamo gli intervalli $[-3, -2]$ *e* $[1, +\infty)$*. In questi intervalli la funzione è strettamente crescente. Nei rimanenti intervalli la funzione sarà strettamente decrescente.*

Primo approccio. Risulta

$$\begin{aligned} f(\mathbf{R}) &= f((-\infty, -3]) \cup f([-3, -2]) \cup f([-2, 1]) \cup f([1, +\infty)) \\ &= \left[f(-3), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) \cup [f(-3), f(-2)] \cup \\ &\quad \cup [f(1), f(-2)] \cup \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) \\ &= \ldots \\ &= \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right). \end{aligned}$$

Secondo approccio. Lo studio della monotonia di riassume nel seguente schema

$-\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Quindi la funzione presenta due punti di minimo relativo, -3 *e* 1*, ed un punto di massimo relativo. Studiando il comportamento agli estremi*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

si ricava che la funzione non è limitata superiormente. Confrontando i valori minimi locali

$$\begin{aligned} f(-3) &= \ldots \\ f(1) &= \ldots \end{aligned}$$

si deduce che 1 *è punto di minimo assoluto. La conclusione è, come sopra*

$$f(\mathbf{R}) = [f(1), +\infty).$$

Esempio 14.14 *Si consideri l'equazione*

$$\log(x^2 + \frac{1}{4}) = 2\arctan(2x).$$

Applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = \log(x^2 + \frac{1}{4}) - 2\arctan(2x).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

quindi non ricaviamo alcuna informazione utile. In realtà se calcoliamo $f(0) = -\log 4$*, possiamo concludere che esistono almeno due soluzioni, una positiva ed una negativa.*

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{4}{4x^2+1}(2x-1)$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- *In* $(-\infty, 1/2]$ *la funzione* f *decresce, da* $+\infty$ *a* $f(1/2) < f(0) < 0$*; dunque in questo intervallo abbiamo esattamente una soluzione.*
- *In* $[1/2, +\infty)$ *la funzione e cambia segno agli estremi; dunque in questo intervallo abbiamo un'altra soluzione.*

In definitiva l'equazione assegnata ammette esattamente due soluzioni.

Esempio 14.15 *Al variare del parametro* $\lambda \in \mathbf{R}$ *determiniamo il numero di soluzioni dell'equazione*

$$xe^x - 5000(x+1)^2 = \lambda$$

Si richiede di studiare l'andamento della funzione

$$f(x) = xe^x - 5000(x+1)^2,$$

e di "contare" le intersezioni del grafico con una generica retta $y = \lambda$*. Ovviamente questa procedura di conteggio può essere adeguatamente formalizzata...*

Anzitutto calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

quindi possiamo concludere che, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ *esiste almeno una soluzione.*

Ora passiamo ad individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = (x+1)\,(e^x - 10000)$$

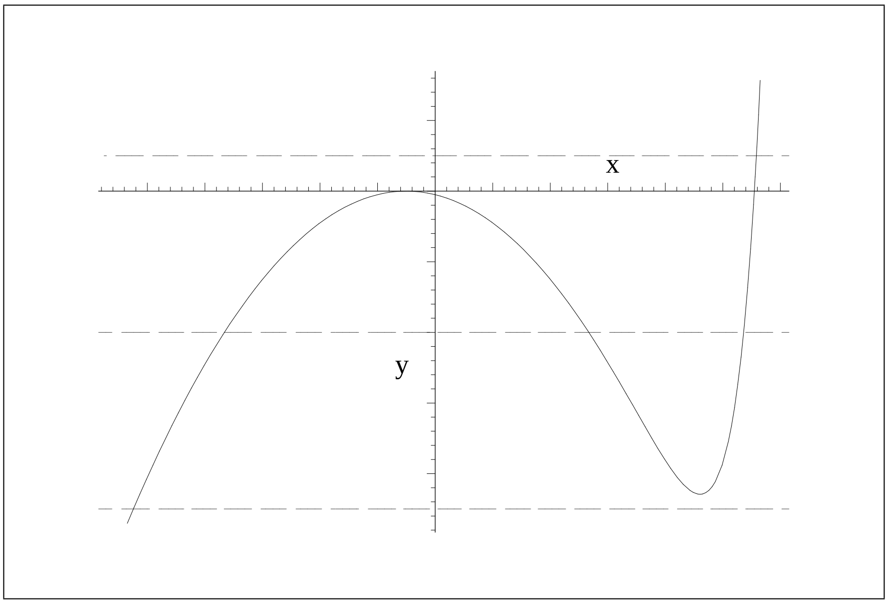
e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- *In* $(-\infty, -1]$ *la funzione* f *cresce, da* $-\infty$ *a* $f(-1) = -1/e$.
- *In* $[-1, 4\log 10]$ *la funzione decresce da* $f(-1)$ *a* $f(4\log 10)$.
- *Infine in* $[4\log 10, +\infty)$ *la funzione cresce da* $f(4\log 10)$ *a* $+\infty$.

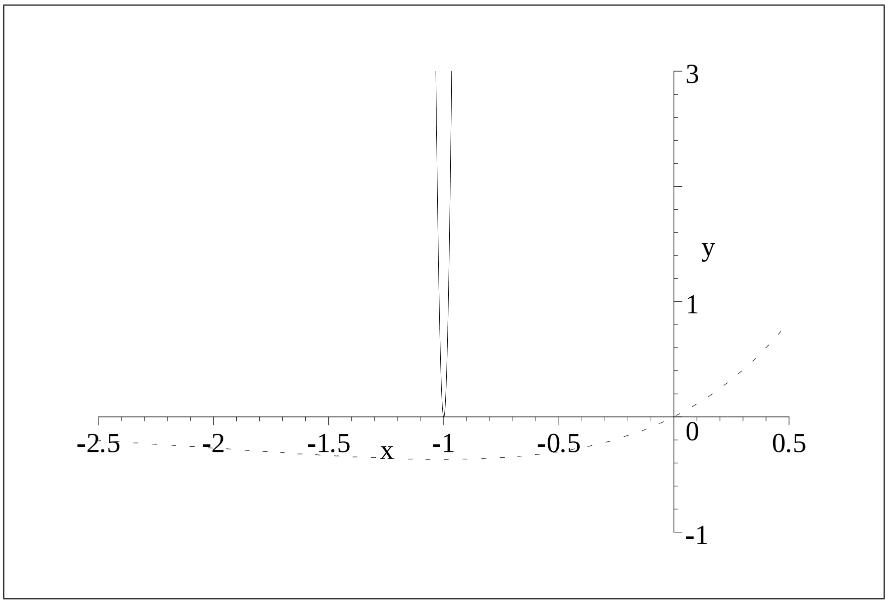
In sintesi l'andamento è il seguente



La risposta ora è immediata:

- *per* $\lambda < f(4\log 10)$ *vi è una sola soluzione;*
- *per* $\lambda = f(4\log 10)$ *vi sono due soluzioni;*
- *per* $f(4\log 10) < \lambda < f(-1)$ *vi sono tre intersezioni;*
- *per* $\lambda = f(-1)$ *vi sono due soluzioni;*
- *per* $f(-1) < \lambda$ *vi è una sola soluzione.*

In particolare, per $\lambda = 0$, *l'equazione l'equazione assegnata ammette un'unica soluzione. Al contrario se provassimo, con l'ausilio di un software, a visualizzare i grafici dei due termini* xe^x *(linea tratteggiata) e* $5000(x+1)^2$ *(linea continua) non noteremmo alcuna intersezione (a questo proposito ricordiamo che l'intervallo standard di visualizzazione è dato da* $[-5, 5]$*).*



Esempio 14.16 *Si consideri la disequazione*

$$4x^3 - 5x^2 \geq \log x^2.$$

Il secondo membro dell'equazione è definito per $x \neq 0$. *Pertanto studiamo la funzione*

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 - \log x^2$$

che è definita in due intervalli distinti: $(-\infty, 0)$ *e* $(0, +\infty)$.

Dobbiamo individuare gli intervalli di stretta monotonia. Calcoliamo

$$f'(x) = 2\frac{(x-1)(6x^2+x+1)}{x}$$

e risolviamo la disequazione

$$f'(x) \geq 0.$$

Esponiamo di seguito i risultati.

- *In* $(-\infty, 0)$ *la funzione* f *è strettamente crescente. Abbiamo*

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= +\infty; \end{aligned}$$

  dunque troviamo esattamente un intervallo un intervallo di positività $[x_1, 0)$.

- *In* $(0, 1]$ *la funzione decresce da* $+\infty$ *a* $f(1) = -3$*; dunque abbiamo un secondo intervallo di positività* $(0, x_2]$.

- *Infine in* $[1, +\infty)$ *la funzione cresce e cambia segno agli estremi, in quanto*

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

  dunque abbiamo un terzo intervallo di positività $[x_3, +\infty)$.

Esempio 14.17 *Consideriamo la disequazione*

$$16x^2 - 121\log^2 x \geq 0$$

Se vogliamo individuare gli intervalli di positività della funzione

$$g(x) = 16x^2 - 121\log^2 x,$$

possiamo usare la stessa strategia utilizzata negli Esempi.... ossia studiamo l'andamento di g tramite la sua derivata

$$g'(x) = 32x - \frac{242}{x}\log x.$$

Purtroppo la derivata non è affatto semplice da studiare.

Allora operiamo diversamente, tramite fattorizzazione

$$g(x) = h_+(x)h_-(x)$$

dove

$$\begin{aligned} h_+(x) &= 4x + 11\log x, \\ h_-(x) &= 4x - 11\log x. \end{aligned}$$

Studiamo separatamente i segni dei due fattori.

La funzione h_+ *è strettamente monotona crescente in* $(0, +\infty)$*. Infatti*

$$h_+^{'}(x) = 4 + \frac{11}{x}.$$

Risulta inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} h_+(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} h_+(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Pertanto esiste un unico $x_1 \in (0, +\infty)$ *tale che* $h_+(x_1) = 0$*. Inoltre* $h_+(x) > 0$ *se e solo se* $x > x_1$*.*

Lo studio della funzione h_- *è più complesso. Anzitutto calcoliamo*

$$h_-^{'}(x) = 4 - \frac{11}{x} = \frac{4x - 11}{x}.$$

Pertanto la funzione h_- *presenta due intervalli di monotonia. Esponiamo i risultati.*

- *In* $(0, 11/4)$ *la funzione decresce da* $+\infty$ *a* $h_-(11/4) = 11(1 - \log(11/4)) < 0$*. Pertanto vi è un unico punto* $x_2 \in (0, 11/4)$ *in cui la funzione si annulla e la funzione risulta positiva in* $(0, x_2)$*.*

- *In* $(11/4, +\infty)$ *la funzione cresce da* $h_-(11/4)$ *a* $+\infty$*. Pertanto vi è un unico punto* $x_3 \in (11/4, +\infty)$ *in cui la funzione si annulla e la funzione risulta positiva in* $(x_3, +\infty)$*.*

I valori esatti x_1, x_2 e x_3 non disponibili tramite una formula. D'altra parte per studiare il segno del prodotto () dobbiamo sapere come sono collocati i tre punti. Sappiamo solo che $x_2 < 11/4 < x_3$.

- $h_+(11/4) = 11(1 + \log(11/4)) > 0$ *e pertanto* $x_1 < 11/4$.
- x_1 *è caratterizzato dall'equazione* $-11 \log x_1 = 4x_1$*, quindi* $h_-(x_1) = 4x_1 - 11 \log x_1 = 8x_1 > 0$.
- *Poiché la funzione* h_- *risulta positiva in* $(0, x_2)$ *si conclude* $x_1 < x_2$

Le informazioni ottenute vengono riassunte nello schema che segue

	0		x_1		x_2		x_3	
$h_+(x)$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$h_-(x)$	$\vdots$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\vdots$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dunque concludiamo che la funzione $g(x)$ è positiva in due intervalli: $[x_1, x_2]$, $[x_3, +\infty)$.

14.3 Teoremi di de L'Hospital

....

La regola di de L'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{14.2}$$

se applicata a forme determinate, può portare completamente fuori strada.

Esempio 14.18 *Consideriamo*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(x^2\right)}{\sin^2 x}$$

Quando scriviamo la (14.2) dobbiamo ricordare che si tratta di una uguaglianza condizionata (essa è vera se il secondo limite esiste); quindi anche se il secondo limite non esiste, il primo potrebbe esistere.

Esempio 14.19 *Consideriamo*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x}$$

In quali casi si applica la regola di de L'Hospital?

Tutte le volte in cui non si riescono ad applicare le equivalenze, in particolare nelle situazioni di cancellazione. In ogni caso dobbiamo suggerire di applicare tutte le possibili equivalenze per semplificare al massimo il limite da calcolare.

Talvolta anche il rapporto delle derivate si presenta come forma indeterminata. In alcuni casi ci accorgiamo subito che si ottiene un limite in qualche senso più complicato di quello iniziale. Ciò vuol dire che la regola, anche se applicata correttamente, ci ha portati fuori strada; quindi si deve cambiare metodo.

Esempio 14.20 *Consideriamo*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$$

Possiamo anche pensare ad un'applicazione ripetuta delle regola, stando bene attenti ad alcune situazioni paradossali.

Esempio 14.21 *Consideriamo*

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{x-\pi/2}{\sqrt{1-\sin x}}$$

Esempio 14.22 *Consideriamo*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

14.3.1 Applicazione alle differenze di infiniti

Ricordiamo che nel Paragrafo .... abbiamo suggerito una procedura per la risoluzione delle forme $+\infty - \infty$. Supponiamo di avere

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty, \tag{14.3}$$

per cui

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$$

è una forma $+\infty - \infty$. Noi abbiamo suggerito di effettuare la trasformazione

$$f(x) - g(x) = g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)$$

Serve dunque calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{14.4}$$

che si presenta nella forma$\frac{+\infty}{+\infty}$ quindi rientra nell'ambito di applicabilità del Teorema di de L'Hospital. Poi c'è da auspicare che il risultato di (14.4) non sia 1, altrimenti ricadiamo in una forma indeterminata e si deve procedere con altre tecniche.

Alcuni manuali suggeriscono un artificio per applicare "direttamente" il Teorema di de L'Hospital anche allo studio delle forme $+\infty - \infty$. Osserviamo preliminarmente che

$$f(x) - g(x) = \log(\exp(f(x) - g(x))) = \log \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$$

E quindi

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{y\to y_0} \log y$$

dove

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \tag{14.5}$$

Il limite nella (14.5) è una forma $\frac{+\infty}{+\infty}$ (al pari della (14.4)) e quindi si può applicare il Teorema di de L'Hospital.

Cerchiamo di confrontare i due approcci: il limite (14.5) ci sembra (quasi sempre) più difficile da calcolare rispetto a (14.4). Possiamo riscontrarlo proprio in un caso in cui il nostro approccio non è immediatamente risolutivo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}-x\right).$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Dopo aver scritto

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}-x=x\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}}{x}-1\right),$$

calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}}{x}=1,$$

dunque servono ulteriori indagini, ossia

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}}{x}-1\cong ...$$

Passiamo ora alla procedura alternativa, apparentemente più diretta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}-x\right)=\lim_{y\to y_0}\log y$$

dove

$$y_0=\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}}{e^x}.$$

Applichiamo il Teorema di de L'Hospital a quest'ultimo limite e ci ritroviamo a dover calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp\sqrt[3]{x^3+2x^2+3x}\,\frac{3x^2+4x+3}{3\sqrt[3]{(x^3+2x^2+3x)^2}}}{e^x}.$$

Evidentemente non ci sembra di aver ottenuto un grande vantaggio!

14.3.2 Applicazione alle derivate unilaterali

Dal Teorema di de L'Hopital si può dedurre anche il seguente risultato.

Proposizione 14.23 *Siano $f:A\to\mathbf{R}$ ed $x_0\in A$. Sia f continua in un intorno di x_0 e derivabile localmente in x_0. Risulta allora*

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &= \lim_{x\to x_0^+} f'(x)\\ f'(x_0^-) &= \lim_{x\to x_0^-} f'(x)\end{aligned}$$

(ammesso che il limite a secondo membro esista).

Osservazione 14.24 *È opportuno precisare che nella proposizione precedente non si richiede che f sia derivabile nel punto x_0. Pertanto l'applicazione principale della proposizione consiste nello studio della natura dei punti di non derivabilità (punti singolari, vedi Paragrafo...).*

14.4 Derivata di funzioni convesse

Sia $f : I \to \mathbf{R}$ convessa.

Ricordiamo che, per ogni $a, b \in I$, $a < b$ e per ogni ogni $x \in (a, b)$, risulta

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Se esiste la derivata di f in a, possiamo passare al limite $x \to a$ e, per la proprietà di confronto, otteniamo

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{14.6}$$

Analogamente se esiste la derivata di f in b, possiamo passare al limite $x \to b$ e, per la proprietà di confronto, otteniamo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b). \tag{14.7}$$

Da quanto osservato si deducono interessanti proprietà.

Teorema 14.25 *Sia $f : I \to \mathbf{R}$ convessa e derivabile in $x_0 \in I$. Per ogni $x \in I$ vale*

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x). \tag{14.8}$$

Dimostrazione. Se $x < x_0$, applichiamo la (14.7) rimpiazzando x (risp. x_0) al posto di a (risp. b); otteniamo

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0),$$

da cui si deduce la (14.8).

Se $x_0 < x$, applichiamo la (14.6) rimpiazzando x_0 (risp. x) al posto di a (risp. b); otteniamo

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

da cui si deduce nuovamente la (14.8).

Poiché la (14.8) vale anche per $x = x_0$, la dimostrazione è completa. ∎

Osservazione 14.26 *L'interpretazione grafica della (14.8) è immediata e molto interessante: (tutto) il grafico di f è collocato al di sopra della retta tangente al grafico stesso nel punto x_0. Nel prossimo capitolo studieremo una condizione sufficiente per ottenere la (14.8) in un intorno di x_0.*

Se $f : I \to \mathbf{R}$ è convessa e derivabile in I, allora il grafico di f è collocato al di sopra di tutte le possibili rette tangenti. In qualche modo si tratta di una proprietà duale alla definizione (il grafico di f è collocato al di sotto di tutte le sue corde).

Concludiamo con la *caratterizzazione delle funzioni convesse tramite la derivata.*

Teorema 14.27 *Sia f derivabile in I. La funzione f è convessa in I se e solo se la funzione f' è crescente.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo un'implicazione: se f è convessa, la funzione f' è crescente in I. Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Applichiamo la (14.6) e la (14.7) rimpiazzando rispettivamente a e b con x_1 e x_2. deduciamo

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

■