Analisi Matematica - 27.3.2019 - prima parte

Calcolo di limiti mediante stime asintotiche

Def: $f, g : I \to \mathbb{R}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to in cui è possibile calcolare il lim. di f e g. Si dice che f è asintotica a g per $x \to c$ se esiste $\omega : I \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$$
$$\omega(x) \to 1 \quad \text{per } x \to c.$$

In tal caso si scrive

$$f(x) \sim g(x) \quad x \to c$$ "f è asintotica a g per $x \to c$"

Stessa def. per le successioni:

$\{a_n\}$ $\{b_n\}$ succ.

$a_n \sim b_n \iff \exists \{c_n\}$ t.c. $a_n = c_n \cdot b_n$, $c_n \to 1$

(per $n \to +\infty$)

OSS: Per le funzioni: se $g(x) \neq 0$ defin. per $x \to c$

$f(x) \sim g(x)$ per $x \to c \iff \dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$ per $x \to c$.

Anche per le succ.: se $b_n \neq 0$ definitivamente

$a_n \sim b_n \iff \dfrac{a_n}{b_n} \to 1$

Esempi:

Dai limiti notevoli:

$\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$

$\operatorname{tg} x \sim x$ "

$\operatorname{arcsen} x \sim x$ "

$\operatorname{arctg} x \sim x$ "

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ "

$e^x - 1 \sim x$ "

$\log(1+x) \sim x$ "

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad " \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Successioni:

$n \sim n+1 \qquad n+1 = n\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{c_n \to 1} \quad n \to +\infty$

$n^2 \sim n^2 + n \sin n$

$3^n + \sin n \sim 3^n$

$4\, n! + n^2 + 3 \sim 4\, n!$

$4\, n! + n^2 + 3 = 4\, n! \left(1 + \frac{1}{4}\frac{n^2}{n!} + \frac{3}{n!}\right)$ con $\frac{1}{4}\frac{n^2}{n!} \to 0$, $\frac{3}{n!} \to 0$

<u>Teorema</u>: Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$ allora f e g hanno lo stesso limite per $x \to c$ oppure né f né g ammettono limite per $x \to c$.

<u>Dim</u>: $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$

$f(x) = \omega(x) g(x)$ con $\omega(x) \to 1 \quad x \to c$

Se $g(x) \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$f(x) \to 1 \cdot \ell = \ell \qquad$ (anche nei casi $\ell = \pm\infty$)

Se $g(x)$ non ha limite per $x \to c$, neanche $f(x)$ può averlo, perché se $f(x) \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$g(x) = \frac{f(x)}{\omega(x)} \to \frac{\ell}{1} = \ell$. $\blacksquare$

Analogo risultato vale per le succ.

L'asintoticità $\sim$ è una rel. di equiv. per $x \to c$

- riflessiva $\quad f(x) \sim f(x) \qquad \omega(x) = 1$
- simmetrica $\quad f(x) \sim g(x) \Rightarrow g(x) \sim f(x) \qquad \omega \quad \frac{1}{\omega}$
- transitiva $\quad f(x) \overset{\omega_1}{\sim} g(x),\ g(x) \overset{\omega_2}{\sim} h(x) \Rightarrow f(x) \overset{\omega_1 \cdot \omega_2}{\sim} h(x)$

Ciò ci dice che

- Non è importante l'ordine tra f e g
  "f e g sono asintotiche tra loro per $x \to c$"
- Si può procedere mediante catene di funzioni asintotiche.
  Per $x \to c$
  $$f(x) \sim g(x) \sim \cdots \sim h(x)$$
  se conosco il lim di h per $x \to c$, conosco pure quello di f.
  Analog
  $$a_n \sim b_n \sim \cdots \sim h_n$$

Applicazioni: Limiti di polinomi

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

ove $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

P_n polinomio di grado n

$$\boxed{\text{per } x \to \pm\infty \quad P_n(x) \sim a_n x^n}$$

$$P(x) = a_n x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{x}} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{x^n}}\right)}_{w(x) \to 1}$$

Quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} P_n(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

(il ris. sarà $+\infty$ o $-\infty$).

- $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 2x - 4)$ $\quad [+\infty - \infty]$
  $= \lim 3x^2 = +\infty$

$x \to +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} (-2x^4 + x + 2) =$ $[-\infty + \infty]$

$\lim_{x \to +\infty} (-2x^4) = -\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} (-3x^2 - 6x) =$ $[-\infty + \infty]$

$= \lim_{x \to -\infty} (-3x^2) = -\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} (6x - x^5) =$ $[-\infty + \infty]$

$= \lim_{x \to -\infty} -x^5 = +\infty$

Questa tecnica funziona anche se ci sono quantità limitate o esponenziali o logaritmi

- $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + \sin x) = ?$

$x^3 + \sin x = x^3 \underbrace{\left(1 + \frac{\sin x}{x^3}\right)}_{\downarrow \atop 1}$ lim. $\frac{1}{x^3} \to 0$ $\frac{1}{-\infty}$

$\sim x^3$

$? = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = ?$ $[+\infty - \infty]$

$e^x - x = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \sim e^x$ $\qquad \frac{x}{e^x} \to 0$

$\frac{e^x}{x} \to +\infty$

$\Downarrow$

$? = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\qquad \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \to \frac{1}{\infty}$

- $\lim_{u \to +\infty} (u^3 - 6u + 4) = \lim_{u \to +\infty} u^3 = +\infty$

- $\lim_{n \to +\infty} (n - 6n + 4) = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

- $\lim_{n \to +\infty} \left(6n - 2^n + 4n^n\right) = \lim_{n \to +\infty} 4n^n = +\infty$

$$= 4n^n \left(\frac{6}{4} \underbrace{\frac{n}{n^n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2^n}{4n^n}}_{\to 0} + 1 \right)$$

Funzioni asintotiche ad una costante:

Sia $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$

$f(x) \to \ell$ per $x \to c \iff f(x) \sim \ell$ per $x \to c$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \omega(x) \cdot \ell \quad \omega(x) \to 1 \Rightarrow \\ f(x) \to \ell \end{array} \right]$$

Asintoticità e prodotti e/o quozienti

Per $x \to c$ $f_1(x) \sim g_1(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$

Allora

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x) \qquad x \to c$$

$$f_1(x)^p \sim g_1(x)^p \qquad \forall p > 0 \qquad ''$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \qquad x \to c$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^6} = \ell$

per $x \to 0$ $\operatorname{sen} x \sim x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \sim x^2$

$x^6 \sim x^6$

$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$ $\left[\frac{1}{0^+}\right]$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{\operatorname{tg} x} = \ell$

per $x \to 0$ $\left.\begin{array}{l} x \sim x \\ e^x - 1 \sim x \end{array}\right\}$ $x(e^x-1) \sim x \cdot x = x^2$

$\operatorname{tg} x \sim x$

$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$

Asintoticità e funzione composta

Sia $\varepsilon(x)$ una funzione tale che

$\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to c$

$\varepsilon(x) \neq 0$ per $x \to c$ oppure $\varepsilon(x)$ continua in c

allora

$$\operatorname{sen} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) \quad \text{per } x \to c$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = x\, \omega(x) \qquad \omega(x) \to 1 \quad x \to 0 \Rightarrow \\ \operatorname{sen} \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \cdot \omega(\varepsilon(x)) \\ \lim_{x\to c} \omega(\varepsilon(x)) \underset{t=\varepsilon(x)}{=} \lim_{t\to 0} \omega(t) = 1 \end{array}\right]$$

In modo analogo

$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$ $x \to c$

$\log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$ "

$\operatorname{arctg} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$ "

$\operatorname{arctg} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$ ॥

$\operatorname{tg} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$

$\arcsin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$

E così per gli altri limiti notevoli.

- $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$ per $x \to 0$ è vero perché $2x \to 0$
- $\operatorname{sen}(2x+1) \sim 2x+1$ per $x \to 0$ NO! SBAGLIATO

perché $2x+1 \to 1$ per $x \to 0$

$$\operatorname{sen}(2x+1) \underset{\uparrow}{\to} \operatorname{sen} 1$$

sen è funzione continua

$$\operatorname{sen}(2x+1) \sim \operatorname{sen} 1$$

oss: La composizione tra funzioni in generale non mantiene l'asintoticità

per $x \to +\infty$ $x \sim x+1$ ma non è vero che

$$e^x \sim e^{x+1}$$

poiché

$$\frac{e^x}{e^{x+1}} = \frac{1}{e} \neq 1$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen} 3x} = ?$$

$x \to 0$ $2x \to 0 \Rightarrow \log(1+2x) \sim 2x$

$3x \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 3x \sim 3x$

$$\frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen} 3x} \sim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$? = \frac{2}{3}$$

$$p = \frac{2}{3}$$

- $$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1} = p$$

$x \to 1 \quad (x-1)^2 \sim (x-1)^2$

$$\underbrace{3(x-1)^2}_{\varepsilon(x)} \to 0 \Rightarrow e^{3(x-1)^2} - 1 \sim 3(x-1)^2$$

$$\frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1} \sim \frac{\cancel{(x-1)^2}}{3\cancel{(x-1)^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

Limiti di rapporti tra polinomi: dati due polinomi

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

$a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$

Abbiamo già visto che per $x \to \pm\infty$ $\quad P_n(x) \sim a_n x^n$

$$Q_m(x) \sim b_m x^m$$

quindi

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \sim \frac{a_n}{b_m} \frac{x^n}{x^m}$$

da cui

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} \frac{x^n}{x^m} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \frac{a_n}{\dots} & \text{se } n = m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ \pm\infty & \text{se } n > m \end{cases}$$

$\downarrow$

segno dipende dal segno di $\frac{a_n}{b_m}$ (stabilire caso per caso)

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+x^3}{x^2+1} = \quad \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

  $= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^5}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+2} = 3$

  $\sim \dfrac{3x^2}{x^2}$

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{x^3-6x+8} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{3}2}} = 0$

OSS:

- Bisogna fare attenzione a precisare il punto in cui stiamo facendo il limite

  sen $x \sim x$ per $x\to 0$ VERO
  sen $x \sim x$ per $x\to+\infty$ FALSO

  $e^x-1 \sim x$ per $x\to 0$ VERO
  $e^x-1 \sim x$ per $x\to+\infty$ FALSO
  $e^x-1 \sim e^x$ per $x\to+\infty$ VERO

- Non usare "$\sim$" come "$=$"

per $x \to 0$ $\quad e^x \sim 1 \sim 1+x^2 \Rightarrow$

$e^x \sim 1+x^2$ $\quad$ VERO!

Ma non è vero che

$$e^x - 1 \sim x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

- In generale la somma non conserva la asintoticità.

Per esempio: $\quad x \to 0 \quad \operatorname{sen} x \sim x$

$\quad -x \sim -x$

ma non è vero che $\quad \operatorname{sen} x - x \sim x - x = 0$

Infatti $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) \sim 0$ per $x \to c$ significa che $\exists\, \omega: I \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = \omega(x) \cdot 0 = 0 \qquad \omega(x) \to 1$$

cioè f è identicamente nulla in un intorno di c.

Invece $\operatorname{sen} x - x$ non lo è.

Vedremo che

$$\operatorname{sen} x - x \sim -\frac{1}{6} x^3$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,3^n}{n^n} = +\infty$$

$a_n = \dfrac{n!\,3^n}{n^n}$ Uso il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)}!\,3^{\cancel{n+1}}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}\,\cancel{3^n}} = \qquad 1^\infty$$

$$(n+1)^{n+1} = (n+1)^n\,\cancel{(n+1)}$$

$$= 3\,\frac{n^n}{(n+1)^n} = 3\,\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= 3\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n} = 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{come prima}}{= \,\text{-------}\, =} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+1}}{x^6+x^3} = ?$$

$x \to +\infty$ $\qquad x^6 + x^3 \sim x^6$

$$e^{x^2+1} = e\cdot e^{x^2}$$

$$\frac{e^{x^2+1}}{x^6+x^3} \sim \frac{e\cdot e^{x^2}}{x^6} \to e\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^6} \underset{x^2=t}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^3} = +\infty$$

$\ell = +\infty$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{(1-\cos x)^3} = \ell$

$x \to 0 \quad \operatorname{arctg} x \sim x \Rightarrow \operatorname{arctg}^2 x \sim x^2$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow (1-\cos x)^3 \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = \frac{1}{8}x^6$

$$\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{(1-\cos x)^3} \sim \frac{x^2}{\frac{1}{8}x^6} = \frac{8}{x^4} \to +\infty \qquad \left[\frac{8}{0^+}\right]$$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} = 1$

$x \to +\infty \qquad x+1 \sim x$

$x^2-x \sim x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-x} \sim \sqrt{x^2} = |x| = x$

$x \to +\infty$
$x > 0$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} \sim \frac{x}{x} = 1$$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} = -1$

Come sopra: $x+1 \sim x$

$x^2-x \sim x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-x} \sim \sqrt{x^2} = |x| = -x$

$x \to -\infty$
$x < 0$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} \sim \frac{x}{-x} = -1$$

Ricordare

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\arcsen x} - 1}{\log_e (1 + 3 \operatorname{sen} x)} = \dfrac{1}{3}$

per $x \to 0$ $\quad \underbrace{\arcsen x}_{\varepsilon(x)} \to 0 \Rightarrow e^{\arcsen x} - 1 \sim \arcsen x \sim x$

$\underbrace{3 \operatorname{sen} x}_{\varepsilon(x)} \to 0 \Rightarrow \log_e (1 + 3 \operatorname{sen} x) \sim 3 \operatorname{sen} x \sim 3x$

$$\frac{e^{\arcsen x} - 1}{\log_e (1 + 3 \operatorname{sen} x)} \sim \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 3x} = \dfrac{2}{9}$

$x \to 0 \qquad 2x \to 0, \; 3x \to 0 \Rightarrow$

$\operatorname{sen} 2x \sim 2x \Rightarrow x \operatorname{sen} 2x \sim 2x^2$

$\operatorname{sen} 3x \sim 3x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 3x \sim (3x)^2 = 9x^2$

$$\frac{x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 3x} \sim \frac{2x^2}{9x^2} = \frac{2}{9}$$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(x \operatorname{sen} \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{3}{x} \right) = ? \qquad [+\infty \cdot 0]$

$x \to +\infty \qquad \dfrac{2}{x} \to 0 \quad \operatorname{sen} \dfrac{2}{x} \sim \dfrac{2}{x}$

$\dfrac{3}{x} \to 0 \quad \cos \dfrac{3}{x} \to 1 \Rightarrow \cos \dfrac{3}{x} \sim 1$

$x \quad\quad x \quad\quad x$

$$\ell = \lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}\,\frac{2}{\cancel{x}}\cdot 1\right) = 2$$

- $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}{x^2} = \ell \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$x \to 0^-$ $\quad \cos x \to 1 \quad \cos x \sim 1$

$\operatorname{sen} x \sim x$

$$\frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}{x^2} \sim \frac{1\cdot \cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x} \to -\infty$$

$\ell = -\infty$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(2+x^2)\cdot(x^3+3x^2)}{1-\cos(\operatorname{tg} x)} = \ell$$

$x \to 0$ $\quad \log(2+x^2) \to \log 2$

$x^3+3x^2 = x^2\underbrace{(x+3)}_{\to 3} \sim 3x^2$

$x \to 0$ $\quad \operatorname{tg} x \to 0 \Rightarrow$

$1-\cos(\operatorname{tg} x) \sim \frac{1}{2}\underbrace{(\operatorname{tg} x)^2}_{\sim x} = \frac{1}{2}x^2$

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\log 2 \cdot 3\cancel{x^2}}{\frac{1}{2}\cancel{x^2}} = 6\log 2$$

- $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}\ \operatorname{sen}^2\frac{1}{x}\right) = \ell$$

$x \to -\infty$ $\quad 1+x+x^2 \sim x^2 \Rightarrow$

$\sqrt{1+x+x^2} \sim \sqrt{x^2} = |x| = \underbrace{-x}_{\to\, x<0}$

$\frac{1}{x} \to 0 \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{x} \to 0 \quad \operatorname{sen} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2}$$

$$\ell = \lim_{x \to -\infty} \left(-x \cdot \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Ho usato che

$$\varepsilon(x) \to 0 \text{ per } x \to c \Rightarrow \operatorname{sen} \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$

$$\varepsilon(x) \to 0 \text{ per } x \to c \Rightarrow 1 - \cos \varepsilon(x) \sim \frac{1}{2} \varepsilon(x)^2$$