Serie (stima del valore di una serie convergente)

● Stima del valore di una serie: Significato

Considero una serie $S = \sum_{n=c}^{+\infty} a_n$

Posso scrivere una serie S come:

$$|S| = |s_k + R_k| = \left|\sum_{n=c}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n\right|$$

Con s_k somma parziale dei primi k termini, ed R_k somma dei restanti infiniti valori della serie.
Quindi:
$|R_k| = |S - s_k|$

Sia S una serie convergente ad un valore V.

Voglio ottenere una stima di V, approssimata con margine di errore E, con $0 < \mathrm{E} < 1$ $\left(\text{ad esempio } \mathrm{E} = \frac{1}{200}\right)$.

Dire "Trova l'indice k per il quale s_k approssima S a meno di E",

vuol dire trovare k tale che: $|S - s_k| = |R_k| < E$

Bisogna quindi risolvere $|R_k| < E$, ovvero trovare un resto R_k abbastanza piccolo da avere $s_k \cong S$.

Dobbiamo quindi trovare a partire da quale indice k è vero che $|R_k| < E$

Chiarimento sul valore assoluto:

Il valore assoluto si usa come caso generale (perché ci sono le serie con termini a segno alterno in cui serve).

Per le serie a termini definitivamente positivi, $s_n \leq S \ \forall n \in N \Rightarrow S - s_n > 0$.

Quindi per le serie a termini definitivamente positivi si possono non usare i valori assoluti.

Chiarimento sulla notazione:
Il prof Pisani e alcuni libri di testo usano una notazione leggermente diversa.
Lui usa l'indice n per indicare la somma parziale n-esima:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} [a_n] .$$

Non ho usato questa notazione perché è poco intuitiva.
Ci si ritrova a passare da serie di indice n a serie di indice k.
Anche la notazione con indice k è accettata.

● Stima del valore: Serie a valore definito – Serie geometriche

Sia $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ convergente $\Longrightarrow |q| < 1 \Longrightarrow S = \dfrac{1}{1-q}$

Voglio stimare il valore di S con un margine di errore inferiore ad E.

Ovvero voglio individuare da quali valori di k la somma parziale $s_k \cong S$ con un margine di errore inferiore ad E.

$R_k < E$

$$S = s_k + R_k = \sum_{n=0}^{k} q^n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} q^n$$

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} q^n = q^{k+1} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{q^{k+1}}{1-q}$$

Risolvo per k la disequazione: $\dfrac{q^{k+1}}{1-q} < E$

Esempio:

Stima $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ con un margine di errore inferiore ad $\dfrac{1}{1000}$

NB: La serie è a termini a segno alterno, quindi devo studiare il resto usando il valore assoluto.

$$|R_k| = \left|\sum_{n=k+1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)\right| = \left(+\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)$$

$$R_k = \left(+\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) < \frac{1}{1000} \Rightarrow [\dots] \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^k} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 3 \cdot 2^k > 1000 \Rightarrow 2^k > \frac{1000}{3} = 2^{\log_2\left(\frac{1000}{3}\right)} \Rightarrow k > \log_2\left(\frac{1000}{3}\right) \cong 8.38 \Rightarrow$$

Voglio $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \geq 9 \Rightarrow$ Qualsiasi s_k da s_9 in poi approssima S a meno di $\dfrac{1}{1000}$ di errore $\left(\text{ovvero } |\mathrm{S} - \mathrm{s_9}| < \dfrac{1}{1000}\right)$

● Stima del valore: Serie armoniche generalizzate

(da slide di Pisani anno 2017/18, slide 14 v1709 sulle serie, proposizione 12.31 a pagina 12)

Sia $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ convergente $\Longrightarrow \alpha > 1$

In tal caso, il resto k-esimo è:

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{(\alpha-1) \cdot k^{\alpha-1}}$$ (formula dalle slide di Pisani, da "prendere per buona")

Quindi: 1) So che: $R_k < \dfrac{1}{(\alpha-1) \cdot k^{\alpha-1}}$; 2) Voglio i valori per cui: $R_k < E$

Quindi per trovare un resto inferiore ad un margine di errore E, si risolve per k la disequazione:

$$\frac{1}{(\alpha-1) \cdot k^{\alpha-1}} < E$$

Esempio:

Stimare $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2}{n^3}$ con un margine di errore inferiore a $\dfrac{1}{1000}$

S è con termini definitivamente positivi, quindi non serve scrivere i valori assoluti.

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} = 2 \cdot \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\right) < 2 \cdot \left(\frac{1}{([3]-1) \cdot k^{[3]-1}}\right) = \frac{2}{(2) \cdot k^2} = \frac{1}{k^2}$$

$$R_k < \frac{1}{k^2} \quad \wedge \quad R_k < \frac{1}{1000} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{1000} \quad \Rightarrow \quad k^2 > 1000 \quad \Rightarrow \quad k < -\sqrt{1000} \quad \wedge \quad k > \sqrt{1000} \quad \Rightarrow \quad k < -31.62\dots \quad \wedge \quad k > +31.62\dots$$

Voglio $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \geq 32 \Rightarrow$ Qualsiasi somma parziale da s_{32} in poi approssima S con un margine di errore inferiore a $\dfrac{1}{1000}$.

● Stima del valore: Confronto con una serie geometrica

Data una serie $S = \sum a_n$:

Sia $0 \leq a_n \leq M \cdot b_n$ definitivamente.

Sia b_n una serie geometrica: $b_n = q^n$.

Sia $S' = \sum M b_n$ serie convergente $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Si vuole calcolare la stima del valore di S.

Il resto di S è inferiore al resto di S' .

$$R_k \leq R'_k = M \cdot \left(\frac{q^{k+1}}{1-q}\right)$$

Quindi:

1) So che: $R_k \leq R'_k$

2) Voglio i valori per cui: $R_k < E$

Quindi per trovare un resto inferiore ad un margine di errore E, si risolve per k la disequazione:

$R'_k < E$

Così si trova l'indice k per il quale:

- la somma parziale s_k approssima S
- la somma parziale s'_k approssima S'

● Stima del valore: Confronto asintotico con una serie geometrica

Data una serie $S = \sum a_n$:

Sia $a_n \sim M \cdot b_n$.

Sia b_n una serie geometrica: $b_n = q^n$.

Sia $S' = \sum M \cdot b_n$ una serie convergente $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Il caso ottimale è:

$a_n \leq M \cdot b_n$ definitivamente $\Rightarrow$ Si risolve con la stima del confronto con una serie geometrica.

Il caso generale è:

Si trova un $\overline{M} \geq M$ tale che: $a_n \leq \overline{M} \cdot b_n$.

$$R_k \leq \overline{M}\left(\frac{q^{k+1}}{1-q}\right) < E$$

La scelta di $\overline{M}$, quando si parla di serie geometriche, è ininfluente.

Al variare di $\overline{M}$ scelto, la differenza di valori ottenuti è minimale.

Esempio (traccia d'esame del 2014/09/02, esercizio 03):

Studia convergenza di $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4+1}\left(1-\cos\left(\frac{n}{2^n}\right)\right)$, e , se possibile, stimare valore con errore inferiore a $\frac{1}{200}$.

(La stima approssimata su Wolfram per $n \to +\infty$ è $S \approx 0.100225$)

Pongo $t = \frac{n}{2^n} \Rightarrow$ per $n \to +\infty$, $t \to 0 \Rightarrow$ per $t \to 0$, $(1-\cos(t)) \sim \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ per $n \to +\infty$, $\frac{n^2}{n^4+1}\left(1-\cos\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \sim \frac{n^2}{n^4+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^n}\right)^2 = \frac{n^2}{n^4+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{2^{2n}}\right) = \frac{n^4}{n^4+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^n} = \frac{n^4}{n^4+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Studio $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{n^4+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4}{n^4+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow$ per $n \to +\infty$, $\frac{n^4}{n^4+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \sim \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow$ Studio $S'' = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ERRORE:

Bisogna evitare di passare per più di una serie.

Possiamo stimare il resto di S basandoci su una S' legata. Ma non siamo sicuri se S mantiene le proprietà rispetto ad S''.

Quindi:

$\Rightarrow$ per $n \to +\infty$, $\left(\frac{n^4}{n^4+1}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \sim (1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow$ Studio $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Così lego direttamente S con la geometrica S'.

Devo controllare se: $a_n \le M\cdot b_n$ definitivamente

Ovvero se:

$0 \le \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{M\cdot b_n} \le 1$ (NB: $\ell = 0$ se $(M\cdot b_n)$ è molto più grande di a_n ; $\ell = 1$ se $a_n = M\cdot b_n$ "definitivamente")

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2}{n^4+1}\left(1-\cos\left(\frac{n}{2^n}\right)\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n} = [\dots] = 1 \Rightarrow M = \frac{1}{2} \text{ è un valore valido per la stima dei resti}$$

$R_k \le M\cdot R'_k < E$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{4}}\right) < \frac{1}{200} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} < \frac{1}{200} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{1}{200} \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k < \frac{1}{200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^k < \frac{6}{200} \Rightarrow k > \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{6}{200}\right) = \log_{\frac{1}{4}}6 - \log_{\frac{1}{4}}200 \cong -1.29\dots - (-3.82\dots) \cong -1.29 + 3.82 = +2.53 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Vogliamo $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \ge 3$ $\left(s_3 \cong 0.097640034\dots \;\; ; \;\; S - s_3 < \frac{1}{200}\right)$

NB: Avrei potuto prendere anche M = 1, ovvero considerare solo b_n , e trascurare la costante M=1/2 presente in S'.

Il nostro obiettivo "ideale" però è avere l'indice k più piccolo possibile per cui $s_k \cong S$ con errore E.

Se avessi confrontato solo b_n , avrei ottenuto un indice k più grande.

Per $M = 1 \Rightarrow R_k \le M\cdot R'_k = R'_k < E$

$$\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{4}}\right) < \frac{1}{200} \Rightarrow [\dots] \Rightarrow k > \log_{\frac{1}{4}}\frac{3}{200} = \log_{\frac{1}{4}}3 - \log_{\frac{1}{4}}200 \cong -0.79\dots - (-3.82\dots) \cong +3.03 \Rightarrow \boldsymbol{k \ge 4} \quad (s_4 \cong 0.099575448\dots)$$

Per M=1, risulta che la più piccola somma parziale valida sia s_4. Mentre, per M=1/2, risulta che già s_3 va bene.

Confronto su Wolfram: $S - s_2 \nless \frac{1}{200}$; $S - s_3 < \frac{1}{200}$; $S - s_4 < \frac{1}{200}$.

Quindi s_3 è la più piccola approssimazione di S a meno di 1/200 di errore.

È comunque accettabile anche $k \ge 4$ come risultato, è solo "meno ottimale".

● Stima del valore: Confronto con una serie armonica generalizzata

Data una serie $S = \sum a_n$:

Sia $0 \leq a_n \leq M \cdot b_n$ definitivamente.

Sia b_n una serie armonica generalizzata: $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Sia $S' = \sum M b_n$ serie convergente $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Si vuole calcolare la stima del valore di S.
Il resto di S è inferiore al resto di S' .

$R_k \leq R'_k < M \cdot \left(\dfrac{1}{(\alpha - 1) \cdot k^{\alpha-1}}\right)$

Quindi:
1) So che $R_k \leq R'_k$
2) Voglio i valori di k per cui $R_k < E$

Basta quindi risolvere: $R'_k < E$ per trovare l'indice k per il quale:
- la somma parziale s_k approssima S
- la somma parziale s'_k approssima S'

● Stima del valore: Confronto asintotico con una serie armonica generalizzata

Data una serie $S = \sum a_n$:

Sia $a_n \sim M \cdot b_n$.

Sia b_n una serie armonica generalizzata: $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Sia $S' = \sum M \cdot b_n$ una serie convergente $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Il caso ottimale è:
$a_n \leq M \cdot b_n$ definitivamente $\Rightarrow$ Si risolve con la stima del confronto con una serie geometrica.

Il caso generale è:
Si trova un $\overline{M} > M$ tale che: $a_n \leq \overline{M} \cdot b_n$.

$R_k \leq \overline{M}\left(\dfrac{1}{(\alpha - 1) \cdot k^{\alpha-1}}\right) < E$

La scelta di $\overline{M}$, quando si parla di serie armoniche generalizzate, È influente.
Ovvero, a parità di errore $E > 0$ e di esponente $\alpha > 1$, il valore k_0 ottenuto varia sensibilmente al variare di $\overline{M}$.

Quindi, per scegliere una buona $\overline{M}$:
Passo 1: Si risolve $\overline{M}\left(\dfrac{1}{(\alpha - 1) \cdot k^{\alpha-1}}\right) < E$, e si individua k_0
Passo 2 (Opzionale!): Si rifinisce il risultato individuando un indice k_0 più piccolo (che rispetti sempre l'errore E)
Si provano, manualmente, i vari $\widetilde{M} > M$. $\forall \widetilde{M} > M$, $\exists \tilde{n}$ tale che $\forall n \geq \tilde{n}$, $a_n \leq \widetilde{M} \cdot b_n$.
Ovvero, ogni $\widetilde{M} > M$, da un certo n in poi, soddisfa $a_n \leq \widetilde{M} \cdot b_n$.
Passo 2.1) Si sceglie arbitrariamente un $\widetilde{M} > M$
Passo 2.2) Si risolve: $\widetilde{M}\left(\dfrac{1}{(\alpha - 1) \cdot k^{\alpha-1}}\right) < E$, e si ottiene un valore $\widetilde{k_0}$
Passo 2.3) Si individua $\tilde{n}$ per il quale tale che $\forall n \geq \tilde{n}$, $a_n \leq \widetilde{M} \cdot b_n$
Passo 2.4) Si prende come indice: $\min(\tilde{n}, \widetilde{k_0})$
Passo 2.5) Se l'indice non soddisfa, si ripete il punto 2.1 scegliendo un diverso $\widetilde{M}$

NB: La scelta di $\widetilde{M}$ va calibrata, in quanto: $M < \widetilde{M'} < \widetilde{M''} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{n'} > \widetilde{n''} \\ \widetilde{k'}_0 < \widetilde{k''}_0 \end{cases}$

● Stima del valore: Serie con termini alterni

Consideriamo $S = \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n] = \sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^n \cdot b_n]$
Sia S convergente per il criterio di Leibniz.
Ricordiamo:
1) $b_n \geq 0$ definitivamente
2) $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$
3) $b_{n+1} \leq b_n$ definitivamente

Nelle serie a termini alterni che convergono,
il valore assoluto della somma dei restanti infiniti caratteri da $k+1$ in poi, è minore del $(k+1)$-esimo termine.

$$|R_k| = |S - s_k| = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n < b_{k+1}$$

Perché:
$a_{k+1} = (+1) \cdot b_{k+1}$
$R_k = (+1) \cdot b_{k+1} + (-1) \cdot b_{k+2} + (+1) \cdot b_{k+3} + (-1) \cdot b_{k+4} + \cdots$ (con valori b_n via via decrescenti)
Ovviamente, se al valore a_{k+1} sommo e sottraggo valori via via più piccoli, ottengo un valore $R_k \leq a_{k+1}$.

Quindi:
1) So che: $|R_k| < b_{k+1}$
2) Voglio i valori per cui: $R_k < E$

Risolvo quindi per k la disequazione:
$b_{k+1} < E$

NB: Ovviamente la stima va applicata sulla serie S, e non sulla serie usata per il criterio della convergenza assoluta.

Fare la stima su $S' = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^n \cdot b_n]\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ NON fornisce indicazioni sul valore di S.

Esempio 01:

Stimare il valore di $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$ con un margine di errore inferiore a 0.001

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \; ; \; b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

S converge per Leibniz.

Considero la somma parziale:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k}\left[(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}\right]$$

Calcolo: $|R_k| \leq b_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Risolvo: $b_{k+1} < 0.001 \to \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 10^{-3} \to \sqrt{k+1} > 10^3 \to k+1 > 10^9 \to k > 10^9 - 1$

Risultato: Qualsiasi somma parziale a partire da s_{10^9} approssima S con un margine di errore inferiore a 0.001

Esempio 02:

Stimare il valore di $S = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}\right]$ con un margine di errore inferiore ad $\frac{1}{100}$

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right] \;\; ; \;\; b_n = \frac{1}{n!}$$

S converge per Leibniz.

Considero una somma parziale:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k}\left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right]$$

Il resto fra S e la somma parziale sarà inferiore al termine successivo della somma parziale.

$$|R_k| \le b_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

Mi accorgo che risolvere una somma con un fattoriale è complesso. Voglio sbarazzarmi del $k+1$.

Riscrivo S come:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right] \to S = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}\right] \;\; ; \;\; b_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

Considero una somma parziale:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k}\left[(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}\right]$$

Questa somma parziale avrà come termine successivo:

$$a_{k+1} = (-1)^k \cdot \frac{1}{[(k+1)-1]!} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

$$|R_k| \le b_{k+1} = \frac{1}{(k)!}$$

Voglio che l'approssimazione della somma parziale sia vicina ad S.

Voglio un resto piccolo, inferiore ad $\frac{1}{100}$.

$$|R_k| \le b_{k+1} < \frac{1}{100} \to \text{Risolvo: } b_{k+1} = \frac{1}{k!} < \frac{1}{100} \Rightarrow k! > 100 \Rightarrow k \ge 5 \qquad (\text{in quanto } 5! = 120)$$

Per cui il risultato di qualsiasi somma parziale con $k \ge 5$ è una buona approssimazione del valore di S.

Come risultato, si può anche lasciare scritto la k minima da considerare per la somma parziale.

Risultato: s_5.

Per piccoli valori di k , posso calcolare il valore:

$$s_5 = \sum_{n=1}^{5-1}\left[(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}\right] = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$$

● Stima del valore: Metodo generale (con l'integrale) per le serie a termini positivi

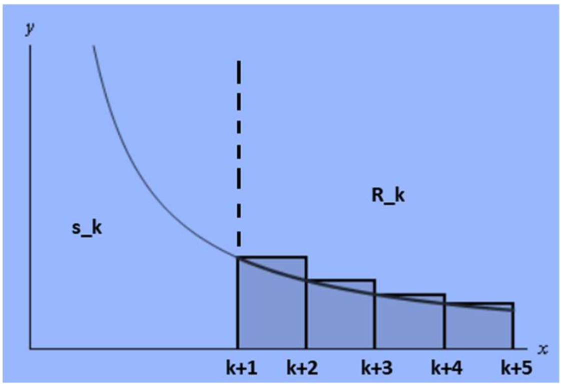
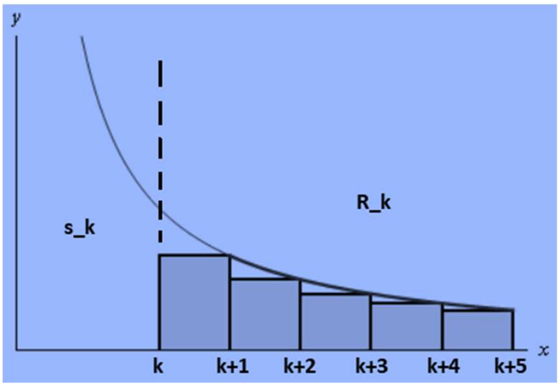
(da Khan Academy, "estimation of a sum")

Consideriamo una serie $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Sia S una serie convergente, composta da termini a_n definitivamente positivi.

Consideriamo la funzione $f(x)$ associata alla successione a_n.
Ovvero $y = f(x)\ t.c.\ f(n) = a(n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Sia $f(x)$ una funzione continua, a termini positivi, decrescente.

Riscrivo S come: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = s_k + R_k$ Quindi $R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots$	Riscrivo S come: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{+\infty} a_n = s_k + R_k$ Quindi $R_k = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$
	
$R_k \geq \int_{k+1}^{+\infty} f(n)\, dn$ $S = s_k + (R_k) \geq s_k + \left(\int_{k+1}^{+\infty} f(n)\, dn \right)$	$R_k \leq \int_{k}^{+\infty} f(n)\, dn$ $S = s_k + (R_k) \leq s_k + \left(\int_{k}^{+\infty} f(n)\, dn \right)$

Quindi:

$$s_k + \int_{k}^{+\infty} f(n)\, dn \ \leq \ S \ \leq \ s_k + \int_{k}^{+\infty} f(n)\, dn$$

Se serve approssimare S con un margine di errore inferiore ad E,
Basta trovare k per il quale $R_k \leq \int_k^{+\infty} f(n)\, dn < E$.
Bisogna quindi risolvere $\int_k^{+\infty} f(n)\, dn < E$.

Trovati i valori validi di k,
qualsiasi somma parziale da s_k in poi approssimerà S con un margine di errore inferiore ad E.

Esempio 1:

Data $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, quanto è il margine di errore a cui può essere approssimata calcolando i primi $\mathrm{k} = 5$ valori?

Calcolo $s_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{3600 + 900 + 400 + 225 + 144}{3600} = \frac{5269}{3600} \cong 1.464$

NB: Ricorda che, per calcolare gli integrali impropri con intervallo destro infinito, basta trattarli come integrali definiti su un intervallo da k a t, con t che tende ad infinito (rivedere la teoria sugli integrali impropri).

$$S \leq s_5 + \int_5^{+\infty} \frac{1}{n^2} dn = s_5 + \lim_{t \to +\infty} \int_5^t \frac{1}{n^2} dn = s_5 + \lim_{t \to +\infty} \left[-n^{-1} \right]_5^t = s_5 + \left[\lim_{t \to +\infty} -(t)^{-1} - \lim_{t \to +\infty} (-5)^{-1} \right] =$$
$$= s_5 + \left[-\frac{1}{+\infty} - \left(-\frac{1}{5} \right) \right] = s_5 + \frac{1}{5} = \frac{5269}{3600} + \frac{1}{5} = \frac{5269 + 720}{3600} = \frac{5989}{3600} \cong 1.664$$

$$S \geq s_5 + \int_6^{+\infty} \frac{1}{n^2} dn = \cdots = s_5 + \frac{1}{6} = \frac{5269}{3600} + \frac{1}{6} = \frac{5269 + 600}{3600} = \frac{5869}{3600} \cong 1.63$$

Quindi:
$1.63 \leq S \leq 1.664$

NB:
$\frac{1}{6} \leq R_5 \leq \frac{1}{5}$ Significa che il valore s_5 con un margine di errore di MASSIMO $\frac{1}{5}$ e MINIMO $\frac{1}{6}$

Esempio 2:

Data $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, approssima S con un margine d'errore inferiore ad $\frac{1}{5}$

$$R_k \leq \int_k^{+\infty} \frac{1}{n} dn < \frac{1}{5}$$
$$\int_k^{+\infty} \frac{1}{n} dn < \frac{1}{5} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \int_k^t \frac{1}{n^2} dn < \frac{1}{5} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \left[-n^{-1} \right]_k^t < \frac{1}{5} \Rightarrow \left[\lim_{t \to +\infty} -(t)^{-1} - \lim_{t \to +\infty} (-k)^{-1} \right] < \frac{1}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{+\infty} - \left(-\frac{1}{k} \right) \right] < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{5} \Rightarrow k > 5$$

Quindi:
Qualsiasi somma parziale da s_6 in poi approssima S con un margine di errore inferiore ad $\frac{1}{5}$.

● Esercizi sulle serie

E01)

Studiare $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + cos(n) + 2n}{6n^2 + 1 + 4^n}$

Step:

1) Usare il criterio del confronto asintotico $\left(\frac{n^3 + cos(n) + 2n}{6n^2 + 1 + 4^n} \sim \frac{n^3}{4^n}\right)$

2) Usare il criterio della radice (viene $\ell = \frac{1}{4} < 1$) o il criterio del rapporto

Risultato: La serie converge

E02)

Studiare $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{log(n)}{n}$

Step:

1) Provo ad usare la assoluta convergenza
2) Dimostrare che la serie assoluta diverge (confronto con 1/n), e che la assoluta convergenza non è applicabile
3) Usare il criterio di Leibniz
4) Per il punto 3 del criterio (lo studio della decrescenza), uso lo studio della decrescenza delle funzioni

Risultato: La serie converge

E03)

Studiare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}}$

Step:

1) Scompongo in $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
2) Uso la formula per le serie telescopiche

Risultato: La serie converge, con risultato 1

E04)

Verificare con il criterio di convergenza che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

Risultato: La serie non converge ($\ell \neq 0, \ell = +\infty$)

E05)

Studiare per quali valori di α la serie $S = \sum_{n=0}^{+\infty} [ln(\alpha)]^n$, con $\alpha > 0$ converge ad $S = \frac{1}{3}$

Step:

1) Per convergere, l'argomento della sommatoria deve essere $|q| < 1$

$$|\ln(\alpha)| < 1 \rightarrow -1 < \ln(\alpha) < 1 \rightarrow e^{-1} < \alpha < e$$

2) Per $|q| < 1$, il risultato di una sommatoria è $\frac{1}{1-q}$

Pongo $\frac{1}{1 - log(\alpha)} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = e^{-2} \rightarrow$ Valore di α non compreso fra i valori necessari per convergere

Risultato: La serie non converge per nessun valore di α