

Calcolo differenziale

1. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

- ☐ Ogni funzione continua in un punto è derivabile in quel punto
- ☐ Ogni funzione derivabile in un punto è continua in quel punto
- ☐ Una funzione è derivabile in un punto se e solo se è continua in quel punto
- ☐ Una funzione continua in un punto non è detto che sia derivabile in quel punto

2. Si scriva il più grande insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ in cui la funzione f indicata risulta derivabile.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ _____

(b) $f(x) = x^3$ _____

(c) $f(x) = x\sqrt{x}$ _____

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ _____

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni si dica se è derivabile nel punto x_0 indicato.

(a) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$ _____

(b) $f(x) = |x|$, $x_0 = 1$ _____

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$ _____

(d) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$ _____

4. Si dica quali tra le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Fermat nell'intervallo indicato.

☐ $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$

☐ $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$

☐ $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$

☐ $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$

5. Se $f(x) = \sqrt{9-x}$ con $x \in [0, 9]$, si dica quali tra le seguenti affermazioni sono garantite dal teorema di Lagrange.

☐ Esiste c compreso tra 0 e 9 tale che $f'(c) = \frac{1}{3}$

☐ Esiste c compreso tra 0 e 9 tale che $f'(c) = -\frac{1}{3}$

☐ Esiste c compreso tra 0 e 9 tale che $f'(c) = 0$

☐ $f'(c) = -\frac{1}{3}$ per ogni c compreso tra 0 e 9

6. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.
- ☐ f è strettamente crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$
 - ☐ f è crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$
 - ☐ f è decrescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$
 - ☐ Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora f è strettamente decrescente in (a, b)
7. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b) , tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.
- ☐ f' è strettamente decrescente in (a, b)
 - ☐ Per ogni $x, x_0 \in (a, b)$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 - ☐ f' è crescente in (a, b)
 - ☐ $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$
8. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.
- ☐ Per $x \rightarrow 0$, $e^x = 1 + x + o(x)$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $e^x = 1 + o(x^2)$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $e^x = 1 + x + O(x)$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $e^x = 1 + o(x)$
9. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.
- ☐ Per $x \rightarrow 0$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $\sin x = x + o(x)$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $\sin x = x + O(x)$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$
10. Se per $x \rightarrow 0$, $f(x) = O(x^4)$, tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.
- ☐ Per $x \rightarrow 0$, $f(x) = o(x^2)$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $f(x) = o(x^3)$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim x^4$
 - ☐ Per $x \rightarrow 0$, $f(x) = o(x^7)$