Capitolo 11

Funzioni continue

La continuità in un punto è stata introdotta nella Definizione .... Si tratta di una nozione di carattere puntuale, con un'ovvia estensione, otteniamo una nozione di carattere globale.

Definizione 11.1 *Sia* $f : A \to \mathbf{R}$*; la funzione* f *si dice* continua *se è continua in ciascun punto di* A*.*

Stando alla definizione data in precedenza dire che una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ non è continua equivale a dire che esiste almeno un punto $x_0 \in A$ tale che f non sia continua in x_0.

Esempio 11.2 *Generalizzando quanto osservato negli Esempi ... si conclude che la funzione parte intera è continua in* x_0 *se e solo se* $x_0 \notin \mathbf{Z}$ *(infatti nei punti con ascissa intera non esiste il limite). Pertanto tale funzione non è continua.*

11.1 Prolungamenti e salti

Un tema legato alla continuità è lo studio del comportamento nei punti di accumulazione per il dominio, appartenenti o meno al dominio stesso. Due situazioni sono particolarmente interessanti.

Definizione 11.3 *Siano* $A \subset \mathbf{R}$*,* $f : A \to \mathbf{R}$*. Sia* $x_0 \in \mathbf{R}$*,* $x_0 \notin A$*,* x_0 *punto di accumulazione per* A*. Se esiste* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$ *si dice che* f *è* prolungabile per continuità *in* x_0*. In tal caso* x_0 *si considera appartenente al dominio di* f *e si pone* $f(x_0) = \ell$*.*

Osservazione 11.4 *La definizione si giustifica al modo seguente. Nella situazione descritta sopra consideriamo l'insieme* $\hat{A} = A \cup \{x_0\}$ *e la funzione* $\hat{f} : \hat{A} \to \mathbf{R}$ *così definita*

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in A, \\ \ell & se\ x = x_0. \end{cases}$$

La funzione $\hat{f}$ *è un prolungamento di* f *e risulta continua in* x_0*. Si ha, infatti,*

$$\lim_{x \to x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \hat{f}(x_0).$$

Ovviamente, nella pratica, il prolungamento si denota con lo stesso simbolo f*.*

Esempio 11.5 *La funzione $f(x) = x \log x$ è originariamente definita per $x > 0$. Sappiamo che*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0,$$

pertanto il punto 0 si considera appartenente al dominio con $f(0) = 0$.

Esempio 11.6 *La funzione $f(x) = \sin x/x$ è originariamente definita per $x \neq 0$. Sappiamo che*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

pertanto il punto 0 si considera appartenente al dominio con $f(0) = 1$.

Definizione 11.7 *Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$. Sia $x_0 \in \mathbf{R}$ punto di accumulazione bilaterale per A. Il punto x_0 si dice* di salto *per f se esistono, sono finiti e diversi tra loro i limiti unilaterali*

$$\begin{aligned} f(x_0^+) &= \lim_{x \to x_0^+} f(x), \\ f(x_0^-) &= \lim_{x \to x_0^-} f(x). \end{aligned}$$

Si definisce salto di f in x_0 *la differenza*

$$\sigma(x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-).$$

Osservazione 11.8 *Nella definizione precedente non si specifica se x_0 debba appartenere o meno ad A.*

Se un punto appartenente al dominio è anche di salto (ad esempio i punti con ascissa intera per la funzione $\lfloor x \rfloor$) in quel punto si perde la continuità. Questo giustifica la terminologia tradizionale che parla di punti di discontinuità.

In altri casi il punto di salto non appartiene al dominio e quindi, con apparente paradosso, non fa perdere la continuità. E' quello che accade alla funzione $f(x) = x/|x|$, continua (in quanto continua in tutti i punti del suo insieme di definizione $\mathbf{R} - \{0\}$) e che presenta un punto di salto in $x_0 = 0$.

In quasi tutti i testi di Analisi matematica si introducono diverse nozioni di *punto di discontinuità*, con classificazioni che cambiano da autore ad autore. Noi ci siamo limitati a riportare le definizioni su cui tutti gli autori concordano.

11.2 Funzioni continue su intervalli

In questo paragrafo enunciamo e commentiamo due teoremi di importanza fondamentale. La dimostrazione esula dalle finalità di questo corso.

11.2.1 Teorema di Weierstrass

Teorema 11.9 (di Weierstrass) *Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua. Esistono $c_1, c_2 \in [a, b]$ tali che, per ogni $x \in [a, b]$ risulta*

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

In altri termini: la funzione f ammette minimo e massimo assoluti.

Osservazione 11.10 *Il Teorema di Weierstrass si generalizza in maniera ovvia a funzioni definite sull'unione finita di intervalli chiusi e limitati.*

Torniamo ora a considerare una funzione $f : I \to \mathbf{R}$ definita su un unico intervallo e soffermiamoci sui rapporti tra dominio, continuità, limitatezza ed esistenza di estremi assoluti.

Anzitutto ci chiediamo: *se f è continua, possiamo affermare che f è anche limitata?*

La risposta è negativa ed abbiamo una messe di esempi al riguardo:

- la funzione $f(x) = x$ su tutto $\mathbf{R}$,
- la funzione$f(x) = 1/x$ ristretta all'intervallo $(0, 1]$

A questo punto possiamo osservare che, dalla definizione di continuità in un punto

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

consegue che la funzione f sia localmente limitata in ogni punto del dominio. Evidentemente il passaggio dalla continuità locale in ogni punto a quella globale dipende dal dominio I chiuso e limitato.

In secondo luogo ci chiediamo: *se I è chiuso e limitato, possiamo affermare che f è anche limitata?*

La risposta è anche in questo caso negativa. Anche in questo caso abbiamo un esempio.

Esempio 11.11 *Sia $m(x) = x - \lfloor x \rfloor$ la funzione mantissa e consideriamo la funzione $f(x) = m(x)/(1 - m(x))$. Tale funzione è definita su tutto $\mathbf{R}$, infatti per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $m(x) < 1$. Tale funzione f ristretta a $[0, 1]$ non è limitata, risulta infatti*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Passiamo a studiare l'esistenza di estremi assoluti. Ci chiediamo: *se f è continua e limitata, possiamo affermare che f ammette estremi assoluti?*

La risposta è negativa, con vari possibili esempi:

- la funzione $f(x) = \arctan x$;
- la funzione $f(x) = e^x/(e^x + 1)$.

Infine ci chiediamo: *se I è chiuso e limitato ed f è limitata, possiamo affermare che f ammette estremi assoluti?*

Abbiamo ancora una risposta negativa, con un esempio già noto.

Esempio 11.12 *La funzione mantissa $m(x) = x - \lfloor x \rfloor$ ristretta all'intervallo $[0, 1]$ è limitata, ammette minimo assoluto (nei punti $x = 0$ e $x = 1$) ma non ammette massimo assoluto.*

11.2.2 Teorema degli zeri

Teorema 11.13 (degli zeri, o di Bolzano) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *continua. Se* $f(a) \cdot f(b) < 0$ *allora esiste* $c \in (a, b)$ *tale che* $f(c) = 0$.

Se f *è strettamente monotona, tale* c *è unico.*

Il Teorema degli zeri fornisce il primo strumento per la *risoluzione qualitativa di equazioni*, che sostituisce o integra la cosiddetta *risoluzione grafica*. Per risoluzione qualitativa di un'equazione intendiamo la determinazione del numero di soluzioni, con un'indicazione sulla collocazione delle soluzioni stesse.

Il Teorema degli zeri fornisce una condizione sufficiente (e grossolana) affinchè una soluzione esista. Il corollario seguente è più preciso in quanto fornisce una condizione necessaria e sufficiente.

Corollario 11.14 *Sia* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *continua e strettamente monotona. L'equazione*

$$f(x) = 0$$

ammette soluzione unica in (a, b) *se e solo se* $f(a) \cdot f(b) < 0$.

In base a questo corollario il numero di zeri è minore o al più uguale al numero di intervalli (massimali) di stretta monotonia e in ciascun intervallo abbiamo un criterio per verificare se uno zero esiste o meno (salvo il caso in cui lo zero coincida con l'estremo di due intervalli adiacenti). Di fatto il Corollario 11.14 potrà essere compiutamente applicato solo dopo che avremo strumenti per determinare la monotonia di una funzione (vedi Paragrafo ...)

Osservazione 11.15 *Il Teorema degli zeri ed il suo corollario ammettono ovvie varianti nel caso di intervalli aperti o semiaperti, limitati o illimitati:*

- *in luogo di* $f(a)$ *si considera* $\lim_{x\to a^+} f(x)$;
- *in luogo di* $f(b)$ *si considera* $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Esempio 11.16 *Si consideri l'equazione*

$$3^x - 2 = \frac{4^x}{2^x - 3}.$$

Il secondo membro dell'equazione è definito in $\mathbf{R} - \{\log 3/\log 2\}$. *Pertanto, posto*

$$x_0 = \log 3/\log 2,$$

applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione

$$f(x) = 3^x - 2 - \frac{4^x}{2^x - 3}$$

in due intervalli distinti: $(-\infty, x_0)$ *e* $(x_0, +\infty)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -2 \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

quindi esiste una soluzione in $(-\infty, x_0)$.

Analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^+} f(x) &= -\infty\\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

dunque esiste un'altra soluzione in $(x_0, +\infty)$.

Osserviamo che $x_0 > 0$ *e calcoliamo* $f(0) < 0$. *Quindi possiamo precisare che esiste una soluzione in* $[0, x_0)$.

Esempio 11.17 *Si consideri l'equazione*

$$\frac{x-1}{\arctan x} = \frac{x}{\log x - 1}$$

Il primo membro dell'equazione è definito per $x \neq 0$*; il secondo membro è definito per* $x > 0$, $x \neq e$. *Pertanto applichiamo il Teorema degli zeri alla funzione*

$$f(x) = \frac{x-1}{\arctan x} - \frac{x}{\log x - 1}$$

che risulta definita in due intervalli distinti: $(0, e)$ *e* $(e, +\infty)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\infty\\ \lim_{x\to e^-} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

quindi esiste una soluzione in $(0, e)$.

Analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{x\to e^+} f(x) &= -\infty\\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

dunque esiste un'altra soluzione in $(e, +\infty)$.

11.2.3 Immagine diretta di intervalli

Dal Teorema degli zeri si deduce il risultato seguente.

Teorema 11.18 *Siano* $I \subset \mathbf{R}$ *un intervallo ed* $f : I \to \mathbf{R}$ *continua. Allora l'immagine* $f(I)$ *è un intervallo.*

Noi possiamo dimostrare facilmente un caso particolare.

Teorema 11.19 *Sia* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *continua. Se* f *è monotona crescente (risp. decrescente) risulta*

$$\begin{aligned}f([a,b]) &= [f(a), f(b)]\\ \text{(risp. } f([a,b]) &= [f(b), f(a)]\text{).}\end{aligned}$$

Osservazione 11.20 *Anche per quest'ultimo teorema sussistono ovvie varianti nel caso di intervalli aperti o semiaperti, limitati o illimitati:*

- *in luogo di* $f(a)$ *si considera* $\lim_{x\to a^+} f(x)$*;*
- *in luogo di* $f(b)$ *si considera* $\lim_{x\to b^-} f(x)$*.*

Dal punto di vista operativo, assegnata $f : I \to \mathbf{R}$ continua, per calcolare $f(I)$ si scompone I in tanti sottointervalli in cui la funzione risulti monotona ed in ciascuno di essi si applica il Teorema 11.19.

Esempio 11.21 *Assegnata* $f(x) = x^2$*, vogliamo calcolare* $f([-1, 2])$*. Risulta*

$$\begin{aligned} f([-1,2]) &= f([-1,0] \cup [0,2]) = \\ &= f([-1,0]) \cup f([0,2]) = \\ &= [f(0), f(-1)] \cup [f(0), f(2)] = \\ &= [0,1] \cup [0,4] = [0,4]. \end{aligned}$$

Esercizio 11.22 *Assegnata* $f(x) = \cos x$*, si calcoli* $f([-\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}])$*.*