Capitolo 13

Calcolo differenziale

13.1 Derivata

Siano assegnati $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$.

Definizione 13.1 *Sia* $[a, b] \subset A$*; si definisce* rapporto incrementale medio *di* f *in* $[a, b]$ *il numero reale*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il rapporto incrementale medio coincide con il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Ora fissiamo $x_0 \in A$, poniamo $A_0 = A - \{x_0\}$ e consideriamo una nuova funzione

$$r : A_0 \to \mathbf{R}$$

definita ponendo

$$r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Questa funzione prende il nome di *rapporto incrementale di* f *in* x_0.

Il punto x_0 non appartiene ad A_0 tuttavia, nelle consuete ipotesi (A intervallo o unione di intervalli) è punto di accumulazione per A_0, quindi ha senso calcolare

$$\lim_{x \to x_0} r(x).$$

Definizione 13.2 *Si definisce* derivata di f in x_0 *il limite della funzione rapporto incrementale di* f *in* x_0*. Tale limite si denota con il simbolo* $f'(x_0)$*. Pertanto avremo*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

In alternativa alla notazione $f'(x_0)$ *si possono utilizzare i simboli*

$$Df(x_0), \qquad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Esempio 13.3 *Consideriamo la funzione costante $f(x) = c$. Fissato un qualsiasi punto $x_0 \in \mathbf{R}$ risulta*

$$r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Pertanto abbiamo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} r(x) = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Esempio 13.4 *funzione lineare;*

Esempio 13.5 *funzione potenza n-sima.*

Così come abbiamo introdotto i limiti da destra e da sinistra, possiamo introdurre analoghe nozioni per la derivata.

Definizione 13.6 *Nei casi in cui i limiti abbiano senso, si definiscono la* derivata destra *e* sinistra*, ponendo rispettivamente*

$$\begin{aligned} f'(x_0^+) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ f'(x_0^-) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Proposizione 13.7 *Sia x_0 punto di accumulazione bilaterale. La derivata $f(x_0)$ esiste se e solo se esistono e coincidono le derivate destra e sinistra.*

Definizione 13.8 *La funzione f si dice* derivabile *in x_0 se la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è finita.*

Proposizione 13.9 *Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.*

Osservazione 13.10 *Non vale il viceversa, ossia esistono funzioni continue in certo punto x_0 ma non derivabili. Ad esempio*

- *$f(x) = |x|$ è continua in 0 ma non derivabile (in quanto non esiste la derivata);*
- *$f(x) = \sqrt[3]{x}$ è continua in 0 ma non derivabile (in quanto la derivata esiste e non è finita).*

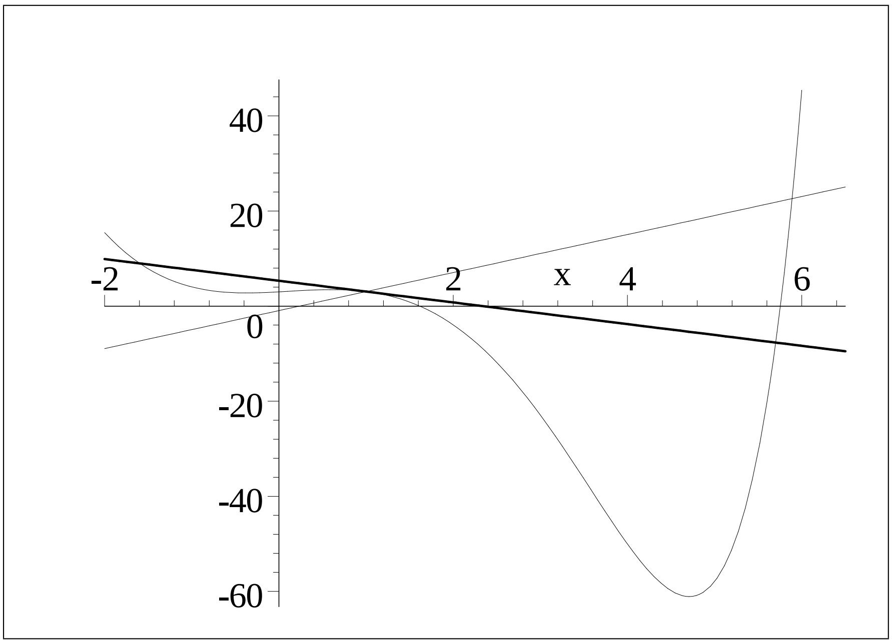
13.2 Retta tangente

Ricordiamo che, se γ è una conica (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole) ed r è una retta, si dice che r è tangente a γ se l'intersezione $\gamma \cap r$ è ridotta ad un sol punto. Se $P \in \gamma$, esiste una sola retta r passante per P e tangente a γ.

In realtà, quando passiamo ad una curva generica, la nozione di retta tangente è tutt'altro che evidente, in quanto non appare più vincolata al numero complessivo di intersezioni. Nella figura che segue abbiamo tracciato il grafico della funzione

$$f(x) = e^x - \frac{5}{3}x^3 + 2$$

e due rette passanti per il punto $(1, f(1))$: una retta ha *tre* intersezioni con il grafico, l'altra retta ne ha solo *due*. Ciononostante non avremmo dubbi nel considerare la retta tracciata più spessa (quella con un'intersezione in più) tangente al grafico nel punto $(1, f(1))$.



Siano assegnati $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$; sia f derivabile in $x_0 \in A$.

Definizione 13.11 *Si definisce* retta tangente al grafico $y = f(x)$ *nel punto* $(x_0, f(x_0))$ *la retta di equazione*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Sottolineiamo che quella di sopra è una *definizione*. In questo modo la nozione di retta tangente si trova a valle della nozione di derivata e non viceversa.

Ora dobbiamo verificare che la nostra nozione di retta tangente è coerente con la definizione valida nell'ambito della geometria analitica.

Osservazione 13.12 *Se il grafico di f è una conica, la Definizione 13.11 restituisce la stessa retta tangente alla conica nel senso richiamato sopra.*

Esempio 13.13 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Fissato $x_0 \in \mathbf{R}$ si verifica immediatamente che f è derivabile in x_0, con derivata

$$f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

D'altra parte il grafico di f è una parabola. Posto $y_0 = f(x_0)$, nel punto (x_0, y_0) calcoliamo la retta tangente secondo la tecnica elementare sviluppata in geometria analitica: tra le rette

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

selezioniamo quella avente una sola intersezione con la parabola $y = f(x)$. Otterremo, come preannunciato

$$m = 2ax_0 + b = f'(x_0).$$

13.2.1 Caratterizzazione con l'ordine di contatto

Nel paragrafo precedente abbiamo *definito* la retta tangente al grafico per mezzo delle derivate.

Ora vogliamo dare una caratterizzazione più geometrica: la tangente al grafico è l'unica retta passante per $(x_0, f(x_0))$ avente con il grafico un contatto di ordine superiore al primo.

Per formalizzare questa affermazione, consideriamo la funzione

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

Proposizione 13.14 *Supponiamo f derivabile in x_0. Risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_1(x)}{x - x_0} = 0. \tag{13.1}$$

Inoltre, assegnata un'altra retta passante per $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + m\,(x - x_0)\,,$$

poniamo

$$\hat{p}(x) = f(x_0) + m\,(x - x_0)\,. \tag{13.2}$$

Se risulta

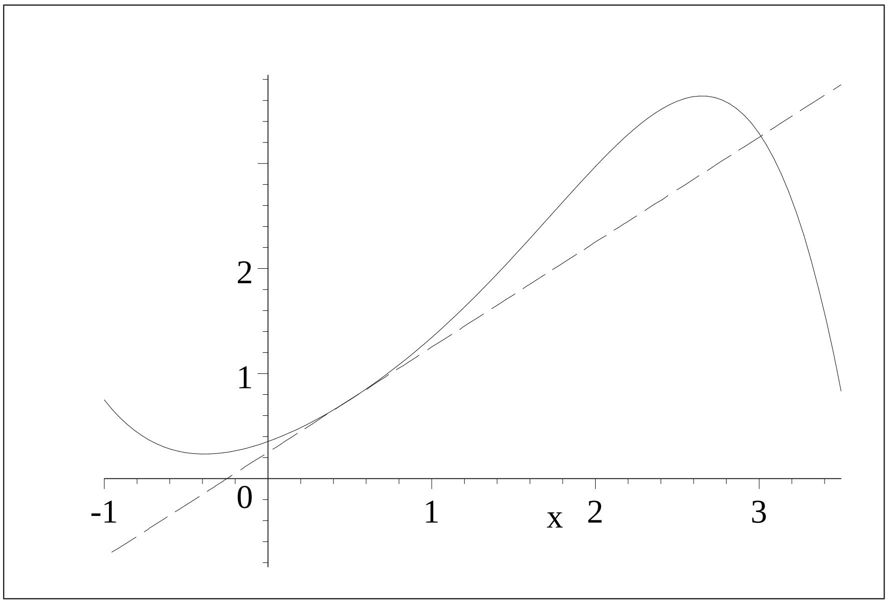
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \hat{p}(x)}{x - x_0} = 0$$

allora necessariamente $m = f'(x_0)$ e quindi la retta (13.2) coincide con la retta tangente..

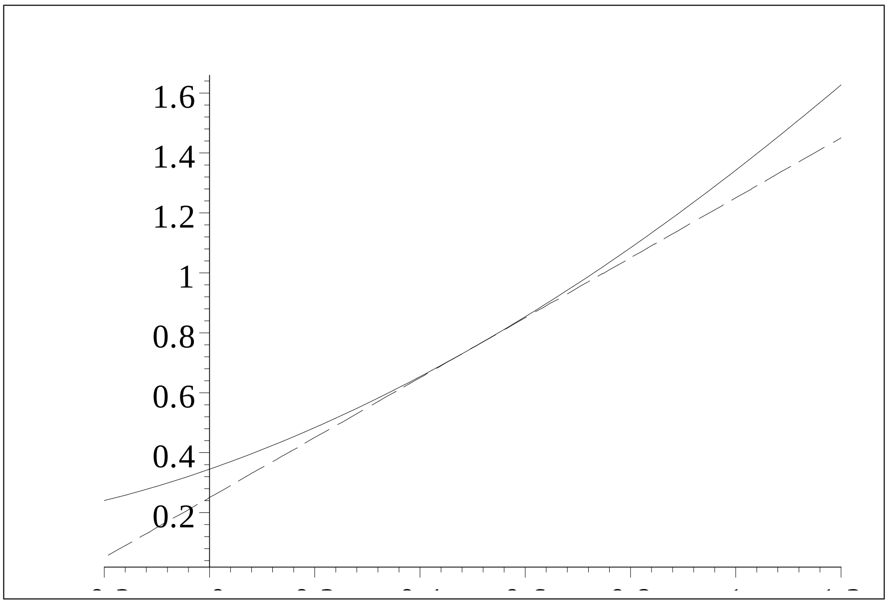
Osservazione 13.15 *Il grafico della funzione p_1 coincide con la retta tangente riveniente dalla Definizione 13.11. La formula (13.1) afferma che la retta tangente ha un contatto con il grafico di ordine superiore al primo. Nella seconda parte della proposizione si afferma che una qualsiasi altra retta avente un contatto con il grafico di ordine superiore al primo coincide con la retta tangente.*

In base a quello che si diceva nell'Osservazione ..., da questa proprietà di contatto consegue che il grafico di f, localmente in x_0, è "schiacciato" sulla retta tangente al grafico.

In effetti, se con l'ausilio di qualche software, proviamo a disegnare il grafico di una funzione f e la retta tangente in un punto $x_0 = 1/2$, osserviamo una situazione di questo tipo



Guardando in dettaglio ciò che accade nell'intervallo $[-0.2, 1.2]$, ci si presenta questa situazione



È evidente che "nei pressi" del punto 1/2 il grafico della funzione è praticamente indistinguibile dalla retta tangente.

Osservazione 13.16 *Una volta individuata la retta $p_1(x)$, non c'è speranza che essa presenti un contatto con il grafico di f di ordine superiore:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_1(x)}{|x - x_0|^{\alpha}} = 0 \tag{13.3}$$

con $\alpha > 1$. Questo problema verrà approfondito nel Paragrafo....

13.2.2 Differenziale e trasmissione dell'errore

Rimanendo in tema di approssimazioni, si può anche dire che la derivata è coefficiente che lega "piccole" variazioni di x alle corrispondenti variazioni di $f(x)$. Posto

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_1 - x_0, \\ \Delta f(x) &= f(x_1) - f(x_0), \end{aligned}$$

abbiamo

$$\Delta f(x) \approx f'(x_0)\,\Delta x \tag{13.4}$$

dove il simbolo $\approx$ sta per "approssimativamente uguale".

Infatti possiamo scrivere $\Delta f(x)$ come somma di due termini

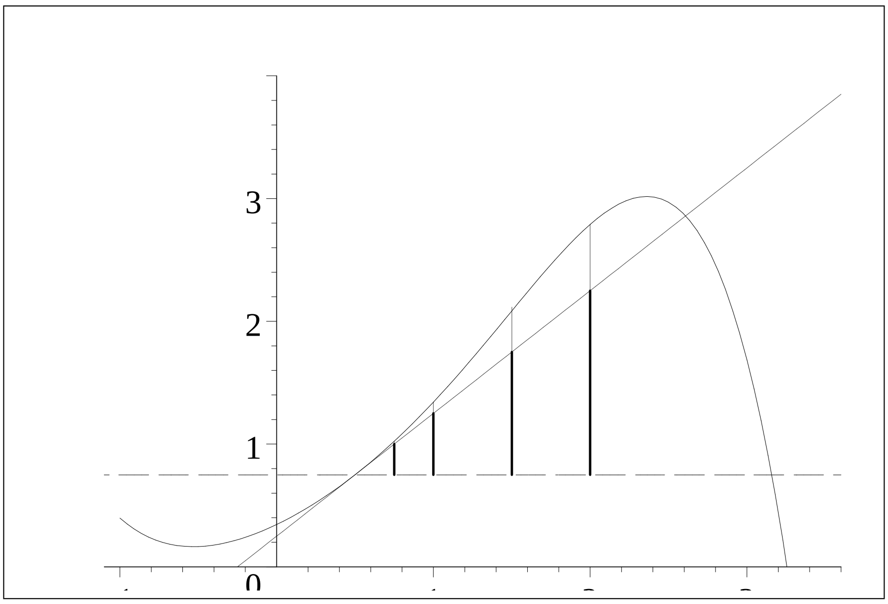
$$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + (\Delta f(x) - f'(x_0)\Delta x)$$

dove il secondo termine

$$(\Delta f(x) - f'(x_0)\Delta x) = f(x) - p_1(x)$$

è trascurabile (rispetto a $\Delta x \to 0$); cancellando tale termine si ottiene la (13.4).

Per comprendere la formula (13.4) ancora una volta ci aiuta una figura. Abbiamo fissato il punto $x_0 = 1/2$. La differenza (incremento) $\Delta f(x)$ è rappresentato dal segmento verticale compreso tra la retta orizzontale $y = f(x_0)$ ed il grafico $y = f(x)$. La retta tangente suddivide tale segmento in due parti, che corrispondono ai due addendi di cui sopra. La parte trascurabile è evidentemente quella tracciata sottile: man mano che x_1 si avvicina ad x_0 sappiamo che il grafico si schiaccia sulla retta tangente e l'incremento "coincide" con la parte tracciata più spessa.



Osservazione 13.17 *La quantità* $f'(x_0)\Delta x$ *prende il nome di* differenziale *di* f *in* x_0*, valutato in* Δx*. In generale il differenziale è lineare rispetto a* Δx *e, se* $f'(x_0) \neq 0$*, rappresenta la cosiddetta* parte principale *della variazione* $\Delta f(x)$*.*

Osservazione 13.18 (trasmissione dell'errore) *La formula (13.4)si presta ad una interessante interpretazione. Supponiamo di voler calcolare il valore* $y_0 = f(x_0)$*. In molte situazioni concrete non si conosce esattamente* x_0 *ma solo una sua approssimazione* x_1 *con un errore (assoluto)*

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

Quando svolgiamo i calcoli utilizziamo x_1 *e quindi non otterremo il valore teorico* $y_0 = f(x_0)$*, ma un valore approssimato* $f(x_1)$*. Dunque si produce un errore*

$$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$$

In base alla formula (13.4) la derivata $f'(x_0)$ *è il coefficiente di trasmissione dell'errore (assoluto) attraverso la funzione* f *nei pressi del punto* x_0*.*

Esempio 13.19 *Abbiamo* $x_0 = \pi$ *e vogliamo calcolare* $y_0 = \pi^2$*. Possiamo approssimare per arrotondamento* π *con* 3.142*; l'errore di arrotondamento è*

$$3.142 - \pi.$$

L'errore prodotto nelle procedure di arrotondamento viene stimato in maniera precisa; nel nostro caso risulta

$$|\Delta x| = |3.142 - \pi| < 1/2000.$$

Se calcoliamo

$$3.142^2 = 9.\,872\,164,$$

ci dobbiamo chiedere quanto questo valore sia distante dal valore teorico esatto π^2*.*

Possiamo applicare la formula (13.4). La funzione in questione è $f(x) = x^2$ *e quindi*

$$f'(x_0) = 2x_0 = 2\pi.$$

Per stimare $f'(x_0)$ *dobbiamo nuovamente approssimare* π *e quindi*

$$\begin{aligned} |f'(x_0)| &= 2 \cdot |3.142 + (\pi - 3.142)| \leq \\ &\leq 6.284 + \frac{1}{1000} = 6.285 \end{aligned}$$

Concludiamo

$$|\Delta f(x)| \approx |f'(x_0)\,\Delta x| < 6.285\frac{1}{2000}$$

13.2.3 Flesso a tangente verticale

Il fatto di aver definito la retta tangente tramite la derivata ci consentirà di mettere a fuoco alcuni particolari casi di non derivabilità. Iniziamo con il caso più semplice.

Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ punto interno, f continua in x_0

$$\exists f'(x_0) = \pm\infty \tag{13.5}$$

Esempio 13.20 $y = \sqrt[3]{x}$

In questo caso, argomenti analoghi a quelli visti in ... possiamo concludere che localmente in x_0 il grafico della funzione è compreso tra due rette passanti per il punto $(x_0, f(x_0))$:

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + M(x - x_0), \\ y &= f(x_0) - M(x - x_0). \end{aligned}$$

Il coefficiente angolare di tali rette è dato da $\pm M$, quindi può essere preso grande a piacere. Ciò vuol dire che il grafico tende a schiacciarsi sulla retta "verticale" di equazione $x = x_0$. Alla luce di tutto questo la retta verticale

$$x = x_0$$

può essere considerata *retta tangente al grafico.*

I grafico di f viene a trovarsi a sinistra e a destra di tale retta, cioè "attraversa" la retta tangente. In questi casi si parla di flesso (vedi Paragrafo...).

In sintesi è pienamente giustificata la seguente

Definizione 13.21 *Nella situazione descritta sopra (in particolare con la (13.5)) il punto x_0 si dice* punto di flesso a tangente verticale.

13.3 Interpretazione del segno della derivata

Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$.

La derivata $f'(x_0)$, se diversa da 0, fornisce un'indicazione sull'andamento (monotonia) di f in un intorno di x_0.

Proposizione 13.22 *Sia $f'(x_0) > 0$ (eventualmente uguale a $+\infty$). Allora esiste I intorno di x_0 tale che per ogni $x \in A \cap I$,*

- *se $x < x_0$, allora $f(x) < f(x_0)$;*
- *se $x_0 < x$, allora $f(x_0) < f(x)$.*

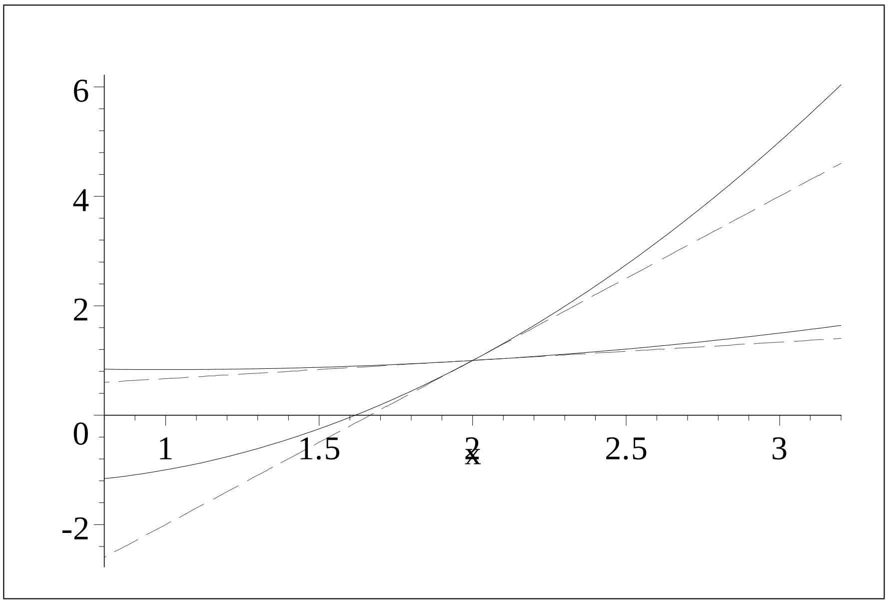
Abbiamo dunque una forma di *monotonia rispetto ad un punto* prefissato x_0 (mentre la monotonia vera e propria si avrebbe confrontando i valori in due punti arbitrari). Ovviamente sussiste un'analoga proposizione per il caso $f'(x_0) < 0$.

Dimostrazione. è basata sul Teorema di permanenza del segno. ■

Possiamo dare anche un'interpretazione (intuitiva) del valore di $f'(x_0)$. Supponiamo di avere due funzioni f_1 ed f_2 che nel punto x_0 assumono lo stesso valore y_0. Se risulta

$$0 < f_1'(x_0) < f_2'(x_0),$$

allora entrambe le funzioni sono crescenti nel punto x_0 (come abbiamo già visto) e la funzione f_2 ha un andamento più ripido della funzione f_1. Questa affermazione potrebbe essere adeguatamente formalizzata; ci limitiamo ad osservare che le due funzioni si schiacciano su due diverse rette tangenti, aventi diverso coefficiente angolare.



13.3.1 Punti stazionari

Se la derivata in un punto (interno) x_0 è uguale a 0, in tale punto la retta tangente ha equazione $y = f(x_0)$ cioè corrisponde al grafico di una funzione costante.

Poiché localmente in x_0 il grafico tende a schiacciarsi su una funzione costante, ha senso la seguente definizione.

Definizione 13.23 *I punti (interni) in cui la derivata esiste ed è uguale a* 0 *si dicono* stazionari*.*

A differenza di quanto accade nei punti con derivata diversa da 0, nei punti stazionari il comportamento di f non è "prevedibile" (vedi Osservazione 13.32).

13.4 Semirette tangenti

Passiamo a studiare il caso in cui, conservando la continuità, non esiste la derivata ma esistono (e sono ovviamente diverse) le derivate destra e sinistra.

Se la funzione è almeno continua nel punto $x_0 \in A$, in presenza di derivata destra ha senso parlare di *semiretta tangente* al grafico *a destra*.

- Se $f'(x_0^+) \in \mathbf{R}$ considereremo la retta

  $$y = f(x_0) + f'(x_0^+)(x - x_0).$$

  con la limitazione (ovvia) $x \geq x_0$.

- Se $f'(x_0^+) = +\infty$ (risp. $-\infty$) considereremo la retta (verticale)

  $$x = x_0.$$

  con la limitazione $y \geq f(x_0)$ (risp. $y \leq f(x_0)$).

Queste limitazioni derivano dal fatto che, analogamente a quanto visto nella Proposizione 13.22, se $f'(x_0^+) > 0$ (risp. $f'(x_0^+) < 0$), allora a destra di x_0 risulta $f(x) \geq f(x_0)$ (risp. $f(x) \leq f(x_0)$)

Analogamente, a partire dalla derivata sinistra, ha senso parlare di *semiretta tangente* al grafico *a sinistra*, considerando limitazioni opposte.

Osservazione 13.24 *Lo studio delle semirette tangenti diventa di un qualche interesse anche nel caso di sola continuità unilaterale.*

13.4.1 Punti angolosi e cuspidali

Ora possiamo dare altre due definizioni che si affiancano alla Definizione 13.21.

Definizione 13.25 Punto angoloso*. esistono le derivate* $f'(x_0^+)$ *e* $f'(x_0^-)$ *diverse tra loro ed almeno una è finita*

Infatti in questo caso il grafico ammette due diverse (semirette) tangenti, una a sinistra ed una a destra di x_0. Poiché almeno una delle due derivate è finita, almeno una delle due semirette tangenti è orizzontale o obliqua e quindi le due semirette individuano un angolo con vertice in $(x_0, f(x_0))$.

Esempio 13.26 $y = |x|$

Definizione 13.27 Punto cuspidale*: esistono le derivate* $f'(x_0^+)$ *e* $f'(x_0^-)$ *entrambe infinite, ma di segno opposto*

Anche in questo caso dovremmo parlare di due semirette tangenti, tuttavia entrambe sono verticali e, di fatto, coincidono. In definitiva potremmo affermare che "esiste una sola semiretta tangente".

Esempio 13.28 $y = \sqrt[3]{x^2}$

Concludiamo con una definizione che accomuna punti di flesso a tangente verticale, punti angolosi e punti cuspidali.

Definizione 13.29 *I punti del dominio in cui la funzione è continua ma non derivabile prendono il nome di* punti singolari*.*

13.5 Derivate delle funzioni elementari

...

13.6 Algebra delle derivate

...

13.6.1 Esempi di calcolo

...

13.7 Punti di estremo relativo

Diamo un'importante definizione.

Definizione 13.30 *Siano* $A \subset \mathbf{R}$*,* $f : A \to \mathbf{R}$*. Il punto* $x_0 \in A$ *si dice di* minimo (risp. massimo) relativo *se esiste* I *intorno di* x_0 *tale che per ogni* $x \in A \cap I$ *risulta*

$$\begin{array}{rcl} f(x_0) & \leq & f(x) \\ \textit{(risp. } f(x) & \leq & f(x_0)\textit{).} \end{array}$$

Evidentemente tutti i punti di estremo assoluto sono anche di estremo relativo, ma non è vero il viceversa.

Teorema 13.31 (di Fermat) *Siano* $A \subset \mathbf{R}$*,* $f : A \to \mathbf{R}$*,* $x_0 \in A$*. Se* x_0 *è un punto interno ad* A*, punto di estremo relativo ed esiste la derivata di* f *in* x_0*, allora* $f'(x_0) = 0$*.*

Dimostrazione. Consideriamo $A_0 = A - \{x_0\}$. Dire che x_0 è punto interno ad A vuol dire che x_0 è punto di accumulazione per A_0 sia da dx che da sn. Pertanto ha senso considerare il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale.... ■

Talvolta si dice in breve che i punti di estremo locale sono stazionari; rispetto a questa affermazione generica abbiamo due tipi di controesempi:

- punti di estremo in cui la derivata non esiste: $f(x) = |x|$;
- punti di estremo in cui la derivata non è nulla: $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ con $f(x) = x$.

Osservazione 13.32 *Dell'implicazione contenuta nel Teorema di Fermat non è vero il viceversa: esistono punti stazionari non di estremo. Ad esempio il punto* $x_0 = 0$ *è stazionario per la funzione* $f(x) = x^3$ *e tuttavia non è di estremo.*

In seguito vedremo che esistono condizioni sufficienti a garantire che un punto sia di minimo. Purtroppo non esistono condizioni necessarie e sufficienti.