Analisi Matematica - 12.2.2019

1. $f(x) = x\,(2\log^2 x - 3\log x)$

(a) Affinché f sia ben definita, occorre che sia ben definito $\log x$, dunque occorre che $x>0$.

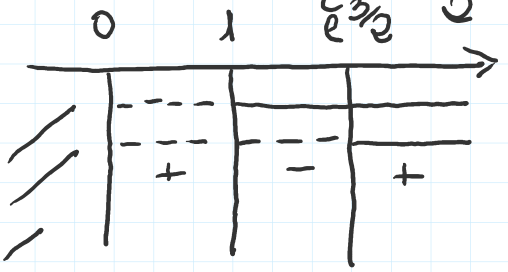
$\mathrm{dom}\, f = (0,+\infty)$.

$x=0 \notin \mathrm{dom}\, f$

$$f(x)=0 \underset{x>0}{\iff} 2\log^2 x - 3\log x = 0 \iff$$
$$\log x\,(2\log x - 3) = 0 \iff$$
$$\log x = 0 \quad \text{o} \quad \log x = \frac{3}{2} \iff$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = e^{3/2}$$

I punti $(1,0)$, $(e^{3/2},0)$ sono sul grafico di f.

$$f(x)>0 \iff \log x\,(2\log x - 3)>0$$
$$\log x > 0 \quad x>1$$
$$2\log x - 3 > 0 \quad \log x > \frac{3}{2} \quad x > e^{3/2}$$



$f(x)>0$ se $x\in(0,1)\cup(e^{3/2},+\infty)$

$f(x)<0$ se $x\in(1,e^{3/2})$

(b) Limiti significativi: $x\to0$ $x\to+\infty$

$$x\to0: \quad f(x) = \underbrace{2x\log^2 x}_{\to 0} - \underbrace{3x\log x}_{\to 0} \to 0$$

(limite notevole: $x^\alpha \log^\beta x \underset{x\to0}{\to} 0$)

$$x\to+\infty \quad 2\log^2 x - 3\log x = 2\log^2 x\left(1-\frac{3}{2\log x}\right) \sim 2\log^2 x$$

$x \to +\infty \quad 2\log^2 x - 3\log x = 2\log^2 x \left(1 - \frac{3}{2\log x}\right) \sim 2\log^2 x$

$$\Rightarrow \quad f(x) \sim 2x\log^2 x \to +\infty$$

Poiché $\frac{f(x)}{x} \sim 2\log^2 x \to +\infty$, non esiste l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(c) f è derivabile in ogni $x>0$ e

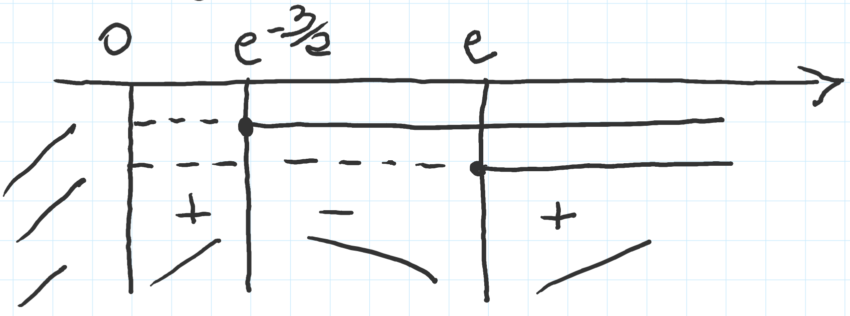
$$f'(x) = 1\cdot(2\log^2 x - 3\log x) + x\left(4\log x \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{x}\right)$$
$$= 2\log^2 x - 3\log x + 4\log x - 3$$
$$= 2\log^2 x + \log x - 3$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2t^2 + t - 3 = 0 \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1\pm 5}{4} \begin{array}{l} \nearrow -\frac{3}{2} \\ \searrow 1 \end{array} \end{array}\right\}$$

$$= 2\left(\log x + \frac{3}{2}\right)(\log x - 1)$$

$f'(x) \geq 0 \iff \log x + \frac{3}{2} \geq 0 \iff \log x \geq -\frac{3}{2} \iff x \geq e^{-3/2}$

$\log x - 1 \geq 0 \iff \log x \geq 1 \iff x \geq e$



f è strett. crescente in $(0, e^{-3/2})$ e in $(e, +\infty)$.

f è strett. decrescente in $(e^{-3/2}, e)$

$x = e^{-3/2}$ p.to di massimo relativo;

$x = e$ p.to di minimo relativo.

(d) $\forall x > 0$

$$f''(x) = 4\cdot\log x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4\log x + 1)$$

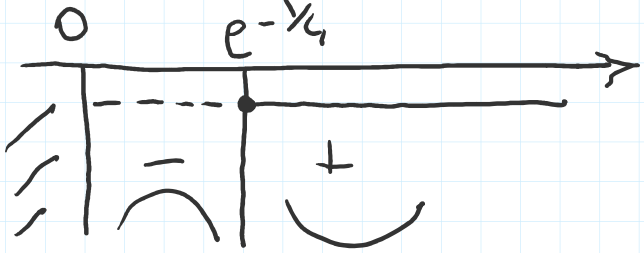
(d) $\forall x > 0$

$$f''(x) = 4 \cdot \log_e x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4\log_e x + 1)$$

$$f''(x) \geq 0 \iff 4\log_e x + 1 \geq 0$$

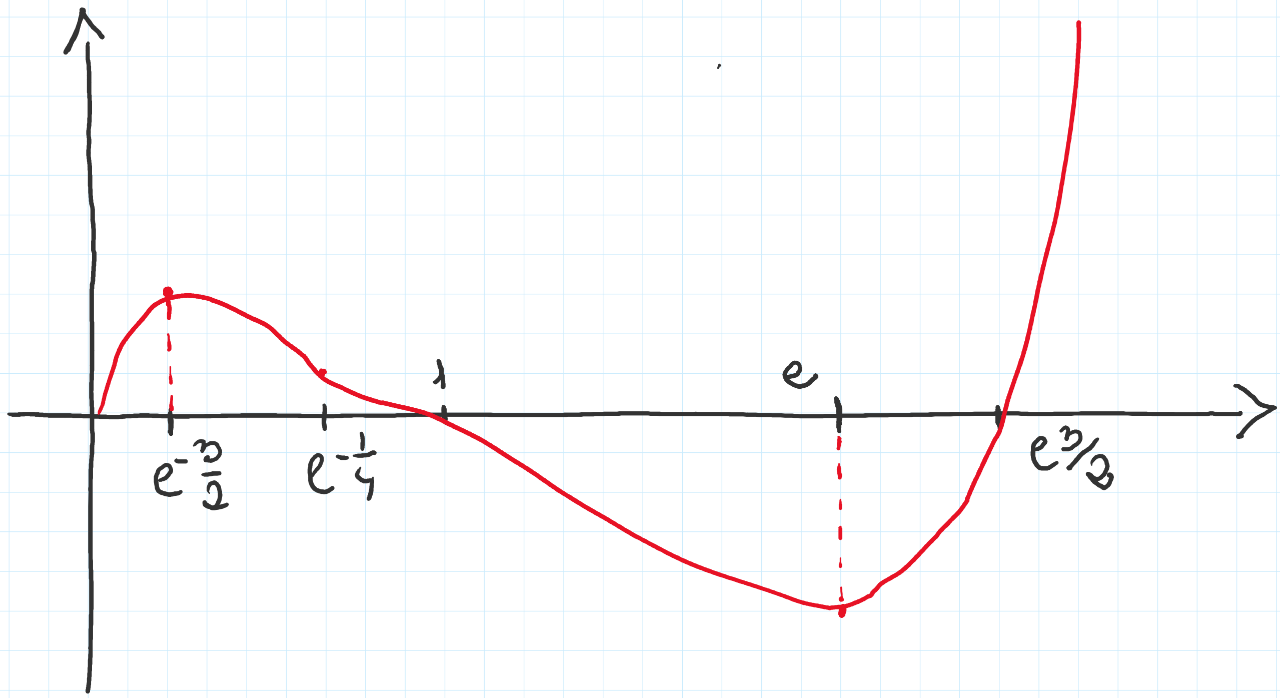
$$\log_e x \geq -\frac{1}{4}$$

$$x \geq e^{-\frac{1}{4}}$$



f è convessa in $(e^{-1/4}, +\infty)$, f è concava in $(0, e^{-1/4})$.
$x = e^{-\frac{1}{4}}$ è un pto di flesso di f.

(e) Grafico di f:



$\text{Im}\, f = [f(e), +\infty)$

L'eq $f(x) = \lambda$ ha

- 0 sol. se $\lambda < f(e)$;
- 1 sol. se $\lambda = f(e)$;
- 2 sol. se $f(e) < \lambda \leq 0$;

- 2 sol. se $f(e) < \lambda \leq 0$;
- 3 sol. se $0 < \lambda < f(e^{-3/2})$
- 2 sol. se $\lambda = f(e^{-3/2})$;
- 1 sol. se $\lambda > f(e^{-3/2})$.

2.
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 (\underbrace{\sqrt{x^2+3}}_{+\infty} \underbrace{- x}_{-\infty}) = \ell$$

$$\sqrt{x^2+3} - x = \frac{(\sqrt{x^2+3} - x)(\sqrt{x^2+3} + x)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \frac{\cancel{x^2} + 3 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} \sim \frac{3}{x+x} = \frac{3}{2x}$$

$x^2+3 \sim x^2$ per $x \to +\infty$

$\sqrt{x^2+3} \sim \sqrt{x^2} = x$

Quindi

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \frac{3}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2} x = +\infty$$

3.
$$I = \int_2^4 \frac{x+6}{x(x^2+2x-3)}\, dx$$

$x^2+2x-3=0$ ha due radici reali $x = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

Occorre scomporre la funzione integranda nel seguente modo:

$$\frac{x+6}{x(x^2+2x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+3}$$

$$= \frac{a(x^2+2x-3)+b(x^2+3x)+c(x^2-x)}{x(x^2+2x-3)}$$

$$= \frac{[illegible]}{x(x^2+2x-3)}$$

$$= \frac{ax^2+2ax-3a+bx^2+3bx+cx^2-cx}{x(x^2+2x-3)}$$

da cui

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+3b-c=1 \\ -3a=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} b+c=2 \\ 3b-c=1+4=5 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=2-c \\ 6-3c-c=5 \\ a=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=2-c \\ -4c=-1 \\ a=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4} \\ c=\frac{1}{4} \\ a=-2 \end{cases}$$

$$I = \int_2^4 \left(-\frac{2}{x} + \frac{7}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= \Big[-2\log|x| + \frac{7}{4}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x+3|\Big]_2^4$$

$$= -2\log 4 + \frac{7}{4}\log 3 + \frac{1}{4}\log 7 + 2\log 2 - \frac{1}{4}\log 5 .$$

L'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x+6}{x(x^2+2x-3)}\,dx$ è convergente.

Infatti $\displaystyle f(x) = \frac{x+6}{x(x^2+2x-3)} \sim \frac{x}{x\cdot x^2} = \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$

e $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ è convergente.

4. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

È una serie di potenze. Posto $a_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$, per calcolare il raggio di convergenza occorre calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 1$$

o, in alternativa

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n \to +\infty} 2^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$$

$$\left\{ \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \longrightarrow 0 \right\}$$

$$= 1$$

Quindi in base alla teoria, il raggio di convergenza è $R = 1$. Dunque la serie converge assolutamente se $x \in (-1, 1)$ e non converge se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Bisogna studiare i casi $x = -1$ e $x = 1$ cioè le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$$

Si osservi che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt{n})^4}{2^{\sqrt{n}}} = 0.$$

Quindi, definitivamente

$$0 < \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

$$2^{\sqrt{n}} \qquad n^{2}$$

Per il criterio del confronto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ converge e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}}$ converge assolutamente.