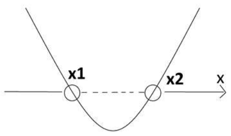
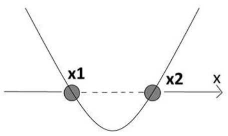
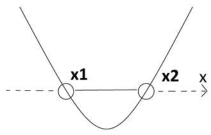
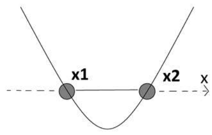
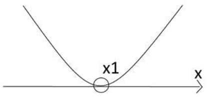
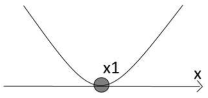
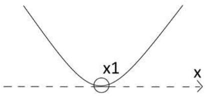
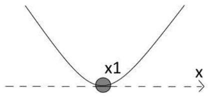
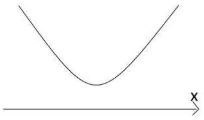
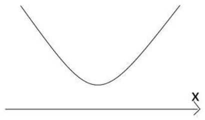
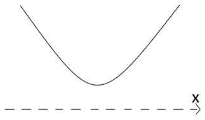
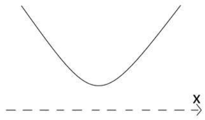
Disequazioni di secondo grado

Ricordiamo che $ax^2 + bx + c$ rappresenta l'equazione di una parabola.
Se a > 0, la parabola punta verso l'alto.

Risolvere $ax^2 + bx + c > 0$ significa trova i punti in cui la parabola si trova SOPRA l'asse delle x.
Risolvere $ax^2 + bx + c < 0$ significa trova i punti in cui la parabola si trova SOTTO l'asse delle x.

Con a > 0	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$ L'equazione ha 2 soluzioni distinte $(x_1 \neq x_2)$	 $x < x_1 \vee x > x_2$	 $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	 $x_1 < x < x_2$	 $x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$ L'equazione ha 1 soluzione $(x_1 = x_2)$	 $x \neq x_1$	 $\forall x \in \mathbb{R}$	 $\emptyset$	 $x = x_1$
$\Delta < 0$ L'equazione non ha soluzioni	 $\forall x \in \mathbb{R}$	 $\forall x \in \mathbb{R}$	 $\emptyset$	 $\emptyset$

Se a < 0 la parabola punta verso il basso, per cui i risultati si invertono.
Conviene però cambiare il segno dell'equazione e riscriverla con a > 0 (così da non dover tenere a mente i casi per a < 0).

Proprietà

● Cambio di segno

Quando si cambia il segno della disequazione (ovvero quando si moltiplicano ambo i membri per una quantità negativa), bisogna INVERTIRE il verso della disequazione.

Esempio:
$-3x - 13 \leq 1 + x \quad \rightarrow \quad (-1) \cdot (-3x - 13) \geq (1 + x) \cdot (-1) \quad \rightarrow \quad 3x + 13 \geq -x - 1$

● Semplificare l'incognita

Errore comune:
$\frac{4}{x} > 3 \rightarrow \cancel{x} \cdot \left(\frac{4}{\cancel{x}}\right) > 3x$

Perché? Perché quando si moltiplica ambo i membri, si lascia lo stesso verso se si moltiplica per un numero positivo, e si inverte il verso se si moltiplica per un numero negativo.
La x potrebbe essere SIA positiva SIA negativa.
Sarebbe stata una mossa valida solo nel caso in cui fosse stata SICURAMENTE x > 0 (per Condizioni d'esistenza o altro).

Come si fa?
$\frac{4}{x} > 3 \quad \rightarrow \quad \frac{4}{x} - 3 > 0 \quad \rightarrow \frac{4-3x}{x} > 0 \quad \rightarrow \quad \textit{Si risolve normalmente}$

Disequazioni con più fattori

$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 > 0$

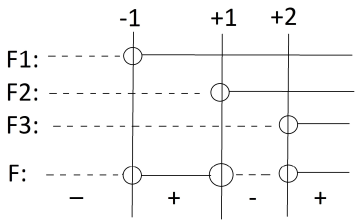
Passi:
1) Si pone ogni fattore maggiore di 0 e lo si studia
2) Si incrociano i risultati (moltiplicando i "–" e i "+")
3) Si prendono le zone col "+"

$F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 < 0$
Passi:
1) Si pone ogni fattore maggiore di 0 e lo si studia (NB: si studia comunque sempre per il MAGGIORE)
2) Si incrociano i risultati (moltiplicando i "–" e i "+")
3) Si prendono le zone col "–"

Errore comune:
Nel caso di disequazione col "< 0", ci si può confondere e studiare i fattori per "< 0".
A volte riesce lo stesso (quando ad esempio ci sono solo due fattori per cui "meno per meno = più").
A volte vengono risultati OPPOSTI a quelli corretti (quando ad esempio ci sono un numero dispari di fattori, come in questo esempio a seguire).

Esempio:
$(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) < 0$

F_1: $x+1>0 \quad \rightarrow \quad x>-1$
F_2: $x-1>0 \quad \rightarrow \quad x>1$
F_3: $x-2>0 \quad \rightarrow \quad x>2$



La disequazione contiene il "< 0" → Prendo i risultati col "–".
Quindi: $x < -1 \ \vee \ 1 < x < 2$

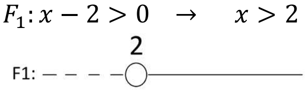
Se avessi posto F1 < 0, F2 < 0, F3 < 0, sarebbe uscito il risultato opposto (–1 < x < 1 or x > 2).
Se avessi semplicemente preso dove la linea è continua, invece che controllare il segno della disequazione, sarebbe uscito il risultato opposto.

Significato della linea continua

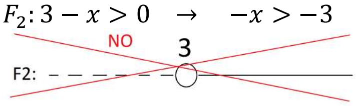
Si mette la linea continua dove è valida l'equazione di partenza, non semplicemente a destra del valore trovato.

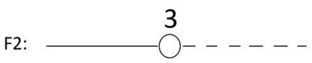
Esempio:
$(x-2) \cdot (3-x) > 0$

$F_1 : x-2>0 \quad \rightarrow \quad x>2$



$F_2 : 3-x>0 \quad \rightarrow \quad -x>-3 \quad \rightarrow \quad x<3$





F2 > 0 quando x < 3, quindi la linea continua si mette a sinistra del 3.

Disequazioni fratte

Se la disequazione contiene il “>=”, si studia:
Numeratore >= 0
Denominatore > 0
Perché non si possono accettare valori di x che rendono il denominatore = 0 (significherebbe dividere per 0).

Una soluzione alternativa:
Studiare tutto >= 0, e porre nelle C.E. Denominatore ≠ 0.

Invece, se la disequazione contiene il “<=”, si studia:
Numeratore >= 0
Denominatore > 0
E poi si prendono i valori con il “–”.

NB:
In caso di disequazioni E < 0, NON si studiano N < 0 ed D < 0.
Indipendentemente dal segno della disequazione (se > o <),
il Numeratore e il Denominatore si studiano sempre > 0, per controllare dove sono positivi.
Si prendono poi i valori positivi o negativi a seconda del segno della disequazione.

Esempio:
$$\frac{x+3}{x+5} \leq 0$$

N: $x + 3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -3$
D: $x + 5 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -5$

Posso o ad occhio sapere che, col “<=” si prendono i valori DENTRO l’intervallo,
o disegnare il solito grafico e prendere i valori col “–”.
Soluzione:
$-5 < x \leq -3$
x ∈ (–5, –3]

Errore comune:
Risolvere la disequazione quando a destra c’è un numero n ≠ 0.
$$\frac{2+x}{1-x} < 1$$

Modo errato:
$N: 2 + x > 1 \rightarrow x > -1$
$D: 1 - x > 1 \rightarrow x < 0$
$E > 0$ per: $-1 < x < 0$
Prendo i valori negativi: $E: x < -1 \vee x > 0$
SBAGLIATO

Modo corretto:
$$\frac{2+x}{1-x} < 1 \quad \rightarrow \quad \frac{2+x}{1-x} - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2+x-(1-x)}{1-x} < 0 \rightarrow \frac{2x+1}{1-x} < 0$$
$N: 2x + 1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$
$D: 1 - x > 0 \rightarrow x < 1$
$E > 0$ per: $-\frac{1}{2} < x < 1$
Prendo i valori negativi: $E: x < -\frac{1}{2} \vee x > 1$
CORRETTO