Capitolo 15

Derivate di ordine superiore

15.1 Derivata seconda

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in A$, $f : A \to \mathbf{R}$

Definizione 15.1 *Sia $f : A \to \mathbf{R}$ derivabile in un intorno di x_0. Si definisce* derivata seconda *di f in x_0 il limite*

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Come per la derivata prima, anche per la derivata seconda esistono simboli alternativi

$$f''(x_0) = D^2 f(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

Osservazione 15.2 *Quando si dice che "esiste $f''(x_0)$" si sottointendono le condizioni riportate nella definizione precedente: f derivabile in un intorno di x_0 ed esiste*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

15.1.1 Interpretazione del segno della derivata seconda

Stando alla definizione, nel parlare di derivata seconda di f in un punto x_0 si presuppone che nello stesso punto esista e sia finita la derivata prima, quindi abbia senso parlare di retta tangente. Riprendiamo la funzione

$$\epsilon_1(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

(differenza tra la funzione f e la retta tangente). Sussiste il seguente lemma, che chiameremo *Lemma fondamentale sulla derivata seconda*, in quanto viene utilizzato in un paio di teoremi successivi.

Lemma 15.3 *Supponiamo f derivabile in un intorno di x_0 e che, a sua volta, f' sia derivabile in x_0. Risulta allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\epsilon_1(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

Dal Lemma si deduce che la quantità $f''(x_0)$ fornisce un'indicazione sulla posizione del grafico di f rispetto alla retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$. Infatti sussiste la seguente Proposizione.

Proposizione 15.4 *Se $f''(x_0) > 0$ (risp. $f''(x_0) < 0$) allora, localmente in x_0 risulta $\epsilon_1(x) > 0$ (risp. $\epsilon_1(x) < 0$), ossia il grafico di f si trova al di sopra (risp. sotto) della retta tangente.*

Dimostrazione. permanenza del segno ■

Come per la derivata prima, non solo il segno di $f''(x_0)$ è rilevante, ma anche il valore, nel senso che, quanto più è grande $|f''(x_0)|$, tanto più il grafico di $f(x)$ è discosto dalla retta tangente in x_0. Cerchiamo di spiegare questa affermazione con una figura. Si abbiano due funzioni

$$\begin{aligned} f_1 &: A \to \mathbf{R} \\ f_2 &: A \to \mathbf{R} \end{aligned}$$

Per semplicità, ossia per rendere più evidente il fenomeno, supponiamo che

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &= y_0 = f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) &= m_0 = f_2'(x_0) \end{aligned}$$

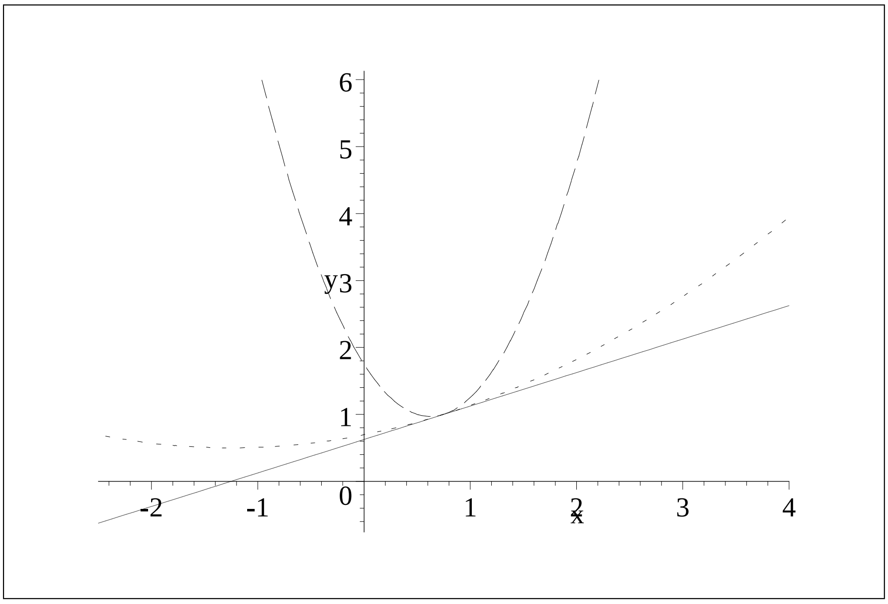
Queste vuol dire che i grafici passano per lo stesso punto (x_0, y_0) e che in questo punto presentano la stessa retta tangente

$$y = y_0 + m_0(x - x_0).$$

Supponiamo ora che

$$0 < f_1''(x_0) < f_2''(x_0)$$

La situazione che avremo è simile a quella rappresentata nella figura seguente.



Abbiamo scelto due funzioni con le seguenti caratteristiche

$$\begin{aligned} f_1(3/4) &= f_2(3/4) = 1, \\ f_1'(3/4) &= f_2'(3/4) = 1/2. \end{aligned}$$

Quindi i due grafici si incontrano nel punto $(3/4, 1)$, in cui presentano la stessa retta tangente

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{3}{4}).$$

E' evidente che il grafico di f_2 (tratteggiato) è ben più discosto dalla retta tangente rispetto al grafico di f_1 (punteggiato), infatti

$$f_1''(3/4) = 3/4, \qquad f_2''(3/4) = 12.$$

Dalla Proposizione 15.4 si deduce una *condizione sufficiente per i punti di estremo*

Teorema 15.5 *Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$. Se $f'(x_0) = 0$ ed esiste $f''(x_0) > 0$ (risp. < 0), allora x_0 è punto di minimo (risp. massimo) relativo.*

Dimostrazione. si considera la posizione del grafico rispetto alla tangente, la quale risulta orizzontale. ∎

Sussiste un controesempio $f(x) = x^4$

Concludiamo parlando di punti di flesso.

Siano $x_0 \in A$ punto interno, f derivabile nel punto x_0 (per cui esiste la retta tangente al grafico). A livello informale diremo che il punto x_0 è di flesso se nel punto x_0 il grafico di f attraversa la retta tangente. Passiamo ora ad una definizione formale.

Definizione 15.6 *Il punto x_0 si dice di* flesso *per il grafico di f se, localmente in x_0, la funzione*

$$r(x) = \frac{\epsilon_1(x)}{x - x_0}$$

ha segno costante.

Precisamente il punto di flesso si dice ascendente *(risp.* discendente*) se la funzione $r(x)$ è localmente positiva (risp. negativa).*

Per esplicitare l'equivalenza tra la versione informale e quella informale osserviamo che il denominatore della funzione $r(x)$ cambia segno nel punto x_0. Pertanto richiedere che la funzione $r(x)$ abbia segno costante equivale a richiedere che il cambio di segno del denominatore venga "compensato" dal cambio di segno del numeratore (ossia che il grafico attraversi la retta tangente).

Si deduce allora la seguente proposizione, del tutto analoga al Teorema di Fermat.

Proposizione 15.7 *Se esiste $f''(x_0)$ ed x_0 è di flesso, allora $f''(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Se fosse $f''(x_0) > 0$ (risp $f''(x_0) < 0$) la funzione $\epsilon_1(x)$ dovrebbe avere localmente segno costante e, quindi, la funzione $r(x)$ non potrebbe avere segno costante. ∎

Osservazione 15.8 *Come per il Teorema di Fermat, non è vero il viceversa: se $f''(x_0) = 0$, ciò non implica che il punto x_0 sia di flesso. Si consideri, ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$ nel punto $x_0 = 0$.*

15.1.2 Funzioni derivabili due volte in un intervallo

Come si è fatto per la derivata prima, dopo aver studiato le proprietà di carattere locale, passiamo a studiare le proprietà di carattere globale.

Teorema 15.9 *Sia $f : I \to \mathbf{R}$ derivabile due volte in I. La funzione f è convessa in I se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.*

Dimostrazione. Sappiamo, dal Teorema..., che f è convessa in I se e solo se la funzione f' è monotona cresente in I.

Ora applichiamo ad f' la caratterizzazione delle funzioni monotone: f' è monotona crescente in I se e solo se per ogni $x \in I$ risulta $f''(x) = (f')'(x) \geq 0$.
■

Da questo teorema, tenuto conto del Teorema .... (posizione del grafico di una funzione convessa rispetto alla retta tangente), deduciamo la versione globale della Proposizione 15.4.

Proposizione 15.10 *Se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, allora, per ogni $x_0, x \in I$ si ha*

$$f(x) \geq [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

15.1.3 Derivate successive

Supponiamo f derivabile in un intorno di x_0, con f' a sua volta derivabile in un intorno di x_0. Poiché la funzione reale f'' è definita in un intorno di x_0, ha senso il seguente limite

$$f^{(3)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}$$

che prende il nome di *derivata terza* di f in x_0.

Simboli equivalenti...

Se f è derivabile $n-1$ volte in un intorno di x_0 ha senso il seguente limite

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

che prende il nome di *derivata n-sima* di f in x_0.

Ovviamente, per uniformare la simbologia, possiamo introdurre le seguenti notazioni

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x_0) &= f(x_0) \\ f^{(1)}(x_0) &= f'(x_0) \\ f^{(2)}(x_0) &= f''(x_0). \end{aligned}$$

15.2 Approssimazione di funzioni

Siano $I \subset \mathbf{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$, $x_0 \in I$. Diamo una definizione.

Definizione 15.11 *Una funzione p si dirà* approssimazione (locale) *di f nel punto x_0 se risulta*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - p(x)) = 0.$$

In tal caso la quantità infinitesima

$$\epsilon(x) = f(x) - p(x)$$

prende il nome di errore*.*

Esempio 15.12 *L'esistenza di un'approssimazione locale è pressocché immediata: se f è continua in x_0 consideriamo il polinomio di grado* 0 *(ossia la funzione costante)*

$$p_0(x) = f(x_0).$$

Possiamo affermare che $p_0(x)$ rappresenta un'approssimazione locale della funzione. Infatti, in forza dell'ipotesi di continuità in x_0, abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - p_0(x)) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

In presenza di una approssimazione locale di f in x_0, si pongono due tipi di problemi.

(i) Avere una stima sull'ordine di infinitesimo dell'errore, ossia sull'ordine di contatto tra i grafici di f e di p, cioè disporre di un'informazione del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{|x - x_0|^\alpha} = 0,$$

con $\alpha > 0$ (informazione qualitativa).

(ii) *Fissato* $x \in A$, $x \neq x_0$, disporre di un espressione più precisa (quantitativa) dell'errore $\epsilon(x)$, utilizzabile per le applicazioni.

In questo paragrafo studieremo l'approssimabilità locale di f con funzioni polinomiali, affrontando le due questioni che abbiamo evidenziato.

15.2.1 Ruolo della derivata rispetto all'approssimazione

L'approssimazione di f con p_0 è molto grezza, in quanto non disponiamo di alcuna informazione del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_0(x)}{(x - x_0)^\alpha} = 0.$$

(ordine di contatto tra il grafico e la retta orizzontale).

Non appena aggiungiamo l'ipotesi che f sia derivabile in x_0 possiamo considerare il polinomio

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

il cui grafico coincide con la retta tangente.

Evidentemente anche p_1 è un'approssimazione locale di f. Tuttavia sappiamo che il polinomio p_1 gode di una proprietà che lo caratterizza in modo univoco: risulta, infatti

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p_1(x)}{x-x_0} = 0.$$

ossia il contatto tra la retta tangente e il grafico è di ordine superiore al primo.

La derivata svolge un ruolo anche rispetto al problema (ii).

Torniamo all'approssimazione con $p_0(x)$, che tiene conto della sola continuità. Se aggiungiamo l'ipotesi di derivabilità su tutto l'intervallo I, il Teorema di Lagrange ci fornisce un'espressione del resto. Infatti

$$\epsilon_0(x) = f(x) - p_0(x) = f(x) - f(x_0) = f^{(1)}(\xi)(x-x_0) \tag{15.1}$$

essendo ξ un punto compreso tra x_0 e x.

Questa informazione, da sola, potrebbe non dirci niente. Se, in qualche modo, disponiamo anche di una maggiorazione per la derivata, ossia

$$\left|f^{(1)}(\xi)\right| \le M_1,$$

dalla (15.1) deduciamo immediatamente la stima

$$|\epsilon_0(x)| \le M_1 |x-x_0|. \tag{15.2}$$

Esempio 15.13 *Poiché la funzione* arctan *è continua, il valore costante* $\pi/4 = \arctan 1$ *può essere considerato come un'approssimazione di* $\arctan x$ *in un intorno del punto* $x_0 = 1$. *Pertanto possiamo approssimare* $\arctan\left(1+\frac{1}{20}\right)$ *con* $\arctan 1 = \pi/4$.

Cerchiamo ora di stimare l'errore.

$$\epsilon_0 = \arctan\left(1+\frac{1}{20}\right) - \arctan 1 = \frac{1}{20} D\arctan\xi$$

dove $\xi \in (1, 1+1/20)$. *Ci è noto che*

$$D\arctan\xi = \frac{1}{1+\xi^2}$$

e quindi

$$|D\arctan\xi| \le 1.$$

Pertanto se approssimiamo $\arctan\left(1+\frac{1}{20}\right)$ *con* $\arctan 1 = \pi/4$ *commettiamo un errore minore di* $1/20 = 0.05$.

In realtà l'errore commesso è minore, infatti da $\xi \in (1, 1+1/20)$ *otteniamo*

$$\frac{400}{841} = \frac{1}{1+\left(\frac{21}{20}\right)^2} \le \frac{1}{1+\xi^2} \le \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$|D\arctan\xi| \le \frac{1}{2}.$$

Dunque l'errore commesso è minore di $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{40} = 0.025$.

Riassumendo:

- la derivabilità in x_0 assicura l'esistenza di un'approssimazione locale con contatto di ordine superiore al primo;
- la derivabilità in tutto il dominio (unita ad una maggiorazione della derivata) ci fornisce un'informazione quantitativa sull'approssimazione di ordine 0.

Possiamo congetturare che, aumentando l'ordine di derivabilità (o, come si suol dire, la *regolarità*), si possano ottenere una approssimabilità con polinomi ancora migliore e stime quantitative anche sugli ordini superiori.

15.2.2 Polinomi di Taylor

Approssimazione di funzioni derivabili due volte

Supponiamo f derivabile in un intorno di x_0 e che, a sua volta, f' sia derivabile in x_0. Tenuto conto del Lemma 15.3, l'unico caso in cui, tra il grafico e la retta tangente, avremo un contatto di ordine superiore al secondo sarà quando $f''(x_0) = 0$.

Lo stesso Lemma 15.3 ci suggerisce quale polinomio (di II grado) dobbiamo considerare, se vogliamo ottenere un contatto di ordine superiore al secondo.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\epsilon_1(x)}{(x-x_0)^2} - \frac{1}{2}f''(x_0) = 0$$

ossia

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] - \frac{1}{2}f''(x_0)\,(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0 \qquad (15.3)$$

Poniamo dunque

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

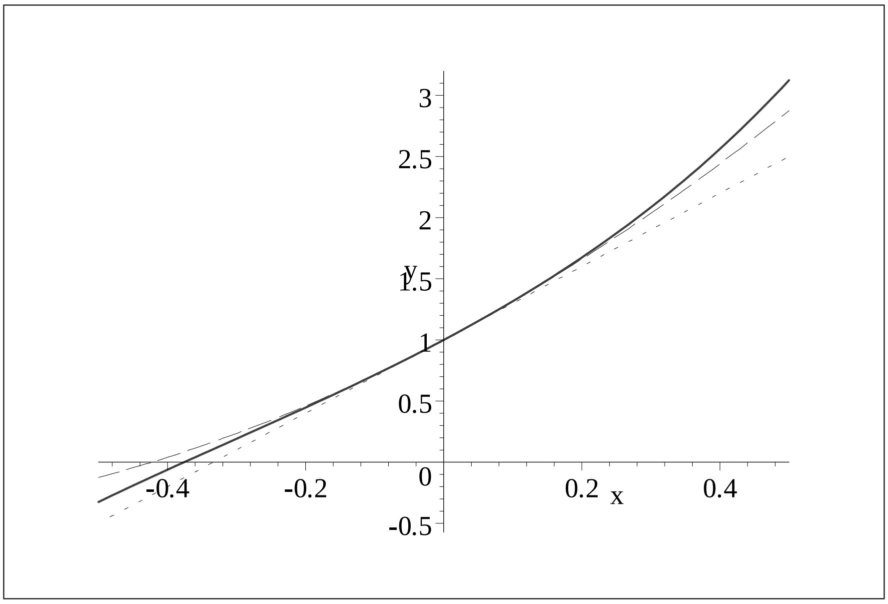
Con questa posizione la formula (15.3) costituisce la dimostrazione del seguente Teorema.

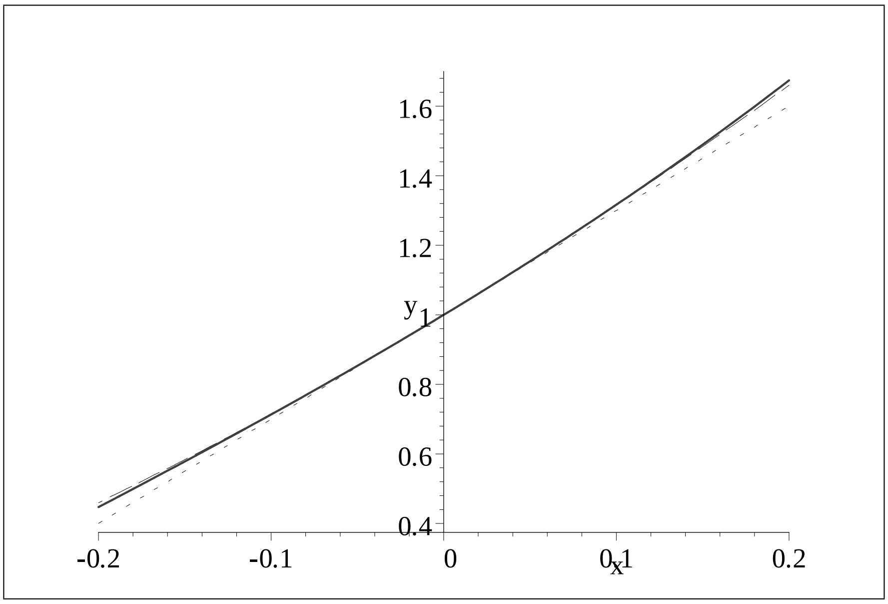
Teorema 15.14 (di Taylor, ordine 2) *Supponiamo f derivabile in un intorno di x_0 e che, a sua volta, f' sia derivabile in x_0. Risulta allora*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - p_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0.$$

Ossia, come richiesto, il contatto tra il grafico di f e il grafico di p_2 è di ordine superiore al secondo.

Che il polinomio p_2 migliori l'approssimazione di f rispetto al polinomio p_1 è evidente anche dalle figure seguenti, che riportano due diversi ingrandimenti della stessa situazione: linea continua f, linea punteggiata p_1, linea tratteggiata p_2; nel secondo ingrandimento, ossia più vicino a $x_0 = 0$, p_2 è praticamente indistinguibile da f.





Osservazione 15.15 *Ammesso che $f''(x_0) \neq 0$, il grafico della funzione $p_2(x)$ è la parabola di equazione*

$$y = p_2(x)$$

che prende il nome di parabola osculatrice in x_0*. Dunque la parabola osculatrice presenta un contatto con il grafico di ordine superiore al secondo.*

La precisazione $f''(x_0) \neq 0$ è necessaria in quanto, se fosse, $f''(x_0) = 0$, il polinomio p_2 coinciderebbe con p_1 e quindi il suo grafico sarebbe una retta. In questo caso, coerentemente con il Lemma 15.3, dovremmo affermare che il contatto tra grafico e retta tangente è di ordine superiore al secondo.

Trattazione generale

Questo processo si può iterare, ottenendo contatti di ordine sempre più alto, ossia approssimazioni sempre più precise.

Se esiste $f^{(3)}(x_0) \in \mathbf{R}$, si può considerare il polinomio

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3.$$

In generale se esistono e sono finite le derivate in x_0 fino all'ordine n, si considera il polinomio

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Definizione 15.16 *I polinomi p_n prendono il nome di* polinomi di Taylor *di ordine n di centro x_0 relativi alla funzione f.*

Esempio 15.17 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \log x$$

Nel punto $x_0 = 1/2$ il polinomio $p_3(x)$ è dato da

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -\log 2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 6x - \frac{11}{6} - \log 2. \end{aligned}$$

Nel punto $x_0 = 2$ il polinomio $p_3(x)$ è dato da

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \log 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 + \frac{1}{24}(x - 2)^3 \\ &= \frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{11}{6} + \log 2. \end{aligned}$$

Osservazione 15.18 *Osserviamo che i polinomi di Taylor sono definiti da una formula di tipo ricorsivo*

$$\begin{cases} p_0(x) = f(x_0), \\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}. \end{cases}$$

Nel caso generale il Teorema di Taylor si enuncia come segue.

Teorema 15.19 (di Taylor, caso generale) *Se esistono e sono finite le derivate in x_0 fino all'ordine n, risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Il teorema ci dice che, se in un intorno di x_0 approssiamo la funzione f con il polinomio p_n, commettiamo un errore infinitesimo di ordine superiore ad n; ossia il grafico di f e quello del polinomio hanno un contatto di ordine superiore ad n.

Osservazione 15.20 *Addottando opportune notazioni, i polinomi di Taylor, con l'informazione derivante dal Teorema 15.19, possono essere utilizzati nel calcolo dei limiti come valida alternativa al Teorema di de L'Hospital (si veda ad esempio ...).*

Polinomi di McLaurin

I polinomi di Taylor di centro $x_0 = 0$ prendono il nome di *polinomi di McLaurin.*

Nella tabella seguente riportiamo i polinomi di McLaurin del IV ordine di alcune funzioni elementari.

$f(x)$	$p_4(x)$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$
$\sin x$	$x - \frac{1}{6}x^3$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$

Osservazione 15.21 *I termini mancanti corrispondono a derivate $f^{(k)}(0) = 0$.*

Per la funzione sin *il polinomio p_4 viene a coincidere con il polinomio p_3; noi continueremo a chiamarlo p_4 per ricordare che l'errore è di ordine superiore al quarto.*

Proposizione 15.22 *Per le funzioni pari (risp. dispari) definite in un intorno di* 0*, il polinomio di McLaurin contiene solo termini di grado pari (risp. dispari).*

15.2.3 Valutazione del resto secondo Lagrange

Anche se l'approssimazione di $f(x)$ con $p_n(x)$ è molto buona, nel senso del Teorema di Taylor, non è detto che in un punto *arbitrario* $x \neq x_0$ il valore $p_n(x)$ costituisca una buona approssimazione di $f(x)$. Ad esempio il polinomio di Taylor del III ordine di centro $x_0 = 0$ della funzione sin è dato da

$$p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

Se calcoliamo $p_3(3) = -3/2$ ci rendiamo conto che nel punto 3 il polinomio p_3 non possa essere considerato affatto un'approssimazione della funzione sin.

Pertanto passiamo ad affrontare la seconda delle questioni poste all'inizio: *fissato* il punto $x \neq x_0$, vogliamo fornire un'espressione più precisa dell'errore

$$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

in modo che sia possibile stimarlo. Ricordiamo che, nel caso dei polinomi di Taylor, l'errore ϵ_n viene detto comunemente *resto* (per ragioni che saranno evidenti nel prossimo paragrafo).

Nel caso $n = 0$ abbiamo utilizzato anzitutto il Teorema di Lagrange. Dunque ci serve una sua opportuna generalizzazione.

Teorema 15.23 *Sia $f : I \to \mathbf{R}$ derivabile $n+1$ volte. Sia $x_0 \in I$ e sia p_n polinomio di Taylor di ordine n. Per ogni $x \in I$ esiste un punto $\xi \in I$, compreso tra x_0 ed x tale che*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}. \tag{15.4}$$

L'espressione a secondo membro prende il nome di *valutazione del resto secondo Lagrange.*

Esattamente come nel caso $n = 0$, osserviamo esplicitamente che, per stimare l'errore di ordine n, occorre anche una maggiorazione della derivata $(n+1)$-esima

$$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq M_{n+1}. \tag{15.5}$$

Quindi, da (15.4) e (15.5), si deduce

$$|\epsilon_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} .$$

Esercizio 15.24 *Si consideri la funzione* $\sin x$*. Calcoliamo valori approssimati (con i rispettivi errori) nel punto* $x = \pi/5$ *utilizzando il punto di riferimento* $x_0 = \pi/6$.

15.2.4 Serie di Taylor

Come sopra siano assegnati $I \subset \mathbf{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ derivabile infinite volte in I, $x_0 \in I$.

Per ogni (fissato) $n \in \mathbf{N}$ il polinomio p_n ha un contatto con f nel punto x_0 di ordine superiore ad n.

Se fissiamo $x \in I - \{x_0\}$, la derivata $(n+1)$-esima fornisce una stima dell'errore $f(x) - p_n(x)$.

Continuiamo a tenere fissato $x \in I - \{x_0\}$ e studiamo il limite per $n \to +\infty$.

Ricordando come sono definiti i polinomi p_n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

studiare il limite per $n \to +\infty$ equivale a studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \tag{15.6}$$

che prende il nome di *serie di Taylor* di centro x_0.

Si tratta di una serie di potenze, di cui abbiamo presentato parte della teoria nel Capitolo ...

Una circostanza abbastanza frequente è che l'intervallo di convergenza della serie (15.6) sia ben diverso dal dominio della funzione f.

Ci chiediamo se, almeno nell'intervallo di convergenza di (15.6), la somma della serie è uguale alla funzione $f(x)$ che l'ha generata. La risposta è generalmente affermativa. La certezza a livello teorico dipende da una stima su tutte le derivate $f^{(n)}(x)$ in tutto l'intervallo di convergenza. Le funzioni la cui serie di potenze non converge ad $f(x)$ costituiscono in un certo senso un'eccezione.

Esempio 15.25 *Consideriamo la serie di Taylor di punto iniziale* $x_0 = 0$ *relativa a due funzioni*

$$f_1(x) = \cos x, \qquad f_2(x) = \frac{4}{4 + x^2}.$$

Si tratta di due funzioni definite su tutto $\mathbf{R}$ *ed ivi limitate.*

- *La serie di Taylor di centro* $x_0 = 0$ *relativa ad* f_1

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

  converge su tutto $\mathbf{R}$.

- *La serie di Taylor di centro* $x_0 = 0$ *relativa ad* f_2

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n}$$

converge in $(-2, 2)$.

Con l'ausilio di un calcolatore possiamo tracciare alcuni grafici ed avere un riscontro di questa circostanza. Calcoliamo e tracciamo, oltre che i grafici di f_1 *ed* f_2*, i grafici dei relativi polinomi* p_6 *(tratteggiato) e* p_{14} *(punteggiato). Si osserva che, nel caso di* f_1*, al crescere di* n*, si allarga l'intervallo in cui i polinomi approssimano la funzione. Questo non accade nel caso di* f_2*: l'approssimazione non supera l'intervallo* $(-2, 2)$.