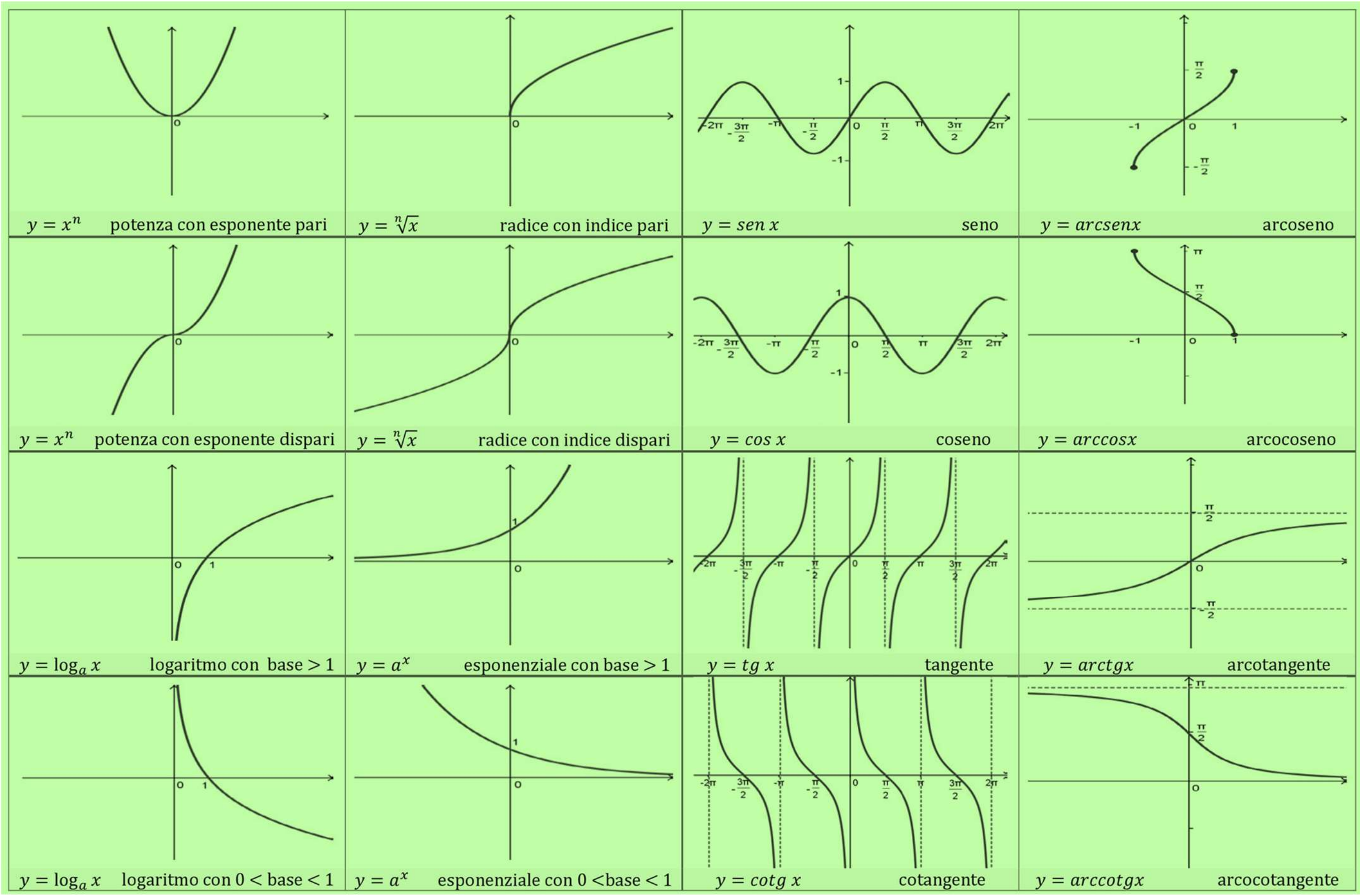
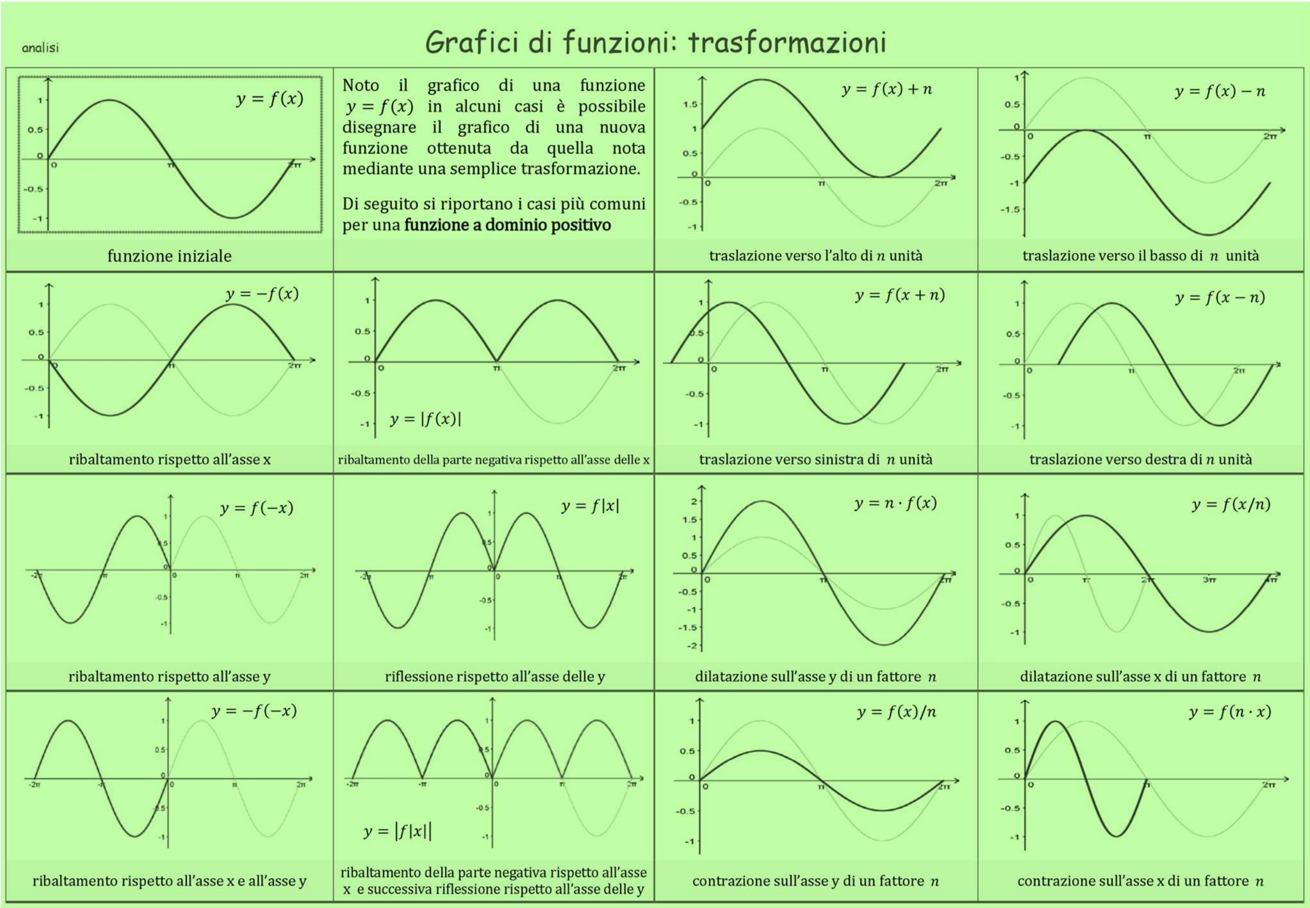
Studio di funzione – Elementare

● Grafici delle funzioni elementari



● Trasformazioni di grafici

NB: Il grafico in alto a sx è quello di partenza;
in tutte le altre immagini ci sono varie trasformazioni di quel grafico di partenza.



NB: L'unico controintuitivo è la traslazione orizzontale.
Domanda istintiva: La funzione non dovrebbe spostarsi verso destra per $y = f(x + n)$? No.
Esempio: Considera $f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \sin(0) = 0 \;\; ; \;\; \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \;\; ; \;\; \sin(\pi) = 0 \;\; ; \;\; \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 \;\; ; \;\; \sin(2\pi) = 0.$
Osserva la traslazione $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \;\; ; \;\; \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \;\; ; \;\; \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \;\; ; \;\; [\ldots]$

Comunque non serve ricordare a memoria i grafici delle traslazioni.
Si ricavano a mano. L'importante è capire il concetto.

● Passo 1) Dominio della funzione (Calcolo delle C.E.)

NB: Se ci sono più Condizioni d'Esistenza vanno messe a sistema.

funzione	condizione	
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	funzione fratta si pone il denominatore diverso da 0
$y = \sqrt[n]{f(x)}$ n pari	$f(x) \geq 0$	funzione radice ad indice pari si pone il radicando maggiore o uguale di 0
$y = \log_a[f(x)]$	$f(x) > 0$	funzione logaritmo si pone l'argomento maggiore di 0
$y = \log_{g(x)}[f(x)]$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$	funzione logaritmo con una funzione alla base si pone $\begin{cases} argomento > 0 \\ base > 0 \\ base \neq 1 \end{cases}$
$y = [f(x)]^\alpha$ α frazione positiva o numero irrazionale positivo	$f(x) \geq 0$	funzione potenza con esponente una frazione positiva o un numero irrazionale positivo si pone la funzione maggiore o uguale di 0
$y = [f(x)]^\alpha$ α frazione negativa o numero irrazionale negativo	$f(x) > 0$	funzione potenza con esponente una frazione negativa o un numero irrazionale negativo si pone la funzione maggiore di 0
$y = f(x)^{g(x)}$	$f(x) > 0$	funzione elevata ad una funzione si pone la funzione alla base maggiore di 0
$y = tg\,[f(x)]$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	funzione tangente si pone l'argomento diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$
$y = cotg\,[f(x)]$	$f(x) \neq k\pi$	funzione cotangente si pone l'argomento diverso da $k\pi$
$y = arcsen\,[f(x)]$	$-1 \leq f(x) \leq 1$	funzione arcoseno si pone l'argomento compreso tra -1 e 1
$y = arccos\,[f(x)]$	$-1 \leq f(x) \leq 1$	funzione arcocoseno si pone l'argomento compreso tra -1 e 1

osservazione importante

- le funzioni che non compaiono in questa tabella (ad esclusione di quelle iperboliche) sono definite $\forall x \in \mathcal{R}$

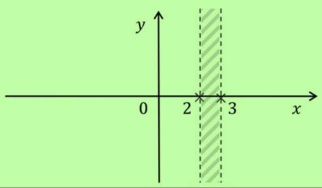
Esempi:

4. $y = ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$

si pone l'argomento del logaritmo maggiore di zero e il denominatore diverso da zero. Il dominio è:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3-x} > 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x-2 > 0 \\ 3-x > 0 \\ superflua * \end{array} \right. \rightarrow x < 2 \cup x > 3$$

(*) perché la condizione è già contenuta algebricamente nella precedente

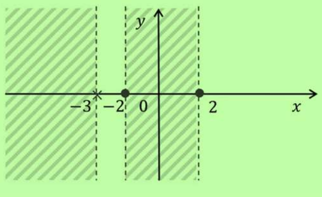


5. $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x+3}}$

si pone il radicando maggiore o uguale a zero e il denominatore diverso da zero. Il dominio è:

$$\begin{cases} \frac{x^2-4}{x+3} \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x^2-4 \geq 0 \\ x+3 > 0 \\ superflua * \end{array} \right. \rightarrow -3 < x \leq -2 \cup x \geq 2$$

(*) perché la condizione è già contenuta algebricamente nella precedente



● Passo 2) Studio del segno della funzione

Cos'è?
Serve ad individuare le regioni del piano in cui la funzione è positiva (+), cioè si trova al di sopra dell'asse delle x, o negativa (–), cioè si trova al di sotto dell'asse delle x.

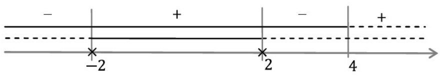
NB: Lo studio del segno si svolge solo nelle zone all'interno del dominio della funzione.

Come si svolge:
1) Si studia il dominio
2) Si pone f(x) > 0, e si risolve con il grafico dei segni delle disequazioni
3) Si guarda il grafico dei segni, e:
 - per le zone con il "+", si prende la parte SOPRA tale zona (si cancella la parte SOTTO la zona)
 - per le zone con il "–", si prende la parte SOTTO tale zona (si cancella la parte SOPRA la zona)

Esempio:

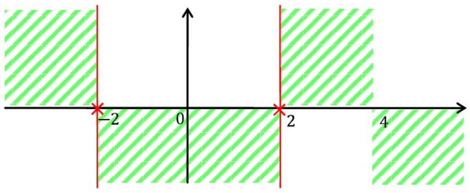
$f(x) = \dfrac{4-x}{4-x^2}$

1) Dominio: Calcolo le C.E. $(4-x^2) \neq 0 \rightarrow 4 \neq x^2 \rightarrow x \neq \pm 2$

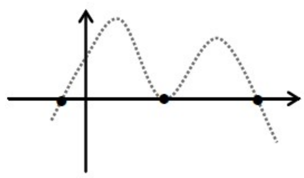
2) Risolvo $\frac{4-x}{4-x^2} > 0 \rightarrow [\ldots] \rightarrow$ 

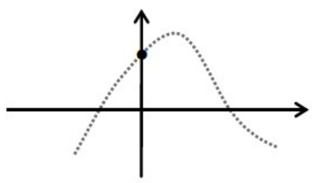
$\rightarrow \ -2 < x < 2 \lor x > 4$

3) Cancello le zone:
Fra –2 < x < 2 c'è il "+" nel grafico, prendo la parte SOPRA, e cancello sotto;
Fra 2 < x < 4 c'è il "–" nel grafico, quindi prendo la parte SOTTO, e cancello sopra; eccetera.



● Passo 3) Studio delle intersezioni con gli assi

1) Intersezioni con l'asse x (trovare gli "zeri" della funzione) Risolvo: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ Ovvero, risolvo: f(x) = 0	

2) Intersezioni con l'asse y Risolvo: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ Ovvero, risolvo: f(0) = y NB: Si può fare SOLO se x = 0 appartiene al Dominio	

Esempio:

$f(x) = \dfrac{4-x}{4-x^2}$

Trovo le intersezioni con l'asse delle x: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{4-x}{4-x^2} = 0 \rightarrow [\ldots] \rightarrow x = 4$

Trovo le intersezioni con l'asse delle y: $f(0) = y \rightarrow y = \frac{4-(0)}{4-(0)^2} = \frac{4}{4} = 1$

● Passo 4.1) Studio simmetrie (funzioni pari e dispari)

Cercare eventuali simmetrie serve a semplificare il tracciamento del grafico.
Se ci sono simmetrie, basta calcolare com'è il grafico per $x > 0$, e disegnarlo simmetrico per $x < 0$.

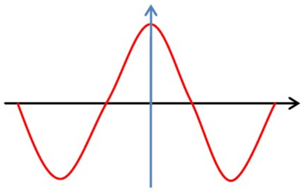
1) Funzione pari

Una funzione simmetrica rispetto all'asse delle y.

Come si cerca:

1) si calcola f(−x)

2) se f(−x) = f(x), la funzione è pari



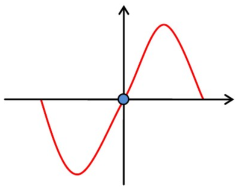
1) Funzione dispari

Una funzione simmetrica rispetto <u>all'origine.</u>

Come si cerca:

1) si calcola f(−x)

2) se f(−x) = −f(x), la funzione è dispari



Osservazioni:

- <u>Possono esistere funzioni né pari né dispari</u> (così come esistono funzioni né iniettive né suriettive).
- Conviene verificare le simmetrie DOPO il calcolo del dominio (se il dominio non è simmetrico, neanche f(x) può esserlo)
- Le funzioni dispari sono simmetriche rispetto all'origine (quindi ad entrambi gli assi), non solo all'asse delle x.

Esempio dispari:

$$f(x) = \frac{x}{4-x^2} \rightarrow f(-x) = \frac{-x}{4-(-x)^2} = -\left(\frac{x}{4-x^2}\right) \rightarrow f(-x) \neq f(x) \rightarrow ad\ occhio\ f(-x) = -f(x) \rightarrow \text{è}\ dispari$$

Esempio né pari né dispari:

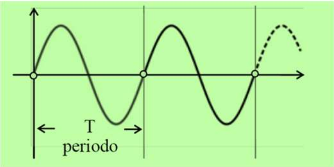
$$f(x) = \frac{4-x}{4-x^2} \rightarrow f(-x) = \frac{4-(-x)}{4-(-x)^2} = \frac{4+x}{4-x^2} \rightarrow f(-x) \neq f(x) \rightarrow non\ \text{è}\ pari \rightarrow controllo\ se\ \text{è}\ dispari \rightarrow$$

$$-f(x) = -\frac{4-x}{4-x^2} = \frac{x-4}{(x^2-4)} \rightarrow f(-x) \neq -f(x) \rightarrow non\ \text{è}\ nemmeno\ dispari$$

● Passo 4.2) Studio della periodicità

Definizione informale di funzione periodica:
Una funzione che ripete ad intervalli regolari la sua forma si dice periodica.
La dimensione dell'intervallo ripetuto si dice periodo, e si indica con T.

Definizione formale di funzione periodica:
Una funzione $f(x)$ è periodica se esiste $T > 0$ tale che:
$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D_f$



NB: il prof Pisani NON richiede lo studio della periodicità di una funzione

Solitamente lo studio della periodicità si effettua solo se la funzione contiene delle funzioni goniometriche (sen, cos, …).
Sono rari (e non trattati in un corso di Analisi I) i casi di funzioni periodiche senza funzioni goniometriche.

Metodo per la ricerca del periodo T di $f(x)$:
Si risolve per T l'equazione: $f(x+T) = f(x)$

Esempio 1:
Verifica la periodicità di: $f(x) = \sin(7x)$
$\Rightarrow$ Pongo $f(x+T) = f(x) \Rightarrow \sin(7[x+T]) = \sin(7x) \Rightarrow$
(**Errore comune**: **Ricorda che** $\boldsymbol{\sin(\alpha) = \sin(\beta) \nRightarrow \alpha = \beta}$; $\boldsymbol{\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi}$)
$\Rightarrow 7[x+T] = 7x + 2k\pi \Rightarrow 7x + 7T = 7x + 2k\pi \Rightarrow 7T = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2}{7}k\pi$

Esempio 2:
Verifica la periodicità di: $f(x) = \sin(2x+1)$
$\Rightarrow$ Pongo $f(x+T) = f(x) \Rightarrow \sin(2[x+T]+1) = \sin(2x+1) \Rightarrow 2[x+T]+1 = 2x+1+2k\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 2T + 1 = 2x + 1 + 2k\pi \Rightarrow 2T = 2k\pi \Rightarrow T = k\pi$

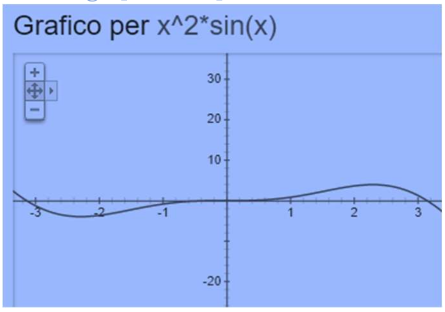
Esempio 3:
Verifica la periodicità di: $f(x) = \sin^2(2x)$
$\Rightarrow$ Pongo $f(x+T) = f(x) \Rightarrow \sin^2(2[x+T]) = \sin^2(2x) \Rightarrow \sin(2[x+T]) = \pm\sqrt{\sin^2(2x)} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin(2[x+T]) = \sin(2x) \lor \sin(2[x+T]) = -\sin(2x) \Rightarrow$
E_1: $2x + 2T = 2x + 2k\pi \Rightarrow 2T = 2k\pi \Rightarrow T = k\pi$
E_2: $\sin(2[x+T]) = -\sin(2x) \Rightarrow g(x) = \sin(x)$ è dispari $\Rightarrow \sin(2[x+T]) = \sin(-2x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 2T = -2x + 2k\pi \Rightarrow 2T = -4x + 2k\pi \Rightarrow T = -2x + k\pi \Rightarrow$ Risultato non usabile, cambio metodo $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Riscrivo $-\sin(2x) = \sin(\pi + 2x)$ per le proprietà degli angoli associati $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sin(2[x+T]) = \sin(\pi + 2x) \Rightarrow 2x + 2T = \pi + 2x + 2k\pi \Rightarrow 2T = \pi + 2k\pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} + k\pi$
Unisco i risultati di E_1 ed E_2 $\Rightarrow T = k\pi \lor T = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow T = \frac{k\pi}{2}$

Esempio 4:

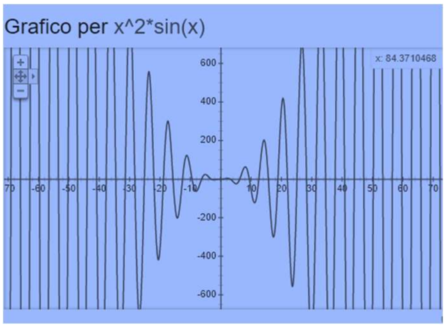
Verifica la periodicità di: $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

La funzione SEMBRA periodica, ma non lo è.

Nel range $[-\pi , +\pi]$ la funzione sembra simile al seno:



Ma, facendo lo studio di funzione e de-zoomando, si nota che più ci si allontana dal centro, più le oscillazioni aumentano.



Non esiste quindi nessuna T tale che $f(x+T) = f(x)$.

Provare a dimostrare con il modo tradizionale è oltremodo complesso.

Pongo $f(x+T) = f(x) \;\; \Rightarrow \;\; (x+T)^2 \cdot \sin(x+T) = x^2 \cdot \sin(x) \;\; \Rightarrow$

$\Rightarrow \;\; [x^2 + T^2 + 2xT] \cdot [\sin(x) \cdot \cos(T) + \cos(x) \cdot sen(T)] = x^2 \cdot \sin(x) = [\dots]$

Quindi è MOLTO più veloce proseguire con lo studio di funzione,

e dimostrare con il disegno del grafico che $f(x)$ NON è periodica.