Prova scritta di Analisi Matematica del 6.2.2018

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$

(a) Dominio: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \\ \log x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} \to \text{esistenza radice} \\ \to \text{esistenza log} \\ \to \text{denominatore} \end{matrix}$ $\quad x>0$

$\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \text{dom } f = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Non vi sono intersezioni con gli assi ($0 \notin \text{dom } f$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \text{dom } f$).
Poiché $\sqrt{x} > 0 \ \forall x \in \text{dom } f$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

(b) Limiti significativi: $0, 1, +\infty$

$x \to 0^+ \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\log x} \to \left\{ \dfrac{0}{-\infty} \right\} = 0$

$x \to 1 \quad f(x) \to \left\{ \dfrac{1}{0} \right\}$ quindi il risultato è un infinito.

$x \to 1^+ \quad f(x) \to \left\{ \dfrac{1}{0^+} \right\} = +\infty$

$x = 1$ asintoto verticale

$x \to 1^- \quad f(x) \to \left\{ \dfrac{1}{0^-} \right\} = -\infty$

$x \to +\infty \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\log x} \to +\infty$

(log inf. di ordine minore rispetto a $\sqrt{x}$)

Asintoto obliquo: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{x \log x} = \dfrac{1}{\sqrt{x} \log x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

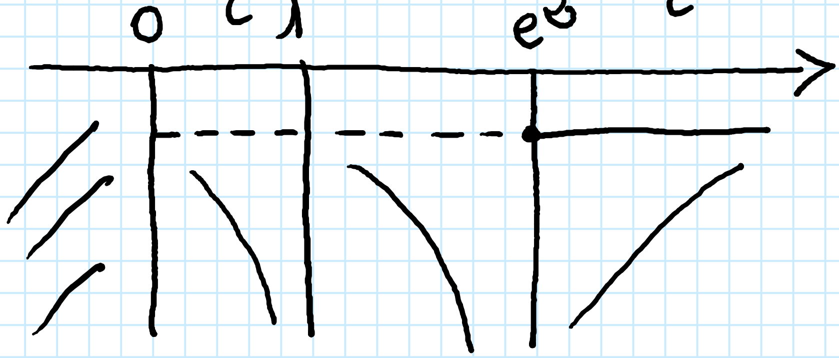
f non ha asintoti obliqui.

(c) $\forall x \in \operatorname{dom} f$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\log_e x - \cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}\,\sqrt{x}}}{\log_e^2 x} =$$

$$= \frac{\log_e x - 2}{2x\log_e^2 x}$$

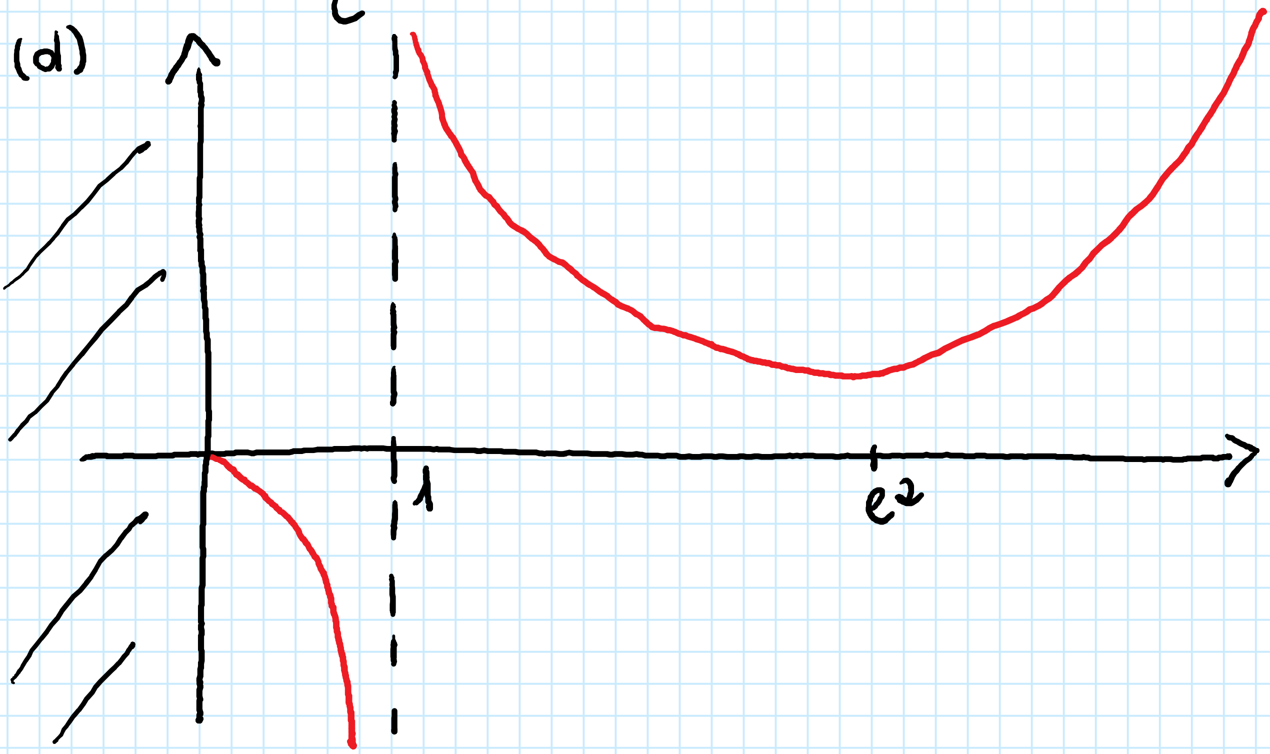
$$f'(x) \geq 0 \iff \log_e x - 2 \geq 0 \iff \log_e x \geq 2 \iff x \geq e^2$$



f è decrescente in $(0,1)$ e in $(1,e^2)$;
f è crescente in $(e^2,+\infty)$;
$x = e^2$ è un pto di min. relativo;

$$f(e^2) = \frac{\sqrt{e^2}}{\log_e e^2} = \frac{e}{2}$$

(d)



e) L'eq. $f(x) = \lambda$ ha:

1 sol. se $\lambda < 0$;
0 sol. se $0 < \lambda < f(e^2) = e/2$;
1 sol. se $\lambda = f(e^2) = e/2$;
2 sol. se $\lambda > f(e^2) = e/2$.

$\operatorname{Im} f = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$

2. $$\ell = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(e^x - 1) + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x} + \operatorname{sen} x}$$

Si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$.
Usando le eq. asintotiche, per $x \to 0$

$$\frac{x^2(e^x - 1) + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x} + \operatorname{sen} x} \sim \frac{x^2 \cdot x + x}{\sqrt{x} + x} = \frac{x^3 + x}{\sqrt{x} + x} = \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

$$= \sqrt{x} \cdot \frac{x^2+1}{1+\sqrt{x}} \sim \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1} = \sqrt{x}$$

Quindi $\ell = \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

3. $$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\log_e^2 x + 1)} dx$$

Si calcola, usando il metodo di sostituzione ($D \log_e x = \frac{1}{x}$), l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{x(\log_e^2 x + 1)} dx = \left[\int \frac{1}{t^2+1} dt\right]_{t = \log_e x}$$

$$= \left[\operatorname{arctg} t + c\right]_{t = \log_e x} = \operatorname{arctg} \log_e x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$I = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x(\log_e^2 x + 1)} dx =$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[\operatorname{arctg} \log x \right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \Big(\underbrace{\operatorname{arctg} \underbrace{\log \omega}_{\to +\infty}}_{\to \pi/2} - \underbrace{\operatorname{arctg} \underbrace{\log 1}_{= 0}}_{= 0} \Big) = \frac{\pi}{2}$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2}\right) \cos n^2$

$a_n = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2}\right) \cos n^2$ non è a termini non negativi.
Conviene dunque studiare la convergenza assoluta della serie, cioè la serie $\sum |a_n|$.

$$|a_n| = \left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| |\cos n^2| \leq \operatorname{tg} \frac{1}{n^2} \cdot 1$$

$$= \operatorname{tg} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, dunque la serie assegnata converge assolutamente (per i criteri del confronto e del confronto asintotico) e quindi è anche convergente.