Limiti – Concetti avanzati (Limiti notevoli, Equivalenze asintotiche, De L'Hopital, …)

● Proprietà dei limiti

Limite di costante
$\lim_{x \to x_0} c = c$

Limite della funzione identità
$\lim_{x \to x_0} x = x_0$

Limite del prodotto con una costante
$\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} [f(x)]$

Limite della somma
Sia $\lim_{x \to x_0} [f(x)] = L$, $\lim_{x \to x_0} [g(x)] = M$ Sia L , M finiti OPPURE $L = \pm\infty$, M finito OPPURE $L = M = +\infty$ OPPURE $L = M = -\infty$ (Ovvero: Ovvero, NON devono essere $L = +\infty$, $M = -\infty$) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} [f(x)] + \lim_{x \to x_0} [g(x)] = L + M$

Limite della differenza
Sia $\lim_{x \to x_0} [f(x)] = L$, $\lim_{x \to x_0} [g(x)] = M$ Sia L , M finiti OPPURE $L = \pm\infty$, M finito OPPURE $L = +\infty$, $M = -\infty$ OPPURE $L = -\infty$, $M = +\infty$ (Ovvero: Ovvero, NON devono essere $L = M = \pm\infty$) $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} [f(x)] - \lim_{x \to x_0} [g(x)] = L - M$

Limite del prodotto
Sia $\lim_{x \to x_0} [f(x)] = L$, $\lim_{x \to x_0} [g(x)] = M$ Sia L , M finiti OPPURE $L = \pm\infty$, M finito OPPURE $L = M = +\infty$ OPPURE $L = M = -\infty$ (Ovvero: Ovvero, NON devono essere $L = +\infty$, $M = -\infty$) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} [f(x)] \cdot \lim_{x \to x_0} [g(x)] = L \cdot M$

Limite del rapporto
Sia $\lim_{x \to x_0} [f(x)] = L$, $\lim_{x \to x_0} [g(x)] = M$ Sia L , M finiti OPPURE $L = \pm\infty$, M finito OPPURE L finito , $\mathrm{M} = \pm\infty$ Sia $M \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to x_0} [f(x)]}{\lim_{x \to x_0} [g(x)]} = \frac{L}{M}$

Limite della composta
Sia $f(x): A \to B \quad , \quad g(x): B \to C$ Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ Sia $L \in B$ $\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = g\left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]$

Limite dell'esponenziale
$\lim_{x \to x_0} [f(x)^c] = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^c$

Limite dell'inversa
Sia $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{-1}\right] = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^{-1} = \frac{1}{L}$ Esempio con i limiti notevoli: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \cos^2(x)} = 2$

Limite dell'inversa con $L = 0$
Sia $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L = 0$ $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ Asintoto verticale, bisogna studiare $x \to x_0^-$ ed $x \to x_0^+$ Esempio con i limiti notevoli: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ Studio $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - \cos(x)} = -\infty \, ; \; \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 - \cos(x)} = +\infty$

● Limiti notevoli

Limiti notevoli di funzioni goniometriche	
$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$	
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$	
$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x)}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)}{x}=1$

Limiti notevoli di funzioni esponenziali	
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=e$	$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+x}=e$ Perché: per $x\to\infty, t=\frac{1}{x}\to 0\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\sqrt[t]{1+t}$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log_a(1+x)}{x}\right)=\log_a e\Leftrightarrow\frac{1}{\ln(a)}$	$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\ln(e)=1$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln(a)\Leftrightarrow\frac{1}{\log_a(e)}$	$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\ln(e)=1$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}\right)=\alpha$; con $\alpha\in\mathbb{R},\alpha>0$	$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[\alpha]{1+x}-1}{x}\right)=\frac{1}{\alpha}$; con $\alpha\in\mathbb{R},\alpha>0$

Limiti derivanti dalla teoria degli ordini	
$\lim_{x\to 0^+}(\ln(x)\cdot x^n)=0$; $con\ n\in\mathbb{R}, n>0$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^n}\right)=0$; $con\ n\in\mathbb{R}, n>0$ NB: non vale per $x\to-\infty$
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n}{a^x}\right)=0$; $con\ n\in\mathbb{R}, n>0, a>1$ NB: non vale per $x\to-\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{a^x}\right)=0$; $con\ a>1$ NB: non vale per $x\to-\infty$

NB: Il prof Pisani accetta questi limiti notevoli (il prof non accetta la “teoria degli ordini”, ma questi non li considera tali).

● Cenni sulle dimostrazioni dei limiti notevoli

Premessa:
Comprendere almeno le dimostrazioni “facili” aiuta a ridurre il numero di limiti notevoli da ricordare.
In quanto basta ricordare quelli base, ed è poi possibile ricavare gli altri limiti notevoli.

Tutti i limiti notevoli goniometrici si ricavano partendo dal limite notevole principale, ovvero $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$.

Esempio: $\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{sen(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)=\frac{1}{\cos(0)}\cdot 1=\frac{1}{1}\cdot 1=1$

Allo stesso modo, tutti i limiti notevoli per gli esponenziali si ricavano partendo da $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

● Errori comuni con i limiti notevoli

1) Usare un limite notevole quando la x tende ad un valore diverso da quello del limite notevole Esempio: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \neq 1$ $\left(\text{in quanto il limite di } \frac{\text{sen(x)}}{\text{x}} \text{ è } = 1 \text{ quando x} \to 0\right) \to$ $\to \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \frac{\sin(+\infty)}{+\infty} = \frac{k \in [-1,+1]}{+\infty} = 0$
2) Effettuare un cambio di variabile senza controllare a cosa tende la nuova variabile Esempio: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+cos(x))}{\cos(x)}$; $Pongo\ y = \cos(x)$; $ERRORE$: $\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y} \to limite\ notevole \to 1$ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+cos(x))}{\cos(x)}$; $Pongo\ y = \cos(x)$; $Quando\ x \to 0, y \to \cos(0) = 1$; $\lim_{y\to1}\frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{\ln(1+1)}{1} = \ln(2)$

● Sostituzioni con i Limiti Notevoli

Per capire quando è possibile applicare i limiti notevoli all'interno del limite di una funzione composta, ci si rifà alle regole per quando è possibile applicare le "Sostituzioni con le Equivalenze Asintotiche" (più avanti).

● Equivalenze asintotiche

Due funzioni f(x) e g(x) si dicono asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$ se il $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, e si scrive:
$"\ per\ x \ \to x_0 \, , f(x) \sim g(x)\ "$

A cosa servono?
Finché si è all'interno del limite (finché $x \to x_0$), posso sostituire $f(x)$ con $g(x)$.
Conviene farlo quando la funzione $g(x)$ è più facile da studiare.

Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n+\cos(n)}{n^3-n}$$

Individuo "ad occhio" una funzione $g(x)$ asintoticamente equivalente di cui è più facile calcolare il limite.

Ovvero, cerco una funzione $g(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{n+\cos(n)}{n^3-n}}{g(x)} = 1$

Verifico se $\frac{n+\cos(n)}{n^3-n} \sim \frac{n}{n^3}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{n+co\,s(n)}{n^3-n}}{\frac{n}{n^3}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{n+co\,s(n)}{n^3-n}\cdot\left(\frac{n^3}{n}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{n\cdot\left(1+\frac{\cos(n)}{n}\right)}{n^3\left(1-\frac{n}{n^3}\right)}\right)\cdot\left(\frac{n^3}{n}\right)\right] = \frac{1+\frac{\cos(+\infty)}{+\infty}}{1-\frac{1}{(+\infty)^2}} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$$\ell = 1 \to \frac{n+\cos(n)}{n^3-n} \sim \frac{n}{n^3} \quad per\ x \to +\infty$$

Posso quindi calcolare il più semplice:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{n^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

• Equivalenze asintotiche relative ai limiti notevoli

$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$	Per $x\to 0\,,sen(x)\sim x$
$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=1$	Per $x\to 0\,,tg(x)\sim x$
$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x)}{x}=1$	Per $x\to 0\,,arcsen(x)\sim x$
$\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)}{x}=1$	Per $x\to 0\,,arctg(x)\sim x$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$	$\ell=0\Rightarrow$ Nessuna equivalenza
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$	Per $x\to 0\,,(1-\cos(x))\sim\frac{1}{2}x^2$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log_a(1+x)}{x}\right)=\frac{1}{\ln(a)}$	Per $x\to 0\,,\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln(a)}$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$	Per $x\to 0\,,\ln(1+x)\sim x$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln(a)$	Per $x\to 0\,,(a^x-1)\sim x\cdot\ln(a)$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$	Per $x\to 0\,,(e^x-1)\sim x$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}\right)=\alpha\ ;\ con\ \alpha\in\mathbb{R},\alpha>0$	Per $x\to 0\,,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\cdot x$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[\alpha]{1+x}-1}{x}\right)=\frac{1}{\alpha}\ ;\ con\ \alpha\in\mathbb{R},\alpha>0$	Per $x\to 0\,,\sqrt[\alpha]{1+x}-1\sim\frac{1}{\alpha}\cdot x$

Chiarimento 1:

Perché: Per $x\to 0\,,(1-\cos(x))\sim\frac{1}{2}x^2$

Ci si può ricavare a mano il risultato.
Per ottenere un'equivalenza asintotica, dobbiamo "forzare" $\ell=1$.
Vogliamo trovare una funzione $g(x)$ asintoticamente equivalente ad $[1-\cos(x)]$.
Ovvero, vogliamo una funzione $g(x)$ tale che $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{g(x)}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\ \to\ \left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)\cdot 2=1$$

Risolvo:

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)\cdot 2=1\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot 2\right)=1\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\left((1-\cos(x))\cdot\frac{2}{x^2}\right)=1\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-\cos(x))}{\frac{1}{2}x^2}\right)=1$$

Chiarimento 2:
Perché nei limiti notevoli in cui $\ell=0$ non è possibile effettuare equivalenze asintotiche?
Risposta: Non è possibile "forzare" il risultato. Prima abbiamo trasformato $\ell=\frac{1}{2}$ in 1, moltiplicando per 2.
Non c'è nessun valore k tale che $0\cdot k=1$.

● Sostituzioni con i limiti notevoli e le equivalenze asintotiche

Identità dei limiti: per $x \to x_0$, se: $f(x) \sim g(x)$ allora: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$	Perché? $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \left(\frac{g(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} 1 \cdot g(x)$
Potenza: per $x \to x_0$, se: $f(x) \sim g(x)$ allora: $[f(x)]^k \sim [g(x)]^k$	
Valore assoluto: per $x \to x_0$, se: $f(x) \sim g(x)$ allora: $\lvert f(x) \rvert \sim \lvert g(x) \rvert$	Perché? Ovvio, il limite di $f(x)$ e il limite di $g(x)$ danno lo stesso valore.
Prodotto: per $x \to x_0$, se: $f_1(x) \sim g_2(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$ allora: $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim f_1(x) \cdot g_2(x)$	Perché distinguere 2 casi? Volendo, posso sostituire solo una delle 2 funzioni: $f_2(x) \sim g_2(x)$ Formalmente sto sempre sostituendo sia $f_1(x)$ sia $f_2(x)$. Infatti sto anche sostituendo: $f_1(x) \sim f_1(x)$. Anche se sostituisco solo una delle 2 funzioni, questo è il modo formale. Scrivere così evita confusioni in alcuni casi (Es: con le equivalenze con la somma).
Divisione: per $x \to x_0$, se: $f_1(x) \sim g_2(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$ allora: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{f_1(x)}{g_2(x)}$ $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{f_2(x)}$	

Esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot (e^x - 1) \cdot \sin(x)}{2 \cdot (1 - \cos(x))} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot (e^x - 1) \cdot \sin(x)}{2 \cdot (1 - \cos(x))} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1) \cdot \sin(x)}{(1 - \cos(x))}$$

In pratica:

Per $x \to 0$, $(e^x - 1) \sim x$, $\sin(x) \sim x$, $(1 - \cos(x)) \sim \frac{1}{2}x^2$

Formalmente:

Per $x \to 0$, $(e^x - 1) \sim x$, $\sin(x) \sim x$, $(1 - \cos(x)) \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad$ Per $x \to 0$, $\frac{(e^x - 1) \cdot \sin(x)}{(1 - \cos(x))} \sim \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2}$

$$\frac{3}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \left[\frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2}\right] = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \left[x^2 \cdot \frac{2}{x^2}\right] = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

● Sostituzioni in caso di somme di funzioni (Caso 1: Somma $\neq 0$ di funzioni finite)

In pratica:

Le equivalenze asintotiche non sono sempre effettuabili in caso di somma.

Le condizioni sono:

1) Le funzioni risultanti devono essere monomi (se si sostituisce solo una, l'altra deve già essere un monomio)
2) I monomi risultanti, sommati, NON devono fare 0
3) Se ci sono 3 o più funzioni addendi, le equivalenze vanno effettuate 2 funzioni alla volta

Formalmente:

Date 2 funzioni $f(x), g(x)$, ognuna asintotica ad un monomio (in forma: costante $\cdot\, x^n$),

se i 2 monomi equivalenti non si annullano, allora è possibile effettuare la sostituzione.

Per $x \to x_0\ ,\ \ f(x) \sim c_1 \cdot x^{p_1}\ ,\ \ g(x) \sim c_2 \cdot x^{p_2}$

Se: $c_1 \cdot x^{p_1} + c_2 \cdot x^{p_2} \neq 0$

Allora:

$f(x) + g(x) \sim c_1 \cdot x^{p_1} + c_2 \cdot x^{p_2}$

Per $x \to x_0\ ,\ \ g(x) \sim c_2 \cdot x^{p_2}$

Se: $f(x)$ è un monomio ; $f(x) + c_2 \cdot x^{p_2} \neq 0$

Allora:

$f(x) + g(x) \sim f(x) + c_2 \cdot x^{p_2}$

Errore comune 1 (la somma viene 0):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x + 2x^5}{3x^3}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \left(\text{Risultato corretto, con De L'Hopital: } \ell = -\frac{1}{18}\right)$$

Errore provando ad applicare il limite notevole:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x + 2x^5}{3x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x \cdot \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{x} + \frac{2x^5}{x}\right)}{3x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x \cdot \left((1) - \frac{x}{x} + \frac{2x^5}{x}\right)}{3x^3}\right) = [\dots] = 0 \quad \text{(NO!)}$$

Errore provando ad applicare l'equivalenza asintotica:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x + 2x^5}{3x^3}\right) \Rightarrow \text{Per } x \to 0, \sin(x) \sim x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x) - x + 2x^5}{3x^3}\right) = [\dots] = 0 \quad \text{(NO!)}$$

Questo errore avviene perché, per $x \to 0$, $\sin(x) - x = 0$, e quindi NON è possibile applicare sostituzioni.

Errore comune 2 (la sostituzione non è un monomio):

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2x}\ -\ e^{x^2+x}}{x \cdot \sin(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \left(\text{Risultato corretto, con De L'Hopital: } \ell = -2\right)$$

$$\Rightarrow [\dots] \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{x + 1 -\ e^{x^2+x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ - \left(e^{x^2+x} - 1\right)}{x^2} \Rightarrow$$

Per $x \to 0$, Se $f(x) \to 0$, allora $e^{f(x)} - 1 \sim f(x) \quad \Rightarrow \quad$ Per $x \to 0, e^{x^2+x} - 1 \sim x^2 + x \ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ - (x^2 + x)}{x^2} = [\dots] = 1$ (NO!)

ERRORE: $x^2 + x$ non è un monomio, non posso sostituirlo se sono in una somma.

Ce ne si accorge scrivendo l'equivalenza in modo formale.

Per $x \to 0, e^{x^2+x} - 1 \sim x^2 + x \quad \Rightarrow \quad$ Per $x \to 0, x\ - \left(e^{x^2+x} - 1\right) \nsim x - (x^2 + x)$

Perché non stiamo sostituendo $g(x)$ con un monomio.

● Sostituzioni in caso di somme di funzioni (Caso 2: Cancellazione di addendi)

Si punta a trascurare il termine più piccolo.

Caso 1:

per $x \to x_0$

Siano $f(x), g(x)$ due monomi.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = k$

Allora $f(x) + g(x) \sim f(x)$ per $x \to x_0$

Caso 2:

Date $f(x) = c_1 \cdot x^{p_1}$; $g(x) = c_2 \cdot x^{p_2}$ Con $p_1 < p_2$

Per $x \to 0^+$, $c_1 \cdot x^{p_1} + c_2 \cdot x^{p_2} \sim c_1 \cdot x^{p_1}$

Per $x \to +\infty$, $c_1 \cdot x^{p_1} + c_2 \cdot x^{p_2} \sim c_2 \cdot x^{p_2}$

NB: Per $x \to 0^+$, $g(x)$ è un infinitesimo più veloce di $f(x)$, quindi sparisce prima ed è trascurabile.

● Sostituzioni in caso di funzioni composte (formula semplificata)

Date due funzioni $f(x) \sim g(x)$, per $x \to x_0$

Se $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = x_0$

Allora $f\big(h(x)\big) \sim g\big(h(x)\big)$, per $x \to x_0$

Esempio 1:

$\lim\limits_{x\to 0} 5x^3 = 0 \Rightarrow$ per $x \to 0, \sin(5x^3) \sim 5x^3$

Esempio 2:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{3x}-1)\cdot \sin(4x)}{tg(2x^2)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \Rightarrow$ per $x \to 0, (e^{3x}-1) \sim 3x, \sin(4x) \sim 4x, tg(2x^2) \sim 2x^2 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\cdot 4x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\cdot 4}{2} = 6$

Esemio 3:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{arcsen(x)}-1}{\log(1+3\sin(x))}$

Numeratore: $e^t - 1 \sim t$ per $t \to t_0 = 0$; $\lim\limits_{x \to x_0 = 0} arcsen(x) = t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(e^{arcsen(x)}-1\right) \sim arcsen(x)$ per $x \to 0$

$arcsen(x) \sim x$ per $x \to 0$

Denominatore: $\log(1+t) \sim t$ per $t \to t_0 = 0$; $\lim\limits_{x \to x_0 = 0} 3\sin(x) = t_0 = 0 \;\Rightarrow\; \log\big(1+3sen(x)\big) \sim 3\sin(x)$ per $x \to 0$

$3\sin(x) \sim 3x$ per $x \to x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{arcsen(x)}-1}{\log(1+3\sin(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$

Errore 1:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ln(x))}{x^2} \Rightarrow \sin(ln(x)) \sim \ln(x)$ per $x \to 0 \Rightarrow$ NO! perché $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \neq 0$, quindi per $x \to 0, \sin(\ln(x)) \nsim \ln(x)$

Errore 2:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{e^x+\sin(2x)}-1}{\ln(e^x+sin(x))} \Rightarrow$ per $x \to 0, e^x \sim 1, \ln(e^x+\sin(x)) \nsim \ln(1+\sin(x)), \ln(1+\sin(x)) \sim \sin(x) \Rightarrow [\dots]\; \ell = \dfrac{3}{2}$ (NO!)

$\Rightarrow$ Si possono sostituire le funzioni ESTERNE, $f\big(h(x)\big) \sim g\big(h(x)\big)$, non le interne, $h\big(f(x)\big) \nsim h\big(g(x)\big) \Rightarrow$ De L'Hopital $\Rightarrow [\dots]\; \ell = 3/4$

NB: Se il numeratore fosse stato solo $\sqrt{e^x+\sin(2x)} = (e^x+\sin(2x))^{\frac{1}{2}}$, avrei potuto sostituirlo con $(1+\sin(2x))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+\sin(2x)}$.

Perché, dalle proprietà delle equivalenze asintotiche, se $f(x) \sim g(x)$, allora $[f(x)]^k \sim [g(x)]^k$.

E potevo poi scrivere $\sqrt{1+\sin(2x)} - 1 + 1$ per ricondurmi al limite notevole.

Ma il numeratore è $\sqrt{e^x+\sin(2x)} - 1$.

Non posso sostituirlo con $\sqrt{1+\sin(2x)} - 1$ perché verrebbe, per $x \to 0, \sqrt{1+\sin(0)} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 0$.

E ricordiamo che, nelle equivalenze asintotiche con le somme, non posso sostituire valori che sommati si annullano.

● Sostituzioni in caso di funzioni composte (caso generale)

Date due funzioni $f(t) \sim g(t)$, per $t \to t_0$

Se $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = t_0$

Allora $f\big(h(x)\big) \sim g\big(h(x)\big)$, per $x \to x_0$

Esercizio 1:

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{x^4+1}\left(1-\cos\left(\dfrac{x}{2^x}\right)\right)\right] \Rightarrow$ per $x \to +\infty$, $t = \dfrac{x}{2^x} \to 0 \Rightarrow$ per $t \to 0$, $(1-\cos(t)) \sim \dfrac{1}{2}t^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{x^4+1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2^x}\right)^2\right] \Rightarrow [\dots]$

Esempio 2:

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+x+x^2} \cdot \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right) = [+\infty \cdot 0]$

Fattore 1: Uso cancellazione addendi $\Rightarrow$ per $x \to +\infty, \sqrt{1+(x+x^2)} \sim \sqrt{(1+x^2)} \sim \sqrt{x^2} = |x| = x$ (Perché $|x| = x$ per $x \to +\infty$)

Fattore 2: $\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow$ per $x \to +\infty, t = \dfrac{1}{x} \to 0 \Rightarrow$ per $t \to 0, \sin^2(t) = \sin(t)\cdot\sin(t) \sim t\cdot t = t^2 \Rightarrow$ per $x \to +\infty, \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$

Quindi: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{1+x+x^2} \cdot \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{1}{x}\right] = 0$

● Teorema di De L'Hopital

È un metodo rapido per risolvere le forme indeterminate del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ e $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
Richiede la conoscenza delle derivate (argomento successivo ai limiti).

Definizione formale:

Consideriamo due funzioni f, g definite e continue nell'intervallo [a, b], con $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$.
Sia $g'(x) \neq 0 \;\forall\, x \in (a, b)$, oppure $g'(x) \neq 0 \;\forall\, x \in (a, b) - \{c\}$, con $c \in (a, b)$.
Se $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
Se esiste $\mathrm{L} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Allora: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Definizione pratica:

Date $f(x), g(x)$ tali che $\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Se $g'(x) \neq 0$

Se esiste $\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

Allora: $\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

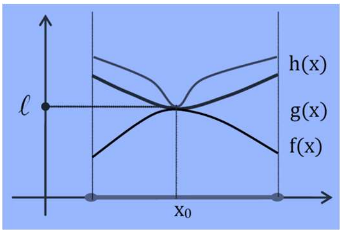
NB: È possibile ri-applicare più volte di seguito il teorema (finché le condizioni sono valide).

● Teorema del confronto (detto anche Teorema dei carabinieri)

Definizione formale:

Date 3 funzioni f(x), g(x), h(x),
se:
1) esiste un intorno $I(x_0)$ del punto x_0 in cui g(x) è compresa fra f(x) ed h(x) in tutti i punti di $I(x_0)$ tranne al più in x_0
2) f(x) ed h(x), per $x \to x_0$, tendono ad uno stesso limite finito l

allora: anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$



Esempio pratico:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(7^x + \ln(x))}{5x^2 + 1} = \frac{\sin(7^{+\infty} + \ln(+\infty))}{5(+\infty)^2 + 1} = \frac{\sin(+\infty)}{+\infty} = \frac{k \in [-1, +1]}{+\infty} = 0$$

Se voglio essere più formale, uso il teorema del confronto:

So che il $\sin(7^x + \ln(x)) \in [-1, +1]$
Ovvero: $-1 \leq \sin(7^x + \ln(x)) \leq +1$

Divido tutto per il denominatore nel mio limite, ovvero fratto $5x^2 + 1$

$$\frac{-1}{5x^2 + 1} \leq \frac{\sin(7^x + \ln(x))}{5x^2 + 1} \leq \frac{+1}{5x^2 + 1}$$

Quindi, controllo se i limiti dei due estremi coincidono:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{5x^2 + 1} = \frac{-1}{5(+\infty)^2 + 1} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{+1}{5x^2 + 1} = \frac{+1}{5(+\infty)^2 + 1} = \frac{+1}{+\infty} = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(7^x + \ln(x))}{5x^2 + 1} = 0$$