Limiti di funzioni

Giustificare tutti i passaggi mediante la teoria studiata.

1. Calcolare i seguenti limiti:
   (a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2^{\frac{x-1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;
   (b) $\lim_{x\to 2^-} \frac{\log x}{x^2-2x}$;
   (c) $\lim_{x\to 1^-} \frac{2^{x-1}}{1-x}$;
   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$;
   (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$;
   (f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$;
   (g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{\operatorname{tg} x}$;
   (h) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-2}{\log x-1}$;
   (i) $\lim_{x\to 3^-} \frac{1-e^x}{x-3}$
   (j) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1+\log x+2}{x-8}$
   (k) $\lim_{x\to 1} (x-1)\sqrt{x^2+1}$.

Soluzioni: (a) $+\infty$; (b) $-\infty$; (c) $+\infty$; (d) 1/2; (e) 1/2; (f) $-1/2$; (g) $-\infty$; (h) 0; (i) $+\infty$; (j) $-2/7$; (k) 0.

2. Calcolare i seguenti limiti (usando quando è possibile le stime asintotiche):
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1+x}{3x+x^2}$;
   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2-2x}$;

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1+x^2}{x\log(1-x)}$;

(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3^{-x}}{x^3\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2}}$;

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\cos x}-e^x-x}{\sqrt{1+x}-1}$;

(f) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{x^2+x^4}\right)^{x^4}$;

(g) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{sen}\,x\cdot\sqrt{1-\cos^2 x}}{(e^{2x}-1)\cdot\mathrm{arctg}\,x}$;

(h) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x}+1}{x^3+\mathrm{sen}\,x}$;

(i) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$;

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}^2\,x\cdot\log(1+e^x)}{e^{x^2}-1}$;

(k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\mathrm{tg}\,x}$;

(l) $\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(m) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2^x+\cos x+x}{x^5-\mathrm{sen}\,x+1}$;

(n) $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{1-x}{x^2-5x}$;

(o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+\log(1+\mathrm{sen}^2\,x)}{3\,\mathrm{tg}^2\,x}$;

(p) $\lim_{x\to +\infty} \left(x^2\cos x-2^x\right)$;

(q) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(1-\cos x)}{1-\cos\mathrm{tg}\,x}$;

(r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\log(1+x)+\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{sen}\,x+\sqrt[3]{x}}$;

(s) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}+\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{sen}\,x+x}$;

(t) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1+x\,\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{tg}\,x+1-\cos x}$;

(u) $\lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{1/\mathrm{tg}\,x}$;

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2+\log(1+\mathrm{tg}^2\,x)}{x^4+2x^2}$;

(w) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{tg} x/(x^3+x^5)}$.

Soluzioni: (a) 2/3; (b) 0; (c) $-4/3$; (d) $+\infty$; (e) -4; (f) e^3; (g) 1/2; (h) 0; (i) -2; (j) $\log 2$; (k) 0; (l) 1/2; (m) $+\infty$; (n) $-\infty$; (o) 1/3; (p) $-\infty$; (q) 1; (r) 0; (s) $(1+\sqrt{2})/(2\sqrt{2})$; (t) 2; (u) 1; (v) 1/2; (w) $e^{-1/2}$.

3. Esercizi 3.129-3.215 dal testo M.Bramanti, Esercitazioni di Analisi Matematica (sul calcolo di limiti mediante stime asintotiche).