# Analisi Matematica - 4.9.2018

1. $f(x) = \frac{1}{x} + 2\,\text{arctg}\,x$

(a) $x \neq 0$ $\quad$ $\text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \text{dom}\, f$ $\Rightarrow$ $f$ è dispari

Limiti significativi: $0, \pm\infty$

Se $x \to 0^+$ $\quad$ $\frac{1}{x} \to +\infty$, $\text{arctg}\,x \to 0$ $\Rightarrow$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Se $x \to 0^-$ $\quad$ $\frac{1}{x} \to -\infty$, $\text{arctg}\,x \to 0$ $\Rightarrow$
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$x = 0$ è un asintoto verticale di $f$

Se $x \to +\infty$ $\quad$ $\frac{1}{x} \to 0$, $\text{arctg}\,x \to \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x) \to 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

$y = \pi$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

Se $x \to -\infty$ $\quad$ $\frac{1}{x} \to 0$, $\text{arctg}\,x \to -\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x) \to 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

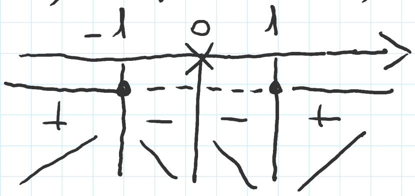
$y = -\pi$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

(b) $\forall x \in \text{dom}\, f$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{-1-x^2+2x^2}{x^2(1+x^2)}$$

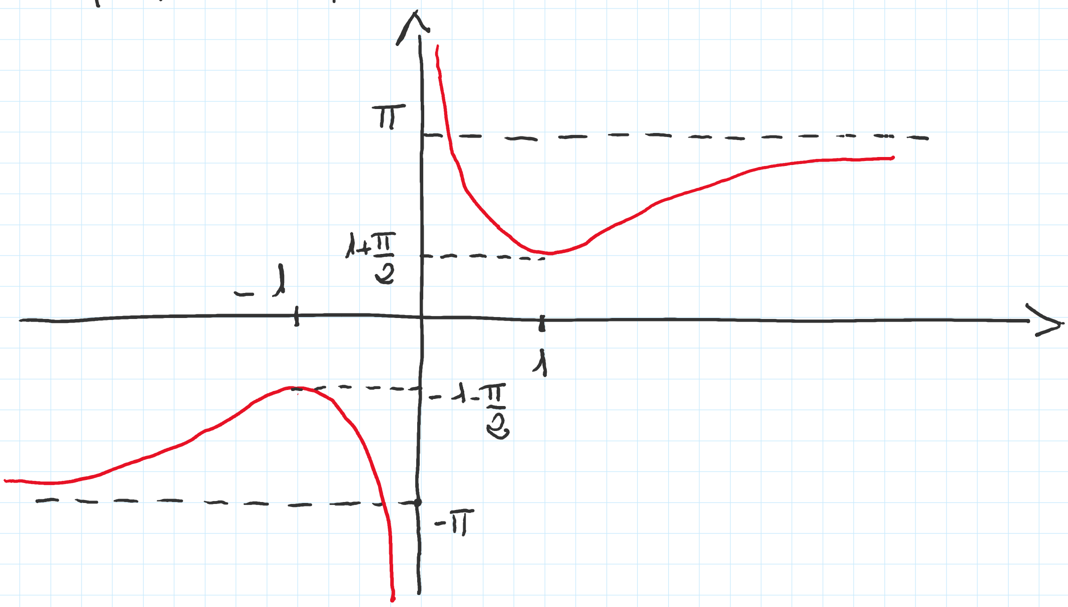
$$= \frac{x^2-1}{x^2(1+x^2)}$$

$f'(x) \geq 0 \iff x^2 - 1 \geq 0 \iff x \leq -1$ o $x \geq 1$




$f$ è crescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$;
$f$ è decrescente in $(-1, 0)$ e in $(0, 1)$.
$x = -1$ p.to di massimo relativo,
$f(-1) = -1 + 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - \pi$
$x = 1$ p.to di minimo relativo,
$f(1) = 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{2}$

(c) Grafico di $f$:




(d) L'eq. $f(x) = \lambda$ ha

1 sol se $\lambda \leq -\pi$,

2 sol. se $-\pi < \lambda < f(-1) = -1-\pi/2$,

1 sol. se $\lambda = -1-\pi/2$,

0 sol. se $-1-\pi/2 < \lambda < 1+\pi/2 = f(1)$,

1 sol se $\lambda = 1+\pi/2$,

2 sol. se $1+\pi/2 < \lambda < \pi$,

1 sol se $\lambda \geq \pi$.

$$\operatorname{Im} f = \left(-\infty, -1-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[1+\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$$

2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(e^{\operatorname{sen} x} - 1)}{(x^2+2)\operatorname{tg}(e^x - 1)} = \ell$$

Per $x \to 0$ $\quad \operatorname{sen} x \to 0 \Rightarrow e^{\operatorname{sen} x} - 1 \sim \operatorname{sen} x \sim x$

$x^2 + 2 \to 2 \Rightarrow x^2 + 2 \sim 2$

$e^x - 1 \to 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(e^x - 1) \sim e^x - 1 \sim x$.

Quindi:

$$\ell = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \cancel{x}}{2\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2} = 0$$

3. $I = \int^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{(\ldots)^2}\, dx$

3. $$I = \int_1^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{(x+2)^2}\,dx$$

Occorre calcolare preliminarmente l'integrale indefinito associato ad I. Usando la tecnica di integrazione per parti si ha

$$I_1 = \int \frac{\log(x+1)}{(x+2)^2}\,dx = \int D\left(-\frac{1}{x+2}\right)\log(x+1)\,dx$$
$$= -\frac{\log(x+1)}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+bx+b}{(x+1)(x+2)}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-a \\ 2a-a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx$$
$$= \log|x+1| - \log|x+2| + c$$

da cui

$$I_1 = -\frac{\log(x+2)}{x+1} + \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c \; .$$

Dalla definizione di integrale generalizzato si ha che

$$I = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{\log(x+2)}{(x+1)}\,dx$$
$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[ -\frac{\log(x+2)}{x+1} + \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \right]_1^{\omega}$$
$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left( -\frac{\log(\omega+2)}{\omega+1} + \log\left|\frac{\omega+1}{\omega+2}\right| + \frac{1}{2}\log 3 - \log\frac{2}{3} \right)$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left( - \frac{\ldots}{\omega+1} + \log_e \left| \frac{\ldots}{\omega+2} \right| + \frac{1}{2}\log_e 3 - \log_e \frac{2}{3} \right)$$

$\to 0$ $\sim \frac{\log_e(\omega+2)}{\omega+2}$ $\to \log_e 1 = 0$

$$= \frac{1}{2}\log_e 3 - \log_e \frac{2}{3}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n}}_{a_n}$$

Convergenza assoluta: si considera

$$|a_n| = \left|\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right| = \operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

$0 < \frac{1}{n} < \pi \quad \forall n \geq 1$

Per confronto asintotico, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, quindi diverge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dunque non converge assolutamente.

Convergenza: la serie è a termini a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \qquad b_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

e sono verificate le ipotesi del criterio di Leibnitz.
Infatti

- $b_n > 0 \ \forall n \geq 0$ : $\quad 0 < \frac{1}{n} < \pi \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{n} > 0$
- $b_n \to 0$ : $\quad \operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$
- $\{b_n\}$ è decrescente :
  $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{n+1} < \operatorname{sen}\frac{1}{n}$.

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{n+1} < \operatorname{sen}\frac{1}{n}.$$

sen crescente in $(0, \pi)$

$$b_{n+1} < b_n$$

La serie è quindi convergente (ma non assolutamente).