Esame scritto di Analisi Matematica del 21.9.2017

1. $f(x) = (2+x^2)e^{-x^2}$

(a) f è il prodotto di un polinomio e di una funz. esponenziale composta con $-x^2$, dunque $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$

$f(0) = 2 \qquad (0,2)$

$f(x) = 0 \iff \underbrace{2+x^2=0}_{\text{mai ver.}} \quad o \quad \underbrace{e^{-x^2}=0}_{\text{mai ver.}}$

$\left.\begin{array}{l} 2+x^2>0 \\ e^{-x^2}>0 \end{array}\right. \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

(b) Limiti significativi : $\pm\infty$

si osservi che $f(-x) = -f(x) \ \forall x\in\mathbb{R}$ cioè f è pari quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Per $x\to\pm\infty$:

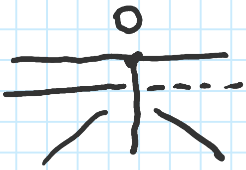
$$f(x) \sim x^2e^{-x^2} = \frac{x^2}{\underbrace{e^{x^2}}_{\text{limite notevole}}} \to 0 \quad x\to\pm\infty$$

La retta $y=0$ è un asintoto orizzontale di f a $+\infty$ e a $-\infty$.

(c) $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,e^{-x^2} + (2+x^2)e^{-x^2}(-2x) \\ &= 2x\,e^{-x^2}(1-2-x^2) \\ &= 2x\,e^{-x^2}(-1-x^2) \\ &= -2x\,\underbrace{e^{-x^2}}_{>0}\underbrace{(1+x^2)}_{>0} \end{aligned}$$

$f'(x)\geq 0 \iff -2x\geq 0 \iff x\leq 0$



f è crescente in $(-\infty,0)$

f è decrescente in $(0,+\infty)$

$x=0$ è un pto di massimo relativo

(d) $f'(x) = -2e^{-x^2}(x+x^3) \Rightarrow$

$$f''(x) = -2\left[-2xe^{-x^2}(x+x^3) + e^{-x^2}(1+3x^2)\right]$$

$$= -2e^{-x^2}\left(-2x^2-2x^4+1+3x^2\right) =$$

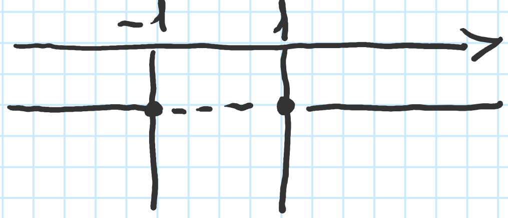
$$= -2e^{-x^2}\left(-2x^4+x^2+1\right)$$

$$= 2e^{-x^2}\left(2x^4-x^2-1\right).$$

$$\left\{ x^2 = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4} \begin{array}{l} \nearrow -\frac{1}{2} \\ \searrow 1 \end{array} \right\}$$

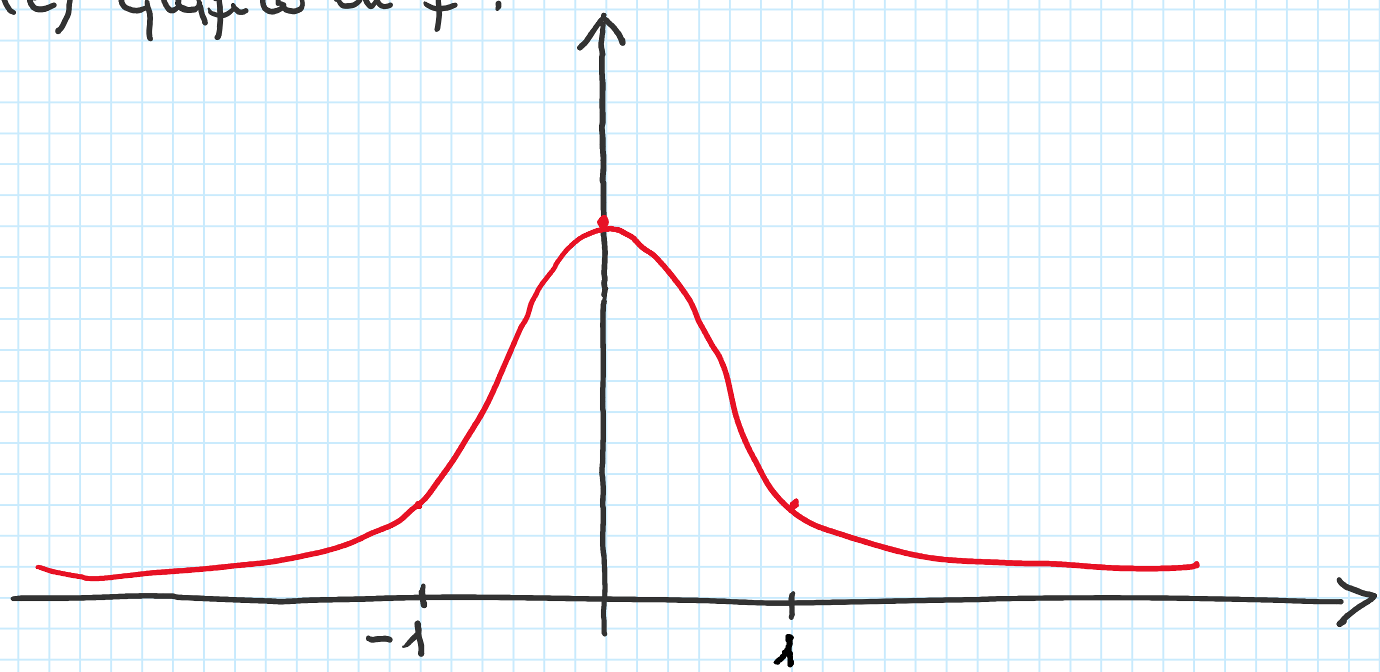
$$= 2\underbrace{e^{-x^2}}_{>0}\, 2\underbrace{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}_{>0}\left(x^2-1\right)$$

$f''(x) \geq 0 \iff x^2-1 \geq 0 \iff x \leq -1$ o $x \geq 1$



f è convessa in $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$;
f è concava in $(-1,1)$;
$x=\pm 1$ sono punti di flesso $f(\pm 1) = 3e^{-1}$

(e) Grafico di f :



(f) $\operatorname{Im} f = (0, f(0)] = (0, 2]$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha:

0 sol. se $\lambda \le 0$;

2 sol. se $0 < \lambda < 2$;

1 sol. se $\lambda = 2$;

0 sol. se $\lambda > 2$.

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \log(1+e^x)}{e^{x^2} - 1} = \ell$$

per $x \to 0$ $\quad \operatorname{sen} x \sim x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \sim x^2$;

$1 + e^x \to 2 \Rightarrow \log(1+e^x) \to \log 2$.

$\Rightarrow \log(1+e^x) \sim \log 2$

Quindi

$$\operatorname{sen}^2 x \cdot \log(1+e^x) \sim x^2 \cdot \log 2$$

Inoltre

per $x \to 0$ $\left.\begin{array}{l} x^2 \to 0 \\ e^x - 1 \sim x \end{array}\right\} \Rightarrow e^{x^2} - 1 \sim x^2$,

da cui

$$\ell = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} \log 2}{\cancel{x^2}} = \log 2$$

3. $$I = \int \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = \int D\left(-\frac{1}{x+1}\right) \log x \, dx$$

Usando la regola di integrazione per parti si ha

$$\underline{I} = -\frac{1}{x+1} \log x + \int \frac{1}{(x+1)x}\,dx.$$

Per calcolare l'integrale occorre scomporre la funzione integranda

$$\frac{1}{(x+1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x} = \frac{ax+bx+b}{(x+1)x}$$

e determiniamo le costanti a e b:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b=-1 \\ b=1. \end{cases}$$

Quindi

$$I = -\frac{\log_c x}{x+1} + \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= -\frac{\log_c x}{x+1} - \log_c |x+1| + \log_c |x| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{\log_c x}{x+1} + \log_c \frac{x}{|x+1|} + c$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log_c x}{(x+1)^2} dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{\log_c x}{(x+1)^2} dx$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[-\frac{\log_c x}{(x+1)} + \log_c \frac{x}{|x+1|} \right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left(-\underbrace{\frac{\log_c \omega}{\omega+1}}_{\sim \frac{\log_c \omega}{\omega} \to 0} + \underbrace{\log_c \frac{\omega}{|\omega+1|}}_{\to \log_c 1 = 0} - \log_c \frac{1}{2} \right)$$

$$= -\log_c \frac{1}{2} = \log_c 2$$

4. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$$

È una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ove

$$a_n = \frac{1}{(n+1)3^n}.$$

Si calcola

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+2)3^{\cancel{n}+1}} \cdot \cancel{3^n}(n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n+2} \to \frac{1}{3} \quad n \to +\infty$$

Quindi il raggio di convergenza è $R = 3$ cioè la serie

- converge assolutamente in $(-3, 3)$
- non converge in $\mathbb{R} \setminus [-3, 3]$

Rimangono da studiare $x = \pm 3$:

per $x = -3$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

che converge per il cr. di Leibniz ma non converge assolutamente;

per $x = 3$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

che non converge poiché $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n}$ è una serie divergente.

In conclusione:

l'insieme di convergenza è $[-3, 3)$;

l'insieme di convergenza assoluta è $(-3, 3)$.