Tuesday, April 9, 2019 11:34

Analisi Matematica - 9.4.2019 - prima parte

Derivata seconda e convessità

Derivata prima: misura la pendenza di un grafico

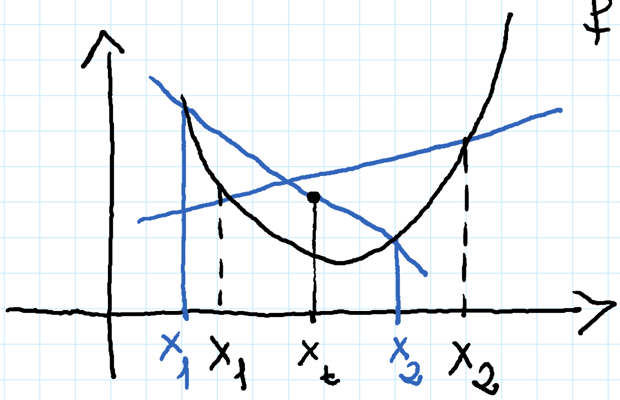
Derivata seconda: misura la variazione della pendenza di un grafico cioè di quanto il grafico si discosta dall'andamento rettilineo.

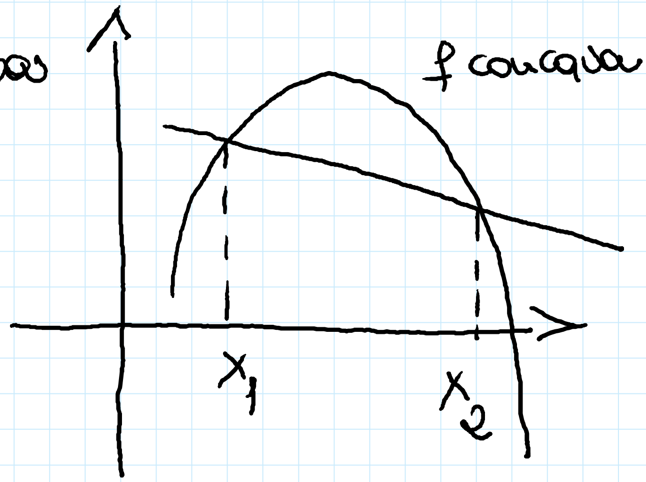
Ciò è legato al concetto di convessità/concavità di un grafico.

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

f è CONVESSA (risp. CONCAVA) in I $\overset{def}{\iff}$

In ogni $[x_1, x_2] \subset I$ il grafico di f si trova al di sotto (risp. al di sopra) della retta congiungente $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$





Def: f si dice convessa in I (risp. concava in I) se $\forall x_1, x_2 \in I$ $\forall t \in [0,1]$

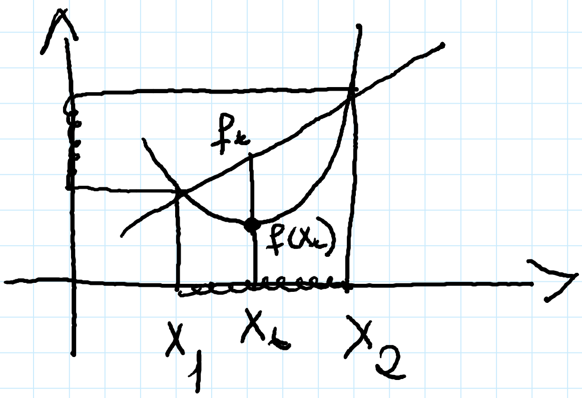
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + t f(x_2)$$
$$\big(\quad '' \quad \geq \quad '' \quad \big)$$

$x_t = (1-t)x_1 + t x_2$ descrive al variare di $t \in [0,1]$ l'intervallo di estremi x_1, x_2

$f_t = (1-t)f(x_1) + t f(x_2)$ descrive l'intervallo di estremi $f(x_1), f(x_2)$ al variare di f

f è convessa $\iff f(x_t) \le f_t$

f è concava $\iff f(x_t) \ge f_t$

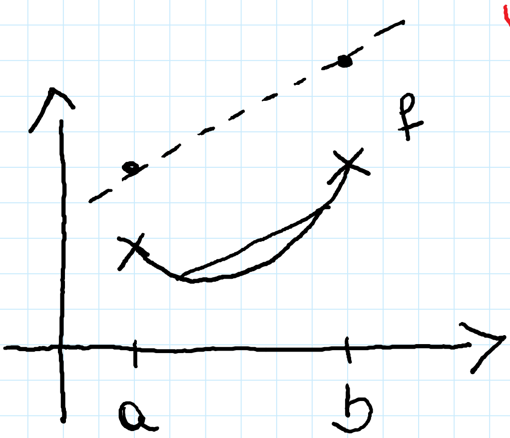


oss: f è convessa $\iff -f$ è concava

Proprietà

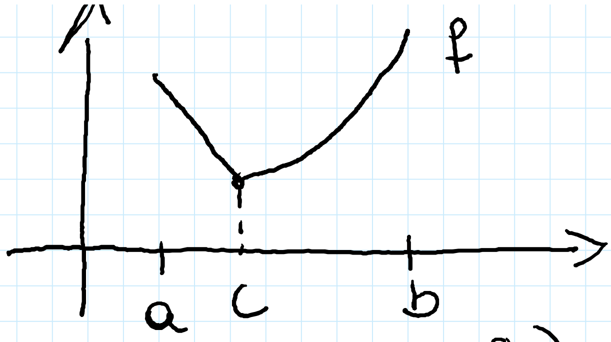
Teorema: se f è convessa (o concava) in I allora per ogni $x \in I$, x diverso dagli estremi di I:

1) f è continua in x
2) esistono finiti $\underbrace{f'_+(x) \text{ e } f'_-(x)}_{\text{non è detto che coincidano}}$.



f è convessa, ma non continua in $x = a$ e in $x = b$

f è convessa ed ha un p.to angoloso in $x = c$.



p.to angoloso in $x=c$.

Se f è derivabile (2 volte) la convessità è in relazione con f' e con f''

<u>Teorema</u> : $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

1) Se f è deriv in (a,b):
f convessa in $(a,b) \iff f'$ è crescente in (a,b)
(concava) (decrescente)

2) Se f è deriv. due volte in (a,b):
f convessa in $(a,b) \iff f''(x)\geq 0 \ \forall x\in(a,b)$
(concava) $\left(f''(x)\leq 0 \quad \text{"} \right)$

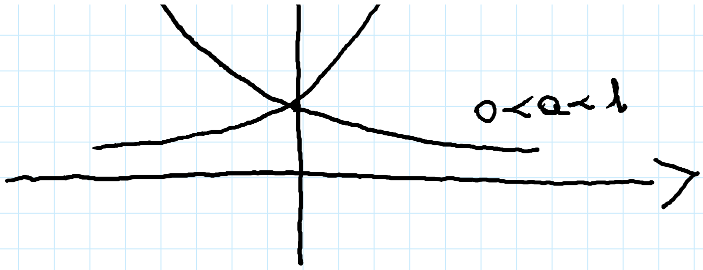
La 2) segue dalla 1) e dal test di monotonia.

Esempi

- $f(x)=a^x \quad x\in\mathbb{R}$
  $f'(x)=a^x \log a \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad f'(x)\begin{cases} >0 & a>1 \\ <0 & 0<a<1\end{cases}$

  $\Rightarrow f$ è strett. cresc. se $a>1$
  f è strett. decr se $0<a<1$

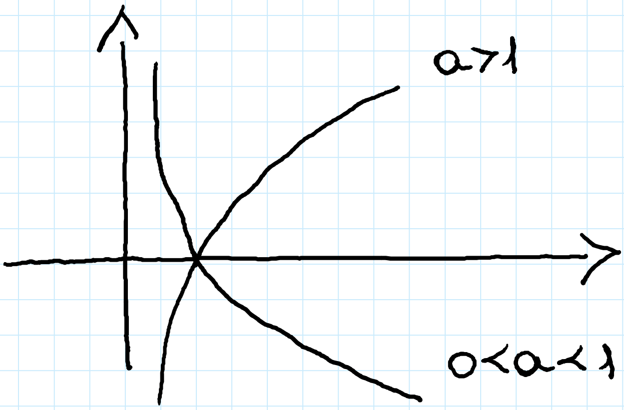
  $f''(x) = a^x(\log a)^2 > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ è convessa



• $f(x) = \log_a x \qquad x>0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x \log a}$ $\nearrow >0$ se $a>1 \Rightarrow f$ strett. cresc.
$\searrow <0$ se $0<a<1 \Rightarrow f$ strett. decr.

$f''(x) = -\dfrac{1}{\log a}\cdot\dfrac{1}{x^2}$ $\nearrow <0$ se $a>1$ f concava
$\searrow >0$ se $0<a<1$ f convessa



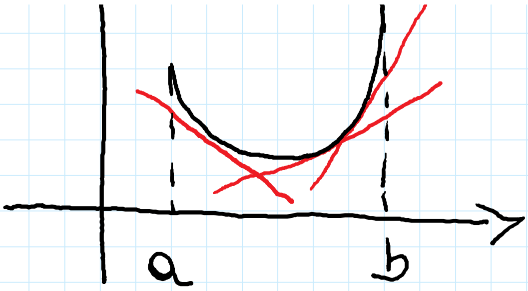
Caratterizzazione della convessità mediante rette tangenti

<u>Teorema</u>: $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b).
Allora

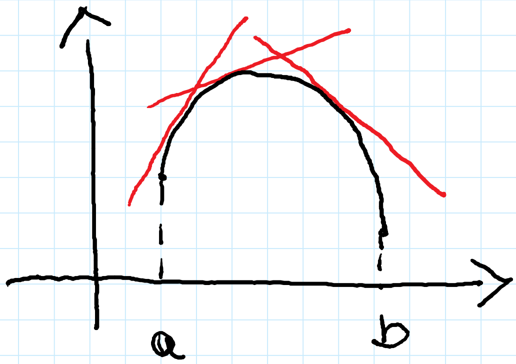
f è convessa in $(a,b) \Leftrightarrow \forall x_0, x \in (a,b)$
$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

" concava " $\Leftrightarrow \forall x_0, x \in (a,b)$
$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

graf f si trova al di sopra di ogni retta ta



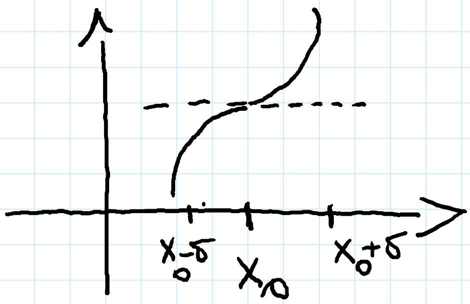
graf f si trova al di sopra di ogni retta tg al graf.



" " al di sotto

" " "

Conseguenza: se una f passa da concava a convessa (o viceversa) in un punto allora in quel punto f attraversa la retta tg. in quel punto.



<u>Def</u>: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Si dice che x_0 è un punto di flesso per f se esiste $\delta>0$ t.c. f è convessa (oppure concava) in $(x_0-\delta, x_0)$ ed è concava (oppure convessa) in $(x_0, x_0+\delta)$

- $f(x)=x^3 \quad x\in\mathbb{R}$

  $f'(x)=3x^2 \geq 0 \Rightarrow f$ è crescente

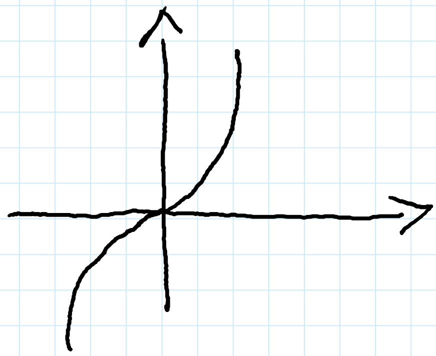
  $f''(x)=6x$

  segno di f'':

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline - - - - - & + + + + + \end{array}$$

$x<0$ f è concava $\quad$ $x>0$ f è convessa

$x<0$ f è concava $x>0$ f è convessa



retta tg al grafico di f in $(0,0)$:

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 0 = 0$$

Analogo del teo. di Fermat per i p.ti di flesso:

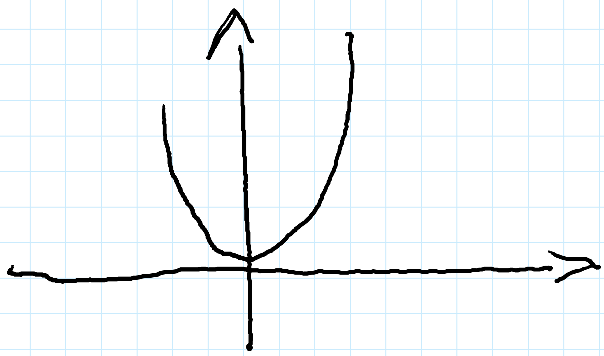
Teo: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$ p.to di flesso di f. Se esiste $f''(x_0)$ allora $f''(x_0)=0$.

Non vale il viceversa: $f(x)=x^4$ $x\in\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=4x^3$ $\to$ 0 p.to di min. di f

$f''(x) = 12x^2 \geq 0 \Rightarrow f$ è convessa

$f''(0)=0$



Analisi Matematica - 9.4.2019 - Seconda parte

Tuesday, April 9, 2019 12:35

Grafici di funzioni

- $f(x) = e^{-x^2}$

  dom $f = \mathbb{R}$

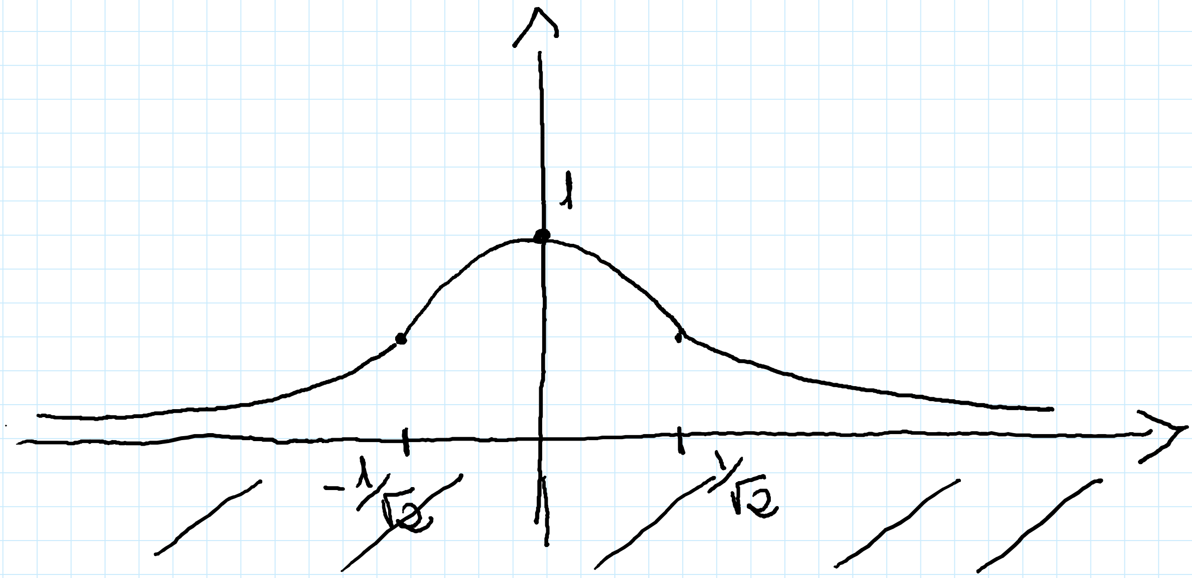
  $f(0) = e^0 = 1 \qquad (0,1)$

  $f(x) = 0 \qquad e^{-x^2} = 0$ non ha sol.

  $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ pari

  $\Rightarrow$ graf. simm. rispetto asse y.



Limiti agli : $\pm\infty$

$x \to +\infty \qquad x^2 \to +\infty \qquad -x^2 \to -\infty \Rightarrow e^{-x^2} \to 0$

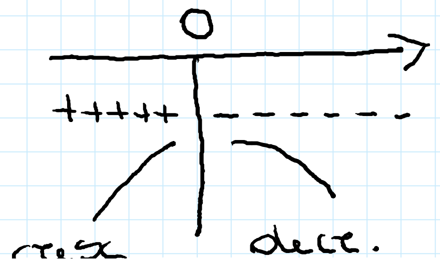
$f(x) \to 0 \qquad y = 0$ asintoto orizzontale di f

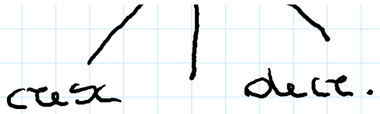
Derivata prima:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^{-x^2} \cdot D(-x^2) = \underbrace{-2x e^{-x^2}}$

$f'(x) \geq 0 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0 \qquad 2e^{-x^2} > 0$

f'





0 pto di max rel. di f. $\quad f(0)=1$

f è crescente in $(-\infty,0)$, f decr. in $(0,+\infty)$.

Derivata seconda: $\forall x\in\mathbb{R}$

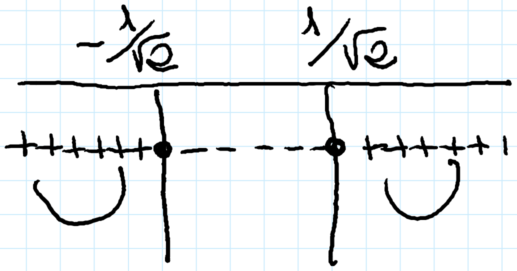
$$f''(x) = -2\left(1\cdot e^{-x^2} + x\,(-2x)e^{-x^2}\right) =$$
$$= -2\,e^{-x^2}(1-2x^2)$$
$$= \underbrace{2e^{-x^2}}_{>0}(2x^2-1)$$

$2x^2=1 \quad x^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x)\geq 0 \iff 2x^2-1\geq 0 \iff x\leq -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x\geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

f''



f è convessa in $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ p.ti di flesso, $\quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-1/2}$

- $f(x) = x^3-3x$

dom $f=\mathbb{R}$ $\quad f(0)=0$

$f(x)=0 \qquad x^3-3x=0 \quad x(x^2-3)=0 \quad x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

$(0,0)\quad(-\sqrt{3},0)\quad(\sqrt{3},0)$

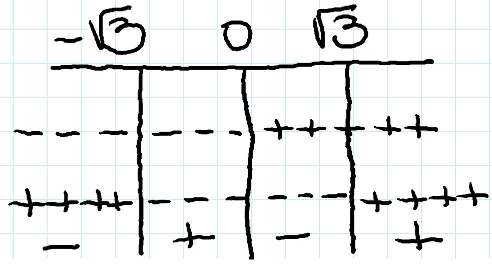
$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=$
$$=-(x^3-3x)=-f(x)$$

f è dispari $\Rightarrow$ graf f simmetrico rispetto all'orig.

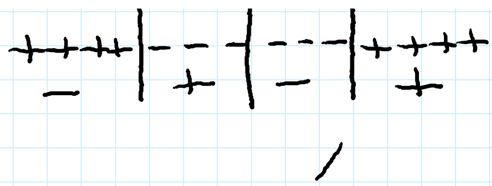
$f(x)>0 \qquad x(x^2-3)>0$

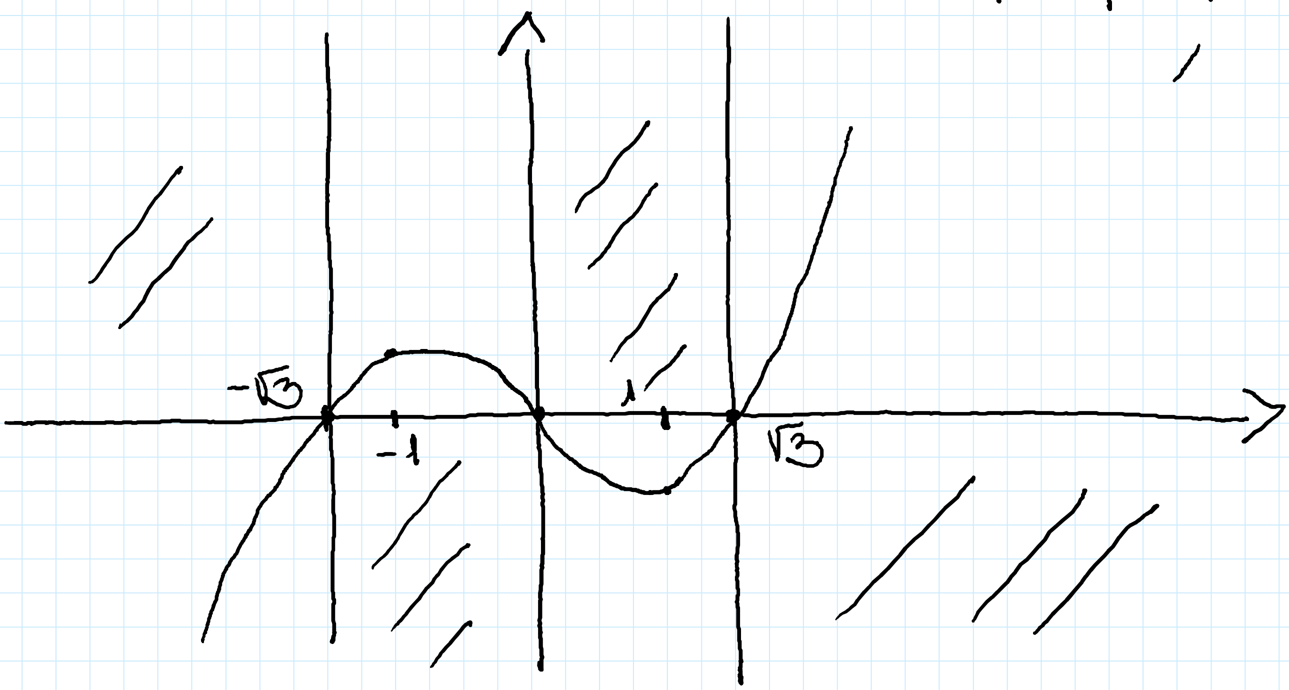
$x>0$

$x^2-3>0 \quad x<-\sqrt{3} \quad x>\sqrt{3}$



$x^2-3>0 \quad x<-\sqrt{3} \quad x>\sqrt{3}$





Limiti significativi : $\pm\infty$

$x \to \pm\infty \quad f(x) \sim x^3$

$x \to -\infty \quad f(x) \to -\infty$

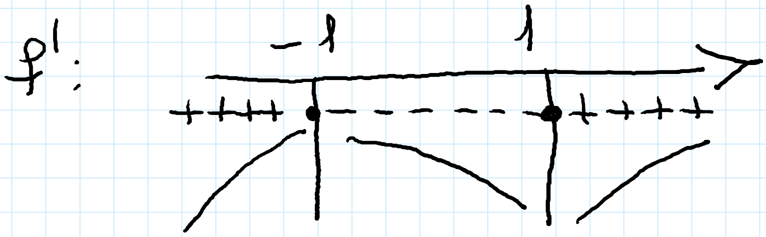
$x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty$

As. obliqui? NO $\quad \dfrac{f(x)}{x} \sim \dfrac{x^3}{x} \sim x^2 \to +\infty$

Derivata prima : $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2-3 = 3(x^2-1)$

$f'(x) \geq 0 \iff x^2-1 \geq 0 \iff x \leq -1,\ x \geq 1$



$x=-1$ pto di massimo relativo $\quad f(-1)=-1+3=2$

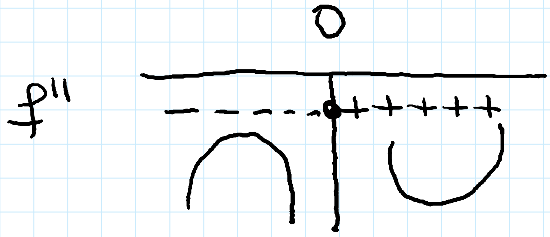
$x=1$ " " minimo " $\quad f(1)=-2$

Derivata seconda : $\forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) \geq 0 \iff x \geq 0$

$x=0$ p.to di flesso



Analisi Matematica - 9.4.2019 - terza parte

Tuesday, April 9, 2019 13:35

Come verificare che una funzione è derivabile in un punto?

1. definizione
2. teoremi di derivazione } visti
3. Altro metodo: limite della derivata

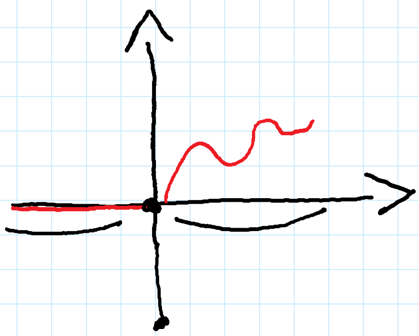
<u>Teorema</u>: $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ - f continua in (a,b) e derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$. Se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora esiste $f'(x_0) = m$.

Esempi:

$$f(x) = \begin{cases} x \log_e x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

In $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \underset{f=0}{=} 0 = f(0) \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \log_e x = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f$ è continua in $x = 0$

f è continua in $\mathbb{R}$

Derivabilità:

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \log_e x + x \cdot \frac{1}{x} = \log_e x + 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

In $x = 0$, per vedere se f è derivabile applico il teo. prec.

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \underset{f=0}{\underset{\Downarrow}{0}}, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (\log x + 1) = -\infty$$

Non esiste $f'(0)$ $\Rightarrow$ f non è der. in x_0

OSS: Analogo risultato vale per lim. destro o sinistro in x_0

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

Limiti di funzioni

Studiare gli asintoti di:

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{\sqrt{x}/(2-x)}$$

$$\text{dom } f : \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x\neq 0 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{dom } f = (0,2) \cup (2,+\infty) = (0,+\infty) \setminus \{2\}$$

Limiti significativi: $0, 2, +\infty$

$$x \to 0^+ \quad \left.\begin{array}{l} e^{\frac{\sqrt{x}}{2-x}} \to e^0 = 1 \\ \frac{1}{x} \to \left[\frac{1}{0_{>0}}\right] \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \to +\infty$$

$x = 0$ as. verticale

$$x \to 2 \quad \frac{1}{x} \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2-x} \to \left[\frac{\sqrt{2}}{0}\right]$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2-x} \to \left[\frac{\sqrt{2}}{0}\right]$$

$x \to 2^+$ $\quad \frac{\sqrt{x}}{2-x} \to \left[\frac{\sqrt{2}}{0}\right] -\infty \Rightarrow e^{\frac{\sqrt{x}}{2-x}} \to 0$

$$f(x) \to \left[\frac{1}{2} \cdot \overset{\to 0}{0}\right] 0$$

$x \to 2^-$ $\quad \frac{\sqrt{x}}{2-x} \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{\sqrt{x}}{2-x}} \to +\infty$

$$f(x) \to \left[\frac{1}{2}(+\infty)\right] +\infty$$

$x = 2$ asintoto verticale $x \to 2^-$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$x \to +\infty$ $\quad \frac{1}{x} \to 0$

$$\frac{\sqrt{x}}{2-x} \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{-x} = -\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \to 0$$

$$e^{\frac{\sqrt{x}}{2-x}} \to e^0 = 1$$

$$f(x) \to 0 \cdot 1 = 0$$

$y = 0$ as. orizzontale