Analisi Matematica - 22.3.2019 - prima parte

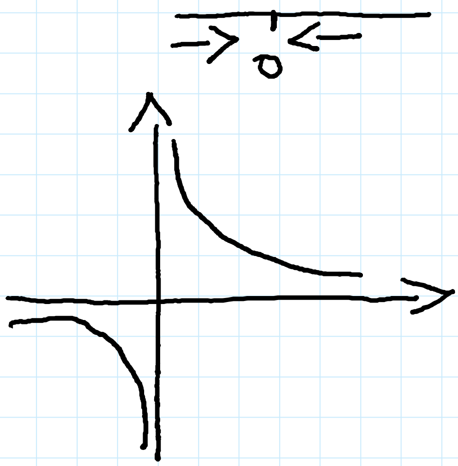
Limiti di funzioni

3) $c \in \mathbb{R}$ $\ell = \pm\infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Talvolta se $c \in \mathbb{R}$, il comportamento di f cambia a seconda che ci si avvicini a c da destra oppure da sinistra.

Esempio : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$



Se prendo $x_n = \frac{1}{n}$ $x_n \to 0$

$x_n > 0$

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$$

Se prendo $x_n = -\frac{1}{n}$ $x_n \to 0$, $x_n < 0$

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -n \to -\infty$$

Questo ci dice che non esiste $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

Per descrivere questo tipo di situazioni si introduce il concetto di limite destro e limite sinistro.

Def : Sia $c \in \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : I \setminus \{c\}$. Si dice che il limite destro (sinistro) di f per x che tende a c è ℓ e si scrive

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell \quad \left(\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell \right)$$

se $\forall \{x_n\}$ tale che

$$\begin{array}{l} x_n \in I \\ \to x_n > c \\ x_n \to c \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} x_n \in I \\ \to x_n < c \\ x_n \to c \end{array} \right) \quad \leftarrow \text{SUCC. TEST}$$

si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell .$$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\downarrow$ Analogo

Sia x_n :

$x_n \neq 0$

$\to x_n > 0$

$x_n \to 0$

Provo che $\frac{1}{x_n} \to +\infty$:

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{x_n} \geq M$ def.

Se $M \leq 0$ $\quad \underbrace{\frac{1}{x_n}}_{>0} \geq M$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Se $M > 0$ $\quad \frac{1}{x_n} \geq M \iff \underbrace{x_n \leq \frac{1}{M}}$ def

vera perché $x_n \to 0$

def. di lim con $\varepsilon = \frac{1}{M}$

Relazione tra lim. lim. dx e lim. sx.

<u>Teorema</u> Sia f come nella def. precedente. Allora sono equiv.:

a) esiste $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$;

b) esistono $\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell = \lim_{x \to c^-} f(x)$.

<u>Def</u>: Si dice che $f(x)$ ha un asintoto verticale di eq. $x = c$ $(c \in \mathbb{R})$ per $x \to c^+$ $(o\ x \to c^-)$ se

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \left(\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty\right).$$

- $\frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$ ha come asintoto verticale $x = 0$.

- $\frac{1}{x^2}$ per $x \to 0$ $x = 0$ è un as. vert. di $\frac{1}{x^2}$.

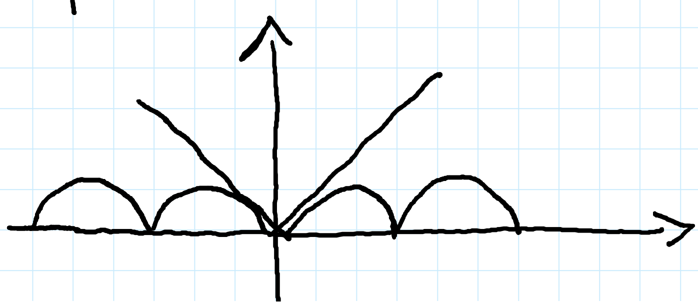
4) $c \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ (limite finito al finito)

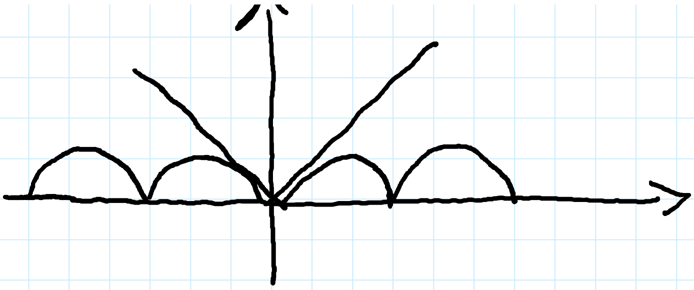
Esempio: $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$:

$$\forall \{x_n\} : \left.\begin{array}{l} x_n \in \mathbb{R}, \\ x_n \neq 0 \\ x_n \to 0 \end{array}\right\} \text{ succ. test.}$$

Provo che $\operatorname{sen} x_n \to 0$:

Si prova che $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq |x|$





Allora $\quad 0 \le |\operatorname{sen} x_n| \le |x_n|$

$\quad\quad 0 \downarrow 0 \qquad |x_n| \downarrow 0$ (poiché $x_n \to 0$)

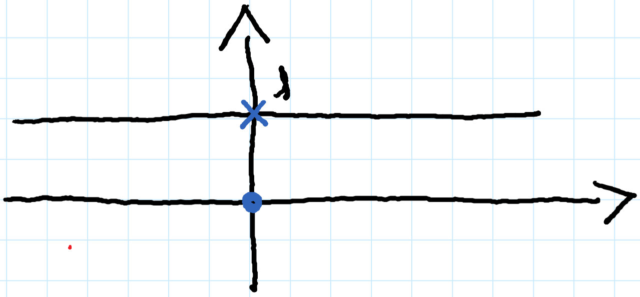
Quindi: $|\operatorname{sen} x_n| \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x_n \to 0$.

Oss: In questo caso il valore del limite coincide con il valore di sen x in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0.$$

Ma non è sempre così:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq \underset{\overset{\|}{0}}{f(0)}$$



$\forall \{x_n\}$ succ. t.c. $x_n \to 0$ e $x_n \neq 0 \Rightarrow$

$\forall n \quad f(x_n) = 1 \longrightarrow 1$

<u>Def</u>: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Si dice che **f è continua in c** se esiste

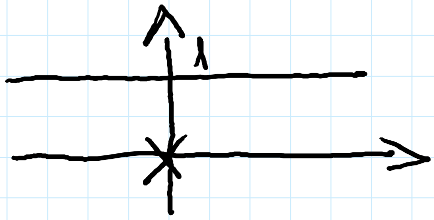
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Si dice che f è continua in I se f è continua in c per ogni $c \in I$.

Se f non è continua in $c \in I$ si dice che f è discontinua in c.

Esempi:

- $f(x) = \operatorname{sen} x$ è continua in $x=0$.
- La f dell'esempio precedente è discontinua in $c=0$.



<u>Teorema</u> Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.

Quindi per calc. i limiti nei punti c del dominio basta calcolare $f(c)$.

- $f(x) = \log x \qquad x \in (0,+\infty)$

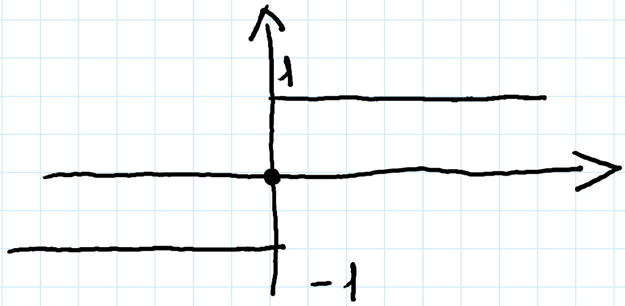
$\forall c \in (0,+\infty) \quad \lim_{x \to c} \log x = \log c$

Quanto vale $\lim_{x \to 0} f(x)$? Vedremo....

" " $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?

Esempio di funzione discontinua in $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$x_n \to 0,\ x_n > 0 \Rightarrow f(x_n) = 1 \to 1$

$x_n \to 0\ \ x_n < 0 \Rightarrow f(x_n) = -1 \to -1$

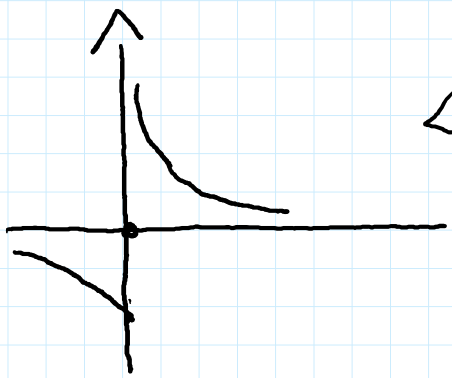
$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\Rightarrow$ non esiste $\lim_{x \to 0} f(x)$

<u>Def</u>: $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Si dice che f ha una discontinuità a SALTO in $x = c$ se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$$

e $\ell_1 \neq \ell_2$.



$\Leftarrow$ Altro tipo di discontinuità

Utilità delle funzioni continue:

Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Devo calcolare $f(\pi)$ (supp. che $\pi \in I$) o in generale $f(c)$ con $c \in I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ (c qualunque).

Se f è continua posso calcolare f in un valore qualunque "vicino" a c e l'errore che commetterò sarà "piccolo".

Invece che $f(\pi)$ calcolo $f(3.14)$.

OSS: Il limite di una funzione non è detto che esista. Per esempio non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$$

Esistono due succ. test:

$$x_n = n\pi \to +\infty$$

$$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$$

tali che

$$\operatorname{sen} x_n = \operatorname{sen} n\pi = 0 \to 0$$

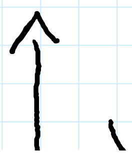
$$\operatorname{sen} y_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$$

quindi il lim non può esistere perché altrimenti $\operatorname{sen} x_n$, per ogni succ. test $\{x_n\}$, dovrebbe convergere allo stesso valore.

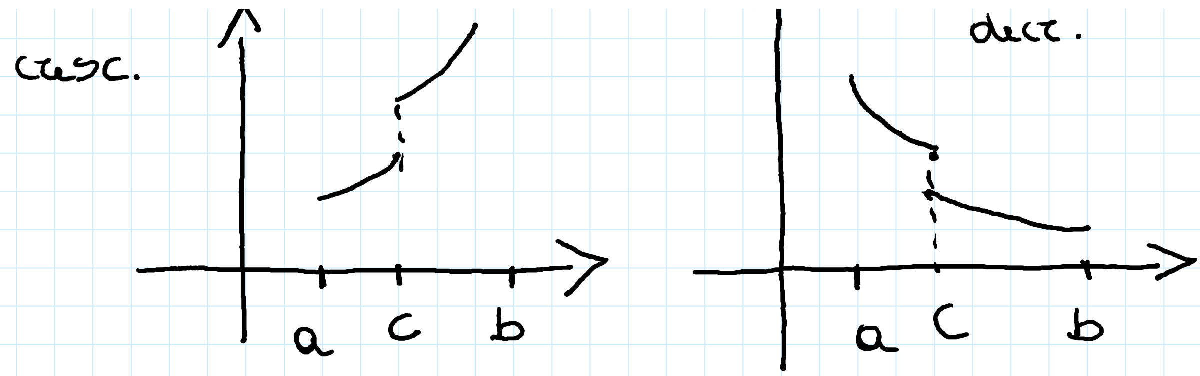
Limiti delle funzioni monotone

Le funzioni monotone ammettono sempre limite destro e sinistro in ogni punto in cui ha senso calcolarlo.

cresc.



decr.



<u>Teorema</u>: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ monotona crescente (risp. monotona decrescente). Allora $\forall c\in(a,b)$ esistono finiti

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup_{(a,c)} f \qquad \left(\lim_{x\to c^-} f(x) = \inf_{(a,c)} f\right.$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf_{(c,b)} f \qquad \left.\lim_{x\to c^+} f(x) = \sup_{(c,b)} f\right)$$

In $x = a$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f \qquad \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup_{(a,b)} f\right)$$

In $x = b$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f \qquad \left(\lim_{x\to b^-} f(x) = \inf_{(a,b)} f\right)$$

oss: Gli ultimi due limiti ($x\to a$ o $x\to b$) possono essere infiniti, gli altri no.

Limiti delle funzioni elementari

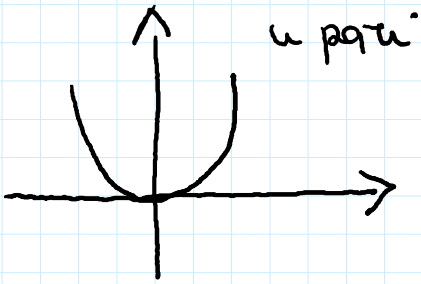
Se f è una funzione elementare:

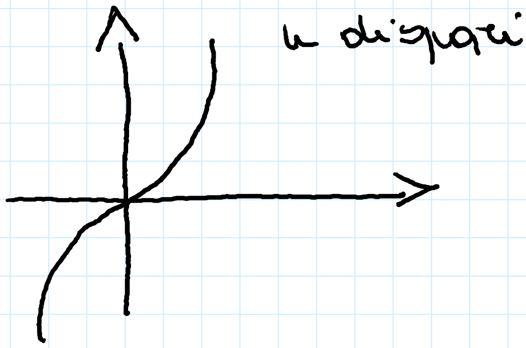
$$\forall c\in \operatorname{dom} f \quad \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

(per il teo. sulla continuità)

Usiamo il teo. di monotonia per eventuali punti che non appartengono a dom f, ma in cui ha senso calc. il limite di f.

Funzioni potenza : $f(x) = x^n \qquad x \in \mathbb{R}$

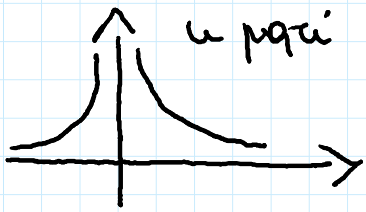




$$\lim_{x \to +\infty} x^n \underset{\substack{\downarrow \\ f \text{ crescente} \\ \text{in } [0,+\infty)}}{=} \sup_{[0,+\infty)} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \sup\limits_{(-\infty,0)} x^n = +\infty & \text{se } n \text{ pari} \\ \inf\limits_{\mathbb{R}} x^n = -\infty & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

• $f(x) = \frac{1}{x^n}$:



$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \text{non esiste} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

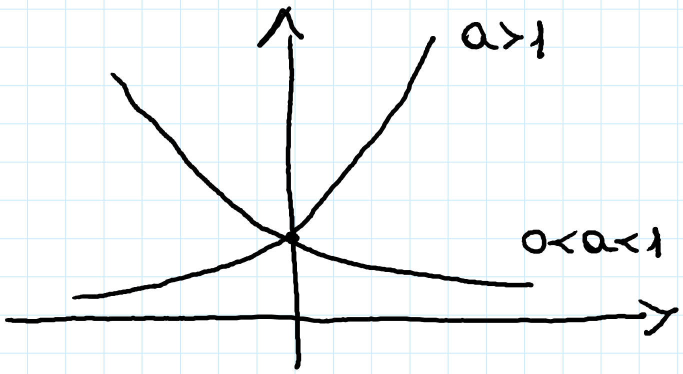
$\lim \ \frac{1}{\ } = -\infty$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

Funzione esponenziale

$f(x) = a^x \qquad x \in \mathbb{R}$



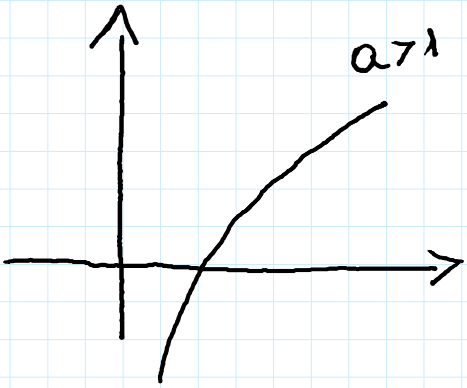
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} \inf_{\mathbb{R}} a^x = 0 & \text{se } a>1, \\ \sup_{\mathbb{R}} a^x = +\infty & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

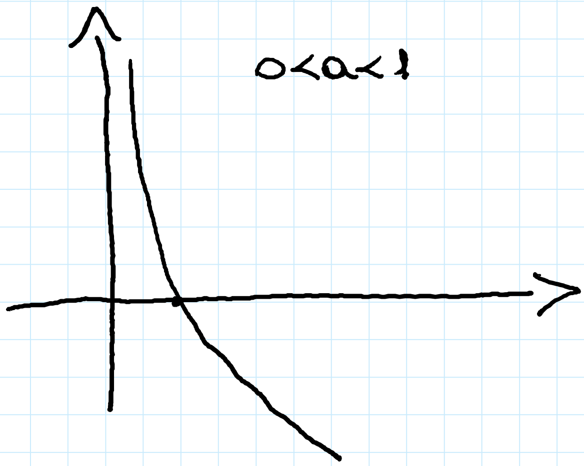
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} \sup_{\mathbb{R}} a^x = +\infty & \text{se } a>1, \\ \inf_{\mathbb{R}} a^x = 0 & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

Analisi Matematica - 22.3.2019 - terza parte

Funzione logaritmo: $f(x) = \log_a x \qquad x \in (0,+\infty)$

$C=0 \qquad C=+\infty$





$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} \inf_{(0,+\infty)} f = -\infty & \text{se } a>1 \\ \sup_{(0,+\infty)} f = +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} \sup_{(0,+\infty)} f = +\infty & \text{se } a>1 \\ \inf_{(0,+\infty)} f = -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

Funzioni trigonometriche e loro inverse

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

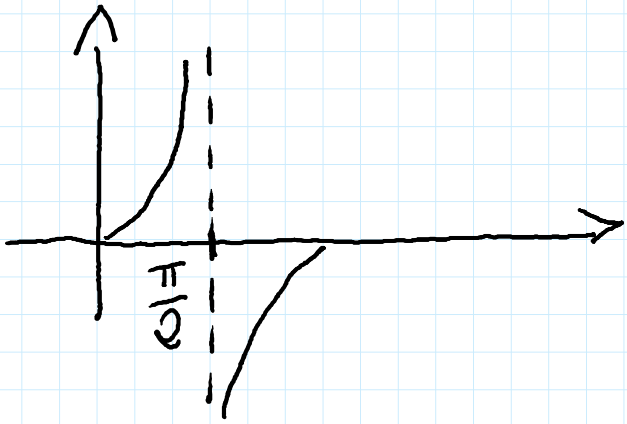
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\pm\infty} \cos x \\ \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x \end{array}\right\} \text{Non esistono}$$

Si dimostra che ogni funzione periodica, non costante non ammette limite a $+\infty$ e a $-\infty$.

$tg_c : D \to \mathbb{R} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

tg_c è π-periodica $\Rightarrow$ non esiste $\lim_{x \to \pm\infty} tg_c\, x$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg_c\, x = +\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tg_c\, x = -\infty$

Dalla periodicità si ricavano i valori del limite in $c = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

$\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

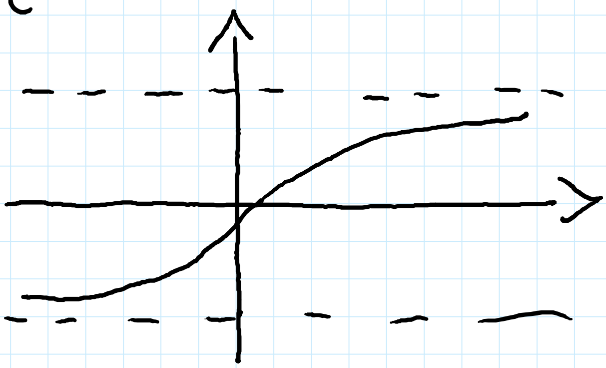
$\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$\forall c \in [-1, 1] \quad \lim_{x \to c} \arccos x = \arccos c$

$\qquad\qquad\qquad\quad$ " $\quad \mathrm{arcsen}\, x = \mathrm{arcsen}\, c$

- $\mathrm{arctg}_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}\ \mathrm{arctg}_c = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

arctg_c è strett. crescente



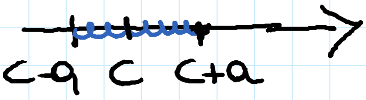
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Proprietà dei limiti di funzioni

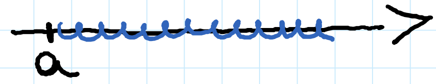
Sia $c \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Def: Un INTORNO di c è un insieme del tipo

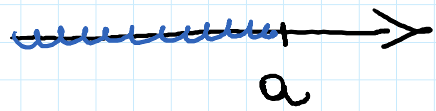
$I = (c-a, c+a)$ se $c \in \mathbb{R}$
con $a > 0$



$I = (a, +\infty)$ se $c = +\infty$
con $a \in \mathbb{R}$



$I = (-\infty, a)$ se $c = -\infty$
con $a \in \mathbb{R}$



Def: Una proprietà $P(x)$ è verificata definitivamente per $x \to c$ se esiste I intorno di c tale che $P(x)$ è vera $\forall x \in I \setminus \{c\}$.

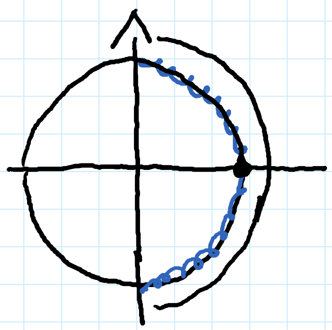
Esempi:

- $x^2 - 1 > 0$ definitivamente per $x \to +\infty$

  $x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ o $x > 1$

  esiste $I = (1, +\infty)$ t.c. $x^2 - 1 > 0 \ \forall x \in I$

- $\cos x > 0$ definitivamente per $x \to 0$



esiste $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c.
$\forall x \in I \setminus \{0\} \ \cos x > 0$

Teoremi di confronto:

Caso a due funzioni

<u>Teorema</u>: Siano f e g funzioni definite in $I \setminus \{c\}$, con I intorno di c, $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Se

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definit. per } x \to c$$

allora

1. $f(x) \to +\infty$ per $x \to c$ $\Rightarrow$ $g(x) \to +\infty$ per $x \to c$
2. $g(x) \to -\infty$ " $\Rightarrow$ $f(x) \to -\infty$ "

Caso a tre funzioni

<u>Teorema</u> Siano f, g, h funzioni def in $I \setminus \{c\}$ con I intorno di c, $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Se

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definit. per $x \to c$
2. esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \to c} h(x) = \ell$$

allora

$$\lim_{x \to c} g(x) = \ell.$$