Analisi Matematica - 29.4.2019 - prima parte

Formula di Taylor

Già visto:

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$ f derivabile in x_0

$T(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ retta tg. a f in x_0

- $f(x)-T(x)\to 0$ $x\to x_0$ (per la cont. di f e T)
- $f(x)-T(x)=o(x-x_0)$ $x\to x_0$ (differenz. di f)

Vogliamo generalizzare a funzioni derivabili n volte in x_0.

Esiste un polinomio di grado n che approssima "meglio" la funzione f?

Primo passo: esiste un unico polinomio T_n le cui derivate in x_0 coincidono con quelle di f in x_0 fino all'ordine n.

<u>Teorema</u>: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, f derivabile n volte in x_0. Allora esiste un unico polinomio di grado $\leq n$, $T_{n,x_0}(x)$, tale che

$$T^{(k)}_{n,x_0}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\quad\forall k=0,\dots,n$$

Tale polinomio è dato da

$$T_{n,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\qquad(1)$$

(1) si chiama Polinomio di Taylor di f di grado n e centro x_0.

Se $x_0=0$ $T_{n,0}(x)$: polinomio di McLaurin di grado n

<u>Oss</u>: Se $n=1$:

$$T_{1,x_0}(x)=\frac{\overbrace{f^{(0)}(x_0)}^{=f(x_0)}}{0!}\overbrace{(x-x_0)^0}^{=1}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)$$

$$=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{retta tg a } f \text{ in } x_0}$$

<u>Dim</u>: $x_0=0$, $n=2$

Sia $T_2(x)$ un generico polinomio di grado 2

$$T_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Si vuole che

$$T_2(0) = f(0) \quad (1)$$
$$T_2'(0) = f'(0) \quad (2)$$
$$T_2''(0) = f''(0) \quad (3)$$

$(1) \Leftrightarrow \quad f(0) = a_0$

$T_2'(x) = 2a_2 x + a_1$

$(2) \Leftrightarrow \quad f'(0) = a_1$

$T_2''(x) = 2a_2$

$(3) \Leftrightarrow \quad f''(0) = 2a_2 \Leftrightarrow a_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$

Quindi:

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2$$

In generale se $n > 2$ e $x_0 = 0$ $\quad a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Esempio: scrivere il pol. di Taylor di grado 3 e centro 0 di $f(x) = \arctg x$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad f''(0) = 0$

$$f'''(x) = -2 \frac{(1+x^2)^2 - x\, 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}$$

$$f'''(0) = -2 \frac{1-0}{1} = -2$$

$$T_3(x) = 1 \cdot x - \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3!}\, x^3 = x - \frac{x^3}{3}$$

Secondo passo: Il polinomio di Taylor approssima "bene" f vicino ad x_0

Teorema: $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$. Allora $\forall x \in (a,b)$

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{resto}} \quad \text{per } x \to x_0$$

(formula di Taylor con resto di PEANO

Dim: $n = 2$. Devo provare che

$$f(x) - T_{2,x_0}(x) = o((x-x_0)^2) \qquad x \to x_0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\overset{\to f(x_0)}{f(x)} - \left[f(x_0) + f'(x_0)\overset{\to 0}{(x-x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2}\overset{\to 0}{(x-x_0)^2}\right]}{\underset{\to 0}{(x-x_0)^2}} = 0$$

Forma $\frac{0}{0}$. Applico il Teo. di De L'Hopital: Vedo se esiste il lim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \left[f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{\cancel{2}}\cancel{2}(x-x_0)\right]}{2(x-x_0)} \qquad (2)$$

Ma il limite di sopra fa 0:

f è der. 2 volte in $x_0 \Rightarrow f'$ è deriv. in $x_0 \Rightarrow$ f' è differenziabile in $x_0 \Rightarrow \forall x \in (a,b)$

$$f'(x) = \underbrace{f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0)}_{} + o(x-x_0) \quad x \to x_0$$

retta tg a f' in x_0

Posso allora riscrivere (2) come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(x-x_0)}{2(x-x_0)} = 0$$

per def. di "o piccolo".

Funzioni elementari: si possono scrivere le formule di Taylor relative

Esempio: $f(x) = e^x \quad x_0 = 0$ (formula di Mac Laurin)

$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k = 0, \dots n \Rightarrow$

$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$$T_{n,0}(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

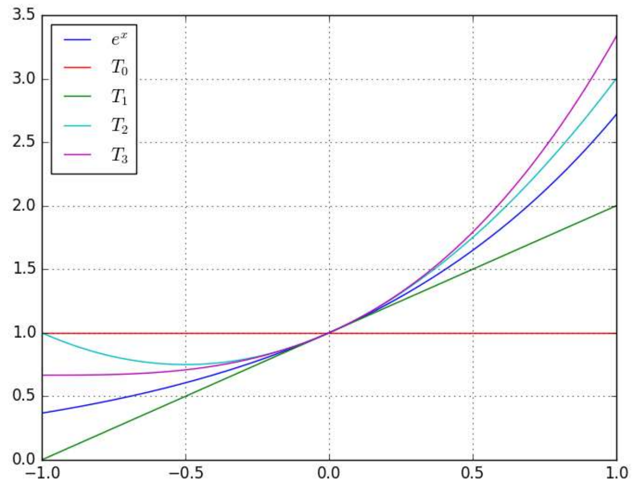
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

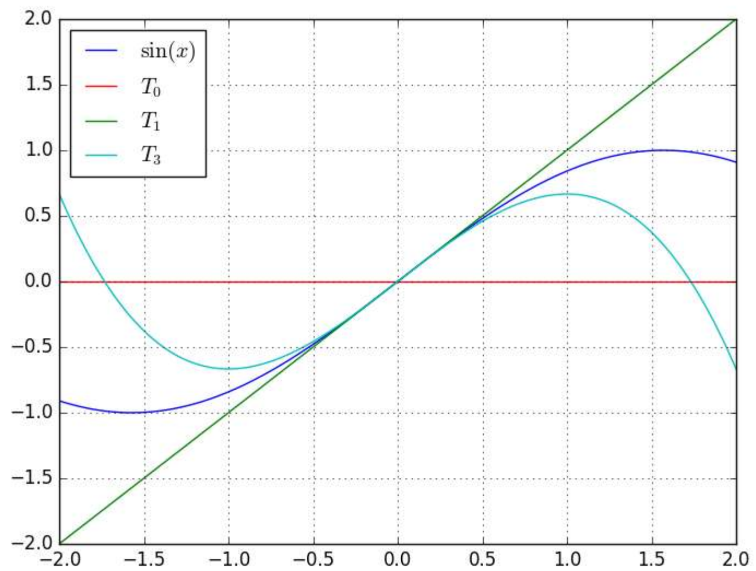
Formule di Mac Laurin:

Per $x \to 0$:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$;
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

Polinomi di Taylor per e^x e $\operatorname{sen} x$:


e^x
T_0
T_1
T_2
T_3
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


$\sin(x)$
T_0
T_1
T_3
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Applicazioni della formula di Taylor al calcolo di limiti -

- $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$

Forma $\frac{0}{0}$, l'asintoticità non è applicabile:

$$\left.\begin{array}{l} -\operatorname{sen} x \sim -x \\ x \sim x \end{array}\right\} \quad x - x = 0$$

$$f(x) \sim g(x) \quad x \to x_0 \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$

$$\operatorname{sen} x = x + o(x) \quad x \to 0$$

Uso la formula di Taylor di ordine 3

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \to 0$$

$$x - \operatorname{sen} x = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \longrightarrow -o(x^3) = o(x^3)$$

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3!} + \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{\to 0 \text{ def. di o piccolo}} \longrightarrow \frac{1}{3!} + 0 = \frac{1}{6}$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - x \operatorname{sen} x}{x^3 \log(1+x)} = \ell$

Stessa st. del lim. precedente: $\frac{0}{0}$

$$2(1-\cos x) \sim 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 = x^2 \quad x \to 0$$

$$x \operatorname{sen} x \sim x^2$$

Uso la formula di Taylor

$$1 - \cos x = 1 - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right]$$

$$1-\cos x = 1-\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]$$
$$= +\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$
$$2(1-\cos x) = x^2-2\frac{x^4}{4!}+o(x^4) = x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$
$$x \operatorname{sen} x = x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right) = x^2-\frac{x^4}{6}+x\,o(x^3)$$
$$\left[x\,o(x^3) = o(x^4) :\quad x\,o(x^3) = x\,\underset{\downarrow 0}{\omega(x)}\cdot x^3 = \omega(x)x^4\right]$$
$$= x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$$
$$2(1-\cos x)-x\operatorname{sen} x = \cancel{x^2}-\frac{1}{12}x^4-\cancel{x^2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)$$
$$= \frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$
$$\log(1+x) = x+o(x) \Rightarrow x^3\log(1+x) = x^3(x+o(x)) \Rightarrow$$
$$x^3\log(1+x) = x^4+x^3o(x) = x^4+o(x^4)$$
$$\ell = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{12}+\overset{\to 0}{\frac{o(x^4)}{x^4}}\right)}{\cancel{x^4}\left(1+\underset{\downarrow 0}{\frac{o(x^4)}{x^4}}\right)} = \frac{1}{12}$$

Formula di Taylor con resto di Lagrange

La formula di Taylor con resto di Peano non dice nulla sulla forma del resto.

<u>Teo</u>: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $n+1$ derivabile in (a,b). Sia $x_0\in(a,b)$. Allora $\forall x\in(a,b)$ esiste $c\in(a,b)$

compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = \underbrace{T_{n,x_0}(x)}_{\text{pol. di Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{resto secondo Lagrange}}$$

- c dipende da x_0, x, n
- Se $n=0$ si ottiene il teo. di Lagrange.

Applicazioni: calcolo approssimato di numeri irrazionali.

$\sqrt{e} = e^{1/2}$

$f(x) = e^x \qquad \sqrt{e} = f(\frac{1}{2})$

Applico il teo. precedente: $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $n = 3$

$\exists c \in [0, \frac{1}{2}]$ t.c

$$\sqrt{e} = f(\tfrac{1}{2}) = T_3(\tfrac{1}{2}) + \frac{e^c}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

ove $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \qquad T_3(\frac{1}{2}) = \frac{79}{48}$

Se approssimo $\sqrt{e}$ con $\frac{79}{48}$ l'errore che commetto è

$$\sqrt{e} - \frac{79}{48} = \frac{e^c}{4!}\frac{1}{2^4} \underset{\star}{\leq} \frac{\sqrt{3}}{4!\,2^4} \sim 0.0045$$

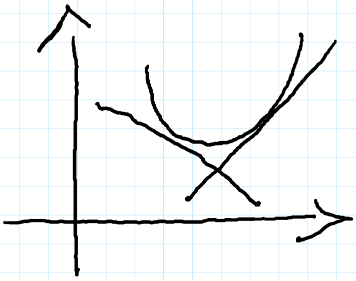
$$0 < c < \frac{1}{2} \Rightarrow e^c < e^{\frac{1}{2}} \underset{e \leq 2}{\leq} 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

Altra applicazione: convessità e rette tangenti

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$, f derivabile 2 volte in $(a,b) \Rightarrow$

$\forall\, x, x_0 \in (a,b) \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$\forall x_0 \in (a,b) \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$



Dim: Formula di Taylor con resto di Lagrange per $n = 1$

$\forall x_0, x \in (a,b) \ \exists\, c$ compr. tra x_0 e x tale che

$$f(x) = T_{1,x_0}(x) + \underbrace{\frac{f''(c)}{2!}}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(perché } f \text{ è} \\ \text{convessa} \\ f''(x) \geq 0)}} \underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0} \geq T_{1,x_0}(x)$$

$$\geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$