

Esercizio 2.1

1) Determinare una grammatica che genera il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

e dimostrare questo risultato.

2) Che tipo di grammatica genera L ?

1) $G = (X, V, S, P)$

$$X = \{a, b\}, \quad V = \{S\}, \quad P = \left\{ S \xrightarrow{(1)} aSb, S \xrightarrow{(2)} ab \right\}$$

Dobbiamo dimostrare che $L = L(G)$.

i) $L(G) \subset L$

Sia w una stringa derivabile da S (in G).

$$w \in L(G) \stackrel{\text{def}}{\iff} S \xRightarrow{*} w, \quad w \in X^*$$

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della derivazione* di w da S . Denoto con n la lunghezza della derivazione di w da S .

Passo base

$n = 1$

$S \xRightarrow[(2)]{n} ab$ è l'unica derivazione di lunghezza $n = 1$ che genera stringhe di soli terminali.

È immediato verificare che $ab \in L$.

Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni $n > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\begin{aligned} \text{“se } w' \in L(G), S \xRightarrow{n-1} w' \text{ (} w' \text{ è derivabile in } n-1 \text{ passi da } S) \\ \text{allora } w' \in L \text{”} \end{aligned}$$

allora anche l'enunciato:

$$\text{“se } w \in L(G), S \xRightarrow{n} w \text{ allora } w \in L \text{”}$$

risulta vero.

Consideriamo:

$$w \in L(G), \text{ con } S \xRightarrow{n} w.$$

Per definizione (di derivabilità in n passi), esiste una sequenza di forme di frase w_1, w_2, \dots, w_n con $w_n = w$, tale che w_1 deriva direttamente da S e, per ogni i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), w_{i+1} deriva direttamente da w_i .

$$S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n = w$$

È immediato osservare che il primo passo della derivazione è dato dalla applicazione della produzione (1) di G (altrimenti otterremmo la stringa ab , priva di nonterminali ed avremmo finito. Ma allora $n = 1$).

Si ha dunque:

$$S \xRightarrow[(1)]{n-1} aSb \Rightarrow w_n = w$$

Per ipotesi di induzione, ogni stringa derivabile da S in $n-1$ passi è una parola di L . Dunque, da S è possibile derivare in $n-1$ passi una stringa del tipo: $w' = a^k b^k$, $k > 0$.

Più precisamente, $w' = a^{n-1} b^{n-1}$, poiché:

$$S \xRightarrow[(1)]{k} a^k S b^k, \quad k > 0.$$

Ma allora la stringa:

$$aw'b = aa^{n-1} b^{n-1} b = a^n b^n$$

è ancora una stringa di L ed inoltre è derivabile da S in n passi.

Si ha, infatti:

$$S \xRightarrow[(1)]{n-1} aSb \Rightarrow aw'b = a^n b^n = w$$

Risulta così dimostrato $L(G) \subset L$.

ii) $L \subset L(G)$

Sia w una parola di L . Procediamo *per induzione sulla lunghezza della stringa* w .

Passo base

Prendiamo in considerazione la parola di L di lunghezza minima.

$$n = 1 \Leftrightarrow |w| = 2 \quad w = ab$$

Dobbiamo dimostrare che: $S \xRightarrow{*} ab$.

Banale. Applichiamo la produzione (2) di G ed otteniamo che $w = ab$ è direttamente derivabile da S .

$$S \xRightarrow[(2)]{} ab$$

Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni $n > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\text{“se } w' \in L, |w'| = 2(n-1) \text{ allora } S \xRightarrow{*} w' \text{”}$$

allora anche il seguente enunciato:

$$\text{“se } w \in L, |w| = 2n \text{ allora } S \xRightarrow{*} w \text{”}$$

risulta vero.

Sia w una parola su X tale che:

$$w \in L, |w| = 2n, n > 1.$$

Ovviamente, $w = a^n b^n$ (unica parola di L di lunghezza $2n$). Nella (ipotetica) derivazione di w da S , devo necessariamente applicare la produzione (1) di G , come 1° passo (altrimenti riottenerei la parola ab).

Dunque:

$$S \xRightarrow{(1)} aSb \quad (a)$$

Per ipotesi di induzione, ogni parola di L di lunghezza $2(n-1)$ è derivabile da S (in G).

Dunque, anche $w' = a^{n-1}b^{n-1}$ è derivabile da S :

$$S \xRightarrow{*} w' = a^{n-1}b^{n-1} \quad (b)$$

Ne consegue che $w = a^n b^n$ è derivabile da S e la relativa derivazione è ottenuta applicando in successione (a) e (b).

$$S \xRightarrow{(1)} aSb \xRightarrow{*} aw'b = \underbrace{aa^{n-1}}_{(a)} \underbrace{b^{n-1}b}_{(b)} = w$$

Dunque, $L \subset L(G)$ e

$$L = L(G)$$

2) G è una grammatica libera da contesto.