Capitolo 16

Primitive e tecniche di integrazione

16.1 Primitive ed integrale indefinito

Definizione 16.1 *Assegnata una funzione $f : A \to \mathbf{R}$, si definisce primitiva di f una qualunque funzione $F : A \to \mathbf{R}$ derivabile, tale che $F'(x) = f(x)$.*

Lemma 16.2 *Se F è una primitiva di f, allora per ogni $c \in \mathbf{R}$ anche la funzione $G(x) = F(x) + c$ è una primitiva di f.*

Dimostrazione. Immediata ■

Dal semplicissimo lemma si deduce che se esiste una primitiva di f, allora ne esistono infinite, per cui ha senso la definizione seguente.

Definizione 16.3 *Si definisce* integrale indefinito *di f l'insieme di tutte le primitive di f. Tale insieme si denota con il simbolo*

$$\int f(x)dx.$$

L'origine del simbolo di integrale verrà illustrata nel capitolo seguente. Ricordiamo che, in generale, la funzione che compare all'interno del simbolo di integrale si dice *funzione integranda*.

L'integrale indefinito assume una struttura ben definita nel caso di funzioni definite su un intervallo. Premettiamo un lemma di grande importanza.

Lemma 16.4 *Se la funzione f è definita su un intervallo, allora due qualsiasi primitive di f differiscono tra loro per una costante.*

Dimostrazione. Siano F_1 ed F_2 primitive di f. .... ■

Dal Lemma 16.4 si deduce la *formula di struttura dell'integrale indefinito*: se f è definita su intervallo ed ammette una primitiva F, si può scrivere

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c, c \in \mathbf{R}\} \tag{16.1}$$

Infatti, in base al Lemma 16.2, avevamo che

$$F(x) + c \in \int f(x)dx.$$

Il Lemma 16.4 ci assicura del viceversa: ogni $G \in \int f(x)dx$ può essere scritta nella forma $F(x) + c$. Da ciò si deduce la formula (16.1).

In realtà quasi nessuno usa la scrittura (16.1), si preferisce scrivere semplicemente:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Dunque calcolare un integrale indefinito non vuol dire altro che determinare una primitiva della funzione integranda (a cui andremo ad aggiungere una costante arbitraria).

Vogliamo ribadire che, se non siamo su un intervallo, non è affatto detto che due primitive differiscano per una costante. Quindi le precedenti scritture non sono valide, oppure si intendono riferite ad un singolo intervallo.

Dobbiamo osservare, infine, che possono verificarsi situazioni apparentemente paradossali. Ad esempio le scritture

$$\begin{aligned}
\int \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2}\sin^2 x + c \\
\int \sin x \cos x \, dx &= -\frac{1}{2}\cos^2 x + c
\end{aligned}$$

sono entrambe corrette. Infatti

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{1}{2}\sin^2 x \\
F_2(x) &= -\frac{1}{2}\cos^2 x
\end{aligned}$$

sono entrambe primitive di $f(x) = \sin x \cos x$. Del resto F_1 ed F_2 differiscono per la costante $1/2$.

16.1.1 Esistenza e calcolo di primitive

Il Teorema fondamentale del Calcolo assicura l'esistenza di primitive per le funzioni continue. Come vedremo il suddetto teorema fornisce l'espressione di una primitiva, ma in pratica si tratta di una "ricetta" non utilizzabile nelle situazioni comuni.

In realtà la determinazione di una primitiva non è affatto un problema banale, anzi si può dimostrare che alcune funzioni elementari non ammettono una primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari. Il tipico esempio è la cosiddetta *funzione degli errori*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Diverse sono le tecniche utilizzabili per la determinazione di una primitiva e solo l'esperienza riesce a suggerire quale tecnica utilizzare, distinguendo tra funzioni integrande abbastanza simili tra loro.

Ad esempio, assegnati gli integrali

$$\int \cos^3 x \, dx,$$
$$\int \cos^4 x \, dx,$$

vedremo che il primo si calcola tipicamente per sostituzione, il secondo per parti.

Come ulteriore esempio abbiamo la funzione

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

apparentemente più complicata della funzione degli errori e che in realtà si integra in maniera immediata: una sua primitiva è data da

$$F(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}.$$

16.2 Integrali immediati

......

16.3 Integrazione per sostituzione

La regola di derivazione delle funzioni composte dà origine ad una regola di calcolo di primitive.

Proposizione 16.5 *Se la funzione f ammette come primitiva F, ossia*

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

allora, per ogni φ derivabile, la funzione

$$f(\varphi(x))\varphi'(x) \tag{16.2}$$

ammette come primitiva $F(\varphi(x))$, ossia

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + c \tag{16.3}$$

Infatti, se deriviamo ...

Esempio 16.6 *Vogliamo calcolare*

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx.$$

Se consideriamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ \varphi(x) &= e^x \end{aligned}$$

la funzione integranda si scrive nella forma (16.2)

$$\frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{e^{2x}+1}e^x = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Sappiamo inoltre che una primitiva di $f(x)$ è data da

$$F(x) = \arctan x$$

Pertanto, in base a (16.3), abbiamo

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \arctan e^x + c$$

In altri casi per ricondurci alla forma (16.2) è necessario moltiplicare e dividere per una costante.

Esempio 16.7 *Sappiamo che*

$$\int \underset{\underset{f(x)}{\uparrow}}{\cos x}\;\; dx = \underset{\underset{F(x)}{\uparrow}}{\sin x}\;\; + c$$

Vogliamo calcolare

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int \underset{\underset{f}{\uparrow}}{\cos}\,(\underset{\underset{\varphi(x)}{\uparrow}}{3x})\;\underset{\underset{\varphi'(x)}{\uparrow}}{3}\;\; dx = \frac{1}{3}\,\underset{\underset{F}{\uparrow}}{\sin}\,(\underset{\underset{\varphi(x)}{\uparrow}}{3x}) + c$$

Analogamente vogliamo calcolare

$$\int \cos(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \underset{\underset{f}{\uparrow}}{\cos}\,(\underset{\underset{\varphi(x)}{\uparrow}}{x^2})\;\underset{\underset{\varphi'(x)}{\uparrow}}{2x}\;\; dx = \frac{1}{2}\,\underset{\underset{F}{\uparrow}}{\sin}\,(\underset{\underset{\varphi(x)}{\uparrow}}{x^2}) + c$$

Nella pratica, il più delle volte, si opera al modo seguente.

Volendo calcolare

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx. \tag{16.4}$$

Si pone $t = \varphi(x)$. La funzione t è derivabile e si ha

$$\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$$

Quindi si scrive

$$dt = \varphi'(x)dx \tag{16.5}$$

Ora si va a sostituire "brutalmente" nell'integrale (16.4) e si ottiene

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Dobbiamo precisare che, al nostro livello di conoscenze, la formula (16.5) non ha alcun significato, si tratta solo di un espediente per agevolare l'applicazione della formula (16.3).

Esempio 16.8 (riprende 16.6) *Poniamo*

$$t = e^x,$$

da cui

$$dt = e^x dx.$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx &= \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c = \\ &= \arctan e^x + c\end{aligned}$$

Esempio 16.9 (riprende 16.7) *Poniamo*

$$t = x^2,$$

da cui

$$dt = 2x\, dx.$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\int \cos\left(x^2\right)\, x\, dx &= \frac{1}{2}\int \cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin t + c = \\ &= \frac{1}{2}\sin x^2 + c\end{aligned}$$

In linea di principio questa procedura di sostituzione si può utilizzare sempre.

Alcuni testi utilizzano la dicitura *integrale quasi immediato* per integrali scritti nella forma 16.4 e riconducibili ad integrali immediati. È il caso degli Esempi 16.6 e 16.7.

Evidenziamo alcuni integrali quasi immediati che useremo in seguito.

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log|\varphi(x)| + c, \tag{16.6}$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2+1} dx = \arctan\varphi(x) + c, \tag{16.7}$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^j} dx = \frac{-1}{(j-1)\,(\varphi(x))^{j-1}} + c. \tag{16.8}$$

Prestando la dovuta attenzione, la tecnica di sostituzione è applicabile anche se l'integrale non è nella forma 16.4. In questo caso non è affatto detto che ci si riconduca ad una funzione di cui sia nota (o calcolabile) una primitiva.

Esempio 16.10 *Vogliamo calcolare*

$$\int x\sqrt[3]{3x+2}dx$$

Poniamo

$$t = \sqrt[3]{3x+2}$$

da cui

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\left(t^3-2\right), \\ dx &= t^2 dt. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3}\left(t^3-2\right) t\, t^2 dt &= \frac{1}{3}\int \left(t^6-2t^3\right) dt = \ldots \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{t^6}{7}-\frac{t^3}{2}\right) t + c = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{(3x+2)^2}{7}-\frac{(3x+2)}{2}\right)\sqrt[3]{3x+2}+c = \\ &= \frac{1}{14}\left(6x^2+x-2\right)\sqrt[3]{3x+2}+c \end{aligned}$$

Esempio 16.11 *Vogliamo calcolare*

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+1}$$

Come sopra poniamo $t = e^x$ e otteniamo

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+1} = \ldots = \int \frac{dt}{(t^2+1)\, t}$$

Quest'ultimo integrale non è immediato, tuttavia rientra in una classe di integrali calcolabili.

Esempio 16.12 *Vogliamo calcolare*

$$\int \cos(x^2)\, dx \tag{16.9}$$

Come sopra poniamo $t = x^2$ e otteniamo

$$\int \cos(x^2)\, dx = \ldots = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

Quest'ultimo integrale, al pari di (16.9), non rientra in alcuna classe di integrali per cui sia nota la procedura di calcolo.

16.4 Integrazione per parti

......

16.5 Integrazione delle funzioni razionali

Un'importante classe di funzioni per la quale è nota le tecnica di calcolo di una primitiva è costituita dalle funzioni razionali

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

essendo $P(x)$ e $Q(x)$ due funzioni polinomiali.

16.5.1 Tecniche di base

Prima di enunciare la strategia generale per calcolare $\int f(x)\,dx$ è necessario studiare alcuni casi particolari.

Come caso particolare di (16.6) e di (16.8) si ottiene immediatamente la seguente proposizione.

Proposizione 16.13 *Se $\alpha \neq 0$, risulta*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\alpha x+\beta} &= \frac{1}{\alpha}\log|\alpha x+\beta|+k \\ \int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^j}dx &= \frac{-1}{(j-1)\alpha\,(\alpha x+\beta)^{j-1}}+k. \end{aligned}$$

Come caso particolare di (16.6) si ottiene anche la seguente proposizione.

Proposizione 16.14 *Risulta*

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \log\left|ax^2+bx+c\right|+k$$

L'integrazione del reciproco di un polinomio di secondo grado irriducibile su **R** richiede qualche calcolo in più.

Proposizione 16.15 *Se*

$$\begin{aligned} a &\neq 0, \\ \Delta &= b^2-4ac<0, \end{aligned}$$

risulta allora

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}+k. \tag{16.10}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4axb+4ac\right) \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-\Delta\right] \\ &= \frac{-\Delta}{4a}\left[\frac{(2ax+b)^2}{-\Delta}+1\right] \\ &= \frac{-\Delta}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{ax^2+bx+c} &= \frac{4a}{-\Delta}\frac{1}{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right]} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\frac{1}{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right]}. \end{aligned}$$

L'integrale si ottiene applicando la formula (16.7) in quanto $2a/\sqrt{-\Delta}$ è la derivata di $(2ax+b)/\sqrt{-\Delta}$. ■

Ora proviamo a studiare alcune semplici situazioni che possono essere ricondotte ai due casi visti sopra.

Esempio 16.16 *Proviamo a calcolare*

$$\int \frac{3x+4}{2x+1}dx.$$

Anzitutto scomponiamo

$$\int \frac{3x+4}{2x+1}dx = 3\int \frac{x}{2x+1}dx + 4\int \frac{dx}{2x+1} = (*)$$

Facciamo in modo che, nel primo integrale, al numeratore compaia il denominatore.

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{2x+1}dx + 4\int \frac{dx}{2x+1} = \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1}{2x+1}dx + 4\int \frac{dx}{2x+1} = \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{2x+1}dx + \left(4-\frac{3}{2}\right)\int \frac{dx}{2x+1} = \\
&= \frac{3}{2}\int dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{2x+1} = \\
&= \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\log|2x+1| + c.
\end{aligned}$$

Esempio 16.17 *Proviamo a calcolare*

$$\int \frac{3x+4}{2x^2-x+1}dx$$

Anzitutto scomponiamo

$$\int \frac{3x+1}{2x^2-x+1}dx = 3\int \frac{x}{2x^2-x+1}dx + 4\int \frac{dx}{2x^2-x+1} = (*)$$

Facciamo in modo che, nel primo integrale, al numeratore compaia la derivata del denominatore

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2-x+1}dx + 4\int \frac{dx}{2x^2-x+1} = \\
&= \frac{3}{4}\int \frac{4x-1+1}{2x^2-x+1}dx + 4\int \frac{dx}{2x^2-x+1} = \\
&= \frac{3}{4}\int \frac{4x-1}{2x^2-x+1}dx + \left(\frac{3}{4}+4\right)\int \frac{dx}{2x^2-x+1} = \\
&= \frac{3}{4}\log(2x^2-x+1) + \frac{19}{4}\int \frac{dx}{2x^2-x+1} = (**)
\end{aligned}$$

Rimane ora da calcolare

$$\int \frac{dx}{2x^2-x+1}$$

Potremmo applicare la regola (16.10) e concludere immediatamente

$$\int \frac{dx}{2x^2 - x + 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{4x-1}{\sqrt{7}}. \tag{16.11}$$

In realtà può essere utile provare a svolgere nuovamente i calcoli in un caso concreto: al denominatore dobbiamo far comparire un quadrato di binomio più 1, poi potremo applicare la formula (16.7)

$$\int \frac{dx}{2x^2 - x + 1} = 8 \int \frac{dx}{16x^2 - 8x + 8} = 8 \int \frac{dx}{(4x-1)^2 + 7} =$$
$$= \frac{8}{7} \int \frac{dx}{\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}} dx}{\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{4x-1}{\sqrt{7}},$$

esattamente come in (16.11).

In conclusione

$$(**) = \frac{3}{4} \log(2x^2 - x + 1) + \frac{19}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4x-1}{\sqrt{7}} + c.$$

Esempio 16.18 *Proviamo a calcolare*

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} dx.$$

Anche questa volta osserviamo anzitutto che al denominatore compare un polinomio irriducibile ($\Delta = -3 < 0$). Risulta quanto segue

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \\
&= \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx - 3 \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \\
&= \int dx - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + x + 1} dx = \\
&= x - \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \\
&= x - \frac{3}{2} \log(x^2 + x + 1) + 6 \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 4} = \\
&= x - \frac{3}{2} \log(x^2 + x + 1) + 6 \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 3} = \\
&= x - \frac{3}{2} \log(x^2 + x + 1) + 2 \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \\
&= x - \frac{3}{2} \log(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\
&= x - \frac{3}{2} \log(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.
\end{aligned}$$

16.5.2 Scomposizione in frazioni parziali

Osserviamo anzitutto che ogni funzione razionale si può scrivere nella forma

$$f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

dove P_1 e P_2 sono polinomi e il grado di P_2 è strettamente minore del grado di Q. Infatti è sufficiente effettuare preliminarmente la divisione tra P e Q.

Osservazione 16.19 *Negli Esempi 16.16 e 16.18 avevamo due funzioni razionali in cui il numeratore ha lo stesso grado del numeratore, quello che si è svolto come artificio algebrico equivale ad effettuare la divisione*

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{2x+1} &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2\,(2x+1)}, \\ \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} &= 1 - 3\frac{x}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Pertanto, senza ledere la generalità, possiamo assumere che il grado del numeratore sia strettamente minore del grado del denominatore. Sotto questa ipotesi è possibile scomporre la funzione razionale in frazioni parziali (fratti semplici); questo argomento è presentato nell'Appendice .... Rispetto alla trattazione svolta in generale dobbiamo segnalare una variante.

Proposizione 16.20 *Se il grado di $P(x)$ è strettamente minore del grado di $Q(x)$, la funzione $f(x) = P(x)/Q(x)$ si può scrivere come combinazione lineare di termini di tipo*

$$\frac{1}{(\alpha x+\beta)^i}, \qquad \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^j}, \qquad \frac{1}{(ax^2+bx+c)^j}. \tag{16.12}$$

dove $(\alpha x+\beta)$ e (ax^2+bx+c) sono i fattori irriducibili che compaiono nella fattorizzazione di $Q(x)$.

Osservazione 16.21 *Rispetto alla teoria svolta nell'Appendice ... abbiamo la variante riguarda il caso in cui nella fattorizzazione di $Q(x)$ compaiono fattori (ax^2+bx+c): la decomposizione standard sarebbe con addendi di tipo*

$$\frac{H_j x}{(ax^2+bx+c)^j}, \qquad \frac{K_j}{(ax^2+bx+c)^j}$$

La Proposizione 16.20 suggerisce di utilizzare

$$B_j\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^j}, \qquad \frac{C_j}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Evidentemente i coefficienti B_j e C_j sono ottenibili da H_j e K_j tramite le relazioni

$$\begin{aligned} H_j &= 2aB_j \\ K_j &= bB_j + C_j \end{aligned}$$

Il suggerimento è quello di impostare direttamente la decomposizione con i termini (16.12), che sono utilizzabili immediatamente nell'integrazione.

Come abbiamo visto sopra, quasi tutti i termini (16.12) si integrano immediatamente, quindi per calcolare l'integrale di $f(x)$ l'unica fatica da compiere è quella di determinare i coefficienti della combinazione lineare.

Seguono alcuni esempi (in alcuni casi riprendendo funzioni razionali studiate nell'Appendice ...).

Esempio 16.22 *Calcoliamo*

$$\int \frac{2x-3}{9x^2-4}dx.$$

Abbiamo visto che

$$\frac{2x-3}{9x^2-4} = -\frac{5}{12}\frac{1}{3x-2} + \frac{13}{12}\frac{1}{3x+2}.$$

Ora possiamo integrare, per scomposizione,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{9x^2-4}dx &= -\frac{5}{12}\int \frac{dx}{3x-2} + \frac{13}{12}\int \frac{dx}{3x+2} \\ &= -\frac{5}{36}\log|3x-2| + \frac{13}{36}\log|3x+2| + c \\ &= \frac{1}{36}\log\frac{|3x+2|^{13}}{|3x-2|^5} + c.\end{aligned}$$

Esempio 16.23 *Calcoliamo*

$$\int \frac{x^2-x}{x^3+1}dx$$

Il denominatore si fattorizza come segue

$$x^3+x = (x+1)\left(x^2-x+1\right)$$

Quindi dobbiamo individuare tre costanti A, B, C tali che

$$\frac{x^2-x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + B\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{C}{x^2-x+1} \tag{16.13}$$

Come sopra effettuiamo la somma a secondo membro e otteniamo

$$\frac{A}{x+1}+B\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{C}{x^2-x+1} = \frac{(A+2B)\,x^2+(C+B-A)\,x+C+A-B}{x^3+1}$$

ossia

$$\frac{x^2-x}{x^3+1} = \frac{(A+2B)\,x^2+(C+B-A)\,x+C+A-B}{x^3+1}.$$

Affinché le due funzioni coincidano i coefficienti dei numeratori devono essere ordinatamente uguali e quindi imponiamo

$$\begin{aligned}A+2B &= 1 \\ -A+B+C &= -1 \\ A-B+C &= 0\end{aligned}$$

Se risolviamo questo sistema lineare nelle incognite A, B e C, otteniamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \\ B &= \frac{1}{6} \\ C &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pertanto, sostituendo in (16.13), concludiamo

$$\frac{x^2-x}{x^3+1} = \frac{2}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Ora possiamo integrare, per scomposizione,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x}{x^3+1}dx &= \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1} = \\ &= \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{1}{6}\log\left(x^2-x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c = \\ &= \frac{1}{6}\log\left[(x+1)^4\left(x^2-x+1\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

Esempio 16.24 *Calcoliamo*

$$\int \frac{x^2}{x^4+3x^2-4}dx. \tag{16.14}$$

Il denominatore si fattorizza come segue

$$x^4+3x^2-4 = (x-1)(x+1)\left(x^2+4\right)$$

Quindi dobbiamo individuare quattro costanti A, B, C, D tali che

$$\frac{x^2}{x^4+3x^2-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + C\frac{2x}{x^2+4} + \frac{D}{x^2+4} \tag{16.15}$$

Come sopra effettuiamo la somma a secondo membro e otteniamo

$$\begin{aligned} &\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + C\frac{2x}{x^2+4} + \frac{D}{x^2+4} = \\ &= \frac{(A+B+2C)x^3 + (-B+A+D)x^2 + (4B+4A-2C)x + 4A-4B-D}{x^4+3x^2-4} \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{x^4+3x^2-4} = \\ &= \frac{(A+B+2C)x^3 + (-B+A+D)x^2 + (4B+4A-2C)x + 4A-4B-D}{x^4+3x^2-4} \end{aligned}$$

Affinché le due funzioni coincidano i coefficienti dei numeratori devono essere ordinatamente uguali e quindi imponiamo

$$\begin{aligned} A+B+2C &= 0 \\ A-B+D &= 1 \\ 4A+4B-2C &= 0 \\ 4A-4B-D &= 0 \end{aligned}$$

Risolviamo questo sistema lineare nelle incognite A, B, C, D e otteniamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{10} \\ B &= -\frac{1}{10} \\ C &= 0 \\ D &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Sostituendo in (16.15) si conclude

$$\frac{x^2}{x^4+3x^2-4} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{4}{5}\frac{1}{x^2+4}.$$

Quindi possiamo integrare

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^4+3x^2-4}dx &= \frac{1}{10}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1}\right) + \frac{4}{5}\int \frac{1}{x^2+4}dx \\ &= \frac{1}{10}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2}{5}\arctan\frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

Esempio 16.25 *Calcoliamo*

$$\int \frac{x^2}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}dx$$

Il denominatore si fattorizza come segue

$$x^4-2x^3+3x^2-4x+2 = (x-1)^2\left(x^2+2\right)$$

Quindi dobbiamo individuare quattro costanti A, B, C, D tali che

$$\frac{x^2}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + C\frac{2x}{x^2+2} + \frac{D}{x^2+2}. \tag{16.16}$$

Procedendo come sopra si ottiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{9} \\ B &= \frac{1}{3} \\ C &= -\frac{2}{9} \\ D &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Pertanto, dopo aver sostituito in (16.16), abbiamo

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}dx = \\ &\quad = \frac{4}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{2x}{x^2+2}dx + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x^2+2} = \\ &\quad = \frac{4}{9}\log|x-1| - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\log(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{9}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c = \\ &\qquad\qquad = \frac{2}{9}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{2}}{9}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c \end{aligned}$$

Esempio 16.26 *Calcoliamo*

$$\int \frac{x^6+5x^5+5x+1}{x^4+4}dx$$

Anzitutto dobbiamo effettuare la divisione

$$\begin{aligned}\frac{x^6+5x^5+5x+1}{x^4+4} &= x^2+5x+\frac{-4x^2-15x+1}{x^4+4}\\ &= x^2+5x-\frac{4x^2+15x-1}{x^4+4}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6+5x^5+5x+1}{x^4+4}dx &= \int \left(x^2+5x\right)dx-\int \frac{4x^2+15x-1}{x^4+4}dx\\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-\int \frac{4x^2+15x-1}{x^4+4}dx\end{aligned}$$

Rimane ora da calcolare

$$\int \frac{4x^2+15x-1}{x^4+4}dx=(*)$$

Il denominatore si fattorizza come segue

$$\begin{aligned}x^4+4 &= x^4+4+4x^2-4x^2=\\ &= \left(x^2+2\right)^2-4x^2=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)\end{aligned}$$

pertanto dovremo individuare A,B,C,D tali che

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+15x-1}{x^4+4} &= A\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{B}{x^2-2x+2}+\\ &\quad +C\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{D}{x^2+2x+2}\end{aligned}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}A &= \frac{9}{19}\\ B &= \frac{37}{8}\\ C &= -\frac{9}{16}\\ D &= -\frac{23}{8}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{9}{16}\left(\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx-\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx\right)+\\ &\quad +\frac{37}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}-\frac{23}{8}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}\\ &= \frac{9}{16}\log\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{1}{8}\left(37\arctan(x-1)-23\arctan(x+1)\right)+c\end{aligned}$$

16.5.3 Artifici e scorciatoie

L'esistenza di una procedura standard non deve distrarre dall'applicazione di artifici vari che possono contribuire a semplificare i calcoli. Si consideri l'esempio seguente, in apparenza del tutto simile a (16.14): un semplice cambio di variabili ci riconduce ad un integrale molto più semplice.

Esempio 16.27 *Calcoliamo*

$$\int \frac{x}{x^4+3x^2-4}dx.$$

Posto

$$t = x^2$$

abbiamo

$$\int \frac{x}{x^4+3x^2-4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+3t-4}$$

Sappiamo che

$$\frac{1}{t^2+3t-4} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+4}\right)$$

e pertanto

$$\int \frac{dt}{t^2+3t-4} = \frac{1}{5}\log\left|\frac{t-1}{t+4}\right| + c$$

Finalmente torniamo all'integrale iniziale

$$\int \frac{x}{x^4+3x^2-4}dx = \frac{1}{10}\log\frac{\left|x^2-1\right|}{x^2+4} + c.$$

Esempio 16.28 *Calcoliamo*

$$\int \frac{x^2+x}{(x-1)^3}dx.$$

Possiamo scomporre utilizzando la regola generale

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}.$$

In alternativa, in questo caso particolare (denominatore con un'unica radice reale multipla) possiamo integrare per parti. Abbiamo

$$\frac{1}{(x-1)^3} = D\frac{-1}{2(x-1)^2},$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x}{(x-1)^3}dx &= \int \left(x^2+x\right) D\frac{-1}{2(x-1)^2}dx \\
&= -\frac{x^2+x}{2\,(x-1)^2} - \int \frac{-1}{2(x-1)^2}(2x+1)dx \\
&= -\frac{x^2+x}{2\,(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx = (*)
\end{aligned}$$

Integriamo ancora per parti

$$\frac{1}{(x-1)^2} = D\frac{-1}{x-1}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx &= \int (2x+1)D\frac{-1}{x-1}dx \\
&= -\frac{2x+1}{x-1} - \int \frac{-1}{x-1}2\,dx \\
&= -\frac{2x+1}{x-1} + 2\log|x-1| + c
\end{aligned}$$

In conclusione abbiamo

$$(*) = -\frac{x^2+x}{2(x-1)^2} - \frac{2x+1}{2(x-1)} + \log|x-1| + c$$

Rimane difficile valutare a priori quale tra i due approcci più conveniente.

Esempio 16.29 *Calcoliamo*

$$\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}dx \tag{16.17}$$

Abbiamo visto che

$$\frac{x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right)$$

e pertanto

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}dx = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{(x+2)^2}\right) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\log\left|x^2-4\right| - \frac{2}{x^2-4} + c
\end{aligned}$$

Lo stesso integrale (16.17) può essere svolto in un altro modo. Anzitutto effettuiamo una sostituzione

$$x^2 = t$$

per cui otteniamo

$$\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{t}{(t-4)^2}dt = (*)$$

Possiamo procedere per parti, come sopra, altrimenti scomponiamo secondo la regola generale

$$\frac{t}{(t-4)^2} = \frac{A}{t-4} + \frac{B}{(t-4)^2}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 4 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-4} + 2\int \frac{dt}{(t-4)^2} \\ &= \frac{1}{2}\log|t-4| - \frac{2}{t-4} + c \\ &= \frac{1}{2}\log\left|x^2-4\right| - \frac{2}{x^2-4} + c, \end{aligned}$$

*esattamente come in (**??**).*