Tecniche di Sostituzione (Fratti Semplici, Ruffini, Divisione Euclidea)

● Divisione di polinomi (Metodo: Divisione Euclidea)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$$

Con $Q(x)$ che è il Quoziente (risultato) della divisione, ed $R(x)$ che è il Resto della divisione.

Esempio:

$$\frac{x^5 + 1 - 7x^3}{-3 + x^2}$$

PASSO 0)

Controllo che: Grado Numeratore ≥ Grado Denominatore (altrimenti non si può fare)

Nell'esempio:

$5 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad$ Procedo

PASSO 1)

Si riordinano (se non già ordinati) i termini dei polinomi in base al grado

$$\frac{x^5 - 7x^3 + 1}{x^2 - 3}$$

PASSO 2)

Si aggiungono (se mancano) i termini di ogni grado dei polinomi

$$\frac{x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 0x + 1}{x^2 + 0x - 3}$$

PASSO 3)

Si crea la griglia della divisione

$$\begin{array}{cccccc|ccc} +1x^5 & +0x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & +1x^2 & +0x & -3 \\ \cline{7-9} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{array}$$

PASSO 4)

Si divide il primo termine n del numeratore con il primo termine d del denominatore, e si salva il risultato s

$$\begin{array}{cccccc|ccc} +1x^5 & +0x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & +1x^2 & +0x & -3 \\ \cline{7-9} & & & & & & +1x^3 & & \\ & & & & & & & & \end{array}$$

PASSO 5)
Per ogni termine d del denominatore:
5.1) Si moltiplica d per il risultato s
5.2) Si cambia di segno il valore v ottenuto
5.3) Si inserisce v al posto giusto sotto il numeratore

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} +1x^5 & +0x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & +1x^2 & +0x & -3 \\ \cline{7-9} -1x^5 & -0x^4 & +3x^3 & & & & +1x^3 & & \end{array}$$

PASSO 6)
Si aggiungono (se mancano) gli eventuali termini mancanti

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} +1x^5 & +0x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & +1x^2 & +0x & -3 \\ \cline{7-9} -1x^5 & -0x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & +1x^3 & & \end{array}$$

PASSO 7)
Si effettua la somma

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} +1x^5 & +0x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & +1x^2 & +0x & -3 \\ \cline{7-9} -1x^5 & -0x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & +1x^3 & & \\ \cline{1-6} +0x^5 & +0x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & & & \end{array}$$

PASSO 8)
Si ripete la divisione sul polinomio dei termini rimasti.

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} +1x^5 & +0x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & +1x^2 & +0x & -3 \\ \cline{7-9} -1x^5 & -0x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & +1x^3 & & \\ \cline{1-6} +0x^5 & +0x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & & & \end{array}$$

PASSO 9)
Si continua fino a quando il polinomio dei termini rimasti diventa di grado inferiore al denominatore.

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr} +1x^5 & +0x^4 & -7x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & +1x^2 & +0x & -3 \\ \cline{7-9} -1x^5 & -0x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & +1x^3 & -4x & \\ \cline{1-6} +0x^5 & +0x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & & & \\ & & -4x^3 & +0x^2 & -12x & +0 & & & \\ \cline{3-6} & & +0x^3 & +0x^2 & -12x & +1 & & & \end{array}$$

RISULTATO)
Si sostituisce: $\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$

$$\frac{x^5 + 1 - 7x^3}{-3 + x^2} = (x^3 - 4x) + \frac{(-12x + 1)}{(x^2 - 3)}$$

● Scomposizione di un polinomio con Ruffini

Dato $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
Si identifica una $g(x)$ che divide $f(x)$ a resto 0
e si può sostituire $f(x) = g(x) \cdot Q(x)$

Ricordiamo che:
$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)} \Rightarrow f(x) = Q(x) \cdot g(x) + R(x)$
Se $R(x) = 0 \Rightarrow f(x) = Q(x) \cdot g(x) + 0 \Rightarrow f(x) = Q(x) \cdot g(x)$

Esempio:
$$-40x^2 + 16x^4 + 9$$

PASSO 1)
Si riordinano (se non già ordinati) i termini dei polinomi in base al grado

$$16x^4 - 40x^2 + 9$$

PASSO 2)
Si aggiungono (se mancano) i termini di ogni grado dei polinomi

$$16x^4 + 0x^3 - 40x^2 + 0x + 9$$

PASSO 3)

Si trova uno "zero del polinomio", ovvero un valore che rende $f(x) = 0$, usando il "teorema delle radici razionali".

3.1) Si identificano i valori $t \in \{$divisori del termine noto $a_0\}$
3.2) Si identificano i valori $c \in \{$divisori del coefficiente coordinatore $a_n\}$
3.3) Si cerca fra tutti i possibili valori $\frac{t}{c}$ un valore z che faccia da zero del polinomio $f(x)$
3.3) Si cerca un valore z fra i possibili valori $\frac{t}{c}$ che faccia da zero del polinomio $f(x)$

$$t \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$$
$$c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40\}$$

$$\text{Provo } P\left(+\frac{1}{1}\right) = 16(+1)^4 - 40(+1)^2 + 9 = -15 \neq 0$$
$$\text{Provo } P\left(-\frac{1}{1}\right) = 16(-1)^4 - 40(-1)^2 + 9 = -15 \neq 0$$
$$\text{Provo } P\left(+\frac{1}{2}\right) = 16\left(+\frac{1}{2}\right)^4 - 40\left(+\frac{1}{2}\right)^2 + 9 = 16 \cdot \frac{1}{16} - 40 \cdot \frac{1}{4} + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$$

PASSO 4)
Mi scrivo la funzione $g(x) = (x - z)$, con z che sarebbe lo zero del polinomio trovato al passo precedente

$$g(x) = \left(x - \left(+\frac{1}{2}\right)\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

NB: Arrivati a questo passo, si potrebbe procedere applicando la divisione con il metodo di Ruffini.
Però ciò richiederebbe imparare una nozione extra, che non dà valore aggiunto rispetto alla divisione euclidea.
Inoltre la divisione con Ruffini è usabile solo quando il divisore è di 1° grado.
Quindi è meno utile da sapere rispetto alla divisione euclidea.

PASSO 5)
Divido $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\frac{16x^4 - 40x^2 + 9}{x - \frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{rrrrr|rrrr}
+16x^4 & +0x^3 & -40x^2 & +0x & +9 & +1x & -\frac{1}{2} & & \\ \cline{6-9}
-16x^4 & +8x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & +16x^3 & +8x^2 & -36x & -18 \\ \cline{1-5}
+0x^4 & +8x^3 & -40x^2 & +0x & +9 & & & & \\
 & -8x^3 & +4x^2 & +0x & +0 & & & & \\ \cline{2-5}
 & +0x^3 & -36x^2 & +0x & +9 & & & & \\
 & & +36x^2 & -18x & +0 & & & & \\ \cline{3-5}
 & & +0x^2 & -18x & +9 & & & & \\
 & & & +18x & -9 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & +0x & +0 & & & &
\end{array}$$

PASSO 6)
Controllo che il resto della divisione esca 0 (altrimenti i conti sono sbagliati)

Il resto è 0 $\Rightarrow$ I calcoli sono corretti

PASSO 7)
Posso sostituire: $f(x) = Q(x) \cdot g(x)$

$$16x^4 - 40x^2 + 9 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (16x^3 + 8x^2 - 36x - 18)$$

PASSO 8)
Ripeto il processo su $g(x)$ fino a ridurmi a fattori di 1° o 2° grado

$$16x^4 - 40x^2 + 9 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (16x^3 + 8x^2 - 36x - 18) \Rightarrow [\dots] \Rightarrow 16x^4 - 40x^2 + 9 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (16x^2 - 36)$$

$$16x^4 - 40x^2 + 9 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (16x^2 - 36) \Rightarrow [\dots] \Rightarrow 16x^4 - 40x^2 + 9 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (16x + 24)$$

● Divisione di polinomi (Metodo: Divisione con Ruffini)

Esempio:

$$\frac{-40x^2 + 16x^4 + 9}{-\frac{1}{2} + x}$$

PASSO 0)
Controllo che: Grado Denominatore $= 1$ (altrimenti non si può fare)

Nell'esempio:
Grado 1 $\Rightarrow$ Procedo

PASSO 1)
Si riordinano (se non già ordinati) i termini dei polinomi in base al grado

$$\frac{16x^4 - 40x^2 + 9}{x - \frac{1}{2}}$$

PASSO 2)
Si aggiungono (se mancano) i termini di ogni grado dei polinomi

$$\frac{16x^4 + 0x^3 - 40x^2 + 0x^2 + 9}{x - \frac{1}{2}}$$

PASSO 3)
Inserisco una griglia con:
- in basso a sinistra il termine noto T del divisore cambiato di segno
- in alto al centro i coefficienti delle x
- in alto a destra il termine noto del numeratore

$$\begin{array}{c|cccc|c} & +16 & +0 & -40 & +0 & +9 \\ +\frac{1}{2} & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

PASSO 4)
Porto in basso il primo coefficiente nel numeratore

$$\begin{array}{c|cccc|c} & +16 & +0 & -40 & +0 & +9 \\ +\frac{1}{2} & & & & & \\ \hline & +16 & & & & \end{array}$$

PASSO 5)

5.1) Moltiplico T per il primo coefficiente del numeratore

5.2) Inserisco il risultato sotto il secondo coefficiente de numeratore

	$+16$	$+0$	-40	$+0$	$+9$
$+\frac{1}{2}$		$+8$			
	$+16$				

PASSO 6)

	$+16$	$+0$	-40	$+0$	$+9$
$+\frac{1}{2}$		$+8$			
	$+16$	$+8$			

PASSO 7)

Ripeto i passi 5-6

	$+16$	$+0$	-40	$+0$	$+9$
$+\frac{1}{2}$		$+8$	$+4$	-18	-9
	$+16$	$+8$	-36	-18	$+0$

RISULTATO)

I valori in basso al centro sono i coefficienti del quoziente, che avrà grado inferiore di 1 al grado del numeratore.

Il valore in basso a destra è il resto.

Quoziente: $16x^3 + 8x^2 - 36x - 18$

Resto: 0

● Scomposizione di una frazione di polinomi in Fratti semplici

Obiettivo:

Prendere una frazione di polinomi in forma $\dfrac{N}{D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_k}$, e scomporla in forma $\dfrac{N_1}{D_1} + \dfrac{N_2}{D_2} + \cdots + \dfrac{N_k}{D_k}$

Quando usarla:

Utile per gli argomenti come Limiti, Derivate, Integrali, in cui il calcolo di una somma può essere diviso in calcoli separati.

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)] \pm \lim\limits_{x \to x_0} [g(x)]$; $D[f(x) \pm g(x)] = D[f(x)] \pm D[g(x)]$; $\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$

PASSO 1)

Scompongo tutti gli eventuali fattori scomponibili al denominatore,
fino a che ogni fattore D_f al denominatore sia un polinomio non riducibile, ovvero:
- un polinomio di 1° grado
- un polinomio di 2° grado con $\Delta < 0$

PASSO 2)

Per ogni frazione f:
2.1) individuo il grado d_f del denominatore
2.2) $N_f =$ Lettera $\cdot\, x^{d_f - 1} +$ Lettera $\cdot\, x^{d_f - 2} + \cdots +$ Lettera $\cdot\, x^0$

PASSO 3)

Sommo le varie frazioni

$$\frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} + \cdots + \frac{N_k}{D_k} = \frac{[N_1 \cdot (D_2 \cdot \ldots \cdot D_k)] + [N_2 \cdot (D_1 \cdot \ldots \cdot D_k)] + \cdots + N_k \cdot (D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_{k-1})}{D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_k}$$

PASSO 4)

Sviluppo il numeratore della somma appena ottenuta, e raccolgo le x

$$\frac{[N_1 \cdot (D_2 \cdot \ldots \cdot D_k)] + [N_2 \cdot (D_1 \cdot \ldots \cdot D_k)] + \cdots + N_k \cdot (D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_{k-1})}{D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_k} \Rightarrow [\ldots] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^n(?) + x^{n-1}(?) + \cdots + ?}{D_1 \cdot D_2 \cdot D_k}$$

PASSO 5)

Confronto il numeratore N con il numeratore della somma

$$\frac{N}{D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_k} = \frac{x^n(?) + x^{n-1}(?) + \cdots + ?}{D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_k} \Rightarrow N = x^n(?) + x^{n-1}(?) + \cdots + ?$$

PASSO 6)

Risolvo l'equazione trovata al passo 7 ponendo a sistema.
Mi pongo l'obiettivo di trovare dei valori per le lettere che rendano vera l'equazione al passo 7.

RISULTATO)

Sostituisco i valori appena trovate per le lettere nell'equazione al passo 4.

Esempio 1:

$$\frac{1}{(3x-2)(x^2+2x+4)}$$

PASSO 1)

Il denominatore è già composto da polinomi irriducibili

PASSO 2)

$$\frac{1}{(3x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{Ax^{1-1}}{(3x-2)} + \frac{Bx^{2-1}+Cx^{2-2}}{(x^2+2x+4)} = \frac{A}{(3x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+4)}$$

PASSO 3)

$$\frac{A}{(3x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+4)} = \frac{[A\cdot(x^2+2x+4)]+[(Bx+C)\cdot(3x-2)]}{(3x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{Ax^2+2Ax+4A+3Bx^2-2B+3Cx-2C}{(3x-2)(x^2+2x+4)}$$

PASSO 4)

$$\frac{Ax^2+2Ax+4A+3Bx^2-2B+3Cx-2C}{(3x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2(A+3B)+x(2A-2B+3C)+4A-2C}{(3x-2)(x^2+2x+4)}$$

PASSO 5)

$$\frac{1}{(3x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2(A+3B)+x(2A-2B+3C)+4A-2C}{(3x-2)(x^2+2x+4)} \Rightarrow 1 = x^2(A+3B)+x(2A-2B+3C)+4A-2C$$

PASSO 6)

Noto che nel numeratore:

- non ci sono x^2 ed x
- il termine noto è 1

$$\begin{cases} x^2(A+3B)=0 \\ x(2A-2B+3C)=0 \\ 4A-2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+3B=0 \\ 2A-2B+3C=0 \\ 4A-2C=1 \end{cases} \Rightarrow [\dots] \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{9}{52} \\ B=-\frac{3}{52} \\ C=-\frac{2}{13} \end{cases}$$

RISULTATO)

$$\frac{1}{(3x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{(3x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+4)} = \frac{\left(\frac{9}{52}\right)}{(3x-2)} + \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)x+\left(-\frac{2}{13}\right)}{(x^2+2x+4)}$$

Se voglio controllare l'esattezza del risultato, posso sommare le frazioni ottenute e vedere se torno al valore di partenza:

$$\frac{\left(\frac{9}{52}\right)}{(3x-2)} + \frac{\left(-\frac{3}{52}\right)x+\left(-\frac{2}{13}\right)}{(x^2+2x+4)} = [\dots] = \frac{0x^2+0x+1}{(3x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{(3x-2)(x^2+2x+4)}$$

Esempio 2:

$$\frac{2x^4+3}{x^3+x}$$

PASSO 1)

Scompongo il denominatore in polinomi irriducibili

$$\frac{2x^4+3}{x^3+x}=\frac{2x^4+3}{x\cdot(x^2+1)}$$

PASSO 2)

$$\frac{2x^4+3}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{Ax^{1-1}}{x}+\frac{Bx^{2-1}+Cx^{2-2}}{x^2+1}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

PASSO 3)

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

PASSO 4)

$$\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(C)+A}{x(x^2+1)}$$

PASSO 5)

$$\frac{2x^4+3}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(C)+A}{x(x^2+1)} \quad \Rightarrow \quad 2x^4+3=x^2(A+B)+x(C)+A$$

PASSO 6)

Noto che:

- nel numeratore originale c'è un termine di 4° grado, che nella somma non è presente
- nel numeratore non ci sono termini di 1° e 2° grado
- nel numeratore il termine noto è 3

$$\begin{cases} x^2(A+B)=2x^4 \\ x(C)=0 \\ A=3 \end{cases} \begin{cases} x^2(A+B)=2x^4 \\ C=0 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2x^2 \\ C=0 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+B=2x^2 \\ C=0 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2x^2-3 \\ C=0 \\ A=3 \end{cases}$$

RISULTATO)

$$\frac{2x^4+3}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(3)}{x}+\frac{(2x^2-3)x+(0)}{x^2+1}=\frac{3}{x}+\frac{2x^3-3x}{x^2+1}$$

Se voglio controllare l'esattezza del risultato, posso sommare le frazioni ottenute e vedere se torno al valore di partenza:

$$\frac{3}{x}+\frac{2x^3-3x}{x^2+1}=[\ldots]=\frac{2x^4+3}{x\cdot(x^2+1)}$$

NB:

Un modo alternativo per svolgere questa scomposizione è riscrivere la frazione di partenza come:

$$\frac{2x^4+3}{x\cdot(x^2+1)}=2x^4+3\cdot\left(\frac{1}{x\cdot(x^2+1)}\right)$$

Per poi scomporre una frazione più semplice con numeratore = 1, e ri-moltiplicare per il numeratore di partenza.

Questo nel caso non si vogliano gestire le incognite al numeratore.