

Esercizio 4.2

Applicare il Pumping Lemma per dimostrare che il seguente linguaggio L non è libero da contesto:

$$L = \{ a^{n^2} \mid n \geq 0 \}$$

Analizziamo le parole che costituiscono L .

$$L = \{ \lambda, a, a^4, a^9, a^{16}, \dots \}$$

Supponiamo, per assurdo, che L sia libero da contesto.

Per il Pumping Lemma sui linguaggi liberi, esiste un numero naturale p , dipendente solo da L , tale che se $z \in L$ e $|z| > p$, allora:

$$z = uvwxy$$

- (1) $|vwx| \leq p$;
- (2) $vx \neq \lambda$;
- (3) $uv^iwx^iy \in L, \forall i \geq 0$.

Consideriamo la parola:

$$z = a^{p^2}$$

$z \in L$ ed inoltre $|z| = p^2 > p$.

Per il Pumping Lemma, possiamo scrivere:

$$z = uvwxy \text{ ove } |vwx| \leq p.$$

Consideriamo la stringa:

$$uv^2wx^2y$$

Per la (3) del Pumping Lemma, si deve avere:

$$uv^2wx^2y \in L$$

Ma:

$$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

Dunque:

$$uv^2wx^2y \notin L$$

Assurdo. Ne segue che L non è un linguaggio libero da contesto.