13 giugno 2016

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, determinare
   (a) se la funzione $f(x) = \frac{\cos x}{x^5}$ è pari, dispari o nessuna delle due cose;
   (b) se la funzione $g(x) = 2^x + x^3$ è strettamente monotona;
   (c) se esistono successioni divergenti e limitate;
   (d) se esistono due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$ e $\{a_n \cdot b_n\}$ è divergente;
   (e) un esempio di funzione integrabile in senso improprio in $(0, 1]$;
   (f) il polinomio di Maclaurin di ordine 3 relativo alla funzione $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$;
   (g) se la funzione
   $$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cos t \mathrm{d}t$$
   è derivabile e, in tal caso calcolarne la derivata.
   (h) se la funzione $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$ verifica le ipotesi del teorema degli zeri.

   (8 punti)

2. Si enunci la definizione di funzione continua in un punto e quella di funzione derivabile in un punto.

   Se esiste (in caso contrario spiegare perché non esiste), fornire un'esempio di funzione che sia
   (a) continua in un punto ma non derivabile in quel punto;
   (b) derivabile in un punto ma non continua in quel punto;
   (c) derivabile una volta in un punto ma non due volte in quel punto.

   (7 punti)

3. Si enunci il teorema di Fermat e lo si dimostri.

   Si faccia un esempio di funzione che ne verifica le ipotesi. (10 punti)

4. Si enunci il criterio del confronto per le serie numeriche.

   Si faccia un esempio di serie numeriche che ne verificano le ipotesi. (5 punti)

5 luglio 2016

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, si determini
   (a) un esempio di grafico di funzione strettamente decrescente;
   (b) se la funzione $g(x) = \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$ verifica le ipotesi del teorema di Fermat;
   (c) un esempio di serie numerica convergente;
   (d) un esempio di serie numerica divergente;
   (e) un esempio di funzione integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$;
   (f) il polinomio di MacLaurin di ordine 3 relativo alla funzione $f(x) = e^{2x}$;
   (g) se la funzione $F(x) = \operatorname{sen} x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$.
   (h) la derivata di $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 1$, usando la definizione di derivata.

   (8 punti)

2. Si enunci la definizione di successione limitata e quella di successione convergente.

   Se esiste (in caso contrario spiegare perché non esiste), si fornisca un esempio di successione che sia
   (a) limitata ma non convergente;
   (b) convergente ma non limitata;
   (c) limitata, monotona e non convergente.

   (7 punti)

3. Si enunci il primo teorema fondamentale del calcolo integrale e lo si dimostri.

   Si faccia un esempio di funzione che ne verifica le ipotesi. (9 punti)

4. Si enunci il teorema di Lagrange.

   Si stabilisca se la funzione $f(x) = x + x^2$, $x \in [0, 1]$ ne verifica le ipotesi e, in caso affermativo, si determini in quali punti è verificata la tesi. (6 punti)

12 luglio 2016

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, si determini
   (a) un esempio di grafico di funzione crescente ma non strettamente crescente;
   (b) se la funzione $g(x) = x^2 - 2x + 1$, $x \in [0, 2]$ verifica le ipotesi del teorema degli zeri;
   (c) un esempio di successione irregolare;
   (d) un esempio di serie numerica divergente;
   (e) se la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è limitata;
   (f) se è vero o falso che ogni funzione strettamente monotona è invertibile;
   (g) se la funzione $F(x) = \cos x$ è una primitiva di $f(x) = \operatorname{sen} x$.
   (h) la derivata di $f(x) = \sqrt{x}$ nel punto $x_0 = 1$, usando la definizione di derivata.

   (8 punti)

2. Si enunci la definizione di serie numerica e quella di serie numerica convergente.

   Si enunci la condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica.

   Si mostri, tramite un esempio, che tale condizione non è sufficiente affinchè una serie converga.

   (7 punti)

3. Si enunci il teorema di Fermat e lo si dimostri.

   Si faccia un esempio di funzione che ne verifica le ipotesi. (9 punti)

4. Si enunci il teorema della media integrale.

   Si calcoli la media integrale di $f(x) = x^3$, $x \in [1, 2]$.

   (6 punti)

12 luglio 2016

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, si determini
   (a) un esempio di grafico di funzione crescente ma non strettamente crescente;
   (b) se la funzione $g(x) = x^2 - 2x + 1$, $x \in [0, 2]$ verifica le ipotesi del teorema degli zeri;
   (c) un esempio di successione irregolare;
   (d) un esempio di serie numerica divergente;
   (e) se la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è limitata;
   (f) se è vero o falso che ogni funzione strettamente monotona è invertibile;
   (g) se la funzione $F(x) = \cos x$ è una primitiva di $f(x) = \operatorname{sen} x$.
   (h) la derivata di $f(x) = \sqrt{x}$ nel punto $x_0 = 1$, usando la definizione di derivata.

   (8 punti)

2. Si enunci la definizione di serie numerica e quella di serie numerica convergente.

   Si enunci la condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica.

   Si mostri, tramite un esempio, che tale condizione non è sufficiente affinchè una serie converga.

   (7 punti)

3. Si enunci il teorema di Fermat e lo si dimostri.

   Si faccia un esempio di funzione che ne verifica le ipotesi. (9 punti)

4. Si enunci il teorema della media integrale.

   Si calcoli la media integrale di $f(x) = x^3$, $x \in [1, 2]$.

   (6 punti)

19 luglio 2016

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, si determini
   (a) un esempio di funzione avente una discontinuità eliminabile;
   (b) se è vero o falso che $x^3 + x^2 = o(x^4)$ per $x \to 0$;
   (c) un esempio di successione infinitesima;
   (d) un esempio di funzione integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$;
   (e) un esempio di funzione illimitata superiormente;
   (f) se è vero o falsa l'affermazione "ogni serie convergente è assolutamente convergente";
   (g) se la funzione $f(x) = 1/x$ per $x \in (0, 1]$ verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass.
   (h) la derivata di $f(x) = x^2 + x$ nel punto $x_0 = 0$, usando la definizione di derivata.

   (8 punti)

2. Si enunci la definizione di primitiva di una funzione e quella di integrale indefinito di una funzione.

   Si fornisca un esempio di funzione che ammette primitive ed uno di funzione che non ne ammette.

   (8 punti)

3. Si enunci il teorema del confronto sui limiti delle successioni e lo si dimostri.

   (7 punti)

4. Si definisca il polinomio di Taylor di ordine n e centro 0 associato ad una funzione derivabile n volte.

   Si enunci la formula di Taylor con il resto di Peano.

   Se ne illustri l'applicazione mediante un esempio.

   (7 punti)

12 settembre 2016

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, si determini
   (a) se la funzione $f(x) = x^3 \operatorname{sen} x$ è pari, dispari o nessuna delle due cose;
   (b) se la funzione $g(x) = \frac{1}{x} + \log_{1/2} x$, $x > 0$ è strettamente monotona;
   (c) se esistono due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ e $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ sia divergente;
   (d) se è vero o falso che $x^5 + x^6 = o(x^4)$ per $x \to 0$;
   (e) se è vero o falso che ogni funzione strettamente monotona è invertibile;
   (f) se la funzione $f(x) = x^2$ ammette massimo;
   (g) un esempio di funzione integrabile in senso improprio in un intervallo limitato;
   (h) se la funzione $F(x) = \operatorname{tg} x$ è una primitiva di $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

   (8 punti)

2. Si enunci la definizione di funzione derivabile in un punto.

   Si forniscano esempi di funzioni derivabili e di funzioni non derivabili in qualche punto, specificando il tipo di non derivabilità e illustrandolo graficamente.

   (7 punti)

3. Si enunci il criterio del confronto asintotico per le serie numeriche e lo si dimostri.

   Si illustri la sua applicazione tramite un esempio. (9 punti)

4. Si enunci il teorema della media integrale.

   Si calcoli la media integrale di $f(x) = x^4$, $x \in [1, 2]$.

   (6 punti)

23 settembre 2016

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, si determini

   (a) se è vero o falso che l'immagine di una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è un intervallo;

   (b) se ogni serie numerica convergente è anche assolutamente convergente;

   (c) se la funzione
   $$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$
   è derivabile e, in tal caso, calcolarne la derivata;

   (d) la derivata di $f(x) = x^4$ nel punto $x_0 = 0$, usando la definizione di derivata;

   (e) un esempio di successione irregolare;

   (f) un esempio di serie numerica irregolare;

   (g) se è vero o falso che la funzione $f(x) = x^4 - 3x + 8x^5$, $x \in [-6, 6]$ ammette massimo e minimo (senza calcolarli);

   (h) se è vero o falso che le serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} \qquad \sum_{n=20}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$
   hanno lo stesso comportamento.

(8 punti)

2. Si enunci la definizione di funzione continua in un punto.

   Si forniscano esempi di funzioni continue e di funzioni non continue in qualche punto, specificandone il tipo di discontinuità e illustrandolo graficamente.

(7 punti)

3. Si enunci il teorema della permanenza del segno per le successioni e lo si dimostri.

   Si illustri la sua applicazione tramite un esempio. (9 punti)

4. Si enunci la definizione di funzione integrabile (secondo Riemann).

   Si forniscano esempi di funzioni integrabili e di funzioni non integrabili.

(6 punti)

14 febbraio 2017

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, si determini
   (a) se la funzione $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^4}$ è pari, dispari o nessuna delle due cose;
   (b) un esempio di serie numerica a segni alterni convergente;
   (c) un esempio di funzione monotona strettamente crescente;
   (d) se la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x \ x \in [0, \pi]$ verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass;
   (e) un esempio di funzione discontinua;
   (f) se la funzione $F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
   $$F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t^4} dt$$
   è derivabile e, in tal caso, calcolarne la derivata;
   (g) il polinomio di MacLaurin di ordine 3 relativo alla funzione $f(x) = e^x$
   (h) se l'integrale
   $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$$
   è convergente.

   (8 punti)

2. Si enuncino le definizioni di funzione derivabile in un punto, di punto critico e di massimo (o minimo) relativo di una funzione e le si illustrino tramite esempi.

   Si descriva quale relazione esiste tra la nozione di massimo (o minimo) relativo di una funzione e quella di punto critico.

   (7 punti)

3. Si enunci il teorema della permanenza del segno per le successioni e lo si dimostri.

   Se ne illustri l'applicazione tramite un esempio. (9 punti)

4. Si enunci la definizione di somma parziale n-esima associata ad una serie numerica e la si illustri tramite esempi.

   Si enunci il criterio del confronto asintotico per le serie numeriche.

   (6 punti)

26 aprile 2017

Laurea triennale in Informatica - Corso B (M-Z)
Prova scritta di Analisi Matematica
Teoria

1. In base alla teoria studiata e giustificando la risposta, si determini

   (a) un esempio di funzione avente una discontinuità a salto in un punto.

   (b) se la funzione $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [-1, 1]$ verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass e, in caso affermativo, stabilire quali sono il massimo e il minimo di f nell'intervallo assegnato;

   (c) un esempio di serie numerica divergente;

   (d) un esempio di funzione non derivabile in un punto;

   (e) un esempio di funzione che tende a $+\infty$ all'infinito;

   (f) il polinomio di Maclaurin di ordine 3 relativo alla funzione $f(x) = \text{sen}(3x)$;

   (g) se la funzione
   $$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$
   è derivabile e, in tal caso, calcolarne la derivata;

   (h) un esempio di funzione integrabile in senso improprio in $(0, 1]$.

(8 punti)

2. Si enunci il teorema della media integrale.

   Lo si applichi alla funzione $f(x) = x^3$, $x \in [0, 2]$.

(6 punti)

3. Si enunci e, facoltativamente si dimostri, il teorema di Fermat.

   Se ne illustri l'applicazione tramite un esempio. (9 punti)

4. Si enuncino le definizioni

   (a) di funzione monotona crescente;

   (b) di funzione limitata superiormente

   e le si illustrino tramite esempi.

(7 punti)