

# C.d.L. in Informatica e T.P.S.

## Analisi matematica

Programma d'esame – A.A. 2016/17

Prof. Lorenzo Pisani

### Insiemi numerici

Campo ordinato dei numeri reali: compatibilità tra operazioni e relazione d'ordine, regole di calcolo algebrico, valore assoluto, intervalli, assioma di completezza. Numeri interi e razionali; parte intera. Rappresentazione dei numeri, calcolo numerico e rappresentazione simbolica. Retta reale e piano cartesiano. Richiami di geometria analitica.

### Funzioni e successioni reali

Esempi. Rappresentazione del grafico nel piano cartesiano. Generalità sulle **successioni**. **Successioni definite per ricorrenza**; potenze ad esponente naturale; successione delle somme.

### Proprietà delle funzioni reali – Funzioni elementari

Simmetria e periodicità. **Monotonia**. **Convessità (in un intervallo)**; lemma sui **rapporti incrementali**. **Minimi e massimi assoluti**, **minoranti e maggioranti**, **estremo inferiore e superiore**, **funzioni limitate**. Algebra delle funzioni. Trasformazioni elementari dei grafici. Generalità su equazioni e disequazioni. Funzioni elementari (potenze ad esponente naturale e radici, polinomio di II grado, potenze ad esponente razionale e reale, esponenziali e logaritmi, funzioni circolari con le rispettive inverse). Cenni su polinomi e funzioni polinomiali/razionali; fattorizzazione e decomposizione in frazioni parziali. Disequazioni relative alle funzioni elementari e alle funzioni razionali/irrazionali.

### Limiti di successioni

**Successioni convergenti**. Unicità del valore a cui una successione converge e definizione di limite finito. **Successioni divergenti**. **Successioni regolari e non**. **Regolarità delle successioni monotone**; il numero di Nepero. **Retta ampliata** ed **intorni**, **definizione unificata di limite**. **Teoremi di permanenza del segno, confronto, divergenza e convergenza obbligata**. Cenni sulle successioni estratte. Disuguaglianza di Bernoulli e progressione geometrica. Successione delle medie.

### Limiti e continuità per funzioni di una variabile

**Punti di accumulazione**. Definizione sequenziale di limite (finito ed infinito) per le funzioni. **Continuità in un punto**. Carattere locale del limite. **Limite unilaterale**; regolarità delle funzioni monotone; asintoti verticali. Teoremi sui limiti. Calcolo dei limiti: limiti delle funzioni elementari, comportamento rispetto alle operazioni, forme indeterminate, limite della funzione composta.

Equivalenze asintotiche: polinomi, equivalenze notevoli per infinitesimi, regole per l'uso delle equivalenze nella risoluzione dei limiti. Confronto di infiniti notevoli. Differenze di infiniti.

Prolungamento per continuità. Funzioni continue in un intervallo: **teorema di Weierstrass**; **teorema degli zeri** e applicazioni alla risoluzione qualitativa di equazioni.

Comportamenti asintotici: funzioni divergenti all'infinito (classificazione della crescita all'infinito, asintoti obliqui); funzioni infinitesime in un punto (classificazione dell'ordine di infinitesimo, contatto tra due grafici).

### Serie numeriche

**Serie numeriche**. Esempi di calcolo delle somme parziali: **serie geometrica** e **serie telescopiche**. Teoremi sulle **serie convergenti, condizione necessaria**. **Somme approssimate e resto**. Serie a termini non negativi: regolarità; criteri di **confronto** e di **confronto asintotico**; serie **armonica generalizzata**; **stime per il calcolo della somma approssimata**; criteri del **rapporto** e degli **infinitesimi**, confronto di

efficienza. Serie a termini di segno variabile: criterio di **Leibnitz** per le serie a segno alterno; **assoluta convergenza**, serie assolutamente convergenti.

**Serie di potenze; intervallo di convergenza** e **teorema di D'Alambert**. Funzioni generatrici; applicazione alla successione di Fibonacci e formula di Binet.

## Introduzione al calcolo differenziale

**Rapporto incrementale, derivata**. Esempi. Derivata destra e sinistra. **Continuità delle funzioni derivabili**. **Retta tangente**; caratterizzazione tramite **l'ordine di contatto**. Flessi a tangente verticale. Interpretazione del segno della derivata: **monotonia** rispetto ad un punto, **punti stazionari**. Semirette tangenti; **punti angolosi e cuspidali** con rispettivi esempi. Derivate delle funzioni elementari. Algebra delle derivate. Derivata della funzione composta e della funzione inversa. Massimi e minimi locali; teorema di Fermat; controesempi.

## Funzioni derivabili e derivate di ordine superiore

**Lemma di Rolle; teorema del valor medio di Lagrange**. Caratterizzazione delle funzioni costanti su un intervallo; caratterizzazione delle **funzioni monotone su un intervallo**; criterio di stretta monotonia; controesempi. **Teoremi di de L'Hospital**; calcolo della **derivata unilaterale**. **Funzioni convesse: posizione rispetto alla retta tangente, caratterizzazione tramite la derivata**.

**Derivata seconda; lemma fondamentale** e interpretazione del segno. Condizione sufficiente per punti di estremo locale. Caratterizzazione delle funzioni convesse tramite la derivata seconda.

Studio del grafico di una funzione.

Derivate di ordine superiore. **Parabola osculatrice**: definizione e proprietà di approssimazione. **Polinomi di Taylor e teorema sull'ordine di contatto**; valutazione del **resto secondo Lagrange**; cenni sulle serie di Taylor.

## Primitive ed integrazione indefinita

**Primitive** ed **integrale indefinito**. Struttura dell'**integrale indefinito su un intervallo**. Integrali indefiniti immediati, per scomposizione (linearità), per sostituzione, per parti. Integrazione indefinita delle funzioni razionali.

## Integrali di Riemann, definiti, impropri

**Somme inferiori e superiori di una funzione limitata**. Le somme inferiori e superiori costituiscono due insiemi separati. **Integrabilità secondo Riemann** ed **integrale di Riemann**; esempi. Interpretazione geometrica. Classi di funzioni integrabili (monotone, continue, continue quasi ovunque); proprietà di linearità. Proprietà dell'integrale di Riemann: **media** e relativo teorema, positività, confronto; additività e continuità rispetto al dominio.

**Integrale definito** e relative proprietà. **Teorema Fondamentale del Calcolo**: derivabilità della funzione integrale. Formula fondamentale del Calcolo integrale.

Integrali impropri: funzioni non limitate e/o intervalli illimitati. Integrabilità di  $1/x^\alpha$ , su  $(0,1]$  e su  $[1,+\infty)$ . Criteri di integrabilità per funzioni a segno costante, assoluta integrabilità. Criterio dell'integrale per le serie numeriche; applicazione al calcolo di somme approssimate.

## Testi consigliati

*Appunti del corso*, a cura del docente, disponibili su piattaforma didattica a cui si accede con registrazione.

Le dispense, ripubblicate man mano che vengono aggiornate, non coprono tutto il corso: non sono trattati alcuni argomenti ritenuti di routine. Per tali argomenti si può consultare un qualsiasi manuale di livello universitario. In particolare si segnalano:

Bramanti, Pagani, Salsa, *Analisi matematica 1*, Zanichelli

Bramanti, *Esercitazioni di Analisi Matematica 1*, Esculapio

Conti, Ferrario, Terracini, Verzini, *Analisi matematica, Volume 1*, Apogeo.