Capitolo 5

Esponenziali e logaritmi

5.1 Esponenti interi

Sono note la definizione e le proprietà delle potenza ad esponente naturale

Il passo successivo è quello di definire la potenza con un esponente intero negativo. Come accade in una costruzione ordinata, questo nuovo oggetto viene definito utilizzando gli oggetti già noti.

Se $k \in \mathbf{Z}$, $k < 0$, per definizione si pone

$$x^k = \left(\frac{1}{x}\right)^{-k}.$$

Osserviamo che al primo membro abbiamo l'oggetto nuovo, che dobbiamo definire,

- la potenza con esponente negativo k.

A secondo membro compaiono due oggetti noti:

- $1/x$, inverso di x.
- la potenza con l'esponente intero positivo $-k$.

Ovviamente stiamo supponendo l'esistenza dell'inverso, quindi la definizione data sopra richiede una condizione aggiuntiva

$$x \neq 0.$$

Passiamo a qualche esempio

$$\begin{aligned}
7^{-2} &= \left(\frac{1}{7}\right)^{-(-2)} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2} = \frac{1}{49} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8} \\
(-4)^{-2} &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Osservazione 5.1 *Alla luce della definizione che abbiamo dato, risulta*

$$x^{-1} = \frac{1}{x}. \tag{5.1}$$

In... si era detto che se $x \neq 0$ *e* $m \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} &x^m \neq 0 \\ &\frac{1}{x^m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m, \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ora, tenuto conto di ... possiamo trascrivere

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m},$$

Anzi, tenutTenuto conto della (5.1) possiamo anche scrivere

$$(x^m)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^m = x^{-m},$$

in analogia con (??).

5.1.1 Proprietà formali

Tenuto conto che abbiamo definito le potenze con esponenti naturali ed interi negativi, con un'opportuna sistemazione teorica, potremmo dare una definizione di potenza con base $x \in \mathbf{R}^*$ ed esponente $k \in \mathbf{Z}$.

A suo tempo abbiamo ricordato le proprietà delle potenze. Le stesse proprietà rimangono vere assumendo basi diverse da 0 ed esponenti in $\mathbf{Z}$. per brevità non le riscriviamo. A queste proprietà daremo il nome di *proprietà formali delle potenze*, formali perché queste rimangono invariate anche se cambiamo l'insieme in cui possono variare basi ed esponenti, quindi cambiamo il significato attribuito ai simboli.

5.2 Potenze ad esponente razionale

Come si diceva nel paragrafo .... in presenza di basi positive, valgono le consuete proprietà di semplificazione tra radici e potenze...

questo consente di definire le potenze ad esponente razionale,

Se $a \geq 0$ e $q = m/n$ si pone

$$a^q = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

La definizione è ben posta, in quanto, In forza delle proprietà di semplificazione di cui dicevamo sopra, il risultato non cambia se al posto di m/n consideriamo una frazione equivalente. Dunque il risultato dipende solo dalla classe di equivalenza, ossia da q.

Conservazione delle proprietà formali...

5.3 Potenze ad esponente reale

Generalmente si definisce logaritmo (di un certo numero a in una certa base b) l'esponente da dare alla base b per ottenere il numero a, come se si trattasse di una questione facilmente gestibile.

Proviamo a chiederci esiste il logaritmo in base 3 di 7? Dovrebbe esistere un numero a tale che

$$3^a = 7$$

Tale a non può essere un numero intero, evidentemente. Tale a non può essere neanche un numero razionale. Infatti se fosse $a = m/n$ dovrebbe aversi

$$3^{m/n} = 7$$

ossia

$$3^m = 7^n$$

Ora è evidente che non esistono due interi m, n che realizzano tale uguaglianza.

Dunque per dare senso alla usuale nozione di logaritmo occorrerebbe definire un nuovo oggetto, l'elevamento a potenza con esponente reale...

Funzione esponenziale....

5.4 Logaritmi

.....

5.4.1 Proprietà dei logaritmi

Le proprietà dei logaritmi, dedotte direttamente dalle proprietà formali delle potenze sono note:

$$\log_b(a_1 a_2) = \log_b a_1 + \log_b a_1$$

Queste proprietà richiedono una particolare attenzione quando, come argomento del logaritmo, compare una funzione. Ad esempio:

- $\log(4 - x^2) = \log(2 - x) + \log(2 + x)$ in questo caso ... i domini coincidono (l'uguaglianza è corretta)
- $\log(x^2 - 4) = \log(x - 2) + \log(x + 2)$ in questo caso ... i domini non coincidono (l'uguaglianza è da precisare oppure, come si suol dire, è condizionata).
- $\log(x^2) = 2 \log x$ in questo caso ... i domini non coincidono
- $\log(x^2) = 2 \log |x|$

Capitolo 6

Funzioni circolari

6.1 Descrizione di fenomeni periodici

Tra le funzioni elementari ne esistono due atte a descrivere fenomeni che si ripetono periodicamente nel tempo. Si tratta delle funzioni *coseno* e *seno*

$$\begin{aligned} \cos &: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \sin &: \mathbf{R} \to \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Se il nostro interesse fosse limitato a semplicemente a descrivere i fenomeni periodici, potremmo anche utilizzare una sola di queste funzioni, infatti esse si ricavano l'una dall'altra con una traslazione.

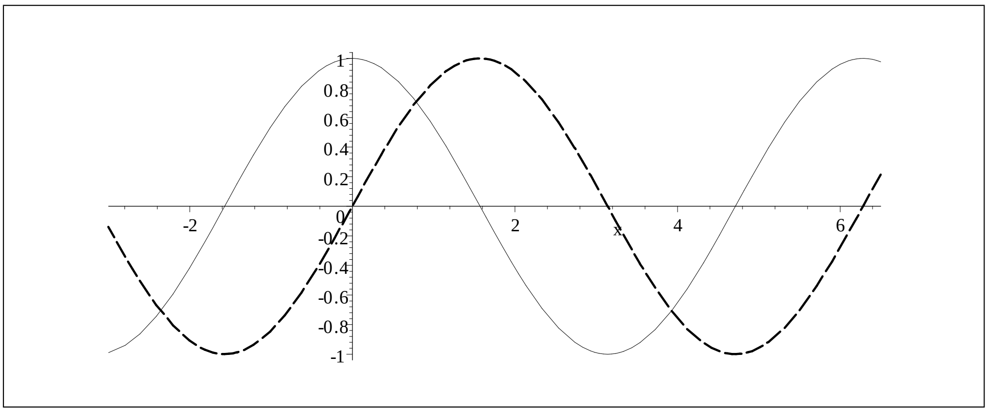


Figura 6.1: $\cos x$ (linea continua), $\sin x$ (linea tratteggiata)

D'altra parte esistono valide ragioni di tipo matematico per tenere distinte queste due funzioni.

Da cos e sin otterremo la funzione *tangente* denotata con tan. Infine, con opportune procedure di restrizione, verranno introdotte le funzioni circolari inverse: arccos, arcsin, arctan.

6.2 Osservazioni critiche sulle definizioni

L'origine delle funzioni cos e sin è di natura geometrica. Infatti, come a tutt'oggi si insegna nelle scuole medie superiori, *coseno* e *seno* sono nomi di grandezze associate ad un angolo.

Dalla geometria elementare forse ricordiamo che per *angolo* si intende una "porzione di piano delimitata da due semirette aventi l'origine in comune".

In realtà il termine "angolo" viene usato, anche in queste pagine, in maniera estensiva e non perfettamente corrispondente alla precedente definizione:

- assegnato un triangolo, si parla di angolo nel vertice, nozione che poco si concilia con la nozione di porzione "illimitata" di piano definita sopra;
- si potrebbe parlare dell'angolo formato da due segmenti aventi un estremo in comune;
- in altri contesti si parla anche di angolo individuato da vettori.

D'altra parte per definire le funzioni circolari dovremmo introdurre una nuova nozione, quella di angolo orientato, ed identificare angoli (orientati) e numeri reali tramite la misurazione in radianti.

E' stato osservato che questi approcci non soddisfano pienamente l'esigenza di rigore matematico: vaga la nozione di arco orientato, la sua parentela con l'angolo della geometria euclidea; non sempre precisi i riferimenti alla lunghezza degli archi della circonferenza, ... (G. Prodi). Cercare di armonizzare queste nozioni avrebbe come unico effetto quello di appesantire la trattazione.

Una possibile definizione delle funzioni cos e sin utilizzerà concetti di tipo intuitivo, a partire dalla rotazione di un punto sulla circonferenza goniometrica.

6.3 Misurazione degli angoli

A livello elementare gli angoli vengono misurati in gradi, primi, secondi ... si tratta di un'eredità della matematica antica.

Ricordiamo che

- la misura dell'angolo giro, ossia dell'angolo ottenuto con una rotazione completa della semiretta è pari a 360 gradi;
- la misura dell'angolo piatto è pari a 180 gradi;
- la misura dell'angolo retto è pari a 90 gradi;
- un primo è un sessantesimo di grado;
- un secondo è un sessantesimo di primo.

Ad esempio una possibile misura di angolo è $30°15'23''$.

Ora vogliamo introdurre una misura dell'angolo tramite un numero reale. La definizione è di tipo operativo.

Definizione 6.1 *Si consideri un arco di circonferenza avente centro nel vertice dell'angolo; siano r il raggio ed ℓ la lunghezza dell'arco di circonferenza delimitato dell'angolo stesso; si definisce* misura dell'angolo in radianti *il rapporto ℓ/r.*

La definizione è ben posta in quanto si prova che il rapporto ℓ/r non dipende dalla particolare circonferenza prescelta.

Potrà risultare utile imparare le misure in radianti di alcuni angoli di uso particolarmente frequente.

gradi	radianti
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
60°	$\pi/3$
45°	$\pi/4$
30°	$\pi/6$

6.4 Definizione intuitiva di cos e sin

Nel piano cartesiano, definiamo *circonferenza goniometrica* la circonferenza C avente centro in (0,0) e raggio 1. Tale circonferenza ha equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Definizione 6.2 *Consideriamo un punto mobile P che, partendo da $A = (1,0) \in C$, si muove sulla circonferenza in senso antiorario.*

Sia $t \geq 0$. Si definisce $\cos t$ l'ascissa del punto P dopo che ha percorso un arco di lunghezza x. Analogamente si definisce $\sin x$ l'ordinata del punto P dopo che ha percorso un arco di lunghezza x.

Osservazione 6.3 *Osserviamo che percorrere sulla circonferenza goniometrica un arco di lunghezza x equivale a dire che l'angolo $A\hat{O}P$ ha una misura in radianti pari a x.*

Facciamo alcuni esempi.

Per $t = 0$ il punto P non si sposta da $A = (1,0)$, quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \cos 0 &= 1 \\ \sin 0 &= 0 \end{aligned}$$

Passiamo ora a $t = \pi/3$ (vedi Figura 1.2). In base a quanto osservato, dire che l'arco AP ha lunghezza $\pi/3$ equivale a dire che l'angolo $A\hat{O}P$ ha misura in radianti $\pi/3$. Pertanto il triangolo AOP è equilatero. Il coseno di $\pi/3$ è per definizione l'ascissa di P e quindi

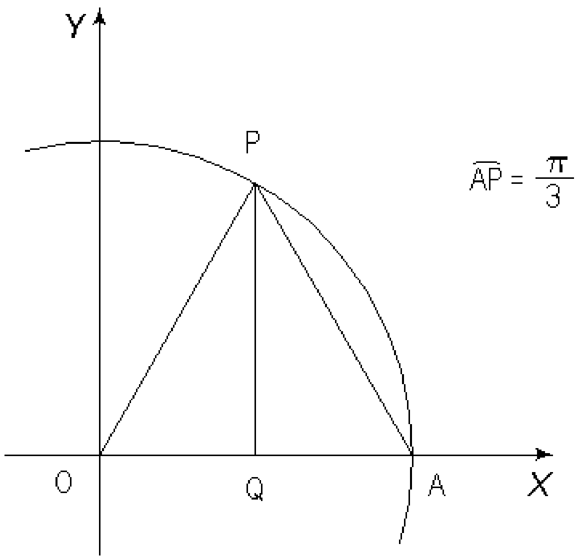
$$\cos\frac{\pi}{3} = \overline{OQ} = \frac{1}{2}.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OPQ otteniamo

$$\sin\frac{\pi}{3} = \overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenendo presente che la circonferenza C ha lunghezza pari a 2π, per $t = \pi/2$ il punto P ha percorso un quarto di circonferenza, raggiungendo la posizione $(0,1)$. Avremo pertanto

$$\begin{aligned} \cos\pi/2 &= 0 \\ \sin\pi/2 &= 1 \end{aligned}$$



Per $t \in [0, \pi/2]$ le funzioni cos e sin sono positive. Il coseno è strettamente negativo in $(\pi/2, 3\pi/2)$; il seno è strettamente negativo in $(\pi, 2\pi)$.

Per $t = 2\pi$ il punto P ha percorso l'intera circonferenza, ritornando nella posizione iniziale $A = (1, 0)$. Avremo pertanto

$$\begin{aligned} \cos 2\pi &= 1 \\ \sin 2\pi &= 0 \end{aligned}$$

Per $t > 2\pi$ il punto inizia a ripercorrere la circonferenza. In particolare osserviamo che, per ogni t

$$\begin{aligned} \cos(t + 2\pi) &= \cos t \\ \sin(t + 2\pi) &= \sin t \end{aligned}$$

infatti percorrere sulla circonferenza C un arco di lunghezza $t + 2\pi$ vuol dire che, dopo un arco di lunghezza t, percorriamo la circonferenza per intero; tutto ciò equivale a percorrere un arco di lunghezza t.

Osservazione 6.4 *Per completare la definizione dobbiamo considerare i valori $t < 0$. In tal caso la definizione è la stessa di sopra, solo che questa volta, partendo sempre da A, percorriamo la circonferenza in senso orario.*

Poiché $(\cos t, \sin t)$ sono coordinate di un punto sulla circonferenza C, se ricordiamo l'equazione della circonferenza stessa, otteniamo la *relazione*

$$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1.$$

Osservazione 6.5 *Nel linguaggio della geometria possiamo dire che* $(\cos t, \sin t)$ *forniscono una rappresentazione parametrica della circonferenza.*

Osservazione 6.6 *Se alla variabile* t *diamo il significato di tempo, nel linguaggio della fisica possiamo dire che* $(\cos t, \sin t)$ *rappresentano le coordinate di un punto che si muove di moto circolare uniforme.*

Tutti questi fatti giustificano per cos e sin la denominazione di *funzioni circolari*.

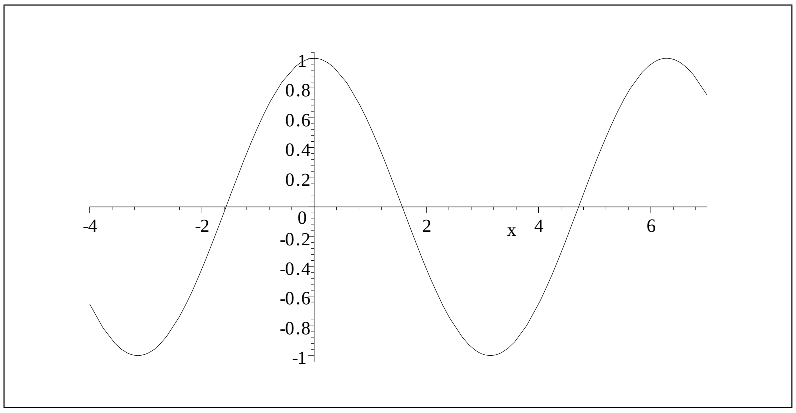
6.5 Proprietà di base delle funzioni cos e sin

La presentazione intuitiva di cos e sin riportata nel paragrafo precedente è utile ma non indispensabile; come per le altre funzioni elementari, non sono importanti i dettagli tecnici quanto tenere a mente i grafici ed alcune proprietà (più o meno implicite nei grafici). Precisiamo, inoltre, che come variabile indipendente torniamo ad utilizzare la solita $x \in \mathbf{R}$.

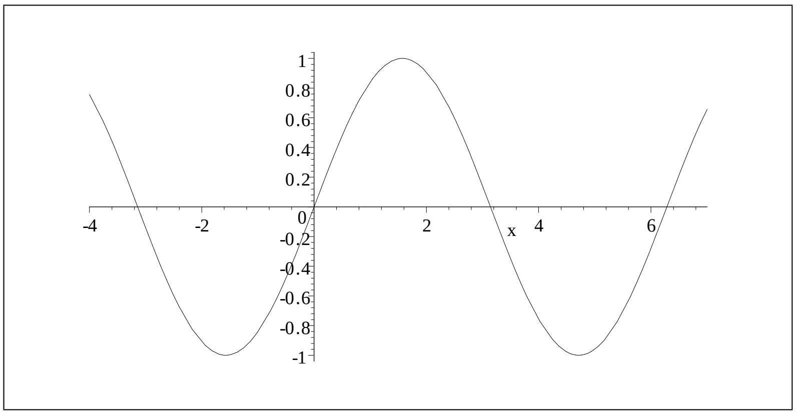
Le funzioni cos e sin sono definite su tutto $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \cos &: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \sin &: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \end{aligned}$$

e presentano i seguenti grafici



$y = \cos x$



$y = \sin x$

Entrambe le funzioni sono simmetriche: la funzione cos è pari, la funzione sin è dispari

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x, \\ \sin(-x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Entrambe le funzioni sono periodiche di periodo 2π

$$\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos x \\ \sin(x+2\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

Entrambe le funzioni assumono valori compresi tra -1 e 1

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$
$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

e precisamente sono surgettive.

6.5.1 Restrizioni invertibili

Ovviamente, in quanto periodiche, le funzioni non possono essere invertibili. Tuttavia osserviamo quanto segue.

La restrizione

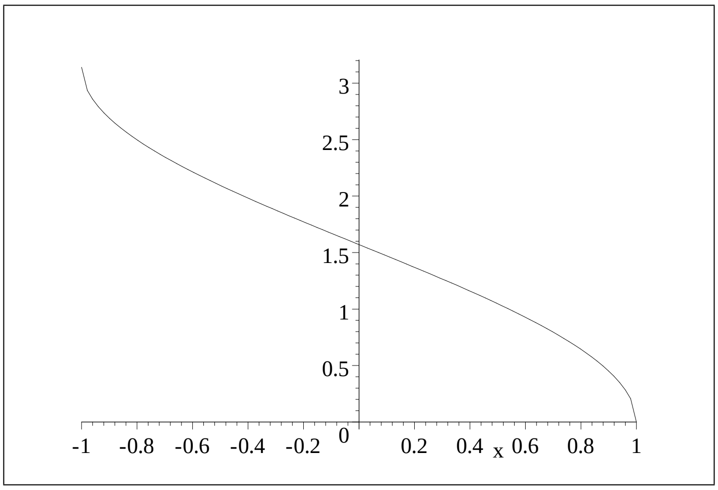
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

è strettamente decrescente, bigettiva; chiameremo $[0, \pi]$ intervallo di invertibilità di cos.

La funzione inversa della restrizione () prende il nome di *arccoseno*

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

e presenta il seguente grafico



La restrizione

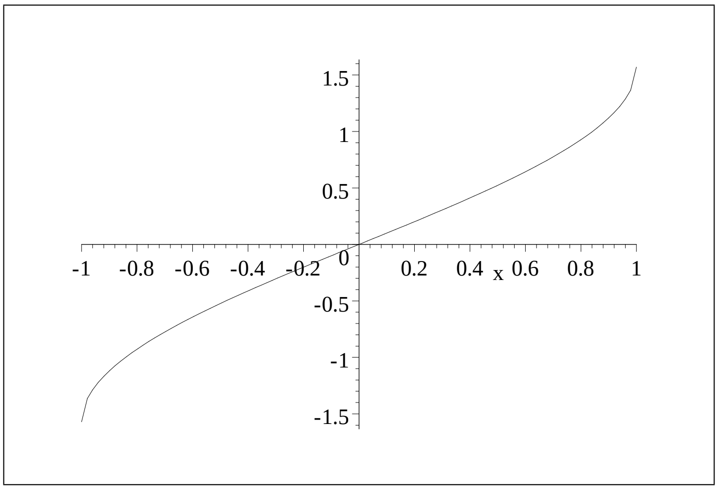
$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$

è strettamente crescente, bigettiva; chiameremo $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallo di invertibilità di sin.

La funzione inversa della restrizione () prende il nome di *arcoseno*

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

e presenta il seguente grafico



Osservazione importante

A proposito delle funzioni arccos e arcsin possiamo ripetere alcune delle considerazioni già svolte a proposito della funzione radice.

Ad esempio, se si vuole calcolare $\arcsin 1/\sqrt{2}$, (confondendo numeri e angoli) ci si chiede: quale angolo ha il seno uguale a $1/\sqrt{2}$?

Ragionando in questo modo si effettuano i seguenti passaggi:

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$$

se e solo se

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi, come vedremo tra un attimo, se e solo se

$$y = \begin{cases} \pi/4 \ (+2k\pi) \\ 3\pi/4 \ (+2k\pi) \end{cases}$$

Quindi stiamo dimenticando che arcsin è una funzione a cui, per definizione stessa di funzione, corrisponde un solo valore.

La seconda equivalenza è corretta

$$\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff y = \begin{cases} \pi/4 \ (+2k\pi) \\ 3\pi/4 \ (+2k\pi) \end{cases}$$

mentre la prima è falsa. Il ragionamento corretto è

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{con} \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

e quindi si conclude

$$y = \pi/4.$$

6.5.2 Relazioni fondamentali e valori notevoli

Se introduciamo la convenzione

$$\begin{aligned}\cos^n x &= (\cos x)^n \\ \sin^n x &= (\sin x)^n\end{aligned}$$

possiamo riportare la *relazione fondamentale*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Da questa relazione si riottengono le limitazioni (). Inoltre si deduce che cos e sin non possono mai annullarsi contemporaneamente, anzi l'una assume valore ± 1 se e solo se l'altra si annulla.

Accanto alla relazione fondamentale (), le *formule di addizione* sono alla base di molte altre formule e proprietà.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}$$

Riportiamo, infine, i cosiddetti *valori notevoli* delle funzioni cos e sin.

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1
π	-1	0
$3\pi/2$	0	-1

6.6 Altre formule

Chi ha già avuto la disavventura di imbattersi nello studio della trigonometria forse ricorderà un lungo elenco di formule da tenere a memoria: può essere importante distinguere quelle di base, viste fino ad ora, da quelle che riportiamo di seguito e che si ricavano, per via puramente algebrica, dalle informazioni precedenti. Vogliamo precisare che, a causa del loro uso frequente, anche le formule riportate in questa paragrafo sono da ritenersi a memoria.

Le formule

$$\begin{aligned}\cos(x+\pi) &= -\cos x \\ \sin(x+\pi) &= -\sin x\end{aligned}$$

possono essere ottenute in diversi modi, forse quello più semplice è attraverso le formule di addizione e i valori notevoli. Dunque le funzioni cos e sin, dopo mezzo periodo, presentano lo stesso valore cambiato di segno (e questo ci riporta alla definizione intuitiva).

Come sopra ricaviamo anche

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 - x) &= \sin x \\ \sin(\pi/2 - x) &= \cos x\end{aligned}$$

Osservazione 6.7 *Nel caso $0 \leq x \leq \pi/2$ possiamo ripensare all'interpretazione geometrica: detti α e β gli angoli acuti di un triangolo rettangolo il coseno dell'uno è uguale al seno dell'altro, infatti la somma delle misure (in radianti) dei due angoli è $\pi/2$.*

Inoltre può essere interessante notare che

$$\sin(x + \pi/2) = \cos x.$$

Questa relazione ci dice che, come avevamo anticipato, i grafici delle funzioni cos e sin sono ottenibili l'uno dall'altro con una traslazione orizzontale del grafico.

Ai fini della risoluzione degli esercizi, può fare comodo ricordare che

$$\sin(\pi - x) = \sin x.$$

Dalle formule di addizione e dall'identità fondamentale si ottengono le *formule di duplicazione*

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Esercizio 6.8 *Possiamo suggerire di provare ad ottenere le* formule di triplicazione

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

Dalle formule di duplicazione del coseno, sostituendo $x/2$ ad x, si ricavano le *formule di bisezione*

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 + \cos x}{2} \\ \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{2} \end{aligned}$$

Da queste due ultime formule, con opportuni accorgimenti sul segno, si possono ricavare esplicitamente $\cos \frac{x}{2}$ e $\sin \frac{x}{2}$.

6.6.1 Un esempio di calcolo (addizione e bisezione)

Proviamo a calcolare

$$\cos \frac{7\pi}{12}.$$

Possiamo procedere in diversi modi. In ogni caso ci sembra inevitabile il ricorso alle formula di bisezione.

Osserviamo che

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

pertanto una prima possibilità è quella di applicare la formule di addizione e ricordare i valori notevoli

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{12} = \\ &= -\sin\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Per calcolare
$$\sin\frac{\pi}{12}$$
dobbiamo osservare che
$$\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}$$
quindi utilizziamo le formule di bisezione
$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{12} &= \frac{1-\cos\pi/6}{2}\\ &= \frac{1-\sqrt{3}/2}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$
Si tratta ora di scegliere il segno di $\sin\frac{\pi}{12}$. Dal grafico, che ha costituito il nostro punto di partenza, sappiamo che nell'intervallo $[0,\pi/2]$ le funzioni cos e sin sono positive, pertanto
$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$
da cui
$$\cos\frac{7\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

In alternativa potevamo osservare che
$$\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{2}\frac{7\pi}{6}$$
quindi applichiamo direttamente le formule di bisezione
$$\begin{aligned}\cos^2\frac{7\pi}{12} &= \frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2}=\\ &= \frac{1+\cos(\pi+\frac{\pi}{6})}{2}=\\ &= \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\\ &= \frac{1-\sqrt{3}/2}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

Per calcolare il segno di $\cos\frac{7\pi}{12}$ dobbiamo ricordare (osservando il grafico) che nell'intervallo aperto $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ la funzione cos è negativa. Pertanto otteniamo, come sopra,
$$\cos\frac{7\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Esercizio 6.9 *Provare a calcolare*
$$\sin\frac{7\pi}{12}.$$

6.6.2 Formule di Werner

Esiste un ulteriore gruppo di formule (di minore importanza) riguardanti i prodotti di cos e sin; provare a ricavarle, senza doverle mandare a memoria, può essere un utile esercizio.

Dalle formule di addizione, tenuto conto delle proprietà di simmetria, si possono ottenere le *formule di sottrazione.*

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) = \\ &= \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y) = \\ &= \cos x\cos y + \sin x\sin y.\end{aligned}$$

Analogamente si ricava

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Dalle formule di addizione e di sottrazione, con qualche passaggio di natura algebrica, si ottengono le *formule di Werner.*

$$\begin{aligned}\cos x\cos y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right) \\ \cos x\sin y &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+y)-\sin(x-y)\right) \\ \sin x\sin y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)\end{aligned}$$

La prima, ad esempio, si ottiene immediatamente, sommando membro a membro

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \ldots \\ \cos(x-y) &= \ldots\end{aligned}$$

6.7 Funzione tan

A partire dalle funzioni cos e sin, si definisce una nuova funzione, denominata *tangente*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Il dominio di tan è dato da

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \cos x \neq 0\}$$

Osserviamo che

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi$$

al variare di $k \in \mathbf{Z}$. Pertanto l'insieme di definizione della funzione tangente può essere rappresentato al modo seguente

$$\cdots \cup (-3\pi/2, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \ldots$$

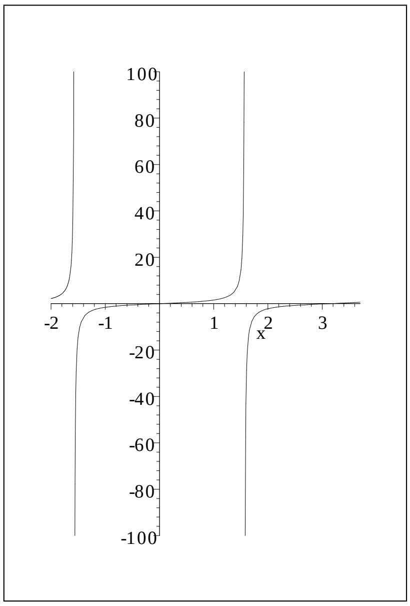
Ottenuto l'insieme di definizione, possiamo passare allo studio di periodicità e simmetria, che otterremo a partire dalle corrispondenti proprietà di cos e sin:

$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x\\ \tan(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x\end{aligned}$$

Dunque la funzione tangente è periodica di periodo π, dispari.

Si può dimostrare, infine, che la funzione tan ammette tutti i valori $y \in \mathbf{R}$.

Riportiamo anche il grafico



$y = \tan x$

Infine dai valori notevoli di cos e sin ricaviamo i valori notevoli di tan

x	$\tan x$
0	0
$\pi/6$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$

Esercizio 6.10 *Provare ad ottenere la* formula di duplicazione

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

Dobbiamo osservare che si tratta di una uguaglianza condizionata*, nel senso che i valori di x per cui ha senso il primo membro sono diversi da quelli per cui ha senso il secondo. In questi casi l'uguaglianza si ritiene vera per i valori di x per cui hanno senso ambo i membri.*

6.7.1 Funzione arctan

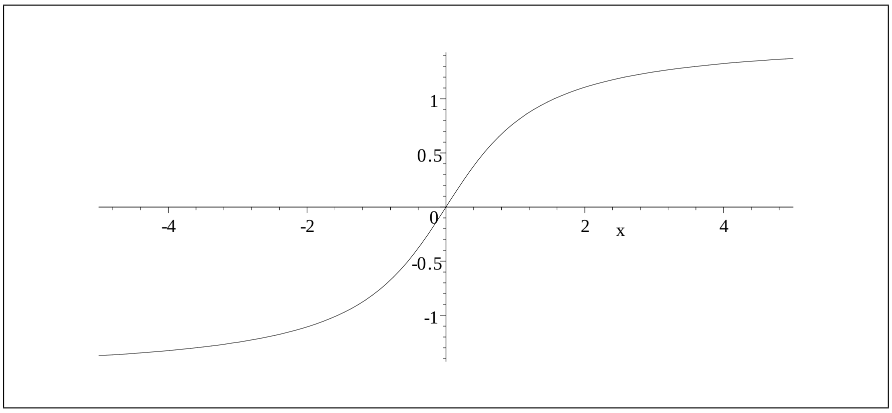
La restrizione

$$\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$$

è strettamente crescente, bigettiva; chiameremo $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallo di invertibilità di tan.

La funzione inversa di questa restrizione prende il nome di *arcotangente*

$$\arctan : \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$



6.7.2 Formule parametriche

Ai fini della risoluzione degli esercizi possono essere molto utili le seguenti formule

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\
\sin x &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\
\tan x &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

La terza formula è una semplice trascrizione della formula di duplicazione della tangente (oppure si ricava dalle prime due).

Ricavare le prime due formule è abbastanza semplice. Ad esempio, per la prima, dalla formula di duplicazione del coseno e la relazione fondamentale si ottiene

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Dividendo per $\cos^2\frac{x}{2}$ si giunge alla conclusione.

Nelle due formule () dobbiamo notare che il primo membro è definito per ogni $x \in \mathbf{R}$ ma non si può dire altrettanto del secondo membro: così come per la (), si tratta di uguaglianze condizionate.