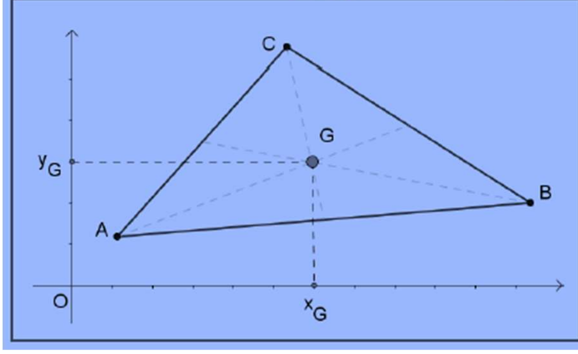
GEOMETRIA (CENNI)

● PUNTI

punti	
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	**distanza tra due punti** $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$
$x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\quad y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$	coordinate del **punto medio** $M(x_M, y_M)$ tra due punti $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$
$x_G = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$ $\quad y_G = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$	coordinate del **baricentro** $G(x_G, y_G)$ di un triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$

baricentro $G(x_G, y_G)$ di un triangolo di vertici $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$



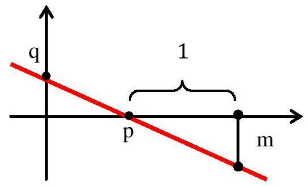
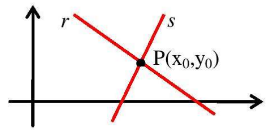
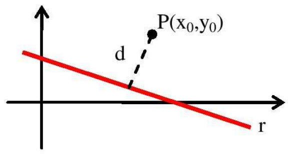
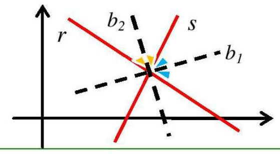
il baricentro $G(x_G, y_G)$ di un triangolo è il punto di incontro delle mediane. Le sue coordinate sono:

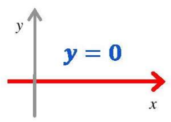
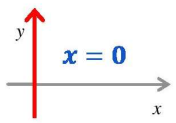
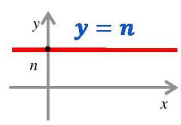
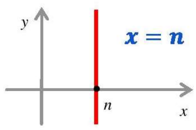
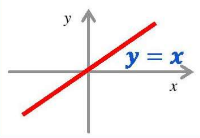
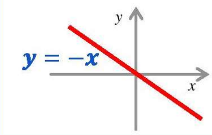
$$x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \qquad y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

inversamente: note le coordinate di due vertici del triangolo e del suo baricentro, le coordinate del terzo vertice sono:

$$x_3 = 3x_G - x_1 - x_2 \qquad y_3 = 3y_G - y_1 - y_2$$

● Retta

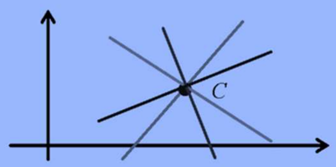
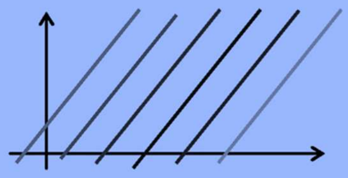
retta		
$ax + by + c = 0$ forma implicita $y = mx + q$ forma esplicita, $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$ $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ forma segmentaria	equazione della retta **m** è il coefficiente angolare **q** è l'intersezione con l'asse delle y **p** è l'intersezione con l'asse delle x	
$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	**coefficiente angolare** della retta passante per due punti $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$	
$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	equazione della **retta passante per due punti** $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	equazione della **retta passante per un punto** $P(x_0, y_0)$ di coefficiente angolare **m**	
$m_r = m_s$	condizioni di **parallelismo** tra due rette r ed s	//
$m_r = -1/m_s$ oppure $m_r \cdot m_s = -1$	condizioni di **perpendicolarità** tra due rette r ed s	$\perp$
$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione di } s \end{cases} \rightarrow x_0, y_0 \rightarrow P(x_0, y_0)$	punto $P(x_0, y_0)$ di **intersezione** tra due rette r ed s	
$d = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ retta in forma implicita $d = \frac{\lvert y_0 - mx_0 - q \rvert}{\sqrt{m^2 + 1}}$ retta in forma esplicita	**distanza** di un punto $P(x_0, y_0)$ da una retta r	
$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$	equazione delle **bisettrici** degli angoli formati da due rette r, s r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	
$tg\,\alpha = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$	tangente dell'**angolo** formato da due rette r ed s di coefficiente angolare m_r ed m_s	

rette particolari					
					
asse x	asse y	parallela asse x	parallela asse y	bisettrice I e III q.	bisettrice II e IV q.

fasci di rette

Un *fascio di rette* è l'insieme delle rette del piano aventi in comune un **punto** oppure una **direzione**

tipi di fasci

fascio proprio	fascio improprio
	
è l'insieme delle rette del piano passanti per uno stesso **punto** C detto *centro del fascio*	è l'insieme delle rette del piano aventi una **direzione** comune, cioè aventi lo stesso coefficiente angolare

come si presenta l'equazione di un fascio

l'equazione di un fascio di rette si presenta come quella di una retta (generalmente in forma implicita) nella quale compare, oltre alle incognite x ed y, almeno una volta anche un'altra lettera (k, h, t, m, p …) detta *parametro*

Esempio: $2kx - 3y + 5 = 0$ $\qquad$ $3(2t-1)x + (2t-1)y + 3t - 5 = 0$

classificazione di un fascio di rette

data l'equazione del fascio, per classificarlo bisogna:

- calcolare il coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b}$

- se m contiene il parametro k il fascio è proprio
- se il parametro si semplifica, il fascio è improprio

esempio per un fascio di rette proprio	esempio per un fascio di rette improprio
$2kx - (3k-1)y - 5 = 0 \rightarrow m = \dfrac{2k}{(3k-1)}$	$3(2k-1)x + (2k-1)y + 3 = 0 \rightarrow m = -3\dfrac{(2k-1)}{(2k-1)} = -3$

rette generatrici di un fascio

- le rette generatrici di un fascio sono le rette che danno origine al fascio e sono sempre due
- nel caso di fascio proprio le rette generatrici sono *incidenti*
- nel caso di fascio improprio le rette generatrici sono *parallele*

ricerca delle equazioni delle rette generatrici di un fascio

$(3k+1)x - (k-1)y - 5k - 3 = 0$	• dato il fascio di rette, si sviluppano i calcoli
$k\ (3x - y - 5) + x + y - 3 = 0$	• si raccoglie a fattor comune il parametro k
$\underbrace{}_{\text{retta all'infinito}} \quad \underbrace{}_{\text{retta per k = 0}}$	• le due parti così ottenute rappresentano le equazioni delle rette generatrici del fascio

ricerca del centro $C(x_0, y_0)$ di un fascio proprio di rette

$\begin{cases} \text{equazione di } r \\ \text{equazione di } s \end{cases} \rightarrow x_0, y_0 \rightarrow C(x_0, y_0)$	• si mettono a sistema le equazioni delle due rette generatrici o di due generiche rette del fascio • le soluzioni del sistema rappresentano le coordinate del centro del fascio $C(x_0, y_0)$

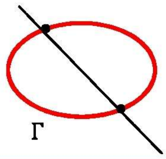
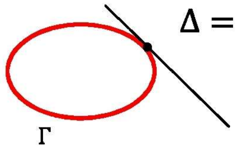
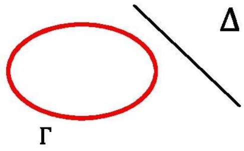
come scrivere l'equazione di un fascio di rette

$kr + s = 0$	equazione del **fascio** di rette date le due **rette generatrici** r ed s
$y - y_0 = m(x - x_0)$	equazione del fascio di rette **proprio** noto il **centro** $C(x_0, y_0)$
$y = mx + q$	equazione del fascio di rette **improprio** noto il **coefficiente angolare** m

● Proprietà comuni a tutte le coniche

proprietà comuni a tutte le coniche

condizione di appartenenza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ ad una retta r o ad una conica Γ	
per verificare se un dato punto $P_0(x_0, y_0)$ appartiene ad una retta r oppure ad una conica Γ	• si sostituiscono le coordinate di P_0, x_0 e y_0, in **r** o in $\boldsymbol{\Gamma}$ • si sviluppano i calcoli. Se si ottiene un'identità, il punto P_0 appartiene alla retta o alla conica

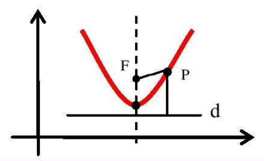
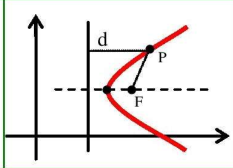
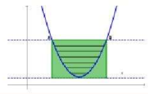
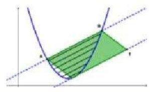
posizione di una retta rispetto ad una conica Γ		
 $\Delta > 0$	 $\Delta = 0$	 $\Delta < 0$
retta secante	retta tangente	retta esterna

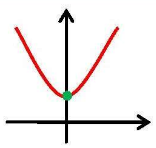
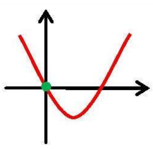
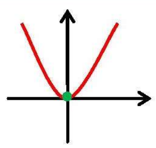
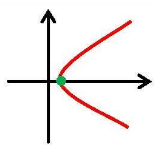
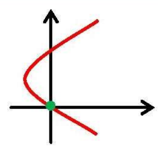
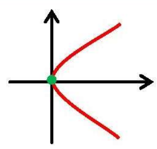
per verificare se una retta è secante, tangente o esterna ad una conica Γ bisogna:

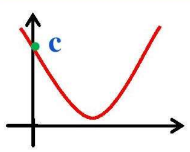
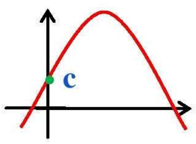
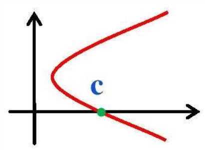
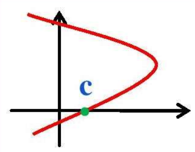
- ricavare la y dell'equazione della retta e sostituirla nell'equazione della conica
- sviluppare i calcoli ed ordinare l'equazione rispetto alla x
- dell'equazione di II grado così ottenuta calcolare il $\Delta = b^2 - 4ac$ oppure, se b è pari, il $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$
- verificare il segno del Δ
- se $\Delta > 0$ la retta è **secante** alla conica. Si hanno 2 intersezioni reali e distinte cioè **2 punti in comune**
  se $\Delta = 0$ la retta è **tangente** alla conica. Si hanno 2 intersezioni reali e coincidenti cioè **1 punto in comune**
  se $\Delta < 0$ la retta è **esterna** alla conica. Non si ha nessuna intersezione reale cioè **nessun punto in comune**

ricerca delle equazioni delle rette tangenti ad una conica	
tangenti da un punto esterno $P_0(x_0, y_0)$	tangenti parallele ad una retta di coefficiente angolare m
• si scrive l'equazione del fascio di rette ***proprio*** di centro $P_0(x_0, y_0)$: $\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$ • si ricava la y dall'equazione del fascio di rette	• si scrive l'equazione del fascio di rette ***improprio*** di coefficiente angolare $\boldsymbol{m}$ assegnato: $\boldsymbol{y = mx + q}$
• si sostituisce la y trovata nell'equazione della conica	• si sostituisce la y trovata nell'equazione della conica
• si sviluppano i calcoli e si ordina rispetto alla x ottenendo un'equazione di II grado in x	• si sviluppano i calcoli e si ordina rispetto alla x ottenendo un'equazione di II grado in x
• si ricava il Δ o il $\Delta/4$ e lo si impone uguale a 0: $\boldsymbol{\Delta = 0}$ ottenendo una equazione di II grado nell'incognita $\boldsymbol{m}$	• si ricava il Δ o il $\Delta/4$ e lo si impone uguale a 0: $\boldsymbol{\Delta = 0}$ ottenendo una equazione di I o II grado nell'incognita $\boldsymbol{q}$
• si risolve l'equazione in m ottenendo $\boldsymbol{m_1}$ ed $\boldsymbol{m_2}$	• si risolve l'equazione in q ottenendo $\boldsymbol{q_1}$ e $\boldsymbol{q_2}$
• si sostituiscono uno alla volta i valori m_1 ed m_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle due rette tangenti	• si sostituiscono uno alla volta i valori q_1 e q_2 nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle due rette tangenti

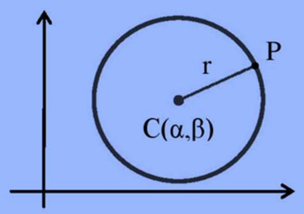
● Parabola

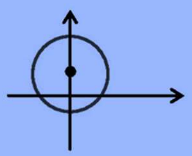
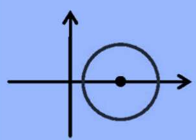
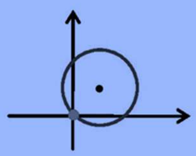
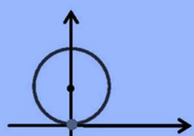
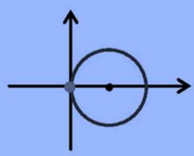
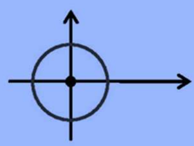
parabola		
	La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta data d detta direttrice: $\overline{PF} = Pd$	
parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y		parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x
$y = ax^2 + bx + c$	equazione completa	$x = ay^2 + by + c$
$V\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$	coordinate del **vertice**	$V\left(\frac{-\Delta}{4a}; \frac{-b}{2a}\right)$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$
$F\left(\frac{-b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	coordinate del **fuoco**	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; \frac{-b}{2a}\right)$
$x = \frac{-b}{2a}$	equazione dell'**asse**	$y = \frac{-b}{2a}$
$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$	equazione della **direttrice**	$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$
$\frac{y_0 + y}{2} = ax_0 \cdot x + b\frac{x_0 + x}{2} + c$	equazione della retta tangente alla parabola in un **suo** punto $P_0(x_0, y_0)$ detta formula di **sdoppiamento**	$\frac{x_0 + x}{2} = ay_0 \cdot y + b\frac{y_0 + y}{2} + c$
$\mathcal{A} = \frac{2}{3}\mathcal{R}$ con $\mathcal{R}$ area del rettangolo circoscritto al segmento parabolico	**area** del segmento parabolico	 

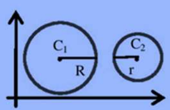
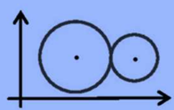
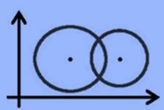
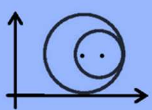
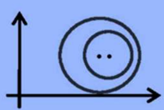
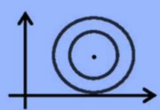
parabole particolari					
					
$b = 0$ $y = ax^2 + c$	$c = 0$ $y = ax^2 + bx$	$b = 0 \quad c = 0$ $y = ax^2$	$b = 0$ $x = ay^2 + c$	$c = 0$ $x = ay^2 + by$	$b = 0 \quad c = 0$ $x = ay^2$

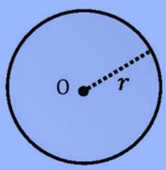
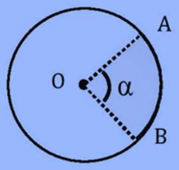
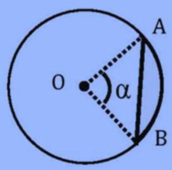
significato grafico del coefficiente **a** e del coefficiente **c**			
 $a > 0$	 $a < 0$	 $a > 0$	 $a < 0$
se a = 0 la parabola degenera in una retta			

● Circonferenza

circonferenza		
La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso C detto centro: $\overline{PC} = r$		
	$x^2+y^2+ax+by+c=0$	equazione completa
	$C(\alpha,\beta)$ $\quad \alpha=-a/2$ $\quad \beta=-b/2$	coordinate del **centro** C
	$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$	relazione del **raggio** r
$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$	equazione della circonferenza di centro $C(\alpha,\beta)$ e raggio r	
$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + a\dfrac{x_0+x}{2} + b\dfrac{y_0+y}{2} + c = 0$	equazione della retta tangente alla circonferenza in un **suo** punto $P_0(x_0,y_0)$ detta formula di **sdoppiamento**	
$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0$	equazione dell'**asse radicale** di due circonferenze	

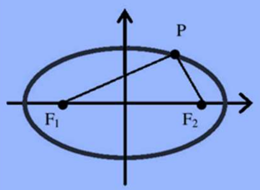
circonferenze particolari					
					
$a=0$ $x^2+y^2+by+c=0$	$b=0$ $x^2+y^2+ax+c=0$	$c=0$ $x^2+y^2+ax+by=0$	$a=c=0$ $x^2+y^2+by=0$	$b=c=0$ $x^2+y^2+ax=0$	$a=b=0$ $x^2+y^2=r^2$
se $a=b=c=0$ la circonferenza si riduce al punto $O(0{,}0)$ origine degli assi cartesiani					

posizioni reciproche di due circonferenze					
					
$C_1C_2 > R+r$ esterne	$C_1C_2 = R+r$ tangenti esterne	$R-r < C_1C_2 < R+r$ secanti	$C_1C_2 = R-r$ tangenti interne	$C_1C_2 < R-r$ interne	$C_1C_2 = 0$ concentriche

alcune formule sul cerchio e sulla circonferenza			
cerchio		settore circolare	segmento circolare ad una base
			
area del cerchio $\mathcal{A}=\pi\cdot r^2$	*circonferenza* $l=2\cdot\pi\cdot r$	$\mathcal{A}=\dfrac{\pi\cdot r^2\cdot\alpha}{360°}$	$\mathcal{A}=\mathcal{A}_{settore\ circolare}-\mathcal{A}_{triangolo AOB}$

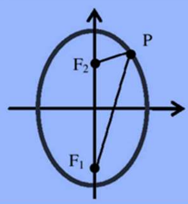
● Ellisse

ellisse



L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante:

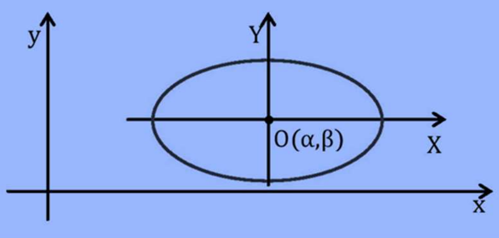
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \textit{costante}$$



ellisse con i fuochi sull'asse x		ellisse con i fuochi sull'asse y
$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$		$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a > b$	equazione in forma canonica	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a < b$
$2a$	lunghezza asse maggiore	$2b$
$2b$	lunghezza asse minore	$2a$
$2c$	distanza focale	$2c$
$c^2 = a^2 - b^2$	relazione tra i parametri a, b, c	$c^2 = b^2 - a^2$
$F_1(-c;\ 0)$ $\quad F_2(c;\ 0)$	coordinate dei **fuochi**	$F_1(0; -c)$ $\quad F_2(0; c)$
$e = \frac{c}{a}$ $\quad 0 < e < 1$	**eccentricità**	$e = \frac{c}{b}$ $\quad 0 < e < 1$
$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$	equazione della retta tangente alla ellisse nel **suo** punto $P_0(x_0, y_0)$ detta formula di **sdoppiamento**	$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$

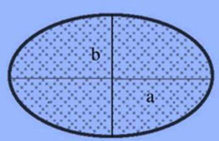
ellisse traslata

l'ellisse si dice traslata se gli assi X e Y del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani x e y



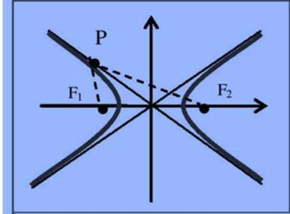
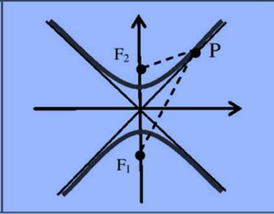
$O(\alpha, \beta)$	coordinate del centro dell'ellisse
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	equazione dell'ellisse riferita al sistema XOY

area e lunghezza dell'ellisse



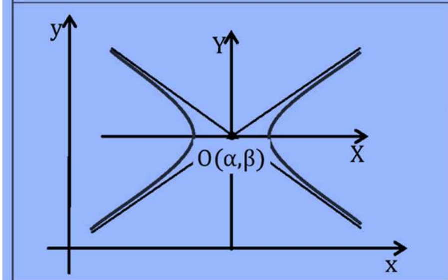
$\mathcal{A} = \pi ab$	per $a=b$ l'ellisse diventa una circonferenza e la formula diventa quella dell'area del cerchio $\mathcal{A} = \pi r^2$
$l = \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$	la lunghezza si calcola solo come sviluppo in serie di un integrale curvilineo: un buon valore approssimato è dato dalla formula del matematico indiano Ramanujan

● Iperbole

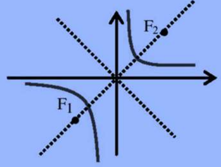
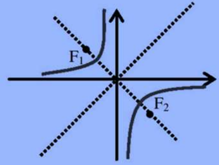
iperbole		
	L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi è costante: $$\lvert\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\rvert = costante$$	

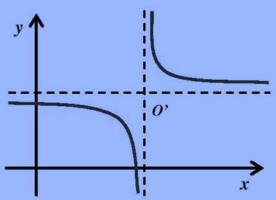
iperbole con i fuochi sull'asse x	iperbole con i fuochi sull'asse y
$\lvert\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\rvert = 2a$	$\lvert\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\rvert = 2b$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	equazione in forma canonica	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$
$2a$	lunghezza asse trasverso	$2b$
$2b$	lunghezza asse non trasverso	$2a$
$2c$	distanza focale	$2c$
$c^2=a^2+b^2$	relazione tra i parametri a, b, c	$c^2=a^2+b^2$
$F_1(-c;\ 0)$ $F_2(c;\ 0)$	coordinate dei **fuochi**	$F_1(0;-c)$ $F_2(0;\ c)$
$y=\pm\frac{b}{a}x$	equazione degli **asintoti**	$y=\pm\frac{b}{a}x$
$e=\frac{c}{a}$ $e>1$	**eccentricità**	$e=\frac{c}{b}$ $e>1$
$b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$	equazione della retta tangente alla iperbole nel **suo** punto $P_0(x_0,y_0)$ detta formula di **sdoppiamento**	$b^2x_0x-a^2y_0y=-a^2b^2$

iperbole traslata		
l'iperbole si dice traslata se gli assi X e Y del suo sistema di riferimento sono paralleli agli assi cartesiani x e y		
	$O(\alpha,\beta)$	coordinate del centro dell'iperbole
	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse X riferita al sistema XOY

iperbole equilatera: a = b		
$x^2 - y^2 = a^2$	equazione	$x^2 - y^2 = -a^2$
$c^2 = 2a^2$	relazione tra a, c	$c^2 = 2a^2$
$F_1(-c;\ 0)$ $F_2(c;\ 0)$	coordinate dei fuochi	$F_1(0; -c)$ $F_2(0;\ c)$
$y = -x$ $y = x$	equazione degli asintoti	$y = -x$ $y = x$

 k > 0	iperbole equilatera ruotata di $\pm 45°$ equazione $xy = k$	 k < 0
$F_1(-\sqrt{2k}\,; -\sqrt{2k})$ $F_2(\sqrt{2k}\,; \sqrt{2k})$	coordinate dei fuochi	$F_1(-\sqrt{-2k}\,; \sqrt{-2k})$ $F_2(\sqrt{-2k}\,; -\sqrt{-2k})$

iperbole equilatera ruotata e traslata detta funzione omografica		
	equazione	$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $c \neq 0$ $ad - bc \neq 0$
	coordinate di O'	$O'\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$
	equazione degli asintoti	$x = -\frac{d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$