Calcolo differenziale

1. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

   ☐ Ogni funzione continua in un punto è derivabile in quel punto

   √ Ogni funzione derivabile in un punto è continua in quel punto

   ☐ Una funzione è derivabile in un punto se e solo se è continua in quel punto

   √ Una funzione continua in un punto non è detto che sia derivabile in quel punto

2. Si scriva il più grande insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ in cui la funzione f indicata risulta derivabile.

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$ $\underline{\quad I = (0, +\infty) \quad}$

   (b) $f(x) = x^3$ $\underline{\quad I = \mathbb{R} \quad}$

   (c) $f(x) = x\sqrt{x}$ $\underline{\quad I = [0, +\infty) \quad}$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\underline{\quad I = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad}$

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni si dica se è derivabile nel punto x_0 indicato.

   (a) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$ Non derivabile

   (b) $f(x) = |x|$, $x_0 = 1$ Derivabile

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$ Non derivabile

   (d) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$ Derivabile

4. Si dica quali tra le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di Fermat nell'intervallo indicato.

   ☐ $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$

   ☐ $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$

   √ $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$

   √ $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [0, \pi]$

5. Se $f(x) = \sqrt{9 - x}$ con $x \in [0, 9]$, si dica quali tra le seguenti affermazioni sono garantite dal teorema di Lagrange.

   ☐ Esiste c compreso tra 0 e 9 tale che $f'(c) = \frac{1}{3}$

   √ Esiste c compreso tra 0 e 9 tale che $f'(c) = -\frac{1}{3}$

   ☐ Esiste c compreso tra 0 e 9 tale che $f'(c) = 0$

   ☐ $f'(c) = -\frac{1}{3}$ per ogni c compreso tra 0 e 9

6. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.

   - ☐ f è strettamente crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$
   - $\surd$ f è crescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$
   - $\surd$ f è decrescente in (a, b) se e solo se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$
   - $\surd$ Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora f è strettamente decrescente in (a, b)

7. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b), tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.

   - ☐ f' è strettamente decrescente in (a, b)
   - $\surd$ Per ogni $x, x_0 \in (a, b)$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
   - $\surd$ f' è crescente in (a, b)
   - ☐ $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$

8. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

   - $\surd$ Per $x \to 0$, $e^x = 1 + x + o(x)$
   - ☐ Per $x \to 0$, $e^x = 1 + o(x^2)$
   - $\surd$ Per $x \to 0$, $e^x = 1 + x + O(x)$
   - ☐ Per $x \to 0$, $e^x = 1 + o(x)$

9. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

   - $\surd$ Per $x \to 0$, $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
   - $\surd$ Per $x \to 0$, $\operatorname{sen} x = x + o(x)$
   - $\surd$ Per $x \to 0$, $\operatorname{sen} x = x + O(x)$
   - $\surd$ Per $x \to 0$, $\operatorname{sen} x - x \sim -\frac{x^3}{6}$

10. Se per $x \to 0$, $f(x) = O(x^4)$, tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

    - $\surd$ Per $x \to 0$, $f(x) = o(x^2)$
    - $\surd$ Per $x \to 0$, $f(x) = o(x^3)$
    - ☐ Per $x \to 0$, $f(x) \sim x^4$
    - ☐ Per $x \to 0$, $f(x) = o(x^7)$