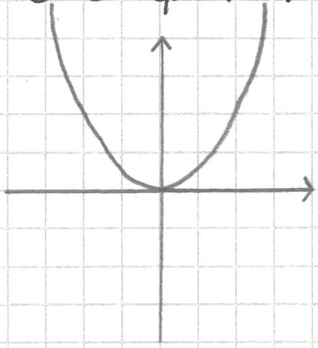
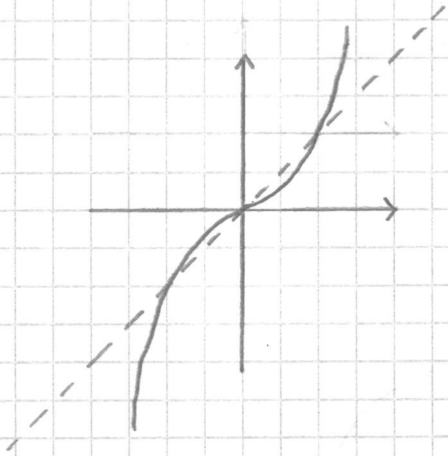
13 giugno 2016

TEORIA

① Una Funzione si dice pari o dispari quando cambiando il segno della x nel primo caso la Funzione rimane uguale, nel secondo la Funzione cambia di segno. Graficamente, una Funzione pari è simmetrica rispetto all'asse y mentre se è dispari sarà simmetrica rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante



x^2 pari



x^3 dispari

② Una Funzione si dice monotona quando ha una data pendenza.

Esistono 4 tipi di monotonia:

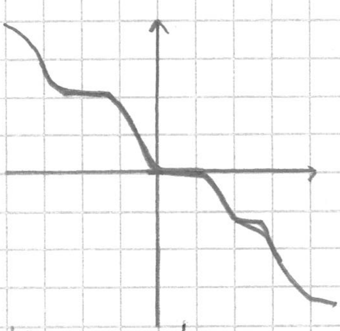
- monotona decrescente

  una $f(x)$ è monotona decrescente se $\forall\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- monotona crescente

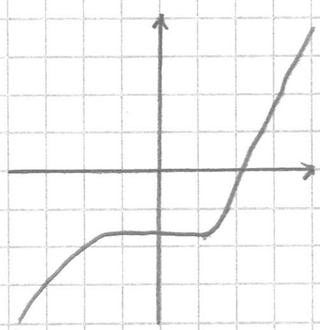
  una $f(x)$ è monotona crescente se $\forall\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Strettamente crescente

  una $f(x)$ è strettamente crescente se $\forall\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Strettamente decrescente

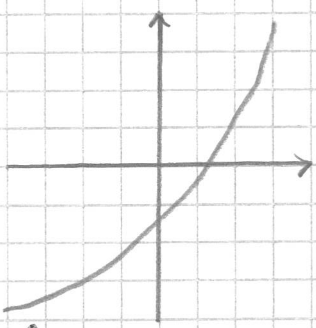
  una $f(x)$ è strettamente decrescente se $\forall\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



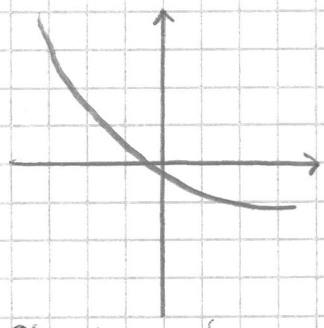
Monotona decrescente



Monotona crescente



Strettamente crescente



Strettamente decrescente

③
Una successione, se è divergente, significa che all'aumentare di ~~la somma~~ tutti i suoi numeri continueranno a crescere fino all'infinito quindi è impossibile che abbia un estremo superiore.

④
Se abbiamo due successioni, una che diverge ad infinito e una limitata e ~~quindi~~ ~~[illegible]~~ le moltiplichiamo non è necessariamente detto che il risultato diverga il risultato può tanto divergere quanto convergere oppure essere irregolare

⑤
La funzione $f(x)=\frac{1}{x^p}$ è integrabile in senso improprio in $(0,1]$ se e solo se $p<1$, ~~ma~~ e in $[1,+\infty)$ se $p>1$

⑥ POLINOMIO DI MACLAURIN
Data una funzione f derivabile n volte in $x=0$ esiste uno ed un solo polinomio di grado $\leq n$, chiamato T_n, con la seguente proprietà

$$T_n(0)=f(0),\ T_n'=f'(0),\ T_n''=f''(0),\ \dots,\ T_n^{(n)}=f^{n}(0)$$

questo polinomio, detto polinomio di MacLaurin di $f(x)$ di grado n, è:

$$T_n(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+\frac{1}{3!}x^3f'''(0)+\dots+\frac{1}{n!}x^nf^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

⑦
Integrale

⑧
Teorema degli zeri

Sia:

- f continua in $[a,b]$
- $f(a)\cdot f(b)<0$

Allora esiste $c\in(a,b)$ tale che $f(c)=0$

Se f è strettamente monotona, lo zero è unico

5 luglio 2016

(12)
Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ con $L \in \mathbb{R}$ allora la serie converge, che significa che ~~è~~ la somma di tutte le a_n tende a quel numero L

Esempio di Serie Convergente
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ Serie Armonica generalizzata con $\alpha > 1$

(13)
Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$ allora la serie divergerà a $\pm\infty$

Esempio di Serie Divergente
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Serie Armonica generalizzata con $0 < \alpha < 1$

(14)
Una funzione strettamente monotona in un intervallo I è invertibile in ~~quell~~ quell'intervallo

(15)
Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si chiama Serie numerica, o Sommatoria, la somma di tutte le a_n con n che va all'infinito. Si denota con $\sum_{n=}^{\infty} a_n$
Una serie può convergere se il $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ ma nel caso della serie armonica, il lim tende a 0 ma la serie diverge

(16)
Media Integrale
Sia f una funzione da $[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile in $[a,b]$. Si definisce media integrale della funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a,b]$ il numero reale

$$M(f,[a,b]) = \frac{1}{b-a} \int_b^a f(x)\,dx$$

Teorema della Media Integrale
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. $\exists\ x_0 \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt = f(x_0)$$

(17)

Una successione si dice irregolare quando il limite per $n \to \infty$ non esiste

Esempio: $\{-1\}^n$

(18)

Una successione si dice limitata quando è limitata sia superiormente che inferiormente.

limitata inferiormente significa che:

$\exists m \in \mathbb{N} \mid \quad m \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

limitata superiormente significa che:

$\exists M \in \mathbb{N} \mid \quad M \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(19)

Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

Def (PRIMITIVA)

Si dice che una funzione G, derivabile in $[a,b]$ è una primitiva di f in $[a,b]$ se

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Teorema LIBRO

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, e G è una sua primitiva su $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

<u>Dimostrazione</u>

Siano $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ punti che suddividono l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli di uguale grandezza. Allora, aggiungendo e togliendo $G(x_j)$ per $j = 1, 2, \dots, n-1$ si ha:

$$G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_0) = [G(x_n) - G(x_{n-1})] + [G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})] + \dots$$
$$\dots + [G(x_2) - G(x_1)] + [G(x_1) - G(x_0)] = \sum_{j=1}^{n} [G(x_j) - G(x_{j-1})]$$

Applichiamo il Teorema di Lagrange alla funzione $G(x)$ su ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$. Esiste allora $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tale che

$$G(x_j) - G(x_{j-1}) = (x_j - x_{j-1})G'(\xi_j) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Questo perché per l'ipotesi dice che G è una primitiva di f e perciò

Se prendiamo $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ allora $\ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2}$ di conseguenza riusciamo a determinare $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n \geq \frac{\ell}{2} > 0 \qquad \forall n > n_0$$

che è esattamente quello che volevamo dimostrare.

(26)

Serie a segno alternato convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$$

(27)

$\operatorname{sen} x$ con $x \in [0, \pi]$ verifica il teorema di Weierstrass poiché $\exists\, 0, \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$ e $\operatorname{sen} 0 \leq \operatorname{sen} x \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$

$0 = X_m$ e $\frac{\pi}{2} = X_M$

(28)

$|x|$ non è derivabile in $x = 0$

(29)

Una funzione si dice limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R} \mid M > f(x)$ $\forall x \in \operatorname{Dom} f$.

(30)

Polinomi di MacLaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

(31)

Una funzione è derivabile se è continua.

$$\int e^{-t^2} \cos t$$

$$F'(x) = e^{-t^2} \cos t$$

(32)

$f(x) = x^2$ è continua nell'intervallo $[-1, 1]$? SI

$$-1 \cdot 1 = -1 < 0$$

$$\exists\, c = 0 \mid f(c) = 0$$

(33)

$f(x) = \cos x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

$\cos \pi \neq 0 \qquad \cos -\pi \neq 0$

Non rispetta le ipotesi del teorema di Fermat

(34)

$$e^{2x} = 1 + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!}$$

(35)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2\cancel{h}x + h^2 - \cancel{x^2}}{\cancel{h}} = 2x + h = 2x$$

(36)

$$\frac{(1+1) - 0}{1} = 2$$

$2 = f'(c) =$

$2x = f(c)$

$x + x^2 = 2x$

$x^2 - x = 0$

$c - c^2 = 2x$

$\frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} = 2$

$x_{2} = \frac{1 \pm 1}{2}$ 0 1

Lagrange

Sia $f(x): [a,b] \to R$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) allora $\exists c \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a} = f'(c)$$

<u>Dimostrazione</u>

prendiamo in considerazione la retta che congiunge $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$r(x) = f(a) - \frac{f(a)-f(b)}{b-a}(x-a) = f'(c)$

$\forall x \in [a,b]$

$w(x) = f(x) - r(x) = f(x) - \left[\cancel{f(a)}\frac{f(a)-f(b)}{b-a}(x-a)\right]$

tale che $w(a) = 0 = w(b)$

Essendo $w(x)$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

$w'(x) = f'(x) - \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$

~~Secondo~~ il teorema di Lagrange é verificato $\Leftrightarrow \exists c \in (a,b)$ t.c. $f'(c)=0$

per il teorema di ~~Lagrange~~ Weierstrass $\exists\ x_1$ e $x_2 \in (a,b)$ t.c.

$w(x_1) = \min_{[a,b]} w \qquad w(x_2) = \max_{[a,b]} w \qquad \Rightarrow \qquad w(x_1) \leq w(x) \leq w(x_2)$

qui abbiamo due possibilita'

$x_1 = x_2$

allora $w(x)$ e' costante e quindi $w'(x)=0$ e abbiamo dimostrato il teorema

$x_1 \leq x_2$

allora almeno uno dei due e' diverso da a o b. Secondo il teorema di Fermat se $x_1 \in (a,b)$ ed è estremante

$w'(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = c$

$\blacksquare$

①

L'immagine di $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definita in questo modo non è un intervallo ~~uno~~ bensí un insieme.

Se fosse stata definita in questo modo

$f:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ sarebbe un intervallo, nonostante le due notazioni hanno lo stesso significato.

②

No, è vero il viceversa, ogni serie Assolutamente Convergente é anche Convergente

③

e^{t^2} è continua in tutto $\mathbb{R}$

$F'(x)=e^{t^2}$

④

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(\cancel{0}+h)^4-0^4}{h}=\frac{h^{\cancel{4}}}{\cancel{h}}=\frac{h}{1}=\frac{0}{1}=0$$

⑤

Una successione irregolare é $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

⑥

Una Serie numerica irregolare é $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$

46

Sia $f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ ~~continua in $[a,b]$~~ e continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) sia $x_0 \in (a,b)$ se x_0 è estremante allora

$$f'(x_0)=0$$

Dimostrazione

prendiamo x_0 come max locale. Essendo f derivabile in x_0 ciò significa

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x_0)$$

Essendo x_0 massimo possiamo prendere un incremento e sarà

$$f(x_0+h)-f(x_0) \leq 0$$

se dividiamo tutto per h abbiamo due possibilità.

$h>0$ $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

$h<0$ $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

ponendo il limite per $h \to 0$ abbiamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

che sono proprio derivate destra e sinistra di $f'(x_0)$ e dato che f è derivabile in x_0

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

e l'unico caso è

$$f'_-(x_0) = 0 = f'_+(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$$

(47)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ~~limitata e integrabile in [a,b]~~ continua in $[a,b]$. $\exists\, x_0 \in [a,b]$ t.c.

$$\frac{1}{b-a}\int_b^a f(x) = f(x_0)$$

$f(x) = x^3 \qquad x \in [1,2]$

$$\frac{1}{2-1}\int_1^2 x^3 = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = +\left(4 - \frac{1}{4}\right) = +\frac{15}{4}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{2}\,2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(49)

$$\frac{f(x^2-4)}{(x-2)}$$

ha discontinuità di 3° tipo nel punto 2

(50)

la funzione $\frac{1}{x^p}$ è integrabile in $[1,+\infty]$ se $p>1$

(51)

~~f(x)~~ $\frac{1}{x}$ è limitata superiormente

(52)

~~è vera~~ è falsa poiché ogni serie Assolutamente convergente è anche convergente, ma non vale il viceversa

(21)

Sia f una funzione definita su un intervallo $[a,b]$. Si definisce integrale indefinito di f su $[a,b]$ l'insieme di tutte le primitive della funzione f in $[a,b]$ si indica col simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

(22) TEOREMA CONFRONTO SUCCESSIONI

Siano $\{a_n\}$, ~~e~~ $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

supponiamo inoltre che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

<u>Dimostrazione</u>

per ipotesi sia a_n che c_n convergono a $\ell \in \mathbb{R}$ quindi per definizione di limite abbiamo che

$$\forall n > n_1 \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

$$\forall n > n_2 \quad \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$$

dato che b_n è compreso tra a_n e b_n abbiamo

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \leq b_n \leq \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$$

~~che~~ da cui

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

dalla catena di disuguaglianze abbiamo

$$\ell + \varepsilon < b_n < \ell - \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

~~ex~~

~~$\frac{a_n}{b_n}$~~ Definizione Derivata

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$; f si dice derivabile in $x_0 \in (a,b)$ se esiste finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Tale limite prende il nome di derivata prima di f in x_0 e si indica con

$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx} \qquad D(f(x_0)) \qquad \dot{f}(x_0)$$

24 CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi con $b_n \neq 0$ per $n\in\mathbb{N}$. Supponiamo inoltre che esista il

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\ell$$

le due serie hanno lo stesso carattere.

~~Dimostrazione~~

~~si può scegliere $\varepsilon>0$ tale che $\ell-\varepsilon>0$~~

25 PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell > 0$$

dove ℓ è un numero reale positivo, allora esiste un numero naturale $n_0\in\mathbb{N}$ tale che per ogni $n>n_0$ si ha $a_n>0$

Dimostrazione

per definizione di limite di successione abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq n_0 \text{ si ha che } |a_n-\ell|<\varepsilon$$

la condizione $|a_n-\ell|<\varepsilon$ si lascia esprimere in modo equivalente come

$$\ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon$$

$G'(\xi_j) = f(\xi_j)$ quindi

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j) = S_n$$

dove S_n è una somma n-esima di Cauchy-Riemann di f.

dato che l'identità scritta vale per ogni n, quindi possiamo allora far tendere n a $+\infty$ trovando

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

SLIDE PROF

D

(20)

~~Teorema di Lagrange~~

Teorema di Weierstrass

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R})$ continua in $[a,b]$. Allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$ ossia esistono x_m e x_M in $[a,b]$ tali che

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

(21)

Teorema di Lagrange

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Dimostrazione

Considerando la retta che congiunge $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

e sia, per ogni $x \in [a,b]$

$$W(x) = f(x) - r(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

si ha che

$W(a) = 0 = W(b)$

W è continua in $[a,b]$, è derivabile in (a,b)

$\forall x \in (a,b)$

$$W'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Tesi del teorema di Lagrange $\Leftrightarrow \exists\, c \in (a,b) : W'(c) = 0$

per il teorema di Weierstrass: $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ tale che

$$M = W(x_1) = \max_{[a,b]} W \qquad W(x_2) = \min_{[a,b]} W = m$$

$\forall x \in [a,b] \qquad m \leq W(x) \leq M \quad (1)$

Ci sono due possibilità

1) $m = M \Rightarrow$ da (1) W è costante $\Rightarrow W'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ Teorema dimostrato

2) $m < M$

Almeno uno tra x_1 e x_2 non coincide né con a né con b

Per esempio sia $x_1 \in (a,b)$

Applicando Fermat a W

W è derivabile in x_1

x_1 punto di estremo locale $\Rightarrow W'(x_1) = 0 \qquad c = x_1$

22

~~Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per Dom f.~~
~~Direme che f ha un punto di discontinuità di terza specie se i due limiti~~

Una funzione si dice discontinua in un punto x_0 del suo dominio se $\lim_{x \to x_0} f(x)$
$\nexists$, è infinito o $\exists$ ma $\neq f(x_0)$

23

ogni serie Assolutamente convergente è anche Convergente Semplice
NON vale il viceversa

⑨ Una funzione si dice continua in un punto quando in quel punto coincide con il suo limite

$f(x)$ é continua nel punto c se

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Una funzione si dice derivabile ~~continua~~ in un punto ~~intervallo~~ quando ∃ il limite del ~~é continua in ogni punto dell'intervallo~~ rapporto incrementale

~~$\forall c \in I$~~

~~$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$~~

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$|x|$ é continua in $\mathbb{R}$ ma non derivabile in 0

Derivabilità $\Longrightarrow$ Continuità

Continuità $\not\Longrightarrow$ Derivabilità

⑩ Teorema di Fermat

Sia $f(x)$ una funzione con dominio $Dom f \subseteq \mathbb{R}$. Se $x_0 \in Dom f$ é estremante allora

$$f'(x_0) = 0$$

<u>Dimostrazione</u>

per ipotesi $f(x)$ é derivabile nel punto x_0 quindi vale la condizione

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

Dimostriamo il teorema nel caso in cui x_0 sia un punto di massimo relativo

poiché x_0 é un punto di massimo relativo, dato un incremento h vale

$$f(x_0+h) - f(x_0) \le 0 \longrightarrow \text{perché } f(x_0) \text{ é il massimo!}$$

Dividiamo la disuguaglianza per h e otteniamo

Se $h > 0$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \le 0$$

Se $h < 0$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{} \ge 0$$

Se passiamo al limite per $h \to 0$ in entrambe le disuguaglianze,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

I due limiti sono rispettivamente limite destro e sinistro della derivata prima

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

per l'ipotesi di derivabilità di f in x_0 : due limiti devono coincidere, quindi essendo

$$f'_+(x_0) \geq 0 \quad e \quad f'_-(x_0) \leq 0$$

l'unica possibilità è

$$f'_+(x_0) = 0 = f'_-(x_0)$$

quindi

$$f'(x_0) = 0$$

(11)

Criterio del confronto

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Se la serie termine b_n, anche la serie di termine a_n converge, Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

  e, detti R_n e R'_n il resto n-esimo della serie di termine a_n e b_n, rispettivamente, risolta $0 \leq R_n \leq R'_n$
- Se la serie di termine a_n diverge, anche la serie di termine b_n diverge