Analisi Matematica - 29.3.2019 - prima parte

Proprietà globali delle funzioni continue

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, continua in I
($\forall c \in I$ f è continua in c, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$)

Prima proprietà: risolubilità dell'eq. $f(x) = 0$
Si ha una formula risolutiva se
- f è un polinomio di grado ≤ 4,
- in altri casi semplici (per esempio $\log x + 1 = 0$)

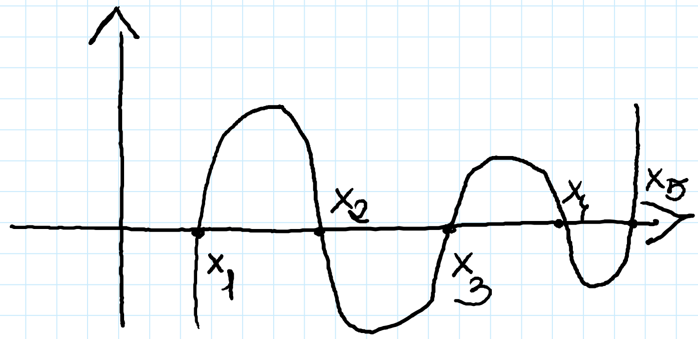
In generale non si sanno trovare le eventuali soluzioni.

$$e^x + x = 0$$

Non si riesce a "ricavare" x in nessun modo.

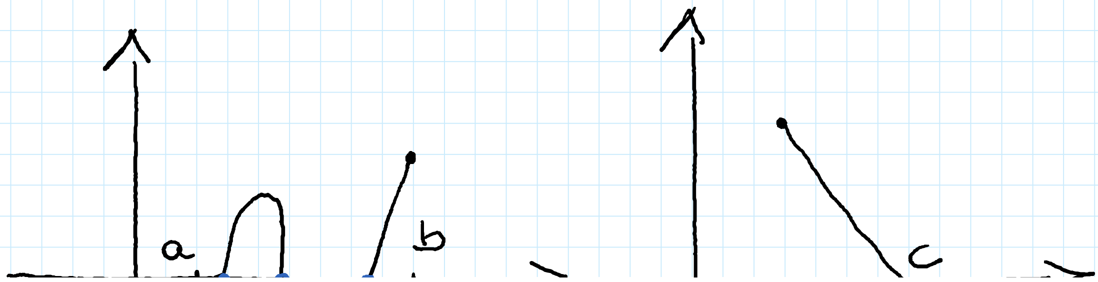
__Def__: Data $f : I \to \mathbb{R}$, ogni $c \in I$ tale che $f(c) = 0$ si chiama **zero di f**.

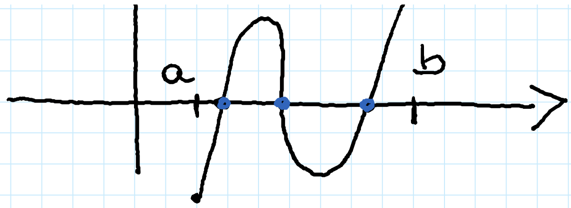
c zero di $f \Rightarrow (c, 0) \in \operatorname{Graf} f$
Geometricamente: intersezioni tra $\operatorname{Graf} f$ e asse x

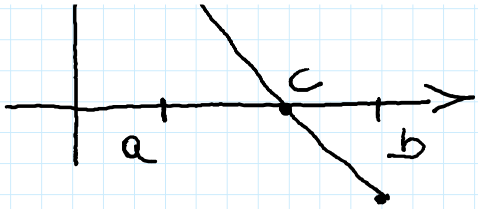


$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ zeri di f

__Teorema__: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.
Se f è strett. monotona, c è unico.







OSS: $f(a)\cdot f(b)<0$ significa che $f(a)$ e $f(b)$ devono essere entrambi diversi da 0 e di segno discorde.

• Studiare l'eq. $e^x+x=0 \quad x\in[-1,0]$

$f(x)=e^x+x \quad x\in[-1,0]$

f è continua (somma di funzioni elementari continue)

$f(-1)=e^{-1}-1<0 \qquad (e^{-1}<1)$

$f(0)=e^0+0=1>0$

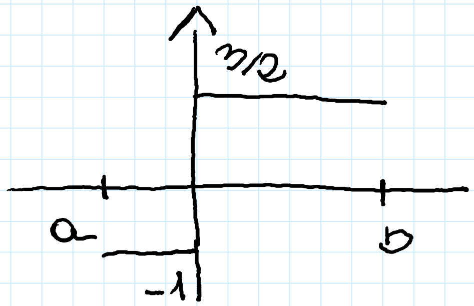
Per il teo. degli zeri esiste una $c\in(-1,0)$ t.c.

$e^c+c=0$

Poiché f è strett. crescente (somma di funzioni strett. crescenti) c è l'unico zero di f.

OSS: il teo. non vale se manca qualcuna delle ipotesi.

1) se f non è continua

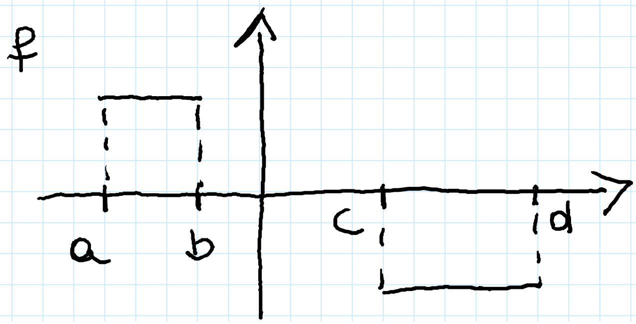


f non è continua in $x=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$

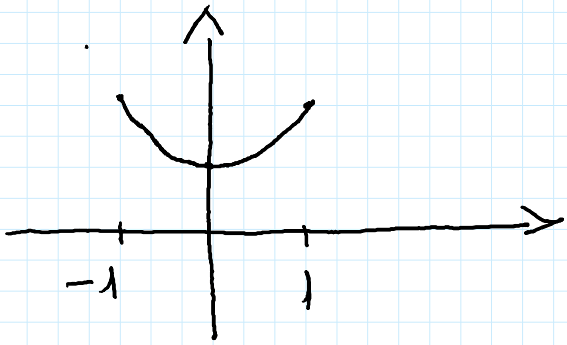
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{3}{2}$

2) se f non è def. in un intervallo:



$f:\underbrace{[a,b]\cup[c,d]}_{\text{non è un intervallo}}\to\mathbb{R}$

3) Se non è vero che $f(a)\cdot f(b)<0$



$f(x)=x^2+1$
$x\in[-1,1]$

- Studiare l'eq. $\log_{\frac{1}{2}} x - x = 0 \quad x\in(0,+\infty)$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - x \quad x\in(0,+\infty)$ è continua

Avrei bisogno di $a>0$ tc $f(a)<0$ e $b>0$ tc. $f(b)>0$ (o viceversa) per concludere.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = [+\infty - 0] = +\infty > 0 \Rightarrow \exists\, a>0$ tc. $f(a)>0$

(per permanenza del segno)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = [-\infty-\infty] = -\infty < 0 \Rightarrow$

$\exists\, b>0$ tc. $f(b)<0 \qquad \Rightarrow$ teo degli zeri

$\exists\, c\in(0,+\infty)$ tc. $f(c)=0$

c è l'unico zero di f perché f è strett. decrescente.

- Studiare l'eq. $\operatorname{tg} x + e^x - 5 = 0 \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

$f(x) = \operatorname{tg} x + e^x - 5 \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

f è continua e strett. crescente

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \left[-\infty + e^{-\pi/2} - 5\right] = -\infty$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \left[+\infty + e^{\pi/2} - 5\right] = +\infty$

Ragioniamo come nell'esempio precedente

$\exists\, a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

Per il teo. degli zeri esiste un unico c t.c. $f(c) = 0$.

Seconda proprietà: esistenza del massimo e/o del minimo.

Non tutte le funzioni, anche se continue, ammettono massimo (e/o minimo)

$f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im} f = (0, +\infty)$

$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im} f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = x \quad x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{tg} x \quad x \in \mathbb{R}$

Quali ipotesi ci vogliamo su f affinché esistano il max e/o il min di f?

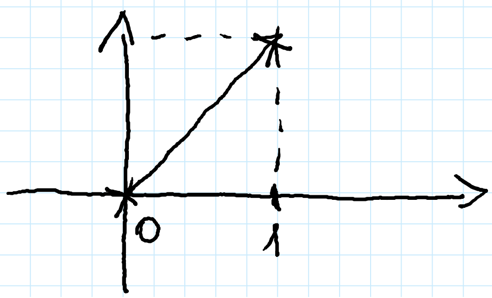
<u>Teorema</u> (di WEIERSTRASS) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ continua. Allora f ammette massimo e minimo cioè esisto $\underbrace{x_m, x_M}_{\text{p.ti di min e max di } f} \in [a,b]$ tali che

$$\forall x \in [a,b] \quad \underbrace{f(x_m)}_{m = \text{minimo di } f} \le f(x) \le \underbrace{f(x_M)}_{= M \text{ massimo di } f}.$$

OSS: Ipotesi essenziale: dominio di f intervallo chiuso e limitato.

Tutte le ipotesi sono necessarie:

1) $f(x) = x \quad x \in (0,1)$ (intervallo non chiuso)



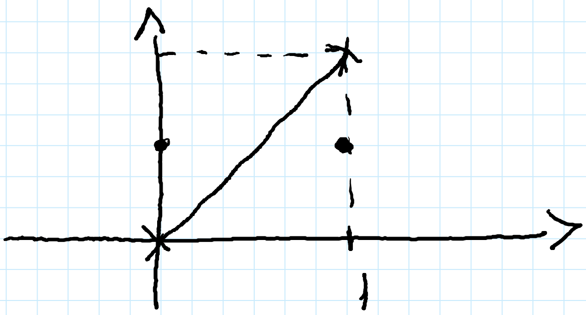
$\operatorname{Im} f = (0,1)$

2) $f(x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$ (intervallo non limitato)

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 0 \text{ oppure } x = 1 \end{cases} \qquad f : [0,1] \to \mathbb{R}$

f è discontinua in $x=0$ e $x=1$



$\mathrm{Im}\, f = (0,1)$

Teorema (dei valori intermedi) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(a) \neq f(b)$. Sia λ tale che

$$f(a) < \lambda < f(b) \quad (\text{oppure } f(a) > \lambda > f(b))$$

allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = \lambda$.

(f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$)

Dim: Fisso λ come sopra, e considero

$$g(x) = f(x) - \lambda \qquad x \in [a,b]$$

f continua $\Rightarrow$ g continua

Quindi basta verificare che $g(a) \cdot g(b) < 0$

$$g(a) = f(a) - \lambda < 0 \quad (\text{oppure } > 0)$$
$$g(b) = f(b) - \lambda > 0 \quad (\text{oppure } < 0)$$

Per il teo degli zeri esiste $c \in (a,b)$ t.c.

$$g(c) = 0$$
$$f(c) - \lambda = 0$$
$$f(c) = \lambda.$$

Conseguenza: immagine di una funzione continua

Teorema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora

$$\operatorname{Im} f = [m, M]$$

ove m ed M sono rispett. il minimo e il massimo di f (esistono per il teo. di Weierstrass).

Dim: $\operatorname{Im} f \subseteq [m, M]$:

$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$ (def. di max e min)

$\Rightarrow f(x) \in [m, M] \quad \forall x \in [a,b]$

$[m, M] \subseteq \text{Im} f$:

Sia $\lambda \in (m, M)$ $\quad m, M \in \text{Im} f \Rightarrow$

$\exists\, x_m, x_M$ tali che $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$

Quindi

$$f(x_m) = m < \lambda < M = f(x_M) \Rightarrow$$

$$f(x_m) < \lambda < f(x_M) \Rightarrow \text{(teo. val. int.)}$$

f assume il valore λ:

$\exists\, c$ nell'intervallo di estremi x_m, x_M tale che $f(c) = \lambda \Rightarrow \lambda \in \text{Im} f$.

Se $\lambda = m$ o $\lambda = M \Rightarrow \lambda = f(x_m)$ o $\lambda = f(x_M)$.
quindi $\lambda \in \text{Im} f$.

Applicazione:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^x + x$

  f è surgettiva: $\text{Im} f = \mathbb{R}$

$\text{Im} f \subseteq \mathbb{R}$ ovvio

$\mathbb{R} \subseteq \text{Im} f$ cioè fissato $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c.
$f(c) = \lambda$.

Basta provare che esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_1) < \lambda < f(x_2)$$

(poiché f è continua, poi applico il teo. dei valori intermedi).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = [+\infty + \infty] = +\infty$$

$\Rightarrow \exists\, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_2) > \lambda$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = [0 - \infty] = -\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, x_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_1) < \lambda$

<u>OSS</u>: Ogni funzione continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

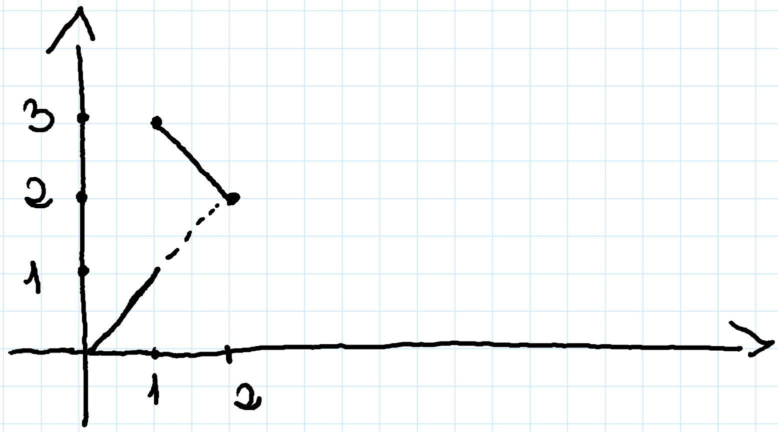
(o viceversa) è surgettiva.

Terza proprietà: continuità e invertibilità

Cosa sappiamo: f strett. monotona $\Rightarrow f$ invertibile

Non vale il viceversa:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ -x+4 & x \in (1,2] \end{cases} \qquad f: [0,2] \to \mathbb{R}$$



f non è continua
f non è monotona
$\mathrm{Im} f = [0,1] \cup [2,3)$

Ma f è invertibile e si prova che

$$f^{-1}: \mathrm{Im} f \to [0,2]$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & y \in [0,1] \\ 4-y & y \in [2,3) \end{cases}$$

Ci vogliono ulteriori ipotesi su f affinché valga l'implicazione inversa.

<u>Teorema</u>: $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua.

Allora

f invertibile $\Rightarrow$ f è strett. monotona

(e quindi " $\Leftrightarrow$ ")

In tal caso, f^{-1} è strett. monotona e continua in tutto il suo dominio).

Applicazione: continuità delle inverse delle funzioni elementari.

e^x continua $\Rightarrow$ $\log_c x$ continua

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \quad " \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen} \quad " \\ \cos x \quad " \quad \Rightarrow \quad \arccos \quad " \\ \operatorname{tg}_c x \quad " \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg}_c \quad " \end{cases}$$

Specificare in quali intervalli sono invertibili

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad [0, \pi]$ $\quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Analisi Matematica - 29.3.2019 - terza parte

Thursday, March 28, 2019 17:40

Somma e asintoticità

La somma non conserva l'asintoticità:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\sim x \\ -x &\sim -x \end{aligned}\right. \not\Rightarrow \operatorname{sen} x - x \sim 0 \quad \Big] \text{ visto nella scorsa lezione}$$

Come fare? Trasformare le somme in prodotti raccogliendo opportunamente.

Questa tecnica funziona quasi sempre.

Non funziona solo nei casi del tipo $\operatorname{sen} x - x$.

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + x^2}{\operatorname{tg} x} = \ell \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

per $x \to 0$ $\quad \operatorname{tg} x \sim x$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{sen} 2x & + & x^3 \\ \sim & & \sim \\ 2x & & x^3 \end{array} \quad \Leftarrow \text{Metto in evidenza } \operatorname{sen} 2x \text{ (perché } x \to 0\text{)}$$

$$\operatorname{sen} 2x + x^2 = \operatorname{sen} 2x \left(1 + \frac{x^2}{\operatorname{sen} 2x}\right) \sim$$

$$\left[\begin{aligned} &\operatorname{sen} 2x \sim 2x \\ &\frac{x^2}{\operatorname{sen} 2x} \sim \frac{x^2}{2x} = \frac{1}{2} x \to 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{x^2}{\operatorname{sen} 2x}\right) \to 1 \end{aligned}\right]$$

$$\sim 2x \cdot 1$$

$$\ell = \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+3x} - e^x}{x \operatorname{arctg} x} = \ell \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

per $x \to 0^+$ $\quad x \arctan x \sim x \cdot x = x^2$

$$\sqrt{1+3x} - e^x = (\underbrace{\sqrt{1+3x} - 1}_{\substack{\sim \\ (3x\to 0) \\ \frac{1}{2}\cdot 3x}}) + (\underbrace{1 - e^x}_{\substack{\sim \\ -x}})$$

$$\sqrt{1+3x} - e^x = \underbrace{(e^x - 1)}_{\sim x} \underbrace{\left[\frac{\sqrt{1+3x}-1}{e^x - 1} - 1 \right]}_{\to \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{1+3x}-1}{e^x-1} \sim \frac{\frac{3}{2}x}{x} = \frac{3}{2}$$

Numeratore $\sim x \cdot \frac{1}{2}$

$$P = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty$$

Come ho calc. il lim in $[\,\cdots\,]$:

$$\sqrt{1+3x} - 1 = (1+\underbrace{3x}_{\to 0})^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}\cdot 3x = \frac{3}{2}x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\frac{\sqrt{} - 1}{e^x - 1} \sim \frac{\frac{3}{2}x}{x} = \frac{3}{2}$$

$$[\qquad] \to \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \operatorname{sen} 2^x}{e^x - 1} = P \qquad \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$x \to +\infty$: $\quad x + \operatorname{sen} 2^x = x\left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2^x}{x}\right)$

A

$$\left\{ \operatorname{sen} 2^x \text{ limitato}, \ \frac{1}{x} \to 0 \right\} \quad \frac{\operatorname{sen} 2^x}{x} \to 0$$

$$\sim x \cdot 1 = x$$

$$e^x - 1 = e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) \sim e^x$$

$$\frac{1}{e^x} \to 0$$

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

ATTENZIONE : non è vero che $\operatorname{sen} 2^x \sim 2^x$

$e^x - 1 \sim x$

perché $x \to +\infty$ e non a 0

- $$\lim_{x \to 0} \frac{x \log(1+3x^2)}{e^{\operatorname{sen} x} - \cos x} = \ell \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$x \to 0 \qquad x \log(1+3x^2) \sim x \cdot 3x^2 = 3x^3 \qquad (3x^2 \to 0)$

$$e^{\operatorname{sen} x} - \cos x = \underbrace{(e^{\operatorname{sen} x} - 1)}_{\sim x} + \underbrace{(1 - \cos x)}_{\sim \frac{1}{2}x^2}$$

$$= (e^{\operatorname{sen} x} - 1)\left[1 + \frac{1-\cos x}{e^{\operatorname{sen} x} - 1}\right] \qquad \left(\frac{1-\cos x}{e^{\operatorname{sen} x} - 1} \to 0\right)$$

$$\sim \operatorname{sen} x \cdot 1$$

$$\sim x \cdot 1 = x$$

$$\frac{1 - \cos x}{\underbrace{e^{\operatorname{sen} x} - 1}_{\sim x}} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x \to 0 \Rightarrow [\ \text{"}\ \ \text{"}\ ] \to 1$$

$\operatorname{sen} x \to 0$

$$\ell = \lim_{x \to 0} \frac{3x^3}{x} = \lim_{x \to 0} 3x^2 = 0$$

Questo modo di procedere si estende a somme di un numero finito di addendi.

$$\cdot \lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x + 1 - \cos x + e^{x^3} - 1}{\log^2(1+x)} = p \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$x \to 0 \qquad \log(1+x) \sim x \Rightarrow \log^2(1+x) \sim x^2$$

$$\underbrace{x \operatorname{sen} x}_{\sim x^2} + \underbrace{(1-\cos x)}_{\sim \frac{1}{2}x^2} + \underbrace{(e^{x^3}-1)}_{\sim x^3} =$$

$$x \operatorname{sen} x \left[1 + \underbrace{\frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x}}_{\to \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{e^{x^3}-1}{x \operatorname{sen} x}}_{\to 0}\right] \to 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{e^{x^3 \to 0}-1}{x \operatorname{sen} x} \sim \frac{x^3}{x^2} = x \to 0$$

$$\sim x \operatorname{sen} x \left[1 + \frac{1}{2}\right] \sim x \cdot x \, \frac{3}{2} = \frac{3}{2} x^2$$

$$p = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \frac{3}{2}$$

Quando questa tecnica non funziona?

$$x \to c \qquad f(x) \sim h(x)$$
$$g(x) \sim -h(x)$$

$$f(x) + g(x) = f(x)\Big[\underbrace{1 + \frac{g(x)}{f(x)}}^{\omega(x)}\Big] = f(x) \cdot \omega(x)$$

$$x \to c \qquad \omega(x) \to 0 \qquad \frac{g(x)}{f(x)} \sim \frac{-h(x)}{h(x)} = -1$$

$$\overline{h(x)} = -1$$

$$x - \sin x = x\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = x\,\underset{\downarrow\atop 0}{\omega(x)} \longrightarrow 0$$