<u>Esercizio 2.3</u>

1) Determinare una grammatica che genera il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$$

e dimostrare questo risultato.

2) Di che tipo è la grammatica che genera L?

1)

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\} \qquad V = \{S\} \qquad P = \left\{ S \underset{(1)}{\rightarrow} aSbb,\ S \underset{(2)}{\rightarrow} abb \right\}$$

Dobbiamo dimostrare:

$$L = L(G)$$

Quindi bisogna dimostrare che:

i) $L(G) \subset L$

ii) $L \subset L(G)$

i) $L(G) \subset L$

Sia w una parola derivabile da S in G.

$$w \in L(G) \overset{def}{\Leftrightarrow} S \overset{*}{\Rightarrow} w, \quad w \in X^*$$

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della derivazione* di w da S. Sia n tale lunghezza.

<u>Passo base</u>

$n = 1$

$S \underset{(2)}{\overset{n}{\Rightarrow}} abb$ è la sola derivazione di lunghezza 1 che genera parole su $X = \{a, b\}$

Si ha che: $abb \in L$.

<u>Passo induttivo</u>

Dimostriamo che:

$$\forall n,\ n > 1: \left[\left(\left(w' \in L(G),\ S \overset{n-1}{\Rightarrow} w' \right) \Rightarrow w' \in L \right) \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow \left(\left(w \in L(G),\ S \overset{n}{\Rightarrow} w \right) \Rightarrow w \in L \right) \right]$$

Consideriamo:

$$w \in L(G), \text{ con } S \overset{n}{\Rightarrow} w$$

$$S \overset{n}{\Rightarrow} w \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, w_1, w_2, ..., w_n : S \Rightarrow w_1, w_i \Rightarrow w_{i+1},\ i = 1, 2, ..., n-1 \text{ e } w_n = w$$

$$S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow ... \Rightarrow w_n = w$$

Necessariamente si ha: $w_1 = aSbb$ (altrimenti $w_1 = abb$ ed n = 1). Dunque:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSbb \overset{n-1}{\Rightarrow} w_n = w$$

Per ipotesi di induzione, ogni stringa derivabile da S in n–1 passi è una parola di L. Dunque, da S è possibile derivare in n–1 passi una stringa del tipo:

$$w' = a^k b^{2k}, \; k > 0$$

Più precisamente, $w' = a^{n-1} b^{2(n-1)}$ poiché:

$$S \overset{k}{\underset{(1)}{\Rightarrow}} a^k S b^{2k}, \; k > 0$$

Ma allora la stringa:

$$aw'bb = aa^{n-1} b^{2(n-1)} bb = a^n b^{2n}$$

è ancora una parola di L ed è derivabile da S in G in n passi, attraverso la seguente derivazione:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSbb \overset{n-1}{\Rightarrow} aw'bb = a^n b^{2n} = w$$

Si ha dunque:

$$L(G) \subset L$$

ii) $L \subset L(G)$

Sia w una parola di L.

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della parola w*.

Passo base

$n = 1 \;\Leftrightarrow\; |w| = 3$

Sia $w = abb$. Dobbiamo determinare una derivazione di w da S in G.

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} abb$$

Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni n > 1:

$$\left(\left(w' \in L, \; |w'| = n - 1 + 2(n - 1 == 3n - 3 \right) \;\; \Rightarrow \;\; S \overset{*}{\Rightarrow} w' \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(w \in L, \; |w| = n + 2n == 3n \right) \;\; \Rightarrow \;\; S \overset{*}{\Rightarrow} w \right)$$

Sia w una parola su $X = \{a, b\}$ tale che:

$$w \in L, \quad |w| = 3n, \quad n > 1$$

L'unica parola di L di lunghezza 3n è:

$$w = a^n b^{2n}$$

Nella derivazione che stiamo cercando, dobbiamo necessariamente applicare la produzione (1) di G, come 1° passo:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSbb$$

Per ipotesi di induzione, ogni parola di L di lunghezza $3n–3$ è derivabile da S in G. Anche $w' = a^{n-1}b^{2(n-1)}$ è dunque derivabile da S in G:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w' = a^{n-1}b^{2(n-1)}$$

Ne consegue che $w = a^n b^{2n}$ è derivabile da S e la sua derivazione è data da:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSbb \overset{*}{\Rightarrow} aw'bb = aa^{n-1}b^{2(n-1)}bb = a^n b^{2n} = w$$

Dunque: $L \subset L(G)$ e $L = L(G)$.

2) G libera da contesto.