Studio di funzione – Studio qualitativo

QUANDO FARLO:
Quando è complesso calcolare $f(x) > 0$

COME FARLO:
1) si fanno:
- lo studio del dominio
- lo studio delle intersezioni con l'asse y, ovvero $f(0)$
- lo studio degli asintoti
- lo studio degli intervalli di monotonia, ovvero $f'(x) > 0$
2) Si inseriscono, al posto delle intersezioni con l'asse delle x, dei valori placeholder α
3) Si stimano i valori α

Quindi, si saltano:
- lo studio della positività
- lo studio delle intersezioni con l'asse x, ovvero $f(x) = 0$
- lo studio delle simmetrie

Circa lo studio delle simmetrie:
Nel 99% delle tracce del prof Pisani ci sono funzioni né pari né dispari.
Inoltre, se anche la funzione fosse simmetrica, è possibile tracciarla lo stesso senza saperlo.
Lo studio delle simmetrie serve solo a velocizzare (ci si limita a studiare metà grafico se la funzione è simmetrica).

Esempio 1 (traccia del 13/06/2017, versione b):
$$\frac{x^5 - 20x^2 + 20}{x^2 - x - 2} \geq 0$$

PERCHÉ FARE LO STUDIO QUALITATIVO:
Qui serve lo studio qualitativo perché c'è una funzione di 5° grado, di cui è difficile calcolare le x.

1) Studio del numeratore (studio qualitativo)

$N: x^5 - 20x^2 + 20 \geq 0$
Non posso risolvere questa disequazione, di 5° grado, scomponendo (con Ruffini o altro), sarebbe troppo complesso.
Faccio uno studio qualitativo della funzione $f(x) = x^5 - 20x^2 + 20$

1.1) Studio del Dominio:
$D = \mathbb{R}$

1.2) Studio della positività, $f(x) > 0$:
lo salto

1.3.1) Studio delle intersezioni con l'asse delle x, $f(x) = 0$:
lo salto

1.3.2) Studio delle intersezioni con l'asse delle y, $f(0)$:
$f(0) = (0)^5 - 20 \cdot (0)^2 + 20$ Abbiamo quindi il punto A (0, 20).

1.4) Studio delle Simmetrie:

lo salto (la funzione non è né pari né dispari)

1.5.1) Studio degli Asintoti verticali:

Non ci sono asintoti verticali (non ci sono punti di discontinuità, e gli estremi sono $\pm\infty$).

1.5.2) Studio degli Asintoti orizzontali:

$\lim_{x\to+\infty}(x^5-20x^2+20)=[\dots]=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x^5-20x^2+20)=[\dots]=-\infty$

Questo ci dice che verso sx la funzione decresce a $-\infty$, mentre verso dx cresce a $+\infty$.

1.5.3) Studio degli Asintoti obliqui:

$m_{dx}=\lim_{x\to+\infty}(x^5-20x^2+20)\cdot\frac{1}{x}=[\dots]=+\infty$

$m_{sx}=\lim_{x\to-\infty}(x^5-20x^2+20)\cdot\frac{1}{x}=[\dots]=+\infty$

1.6.1) Studio degli intervalli di monotonia, $f'(x)$:

$5x^4-40x>0$

$5x(x^3-8)>0$

$5x(x-2)(x^2+2x+4)>0$

N_{F_1}: $5x>0\to\ x>0$

N_{F_2}: $x-2>0\ \to\ x>2$

N_{F_3}: $x^2+2x+4>0\ \to\ \forall x\in\mathbb{R}$

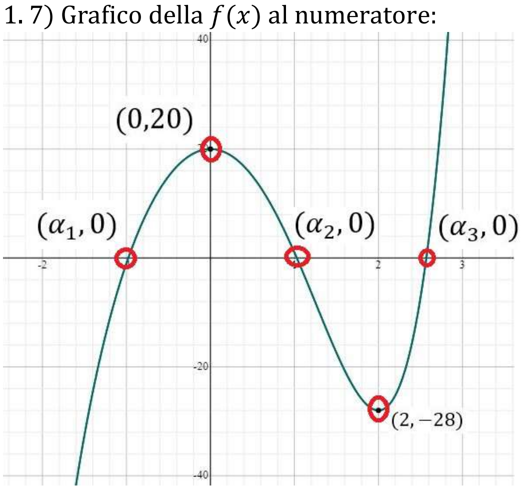
$N: x<0\ \vee\ x>2$

1.6.2) Studio dei punti di massimo/minimo:

$f(0)$ l'ho già calcolato prima.

$f(2)=[\dots]=-28$

1. 7) Grafico della $f(x)$ al numeratore:



Quindi:

$N\geq 0\ \to\ \alpha_1\leq x\leq\alpha_2\vee x\geq\alpha_3$

NB: Non conosco le intersezioni con l'asse delle x, per cui ho usato dei valori placeholder $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

2) Studio del denominatore

$D: x^2-x-2>0\ \to\ [\dots]\ \to\ x<-1\vee x>2$

3) Studio dei valori della disequazione

Non conosco i valori di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, quindi non so come fare il grafico comparativo di numeratore e denominatore.
Ad esempio, non so se $\alpha_1 < -1$ oppure $\alpha_1 > -1$.

Per α_1:
Guardando il grafico:
- So che $f(\alpha_1) = 0$.
- So che, per $x < \alpha_1$, $f(x) < 0$
- So che, per $\alpha_1 < x < 0$, $f(x) > 0$

Se $f(-1) < 0$, allora $-1 < \alpha_1$
Se $f(-1) > 0$, allora $-1 > \alpha_1$

$f(-1) = (-1)^5 - 20(-1)^2 + 20 = -1 - 20 + 20 = -1$

Quindi $-1 < \alpha_1$

Per α_2:
Guardando il grafico, so che $0 < x < \alpha_2$

Per α_3:
Guardando il grafico, so che $0 < x < \alpha_3$

-1 α_1 0 α_2 2 α_3

N: - - - - - - O-------------------O - - - - - O-------------------

D: -----------O - - - - - - - - - - - O------------------------------

- - - - + + - - - - - - - - + + - - - + + + + +

S: $-1 < x < \alpha_1 \quad \vee \quad \alpha_2 < x < 2 \quad \vee \quad x > \alpha_3$

Esempio 2 (traccia del 13/06/2017, versione b):

Studiare $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} - 3arctg(x)$

PERCHÉ FARE LO STUDIO QUALITATIVO:

Qui serve lo studio qualitativo perché ci sono 2 funzioni (una polinomiale, una goniometrica) difficili da calcolare insieme.

Motivo 1:

Il prof Pisani ritiene sia “poco preciso” fare lo studio comparativo delle due funzioni, ovvero:

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} = 3arctg(x)$$

Motivo 2:

I calcoli diventano complicatissimi se portassi la funzione goniometrica nella frazione, ovvero:

$$\frac{x^3 + x^2 - 3arctg(x) \cdot (x^2 + 2)}{x^2 + 1}$$

1) Studio del Dominio: [...] $\rightarrow D = \mathbb{R}$

2) Studio della Positività, $f(x) > 0$: lo salto

3.1) Studio delle intersezioni con l’asse delle y, $f(x) = 0$: lo salto

3.2) Studio delle intersezioni con l’asse delle x, $f(0)$: [...] $\rightarrow f(0) = 0$

4) Studio delle simmetrie: lo salto (la funzione non è né pari né dispari)

5) Studio degli asintoti:

Non ci sono asintoti verticali. Non ci sono asintoti orizzontali.

Ci sono 2 asintoti obliqui.

$m_{sx} = 1\ ,\ q_{sx} = 1 + \frac{3}{2}\pi \quad , \quad y_{sx} = x + 1 + \frac{3}{2}\pi$

$m_{dx} = 1\ ,\ q_{dx} = 1 - \frac{3}{2}\pi \quad , \quad y_{dx} = x + 1 - \frac{3}{2}\pi$

6) Studio intervalli Monotonia:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 + 1) - (x^3 + x^2)(2x)}{(x^2 + 1)^2} - \frac{3}{1 + x^2} = [\dots] = \frac{x^4 + 2x - 3}{1 + x^2}$$

$\Rightarrow$ Scompongo $x^4 + 2x - 3$ con Ruffini $\Rightarrow [\dots] \Rightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 3) \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 3)}{1 + x^2} > 0$$

$N_1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$N_2 > 0 \Rightarrow$ Faccio lo studio qualitativo $\Rightarrow [\dots] \Rightarrow x > \alpha$

$D > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

[...]