Capitolo 17

Integrale definito

17.1 Integrale di Riemann

Sia assegnata una funzione $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ limitata.

Definizione 17.1 *Si definisce* partizione *di* $[a, b]$ *un insieme finito e ordinato di punti*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}.$$

In effetti, assegnare una partizione P significa assegnare gli estremi di una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

Definizione 17.2 *Si definisce* somma inferiore di f relativa alla partizione P *il numero*

$$s^-(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x).$$

Si definisce somma superiore di f relativa alla partizione P *il numero*

$$s^+(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x).$$

Osserviamo che, almeno nel caso di una funzione positiva, ciascun addendo nelle somme corrisponde ad un rettangolo avente per base $[x_{i-1}, x_i]$ e per altezza $\inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$ (risp. $\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$). Ovviamente la somma si interpreta come somma delle aree di tali rettangoli.

Esempio 17.3 *Consideriamo la funzione*

$$\begin{aligned} f &: [0, 3] \to \mathbf{R} \\ f(x) &= x^3 - 3x^2 + 5 \end{aligned}$$

Rappresentiamo geometricamente e calcoliamo le somme inferiori relative a due diverse partizioni

$$\begin{aligned} P_1 &= \{0, 3/2, 3\}, \\ P_2 &= \{0, 1/2, 3/2, 5/2, 3\}. \end{aligned}$$

Anzitutto dobbiamo conoscere l'andamento della funzione, quindi abbiamo riportato il grafico nella fig. 17.1.

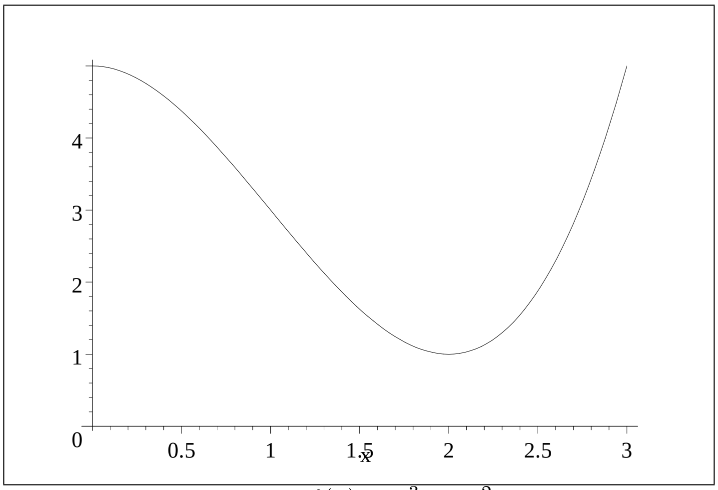


Fig. 17.1: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

Per P_1 *la rappresentazione geometrica della somma inferiore è riportata nella fig. 17.2*

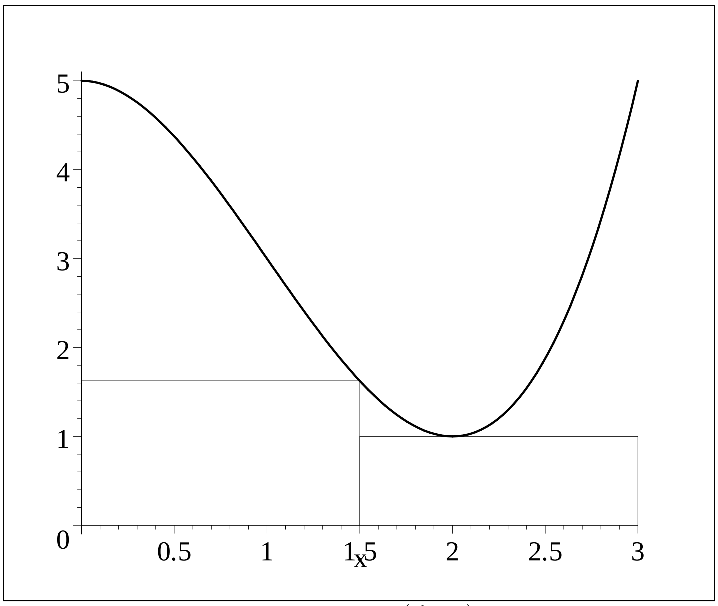


Fig. 17.2: $s^-(f, P_1)$

e quindi

$$\begin{aligned} s^-(f, P_1) &= (3/2 - 0)f(3/2) + (3 - 3/2)f(2) \\ &= 63/16. \end{aligned}$$

Per P_2 *la rappresentazione geometrica della somma inferiore è riportata nella fig. 17.3*

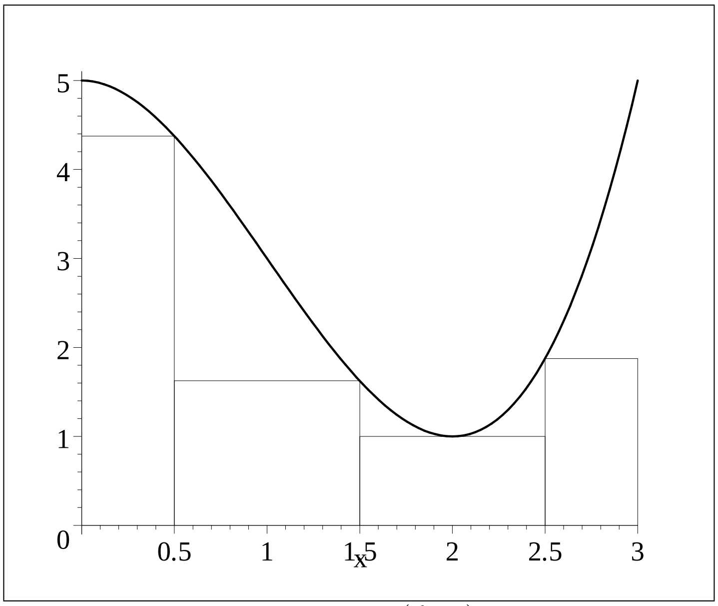


Fig. 17.3: $s^-(f, P_2)$

e quindi

$$\begin{aligned} s^-(f, P_2) &= (1/2-0)f(1/2) + (3/2-1/2)f(3/2) + \\ &\quad +(5/2-3/2)f(2) + (3-5/2)f(5/2) \\ &= 23/4 \end{aligned}$$

Dunque, come evidenziato anche dal simbolo utilizzato, le quantità $s^-(f, P)$ e $s^+(f, P)$ dipendono in maniera essenziale, oltre che da f, dalla partizione P.

Osservazione 17.4 *Tra le tutte le possibili partizioni possiamo evidenziare la partizione banale* $P_0 = \{a, b\}$, *per la quale risulta*

$$\begin{aligned} s^-(f, P_0) &= (b-a) \inf_{x \in [a,b]} f(x) \\ s^+(f, P_0) &= (b-a) \sup_{x \in [a,b]} f(x) \end{aligned}$$

Proposizione 17.5 *Per ogni partizione P risulta*

$$s^-(f, P_0) \leq s^-(f, P) \leq s^+(f, P) \leq s^+(f, P_0). \tag{17.1}$$

Inoltre, quali che siano P_1 e P_2 partizioni di $[a, b]$, risulta

$$s^-(f, P_1) \leq s^+(f, P_2).$$

Indichiamo con $S^-(f, [a, b])$ l'insieme di tutte le somme inferiori di f al variare della partizione P; analogamente indichiamo con $S^+(f, [a, b])$ l'insieme di tutte le somme superiori. La seconda parte della proposizione precedente ci dice che gli insiemi $S^-(f, [a, b])$ e $S^+(f, [a, b])$ sono separati.

Definizione 17.6 *La funzione f si dice* integrabile (secondo Riemann) *in* $[a, b]$ *se esiste un unico elemento di separazione tra l'insieme* $S^-(f, [a, b])$ *e l'insieme*

$S^+(f,[a,b])$. *Tale elemento prende il nome di* integrale di Riemann *e si denota con il simbolo*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \tag{17.2}$$

In altri termini l'integrale di Riemann, se esiste, è l'unico numero reale minore di tutte le somme superiori e maggiore di tutte le somme inferiori.

Osservazione 17.7 *L'assioma di completezza applicato agli insiemi separati* $S^-(f,[a,b])$ *e* $S^+(f,[a,b])$ *ci garantisce che un elemento di separazione esiste sempre. La definizione di integrabilità aggiunge la richiesta che tale elemento sia unico.*

17.1.1 Due esempi fondamentali

Esempio 17.8 *La funzione* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *di costante valore* h *è integrabile e risulta*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = h(b-a).$$

Anzitutto si calcolano

$$\begin{aligned} s^-(f,P_0) &= h(b-a), \\ s^+(f,P_0) &= h(b-a). \end{aligned}$$

Quindi, assegnata una partizione P *arbitraria, dalla (17.1) consegue*

$$\begin{aligned} s^-(f,P) &= h(b-a), \\ s^+(f,P) &= h(b-a). \end{aligned}$$

Dunque otteniamo valori che non dipendono dalla partizione P. *Pertanto*

$$\begin{aligned} S^-(f,[a,b]) &= \{h(b-a)\}, \\ S^+(f,[a,b]) &= \{h(b-a)\}. \end{aligned}$$

Quindi i due insiemi sono ridotti ad un solo elemento coincidente. Lo stesso elemento funge da elemento di separazione.

Esiste anche una dimostrazione alternativa. Sia c un elemento di separazione tra $S^-(f,[a,b])$ *e* $S^+(f,[a,b])$. *Pertanto abbiamo*

$$h(b-a) = s^-(f,P_0) \le c \le s^+(f,P_0) = h(b-a)$$

Pertanto $c = h(b-a)$. *Dunque esiste un unico elemento di separazione ed è il valore dell'integrale.*

Esempio 17.9 *Consideriamo la cosiddetta* funzione di Dirichlet $f:[a,b]\to\mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbf{Q} \\ 0 & se\ x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

Assegnata una partizione P *arbitraria si calcolano*

$$\begin{aligned} s^-(f,P) &= 0, \\ s^+(f,P) &= b-a. \end{aligned}$$

Dunque otteniamo un valore che non dipende dai punti che individuano la partizione P. Pertanto

$$\begin{aligned} S^-(f,[a,b]) &= \{0\}\,, \\ S^+(f,[a,b]) &= \{b-a\}\,. \end{aligned}$$

I due insiemi sono separati ma non ammettono un unico elemento di separazione, per cui si conclude che f non è integrabile.

17.1.2 Interpretazione geometrica

L'integrale di Riemann rappresenta una generalizzazione della nozione di area.

Nell'ambito della geometria elementare è definita l'area dei poligoni. Per altre figure l'area viene definita come elemento di separazione tra le aree dei poligoni inscritti e le aree dei poligoni circoscritti.

L'integrale di funzioni positive si interpreta come area della regione (detta *rettangoloide*) avente per base $[a,b]$ e delimitata dal grafico di f

$$R = \{(x,y) \mid x \in [a,b], 0 \le y \le f(x)\}$$

Che questa interpretazione sia ragionevole lo si deduce da quanto visto in precedenza. Nel caso elementare di una funzione costante, con $h > 0$ (nel qual caso il rettangoloide coincide con il rettangolo $[a,b]\times[0,h]$) sussiste l'uguaglianza tra integrale ed area del rettangolo.

La precedente assunzione chiarisce anche il significato di integrabilità: l'area del rettangoloide può essere approssimata da somme di aree di rettangoli: dall'interno, per difetto (somme inferiori); dall'esterno, per eccesso (somme superiori). La condizione di integrabilità secondo Riemann (unicità dell'elemento di separazione) vuol dire che i due processi di approssimazione (per difetto e per eccesso) conducono allo stesso risultato.

L'interpretazione dell'integrale come area è alla base del simbolo stesso di integrale: abbiamo una somma infinita ($\int$ è una S stilizzata) delle aree di rettangolini infinitesimi aventi base dx e altezza $f(x)$; tale somma è estesa da a a b. Come nelle somme, la variabile di integrazione non è rilevante e quindi, ad esempio, abbiamo

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(t)dt.$$

Sull'interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione non positiva torneremo in seguito.

17.1.3 Funzioni integrabili

La nozione di integrale di Riemann ha senso per funzioni limitate. Tuttavia abbiamo già visto, nell'Esempio 17.9, che non tutte le funzioni limitate sono integrabili secondo Riemann. Sussistono i seguenti risultati

Teorema 17.10 *Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è monotona, allora f è integrabile.*

Teorema 17.11 *Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è continua, allora f è integrabile.*

Teorema 17.12 *Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è limitata e presenta un numero finito di punti di discontinuità, allora f è integrabile.*

Dobbiamo precisare, inoltre, che l'integrabilità ed il valore dell'integrale non dipendono dal comportamento della funzione integranda in un numero finito di punti. Precisamente sussiste il seguente teorema.

Teorema 17.13 *Si abbiano due funzioni $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbf{R}$, sia Σ un sottoinsieme di $[a,b]$ costituito da un numero finito di punti e risulti $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b] \backslash \Sigma$. Se f è integrabile, allora anche g è integrabile e risulta*

$$\int_{[a,b]} g(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

Sussiste una *proprietà di linearità*.

Proposizione 17.14 *Se le funzioni $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ sono integrabili, allora anche la funzione somma è integrabile e risulta*

$$\int_{[a,b]} (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_{[a,b]} f_1(x)dx + \int_{[a,b]} f_2(x)dx.$$

Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è integrabile e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora $\lambda \cdot f$ è integrabile e risulta

$$\int_{[a,b]} \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

Osservazione 17.15 *Se le funzioni $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ sono integrabili, allora anche la funzione prodotto è integrabile, ma è assolutamente falso che l'integrale del prodotto è uguale al prodotto degli integrali.*

17.1.4 Proprietà dell'integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ integrabile, si definisce *media (integrale)* di f il numero reale

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x)dx.$$

Teorema 17.16 (della media) *Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è integrabile, risulta*

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \le \overline{f} \le \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Inoltre, se f è continua, esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\overline{f} = f(c).$$

Dimostrazione. Per ogni partizione P abbiamo

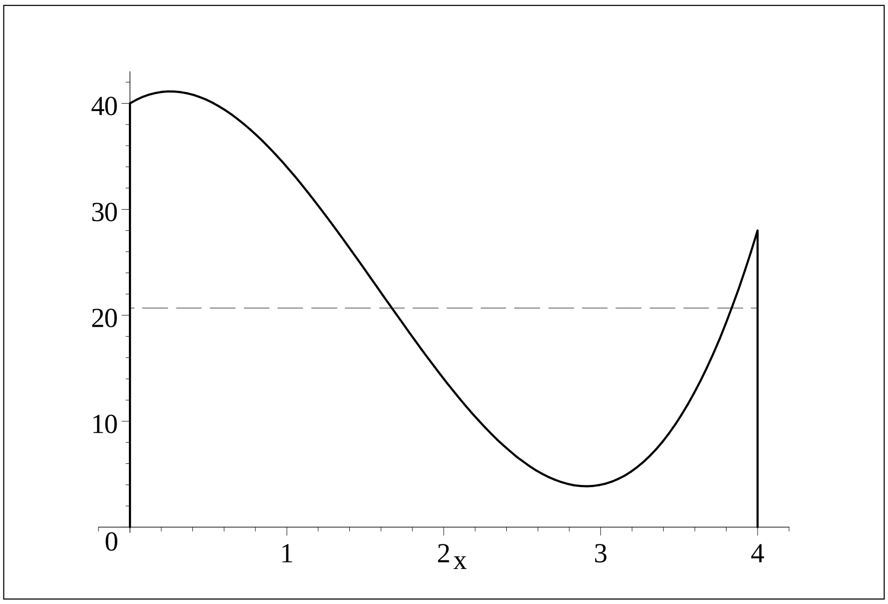
$$s^-(f,P) \le \int_{[a,b]} f(x)dx \le s^+(f,P).$$

Se consideriamo la partizione banale, la tesi consegue immediatamente. ■

Osservazione 17.17 *La seconda parte del teorema si interpreta al modo seguente: esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Nella figura che segue di tali punti ne esistono ben due.



La linea tratteggiata rappresenta il valore della media integrale: l'area del rettangolo coincide con l'integrale.

Dal Teorema della media consegue la *proprietà di positività*.

Proposizione 17.18 *Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è integrabile e per ogni $x \in [a,b]$ risulta $f(x) \geq 0$, allora*

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \geq 0.$$

Dalla linearità e dalla positività consegue la *proprietà di confronto*.

Proposizione 17.19 *Se le funzioni $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ sono integrabili e per ogni $x \in [a,b]$ risulta*

$$f_1(x) \geq f_2(x),$$

allora

$$\int_{[a,b]} f_1(x)dx \geq \int_{[a,b]} f_2(x)dx.$$

Infine riportiamo due *proprietà rispetto al dominio*: *additività e continuità*.

Proposizione 17.20 *Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è integrabile e $c \in (a,b)$, allora f è integrabile negli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ e risulta*

$$\int_{[a,c]} f(x)\,dx + \int_{[c,b]} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

Proposizione 17.21 *Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è integrabile risulta*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f(x)dx &= \lim_{c\to a^+} \int_{[c,b]} f(x)dx = \\ &= \lim_{c\to b^-} \int_{[a,c]} f(x)dx.\end{aligned}$$

17.1.5 Calcolo di aree

Nel caso di una funzione integrabile e positiva, ci siamo già soffermati sull'uguaglianza tra integrale ed area del rettangoloide.

Prima di passare al caso di una generica funzione integrabile, dobbiamo ricordare che, in una qualsiasi teoria della misura, l'area è un numero positivo.

Dunque, in generale, l'integrale si interpreta come somma delle aree prese con segno positivo dove $f(x) \geq 0$ e con segno negativo dove $f(x) \leq 0$.

Se siamo interessati all'area totale (somma delle aree tutte con segno positivo), dobbiamo calcolare

$$\int_{[a,b]} |f(x)|\, dx.$$

Analogamente l'area della regione compresa tra i grafici di due funzioni

$$f_1(x) \leq f_2(x), \tag{17.3}$$

delimitata dalle rette verticali $x = a$ ed $x = b$, si ottiene come

$$\int_{[a,b]} (f_2(x) - f_1(x))\, dx.$$

Se eliminiamo l'ipotesi (17.3), allora l'area si ottiene come

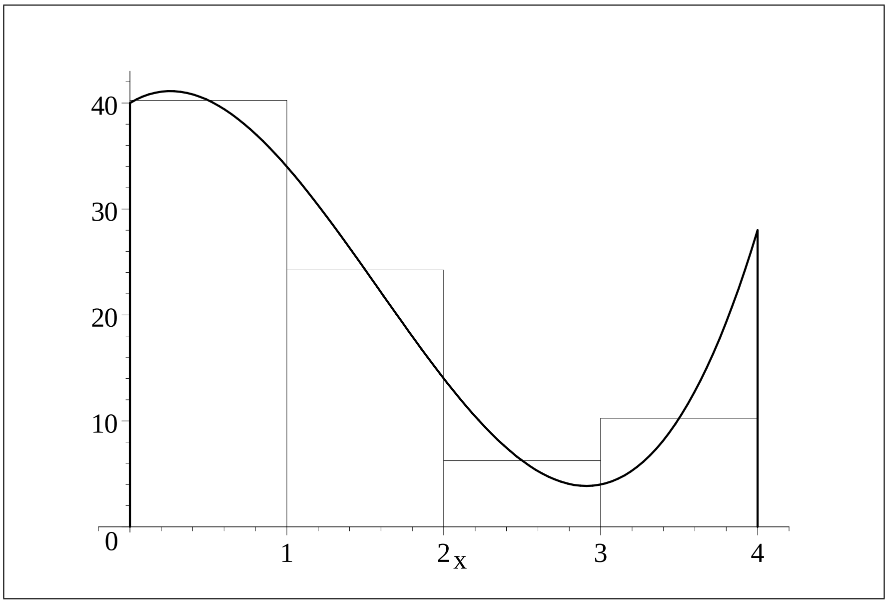
$$\int_{[a,b]} |f_2(x) - f_1(x)|\, dx.$$

17.1.6 Calcolo degli integrali e integrazione approssimata

La Formula fondamentale che vedremo nel prossimo paragrafo (Teorema 17.24) consente di valutare esattamente gli integrali quando si conosca una primitiva della funzione integranda.

Questa circostanza non sempre è verificata. Inoltre sono abbastanza frequenti i casi in cui una primitiva non è esprimibile in termini di funzioni elementari. Per queste situazioni si è sviluppata, nell'ambito dell'analisi matematica e del calcolo numerico, una teoria detta *integrazione numerica*.

Nella figura seguente, a titolo di esempio, presentiamo, il metodo dei rettangoli *"mid-point"* composto: si approssima $\int_{[a,b]} f(x)\, dx$ con la somma s_n delle aree di rettangolini aventi base uguale (l'intervallo $[a, b]$ diviso in n parti uguali) e come altezza la funzione valutata nel punto medio di ciascun intervallino.



E' evidente che questa procedura si può applicare ad una funzione qualsiasi; ovviamente essa ha senso per funzioni di cui sia nota l'integrabilità. Se la funzione funzione integranda è continua (dunque integrabile), si può dimostrare che

$$\lim_n s_n = \int_{[a,b]} f(x)\, dx.$$

Con ulteriori ipotesi su f si dispone anche di formule che valutano l'errore, cioè la differenza

$$\left| s_n - \int_{[a,b]} f(x)\, dx \right|.$$

17.2 Teorema Fondamentale del Calcolo

Per enunciare il teorema che connette l'esistenza di primitive con il calcolo integrale, dobbiamo estendere la definizione la nozione di integrale stesso.

Siano I intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ integrabile (secondo Riemann) in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I.

Definizione 17.22 *Per ogni $a, b \in I$, si definisce* integrale definito *di f tra a e b il numero reale*

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)dx & \text{se } a < b \\ 0 & \text{se } a = b \\ -\int_{[b,a]} f(x)dx & \text{se } b < a \end{cases}$$

A meno del segno, l'integrale definito coincide con l'integrale di Riemann, pertanto si riportano all'integrale definito le proprietà di linearità e le proprietà rispetto al dominio. Inoltre, dalla definizione consegue immediatamente che, quali che siano $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Di fatto il simbolo di integrale definito (con più evidenti analogie a quello di sommatoria) viene preferito al simbolo (17.2).

Ora finalmente possiamo enunciare il *Teorema Fondamentale del Calcolo.*

Teorema 17.23 *Sia $f : I \to \mathbf{R}$ continua. Fissato $a \in I$, consideriamo la funzione*

$$\begin{aligned} F &: I \to \mathbf{R} \\ F(x) &= \int_a^x f(t)dt \end{aligned} \tag{17.4}$$

La funzione definita da (17.4) è una primitiva di f.

Dimostrazione. ... ■

La funzione F definita da (17.4) prende il nome di *funzione integrale* di f. Come enunciato alternativo (e forse più facile da ricordare) possiamo suggerire: *la derivata della funzione integrale è la funzione integranda.*

La denominazione attribuita al Teorema 17.23 richiede qualche parola di commento. Si parla di Teorema Fondamentale del Calcolo in quanto l'operazione inversa della derivazione viene ricondotta ad una nozione originata nell'ambito del calcolo di aree: in questo modo si stabilisce una connessione tra i due problemi che, nel diciottesimo secolo, hanno dato origine all'Analisi matematica. Come denominazione alternativa talvolta si usa *teorema di esistenza di primitive* (per funzioni continue).

Lo stesso Teorema giustifica i diversi usi, con minime varianti, del simbolo di integrale. Questo simbolo

- viene introdotto per denotare l'area del rettangoloide,
- diventa una funzione quando lasciamo un estremo variabile;
- tramite il Teorema Fondamentale del Calcolo, si riconosce che la funzione integrale è una primitiva;
- e infine il simbolo viene utilizzato anche per denotare l'insieme delle primitive.

Solo ragioni di opportunità didattica ci hanno spinti ad invertire rispetto a questo che sarebbe lo svolgimento naturale della trattazione.

Da teorema precedente si deduce la cosiddetta *Formula Fondamentale del Calcolo Integrale.*

Teorema 17.24 *Siano $f : I \to \mathbf{R}$ continua e G una primitiva di f. Per ogni $a, b \in I$ si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione. ... ■