Esercizio 4.3

Applicare il Pumping Lemma per dimostrare che il seguente linguaggio L non è libero da contesto:

$$L = \{ a^i b^j \mid i = 2^j ,\ i, j \geq 0 \}$$

Analizziamo le parole che costituiscono L.

$$L = \{ a^{2^j} b^j \mid j \geq 0 \} = \{ a, a^2 b, a^4 b^2, a^8 b^3, a^{16} b^4, \ldots \}$$

Per assurdo, supponiamo L libero da contesto. Vale, dunque, per L il Pumping Lemma sui linguaggi liberi.

Dunque, si ha:

$\exists p \in \aleph$, p dipendente solo da L, tale che se $z \in L$, $|z| > p$, allora:

$$z = uvwxy$$

(1) $|vwx| \leq p$;

(2) $vx \neq \lambda$;

(3) $uv^i wx^i y \in L$, $\forall\ i \geq 0$.

Consideriamo la parola:

$$z = a^{2^p} b^p$$

$z \in L$ ed inoltre $|z| = 2^p + p > p$.

Per il Pumping Lemma, possiamo scrivere:

$$z = uvwxy$$

ove $|vwx| \leq p$. Consideriamo la stringa:

$$uv^2wx^2y$$

Per la (3) del Pumping Lemma, si deve avere:

$$uv^2wx^2y \in L$$

Ma:

$$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq 2^p + p + p \leq 2^p + 2^p + p =$$
$$= 2 \cdot 2^p + p = 2^{p+1} + p < 2^{p+1} + p + 1$$

Dunque la stringa pompata uv^2wx^2y non è del tipo $a^{2^j} b^j$, ossia:

$$uv^2wx^2y \notin L$$

Assurdo. Ne segue che L non è un linguaggio libero da contesto.