Analisi Matematica - 13.3.2019 - prima parte

Successioni e loro limite

$\{a_n\}_{n \geq n_0}$ funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$

$a_n = n^2$ $\quad b_n = (-1)^n$ $\quad c_n = \frac{1}{n}$

- Da ogni funzione $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ si ottiene una successione: $a_n = f(n)$ $\forall n \geq n_0$

$f(x) = \log x \quad x \in [1, +\infty)$

$a_n = f(n) = \log n$

Def: Una successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ si dice

- **limitata superiormente** se esiste $M \in \mathbb{R}$: $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq M$,
- **limitata inferiormente** se esiste $m \in \mathbb{R}$ $\forall n \geq n_0 \quad m \leq a_n$,
- **limitata** se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \geq n_0 \quad m \leq a_n \leq M$.

Esempi:

- $a_n = (-1)^n \quad n \geq 0$ $\qquad \underset{0}{1}, \underset{1}{-1}, \underset{2}{1}, \underset{3}{-1}, \underset{4}{1}, \underset{5}{-1}, \ldots$

  $\{a_n\}$ è limitata:

  $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $b_n = n^2$ $\qquad \{b_n\}_{n \geq 0}$ è limitata inferiormente

  $0 \leq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $c_n = \operatorname{sen} n$ $\qquad \{c_n\}$ è limitata:

  $-1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$c_n = f(n) \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$

OSS: In generale ogni succ. che si ottiene da una funzione f, ha lo stesso tipo di limitatezza di f.

Successioni definite per ricorrenza

Una succ. $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ si dice definita per ricorrenza se

- sono assegnati i primi K termini $(K>0)$
  $$a_{n_0}, \; a_{n_0+1}, \; \dots, \; a_{n_0+K-1}$$
- è assegnata una formula che esprime a_n per $n \geq a_{n_0+K}$ in funzione dei termini precedenti.

EX:

- $$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1) a_n \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

$a_0 = 1$

$a_1 = 1 \cdot a_0 = 1$

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

Ipotizzo che $a_n = n!$ Provo per induzione:

$n=0 \qquad a_0 = 1 \qquad 0! = 1$

Ipotesi: $a_n = n!$ Tesi: $a_{n+1} = (n+1)!$

$$a_{n+1} \underset{\text{def ric}}{=} (n+1) a_n \underset{\text{ipotesi induttiva}}{=} (n+1) n! \underset{\text{prop. fattoriale}}{=} (n+1)!$$

- $$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \dots \end{cases} \qquad \text{Sia } a \in \mathbb{R}$$

• $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a \cdot a_n \end{cases}$ con $n \in \mathbb{N}$

$a_0 = 1$
$a_1 = a \cdot 1 = a$
$a_2 = a \cdot a = a^2$
......

Ipotizzo che $a_n = a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n = 0 \qquad a_0 = 1 \qquad a^0 = 1$ OK

Ip. $a_n = a^n$ Tes: $a_{n+1} = a^{n+1}$

$$a_{n+1} \underset{\text{def. ric}}{=} a \cdot a_n \overset{\text{ip. induttiva}}{=} a \cdot a^n = a^{n+1}$$

• Successione di Fibonacci

$\begin{cases} a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \qquad n \geq 2 \end{cases}$

• $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = 1 - a_n^3 \qquad n > 1 \end{cases} \qquad \{a_n\}_{n \geq 1}$

$\{a_n\}$ è limitata : $\forall n \geq 1 \quad 0 < a_n < 1 \qquad P(n)$

base : $a_1 = \frac{1}{2} \qquad 0 < \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\parallel}{a_1}} < 1$

Passo induttivo Hp: $0 < a_n < 1$
Th $0 < a_{n+1} < 1$

Hp $\Rightarrow 0 < a_n < 1 \overset{x^3 \text{ strett. crescente}}{\Longrightarrow}$
$0 < a_n^3 < 1 \Rightarrow$

$$-1 < -a_n^3 < 0 \Rightarrow$$
$$1-1 < 1-a_n^3 < 1 \Rightarrow$$
$$0 < a_{n+1} < 1$$

} passaggi algebrici

LIMITE DI SUCCESSIONI

Quando n diventa grande, cosa succede?
Sia $\{a_n\}$ una successione. Allora sono possibili quattro tipi di comportamento

1. $a_n \to l \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = l$ $\quad$ a_n converge ad l (tende)
2. $a_n \to +\infty$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\quad$ a_n diverge a $+\infty$ (tende)
3. $a_n \to -\infty$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ $\quad$ a_n diverge a $-\infty$ (tende)
4. a_n è indeterminata o irregolare
   ($\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste)

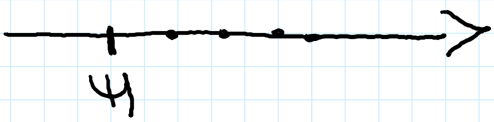
che sono definiti come segue.

<u>Def di 2.</u>:

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\quad a_n \geq M$ definitivamente
o equiv.
$\forall M \in \mathbb{R}$ $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq M$

↓
qualunque

(a_n supera a destra qualsiasi barriera per tempi grandi: le comp. si accumulano tutte dopo M)



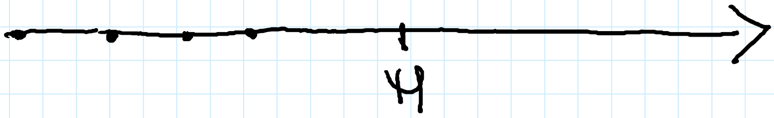
<u>Def. di 3</u>:

$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M$ definitivamente

o, equiv.

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq M$

quan molto negativo



(come nel caso 2., con superamento a sinistra)

<u>Def. di 1.</u> : $\quad p \in \mathbb{R} \quad a_n \to p$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - p| < \varepsilon$ definitivamente

o equiv.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - p| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < a_n - p < \varepsilon$$

$$p - \varepsilon < a_n < p + \varepsilon$$

oss: se ε è molto vicino a 0, $p-\varepsilon$ e $p+\varepsilon$ sono molto vicini ad p

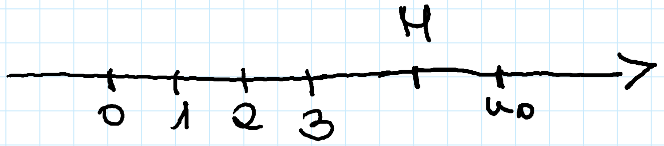
(per tempi grandi la succ. si accumulano vicino ad p)

<u>Def. di 4</u>: Nessuno dei casi precedenti si verifica.

Analisi Matematica - 13.3.2019 - Seconda parte

Esempi:

- $a_n = n$



$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

$\forall M \in \mathbb{R}$

se $M<0$ $\quad a_n = n \geq M$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

se $M \geq 0$ $\quad$ Sia n_0 il primo el. di $\mathbb{N}$ che supera M

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n = n \geq n_0 \geq M$$

- $a_n = -n$ $\quad a_n \to -\infty$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

(come esempio precedente)

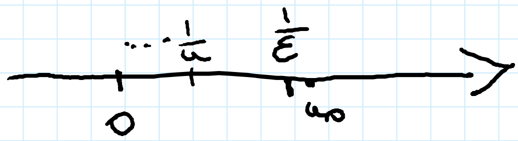
- $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad -\varepsilon \underset{(1)}{\leq} \frac{1}{n} \underset{(2)}{\leq} \varepsilon$

Sia $\varepsilon > 0$:

(1) $\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} \geq \underbrace{-\varepsilon}_{<0}$ $\quad$ vera per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(2) $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon}$



Sia n_0 il primo el. di $\mathbb{N}$ $\geq$ di $\frac{1}{\varepsilon}$

$n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

- $a_n = (-1)^n$ è indeterminata (o irregolare)

Ovviamente non siamo nei casi 2 e 3

(Battute M più grandi di 1 o più piccole di -1 non sono mai superate)
Non siamo nel caso 1.

- a_n non tende a 0:
(altrimenti $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ def.)

- a_n non tende a nessun $\ell > 0$ $\quad \varepsilon = \ell/2$
Altrimenti $\quad \ell - \frac{\ell}{2} < a_n < \ell + \frac{\ell}{2}$ def
$0 < \frac{\ell}{2} < a_n$ def !! $a_n = -1$ per infiniti n

- a_n non tende a nessun $\ell < 0$
Altrimenti, $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$
$\ell + \frac{\ell}{2} < a_n < \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$ def.
$a_n < 0$ def. !! $a_n = 1$ per infiniti n

Proprietà dei limiti
<u>Teorema</u> Sia $\{a_n\}$ una succ.
Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora ℓ è unico.

- $\forall \alpha > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \quad n^\alpha \geq M$ definitivamente

Fisso $M \in \mathbb{R}$
- Se $M \leq 0$, $\underbrace{n^\alpha}_{>0} \geq \underbrace{M}_{\leq 0} \quad \forall n \geq 1$

- Se $M > 0$ $\quad n^\alpha \geq M \iff$
$n^\alpha \geq (M^{1/\alpha})^\alpha \iff$ x^α strett. crescente
$n \geq M^{1/\alpha}$

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ $\quad n_0 \geq M^{1/\alpha} \Rightarrow$

$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq M^{1/\alpha} \Rightarrow n^\alpha \geq M$

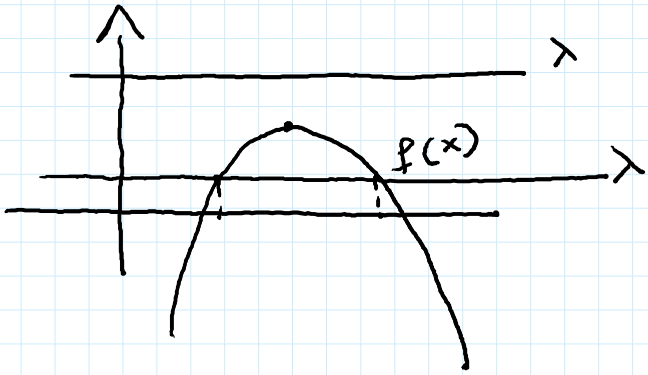
$n^2 \to +\infty$

$n^3 \to +\infty$

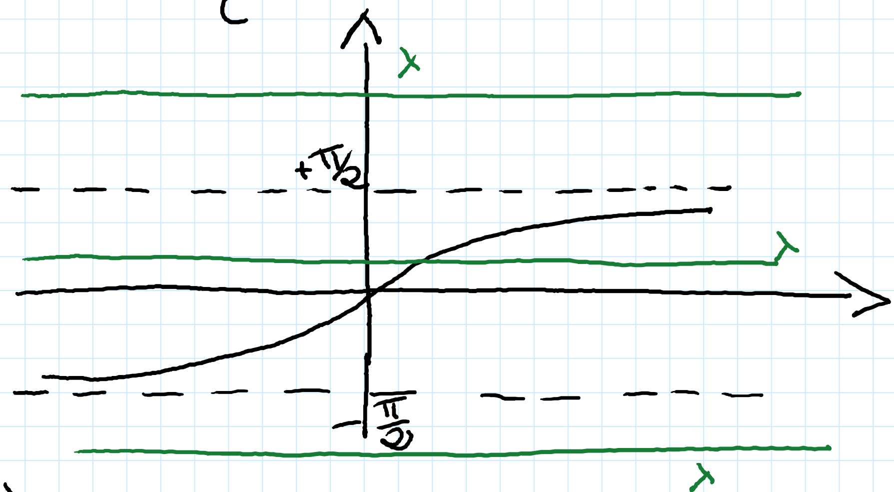
$\sqrt{n} = n^{1/2} \to +\infty$

$n^{\sqrt{2}} \to +\infty$

- Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ determinare il numero di sol. dell'eq. $f(x) = \lambda$



- $f(x) = \operatorname{arctg} x$



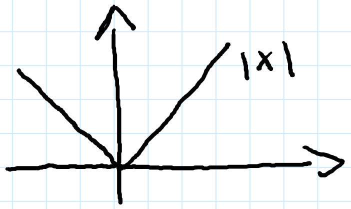
$f(x) = \lambda$ ha

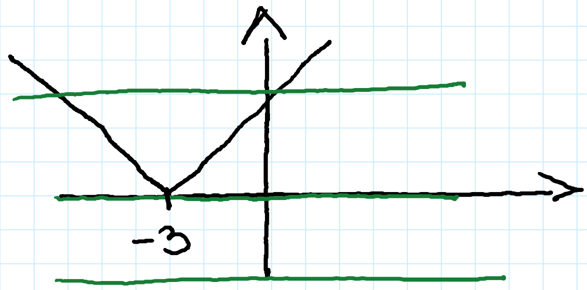
0 sol. se $\lambda \leq -\frac{\pi}{2}$

1 sol. se $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$

0 sol se $\lambda \geq \frac{\pi}{2}$

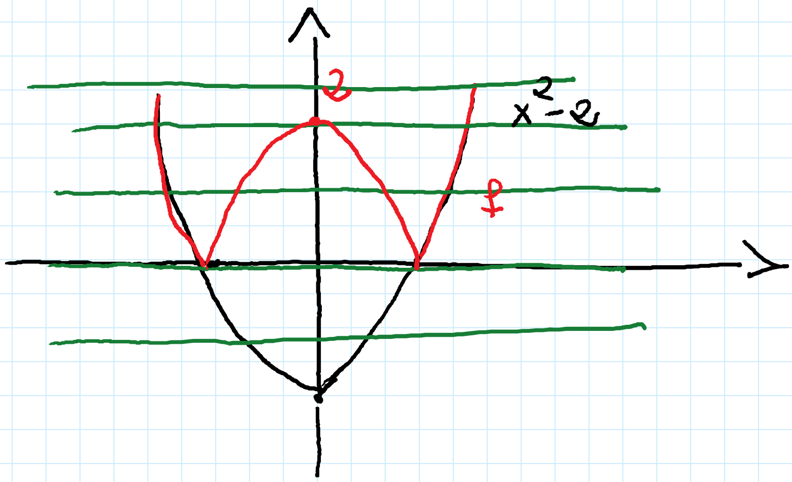
2. $f(x) = |x+3|$





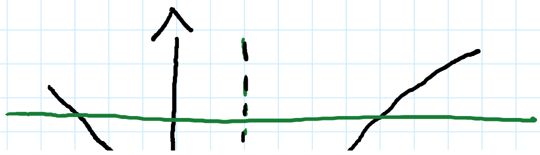
$f(x)=\lambda$ ha
0 sol. se $\lambda<0$,
1 sol. se $\lambda=0$
2 sol se $\lambda>0$

3. $f(x) = |x^2-2|$ $\quad x\in\mathbb{R}$



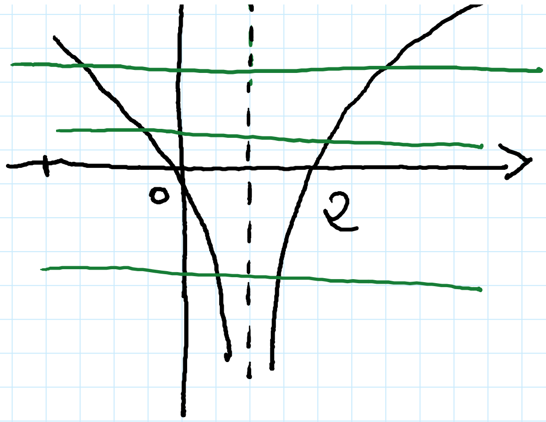
$f(x)=\lambda$ ho
0 sol. se $\lambda<0$
2 sol. se $\lambda=0$
4 sol se $0<\lambda<2$
3 sol. se $\lambda=2$
2 sol. se $\lambda>2$

4. $f(x) = \log_e |x-1|$ $\quad$ dom $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

f: 

$f(x)=\lambda$ ha
2 sol. per ogni

f:

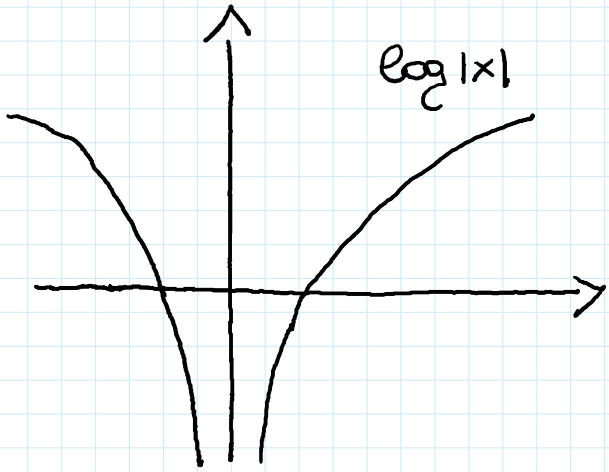


$f(x)=\lambda$ ha 2 sol. per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$|x-1|=1$
$x-1=\pm 1$
$x=2$
$x=0$

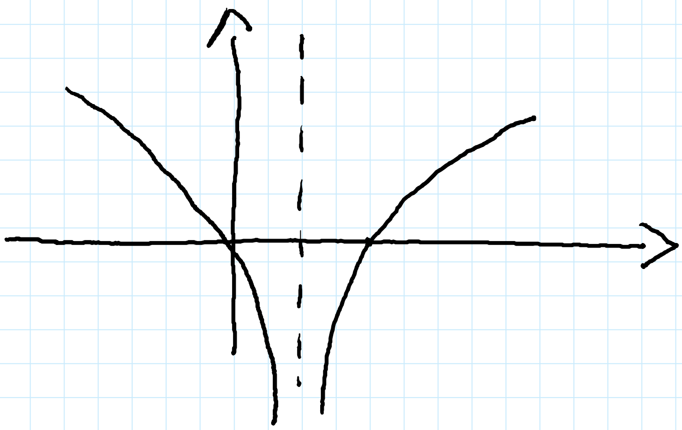
Aggiunto dopo la lezione: come si ottiene il grafico di f?

Da $\log_c x$ a $\log_c |x|$:



se $x>0$ stesso grafico di $\log_c x$
se $x<0$ ribaltato rispetto all'asse y

Allora f è la traslata di 1 verso destra di $\log_c |x|$

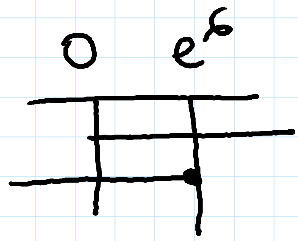


Analisi Matematica - 13.3.2019 - terza parte

Wednesday, March 13, 2019 10:16

- $f(x) = \sqrt{6 - \log_e x}$ det. dom f

$$\begin{cases} x > 0 & \rightarrow \text{per } \log_e \\ 6 - \log_e x \geq 0 & \rightarrow \text{per } \sqrt{\ } \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e^6 \end{cases}$$



$$6 - \log_e x \geq 0$$

$$\log_e x \leq 6 = \log_e e^6 \Rightarrow \log_e \text{ strett. cresc.}$$

$$x \leq e^6$$

$$\text{dom } f = (0, e^6]$$

- $f(x) = \sqrt{6 - \log_{\frac{1}{2}} x}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 6 - \log_{\frac{1}{2}} x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{1}{2^6} \end{cases}$$

$$6 - \log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x - 6 \leq 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leq 6 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \text{ strett. decr.}$$

$$x \geq \frac{1}{2^6} \qquad \text{dom } f = \left[\frac{1}{2^6}, +\infty\right)$$

- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 1}}$

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 1} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \ \end{cases}$$

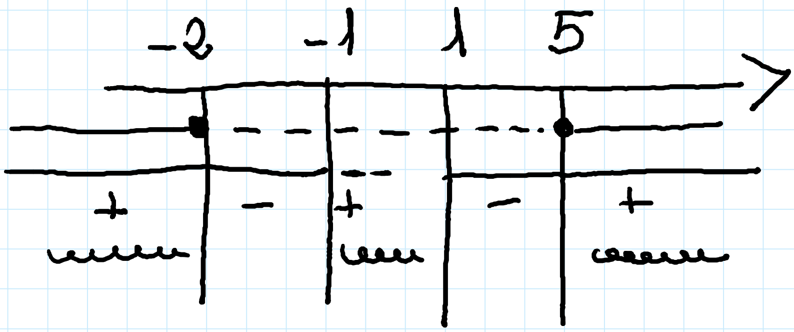
$x^2 - 1 \neq 0 \qquad x^2 \neq 1 \qquad x \neq \pm 1$

$$\frac{x^2-3x-10}{x^2-1} \geq 0$$

N. $x^2 - 3x - 10 \geq 0 \qquad\qquad x \leq -2 \qquad x \geq 5$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \begin{cases} -2 \\ 5 \end{cases}$$

D. $x^2 - 1 > 0 \qquad x < -1$ o $x > 1$



$$\text{dom } f = (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [5, +\infty)$$

• $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-x^2}}$

$x \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} \sqrt{1-x^2} \neq 0 \iff 1 - x^2 \neq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{array}\right\} \; 1 - x^2 > 0$

$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

$1 - x^2 > 0$

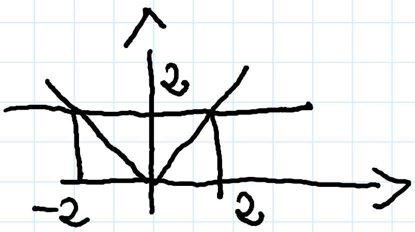
$x^2 - 1 < 0$

$-1 < x < 1$

$\text{dom} f = (-1, 1) \setminus \{0\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$

- $f(x) = \dfrac{\log |x|}{|x| - 2}$

$\begin{cases} |x| > 0 \\ |x| - 2 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$



$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 2\}$

- $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{|x|}$

$\begin{cases} x \neq 0 \\ |x| \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$