Analisi Matematica - 11.3.2019 - prima parte

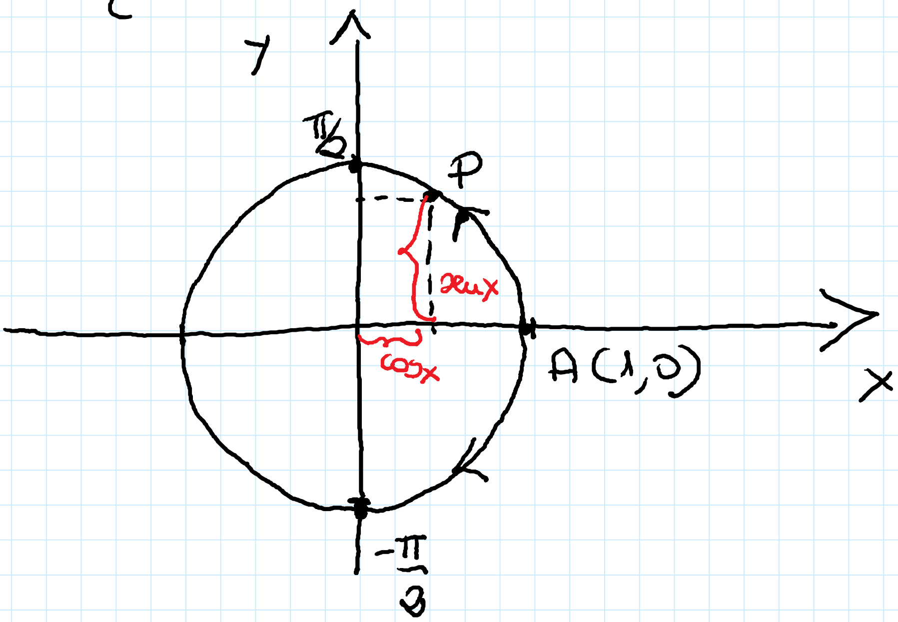
Sunday, March 10, 2019 18:37

Funzioni trigonometriche: sen, cos, tg

Fissiamo

- un rif. cartesiano,
- la circonferenza di centro l'origine $(0,0)$ e raggio 1 (circonf goniometrica) $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ è lunga 2π.



- Sia $x \in \mathbb{R}$

  Se $x \geq 0$, si misura su $\mathcal{C}$ un arco di lunghezza x a partire da $A(1,0)$, in verso antiorario.

  Se $x < 0$, si misura su $\mathcal{C}$ un arco di lunghezza $-x$, a partire da $A(1,0)$ in verso orario.

  In questo modo si det. univocamente su $\mathcal{C}$ un punto P.

Def: Per ogni $x \in \mathbb{R}$, le coordinate del punto P su $\mathcal{C}$ ottenute come descritto sopra si chiamano coseno e seno di x.

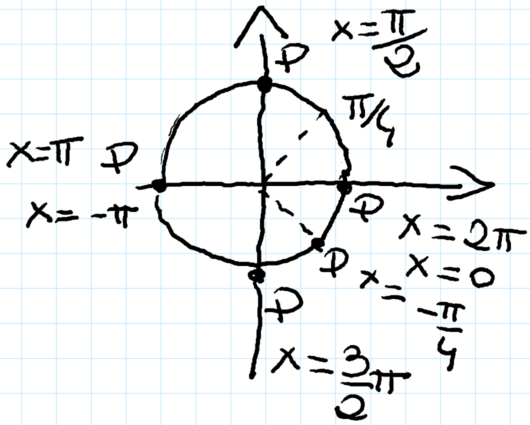
⚠ un unico

$$P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$$

$x = \frac{\pi}{2}$

$$P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$$

Oss: se $x = 0$, $P \equiv A(1, 0)$



$\cos 0 = 1$ $\quad$ $\operatorname{sen} 0 = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ $\quad$ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

$\cos \pi = -1$ $\quad$ $\operatorname{sen} \pi = 0$

$\cos \frac{3}{2}\pi = 0$ $\quad$ $\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi = -1$

$\cos 2\pi = 1$ $\quad$ $\operatorname{sen} 2\pi = 0$

$\cos(-\pi) = -1$ $\quad$ $\operatorname{sen}(-\pi) = 0$

$\cos \frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sono allora ben definite le funzioni

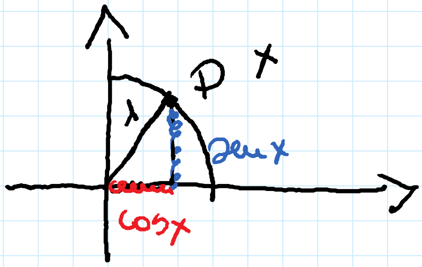
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Proprietà

- cos e sen sono entrambe 2π-periodiche. $x \in \mathbb{R}$ e $x + 2\pi$ vanno a finire nello stesso punto

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$$

- $\uparrow$ sen x $\quad$ $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

- 

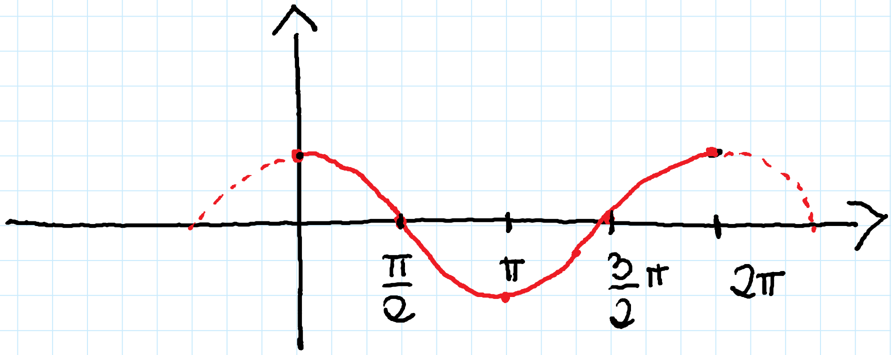
  $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \leq \cos x \leq 1$ $\quad$ $\Longleftrightarrow$ $\quad |\cos x| \leq 1$

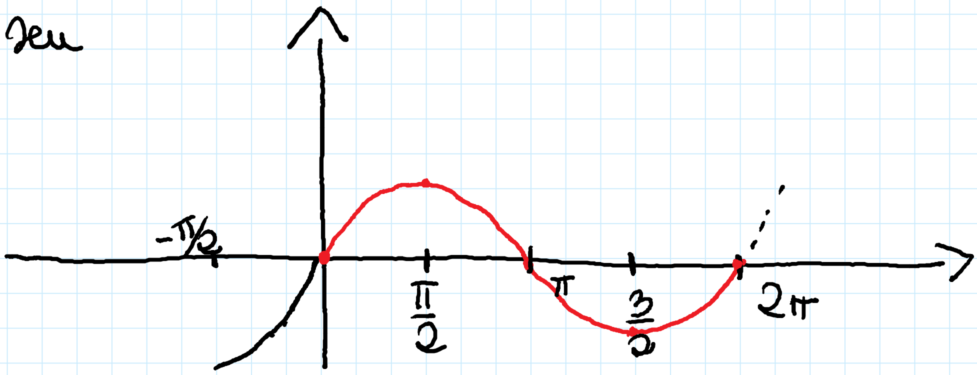
  $-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$ $\quad$ $|\text{sen}\, x| \leq 1$

- Grafici:

cos



sen



$\text{dom} \cos = \text{dom}\ \text{sen} = \mathbb{R}$

$\text{Im} \cos = \text{Im}\ \text{sen} = [-1, 1]$

$\max\limits_{\mathbb{R}} \cos = 1 = \cos 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\min\limits_{\mathbb{R}} \cos = -1 = \cos(\pi + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\max\limits_{\mathbb{R}} \text{sen} = 1 = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\min\limits_{\mathbb{R}} \text{sen} = -1 = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\min_{\mathbb{R}} \operatorname{sen} = -1 = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

(infiniti pti di max e min)

Monotonia: sen e cos in $\mathbb{R}$ non sono monotone, ma

$\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ è strett. decrescente

$\operatorname{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ è strett. crescente

Funzione tangente : $\frac{\operatorname{sen}}{\cos}$

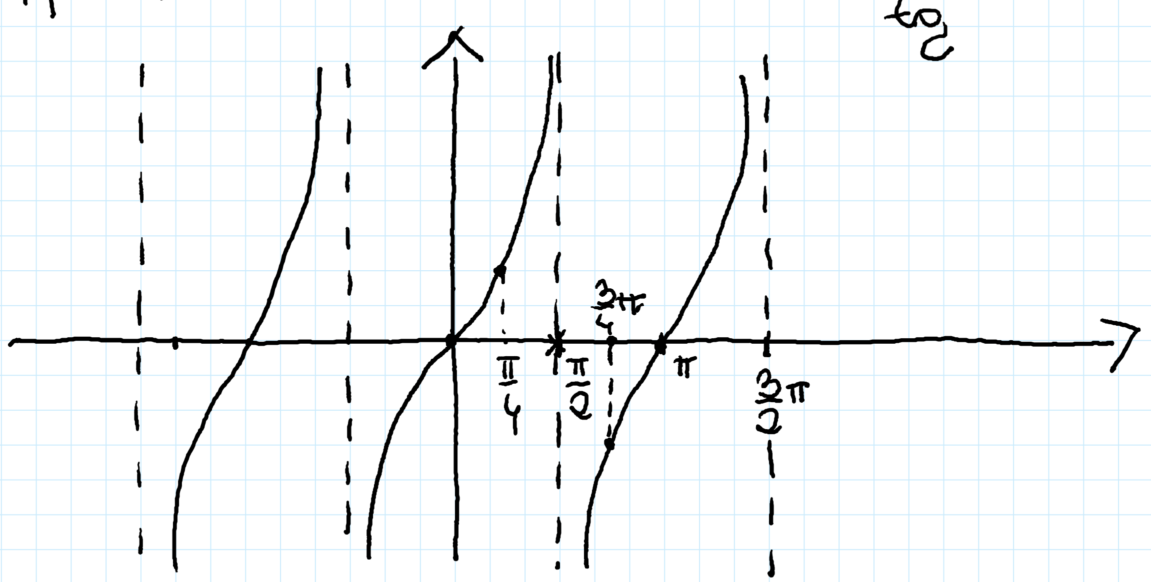
$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\operatorname{tg} : D \to \mathbb{R} \quad x \in D \to \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ (anche tan)

Proprietà

- tg è π-periodica
- Grafico:



$\operatorname{dom} \operatorname{tg} = D \qquad \operatorname{Im} \operatorname{tg} \; \mathbb{R}$

$\inf_D \operatorname{tg} = -\infty \qquad \sup_D \operatorname{tg} = +\infty$

- $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è strett. crescente

In generale tg non è monotona (su $\mathbb{R}$)

$0 < \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{tg} 0 = 0 < 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$

$0 < \frac{3}{4}\pi$ ma $\operatorname{tg} 0 = 0 > -1 = \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi$

Analisi Matematica - 11.3.2019 - seconda parte

Sunday, March 10, 2019 18:39

Funzioni trigonometriche inverse

Per funz. trig. inverse si intendono le inverse di sen cos e tg, considerate su opportuni intervalli in cui sono strett. monotone.

cos : $[0, \pi]$ strett. decr. Im: $[-1,1]$

sen $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ strett. cresc. Im $[-1,1]$

tg $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ strett. crescente Im: $\mathbb{R}$

In questi intervalli, esistono quindi le funzioni inverse.

cos :

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

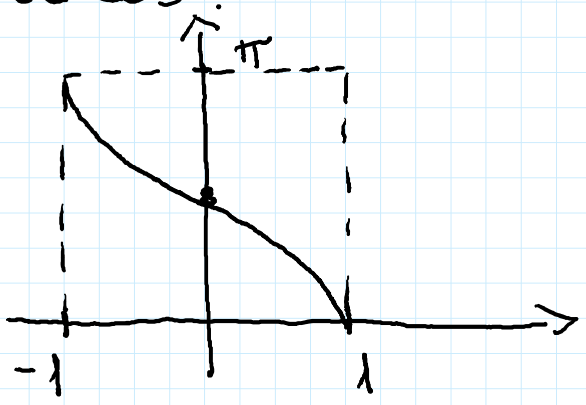
sen :

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

tg :

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

arccos :

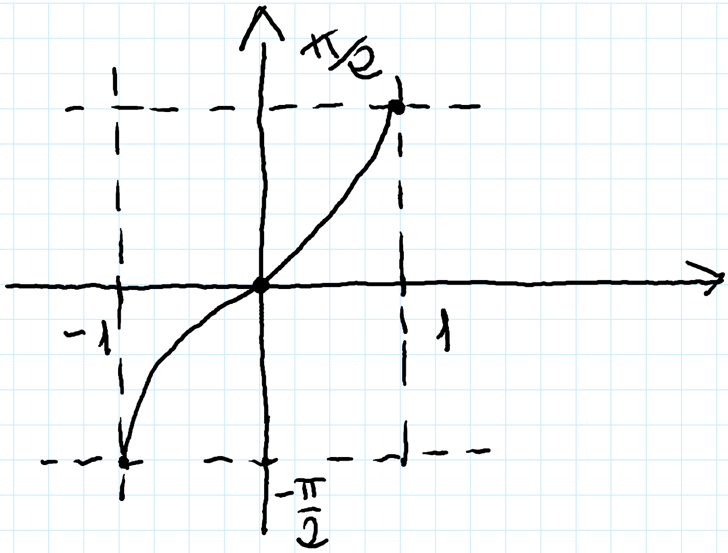


strett. decr.

$\min_{[-1,1]} \arccos = 0 = \arccos 1$

$\max_{[-1,1]} \arccos = \pi = \arccos(-1)$

arc sen :

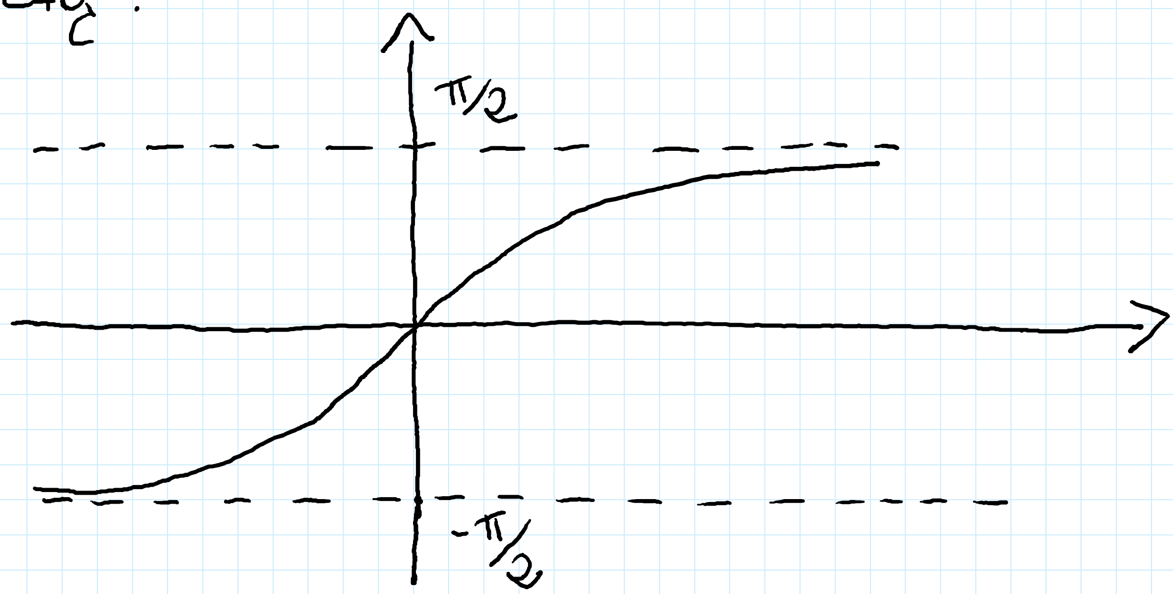


strett. crescente

min arcsen = $-\frac{\pi}{2}$ = arcsen (-1)
[-1, 1]

max arcsen = $\frac{\pi}{2}$ = arcsen 1
[-1, 1]

arctg :



arctg è strett. crescente Im arctg = $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\inf_{\mathbb{R}} \text{arctg} = -\frac{\pi}{2}$, $\sup_{\mathbb{R}} \text{arctg} = \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ non sono minimo e massimo

arctg è limitata

LE SUCCESSIONI

Def: Sia P(n) un predicato dipendente da un para inteso $n \in \mathbb{N}$. Si dice che $P(n)$ è vero DEFINITIVAMENTE se

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \geq n_0 \;\; P(n) \text{ è vero}$$

EX : $\underbrace{2^n \geq n^2}_{P(n)}$ è vero def.

Qui visto : $\forall n \geq \underbrace{4}_{n_0}$ $P(n)$ è vero

EX : $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$ è vero def.

$\Updownarrow$ proprietà $\mathbb{R}$

$n \geq 10$

<u>Def</u> : Una successione è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Si scrive a_n invece che $a(n)$

Esempi :

$a_n = n^2 + 5$ è una succ.

$b_n = \frac{1}{n+5}$ " " "

$c_n = \frac{1}{n}$ non è una succ (rispetto alla def. data sopra) perché per $n = 0$ non è ben definita

Allora diamo una def. più "elastica".

<u>Def</u> : Una successione è una funzione $a : D \to \mathbb{R}$ ove D è del tipo

$$D = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \}$$

(cioè è def. definitivamente)

Esempi: Si scrive $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

$\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}$ è una succ.

$a_n = \dfrac{1}{n-2019}$ $\qquad \{a_n\}_{n \geq 2020}$ OK

$b_n = \sqrt{n-5}$ $\qquad \{b_n\}_{n \geq 5}$

$d_n = \sqrt{1000-n}$ $\qquad$ non è una succ.

$1000 - n \geq 0$

$n \leq 1000$

Successione costante: $\{c\}_{n \geq 0}$ $\quad c \in \mathbb{R}$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad ----$

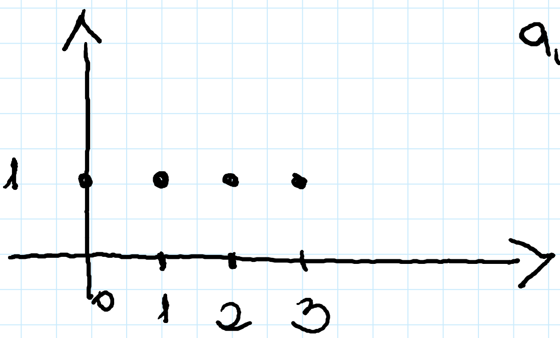
$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad ----$

Come visualizzare una successione

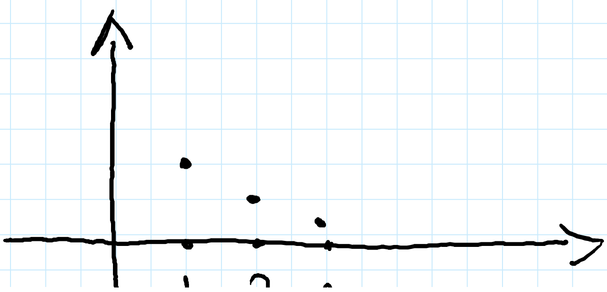
1. In modo cartesiano: disegno il grafico di a

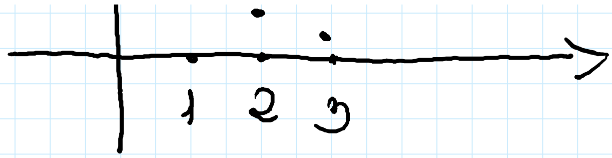
$\{(n, a_n) / n \geq n_0\}$

$a_n = 1 \qquad n \geq 0$

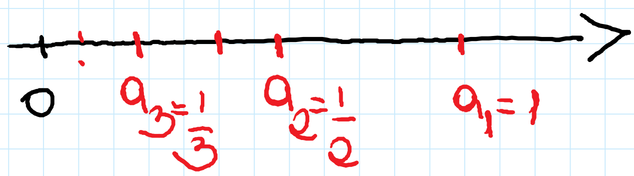


$a_n = \frac{1}{n} \qquad n \geq 1$





2. Sulla retta: disegno gli a_n



$a_n = \frac{1}{n}$

3. Dinamica: Pensiamo ad n come il tempo che scorre e ad una retta. Ad ogni secondo si accende una lampadina in posizione $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$ e resta accesa un secondo.

Tra il sec. 3 e 4 resta accesa solo la lampadina in a_3.