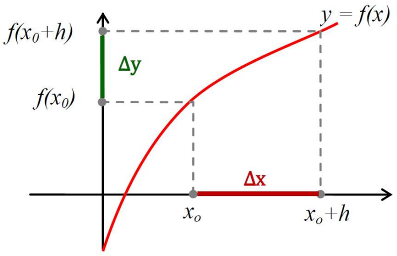
Derivate

● Definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto x_0

Data una funzione y = f(x), ed un punto x_0 appartenente al dominio D di f(x), si chiama rapporto incrementale della funzione f(x) nel punto x_0 il rapporto:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ si chiama incremento della variabile y.
$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$ si chiama incremento della variabile x.

● Definizione di derivata in un punto x_0

Data una funzione y = f(x), ed un punto x_0 appartenente al dominio D di f(x), si definisce **derivata prima di f(x) nel punto x_0**, e si chiama $f'(x_0)$, il limite del rapporto incrementale di f(x) in x_0, per l'incremento $h \to 0$, ovvero:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite deve:
- esistere (ovvero: 1) non deve essere indefinito, come per $\lim_{x \to \infty} sen(x)$; 2) deve essere $\lim_{sx} = \lim_{dx}$)
- essere finito ($\ell \neq \pm\infty$)

● Definizione di derivata destra e sinistra in un punto x_0

Derivata sinistra: Il limite sinistro (se esiste e se è finito) del rapporto incrementale di f(x) in x_0

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivata destra: Il limite destro (se esiste e se è finito) del rapporto incrementale di f(x) in x_0

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

● Definizione di derivata di f(x)

Se una funzione f(x) è derivabile in ogni punto x_0 di un intervallo I, si dice che f(x) è derivabile nell'intervallo I.
In particolare, se f(x) è derivabile in ogni punto x_0 del suo dominio D, si può parlare di derivata di f(x).

Quindi:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

● Notazioni per la derivata di f(x)

La derivata di f(x) si può trovare scritta in più modi:

$$f'(x) \quad ; \quad D\big(f(x)\big) \quad ; \quad \frac{d\big(f(x)\big)}{dx}$$

Esempio. Data $f(x) = \frac{1}{sen(x)}$, per riferirsi alla derivata di f(x), posso trovare scritto:

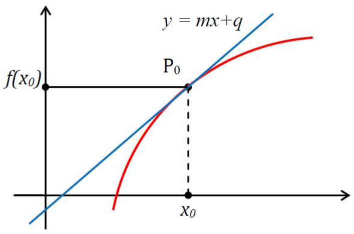
$$f'(x) \quad ; \quad D\left(\frac{1}{sen(x)}\right) \quad ; \quad \frac{d\left(\frac{1}{sen(x)}\right)}{dx} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sen(x)}\right)$$

La notazione formale, ovvero $\frac{d(f(x))}{dx}$, significa: studio il rapporto fra l'incremento Δy, ovvero Δf(x), e l'incremento Δx .

● Significato geometrico della derivata in x_0

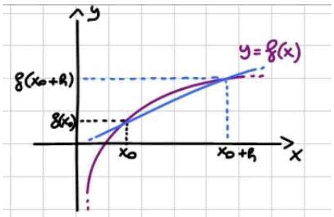
Dato il punto P_0 di coordinate $(x_0, f(x_0))$, geometricamente,
la derivata $f'(x_0)$ rappresenta la tangente t che ha coefficiente angolare $m = f'(x_0)$.

Errore comune: "Ci sono mille possibili "tangenti" di $f(x)$ in P (rette che toccano $f(x)$ solo su P). Quale considero?"
Una retta tangente ad $f(x)$ in P **sfiora** $f(x)$ in un solo punto P. Una retta secante **interseca** $f(x)$ in un uno o più punti.



Per trovare l'equazione della retta $y = mx + q$ che tange f(x) nel punto P_0
1) Calcolo $f'(x_0)$, così si ottiene il coefficiente angolare m
2) uso l'equazione del fascio di rette per un punto, $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, mettendo quindi $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Perché $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente della tangente al punto P_0 ?
Basta guardare la figura della retta passante per i punti $P_1\big(x_0, f(x_0)\big)$, $P_2\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$.



Con $h \to 0$, i due punti si avvicinano sempre più, fino a coincidere, per cui la retta tocca la curva f(x) in un solo punto.

● Come determinare una derivata con la definizione

Esempio:
$f(x) = 3x^2 - 2x$

Derivata di f(x) usando le derivate notevoli e le proprietà (a seguire):

$D(3x^2 - 2x) = D(3x^2) - D(2x) = (6x) - (2)$

Derivata di f(x) usando la definizione di derivata:

$$D(3x^2 - 2x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3 \cdot (x+h)^2 - 2(x+h)] - [3x^2 - 2x]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h] - [3x^2 - 2x]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + 6xh - 2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot (3h + 6x - 2)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (3h + 6x - 2) = 3 \cdot (0) + 6x - 2 = 6x - 2$$

● Derivate Notevoli

A differenza dei limiti notevoli, che richiedono dimostrazioni,
tutte le derivate notevoli sono calcolabili manualmente utilizzando la definizione di derivata.

Derivate di funzioni esponenziali	
$D(k) = 0$; con k costante	
$D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$; con n costante	
$D\left(\frac{1}{x^n}\right) = D(x^{-n}) = -n \cdot x^{(-n-1)} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	
$D(\sqrt[n]{x}) = D\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} = \frac{1}{n \cdot \left(x^{\frac{n-1}{n}}\right)} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{(n-1)}}}$	
$D(\log_a(x)) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$	$D(ln(x)) = \frac{1}{x} \cdot \log_e e = \frac{1}{x}$
$D(a^x) = a^x \cdot \ln(a) \Leftrightarrow a^x \cdot \frac{1}{\log_a(e)}$	$D(e^x) = e^x \cdot \log_e(e) = e^x$
$D(\lvert x \rvert) = \frac{x}{\lvert x \rvert} \Leftrightarrow \frac{\lvert x \rvert}{x}$	

Errore comune:
$D(x^x) \neq x \cdot (x^{x-1})$, perché c'è una funzione, non una costante, all'esponente;
x^x è una funzione elevata a funzione, e va usata la regola per $D\left(f(x)^{g(x)}\right)$, che si trova nella pagina a seguire.

Derivate di funzioni goniometriche
$D\big(sen(x)\big) = \cos(x)$
$D(\cos(x)) = -sen(x)$
$D\big(tg(x)\big) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + tg^2(x) \end{cases}$ Perché: $D\big(tg(x)\big) = D\left(\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right) = [\ldots] = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x)$
$D\big(cotg(x)\big) = \begin{cases} -\frac{1}{sen^2(x)} \\ -1 - cotg^2(x) \end{cases}$
$D\big(arcsen(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\big(arccos(x)\big) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\big(arctg(x)\big) = \frac{1}{1+x^2}$
$D\big(arccotg(x)\big) = -\frac{1}{1+x^2}$

Le derivate delle funzioni goniometriche inverse (arcsen, ...) conviene impararle a memoria, piuttosto che provare a ricavarle (richiedono destrezza con la notazione $\frac{dy}{dx}$, e con le mille formule goniometriche).

● Cenni di Dimostrazioni delle derivate notevoli

Esempio di derivata notevole calcolata con la definizione di derivata:

Verifichiamo che: $D(\ln(x)) = \frac{1}{x}$

Dato $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Per $h \to 0, \ln(1+h) \sim h \to$ Dato $g(h) = \frac{h}{x}$, per $h \to 0, g(h) \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ per $h \to 0, \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \sim \frac{h}{x} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{xh} = \frac{1}{x}$

● Proprietà delle derivate

$D(k \cdot f(x)) = k \cdot D(f(x))$	Prodotto di costante per funzione
$D(f(x) \pm g(x) \pm h(x)) = D(f(x)) \pm D(g(x)) \pm D(h(x))$	Somma di 2 o più funzioni
$D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	Prodotto di 2 funzioni
$D(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$	Prodotto di 3 funzioni
$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	Rapporto di 2 funzioni
$D\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Funzione composta
Modo 1 (formale): $D([f(x)]^{g(x)}) = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln\{f(x)\} + g'(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$ Modo 2 (pratico): $D([f(x)]^{g(x)}) = D\left(e^{qualcosa\ che\ faccia\ uscire\ [f(x)]^{g(x)}}\right) =$ $= D\left(e^{\ln\{[f(x)]^{g(x)}\}}\right) = D\left(e^{\mathrm{g(x)} \cdot \ln\{f(x)\}}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Si procede usando la derivata di una funzione composta.	Funzione elevata ad una funzione

● Derivate di ordine superiore al primo

La derivata seconda e la derivata terza sono usate ad esempio nello studio di funzione.

Trovare $f''(x)$ vuol dire calcolare $D(f'(x)) = D\left(D(f(x))\right)$

Lo stesso vale per la derivata terza, quarta, eccetera.