Analisi Matematica - 8.6.2018 - traccia B

Saturday, 2 June, 2018 16:54

1. $f(x) = (x^2 - 2x - 3)e^x$

(a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$

$f(0) = -3$

$f(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff$

$x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

$(-1, 0), \ (3, 0) \in \text{Graf } f$

$f(x) > 0 \iff x^2 - 2x - 3 > 0 \iff x < -1 \text{ o } x > 3$

Limiti significativi : $\pm\infty$

$x \to -\infty \qquad f(x) \sim x^2 e^x = \dfrac{(-x)^2}{e^{-x}} \to 0$

$y = 0$ asintoto orizzontale a $-\infty$

$x \to +\infty \qquad f(x) \sim \underbrace{x^2}_{+\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \to +\infty$

Esiste un asintoto obliquo a $+\infty$?

$\dfrac{f(x)}{x} \sim \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty} \to +\infty$

Non esiste.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2 - 2x - 3)e^x$

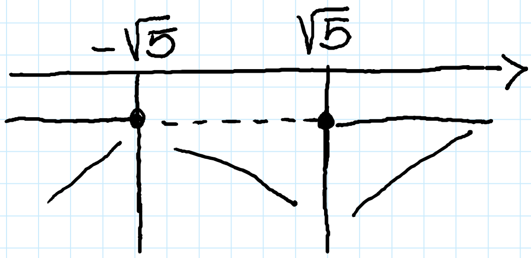
$= e^x (\cancel{2x} - 2 + x^2 - \cancel{2x} - 3)$

$= e^x (x^2 - 5)$

$f'(x) \geq 0 \iff x^2 - 5 \geq 0 \iff$

$x \leq -\sqrt{5} \text{ o } x \geq \sqrt{5}$

f'



f è crescente in $(-\infty, -\sqrt{5})$ e in $(\sqrt{5}, +\infty)$;
f è decrescente in $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.
$x = -\sqrt{5}$ p.to di max. relativo
$x = \sqrt{5}$ p.to di min relativo

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$

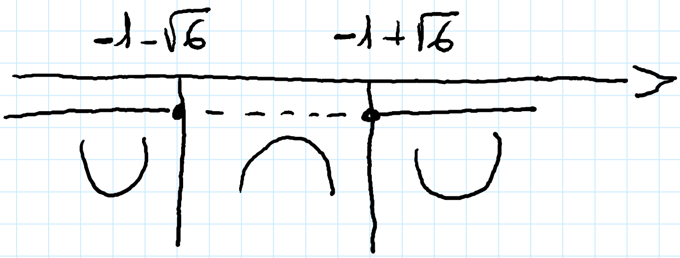
$$f''(x) = e^x \cdot 2x + e^x (x^2 - 5) = e^x (x^2 + 2x - 5)$$

$$f''(x) \geq 0 \iff x^2 + 2x - 5 \geq 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+5} = -1 \pm \sqrt{6}$$

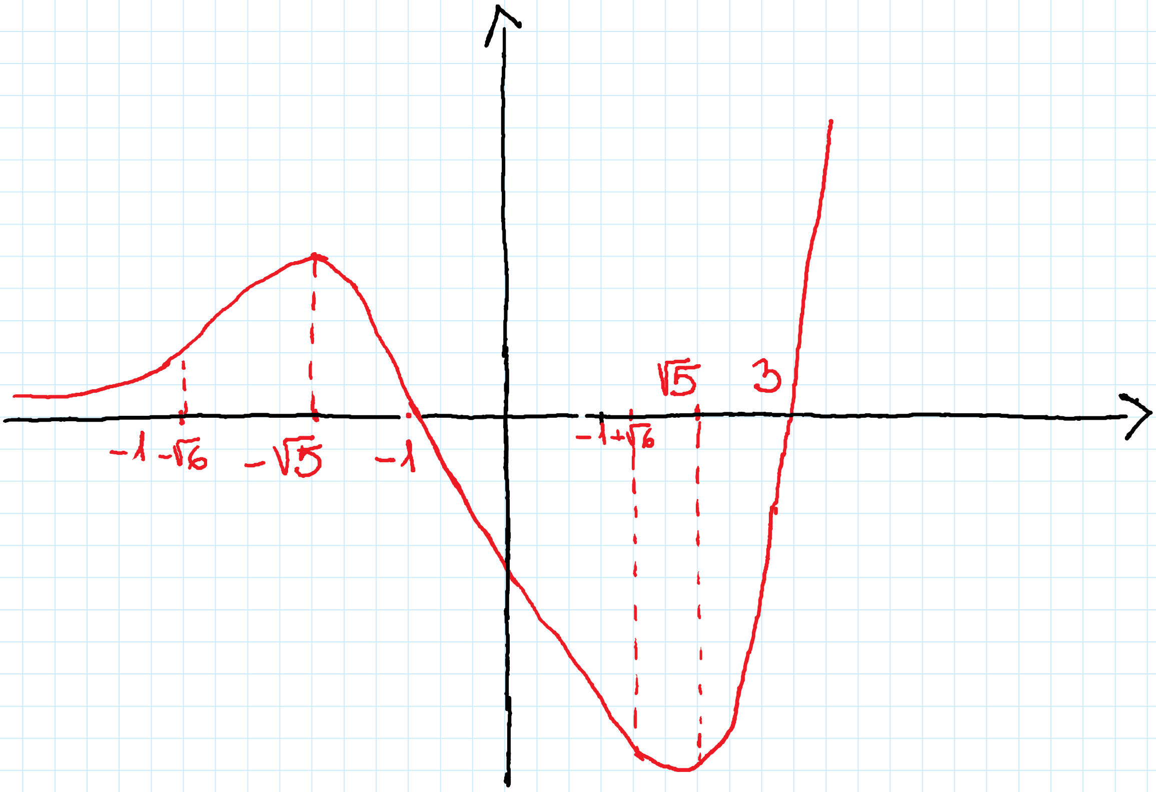
$$x \leq -1 - \sqrt{6} \qquad x \geq -1 + \sqrt{6}$$

f'' :



f è convessa in $(-\infty, -1-\sqrt{6})$ e in $(-1+\sqrt{6}, +\infty)$,
f è concava in $(-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6})$.
$x = -1 - \sqrt{6}$ e $x = -1 + \sqrt{6}$ sono punti di flesso.

(d) Grafico di f



(e) $\operatorname{Im} f = [f(\sqrt{5}), +\infty)$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha

0 soluzioni se $\lambda < f(\sqrt{5})$;

1 soluzioni se $\lambda = f(\sqrt{5})$;

2 soluzioni se $f(\sqrt{5}) < \lambda \leq 0$;

3 soluzioni se $0 < \lambda < f(-\sqrt{5})$;

2 soluzioni se $\lambda = f(-\sqrt{5})$;

1 soluzione se $\lambda > f(-\sqrt{5})$.

2.

$$\ell_1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{n\, 2^n + \sqrt{n}}{n^4 + n \cos n}$$

$$n \cdot 2^n + \sqrt{n} = n \cdot 2^n \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n \cdot 2^n}\right)$$

$$= n \cdot 2^n \left(1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}}_{\to 0}\right)$$

$$\sim n\, 2^n$$

$$n^4 + n\cos n = n^4\Big(1 + \underbrace{\frac{\cos n}{n^3}}_{\to 0}\Big) \quad \text{limitato}$$

$$\sim n^4$$

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\, 2^n}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^3} = +\infty$$

limite notevole

$$\ell_2 = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+2)\,x \cdot \log(1-3x^2)}{\operatorname{sen}^3(2x)}$$

Per $x \to 0$ $\quad x^2+2 \to 2 \Rightarrow x^2+2 \sim 2$

$x \sim x$

$\log(1-3x^2) \sim -3x^2$ $\quad (\to 0)$

$\operatorname{sen} 2x \sim 2x \quad (\to 0) \Rightarrow$

$\operatorname{sen}^3 2x \sim (2x)^3 = 8x^3$

$$\ell_2 = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot x \cdot (-3x^2)}{8x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-6x^3}{8x^3} = -\frac{3}{4}$$

3.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x + 1}\,dx$$

$\cos x = D\operatorname{sen} x$

Applicando la tecnica di integrazione per sostituzione

$$I_1 = \int_{\operatorname{sen} 0}^{\operatorname{sen}\pi/2} \frac{dt}{t^2+2t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= \left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$= \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_2^3 \frac{\log_e (x-1)}{x^2}\, dx$$

Applicando la tecnica di integrazione per parti:

$$I_2 = \int_2^3 D\left(-\frac{1}{x}\right) \log_e (x-1)\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x} \log_e (x-1) \right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x\,(x-1)}\, dx$$

$$= -\frac{1}{3} \log_e 2 + \frac{1}{2} \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\log_e 1} + \int_2^3 \frac{dx}{x\,(x-1)}$$

$$\frac{1}{x\,(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{ax - a + bx}{x\,(x-1)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$I_1 = -\frac{1}{3} \log_e 2 + \int_2^3 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{3} \log_e 2 + \left[-\log_e |x| + \log_e |x-1| \right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3} \log_e 2 - \log_e 3 + \log_e 2 + \log_e 2 - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\log_e 1}$$

$$= \frac{5}{3} \log_e 2 - \log_e 3$$

$+\infty$

4. $\sum_{n=1} \cos 2^n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n^2}{2^n}$

Sia $a_n = \cos 2^n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n^2}{2^n}$

$\{a_n\}$ non è una succ. di numeri positivi quindi occorre studiare la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \left| \cos 2^n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n^2}{2^n} \right|$$

$$= |\cos 2^n| \operatorname{arctg} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\leq 1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{n^2}{2^n} = b_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge: infatti $b_n \sim \frac{n^2}{2^n}$ e

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ è convergente (per il criterio del rapporto):

$$\frac{(n+1)^2}{\cancel{2^{n+1}}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^2} \to \frac{1}{2} < 1$$

Quindi anche $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (criterio del confronto).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1} x^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

È una serie di potenze di centro $x_0 = 0$.

Calcolo del raggio di convergenza: sia $a_n = \frac{n+2}{n^2+1}$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+3}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n+2} \sim \frac{n^3}{n^3} = 1 \to 1 \Rightarrow$$

Il raggio di convergenza è $R = 1$.

La serie di potenze converge assolutamente se $x \in (-1, 1)$.

Bisogna analizzare cosa succede per $x = \pm 1$.

Se $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1} .$$

Poiché $\frac{n+2}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ e la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, tale serie diverge.

Se $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+1}$$

(e non converge assolutamente). Tale serie converge per il criterio di Leibniz. Infatti se

$$b_n = \frac{n+2}{n^2+1}$$

si ha

1. $b_n > 0 \quad \forall n$
2. $b_n \to 0$
3. $b_{n+1} \leq b_n \iff$

$$\frac{n+3}{\underbrace{(n+1)^2+1}_{n^2+2n+2}} \leq \frac{n+2}{n^2+1} \iff$$

$$\cancel{n^3} + \cancel{n} + \cancel{3n^2} + 3 \leq \cancel{n^3} + \cancel{2n^2} + \cancel{2n} + \cancel{2n^2} + \cancel{4n} + 4 \iff$$

$$n^2 + 5n + 1 \geq 0 \quad (\text{vero } \forall n \in \mathbb{N})$$

In conclusione, la serie converge assolutamente se $x \in (-1, 1)$ e converge se $x \in [-1, 1)$.