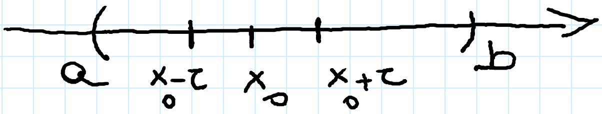
Analisi Matematica - 1.4.2019 - prima parte

Calcolo differenziale

Sia $f:(a,b)$ aperto e sia $x_0\in(a,b)$



$\exists\, r>0$ tale che $(x_0-r, x_0+r)\subset(a,b)$

Def: Si chiama rapporto incrementale di f in x_0 la funzione

$$h\in(-r,r)\setminus\{0\}\longmapsto\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- $f(x_0+h)$ è ben definito:

  $h\in(-r,r)\Rightarrow -r<h<r\Rightarrow x_0-r<x_0+h<x_0+r$

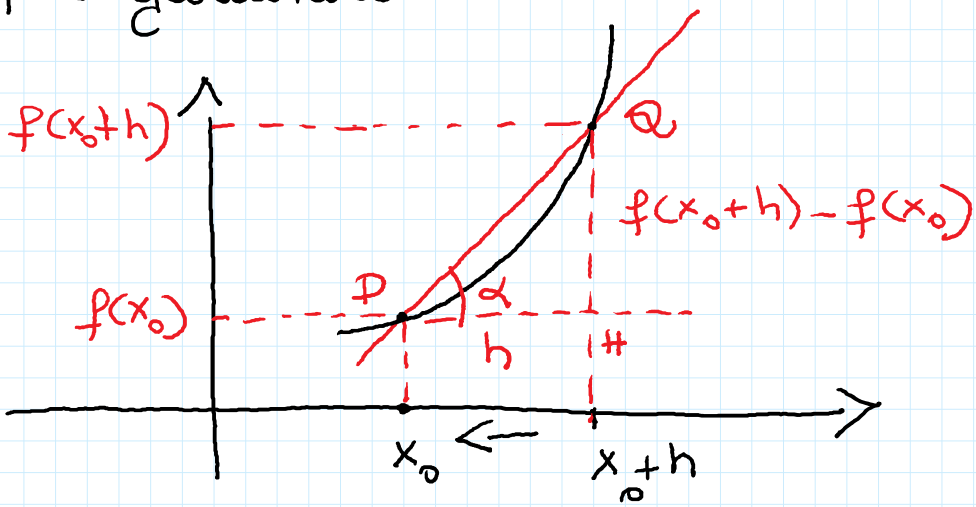
  $\Rightarrow x_0+h\in(x_0-r,x_0+r)\subset(a,b)$

- Cosa rappr. il rapp. incrementale?

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$$

$$\text{rapp. incrementale}=\frac{\text{incremento var. dip.}}{\text{incremento var. indip.}}$$

- Significato geometrico



Rapp. incrementale = QH = tg $\widehat{HPQ}$

rapp. incrementale $= \dfrac{QH}{PH} = \operatorname{tg} \widehat{HPQ}$

$=$ coefficiente angolare della retta PQ

<u>Def</u>: Il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale, se esiste si chiama derivata di f in x_0 e si di nota

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad Df(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$

Si dice che f è derivabile in x_0 se il limite (1) esiste ed è finito $(f'(x_0) \in \mathbb{R})$.

- $f'(x_0)$ non è detto che esista e, se esiste, non è detto che sia un numero reale (potrebbe essere uguale a $+\infty$ o a $-\infty$).
- Significato geometrico: se f è deriv. in x_0 $(f'(x_0) \in \mathbb{R})$ quando $h \to 0$:
  - il punto Q "tende" al punto P,
  - la retta PQ "tende" alla retta che interseca il grafico di f in P e ha coeff. angolare uguale $f'(x_0)$.

<u>Def</u>: Si chiama retta tangente ad f in x_0 la retta di eq:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Esempi:

- $f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R} \quad x_0 = 1$

Esiste $f'(1)$? SI

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 \cancel{- 1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}\,1} = \frac{2}{1} = 2$$

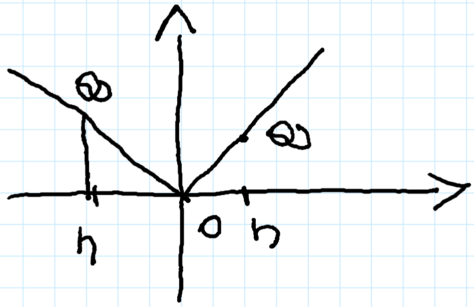
f è deriv. in $x_0 = 1$ e $f'(1) = 2$

- $f(x) = |x| \quad x \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0 \quad f$ non è der. in 0 (non esiste la derivata)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{non esiste}$$



$$h \to 0^+ \quad \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \to 1$$

def di val. ass.

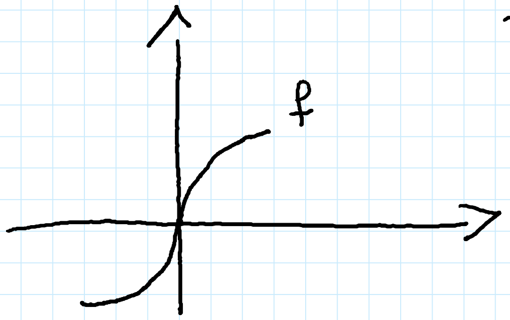
$$h \to 0^- \quad \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \to -1$$

- $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad x \in \mathbb{R} \quad x_0 = 0 \quad f(0) = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty \quad \left[\frac{1}{0}\right]$$

$h \to 0 \quad h^{2/3} \to 0$



Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto di (a,b) è ben definita la funzione:

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x)$$

e si chiama funzione derivata prima di f.

Se f' è a sua volta derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$ la derivata di f' in x_0 si chiama derivata seconda di f in x_0 e si denota con

$$f''(x_0) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \qquad D^2 f(x_0).$$

In modo analogo si definiscono le derivate di f di ordine n con $n\in\mathbb{N}$ e si indicano con

$$f^{(n)}(x_0), \quad \frac{d^{(n)} f}{dx^{(n)}}(x_0), \quad D^{(n)} f(x_0)$$

- $f^{(4)}(x_0)$, $\quad f^{(30)}(x_0)$

Derivate delle funzioni elementari

- funzione costante $f(x)=c \quad x\in\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=0$

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\overset{=c}{f(x+h)} - \overset{=c}{f(x)}}{h}}_{\text{limite della funz. costante}} = 0$$

' di costante var. 0

Il rapp. incrementale è la funzione costantemente uguale a 0.

- funzione lineare

$f(x) = ax + b \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{\cancel{ax}+ah-\cancel{ax}}{a(x+h)+\cancel{b}-ax-\cancel{b}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}}}_{\text{funz. cost. di costante valore } a} = a$$

Se $a = 0$ caso precedente: $f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = n\, x^{n-1}$

$x = 0 \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - \overset{=0}{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^n}{h}$

$= \lim_{h \to 0} h^{n-1 > 0} = 0$

$x \neq 0 \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n \left[\frac{(x+h)^n}{x^n} - 1 \right]}{h}$

$= \frac{x^n \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - 1 \right]}{h}$

$\left(\frac{x+h}{x}\right)^n = \left(1 + \frac{h}{x}\right)^n$

$\left[(1+h)^\alpha - 1 \sim \alpha h \quad h \to 0 \right]$

$\frac{h}{x} \to 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - 1 \sim n \frac{h}{x}$

$h \to 0 \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \sim \frac{x^n\, n \cdot \frac{\cancel{h}}{x}}{\cancel{h}} = n\, x^{n-1}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n\, x^{n-1}$

- Potenze con esponente reale $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$f(x) = x^\alpha \qquad \text{dom } f = [0, +\infty) \text{ se } \alpha > 0$

$\text{dom } f = (0, +\infty) \text{ se } \alpha < 0$

In questo caso $f'(0)$ non è definita

$\forall x > 0 \quad f'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

se $\alpha > 0$ quanto vale $f'(0)$?

$f'(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

$$f'(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } 0<\alpha<1 \end{cases}$$

$$\frac{f(h)-\overset{=0}{f(0)}}{h} = \frac{h^\alpha}{h} = h^{\alpha-1} \begin{cases} \to 0 & \text{se } \alpha>1 \\ \to +\infty & \text{se } 0<\alpha<1 \end{cases}$$

- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad x \geq 0$

  $f'(0) = +\infty$

  $\forall x>0 \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

  f è def. in $[0,+\infty)$ ma è derivabile in $(0,+\infty)$

- $f(x) = x^{3/2} \qquad x \in [0,+\infty)$

  $\forall x \geq 0 \quad f'(x) = \frac{3}{2} x^{3/2-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

- funzione esponenziale

  $f(x) = a^x \quad x \in \mathbb{R} \qquad a>0,\ a\neq 1$

  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a^x \log a$

  In particolare se $a=e$ $\quad f(x)=e^x,\ f'(x) = e^x$

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h-1}{h}$$
  $$= a^x \cdot \log a$$

- funzione logaritmo

  $f(x) = \log_a x \qquad x>0 \qquad a>0,\ a\neq 1$

  $f'(x) = \frac{1}{x \log a} \qquad \forall x>0 \qquad$ (vedremo ----)

  In particolare se $f(x) = \log_e x = \log x = \ln x$

  $f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x>0$

- funzioni trigonometriche e loro inverse

  $f \qquad\qquad\qquad f'$

$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ($1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$)	$\forall x \in \operatorname{dom} \operatorname{tg}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in (-1,1)$ ($\neq \operatorname{dom} \operatorname{arcsen} = [-1,1]$)
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in (-1,1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R}$

$$D \operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}\cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \cancel{\operatorname{sen} x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\operatorname{sen} x \underbrace{\frac{(\cos h - 1)}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1} \right)$$

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -\frac{1-\cos h}{h} \sim -\frac{h^2/2}{h} = -h/2 \to 0$$

$$= \cos x$$

Punti non derivabilità

Una funzione può non essere derivabile per due ragioni:

1) il lim del rapp. incr. è infinito;
2) il lim. del rapp. incr. non esiste.

Caso 1

<u>Def</u>: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, f continua in x_0. Se

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty \ (\text{o a } -\infty)$$

Si dice che f ha in x_0 un p.to di flesso a tangente verticale.

Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x_0 = 0$

Abbiamo visto che $f'(0) = +\infty$

0 p.to di flesso a tangente verticale.