Studio di funzione – Parametro variabile lambda

In caso di equazioni contenenti un parametro variabile λ , bisogna:
1) Ricondursi in forma: $f(x) = \lambda$
2) Studiare la funzione $f(x)$ e disegnare una stima del grafico
3) Considerare l'equazione $f(x) = \lambda$ come lo studio delle intersezioni fra $f(x)$ e la retta $g(x) = \lambda$
   Dedurre quindi, basandosi sul grafico di $f(x)$, per quali possibili valori della retta $y = \lambda$ varino i numeri di soluzioni

---

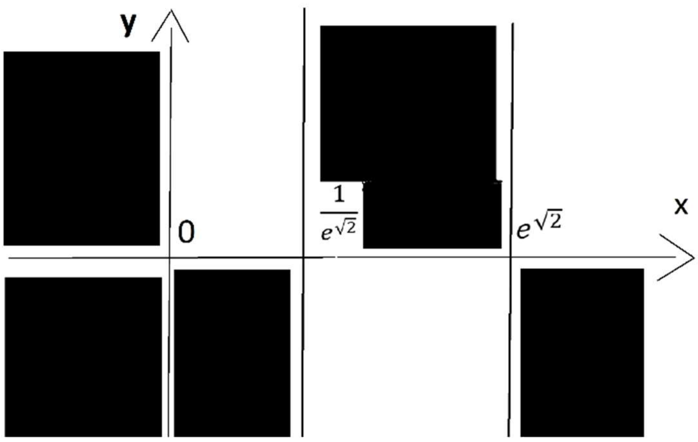
Esempio:
Calcolare , al variare di λ , il numero delle soluzioni di: $\log^4(x) - \lambda - 2\log^2(x) = 0$
Riscrivo come: $\log^4(x) - 2\log^2(x) = \lambda$
Studio la funzione: $f(x) = \log^4(x) - 2\log^2(x)$

● PARTE 1: Studio di $f(x)$

1) Studio Dominio:
$D = \mathbb{R}^+ - \{0\}$

2) Studio Segno:
Pongo $f(x) > 0$
Risolvo: $\log^4(x) - 2\log^2(x) > 0 \;\Rightarrow\; [\dots] \;\Rightarrow\; x < \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} \vee x > e^{\sqrt{2}}$
$f(x)$ si trova sopra l'asse delle x per: $x < \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} \vee x > e^{\sqrt{2}}$
$f(x)$ si trova sotto l'asse delle x per: $\frac{1}{e^{\sqrt{2}}} < x < e^{\sqrt{2}}$

Cancello le zone dove la funzione non passa:



3) Studio simmetrie:
Non serve provare a verificare se $f(x)$ è pari o dispari.
Basta osservare il grafico per capire che non è né pari né dispari.

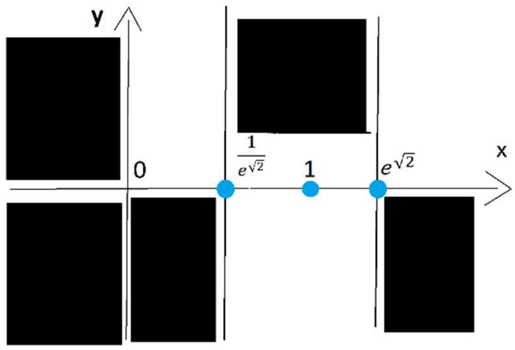
4) Studio intersezioni con gli assi:

4.1) Asse x:

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Risolvo: $\log^4(x) - 2\log^2(x) = 0 \ \Rightarrow [\dots] \ \Rightarrow \ x = 1 \ \vee \ x = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} \ \vee \ x = e^{\sqrt{2}}$

4.2) Asse y:

$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Non posso risolvere $f(0)$, perché $x = 0$ non appartiene al dominio di $f(x) \Rightarrow f(x)$ non interseca asse y



5) Ricerca asintoti:

5.1) Asintoti verticale

$\lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow$ Non lo studio, 0^- non appartiene al dominio

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = [\dots] = +\infty \ \Rightarrow$ C'è un asintoto verticale: per $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

5.2) Asintoti orizzontali

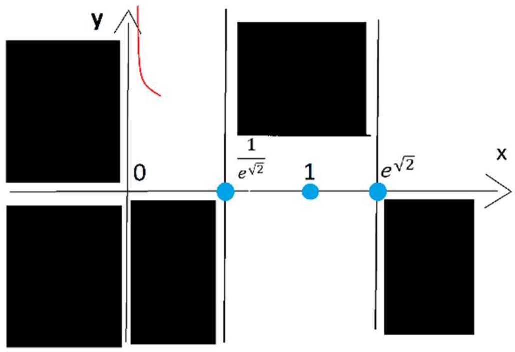
$\lim_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow$ Non lo studio, $x \to -\infty$ non appartiene al dominio

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = [\dots] = +\infty \ \Rightarrow$ Non c'è un asintoto orizzontale (gli asintoti orizzontali sono per $y = \ell$, con ℓ finito)

5.3) Asintoti obliqui

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$ Non lo studio, $x \to -\infty$ non appartiene al dominio

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} = [\dots] = 0 \ \Rightarrow$ Non c'è un asintoto obliquo



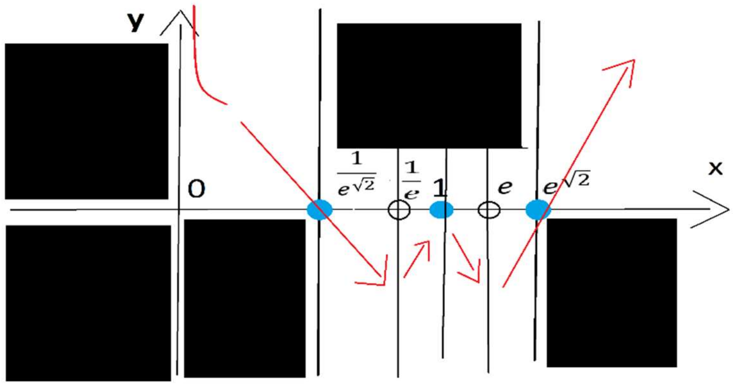
6) Studio monotonia

6.1) Studio zone monotonia

Pongo $f'(x) > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{4\log^3(x) - 2 \cdot 2\log(x)}{x} > 0 \;\; \Rightarrow \;\; [\ldots] \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{1}{e} < x < 1 \;\vee\; x > e$

$f(x)$ è monotona crescente per: $\dfrac{1}{e} < x < 1 \quad \vee \quad x > e$

$f(x)$ è monotona decrescente per: $0 < x < \dfrac{1}{e} \quad \vee \quad 1 < x < e$

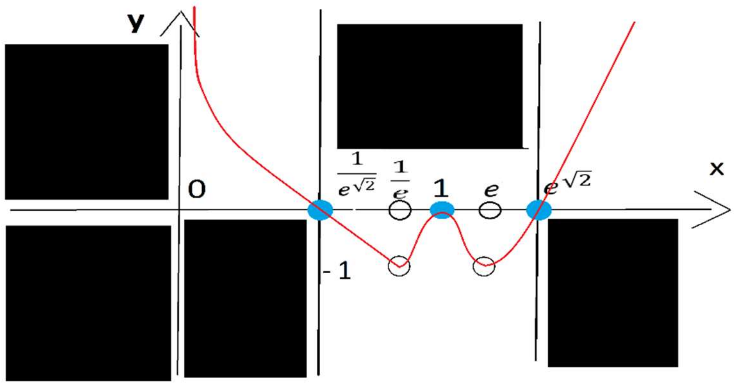


6.2) Individuazione punti di massimo e minimo

$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$

$f(1) = 0$

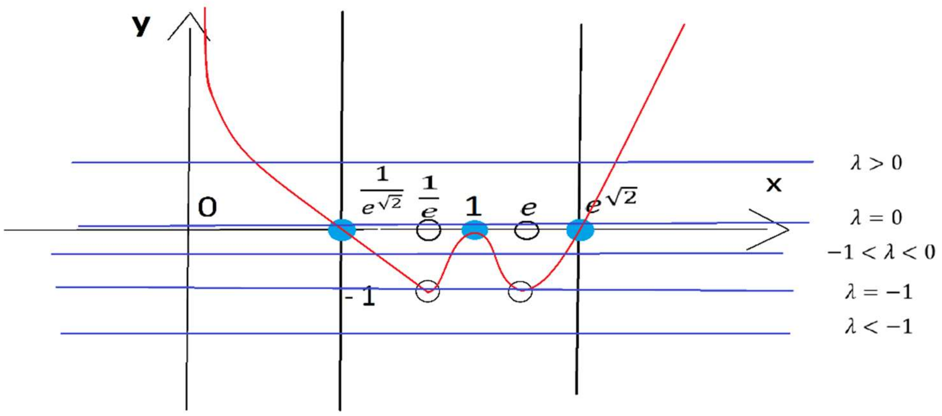
$f(e) = -1$



NB: Dal grafico, $f(x)$ SEMBRA che abbia un asintoto obliquo,
ma (come ad esempio per le parabole) in realtà $f(x)$ è sempre lievemente curva, e non è possibile tracciare una tangente.

● PARTE 2: Variazione di λ

$\log^4(x) - 2\log^2(x) = \lambda$



Per $\lambda > 0$, ci sono 2 soluzioni positive
Per $\lambda = 0$, ci sono 3 soluzioni positive
Per $-1 < \lambda < 0$, ci sono 4 soluzioni positive
Per $\lambda = -1$, ci sono 2 soluzioni positive
Per $\lambda < -1$, non ci sono soluzioni

NB:
Una soluzione è positiva quando l'incrocio di $f(x)$ con $g(x) = \lambda$ avviene a destra dell'asse delle y (dove $x > 0$).
Viceversa, una soluzione è negativa quando l'incrocio avviene a sinistra dell'asse delle y (dove $x < 0$).

Provo a verificare con un risolutore online:

Esempio 1:
$\log^4(x) - 2\log^2(x) = -1$

2 soluzioni: $x = \frac{1}{e} \cong 0.37 \quad \vee \quad x = e \cong 2.72$

Esempio 2:
$\log^4(x) - 2\log^2(x) = -\frac{1}{2}$

4 soluzioni: $x = \frac{1}{e\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}} \cong 0.27 \quad \vee \quad x = \frac{1}{e\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}} \cong 0.58 \quad \vee \quad x = e\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cong 1.72 \quad \vee \quad x = e\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \cong 3.7$