Capitolo 100

Richiami di algebra elementare

100.1 Proprietà dedotte dagli assiomi sulle operazioni

Proposizione 100.1 (Legge di annullamento del prodotto) *Per ogni $a, b \in$ $\mathbf{R}$*

$$a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0.$$

Dunque, tenuto conto della Proposizione ..., risulta che

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \ \vee \ b = 0.$$

Proposizione 100.2 *Per ogni $a \in \mathbf{R}$*

$$-(-a) = a.$$

Proposizione 100.3 *Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$*

$$(-a)b = -ab = a(-b)$$

e quindi

$$(-a)(-b) = ab.$$

Osservazione 100.4 *Si potrebbe pensare alla ben nota regola dei segni; in realtà dobbiamo ricordare che $-x$ non denota un numero negativo, ma l'opposto di x, quale che sia $x \in \mathbf{R}$.*

Proposizione 100.5 *Per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$*

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a.$$

Osservazione 100.6 *Si dimostra immediatamente che, per ogni $a, b \in \mathbf{R}$, $ab \neq$ 0*

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

da cui si deduce che

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Osservazione 100.7 *È un* errore *abbastanza frequente scrivere uguaglianze del tipo:*

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Proposizione 100.8 *Per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$*

$$-\left(a^{-1}\right) = (-a)^{-1}.$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$(-a)\left(-a^{-1}\right) = a\,a^{-1} = 1$$

e quindi $-\left(a^{-1}\right)$ è l'inverso di $-a$. ■

100.2 Manipolazione di uguaglianze

Proposizione 100.9 (manipolazione di uguaglianze) *Per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$*

$$a + b = c \Longleftrightarrow a = c - b.$$

Inoltre, se $b \neq 0$,

$$a\ b = c \Longleftrightarrow a = c/b.$$

Osservazione 100.10 *Si tratta dei cosiddetti principi di risoluzione delle equazioni:*

- *si può trasportare un addendo da un membro all'altro cambiandolo di segno;*
- *si può trasportare un fattore (o il divisore) da un membro all'altro portandolo dal numeratore al denominatore (e viceversa).*

Quando diciamo "si può" non ci riferiamo semplicemente ad una possibilità materiale: questo modo di dire contiene un sottinteso "ottenendo un'equazione equivalente"*.*

Osservazione 100.11 *Questi principi sono alla base della risoluzione dell'*equazione algebrica di primo grado

$$ax + b = 0.$$

Supponendo ovviamente $a \neq 0$, la soluzione di () è unica $x = -b/a$.

Allo stesso modo si dimostrano alcune *regole di semplificazione*:

$$\begin{aligned} a \pm b = c \pm b &\quad\Longrightarrow\quad a = c \\ ab = cb,\ b \neq 0 &\quad\Longrightarrow\quad a = c \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{b} &\quad\Longrightarrow\quad a = c \end{aligned}$$

100.3 Proprietà delle disuguaglianze

Proposizione 100.12 *Per ogni* $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} a + b \leq c &\iff a \leq c - b; \\ a \leq b + c &\iff a - c \leq b. \end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned} a &\leq b \iff -b \leq -a \\ 0 &\leq a \iff -a \leq 0 \\ a &\leq 0 \iff 0 \leq -a. \end{aligned}$$

Osservazione 100.13 *Si tratta di un principio di risoluzione delle disequazioni: si può trasportare ...*

Dimostrazione. Basta sommare ad ambo i membri $-b$ (risp $-a$). ■

Osservazione 100.14 *Una regola di semplificazione è ovvia*

$$a \pm b \leq c \pm b \Longrightarrow a \leq c$$

(basta sommare ad ambo i membri $\mp b$*).*

Proposizione 100.15 *Per ogni* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *con* $c \leq 0$ *risulta che*

$$a \leq b \Longrightarrow ac \geq bc$$

Dimostrazione. Abbiamo $-c \geq 0$. Per l'Assioma abbiamo

$$a(-c) \leq b(-c)$$

e quindi

$$-ac \leq -bc$$

da cui segue la tesi. ■

Proposizione 100.16 (regola dei segni) *Per ogni* $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq a,\ 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq ab, \\ a &\leq 0,\ 0 \leq b \Longrightarrow ab \leq 0, \\ a &\leq 0,\ b \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq ab. \end{aligned}$$

Introduciamo una notazione: per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$x^2 = x \cdot x.$$

Proposizione 100.17 *Per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *risulta* $x^2 \geq 0$*. Inoltre* $x^2 = 0$ *se e solo se* $x = 0$*.*

Corollario 100.18 *Risulta* $1 > 0$*.*

Proposizione 100.19 *Per ogni* $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ *risulta*

$$\begin{aligned} a &> 0 \Longleftrightarrow 1/a > 0, \\ a &< 0 \Longleftrightarrow 1/a < 0. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Osservato che

$$a\,\frac{1}{a} = 1 > 0$$

si deduce che a e $1/a$ hanno lo stesso segno ■

Proposizione 100.20 *Per ogni* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *con* $c > 0$, *risulta che*

$$a \leq b \Longrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

Osservazione 100.21 *In questo modo, tenuto conto dell'Assioma... si completa il secondo principio di risoluzione delle disequazioni: si possono moltiplicare o dividere ambo i membri di una disequazione per un numero strettamente positivo, conservando il verso della disuguaglianza.*

Proposizione 100.22 *Per ogni* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *con* $c < 0$ *risulta che*

$$a \leq b \Longrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

Osservazione 100.23 *La .. e la .. esprimono il terzo principio di risoluzione delle disequazioni: si possono moltiplicare o dividere ambo i membri di una disuguaglianza per un numero negativo, "cambiando il verso" alla disuguaglianza stessa.*

Corollario 100.24 *Per ogni* $a, b \in \mathbf{R}$ *risulta*

$$\begin{aligned} 0 < a \leq b &\Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \\ a \leq b < 0 &\Longrightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0 \end{aligned}$$

Proposizione 100.25 (somma di disuguaglianze) *Per ogni* $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} a &\leq b,\ c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d. \\ a &< b,\ c \leq d \Longrightarrow a + c < b + d. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Nel secondo caso, se fosse $a + c = b + d$ si otterrebbe la contraddizione

$$b = a + c - d \leq a < b$$

■

Osservazione 100.26 *Ovviamente la proposizione precedente si generalizza alla somma di più disuguaglianze.*

Corollario 100.27 *Per ogni* $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq a,\ 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq a+b, \\ 0 &< a,\ 0 \leq b \Longrightarrow 0 < a+b. \end{aligned}$$

Consegue che

$$0 \leq a,\ 0 \leq b,\ a+b=0 \Longrightarrow a=b=0.$$

Osservazione 100.28 *Ovviamente questa proposizione si generalizza al caso di più addendi.*