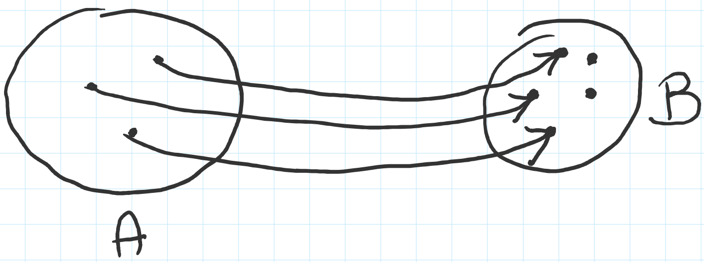
Analisi Matematica - 6.3.2019 - prima parte

Funzione inversa

Data $f: A \to B$ vorrei costruire una funzione "torna indietro".
Preso $y \in B$ vorrei che esistesse $\underbrace{x \in A \text{ t.c. } y = f(x)}_{y \in \operatorname{Im} f}$ e costruire
$g: B \to A$, $y \to x$

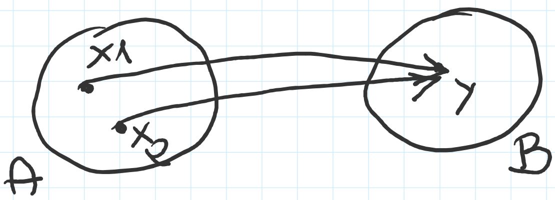
Problemi:

1) Se $y \in B$ non è detto che $y \in \operatorname{Im} f$



Se f è surgettiva $\operatorname{Im} f = B$ OK
Se definisco g su $\operatorname{Im} f$ invece che su B OK

2) Se esiste $x \in A$ t.c. $f(x) = y$, potrebbe non essere unico



$g(y) = x_1$ o $g(y) = x_2$?

Il problema non c'è se f è iniettiva.

<u>Def</u>: Sia $f: A \to B$ iniettiva. Si chiama funzione inversa di f la funzione così definita

$$\underbrace{f^{-1}}_{\text{notazione}} : \operatorname{Im} f \to A = \operatorname{dom} f$$

$\forall y \in \operatorname{Im} f \ \exists! \, x \in A : y = f(x) \quad f^{-1}(y) = x$

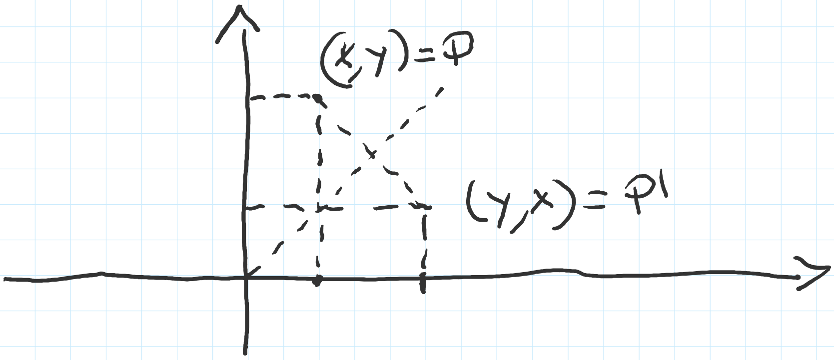
OSS: Con questa def. è garantita l'univocità
di f^{-1}

OSS: Con questa def. è garantita l'univocità di f^{-1}!

Se f è surgettiva, $\text{Im} f = B$ $\quad f^{-1}: B \to A$.

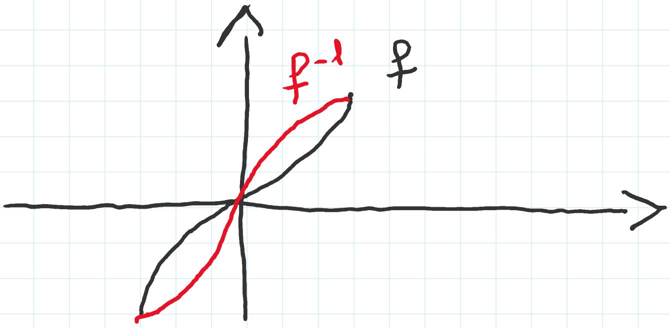
- Sia f reale di variabile reale. Come è fatto Graf f^{-1}?

$(x,y) \in \text{Graf } f \iff (y,x) \in \text{Graf } f^{-1}$



P' è il simmetrico di P rispetto a $y=x$

Graf f^{-1} è il simmetrico rispetto a $y=x$ di Graf f



Esempi

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x^3$

f è iniettiva (vedremo ...)

$\text{Im} f = \mathbb{R}$:

$\text{Im} f \subseteq \mathbb{R}$ ovvio

$\mathbb{R} \subseteq \text{Im} f$:

Fisso $y \in \mathbb{R}$ $\quad x^3 = y$. Questa eq. ammette un'unica sol. $x = \sqrt[3]{y}$ $\quad f(x) = y \Rightarrow y \in \text{Im} f$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y \longmapsto \sqrt[3]{y}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y \longmapsto \sqrt[3]{y}$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$

f non è invertibile perché non è iniettiva.

$g: [0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$ questa è inv.

$g^{-1}: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

$x \to \sqrt{x}$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto x+2$

f è iniettiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \underset{\text{proprietà reali}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathbb{R}$ ovvio

$\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Im}\, f$: $y \in \mathbb{R}$ esiste $x = y-2$ tale che

$f(x) = f(y-2) = y \underbrace{-2+2}_{0} = y$

$f^{-1}: \underset{\mathrm{Im}\, f}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}}} \to \underset{\mathrm{dom}\, f}{\mathbb{R}}$ $\quad y \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = x$ sol. di $f(x) = y$

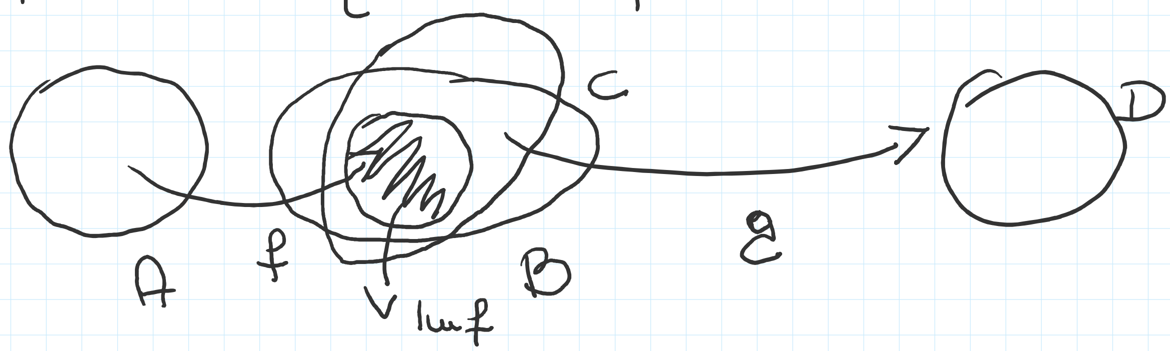
$x + 2 = y$

$x = y - 2$

$f^{-1}(y) = y - 2$

Funzione composta

Applicare di seguito due funzioni.



Def: Siano $f: A \to B$ e $g: C \to D$ funzioni tali che $\mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{dom}\, g = C$. Si chiama funzione composta di f e g la funzione così definita

$$\underbrace{g \circ f}_{\text{notazione}} : A \longrightarrow D \quad \forall x \in A \ (g \circ f)(x) = g(\underset{\in \mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{dom}\, g}{f(x)})$$

Esempi:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x+1$

   $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$

   $\mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{dom}\, g = \mathbb{R}$ vero

   $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $x \in \mathbb{R} \longrightarrow g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$

   $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $x \to f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$

OSS: La composizione di funzioni non è commutativa.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3$

   $g: [0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \sqrt{x}$

Cond. per poter definire $g \circ f$: $\mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{dom}\, g = [0,+\infty)$

Non è verificata: $-1 \in \mathbb{R} \quad f(-1) = -1 \notin [0,+\infty)$

$\tilde{f} : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \quad x \to x^3$

$x \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0 \quad \mathrm{Im}\, \tilde{f} \subset [0,+\infty)$

$g \circ \tilde{f} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$g \circ \tilde{f} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(\tilde{f}(x)) = g(x^3) = \sqrt{x^3}$$

Proprietà

- La composizione è associativa
$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

- Funzione identità $\iota_A : A \to A \quad x \mapsto x$

Sia $f : \underset{\text{dom} f}{\overset{\shortparallel}{A}} \to B$ iniettiva: esiste $f^{-1} : \text{Im} f \to \text{dom} f$

$\forall x \in \text{dom} f \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad f^{-1} \circ f = \iota_{\text{dom} f}$

$\forall y \in \text{Im} f \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad f \circ f^{-1} = \iota_{\text{Im} f}$

Analisi Matematica - 6.3.2019 - seconda parte

Nozioni che riguardano funzioni reali di variabile reale.

Sia $f: A \to \mathbb{R}$. $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

Def: f si dice

1. **limitata superiormente** se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che
   $$f(x) \leq M \quad \forall x \in A$$
   (equivalentemente se $\operatorname{Im} f$ è un insieme lim. superiormente);
2. **limitata inferiormente** se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che
   $$m \leq f(x) \quad \forall x \in A$$
   (equiv. se $\operatorname{Im} f$ è un insieme limitato inferiormente);
3. **limitata** se è limitata inferiormente e superiormente (equiv. se $\operatorname{Im} f$ è un insieme limitato).

Esempi

1. $f: x \in \mathbb{R} \to x^2$ è limitata inferiormente
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{0}_{m} \leq x^2$$
2. $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ è limitata superiormente:
   $$\forall x \geq 1 \implies \frac{1}{x} \cdot x \geq \frac{1}{x} \implies 1 \geq \frac{1}{x} \implies \frac{1}{x} \leq 1$$
   $$f(x) \leq \underbrace{1}_{M}$$
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

   $1 + x^2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f$ è ben definita

$1+x^2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow f$ è ben definita

$0 \leq x^2 \neq -1 < 0$

f è limitata:

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$f(x) \leq 1$:

$0 \leq x^2 \Rightarrow 1 \leq x^2+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x$

f non è limitata né sup. né inf.

f non è lim. sup: devo provare che

$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) > M$

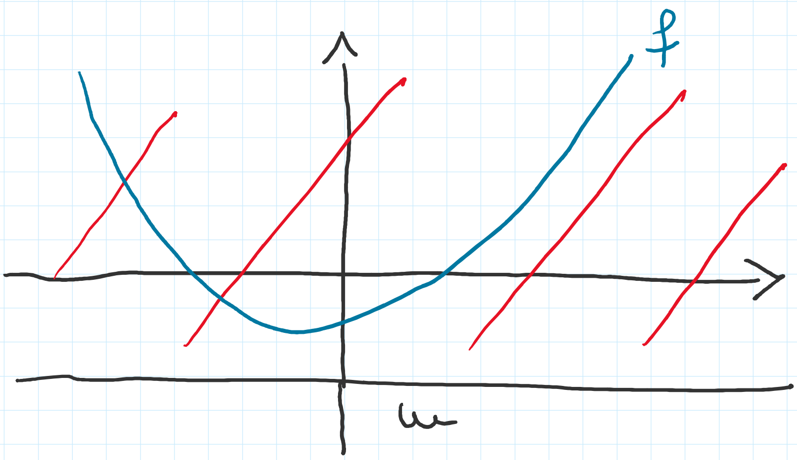
$x > M$

$M \qquad x = M+1$

$M+1 > M$

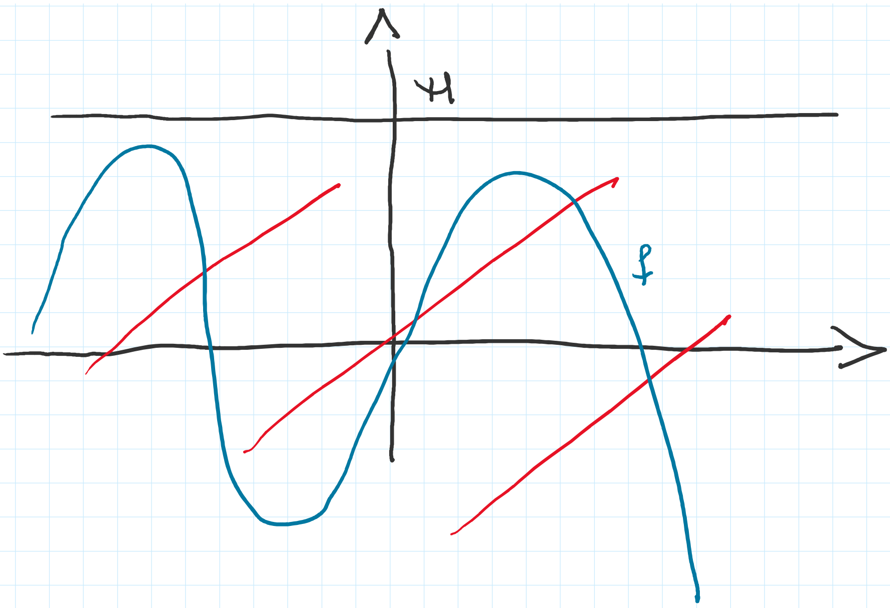
Interpretazione geometrica

1. f è lim. inferiormente $\Leftrightarrow$ Graf $\subseteq \underbrace{\mathbb{R} \times [m, +\infty)}_{\text{semipiano superiore}}$

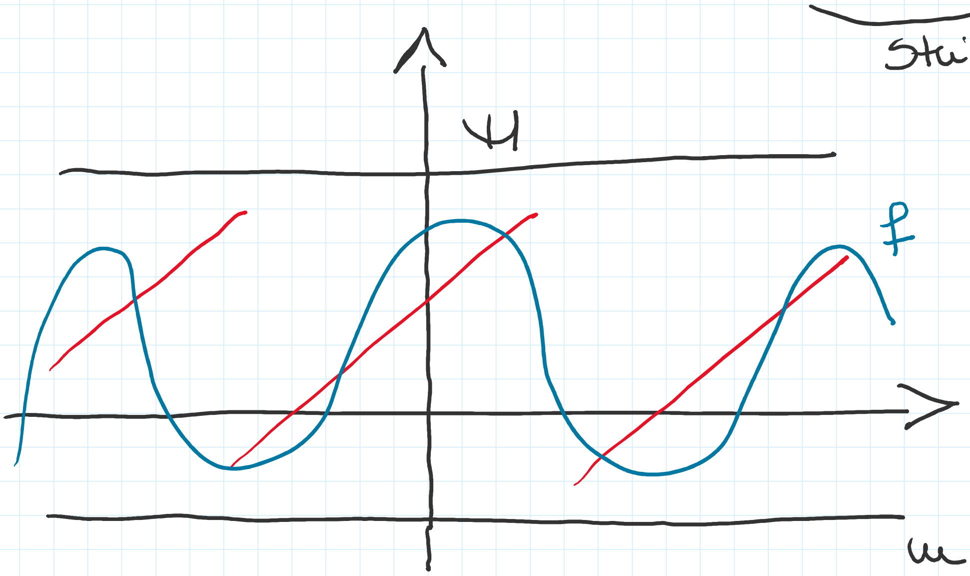


2. f è limitata sup. $\Leftrightarrow$ Graf $f \subseteq \underline{\mathbb{R} \times (-\infty, M]}$

semipiano inferiore



3. f limitata $\iff$ $\text{Graf } f \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \times [m, M]}_{\text{striscia}}$



<u>Def</u>: Si dice che

1. $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di f e si scrive

$$M = \max_A f = \max_{x \in A} f(x)$$

se

- $\exists\, x_M \in A \ : \ f(x_M) = M$ $\quad (M \in \text{Im} f)$

$+$

- $\forall x \in A \quad f(x) \leq M$ $\quad (M \text{ è un magg. per Im} f)$

$\Downarrow$

$M = \max \text{Im} f$

2. $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di f e si scrive

2. $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di f e si scrive

$$m = \min_A f = \min_{x \in A} f(x)$$

se

- $\exists\, x_m \in A$ t.c. $f(x_m) = m$ $\quad$ $(m \in \operatorname{Im} f)$ $+$
- $\forall x \in A \quad m \leq f(x)$ $\quad$ (m è un minorante per $\operatorname{Im} f$)

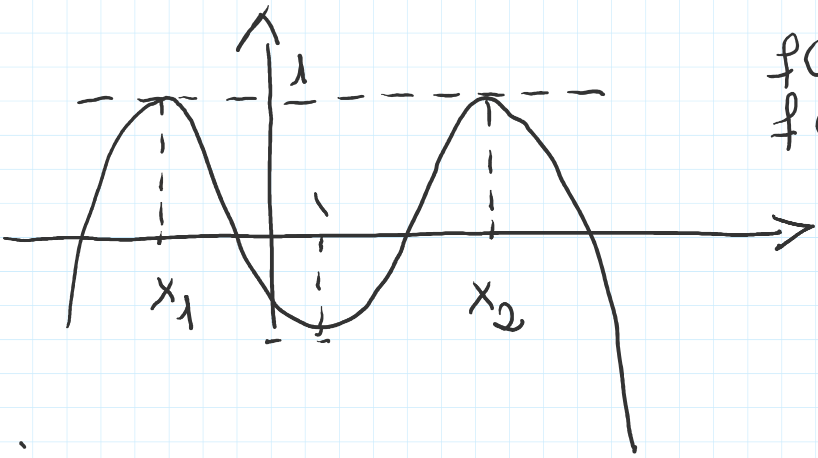
$\Downarrow$

$m = \min \operatorname{Im} f$

I punti x_M e x_m si chiamano punto di massimo e punto di minimo risp.

OSS: m e M potrebbero non esistere, ma se esistono sono unici

I p.ti di massimo potrebbero essere più di uno.
" " minimo " " " "



$f(x_1) = 1$
$f(x_2) = 1$

Esempi:

1. $f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$0 = \min_{\mathbb{R}} f$

$0 = f(0) \Rightarrow 0 \in \operatorname{Im} f$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow 0$ min. di $\operatorname{Im} f$

2. $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = -\sqrt{x} + 1$

$$1 = \max_{[0,+\infty)} f$$

- $1 = f(0)$ $\qquad f(0) = -\sqrt{0} + 1 = 1$
- $\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq 1$

$$-\sqrt{x} + 1 \overset{?}{\leq} 1$$
$$-\sqrt{x} \overset{?}{\leq} 0$$
$$\sqrt{x} \geq 0 \quad \text{vero}$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f(0) = 1$, $f(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 = \max_{\mathbb{R}} f$

0 p.to di massimo

f non ammette minimo:

$\mathrm{Im}\, f = (0, 1]$ $\qquad 0 \notin \mathrm{Im}\, f$: $f(x) = 0$ $\quad \dfrac{1}{1+x^2} = 0$ non ha sol.

Analogamente si definiscono inf e sup. di funzioni

$$\sup_A f \overset{\text{def}}{=} \sup \mathrm{Im}\, f$$
$$\inf_A f \underset{\text{def}}{=} \inf \mathrm{Im}\, f$$

(eventualmente $\sup_A f = +\infty$ oppure $\inf_A f = -\infty$).

Funzioni pari, dispari

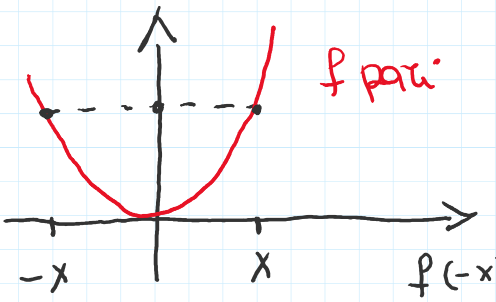
Def: Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che A sia simmetrico ($x \in A \Rightarrow -x \in A$).

Def: Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che A sia simmetrico ($x \in A \Rightarrow -x \in A$).

f si dice

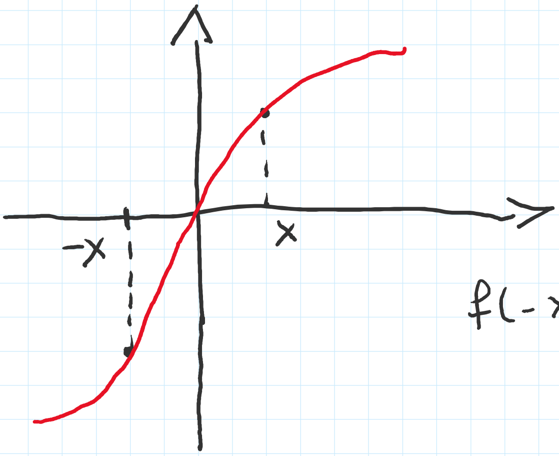
- **pari** se
  $\forall x \in A \quad f(-x) = f(x)$
- **dispari** se
  $\forall x \in A \quad f(-x) = -f(x)$.

Oss. f pari $\Leftrightarrow$ $(x, f(x)) \in \text{Graf} f \Rightarrow (-x, f(x)) \in \text{Graf} f$
f dispari $\Leftrightarrow$ $(x, f(x)) \in \text{Graf} f \Rightarrow (-x, -f(x)) \in \text{Graf} f$



Graf è simmetrico rispetto all'asse y

$f(-x) = f(x)$

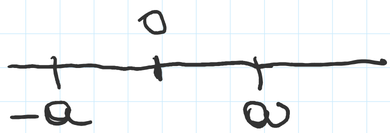


Graf f è simmetrico rispetto all'origine.

$f(-x) = -f(x)$

Dominio simmetrico: $\mathbb{R}$

$[-a, a]$



$(-a, a)$

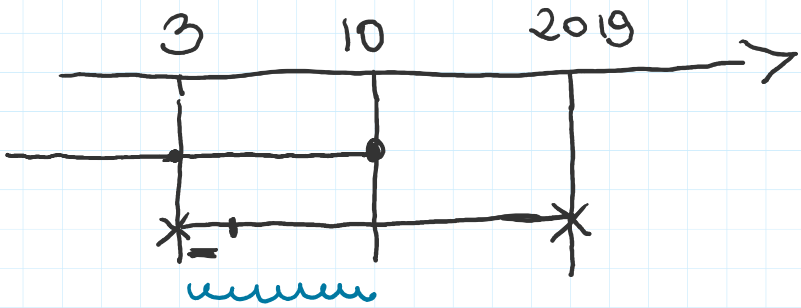
$f(x) = x^2$ pari $\quad f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2$

$f(x) = x^3$ dispari $\quad f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x)$

Analisi Matematica - 6.3.2019 - terza parte

Estremi di un insieme

- $A = (-\infty, 10] \cap (3, 2019)$



$A = (3, 10]$

$10 = \max A$: $10 \in A$

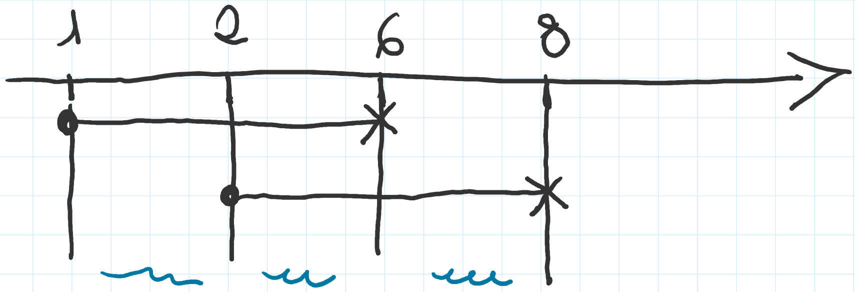
$\forall x \in A \quad x \leq 10$

$M_- = (-\infty, 3]$ (minoranti di A)

$\max M_- = 3 \Rightarrow 3 = \inf A$

(ma non è $\min A$ perché $3 \notin A$)

- $A = [1, 6) \cup [2, 8)$



$A = [1, 8)$

$1 = \min A$

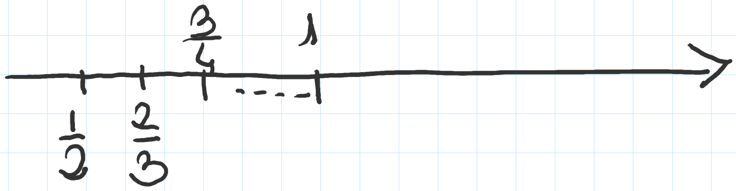
$8 = \sup A$

A non ha massimo (se esistesse $\max A$, dovrebbe coincidere con $\sup A$, quindi dovrebbe essere 8.

max A, dovrebbe coincidere con sup A, quindi dovrebbe essere 8, ma $8 \notin A$)

- $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{n+1}{n+2} \quad n \in \mathbb{N}\}$

$= \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \text{-----}\}$



$\frac{1}{2} = \min A \quad : \quad \frac{1}{2} \in A \quad (n=0)$

$\frac{1}{2} \leq x \quad \forall x \in A$

$\frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

$n+2 \leq 2n+2$

$n \leq 2n$

$0 \leq n$ vero

1 non è massimo di A $\quad \frac{n+1}{n+2} \neq 1 \ \forall n \Rightarrow 1 \notin A$

$\sup A = 1$

- 1 è magg. di A : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n+1}{n+2} < 1$

$\Updownarrow$

$n+1 < n+2$

$\Updownarrow$

$1 < 2$ OK, vero

• 1 è il più piccolo dei magg. di A.
(minimo)

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad k < 1 \Rightarrow k \text{ non è un magg. di } A \iff$$
$$\exists x \in A \quad k < x \iff$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \quad k < \frac{n+1}{n+2}$$

Fissato k, $\quad k < \frac{n+1}{n+2} \iff$

$$nk + 2k < n + 1$$
$$2k - 1 < n - nk = \overset{>0}{(1-k)}\, n$$
$$n > \frac{2k-1}{1-k}$$

Basta prendere $n > \frac{2k-1}{1-k}$ per avere che $k < \frac{n+1}{n+2}$