Capitolo 1

Numeri reali

1.1 Campo ordinato dei numeri reali

L'ambiente naturale per gli "oggetti" dell'Analisi matematica è l'insieme dei numeri reali, denotato con $\mathbf{R}$.

Sull'insieme $\mathbf{R}$ sono definite due operazioni, somma e prodotto, ed una relazione di totale ordine.

1.1.1 Assiomi algebrici

Assiomi sulla somma

Assioma 1.1 *Proprietà associativa della somma*

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Assioma 1.2 *Proprietà commutativa della somma*

$$x + y = y + x$$

Assioma 1.3 *Esistenza di* 0 *elemento neutro per la somma*

$$x + 0 = x = 0 + x$$

Proposizione 1.4 *L'elemento neutro è unico.*

Dimostrazione. $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$ ■

Assioma 1.5 *Esistenza dell'*opposto

$$\forall x \in \mathbf{R}\, \exists y \in \mathbf{R}\; t.c.\; x + y = 0$$

Proposizione 1.6 *L'opposto di* x *è unico.*

Dimostrazione. Si abbiano y_1 e y_2 che verificano le condizioni di opposto.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 + 0 = y_1 + (x + y_2) = \\ &= (y_1 + x) + y_2 = 0 + y_2 = y_2 \end{aligned}$$

■

Notazione 1.7 *Per ogni $x \in \mathbf{R}$ l'opposto di x si denota con $-x$.*

Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ poniamo

$$a - b = a + (-b).$$

Osservazione 1.8 *Dobbiamo precisare che $-x$ non denota un numero negativo (di cui non abbiamo ancora parlato), ma l'opposto di x, quale che sia $x \in \mathbf{R}$.*

Osservazione 1.9 *Dall'unicità dell'opposto si deduce anche che, per ogni $x \in \mathbf{R}$*

$$-(-x) = x.$$

Passiamo agli assiomi sul prodotto

Assioma 1.10 *Proprietà associativa del prodotto*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Assioma 1.11 *Proprietà commutativa del prodotto*

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Assioma 1.12 *Esistenza di 1 (diverso da 0) elemento neutro per il prodotto*

$$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$$

Assioma 1.13 *Proprietà distributiva*

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Proposizione 1.14 *Per ogni $y \in \mathbf{R}$ risulta $0 \cdot y = 0$.*

Osservazione 1.15 *La condizione $1 \neq 0$ ha lo scopo di rendere il corpo "non banale". Se fosse $1 = 0$ avremmo, per ogni $x \in \mathbf{R}$*

$$x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

In altri termini $\mathbf{R} = \{0\}$.

Assioma 1.16 *Esistenza dell'*inverso*, per ogni $x \neq 0$*

$$\forall x \neq 0 \, \exists y \in \mathbf{R} \, t.c. \, x \cdot y = 1$$

Osservazione 1.17 *Osserviamo esplicitamente che, dalla Proposizione 1.14 si deduce che non può esistere l'inverso di 0. Quindi l'Assioma 1.16 stabilisce l'esistenza dell'inverso per tutti i numeri per cui potrebbe esistere.*

Proposizione 1.18 *Per ogni $x \neq 0$ l'inverso di x è unico.*

Notazione 1.19 *Per ogni $x \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ l'inverso di x si denota con x^{-1}.*

Osservazione 1.20 *Osserviamo che, fino a questo momento, non abbiamo ancora definito le potenze con alcun tipo di esponente, quindi x^{-1} denota semplicemente ed esclusivamente l'inverso di un numero diverso da 0; ove dovesse servire useremo la notazione meno ambigua $1/x$.*

Notazione 1.21 *Per estensione della notazione tipica delle frazioni (vedi Notazione 1.39), assegnati due qualunque numeri reali a, b con $b \neq 0$, scriveremo*

$$\frac{a}{b} = a\, b^{-1}$$

Parleremo dunque di rapporto (o divisione) intendendo la moltiplicazione per l'inverso.

Talvolta adopereremo in senso lato anche le denominazioni specifiche delle frazioni : a numeratore e b denominatore.

Osservazione 1.22 *Poichè non esiste l'inverso di 0, non avrà mai senso la scrittura $a/0$.*

1.1.2 Relazione d'ordine e completezza

Ricordiamo le proprietà che caratterizzano una relazione di totale ordine

- Per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta
$$x \leq x$$
(proprietà riflessiva).
- Per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ risulta
$$x \leq y,\ y \leq x \Longrightarrow x = y$$
(proprietà antisimmetrica).
- Per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$ risulta
$$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$$
(proprietà transitiva).
- Per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ risulta
$$x \leq y \text{ oppure } y \leq x$$
(totale ordine).

Poniamo, inoltre

$$\begin{aligned} a < b &\Longleftrightarrow a \leq b, a \neq b \\ a \geq b &\Longleftrightarrow b \leq a \\ a > b &\Longleftrightarrow b \leq a, b \neq a \end{aligned}$$

Dal totale ordinamento conseguono le seguenti proposizioni.

Proposizione 1.23 (Dicotomia 1) *Per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ risulta:*

$$x \leq y \textit{ oppure } y < x$$

proprietà mutuamente esclusive.

Proposizione 1.24 (Dicotomia 2) *Per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ risulta :*

$$x < y \text{ oppure } y \leq x$$

proprietà mutuamente esclusive.

Proposizione 1.25 (Tricotomia) *Per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ risulta:*

$$x < y \text{ oppure } x = y \text{ oppure } y < x$$

proprietà mutuamente esclusive.

Compatibilità con la struttura algebrica

Per parlare di campo ordinato si assumono i seguenti assiomi di compatibilità con la struttura algebrica.

Assioma 1.26 *Per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$, risulta*

$$x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z.$$

Assioma 1.27 *Per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$, risulta*

$$x \leq y \wedge 0 \leq z \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z.$$

Osservazione 1.28 *Gli insiemi che sono dotati di somma, prodotto e relazione d'ordine soddisfacenti gli assiomi riportati sopra prendono il nome di* campo ordinato*.*

Da questi assiomi si deducono tutte le ben note regole di calcolo algebrico (vedi Appendice A).

Si deduce in particolare che $1 > 0$.

Definizione 1.29 *Un numero $x \in \mathbf{R}$ si dice* positivo *(risp.* negativo*) se risulta $x \geq 0$ (risp $x \leq 0$). Analogamente si parla di numeri strettamente positivi e negativi.*

Osservazione 1.30 *Si può dimostrare facilmente che*

$$0 \leq x \Longleftrightarrow -x \leq 0,$$
$$x \leq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq -x.$$

Completezza

Concludiamo con un'importante definizione e l'assioma fondamentale di $\mathbf{R}$.

Definizione 1.31 *Due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbf{R}$ si dicono* separati *se per ogni $x \in A, y \in B$ risulta $x \leq y$.*

Assioma 1.32 (di completezza - Dedekind) *Tra due insiemi separati non vuoti $A, B \subset \mathbf{R}$ esiste $c \in \mathbf{R}$* elemento di separazione*, ossia tale che, per ogni $x \in A, y \in B$, risulti $x \leq c \leq y$.*

Gli assiomi di campo ordinato, uniti all'assioma di completezza, caratterizzano univocamente l'insieme $\mathbf{R}$. Infatti esistono diversi insiemi ("molto" diversi tra loro) che soddisfano gli assiomi di campo; almeno due insiemi diversi che soddisfano gli assiomi di campo ordinato, ma un solo insieme che soddisfa gli assiomi di campo ordinato completo. L'aggettivo "diversi" va inteso nel senso di "non in corrispondenza biunivoca", precisamente "non isomorfi".

1.2 Numeri interi e razionali

All'interno dell'insieme $\mathbf{R}$, partendo dagli assiomi elencati sopra si possono definire alcuni sottoinsiemi speciali

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

e si può dimostrare che questi godono esattamente delle proprietà dei numeri *naturali*, *interi*, *razionali* apprese negli studi precedenti. Di seguito ne ricordiamo alcune che hanno riflessi sulla struttura generale di $\mathbf{R}$.

1.2.1 Numeri interi

Proposizione 1.33 (proprietà archimedea) *Per ogni* $a, b \in \mathbf{R}$*, con* $0 < a < b$*, esiste* $n \in \mathbf{N}$ *tale che* $b < n\,a$*.*

Corollario 1.34 *Per ogni* $b > 0$ *esiste* $n \in \mathbf{N}$ *tale che* $b < n$*.*

Parte intera

Proposizione 1.35 *Per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *esiste ed è unico* $k \in \mathbf{Z}$ *tale che*

$$k \leq x < k + 1.$$

Definizione 1.36 *Tale* k *prende il nome di* parte intera *di* x *e si denota con* $\lfloor x \rfloor$*.*

In altri termini la parte intera di $x \in \mathbf{R}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. Pertanto

$$\begin{aligned} \lfloor \pi \rfloor &= 3 \\ \lfloor 2 \rfloor &= 2 \\ \lfloor -0.5 \rfloor &= -1 \end{aligned}$$

Esercizio 1.37 *Dimostrare che per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *risulta*

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$$

Osservazione 1.38 *In maniera perfettamente analoga si potrebbe anche considerare il più piccolo intero maggiore o uguale ad* x*. Ovviamente dovremmo adottare un altro simbolo* $\lceil x \rceil$ *e si avrebbe*

$$\begin{aligned} \lceil \pi \rceil &= 4 \\ \lceil 2 \rceil &= 2 \\ \lceil -0.5 \rceil &= 0 \end{aligned}$$

In presenza di due possibili definizioni di parte intera, il simbolo $[x]$ *usato su alcuni testi potrebbe rivelarsi ambiguo.*

1.2.2 Numeri razionali

Posto

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

ciascun numero razionale $q \in \mathbf{Q}$ può essere scritto nella forma

$$q = m\, n^{-1} \tag{1.1}$$

essendo $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbf{N}^*$.

Notazione 1.39 *Nella tradizione i numeri $m\,n^{-1}$ vengono scritti nella forma di* frazioni

$$m\,n^{-1} = \frac{m}{n}.$$

Evidentemente, per ogni fissato $q \in \mathbf{Q}$, le frazioni m/n che lo rappresentano sono infinite (e vengono dette frazioni equivalenti*).*

In $\mathbf{Q}$ valgono gli assiomi da 1.1 a 1.27; si ha anche la compatibilità con la relazione d'ordine, pertanto $\mathbf{Q}$ è un sottocampo ordinato di $\mathbf{R}$.

Passiamo ad osservare che, a differenza di $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ non è completo. Servono due passaggi.

Proposizione 1.40 *Non esiste alcun numero razionale $q \in \mathbf{Q}$ tale che $q^2 = 2$.*

Proposizione 1.41 *Il campo ordinato $\mathbf{Q}$ non verifica l'assioma di completezza.*

Dimostrazione. È sufficiente esibire un esempio di due insiemi separati e tuttavia privi di elemento di separazione (in $\mathbf{Q}$ ovviamente).

Consideriamo gli insiemi

$$A = \left\{ q \in \mathbf{Q} \mid 0 \le q, q^2 < 2 \right\},$$
$$B = \left\{ q \in \mathbf{Q} \mid 0 \le q, 2 < q^2 \right\}.$$

Gli insiemi A e B sono non vuoti infatti $1 \in A$ e $2 \in B$. Inoltre tali insiemi sono separati; infatti, considerati $q_1 \in A$ e $q_2 \in B$, se risultasse

$$q_2 < q_1$$

avremmo anche

$$2 < q_2^2 < q_1^2 < 2.$$

Supponiamo per assurdo che A e B ammettano in $\mathbf{Q}$ un elemento di separazione che denotiamo con $\bar{q}$. Tale $\bar{q}$ sarà positivo in quanto compreso tra 1 e 2.

In forza della proposizione precedente non può essere $\bar{q}^2 = 2$, quindi si avrà $\bar{q}^2 < 2$ oppure $2 < \bar{q}^2$. Supponiamo $\bar{q}^2 < 2$.

Consideriamo ora

$$r = \frac{2(\bar{q}+1)}{\bar{q}+2} \in \mathbf{Q}$$

Abbiamo evidentemente $r \in \mathbf{Q}$ rimane da vedere se tale r appartiene ad A o a B. Abbiamo

$$r^2 = \frac{4(\bar{q}+1)^2}{(\bar{q}+2)^2}$$

e quindi
$$r^2 - 2 = \frac{2\left(\bar{q}^2 - 2\right)}{(\bar{q}+2)^2}.$$
Avendo supposto $\bar{q}^2 < 2$ si deduce $r^2 - 2 < 0$ e dunque $r \in A$. Essendo $\bar{q}$ elemento di separazione avremo
$$r \leq \bar{q}. \tag{1.2}$$

D'altra parte risulta
$$r - \bar{q} = \frac{2 - \bar{q}^2}{\bar{q}+2} > 0$$
ossia
$$r > \bar{q}$$
in contraddizione con (1.2).

Ad un analogo assurdo si perviene assumendo $\bar{q}^2 < 2$. Dunque non può esistere in $\mathbf{Q}$ alcun elemento di separazione. ■

Il rapporto che intercorre tra $\mathbf{Q}$ ed $\mathbf{R}$ viene precisato dalla proposizione seguente.

Proposizione 1.42 (densità di Q in R) *Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$, esiste $q \in \mathbf{Q}$ tale che $a < q < b$.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso $0 < a < b$.

Esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che
$$\frac{1}{n} < b - a$$
Ora poniamo
$$A = \left\{ m \in \mathbf{N} \mid a < \frac{m}{n} \right\}$$
e consideriamo $m_0 = \min A$.

Risulta
$$\frac{m_0}{n} > a.$$

Inoltre, poiché $m_0 - 1 \notin A$, avremo
$$\frac{m_0 - 1}{n} < a$$
e quindi
$$\frac{m_0}{n} < a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$$
Quindi m_0/n verifica le disuguaglianze richieste. ■

Osservazione 1.43 (digressione insiemistica) *Nella teoria degli insiemi viene definito il numero cardinale; nel caso di insiemi finiti, si tratta del numero di elementi contenuti nell'insieme stesso. Per insiemi infiniti si presentano situazioni "paradossali":*

- *gli insiemi* $\mathbf{N}$,$\mathbf{Z}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ *sono tutti strettamente inclusi uno nell'altro,*
- *eppure* $\mathbf{N}$,$\mathbf{Z}$ *e* $\mathbf{Q}$ *hanno la stessa cardinalità, mentre* $\mathbf{R}$ *ha cardinalità superiore.*

Da ciò si deduce che l'insieme degli irrazionali ha cardinalità maggiore di $\mathbf{Q}$*. In questo senso (pur in presenza della proprietà di densità di* $\mathbf{Q}$ *in* $\mathbf{R}$*) possiamo affermare che la maggior parte dei numeri reali è* irrazionale *(cioè non appartenente a* $\mathbf{Q}$*).*

1.2.3 Approccio assiomatico ed approccio costruttivo

Abbiamo introdotto $\mathbf{R}$ in maniera assiomatica (quindi senza esplicitare la natura dei numeri reali); abbiamo ricordato che quella collezione di assiomi definisce (a meno di isomorfismi) un unico insieme. Ovviamente rimane aperto il problema: esiste un insieme su cui sono definite due operazioni, una relazione d'ordine e sono verificati gli assiomi di campo ordinato completo?

Anzitutto dovremmo precisare cosa intendiamo in matematica con la parola *"esiste"*, secondo l'interpretazione oggi più comune è da intendersi *"è basato su una teoria non contraddittoria"*.

Ora torniamo alla nostra domanda: esiste l'insieme dei numeri reali? La risposta è affermativa ed esistono diverse "ricette" per costruire un "modello" di un insieme siffatto (a partire dai numeri razionali).

Ovviamente la stessa questione si può porre a ritroso: come costruire un modello per i numeri razionali (a partire dagli interi), come costruire un modello per gli interi (a partire dai naturali), come costruire un modello per i naturali (a partire da ... cosa???). Se l'ambiente di partenza è basato su una teoria non contradditoria, lo stesso si potrà dire per il nuovo ambiente.

Si potrebbe partire dai numeri naturali con le loro operazioni e la relazione d'ordine. In questo insieme, denotato ovviamente con $\mathbf{N}$, sono verificate le proprietà descritte dagli Assiomi da 1.1 a 1.27, tranne 1.5 e 1.16.

Passo dopo passo, l'insieme dei numeri si allarga. Ribadiamo che ad ogni passo

- devono essere definiti i nuovi numeri,
- devono essere definite le operazioni sui nuovi numeri,
- si deve provare che il nuovo ambiente può essere considerato come un'estensione dell'ambiente precedente.

Ovviamente ad ogni passo deve risultare che il nuovo ambiente è più ricco di proprietà:

1. passando da $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$ si aggiunge la proprietà descritta dall'Assioma 1.5;
2. passando da $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$ si aggiunge la proprietà descritta dall'Assioma 1.16;
3. passando da $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$ si aggiunge la proprietà descritta dall'Assioma di completezza.

I passi 1 e 2, rispetto al 3, sono molto più semplici; si procede per via algebrica. Invece, per compiere il terzo passo, sono possibili diversi approcci, tutti non banali. Tre distinti modelli di costruzione di $\mathbf{R}$ sono stati pubblicati nel 1872. Erano passati un paio di secoli dall'invenzione del Calcolo infinitesimale, grandi erano stati i successi di questa teoria e si sentiva il bisogno di sistemare dal punto di vista logico le fondamenta della teoria stessa.

Dal punto di vista logico questo approccio fa ricadere tutto il peso della costruzione su **N** (e sulle teoria degli insiemi).

Tuttavia, giunti ad **N**, con i Teoremi di incompletezza di Gödel (1931), ci si imbatte in una situazione del tutto inaspettata: è impossibile dimostrare la non contraddittorietà degli assiomi di **N** (con procedimenti "finiti"). In altre parole non esiste una teoria più semplice e non contradditoria che possa fungere come roccia sicura su cui fondare l'edificio della matematica. Se la teoria di **R** è consistente, lo sarà anche la teoria di **N**; e viceversa. Tanto vale allora partire direttamente dagli assiomi di **R**, e questa è stata appunto la nostra scelta.

Osservazione 1.44 *Vogliamo ricordare che esiste un ulteriore insieme numerico* **C***, costituito dai numeri complessi, che si può considerare come ampliamento di* **R**. *L'insieme* **C** *verifica gli assiomi di campo (da 1.1 a 1.16) tuttavia non è possibile definire su* **C** *una relazione d'ordine che risulti compatibile con le leggi di composizione interna.*

1.3 Rappresentazione dei numeri

In questo paragrafo che chiude la presentazione dei numeri reali cerchiamo di precisare il modo in cui noi operiamo con questi numeri. Siamo quasi obbligati a dare per note alcune nozioni acquisite dagli studi precedenti (ad esempio le potenze) e che saranno precisate nel proseguimento del corso.

Per mettere a fuoco cosa intendiamo per rappresentazione di un numero, consideriamo inizialmente i numeri naturali e osserviamo la seguente tabella.

	5	11
rappresentazione "primitiva"	IIIII	IIIIIIIIIII
rappresentazione romana	V	XI
rappresentazione binaria	101	1011

Dal punto di vista concettuale il fatto rilevante è che per ciascun numero intero è sufficiente una stringa finita. Questo consente di utilizzare i numeri per immetterli in un algoritmo e ottenere un risultato, in definitiva per effettuare calcoli (addizioni e moltiplicazioni).

La scelta del sistema di rappresentazione dipende da due considerazioni:

- si vogliono evitare stringhe eccessivamente lunghe;
- il sistema deve consentire di svolgere facilmente calcoli elementari.

Il sistema decimale su cui ci soffermiamo, così come il sistema binario, è di tipo posizionale, con base fissa. Ad esempio scriviamo

$$1682$$

e intendiamo

$$1 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2$$

ossia

$$1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2$$

Attualmente si usano solo sistemi posizionali (decimale, binario, esadecimale). Dalla scelta della base dipende la lunghezza della stringa necessaria per rappresentare un prefissato $n \in \mathbf{N}$.

Passiamo ora ai numeri razionali. Valgono le stesse considerazioni svolte sugli interi: ciascun razionale è rappresentabile tramite una frazione (ossia due interi), le operazioni sui razionali sono riconducibili ad operazioni tra interi; dunque è possibile effettuare calcoli esatti, purché si rimanga nella notazione in forma di frazione.

D'altra parte la notazione in forma di frazione non è delle più agevoli da gestire (le calcolatrici tascabili riescono a gestirla solo da qualche decina d'anni). Più agevole la cosiddetta notazione decimale, "con la virgola", anzi, seguendo la tradizione anglosassone, "con il punto". Ad esempio scriviamo

$$135.246 \tag{1.3}$$

e intendiamo

$$135.246 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}. \tag{1.4}$$

Una volta fissata una base, nel nostro caso 10, solo alcuni numeri razionali sono rappresentabili nella forma "decimale" finita, si tratta dei cosiddetti *razionali decimali*

$$q = n/10^m.$$

Come tipico esempio di razionale non decimale possiamo considerare 1/3 o 2/7.

In generale ad ogni numero razionale positivo (il caso dei negativi è analogo) si associa una scrittura del tipo

$$q = k\,.\,d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$$

dove $k \in \mathbf{N}$, $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ in modo che, per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$0 \leq a - k\,.\,d_1 d_2 \ldots d_n < 1/10^n.$$

Si dimostra che le cifre $\{d_i\}$ da un certo indice ν in poi si ripetono periodicamente. Includiamo, per i razionali decimali, il caso di cifre tutte uguali a 0 da un certo indice in poi, invece non sono ammesse situazioni con di cifre tutte uguali a 9 da un certo indice in poi.

In breve scriveremo

$$413/33 = 12.515\,151\,51\ldots$$
$$2357/1110 = 2.123\,423\,423\,4\ldots$$

Ora è evidente che una scrittura di tipo come

$$k\,.\,d_1 d_2 \ldots d_n \ldots \tag{1.5}$$

non può essere più intesa come in (1.4) (cioè una somma), infatti comprenderebbe infiniti addendi. Serve una teoria apposita che non abbiamo ancora sviluppato, la teoria delle serie numeriche.

D'altra parte la scrittura (1.5) apre la strada ad una terza situazione: infinite cifre dopo il punto senza alcuna periodicità; per alcuni è questa la definizione di numero reale irrazionale. Noi abbiamo preferito l'approccio assiomatico. Allora serve un teorema che ci faccia mettere ordine tra queste nozioni.

Teorema 1.45 *Fissata la base* 10*, a ciascun* $a \in \mathbf{R}$*,* $a \geq 0$ *si associa (tramite una funzione bigettiva) un* allineamento di infinite cifre (decimali) ammissibile *per cui si scrive*

$$a = k\,.\,d_1 d_2 \ldots d_n \ldots \tag{1.6}$$

dove $k \in \mathbf{Z}$*,* $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$*. Con questa scrittura si intende che, per ogni* $n \in \mathbf{N}$

$$0 \leq a - k\,.\,d_1 d_2 \ldots d_n < 1/10^n \tag{1.7}$$

Il cuore del teorema è che ciascun numero reale può essere approssimato da un razionale decimale, con errore arbitrariamente piccolo (densità dei numeri razionali decimali in **R**, quindi un raffinamento della Proposizione 1.42). La scrittura (1.6) è solo una conseguenza di questo fatto.

Coerentemente con quanto detto sopra, si possono presentare tre situazioni:

- se a è un numero razionale decimale, l'allineamento decimale sarà finito

$$a = 135.000\ \ldots$$
$$a = 27.450\,0 \ldots$$

  ossia da un certo punto in poi le cifre sono tutte uguali a 0;

- se a è un numero razionale non decimale, l'allineamento decimale sarà periodico

$$a = 12.515\,151\,51 \ldots$$
$$a = 2.123\,423\,423\,4 \ldots$$

- se a è un numero irrazionale. l'allineamento decimale sarà non periodico

$$a = 3.141\,692\,653\,589\ \ldots$$
$$a = 2.718\,281\,845\,904\ \ldots$$

Rimane il fatto che i numeri reali, e precisamente gli irrazionali, non sono rappresentabili tramite stringhe finite e, di conseguenza, non sono utilizzabili per svolgere il tradizionale calcolo numerico esatto.

1.3.1 Calcolo numerico e rappresentazione simbolica

Il calcolo numerico esatto, come si diceva sopra, è legato alla rappresentabilità con una stringa finita, quindi è possibile solo per razionali ed interi. Tuttavia questa è un'affermazione teorica, che deve fare i conti con il numero di cifre coinvolte (pensiamo, ad esempio, ad un intero con un miliardo di cifre). Pertanto per tutti i numeri (interi, razionali, irrazionali) si deve dunque trovare una rappresentazione con un numero di cifre trattabile (dall'uomo o dalle macchine).

In sostanza siamo obbligati ad introdurre approssimazioni ed errori, che si trasmetteranno (e si amplificheranno) nello svolgimento dei calcoli. In genere questa materia viene trattata in *Analisi numerica* ed esula dai nostri interessi.

Concludiamo con qualche considerazione operativa.

- Sicuramente non è corretto identificare un numero irrazionale con una sua approssimazione. Quindi non è corretto scrivere, ad esempio,

  $$\sqrt{2} = 1.4142$$

  Infatti, in base a quello che si diceva sopra, 1.4142 è un'approssimazione di $\sqrt{2}$ a meno di $1/10^4$. È accettabile una scrittura di tipo

  $$\sqrt{2} = 1.4142...$$

- Se si deve riportare un risultato, lo si riporta in forma simbolica. Ad esempio, se dobbiamo risolvere l'equazione

  $$\sqrt{3}x + 1 = \sqrt{6},$$

  il risultato va scritto nella forma

  $$x = \frac{\sqrt{6} - 1}{\sqrt{3}} \tag{1.8}$$

  e non

  $$x = 0.83 \tag{1.9}$$

  Infatti il risultato (1.8) è quello esatto, mentre leggendo il risultato (1.9) non sappiamo se si tratta di un risultato esatto o di una sua approssimazione; inoltre, se si tratta di una approssimazione, non è specificato il margine di errore.

- Se si devono effettuare dei calcoli, per ridurre la propagazione (e l'amplificazione) dell'errore dovuto all'approssimazione, è conveniente portare avanti il più possibile l'elaborazione di tipo simbolico.

1.4 Valore assoluto

Poichè $\mathbf{R}$ è totalmente ordinato, per ogni coppia $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$ rimangono univocamente determinati i numeri

$$\min\{a, b\} \qquad \text{e} \qquad \max\{a, b\}$$

tali che

$$\min\{a, b\} \leq \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \leq \max\{a, b\}.$$

La nozione di min e max può essere data in generale, qui conta sottolineare che min e max esistano. Questa proprietà si può estendere ad ogni sottinsieme finito $F \subset \mathbf{R}$.

Definizione 1.46 *Per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *definiamo* valore assoluto *di* x *il numero*

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Dall'Osservazione 1.30 si deduce un'altra possibile definizione di valore assoluto.

Proposizione 1.47 *Risulta*

$$|x| = \begin{cases} x \ se \ x \geq 0 \\ -x \ se \ x \leq 0 \end{cases}$$

Pertanto

$$|2| = 2$$

in quanto $2 \geq 0$. Mentre

$$|-3| = -(-3) = 3$$

in quanto $-3 \leq 0$.

Osservazione 1.48 *È assolutamente sbagliato dire che il valore assoluto di x è il numero privato del segno. Ad esempio è errato scrivere*

$$|-a| = a$$

Infatti a può essere anche un numero negativo.

Ecco alcune proprietà del valore assoluto.

- Per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$|x| \geq 0$$
$$|x| = |-x|$$
$$-|x| \leq x \leq |x|$$

- *Disuguaglianza triangolare.* per ogni $x, y \in \mathbf{R}$

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

  Ad esempio

$$|5 + (-3)| = |2| = 2$$
$$|5| + |-3| = 5 + 3 = 8$$

  La disuguaglianza si generalizza facilmente ad una somma con un numero finito di addendi.

- Dalla disuguaglianza triangolare si deduce che: per ogni $x, y \in \mathbf{R}$

$$||x| - |y|| \leq |x - y| .$$

- *Equazioni e disequazioni.* Assegnato $a \geq 0$ risulta

  - $|x| = a$ se e solo se $x = \pm a$;
  - $|x| \leq a$ se e solo se $-a \leq x \leq a$.

  La risoluzione di equazioni e disequazioni verrà semplificata non appena avremo introdotto funzioni e grafici.

1.5 Intervalli

Avranno particolare importanza alcuni sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ definiti per mezzo della relazione d'ordine

- *Intervalli limitati*

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$$

  I suddetti intervalli si dicono rispettivamente *chiuso, aperto, semiaperto* (più precisamente chiuso a sinistra e aperto a destra).

- *Intervalli illimitati superiormente*

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$$

  I suddetti intervalli si dicono rispettivamente *chiuso e aperto.*

- *Intervalli illimitati inferiormente*

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$$

  I suddetti intervalli si dicono rispettivamente *chiuso e aperto.*

Quando parliamo di *intervallo* intendiamo uno qualsiasi degli insiemi elencati sopra