Capitolo 2

Funzioni e successioni reali

2.1 Funzioni reali

In questo capitolo ci occupiamo delle funzioni reali di variabile reale, ossia delle funzioni $f : A \to \mathbf{R}$, essendo $A \subset \mathbf{R}$.

L'insieme delle coppie $(x, f(x))$, al variare di $x \in A$,

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\right\}.$$

prende il nome di *grafico di* f.

Osserviamo che sussiste un'ambiguità semantica. Quando parliamo di "grafico" talvolta intendiamo l'oggetto G_f descritto sopra (che ha senso nella teoria degli insiemi), in altri casi intediamo il disegno che "rappresenta visivamente" G_f.

2.1.1 Esempi

Funzione costante

Fissato $c \in \mathbf{R}$, possiamo considerare la funzione costante

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ f(x) &= c \end{aligned}$$

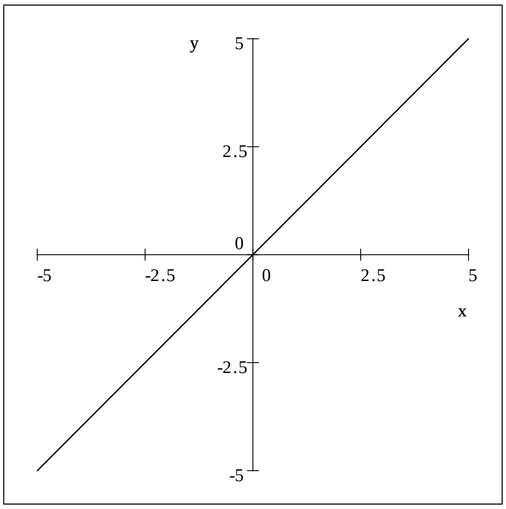
il grafico coincide con le retta orizzontale $y = c$ (parallela all'asse delle ascisse).

Funzione identica

La funzione identica

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ f(x) &= x \end{aligned}$$

ammette come grafico la retta di equazione $y = x$, detta anche I bisettrice.



Funzione $1/x$

Sappiamo che per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, esiste ed è unico il reciproco (o inverso) di x. Pertanto in modo naturale si definisce la funzione

$$\phi : \mathbf{R} \backslash \{0\} \to \mathbf{R}$$
$$\phi(x) = 1/x$$

In base alla definizione di grafico, abbiamo

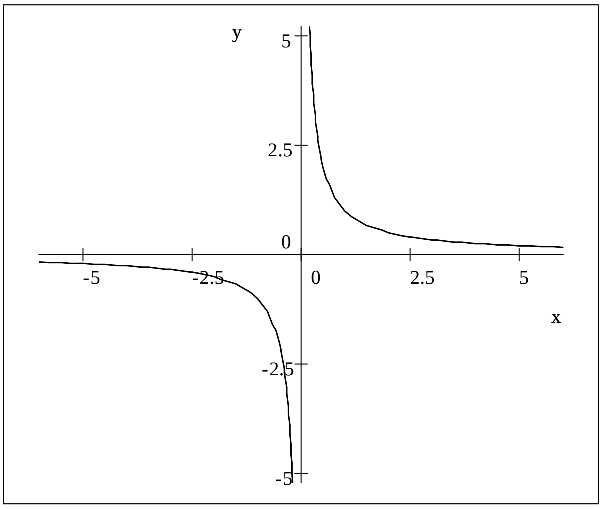
$$G_\phi = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0, y = 1/x\right\}$$

o, equivalentemente

$$G_\phi = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\right\}.$$

Vale la pena di osservare che la condizione $x \neq 0$ viene "inclusa" nella condizione $xy = 1$, infatti se due numeri hanno prodotto diverso da 0 sono necessariamente entrambi diversi da 0.

Dunque il grafico della funzione $\phi(x) = 1/x$ coincide con l'iperbole di equazione $xy = 1$, una conica (curva algebrica del II ordine) le cui proprietà geometriche vengono studiate in Geometria Analitica.



Funzione valore assoluto

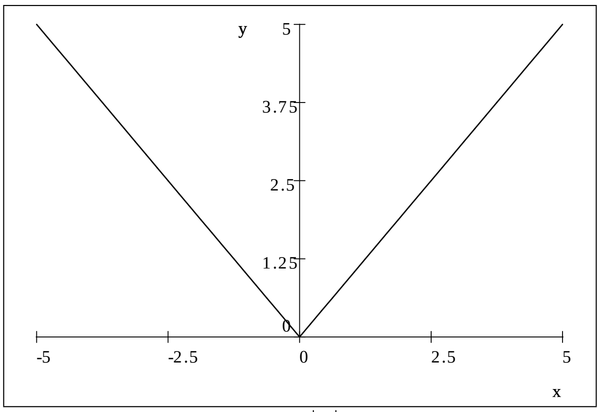
Per ogni $x \in \mathbf{R}$ abbiamo definito il valore assoluto di x, quindi ha senso considerare la funzione

$$x \in \mathbf{R} \mapsto |x| \in \mathbf{R}$$

Osservazione 2.1 *Anche se sono frequenti abusi di linguaggio, sappiamo che a livello concettuale dovremmo distinguere tra funzione f (intesa come legge di associazione) ed $f(x)$ (valore che la funzione assume in un certo punto x). In altri termini f è una funzione (ad esempio reale di variabile reale), $f(x)$ è un elemento dell'insieme di arrivo (un numero reale).*

Stante questa distinzione, per denotare la "funzione" valore assoluto si usa talvolta il simbolo $|\cdot|$

Tenuto conto di come è definito il valore assoluto, il grafico della funzione $|\cdot|$ è dato da due semirette.



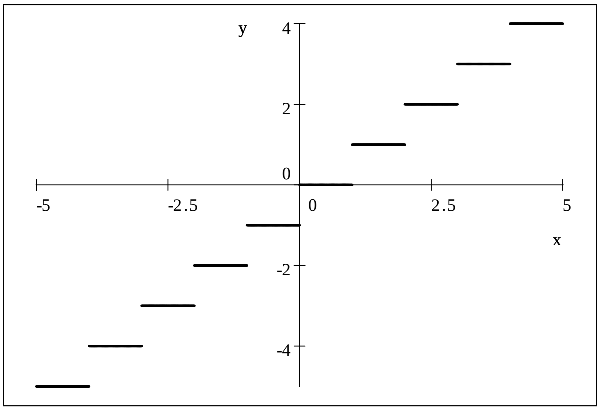
$y = |x|$

Parte intera e mantissa

Possiamo anche considerare la funzione *parte intera*

$$\lfloor\cdot\rfloor : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}.$$

Il grafico della funzione parte intera non è una "linea continua", ma è costituito da infiniti "gradini", di lunghezza 1, chiusi a sinistra ed aperti a destra.



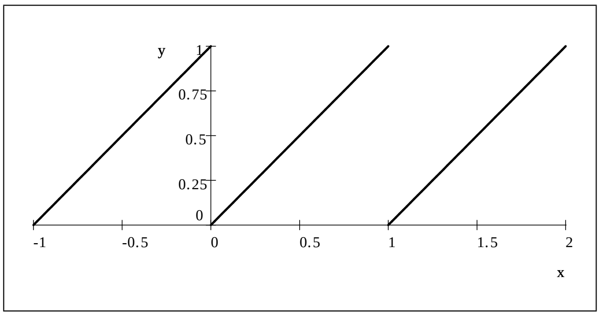
Accanto alla funzione parte intera possiamo considerare la funzione *mantissa*, o "parte frazionaria":

$$m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$m(x) = x - \lfloor x \rfloor .$$

Si dimostra che, per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$0 \leq m(x) < 1$$

Il grafico della funzione mantissa è dato da



2.1.2 Osservazioni sui grafici

La proprietà fondamentale che identifica i grafici di funzione si esprime come segue:

- una retta parallela all'asse delle ordinate interseca il grafico se e solo se interseca l'asse delle ascisse in un punto $x_0 \in A$;
- l'intersezione è ridotta ad un sol punto.

Generalmente si dice che un grafico di funzione è una curva: in realtà possono esistere grafici (funzione parte intera e funzione mantissa) abbastanza diversi dalla comune idea di curva.

Viceversa non tutte le curve nel piano sono grafici di funzione (ad esempio la circonferenza).

In particolare i grafici delle funzioni ingettive godono di una ulteriore proprietà:

- ogni retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico al più in un punto.

Come si è detto inizialmente le funzioni ingettive possono tranquillamente essere considerate invertibili. Nel caso delle funzioni reali di variabile reale, il grafico della funzione inversa si ottiene effettuando la simmetria rispetto alla I bisettrice, quella che taglia I e III quadrante.

2.2 Successioni

Definizione 2.2 *Si definisce* successione reale *ogni funzione reale definita sull'insieme* $\mathbf{N}$ *dei numeri naturali.*

La variabile indipendente n prende il nome di indice*.*

In luogo della consueta notazione

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R},$$

se ne adotta tradizionalmente un'altra

$$\{x_n\} \subset \mathbf{R}$$

intendendo

$$n \in \mathbf{N} \mapsto x_n \in \mathbf{R}.$$

Esempio 2.3 *Si scrive*

$$\begin{aligned} \{x_n\} &\subset \mathbf{R} \\ x_n &= n - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

e dunque risulta

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, \\ x_1 &= 1 - \sqrt{2}, \\ x_2 &= 2 - \sqrt{3}, \\ x_3 &= 1, \\ x_4 &= \ldots \end{aligned}$$

Osservazione 2.4 *Talvolta, abbastanza informalmente, una successione si rappresenta come un insieme infinito*

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots\},$$

i cui elementi sono contrassegnati da un intero naturale.

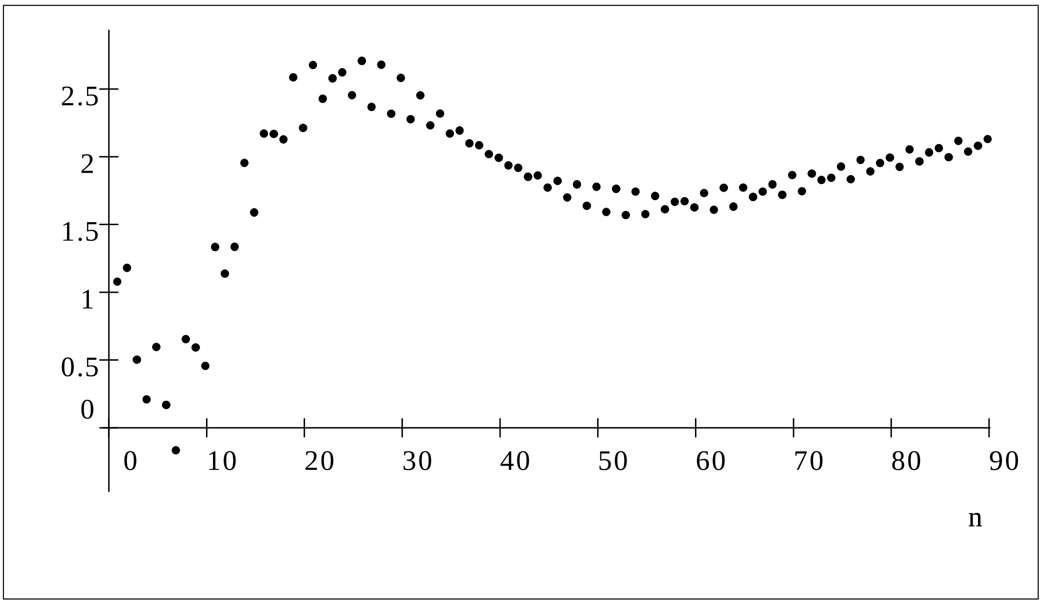
Osservazione 2.5 *Per parlare di successione, si richiede che x_n sia definita per ogni $n \geq n_0 \in \mathbf{N}$.*

Ad esempio

$$x_n = \frac{n}{2^n - 8}$$

è definita per $n \geq 4$.

Osservazione 2.6 *Trattandosi di particolari funzioni, anche per le successioni ha senso parlare di grafico. Esso è costituito dai punti (isolati) nel piano cartesiano aventi coordinate (n, x_n).*



2.3 Successioni definite per ricorrenza

Consideriamo due successioni

$$a_n = 3n$$
$$b_n = 3^n$$

La consuetudine che noi abbiamo con i numeri naturali ci impedisce di riconoscere la profonda differenza tra queste due successioni e sulle "operazioni" che esse coinvolgono.

La prima è una successione "ordinaria", ottenuta da una preesistente funzione di variabile reale: a ciascun $n \in \mathbf{N}$ si associa il valore della funzione $f(x) = 3x$ calcolato nel punto $x = n$. Nella seconda successione il ruolo della variabile n è completamente diverso: n rappresenta, nell'accezione più comune, il contatore di quante operazioni si devono fare, in questo caso $n-1$ moltiplicazioni di fattori tutti uguali a 3.

Qualcosa di simile si incontra quando si deve definire il fattoriale:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n,$$

prodotto dei primi n numeri naturali.

Le successioni in cui l'indice rappresenta il "contatore di un processo" sono le cosiddette *successioni definite per ricorrenza*. Alla base sussiste un teorema.

Teorema 2.7 *Sia assegnata una funzione $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Per ogni scelta di $x_0 \in \mathbf{R}$ rimane univocamente determinata una successione $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}^*$,*

$$x_n = f(n, x_{n-1}) \tag{2.1}$$

Osservazione 2.8 *Il punto chiave è il seguente. Ogni successione (reale) è una funzione*

$$n \in \mathbf{N} \mapsto x_n \in \mathbf{R} \tag{2.2}$$

Per le successioni definite per ricorrenza non *si ha una descrizione esplicita del valore che x_n assume in ciascun $n \in \mathbf{N}$; come negli esempi visti sopra potremmo averla solo utilizzando intuitivamente i puntini di sospensione. Dunque in che senso è definita la mappa (2.2)? Il Teorema 2.7 ci assicura che la scelta di $x_0 \in \mathbf{R}$ e una formula di tipo (2.1) definiscono univocamente la mappa (2.2) e quindi una successione.*

Vediamo un'applicazione del Teorema 2.7.

Esempio 2.9 (il fattoriale) *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ così definita $f(n, x) = nx$. Ora applichiamo il teorema precedente, scegliendo $x_0 = 1$. La regola di ricorrenza sarà data da*

$$x_n = f(n, x_{n-1}) = n x_{n-1}$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \cdot x_0 = 1 \cdot 1 = 1 \\ x_2 &= 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ x_3 &= 3 \cdot x_2 = 3 \cdot 2 = 6 \\ x_4 &= 4 \cdot x_3 = ... \end{aligned}$$

ritrovando la successione di interi che ben conosciamo e che viene denotata con $\{n!\}$.

Pertanto, in breve, si scrive

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n\,(n-1)! \end{cases}$$

Quando scriviamo $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ovviamente non escludiamo il caso di una funzione che *non* dipende da $n \in \mathbf{N}$. Pertanto, se eliminiamo la dipendenza da $n \in \mathbf{N}$, otteniamo il seguente corollario.

Corollario 2.10 *Sia assegnata una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Per ogni scelta di $x_0 \in \mathbf{R}$ rimane univocamente determinata una successione $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}^*$,*

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Il Corollario 2.10 è quello che viene utilizzato per definire la progressione geometrica, ossia la successione delle potenze ad esponente naturale.

Esempio 2.11 (Progressione geometrica) *Fissato $q \in \mathbf{R}$, si può considerare la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = qx$. Ora applichiamo il corollario precedente, scegliendo $x_0 = 1$. La regola di ricorrenza sarà data da*

$$x_n = f(x_{n-1}) = q \cdot x_{n-1}$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} x_1 &= q \cdot x_0 = q \cdot 1 = q \\ x_2 &= q \cdot x_1 = q \cdot q \\ x_3 &= q \cdot x_2 = q \cdot (q \cdot q) \\ x_4 &= q \cdot x_3 = ... \end{aligned}$$

ritrovando la successione di valori che ben conosciamo e che viene denotata con $\{q^n\}$.

Pertanto, in breve, si scrive

$$\begin{cases} q^0 = 1 \\ q^n = q \cdot q^{n-1} \end{cases} \tag{2.3}$$

La successione $\{q^n\}$ è detta anche progressione geometrica*. Il numero q prende il nome di anche* ragione della progressione*.*

Se, in qualche modo, diamo per acquisita la funzione esponenziale (con esponente reale), la successione delle potenze ad esponente intero rientra tra le successioni ottenute da una funzione. L'approccio per ricorrenza rimane indispensabile nel caso di ragione $q < 0$.

Osservazione 2.12 *Dobbiamo sottolineare che la definizione per ricorrenza ha senso solo per le successioni e non per una generica funzione di variabile reale. Del resto è ben evidente che solo i numeri interi possono essere utilizzati come contatori di un processo.*

2.3.1 Potenze ad esponente naturale

In base a (2.3) abbiamo dato una definizione formale di potenza x^n con $x \in \mathbf{R}$ ed $m \in \mathbf{N}$.

Possiamo ricordare alcune proprietà delle potenze, anch'esse note dagli studi precedenti.

$$x^{m_1} \cdot x^{m_2} = x^{m_1 + m_2} \tag{2.4}$$
$$(x^{m_1})^{m_2} = x^{m_1 \cdot m_2} \tag{2.5}$$
$$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m \tag{2.6}$$

ove $x, y \in \mathbf{R}$ e $m, m_1, m_2 \in \mathbf{N}$.

Inoltre, se $x \neq 0$ e $m \in \mathbf{N}$,

$$x^m \neq 0$$
$$\frac{1}{x^m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m . \tag{2.7}$$

In questa formula, per evitare ambiguità, per denotare l'inverso stiamo utilizzando la notazione $1/x$.

Poiché la definizione delle potenze si fa per ricorrenza, la dimostrazione di queste proprietà si effettua per induzione.

Osservazione 2.13 (caso limite 0^0) *La definizione e le proprietà suddette funzionano indipendentemente dalla base, quindi anche nel caso $q = 0$; per cui avremmo*

$$0^0 = 1.$$

Questa è la "convenzione" che viene regolarmente adottata quando si definiscono le serie di potenze (vedi Capitolo...). In realtà questa definizione presenta controindicazioni: infatti, quando studieremo i limiti, la situazione che viene comunemente rappresentata come 0^0 sarà una delle forme indeterminate (vedi ...). È questa la ragione per cui alcuni testi preferiscono dire che la forma 0^0 non è definita.

2.3.2 Successione delle somme

Assegnata una successione $\{a_n\}$ (comunque essa sia stata definita), tramite una procedura per ricorrenza possiamo definire una nuova successione $\{s_n\}$ denominata *successione delle somme (parziali)*

$$\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \end{cases}$$

Osservazione 2.14 *In questo caso la funzione $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è data da $f(n, x) = x + a_n$ (la dipendenza da n è data dalla presenza di a_n).*

In forma esplicita abbiamo

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0, \\ s_1 &= a_0 + a_1, \\ &\dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Ciascun s_n prende il nome di *somma (parziale) n-sima di* $\{a_n\}$.

Le somme vengono comunemente denotate con il simbolo

$$\sum_{k=0}^{n} a_k.$$

La variabile k che compare nel simbolo è arbitraria: sono essenziali solo gli "estremi" della somma [0 ed n].

Il calcolo esplicito della successione delle somme è quasi sempre impossibile. Presentiamo solo i pochi esempi alla nostra portata

Esempio 2.15 $a_n = \ell$,

Esempio 2.16 $a_n = n$

Esempio 2.17 *Assegnato* $q \neq 1$ *(per non ricadere in (...)) consideriamo* $a_n = q^n$ *per induzione si dimostra che*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$