Prova scritta di Analisi Matematica - 21.6.2017

1) $f(x) = \log\left(\frac{x^2+5}{x^2+2}\right)$

a) Condizioni affinché $f$ sia ben definita:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2+5}{x^2+2} > 0 \\ x^2+2 \neq 0 \end{array}\right\}$$ sempre verificate

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

$f(0) = \log\frac{5}{2}$ $\quad (0, \log\frac{5}{2}) \in \operatorname{graf} f$

$f(x) = 0 \iff \frac{x^2+5}{x^2+2} = 1 \iff x^2+5 = x^2+2 \iff 5=2$

$f$ non si annulla mai

$f(x) > 0 \iff \frac{x^2+5}{\underbrace{x^2+2}_{>0}} > 1 \iff x^2+5 > x^2+2 \iff 5>2$

$f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Limiti significativi: $\pm\infty$

$f$ è pari: $f(-x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

I limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ coincidono.

Infatti:

per $x \to \pm\infty$ $\quad \frac{x^2+5}{x^2+2} \sim \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1 \Rightarrow$

$$f(x) \to \log 1 = 0$$

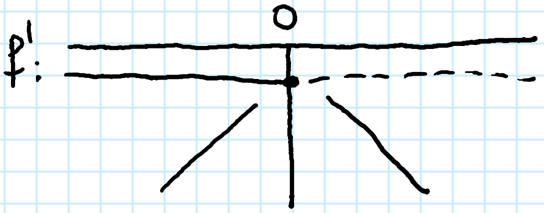
$y=0$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\cancel{x^2+2}}{x^2+5} \cdot \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2+5)}{(x^2+2)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{2x(\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}-5)}{(x^2+5)(x^2+2)} = \frac{-6x}{(x^2+5)(x^2+2)}$$

$f'(x) \geq 0 \iff -6x \geq 0 \iff x \leq 0$




$x=0$ p.to di max. relativo di $f$

d) $f'(x) = -6 \cdot \dfrac{x}{x^4+7x^2+10} \Rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -6 \, \frac{x^4+7x^2+10 - x(4x^3+14x)}{(x^4+7x^2+10)^2} =$$

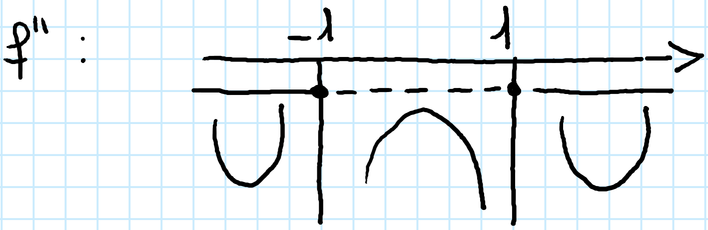
$$= -6 \, \frac{-3x^4-7x^2+10}{(x^4+7x^2+10)^2} = 6 \, \frac{3x^4+7x^2-10}{(x^4+7x^2+10)^2}$$

$f''(x) \geq 0 \iff 3x^4+7x^2-10 \geq 0$

$$x^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49+120}}{6} = \frac{-7 \pm 13}{6} \begin{cases} \nearrow -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3} \\ \searrow 1 \end{cases}$$

$$3\underbrace{\left(x^2+\frac{10}{3}\right)}^{>0}(x^2-1) \geq 0$$

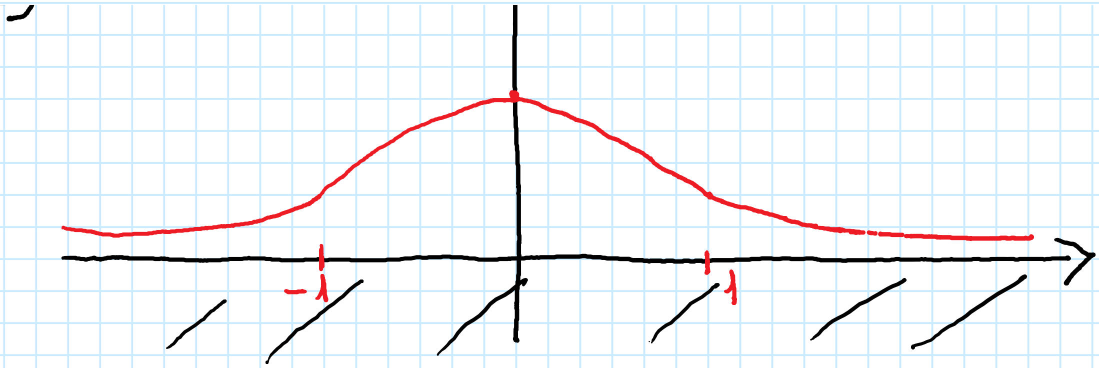
$x^2-1 \geq 0 \qquad x \leq -1$ o $x \geq 1$




$f$ è concava in $(-1,1)$;

$f$ è convessa in $(-\infty,-1)$ e in $(1,+\infty)$.

e)




f) $\operatorname{Im} f = (0, f(0)) = (0, \log \frac{5}{2})$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha

0 sol. se $\lambda \leq 0$;

2 sol. se $0 < \lambda < \log 5/2$;

1 sol. se $\lambda = \log 5/2$;

0 sol. se $\lambda > \log 5/2$;

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 + x^2}{x \log(1-x)} = -\frac{3}{2}.$$

Infatti, usando le regole di asintoticità, per $x \to 0$:

$$x^2 \to 0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} - 1 = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2} x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} - 1 + x^2 \sim \frac{1}{2} x^2 + x^2 = \frac{3}{2} x^2$$

$$-x \to 0 \Rightarrow \log(1-x) \sim -x \Rightarrow$$
$$x \log(1-x) \sim -x^2$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - 1 + x^2}{x \log(1-x)} \sim \frac{3/2\, x^2}{-x^2} = -\frac{3}{2}$$

3) Conviene calcolare preliminarmente l'integrale indefinito

grale indefinito

$$I = \int \frac{3x-4}{x^2-x-6}\,dx$$

$$x^2-x-6=0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

Occorre scomporre la funzione integranda nel seguente modo:

$$\frac{3x-4}{x^2-x-6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$$

$$= \frac{ax-3a+bx+2b}{(x+2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -3a+2b=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} b=3-a \\ -3a+6-2a=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} b=3-a \\ -5a=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=3-2=1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-3}\right)dx = 2\log_e|x+2| + \log_e|x-3| + c$$

da cui

$$\int_4^5 \frac{3x-4}{x^2-x-6}\,dx = \Big[2\log_e|x+2| + \log_e|x-3|\Big]_4^5$$

$$= 2\log_e 7 + \log_e 2 - 2\log_e 6 - \cancel{\log_e 1}$$

L'integrale improprio si calcola usando I:

$$\int_5^{+\infty} \frac{3x-4}{x^2-x-6}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_5^{\omega} \frac{3x-4}{x^2-x-6}\,dx$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \Big[2\log_e|x+2| + \log_e|x-3|\Big]_5^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left( 2 \log(\omega+2) + \log(\omega-3) - 2\log 7 - \log 2 \right)$$

$$= +\infty .$$

L'integrale improprio è divergente.

4) Si tratta di una serie di potenze di centro $x_0 = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

ove $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Poiché $\sqrt[n]{a_n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ per $n \to +\infty$, il raggio di convergenza è $R = 1$.

La serie:

converge assolutamente se $x \in (-1, 1)$;

non converge se $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Se $x = \pm 1$ bisogna studiare le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Poiché $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ il termine generale di entrambe non è infinitesimo, quindi non convergono.