

Le successioni

1. Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

✓ Per ogni $M \in \mathbb{R}$, $a_n \geq M$ definitivamente

□ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < 0$

✓ $a_n > 0$ definitivamente

□ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata

2. Si dica quali tra le seguenti implicazioni risultano vere.

□ Se $a_n \rightarrow 3$ allora $a_n > 3$ definitivamente

✓ Se $a_n \rightarrow 3$ allora $a_n > 0$ definitivamente

✓ Se $a_n \rightarrow 3$ allora $a_n \geq 2$ definitivamente

✓ Se $a_n \rightarrow 3$ allora $a_n \leq 4$ definitivamente

3. Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

□ Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n > -1$

✓ Per ogni $\epsilon > 0$, $|a_n + 1| \leq \epsilon$ definitivamente

✓ $a_n < 0$ definitivamente

✓ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata

4. Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tre successioni tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1 \quad a_n \leq b_n \leq c_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

✓ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata

□ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente

✓ Se $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a b allora $-1 \leq b \leq 1$

□ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0

5. Si indichi quali tra le seguenti proprietà sono sicuramente verificate da una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ strettamente crescente

□ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_{n+1} \leq a_n$

□ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq a_n + 1$

✓ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$

✓ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$

6. Si indichi quali tra le seguenti proprietà sicuramente verificate da una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decrescente

- ☐ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_{n+1} > a_n$
- ☐ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$
- ☐ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_n + 1$
- ✓ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$

7. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.

- ✓ Ogni successione monotona non è irregolare
- ☐ Ogni successione limitata è convergente
- ☐ Ogni successione infinitesima è definitivamente positiva
- ✓ Ogni successione divergente positivamente è definitivamente positiva

8. Se esiste (in caso contrario spiegare perché non ne esiste nessuna), determinare una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che verifica la proprietà indicata.

- (a) a_n è crescente e limitata $a_n = \arctg n$
- (b) a_n è decrescente e non limitata $a_n = -n$
- (c) a_n è crescente, limitata e non convergente non esiste
- (d) a_n è crescente, convergente e non limitata non esiste
- (e) a_n è limitata, convergente e non monotona $a_n = (-1)^n/n$
- (f) a_n è limitata, non convergente e non monotona $a_n = (-1)^n$

9. Esibire due successioni $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow -\infty$ che verifichino la proprietà indicata.

- (a) $a_n + b_n$ è convergente $a_n = n, b_n = -n + 1$
- (b) $a_n + b_n$ è divergente a $+\infty$ $a_n = n^2, b_n = -n$
- (c) $a_n + b_n$ è divergente a $-\infty$ $a_n = n, b_n = -n^2$
- (d) $a_n + b_n$ è irregolare $a_n = n + (-1)^n, b_n = -n$

10. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.

- ✓ Ogni successione crescente e limitata superiormente è convergente
- ☐ Ogni successione divergente a $+\infty$ è crescente
- ☐ Ogni successione divergente a $-\infty$ è decrescente
- ✓ Ogni successione decrescente e limitata inferiormente è convergente