Serie (definizione di Serie, tipi di serie, Criteri di Convergenza)

● Definizione di Somma Parziale

Data una successione $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n$,
una Somma Parziale s_m rappresenta la somma dei primi m valori della successione (con $m \leq n$).

Esempio: $s_1 = a_1$; $s_2 = a_1 + a_2$; $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Curiosità: La successione $\{s_n\} = s_1, s_2, \ldots, s_n$ è detta Successione delle somme parziali della successione $\{a_n\}$.

● Definizione di Serie numerica

Data una successione $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n$,
si dice "Serie S di termine generale a_n" la somma degli infiniti valori a_i della successione $\{a_n\}$, e si indica con:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ , o semplicemente } \sum a_n$$

Considerate le somme parziali $s_1, s_2, \ldots, s_n$ relative alla successione $\{a_n\}$,
la somma degli infiniti valori di $\{a_n\}$ equivale al valore della somma parziale s_n, con $n \to +\infty$.
Ovvero:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} s_n$$

Errore comune 1: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$
In quanto la sommatoria dei termini di una successione è uguale alla somma parziale che tende all'infinito.
la sommatoria dei termini di una successione NON è uguale al limite di un singolo valore della successione.

Errore comune 2: Non fare caso al valore di partenza di n.
Bisogna controllare se il dominio della successione è $\mathbb{N}_0$ oppure $\mathbb{N}$ (ovvero bisogna controllare se le n partono da 0 o da 1).

● Limite di una somma parziale / Valore di una Serie

Data una successione $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n$, considerate le somme parziali $s_1, s_2, \ldots, s_n$ relative alla successione $\{a_n\}$,
il limite $S = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ ha 4 possibili casi:

Caso 1) $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R}$, con ℓ finito	La serie converge ad ℓ
Caso 2) $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$	La serie diverge a $+\infty$
Caso 3) $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = -\infty$	La serie diverge a $-\infty$
Caso 4) $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \emptyset$	La serie è indeterminata (o irregolare)

Esempi:

Caso 1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \; \forall\, n \in \mathbb{N} \; \left(\text{Ovvero } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right) \to \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ (Ovvero $1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + \cdots$) $\to$ S converge a 2

Caso 2) $a_n = 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \to s_n = n + 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \to$ S diverge a $+\infty$
NB: è $s_n = n + 1$ e non $s_n = n$, perché n parte da 0, quindi si somma $n + 1$ volte

Caso 3) $a_n = -1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \to s_n = -(n+1) \; \forall\, n \in \mathbb{N} \to$ S diverge a $-\infty$

Caso 4) $a_n = (-1)^n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ (Ovvero: $+1, -1, +1, \ldots$) $\to \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n = \emptyset \to$ S è indeterminata
Infatti: $s_0 = a_0 = +1$; $s_1 = a_0 + a_1 = +1 - 1 = 0$; $s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = +1 - 1 + 1 = +1$; $s_3 = 0$; [...]

● Criterio di convergenza [“Condizione necessaria per la convergenza”]

Una condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza di una serie s_n ,
è che il termine generale a_n diventi infinitesimo per $n \to +\infty$.
Ovvero:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge se } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Questo perché si sommano via via a_n più piccoli, fino ad arrivare a sommare 0, e convergere ad un numero finito.

Esempi di serie NON convergenti:

Esempio 1 (somma di numeri finiti diversi da zero):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{1}{n}} \to \text{Controllo il } \lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(n^{-\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}\cdot\ln(n)} = e^{\frac{1}{+\infty}\cdot\ln(+\infty)} = e^{0\cdot+\infty} = 1 \neq 0 \to s_n \text{diverge}$$

Ogni termine della successione è positivo (sebbene via via più piccolo fino ad 1),
per cui la somma di infiniti termini positivi diverge a $+\infty$.

Esempio 2 (somma di numeri tendenti a infinito):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to \text{Controllo il } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)} = \frac{1}{\log(1+0^+)} = \frac{1}{\log(1^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \to s_n \text{diverge}$$

La serie è una somma di infiniti numeri crescenti che tendono ad infinito.

Esempio 3 (somma di numeri che non tendono verso niente):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \to \text{Controllo il } \lim_{n\to+\infty} (-1)^n = N.E. \to s_n \text{ non converge}$$

La serie è una infinita somma di alternati +1 e -1, che non converge verso nessun valore, né diverge verso $+\infty$.

● Proprietà delle serie

Somma dei termini generali	Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie convergenti $\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \pm b_n] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$
Prodotto con una costante	Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie convergente, e sia $k \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
Decomposizione in intervalli	Dati $a < b < c$ $\sum_{n=a}^{c} f(n) = \sum_{n=a}^{b} f(n) + \sum_{n=b+1}^{c} f(n)$

● Serie di cui si può calcolare il risultato: Serie Geometriche

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, con $q^n \in \mathbb{R}$, è detta serie geometrica.

Sono serie composte da un termine generale con una base costante ed un esponente crescente.

Ovvero $s_n = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

$$\sum_{n=0}^{M} q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{M+1}}{1-q} & con\ q \neq 1 \\ M+1 & con\ q = 1 \end{cases}$$

NB: In caso di q=1, il risultato deriva dalla semplice sostituzione: $s_n = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n = n + 1$.

NB: Scrivere $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ oppure $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ è uguale! Semplicemente per convenzione molti libri di testo scrivono nel primo modo.

Caso 1) $\lvert q \rvert < 1$ (ovvero $-1 < q < 1$)	La serie converge	$\lim_{M\to+\infty} s_M = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ Perché: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-0}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$ Caso generale, per qualsiasi $n \geq 0$: $\sum_{n=m}^{+\infty} q^n = q^m \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q^m \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)$ Ovviamente, per $n = 0$: $q^0 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)$
Caso 2) $q \geq 1$	La serie diverge a $+\infty$	$\lim_{M\to+\infty} s_M = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$ Perché: $\sum_{n=0}^{\infty} (2)^n = \frac{1-2^{+\infty}}{1-2} = \frac{1-\infty}{1-2} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$
Caso 3) $q \leq -1$	Usare un altro criterio	$\lim_{M\to+\infty} s_M = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = N.E.$

Esempio 1: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow q=\left|\frac{1}{2}\right|<1 \rightarrow$ La serie converge $\rightarrow \lim(s_n)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=2$

Infatti $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=1+0.5+0.25+0.125+\cdots$

Esempio 2: $\sum_{n=0}^{\infty}2^n \rightarrow q=2\geq 1 \rightarrow$ La serie diverge a $+\infty$. Infatti $\sum_{n=0}^{\infty}2^n=2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots$

Esempio 3: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \rightarrow q=-1 \rightarrow$ La serie non è determinabile con i criteri delle serie geometriche $\rightarrow$ (è indeterminata)
Infatti $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots=+1-1+1-1+\cdots$

Esempio 4: $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n \rightarrow q=-2<-1 \rightarrow$ La serie non è determinabile con i criteri delle serie geometriche $\rightarrow$ (diverge)
Infatti $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n=(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots=1-2+4-8+\cdots\rightarrow-\infty$

Errore: Non controllare il valore di partenza di n.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \neq \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}=3 \quad\rightarrow\quad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{4}{9}\right)\cdot(3)=\frac{4}{3}$$

Equivalentemente, $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{2}\left(\frac{2}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1\right]=3-1-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

Perché? $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=q^0+q^1+q^2+q^3+\cdots+q^n$; $\sum_{n=2}^{\infty}q^n=q^2+q^3+\cdots+q^n$

Errore: Risolvere le disequazioni con un numero n $\neq$ 0 a destra

Trova α per cui $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n$ converge $\rightarrow \left|\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right|<1 \rightarrow$

Risolvo $\begin{cases}\frac{2+\alpha}{1-\alpha}>-1\\ \frac{2+\alpha}{1-\alpha}<1\end{cases} \rightarrow ERRORE$: Studio $N_{E1}: 2+\alpha>-1 \rightarrow CORRETTO: \frac{2+\alpha}{1-\alpha}>-1 \rightarrow \frac{2+\alpha}{1-\alpha}+1>0 \rightarrow \cdots$

● Serie di cui si può calcolare il risultato: Serie Telescopiche

Le serie espresse (o riconducibili)in forma $\sum_{n=1}^{N} q_n - q_{n+k}$ sono dette serie telescopiche.
Sono serie composte da somme parziali in cui rimane un numero fisso k di termini dopo le semplificazioni.

In tali serie, $\sum_{n=1}^{N} q_n - q_{n+k} = (q_1 + q_2 + \cdots + q_k) - q_N$

Per $N = +\infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} q_n - q_{n+k} = (q_1 + q_2 + \cdots + q_k) - \lim_{n\to+\infty} q_n$

Per $N = +\infty$, se il termine generale q_n converge, ovvero se $\lim_{n\to+\infty} q_n = 0$, allora: $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n - q_{n+k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$

Quindi: $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n - q_{n+k} = (q_1 + q_2 + \cdots + q_k) - \lim_{n\to+\infty} q_n$

E se gli addendi q_n, q_{n+k} sono invertiti di posto? $\sum_{n=1}^{+\infty} q_{n+k} - q_n = -1 \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} q_n - q_{n+k}\right)$

E se l'indice di partenza è diverso da $n = 1$? Formula generale: $\sum_{n=i}^{+\infty} q_n - q_{n+k} = (q_i + q_{i+1} + \cdots + q_{i+k-1}) - \lim_{n\to+\infty} q_n$

Esempio 1 (La serie di Mengoli):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] \to \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \to s_n = \frac{1}{1} = 1$$

Infatti: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \cdots = 1 - \frac{1}{\mathrm{n}+1}$, con $\mathrm{n} = +\infty \Rightarrow 1 - \frac{1}{+\infty} = 1$

Esempio 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2 + 2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \text{Fratti semplici } [\ldots] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right] \to \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \to s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Infatti: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right] = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$, con $\mathrm{n} = +\infty \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{+\infty} = \frac{3}{2}$

Esempio 3:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = -1 \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)]\right) = -1 \cdot \left(\ln(1) - \lim_{n\to+\infty} \ln(n)\right) = -1 \cdot (0 - \infty) = +\infty$$

Esempio 4 (esame):

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)\cdot(n+1)} = \text{Fratti semplici } [\ldots] = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(n-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Pongo } m = n - 1 \Rightarrow n = m + 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sum_{(m+1)=2}^{+\infty} \frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \lim_{m\to+\infty} q_m = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

Esempio 5 (esame):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 9} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-3)\cdot(2n+3)} = \text{Fratti semplici } [\ldots] = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3} \Rightarrow \text{Provo a fare sostituzioni} \Rightarrow \text{Niente} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Risolvo a mano scrivendo i primi termini} \Rightarrow \left(-1 - \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11}\right) + \cdots = \text{Semplifico} = \frac{1}{3}$$

● Studio delle serie a termini positivi: Criterio del rapporto (Criterio di D'Alembert)

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie con $a_n > 0$ definitivamente (ovvero da una certa n in poi).

Si calcola il limite del rapporto fra due valori successivi del termine generale:
$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

$0 \le \ell < 1$	La serie converge
$\ell > 1$	La serie diverge a $+\infty$
$\ell = 1$	Tutto è possibile (usare altro criterio)

NB: $\ell \not< 0$ in quanto il criterio si può usare solo sulle serie a termini definitivamente positivi.

Quando può essere utile usare il criterio:
- Quando c'è un $n!$
  In quanto $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$, per cui si può semplificare il $n!$
- Quando c'è un α^n
  Perché $\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha$, per cui si può semplificare il α^n

Esempio:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2015}}{3^n} \to a_n \text{ è definitivamente positivo} \to \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{2015}}{3^{(n+1)}}}{\frac{n^{2015}}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2015}}{3 \cdot 3^n} \cdot \frac{3^n}{n^{2015}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{2015}}{n^{2015}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2015} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2015}}{n^{2015}} = \cdots = \frac{1}{3} \to \quad \ell < 1 \quad \to \quad s_n \text{ converge}$$

● Studio delle serie a termini positivi: Criterio della radice (Criterio di Cauchy)

NB: IL PROF PISANI NON ACCETTA QUESTO CRITERIO ("Ha un grado di precisione inferiore al criterio del rapporto").

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una seria con $a_n \ge 0$ definitivamente (da un certo n in poi).

Si calcola il limite della radice n-esima del termine generale:
$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$0 \le \ell < 1$	La serie converge
$\ell > 1$	La serie diverge a $+\infty$
$\ell = 1$	Tutto è possibile (usare altro criterio)

Quando usare il criterio:
Questo criterio è utile in casi di termini contenenti potenze con esponente n.

Esempio 1:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{[\log(n)]^{\frac{n}{2}}} \to a_n \ge 0 \text{ definitivamente} \to \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{[\log(n)]^{\frac{n}{2}}}}\right) = \cdots = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(n)^{\frac{1}{2}}} = \cdots = 0 \to 0 < 1 \to s_n \text{ converge}$$

Esempio 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \to a_n \ge 0 \text{ definit.} \to \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \cdots = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot e \to \frac{e}{2} > 1 \to s_n \text{ diverge}$$

● Serie armoniche generalizzate

(sono Serie “notevoli”)

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda} \quad \begin{cases} \text{converge se } \lambda > 1 \\ \text{diverge se } \lambda \leq 1 \end{cases}$$

È il caso generalizzato della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$

NB: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = +\infty$

Da non confondere con $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$

Perché:
La serie converge per $\lambda > 1$ perché i valori con delle potenze al denominatore tendono più velocemente allo zero.
Si arriva quindi a sommare valori infinitesimi, e la serie converge.
La serie diverge per $\lambda \leq 1$ perché i valori decrescono molto lentamente, e sommando infiniti valori simili fra loro la serie diverge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\lambda \cdot [\log(n)]^\beta} \quad \begin{cases} \text{converge se } \lambda > 1 \ \text{ oppure } \ \lambda = 1, \beta > 1 \\ \text{diverge se } \lambda < 1 \ \text{ oppure } \ \lambda = 1, \beta \leq 1 \end{cases}$$

● Studio delle serie a termini positivi: Criterio del confronto

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente (da una certa n in poi).

Allora:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge $\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge $\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge

Quando usare il criterio:
Questo criterio viene usato per studiare una serie cercandone un’altra con un termine generale “più facile” da calcolare

Perché:
1) Se b_n (più grande di a_n) diventa infinitesimo per $n \rightarrow +\infty$, allora a_n (più piccolo di b_n) diventa anch’esso infinitesimo.
2) Se già la serie con valori a_n (più piccoli di b_n) diventa infinita per $n \rightarrow +\infty$, allora anche la serie b_n diventa infinita.

Esempio 1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(n)}{n}\right)^2 \rightarrow \text{individuo un } \mathrm{b_n}\text{: } 0 \leq \left(\frac{\cos(n)}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \text{ definitivamente} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(n)}{n}\right)^2 \text{ converge}$$

Esempio 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^{\log(n)}} \rightarrow 0 \leq \frac{1}{\mathrm{n}^{\log(n)}} \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^2} \text{converge} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^{\log(n)}} \text{ converge}$$

Perché: “Definitivamente” (di preciso per $n > 2$) , $n^{\log(n)} > n^2$, e quindi la prima frazione, col divisore più grande, è più piccola.

● Studio delle serie a termini positivi: Criterio del confronto asintotico

Consideriamo 2 successioni a_n , b_n definitivamente positive.
Se
$a_n \sim b_n$ $\left(\text{ovvero se: } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1\right)$
Allora le serie $s_1 = \sum a_n$ ed $s_2 = \sum b_n$ hanno lo stesso carattere.
Ovvero:
s_1 converge $\Leftrightarrow s_2$ converge
s_1 diverge $\Leftrightarrow s_2$ diverge

Quando usare il criterio:
Questo criterio viene usato per studiare una serie s_1 cercando una serie s_2 asintotica ad s_1 e più semplice da studiare.
Spesso torna utile in frazioni di polinomi.

Esempio 1:

$s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \cos(n)}{n^3 - n} \Rightarrow$ Identifico una successione b_n asintoticamente equivalente ad $a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Osservo che a_n è un rapporto di polinomi, la cui tendenza dipende dai monomi di grado massimo a num. e denom. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n + \cos(n)}{n^3 - n} \sim \frac{n}{n^3}\left(= \frac{1}{n^2}\right)$$

Infatti: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+\cos(n)}{n^3-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 + n^2\cos(n)}{n^3 - n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1 + \frac{n^2\cos(n)}{n^3}\right)}{n^3\left(1 - \frac{n}{n^3}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1 + \frac{\cos(n)}{n}\right)}{n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \cdots = 1$

Studio $s' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow s'$ converge (è una serie armonica generalizzata con $\lambda > 1$) $\Rightarrow s$ converge

Esempio 2:

$s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{4n} \quad \Rightarrow \quad$ Ricordo il limite notevole: $\lim_{n\to0} \frac{e^n - 1}{n} = 1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Per $n \to +\infty, f(n) = \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{f(n)\to0} \frac{e^{f(n)} - 1}{f(n)} = 1 \Rightarrow$ Per $f(n) \to 0, e^{f(n)} - 1 \sim f(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{4n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{4n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^3} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Infatti: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{4n}}{\frac{1}{4n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{4n} \cdot 4n^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{4n} \cdot 4n^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{f(n)\to0} \frac{e^{f(n)} - 1}{f(n)} = 1$ (limite notev.)

Studio $s' = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \Rightarrow s'$ converge (armonica generalizzata) $\Rightarrow s$ converge (criterio del confronto asintotico)

● Studio delle serie a termini positivi: Criterio degli Infinitesimi

Consideriamo una serie $S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ a termini definitivamente positivi.

Passo 1)
Si calcola il limite:
$\lim_{n\to+\infty} [n \cdot a_n] = \ell$

Se $\ell > 0 \quad \rightarrow \quad S$ diverge

Altrimenti si passa al Passo 2.

Passo 2)

Data la funzione:
$p(k) = 1 + \frac{1}{2^{k-1}}$
I cui primi termini sono:
$p(2) = \frac{2}{1} = 2 \;;\; p(3) = \frac{3}{2} \quad ; \quad p(4) = \frac{5}{4} \quad ; \quad p(5) = \frac{9}{8} \quad ; \quad p(6) = \frac{17}{16} \quad = \quad [\ldots]$

Si calcola il limite:
$\lim_{n\to+\infty} \left[n^{p(k)} \cdot a_n\right] = \ell$

Partendo da $k = 2$.

Se $\ell < +\infty \quad \rightarrow \quad S$ converge
Se $\ell = +\infty \quad \rightarrow \quad$ si aumenta k e si ripete il calcolo

Si calcoleranno quindi i limiti:
$\lim_{n\to+\infty} [n^2 \cdot a_n] \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \left[n^{\frac{3}{2}} \cdot a_n\right] \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \left[n^{\frac{5}{4}} \cdot a_n\right] \quad ; \quad [\ldots]$
e si continua finché $\ell < +\infty$

● Studio delle serie a termini positivi: Serie di Potenze

Serie in forma $S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \sum_{n=k}^{+\infty} \left[b_n \cdot (x - x_0)^n\right]$

Tali serie sono sempre convergenti per alcuni (o tutti) i possibili valori di x.
Si definisce "raggio di convergenza" l'intervallo dei valori di x per i quali la serie S converge.

Possiamo avere 3 casi:

Caso 1: $r = +\infty$ La serie converge per qualsiasi possibile valore di $x \in$ Dominio
Caso 2: $0 < r < +\infty$ La serie converge per i valori di x per cui $\lvert x - x_0 \rvert \leq r$ La serie converge quindi per $x \in (x_0 - r\,, x_0 + r)$
Caso 3: $r = 0$ La serie converge solo per $x = x_0$ (ovvero quando x ed x_0 si annullano e rimane solo b_n) $\lvert x - x_0 \rvert \leq 0 \ \wedge \ r = 0 \ \rightarrow \ x = x_0 \ \rightarrow \ \sum_{n=k}^{+\infty} \left[b_n \cdot \left((x_0) - x_0\right)^n\right] = \sum_{n=k}^{+\infty} [b_n]$

Come risolvere:

Passo 1: Calcolare il raggio di convergenza $r = \frac{1}{R}$, con $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ (Risultato del criterio di D'alembert applicato al termine b_n)
Passo 2: Controllare se la serie converge negli estremi Studio $\sum_{n=k}^{+\infty} \left[b_n \cdot ([x_0 - r] - x_0)^n\right]$; Studio $\sum_{n=k}^{+\infty} \left[b_n \cdot ([x_0 + r] - x_0)^n\right]$

Esempio 1:

La serie geometrica, $\sum_{n=0}^{+\infty} [x^n] = \sum_{n=k}^{+\infty} [1 \cdot (x - 0)^n]$, è una serie di potenze con $b_n = 1\,, x_0 = 0$

$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$; $r = \frac{1}{R} = 1$

Questa serie ha raggio di convergenza = 1. Ovvero, questa serie converge per $x \in (x_0 - r\,, x_0 + r) = (0 - 1\,, 0 + 1) = (-1\,, +1)$.
Infatti sappiamo, dalla teoria delle serie geometriche, che convergono per $|q| < 1$
In tal caso la somma, per le formule delle serie geometriche, sarà $\frac{1}{1 - x}$

Esempio 2 (esame):

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}} \ ; \ b_n = \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}} \ ; \ x_0 = 2 \ ; \ R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1} \cdot \sqrt{4(n+1)+1}}}{\frac{1}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}}} = [\ldots] = \frac{1}{3} \ ; \ r = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

S converge per $x \in (2 - 3, 2 + 3)$, ovvero $x \in (-1, 5)$. Controllo gli estremi:

$$sx\colon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(-1)\cdot(3)]^n}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}} = \text{Leibniz } [\ldots] \ ; \ dx\colon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{4n+1}} = [\ldots]$$

● Studio delle serie a termini positivi: Criterio dell'Integrale

Consideriamo una serie $S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n$

Sia S una serie convergente, composta da termini a_n definitivamente positivi.

Consideriamo la funzione $f(x)$ associata alla successione a_n.
Ovvero $y = f(x)\ t.c.\ f(n) = a(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Sia $f(x)$ una funzione continua, a termini positivi, decrescente, definita in $[k, +\infty)$.

Allora:

$$\int_k^{+\infty} f(x)dx \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} f(n) \text{ converge}$$

$$\int_k^{+\infty} f(x)dx \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=k}^{+\infty} f(n) \text{ diverge}$$

Esempio 1:

Studia $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \int_1^{+\infty} x^{-2}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-2}dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{(-2)+1}}{(-2)+1}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{+\infty} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Esempio 2:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty} [\ln(|x|)]_1^t = \ln(|+\infty|) - \ln(|1|) = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

● Studio delle serie con termini a segno alterno: Criterio di assoluta convergenza

$\sum a_n$ è "assolutamente convergente" se $\sum |a_n|$ converge.

NB1: Non è necessariamente vero che se una serie $\sum a_n$ converge, allora anche $\sum |a_n|$ converge.
NB2: Se $\sum |a_n|$ diverge, il criterio non è usabile.

Quando usare il criterio:
Nel caso di serie con termini a segno alterno, se la serie col valore assoluto è convergente.

Esempio 1:

Studiare $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4}$; $\sin(n!) \in [-1, +1]$;

Errore comune: $\frac{\sin(n!)}{n^4} \leq \frac{1}{n^4} \Rightarrow$ Criterio del confronto.

Perché no: Il criterio del confronto è applicabile solo quando s_1 è a termini definitivamente positivi
(Quando $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni a_n , b_n)

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4}$; Studio $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\sin(n!)}{n^4}\right|$; $\left|\frac{\sin(n!)}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4}$; Studio $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \to$ converge (armonica generalizzata) ;

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\sin(n!)}{n^4}\right|$ converge per il confronto ; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4}$ converge "assolutamente"

Esempio 2:

Studiare $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+3}{n^4+2n}$; Studio $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n \cdot \frac{n^2+3}{n^4+2n}\right|$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3}{n^4+2n}$; $\frac{n^2+3}{n^4+2n} \sim \frac{n^2}{n^4}\left(=\frac{1}{n^2}\right)$;

Studio $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \to$ converge ; $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n \cdot \frac{n^2+3}{n^4+2n}\right|$ converge per il confronto asintotico ; $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+3}{n^4+2n}$ converge assolut.

Errore:

Studiare $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+3}{n^3+2n}$; Studio $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n \cdot \frac{n^2+3}{n^3+2n}\right|$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3}{n^3+2n}$; $\frac{n^2+3}{n^3+2n} \sim \frac{n^2}{n^3}\left(=\frac{1}{n}\right)$;

Studio $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \to$ diverge ; $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n \cdot \frac{n^2+3}{n^3+2n}\right|$ diverge per il confronto asintotico ; $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+3}{n^3+2n}$ diverge assolut.

Ricorda: NON è necessariamente vero che $\sum |a_n|$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge
In questo caso si usa il criterio di Leibniz.

● Studio delle serie con termini a segno alterno: Criterio di Leibniz

Data una successione b_n , con:
1) $b_n \geq 0$ "definitivamente"
2) $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ (b_n è infinitesima)
3) $b_{n+1} \leq b_n$ "definitivamente" (b_n è decrescente)

Allora la serie $\mathrm{S} = \sum a_n = \sum [(-1)^n \cdot b_n]$ è convergente.

NB: Se una o più delle 3 caratteristiche di b_n non sono rispettate, il criterio non è usabile.
NON vuol dire necessariamente che la serie diverge. In tal caso, bisogna usare altri criteri.

NB: Si usa b_n per distinguere da a_n che rappresenta il termine n-esimo della serie S compreso il segno derivante da $(-1)^n$

Quando usare il criterio:
Quando non si può applicare il criterio di assoluta convergenza.
Conviene prima provare per assoluta convergenza, visto che Leibniz è più lungo da svolgere.

Esempio 1:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right)$$

0) Controllo se posso applicare il criterio di assoluta convergenza: in questo caso sì, ma applico per esercizio Leibniz
1) Controllo se $\frac{1}{n!} \geq 0$ definitivamente: Sì
2) Controllo se $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0 : Sì$
3) Controllo se $\frac{1}{\mathrm{n!}}$ è decrescente: Sì, in quanto è la funzione reciproca della funzione cresccente $\mathrm{f}'(\mathrm{n}) = \mathrm{n!}$
Risultato: La serie converge

Esempio 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n^2+n}$$

0) Controllo se posso usare il criterio di assoluta convergenza:
No, in quanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.
1) Controllo se $a_n \geq 0$ definitivamente: Sì, per $n \geq 2$
2) Controllo se $\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0$: Sì (calcoli semplici).
3) Controllo se $\frac{n-1}{n^2+n}$ è decrescente

$$\frac{(n+1)-1}{(n+1)^2+(n+1)} \left(= \frac{n}{(n+1)(n+2)} \right) \leq \frac{n-1}{n^2+n} \to \ \ldots \to n \geq 2, \text{ovvero } f(n+1) \leq f(n) \text{ per } n \geq 2.$$