# Logaritmi

## ● Definizione

Il logaritmo di un numero è l'esponente x da dare alla base a per ottenere l'argomento b.
Ovvero, dato $a^x = b$: $\log_a b = x \quad \rightarrow \quad a^{\log_a b} = b$

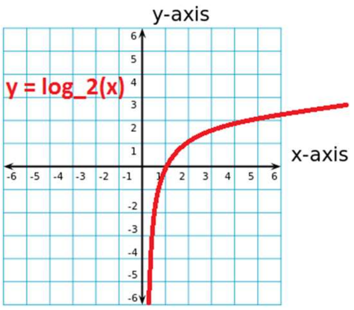
Esempio: $2^3 = 8 \;\rightarrow\; \log_2 8 = 3$

Ci sono 2 notazioni comuni:

1) $\lg(x) \rightarrow \log_{10}(x)$ ; $\log(x) \rightarrow \log_e(x)$ (Notazione usata su Wolfram e da Pisani)

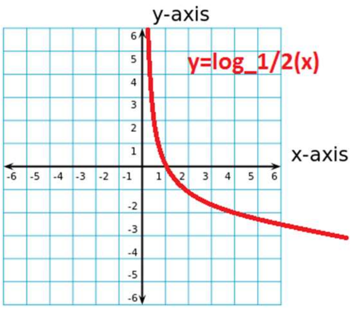
2) $\log(x) \rightarrow \log_{10}(x)$ ; $\ln(x) \rightarrow \log_e(x)$ (Notazione usata su Symbolab)

Per a > 1




$\log_2 2 = 1\,; \log_2 4 = 2; \log_2 8 = 3;$ [...]

Per 0 < a < 1




$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1; \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2; \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3;$ [...]

## ● Condizioni d'Esistenza

1) a > 0 ; 2) a ≠ 1 ; 3) b > 0

## ● Proprietà di base

$\log_a a = 1$ (Infatti: $a^1 = a$) $\log_a 1 = 0$ (Infatti: $a^0 = 1$)

## ● Proprietà principali

$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$ (Teorema del prodotto)

Prova veloce: $\log_2(8) + \log_2(64) = 3 + 6 = 9$; $\log_2(8 \cdot 64) = \log_2(512) = 9$; Quindi: $\log_2(8) + \log_2(64) = \log_2(8 \cdot 64)$

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$ (Teorema del rapporto)

Prova veloce: $\log_2(64) - \log_2(8) = 6 - 3 = 3$; $\log_2\left(\frac{64}{8}\right) = \log_2(8) = 3$; Quindi: $\log_2(64) - \log_2(8) = \log_2\left(\frac{64}{8}\right)$

$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$ (Teorema della potenza; Potenza all'argomento)

$\log_v b = \dfrac{\log_n(b)}{\log_n(v)}$ $n: nuovo, v: vecchio$ (Cambio di base)

## ● Altre proprietà

$\log_a b = \left(\frac{1}{\log_b a}\right)$ (Scambiare base e argomento) Esempio da derivate: $D(\log_a(x)) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$

$\log_{(a^n)}(b) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)$ (Potenza alla base)

(Casi particolari) $\log_{\frac{1}{a}}(b)\; \log_{a^{-1}}(b) = -\log_a(b)$ $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a(b^{-1}) = -\log_a(b)$ $log_{a^n}(b^m) = \frac{m}{n} \cdot \log_a(b)$

$n = \log_a a^n$ $n = a^{\log_a(n)}$ (Riscrivere "n" per semplificare con dei logaritmi)

$a^x = e^{qualcosa\ che\ faccia\ uscire\ a^x} = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$ (utile a volte per semplificare in alcuni limiti o integrali)

## ● Errori comuni

$\log_a(b+c) \neq \log_a(b) \cdot \log_a(c)$

Prova veloce: $\log_2(8+16) = \log_2(22) \cong 4.45 \quad ; \quad \log_2(8) \cdot \log_2(16) = 3 \cdot 4 = 12 \quad ; \quad 4.45 \neq 12$

$\log_a(b-c) \neq \frac{\log_a(b)}{\log_a(c)}$

Prova veloce: $\log_2(32-8) = \log_2 24 \cong 4.46 \quad ; \quad \frac{\log_2(32)}{\log_2(8)} = \frac{5}{3} \cong 1.6 \quad ; \quad 4.46 \neq 1.6$

Violare le C.E. durante i passaggi intermedi
$\log_5(+6) = \log_5(-2 \cdot -3) \;\; ! \neq \;\; \log_5(-2) + \log_5(-3)$

Le C.E. dei logaritmi devono essere <u>sempre</u> rispettate.

${\log^2}_2(x) = \log_2(x) \cdot \log_2(x) \neq \log_2(\log_2(x))$
$Prova\ veloce$: $\log_2(8) \cdot \log_2(8) = 3 \cdot 3 = 9 \quad ; \quad (\log_2(8))^2 = 3^2 = 9 \quad ; \quad \log_2(\log_2(8)) = \log_2(3) \cong 1.58 \neq 9$

## ● Equazioni con logaritmi

3 step:
1) Calcolo le C.E.
2) Risolvo normalmente
3) Controllo quali delle soluzioni al punto 2 rispettano le C.E.

Ci sono due casi:

Caso 1) Logaritmo con base a = Logaritmo con base a
→ Confronto gli argomenti

Caso 2) Logaritmo con base a = Potenza o Numero
→ Riscrivo uno dei due membri in modo da avere entrambi potenze o entrambi logaritmi, e confronto come di norma

## ● Disequazioni con logaritmi

Procedimento simile alle disequazioni con esponenziali.

Se $a > 0$, si mantiene il verso:
$\log_a(f(x)) > c \quad \to \quad f(x) > a^c \quad ; \quad \log_a(f(x)) > \log_a(g(x)) \quad \to \quad f(x) > g(x)$

Se $0 < a < 1$, si inverte il verso:
$\log_a(f(x)) > c \quad \to \quad f(x) < a^c \quad ; \quad \log_a(f(x)) > \log_a(g(x)) \quad \to \quad f(x) < g(x)$

Esempio: $\log_{\frac{1}{2}}(x) > \log_{\frac{1}{2}}(y) \quad \to \quad x < y$

Infatti: $\log_{\frac{1}{2}}(8) > \log_{\frac{1}{2}}(16) \quad \to \quad 8 < 16 \qquad \left(\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 > \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4 \;\to\; \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right)$

## ● Dimostrazioni delle proprietà principali

$\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(b \cdot c)$

$Pongo$: $\log_a(b) = m \;;\; \log_a(c) = n \quad \to \quad So\ che:\ a^m = b \;;\; a^n = c \quad \to \quad Quindi\ scrivo:\ a^m \cdot a^n = b \cdot c \quad \to$

$\to \quad a^{m+n} = b \cdot c \quad \to \quad m + n = \log_a(b \cdot c) \quad \to \quad Risostituisco:\ [\log_a(b)] + [\log_a(c)] = \log_a(b \cdot c)$

$\log_a(b) - \log_a(c) = \log_a\left(\frac{b}{c}\right) \quad \to \quad Dimostrazione\ come\ sopra$

$c \cdot \log_a(b) = \log_a(b^c)$

$Pongo$: $\log_a(b) = m \quad \to \quad a^m = b \quad \to \quad Quindi\ scrivo:\ a^{m \cdot c} = b^c \quad \to \quad \log_a b^c = m \cdot c \quad \to$

$\to \quad Risostituisco:\ \log_a(b^c) = [\log_a(b)] \cdot c$

## ● Esercizi complessi

ES 01)

$2\log_2(x+1)+\log_4(x+1)=5$

$C.E.: \;\; x+1>0 \rightarrow x>-1$

$2\log_2(x+1)+\dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2(4)}=5$ Formula cambio base

$2\log_2(x+1)+\dfrac{\log_2(x+1)}{2}=5$

$2\log_2(x+1)+\dfrac{1}{2}\cdot\log_2(x+1)=5$

MODO 1A:

$\log_2(x+1)^2+\log_2(x+1)^{\frac{1}{2}}=5$

$\log_2\left[(x+1)^2\cdot(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]=5$

$\log_2\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]=5$

$(x+1)^{\frac{5}{2}}=2^5$

$(x+1)^5=(2^5)^2$

$(x+1)^5=2^{10}$

$\sqrt[5]{(x+1)^5}=\sqrt[5]{2^{10}}$

$x+1=2^2$

$x=3$

MODO 1B:

Raccolo il termine $\log_2(x+1)$

$\log_2(x+1)\cdot\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=5$

$\log_2(x+1)\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)=5$

$\log_2(x+1)^{\frac{5}{2}}=5$

$(x+1)^{\frac{5}{2}}=2^5$

$(x+1)^5=(2^5)^2$

$(x+1)^5=2^{10}$

$\sqrt[5]{(x+1)^5}=\sqrt[5]{2^{10}}$

$x+1=2^2$

$x=3$

MODO 2:

Pongo $\log_2(x+1)=t$

$2t+\dfrac{1}{2}t=5$

$(\ldots)$

$t=2$

$\log_2(x+1)=2$

$2^2=(x+1)$

$4=x+1$

$x=3$

ES 02)

$[\log_2(x)]^2-6\log_2(x)+8>0$

$\log_2^2(x)-6\log_2(x)+8>0$

$C.E.: \;\; x>0$

Pongo $t=\log_2(x)$

$t^2-6t+8>0 \rightarrow (\ldots) \rightarrow t<2 \vee t>4$

Controllo le C. E. $\rightarrow 0<t<2 \vee t>4 \rightarrow (\ldots)$ ERRORE! Le C.E. sono definite circa x, non t

$\log_2(x)<2 \vee \log_2(x)>4$

$\log_2(x)<2 \rightarrow x<2^2=4$

$\log_2(x)>4 \rightarrow x>2^4=16$

Risultato: $x<4 \vee x>16$ ERRORE! Non ho controllato le C.E.

Controllo le C. E. $\rightarrow$ Risultato: $0<x<4 \vee x>16$

ES 03)

$$\frac{e^x}{e^x - 1} = \ln(e^2)$$

$C.E.:\ \ e^x - 1 \neq 0 \rightarrow e^x \neq 1 \rightarrow x \neq 0$

$\frac{e^x}{e^x - 1} = 2$ Perché $\ln(\mathrm{e}^2) = 2$

$e^x = 2 \cdot (e^x - 1)$

$e^x = 2e^x - 2$

$-e^x = -2$

$e^x = 2$

$e^x = e^{\ln(2)}$ Perché $2 = e^{\ln(2)}$ ? Perché: $\mathrm{a} = \mathrm{b}^{qualcosa\ che\ faccia\ uscire\ a} = b^{\log_b(a)}$

$x = \ln(2)$

ES 04)

$2^{\log_4(x)} = 9$

Pongo $t = \log_4(x)$

$2^t = 9$

$t = \log_2(9)$

$\log_4(x) = \log_2(9)$

$\frac{\log_2(x)}{\log_2(4)} = \log_2(9)$

$\frac{1}{2} \cdot \log_2(x) = \log_2(9)$

$\log_2(x) = 2\log_2(9)$

$\log_2(x) = \log_2(9^2)$

$\log_2(x) = \log_2(81)$

$x = 81$