Analisi Matematica - 1.3.2019 - prima parte

Thursday, February 28, 2019 17:29

Proprietà dei numeri (conseguenza delle prop. di ordinamento)

Già visto:

1. $a \le b,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow a+c \le b+c$
2. $a \le b,\ c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c$
3. $a \le b,\ c \le 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

Valgono con "<" e ">":

1'. $a < b,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow a+c < b+c$

2'. ...

3'. ...

Disequazioni di primo grado

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, det. per quali $x \in \mathbb{R}$

$$a x + b \geq 0$$

Dalle prop. 1.-3.

$$ax + b \geq 0 \underset{1.}{\Longleftrightarrow} ax + \underbrace{b - b}_{=0} \geq -b \Longleftrightarrow ax \geq -b$$

$$\underset{\frac{1}{a}>0,\ 2.}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\frac{1}{a} \cdot a}_{1} x \geq -b \cdot \frac{1}{a} \Longleftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$$

Tutti gli $x \geq -\frac{b}{a}$ vanno bene

Insieme delle sol. è $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$

Analogamente

$$ax + b \le 0 \Longleftrightarrow x \le -\frac{b}{a} \qquad \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$$

$ax+b>0 \iff x>-\frac{b}{a}$ $\quad (-\frac{b}{a},+\infty)$

$ax+b<0 \iff x<-\frac{b}{a}$ $\quad (-\infty,-\frac{b}{a})$

$3x+2\geq 0$

$3x \geq -2$

$x \geq -\frac{2}{3}$ $\quad [-\frac{2}{3},+\infty)$

$2x-6 \leq 0$

$2x \leq 6$

$x \leq \frac{6}{2}=3$ $\quad (-\infty,3]$

Se $a<0$? Si moltiplica per -1, cambiando tipo di dis:

$-3x+10 \geq 0$

$-1\,(-3x+10) \leq 0\cdot(-1)$

cambio verso

$3x-10 \leq 0$

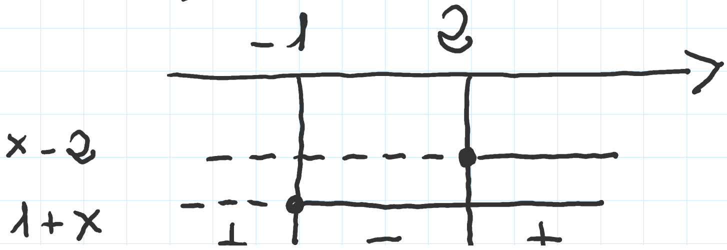
$3x \leq 10$

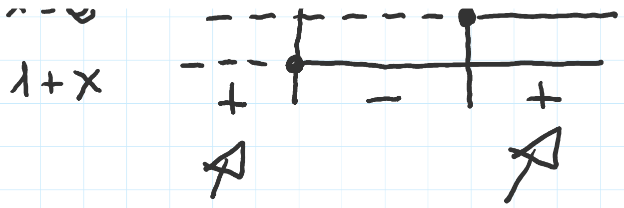
$x \leq \frac{10}{3}$ $\quad (-\infty,\frac{10}{3}]$

- Det. per quali $x\in\mathbb{R}$ $\quad (x-2)(1+x)\geq 0$

$x-2\geq 0 \quad x\geq 2$

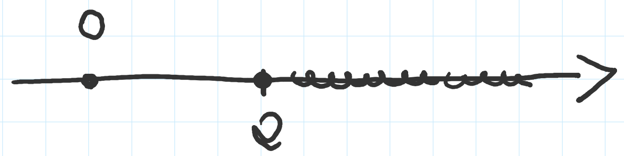
$1+x\geq \quad x\geq -1$





$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

- $$\underbrace{x^2}_{\geq 0}(x-2)\geq 0 \underset{x^2\geq 0}{\iff} \begin{array}{l} x^2=0\\ x-2\geq 0\end{array} \iff \begin{array}{l} x=0\\ x\geq 2\end{array}$$



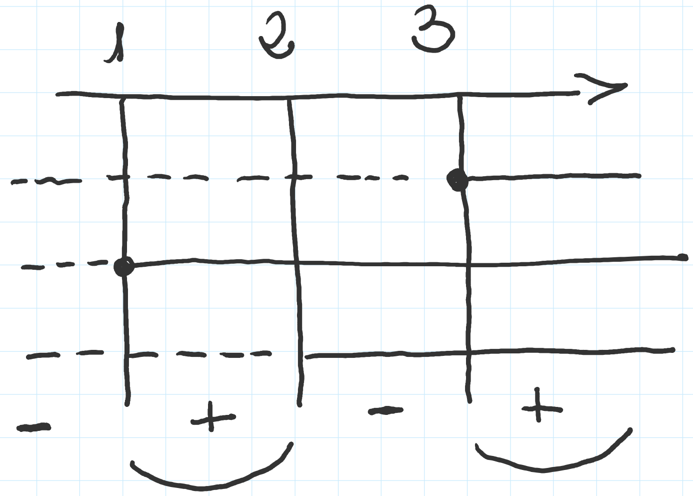
$\{0\}\cup[2,+\infty)$

- $$\frac{(x-3)(x-1)}{x-2}\geq 0$$

$x-3\geq 0 \quad x\geq 3$

$x-1\geq 0 \quad x\geq 1$

$x-2>0 \quad x>2$



$[1,2)\cup[3,+\infty)$

Estremi di un insieme numerico

Per studiare in modo più dettagliato la prop. di continuità, occorrono le seg. def.

Def: Sia $E\subseteq\mathbb{R}$, $E\neq\emptyset$ e sia $K\in\mathbb{R}$.

- K è un **maggiorante** di E se
$$x\leq K \quad \forall x\in E,$$

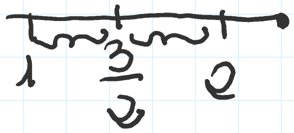
$x \le H \quad \forall x \in E$,

- K è un minorante di E se

$$K \le x \quad \forall x \in E.$$

Esempi:

1. $E = [1,2]$
   - 2 è un maggiorante di E
   - ogni $a \geq 2$ è un magg. di E
   - 1 è un minorante di E
   - ogni $a \leq 1$ è un min. di E
   - $\frac{3}{2}$ non è un magg. né un min. di E

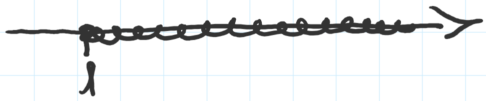


2. $E = (1,2)$

   Stesse conclusioni di 1.

   $1 \notin E$, $2 \notin E$

3. $E = [1,+\infty)$



   E non ha magg.

   E ha infiniti minoranti: tutti gli $a \leq 1$ sono min.

4. $E = (-\infty, 3)$

   E non ha minoranti

   E ha infiniti magg.: ogni $a \geq 3$ è magg.

5. $E = \mathbb{N} \leftarrow$ numeri naturali

   $\mathbb{N}$ non ha magg.

Ogni $a \in \mathbb{R}$ $a \leq 0$ è un minorante di $\mathbb{N}$

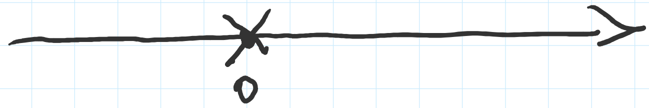
6. $E = \mathbb{Z}$ (o $E = \mathbb{R}$)

E non ha nè magg. nè min.

Oss: I magg e i minoranti non sono obbligati ad esistere.

Quando esistono, sono infiniti.

EX: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



No magg. nè min.

<u>Def</u>: $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$

E si dice

- **limitato superiormente** se ammette almeno un maggiorante (e quindi infiniti);
- **limitato inferiormente** se ammette almeno un minorante (e quindi infiniti);
- **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Esempi precedenti

1, 2. E limitato

3. E lim. inf. ma non sup.

4. E lim sup. ma non inf

5. $\mathbb{N}$ lim. inf. ma non sup.

6. $\mathbb{Z}$ non lim. né sup. né inf.

Def: $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$,

Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di E se

1. $M \in E$
2. $\forall x \in E \quad x \leq M$ (M è un magg. di E)

Si dice che $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di E se

1. $m \in E$
2. $\forall x \in E \quad m \leq x$ (m è un min. di E)

Si scrive

$$M = \max E \qquad m = \min E$$

Esempi

1. $[1, 2] = E$

   $1 \in E$ ed è min. $\Rightarrow$ $1 = \min E$

   $2 \in E$ ed è magg. $\Rightarrow$ $2 = \max E$

2. $\mathbb{N}$

   0 è un min., $0 \in \mathbb{N}$ = $0 = \min E$

   $\mathbb{N}$ non ha massimo

3. $\mathbb{Z}$ non ha né magg. né min, quindi non ha né max né min.

4. $E = (1, 2]$

   $2 \in E$ ed è magg. $\Rightarrow$ $2 = \max E$

   E ha infiniti minoranti: tutti gli $a \leq 1$ ma nessuno di questi sta in E

ma nessuno di questi sta in E

E non ha minimo.

5. $E = [3, 4)$

$3 = \min E$

E non ha massimo.

Oss:

- Max e min non sono obbligati ad esistere
- Se esistono sono per forza unici.

$E = (0, 1)$

0 e 1 non sono max e min.

0 è il più grande dei min. di E

1 è il più piccolo dei magg.

Def: Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Siano

$$M_+ = \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ è un magg. di } E\}$$

$$M_- = \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ è un min. di } E\}$$

(Eventualmente M_+ o M_- potrebbe essere $\emptyset$).

1. Se $M_+ \neq \emptyset$ (quindi E è lim. sup.) si chiama estremo superiore di E il minimo di M_+

$$\sup E = \min M_+$$

Se $M_+ = \emptyset$ si scrive che

$$\sup E = +\infty$$

2. Se $M_- \neq \emptyset$ (quindi E è lim. inf) si chiama **estremo inferiore di E** il massimo di M_-

$$\inf E = \max M_-$$

Se $M_- = \emptyset$ si scrive che

$$\inf E = -\infty$$

Ex $E = (0,1)$

$M_+ = [1, +\infty)$ $\quad \sup E = \min M_+ = 1$

$M_- = (-\infty, 0]$ $\quad \inf E = \max M_- = 0$

$E = (2, +\infty)$

$\sup E = +\infty$ $\quad M_+ = \emptyset$

$M_- = (-\infty, 2]$ $\quad \inf E = \max M_- = 2$

$E = (-\infty, 5)$

$\inf E = -\infty$

$\sup E = 5$

È certo che M_+ ed M_-, se sono non vuoti, ammettono rispettivamente min e max? Sì, perché in $\mathbb{R}$ vale la proprietà di continuità.

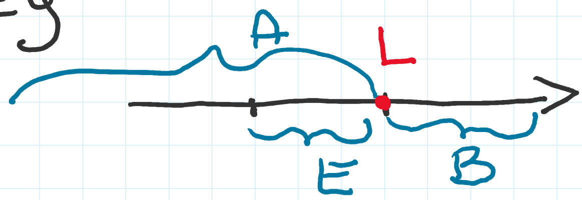
<u>Teorema</u> (di esistenza dell'estremo superiore)

Se $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ e limitato superiormente allora l'insieme dei magg$_{CC}$. di E ammette minimo.

<u>Dim</u>: Siano A e B così def:

$B = \{ K \in \mathbb{R} \mid K \text{ magg}_{CC}. \text{ di } E \}$

$A = \mathbb{R} \setminus B$



Dimostro che $\{A, B\}$ è una sezione di $\mathbb{R}$:

$B \neq \emptyset$ perché E è lim. sup.

Anche $A \neq \emptyset$:

$E \neq \emptyset \Rightarrow \exists e \in E \Rightarrow e-1 < e \Rightarrow$ $\in E$

$e-1 \notin B$ (non è un magg$_{CC}$. di E) $\Rightarrow$

$e-1 \in A$

↳ $\exists e \in E$ t.c. non è vero che $e \leq e-1$

$A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{R}$ ovvio

Devo dim. ancora che

$\forall x \in A, \forall y \in B \quad x < y$

Fisso $x \in A$ e $y \in B$ arbitrari.

$x \in A \underset{\text{def. di } A}{\Rightarrow} x \notin B \Rightarrow x$ non è un magg$_{C}$. di E $\underset{\text{nego def. di magg}_{CC}.}{\Rightarrow}$

$\left.\begin{array}{l} \exists e \in E \text{ t.c. } x < e \\ \text{Inoltre } e \in E \underset{y \in B}{\Rightarrow} e \leq y \end{array}\right\} \Rightarrow x < e \leq y \Rightarrow x < y$

Dunque per la prop. di continuità in $\mathbb{R}$ esiste un unico $L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$x \leq L \leq y \quad \forall x \in A \ \forall y \in B$$

$x \le L \le y \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B$

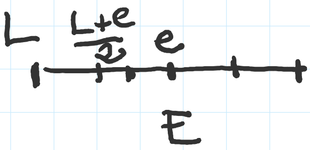
Provo che

$$L = \min B$$

La seconda dis: $L \le y \quad \forall y \in B \Rightarrow$

1. L è un min. di B
2. Provo che $L \in B$

Se per assurdo $L \notin B$ allora L non sarebbe un magg. di $E \Rightarrow$



$\exists\, e \in E$ tc. $L < e$

Considero $\frac{L+e}{2}$

$$L < \frac{L+e}{2} < e$$

$\frac{L+e}{2}$ non è un magg. di $E \Rightarrow \frac{L+e}{2} \notin B$

$\in A$

$\Rightarrow \frac{L+e}{2} \in A$ ma $L < \frac{L+e}{2}$ assurdo!

(sappiamo che $\forall x \in A \quad x \le L$)

Esercizio: Enunciare e dim. l'analogo teorema per l'estremo inferiore.

Oss: Abbiamo provato che $(AC) \Rightarrow (AC)'$

ove $(AC)'$: $\forall E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, E lim. sup.

L'ins. dei magg. di E ammette minimo.

Si prova che vale anche

$$(AC)' \Rightarrow (AC)$$

[illegible]

$$(AC)' \Rightarrow (AC)$$

E quindi $\quad (AC) \Leftrightarrow (AC)'$.

Analisi Matematica - 1.3.2019 - seconda parte

Ancora una oss. sugli insiemi numerici.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ Dal punto di vista dell'inclusione $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ hanno "più elementi" di $\mathbb{N}$.
  ↳ incl. strette

- Si può provare che $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono però numerabili (sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$).
  In questo senso $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ vanno pensati come egualmente numerosi.

- Invece $\mathbb{R}$, oltre ad avere più elementi di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, non è numerabile.

Radice n-esima

<u>Teorema</u>: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ e sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Esiste uno ed un solo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ tale che

$$x^n = y.$$

Tale x si chiama **radice n-esima di y** e si denota con

$$\sqrt[n]{y} \quad \text{o} \quad y^{\frac{1}{n}}.$$

Osservazioni:

- In part. $x^2 = 2$ ha un'unica sol. > 0 in $\mathbb{R}$,

- In part. $x^2 = 2$ ha un'unica sol. > 0 in $\mathbb{R}$, che si denota con $\sqrt{2}$.

  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\qquad \sqrt{2} = 1.4142\ldots$

- La dim. del teo. si basa su (AC) nella forma equiv. (AC)' (continuità di $\mathbb{R}$).

- Idea nel caso particolare $x^2 = 2$

  Si cerca di det l'allin. dec. della eventuale soluzione. $\qquad a.a_1a_2a_3\ldots$

  $1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

  $(1.4)^2 = 1.96 \qquad (1.5)^2 = 2.25 \quad \Rightarrow a_1 = 4$

  $(1.41)^2 = 1.9881 \qquad (1.42)^2 = 2.0164 \quad \Rightarrow a_2 = 1$

  Sia E_- l'insieme dei decimali così ottenuti

  $$E_- = \{1, 1.4, 1.41, \ldots\}$$

- E_- è lim. sup. (2 è un magg.)
- $E_- \neq \emptyset$

  $\Rightarrow$ (Teo. es. estremo sup.) $\qquad \exists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x = \sup E_-$

- Si prova che $x^2 = 2$

- Il teo. non vale in $\mathbb{Q}$ (già visto $x^2 = 2$ non ha sol. in $\mathbb{Q}$)
- Estensioni: si può prendere $y \leq 0$?
  - $y = 0 \qquad x^n = 0$ ha come unica sol. $x = 0$
  - $y < 0$:

- $y < 0$:

Non sempre $x^n = y$ ha sol.

se n è pari sicuramente no: $x^n \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$y < 0$

Se n è dispari

$x^3 = -8$

$x^3 = 8$ ha come sol. $x = \sqrt[3]{8} = 2$ (teo)

Allora se prendo $x = -2$, risolve $x^3 = -8$

$(-2)^3 = -8$

In generale se n è dispari e $y < 0$ la sol. è

$x = -\sqrt[n]{-y}$

$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$

$\sqrt[5]{-5} = -\sqrt[5]{5}$

$\sqrt{-8} =$ NO!!

$\sqrt[4]{-6} =$ NO!!

- $x^n = y$ se n pari, ha due sol. $x = \pm\sqrt[n]{y}$

Potenze

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $r \in \mathbb{R}$. a^r cosa rappresenta?

a^r potenza di base a ed esponente r.

Caso noto: $r \in \mathbb{Q}$ $\quad r = \frac{m}{n}$ $\quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\ n \neq 0$

1) esponente intero $(n = 1)$ $r = m$

(a) $m = 0$ $\quad a^0 = 1$

(b) $m > 0$ $\quad a^1 = a$, $a^m = a \cdot a^{m-1}$

(b) $m > 0$ $\quad a^1 = a, \quad a^m = a \cdot a^{m-1}$

(c) $m < 0 \Rightarrow -m > 0 \quad a^m = \frac{1}{a^{-m}}$

reciproco di a^{-m}

Ex:

$$2^0 = 1$$

$$2^3 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2^1 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

2) potenze con esponente frazionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

In particolare

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ex:

$$2^{3/5} = \sqrt[5]{2^3}$$

$$2^{-3/5} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^3}}$$

In casi particolari le def. si possono estendere ad $a \leq 0$ o $a < 0$.

Caso 1): 1a) $a \neq 0$ $\quad$ (0^0 no!)

1b) $a \in \mathbb{R}$

1c) $a \neq 0$

Caso 2): OK se n è dispari:

$$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8}$$

$$(-2)^{3/4} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8} \quad \text{NO!}$$