5.7 Esercizi.

<u>Esercizio 5.1</u>

Dimostrare che il linguaggio:

$$L = \{a^n b^n c^m \mid n, m > 0\}$$

è non contestuale.

Consideriamo i linguaggi:

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\} \qquad L_2 = \{c^m \mid m > 0\} = \{c\}^+ = \{c\}^* - \{\lambda\}$$

Si ha:

$$L = L_1 \cdot L_2$$

L_1 è un linguaggio non contestuale ed L_2 è un linguaggio lineare destro. Si ha infatti:

$$L_2 = \{c\}^* - \{\lambda\} = \{c\}^* \cap \overline{\{\lambda\}}$$

e $\{c\}^*$ è lineare destro (per esercizio determinare la grammatica che genera $\{c\}^*$).

Poiché $\{\lambda\}$ è lineare destro, per la chiusura dei linguaggi di tipo '3' rispetto al complemento si ha che:

$$\overline{\{\lambda\}}$$

è lineare destro. Dunque L_2 è lineare destro e

$$L = L_1 \cdot L_2$$

è non contestuale, poiché si ottiene per concatenazione di due linguaggi non contestuali ($L_2 \in \mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2$).

La grammatica G_1 che genera L_1 è data da:

$$G_1 = (X_1, V_1, S_1, P_1)$$

$$X_1 = \{a, b\} \qquad V_1 = \{S_1\} \qquad P_1 = \left\{ S_1 \underset{(1)}{\rightarrow} aS_1b,\ S_1 \underset{(2)}{\rightarrow} ab \right\}$$

La grammatica G_2 che genera L_2 è data da:

$$G_2 = (X_2, V_2, S_2, P_2)$$

$$X_2 = \{c\} \qquad V_2 = \{C\} \qquad S_2 = C \qquad P_2 = \left\{ C \underset{(1)}{\rightarrow} cC,\ C \underset{(2)}{\rightarrow} c \right\}$$

La grammatica G che genera $L = L_1 \cdot L_2$ è data da:

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = X_1 \cup X_2 = \{a, b, c\} \qquad V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\} = \{S, S_1, C\}$$

$$P = \{S \rightarrow S_1C\} \cup P_1 \cup P_2 = \left\{ S \underset{(1)}{\rightarrow} S_1C,\ S_1 \underset{(2)}{\rightarrow} aS_1b,\ S_1 \underset{(3)}{\rightarrow} ab,\ C \underset{(4)}{\rightarrow} cC,\ C \underset{(5)}{\rightarrow} c \right\}$$

G è non contestuale.

Esercizio 5.2

Siano $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ed $L_2 = \{a\}^* \cdot \{bb\}^*$. Dimostrare che il linguaggio $L = L_1 \cap L_2$ è non contestuale.

Il linguaggio L_1 può essere riguardato come l'unione di due insiemi:

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{\lambda\}$$

e tale linguaggio è non contestuale.
La grammatica che lo genera è:

$$G_1 = (X_1, V_1, S_1, P_1)$$

$$X_1 = \{a, b\} \qquad V_1 = \{S_1\} \qquad P_1 = \left\{ S_1 \underset{(1)}{\rightarrow} aS_1 b,\ S_1 \underset{(2)}{\rightarrow} ab,\ S_1 \underset{(3)}{\rightarrow} \lambda \right\}$$

$L_2 = \{a\}^* \cdot \{bb\}^*$ è lineare destro. Infatti, il linguaggio $L_3 = \{a\}^*$ è lineare destro e la grammatica che lo genera è:

$$G_3 = (X_3, V_3, S_3, P_3)$$

$$X_3 = \{a\} \qquad V_3 = \{A\} \qquad S_3 = A \qquad P_3 = \left\{ A \underset{(1)}{\rightarrow} aA,\ A \underset{(2)}{\rightarrow} a,\ A \underset{(3)}{\rightarrow} \lambda \right\}.$$

Ma anche il linguaggio $L_4 = \{bb\}^*$ è lineare destro e la grammatica che lo genera è:

$$G_4 = (X_4, V_4, S_4, P_4)$$

$$X_4 = \{b\} \qquad V_4 = \{B, B_1\} \qquad S_4 = B$$

$$P_4 = \left\{ B \underset{(1)}{\rightarrow} bB_1,\ B \underset{(2)}{\rightarrow} \lambda,\ B_1 \underset{(3)}{\rightarrow} bB,\ B_1 \underset{(4)}{\rightarrow} b \right\}.$$

Dunque la grammatica che genera $L_2 = L_3 \cdot L_4$ è:

$$G_2 = (X_2, V_2, S_2, P_2)$$

$$X_2 = X_3 \cup X_4 = \{a, b\} \qquad V_2 = V_3 \cup V_4 = \{A, B, B_1\} \qquad S_2 = S_3 = A$$

$$P_2 = \{A \rightarrow aA\} \cup \{A \rightarrow aB\} \cup \{B \rightarrow bB_1,\ B \rightarrow \lambda,\ B_1 \rightarrow bB,\ B_1 \rightarrow b\} \cup$$
$$\cup \{A \rightarrow bB_1,\ A \rightarrow \lambda\} =$$
$$= \left\{ A \underset{(1)}{\rightarrow} aA,\ A \underset{(2)}{\rightarrow} aB,\ A \underset{(3)}{\rightarrow} bB_1,\ A \underset{(4)}{\rightarrow} \lambda,\ B \underset{(5)}{\rightarrow} bB_1,\ B \underset{(6)}{\rightarrow} \lambda,\ B_1 \underset{(7)}{\rightarrow} bB,\ B_1 \underset{(8)}{\rightarrow} b \right\}$$

$L = L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, per la legge di De Morgan. Non possiamo però dire nulla sulla classe di linguaggi cui L appartiene, dato che L_1 è non contestuale e la classe dei linguaggi non contestuali non è chiusa rispetto al complemento.
Procediamo in modo diverso.
Il linguaggio $L = L_1 \cap L_2$ non è altro che:

$$L = L_1 \cap L_2 = \left\{ w \,\middle|\, w \in \{a, b\}^*,\ w = a^n b^n,\ n \geq 0 \text{ AND } w = a^k (bb)^m,\ k, m \geq 0 \right\}$$

Poiché necessariamente si deve avere $k = n$, si ha:

$$L = \left\{ w \;\middle|\; w \in \{a,b\}^*,\ w = a^n b^n,\ n \geq 0 \text{ AND } w = a^n (bb)^m,\ m \geq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ w \;\middle|\; w \in \{a,b\}^*,\ w = a^n b^n,\ n \geq 0 \text{ AND } w = a^n b^{2m},\ m \geq 0 \right\}$$

ma, poiché si deve avere che $n = 2m$, si ha:

$$L = \left\{ w \;\middle|\; w \in \{a,b\}^*,\ w = a^{2m} b^{2m},\ m \geq 0 \right\} = \left\{ a^{2m} b^{2m} \;\middle|\; m \geq 0 \right\}$$

L è un linguaggio non contestuale e la grammatica che genera L è:

$$G = (X, V, S, P)$$

ove:

$$X = \{a,b\} \qquad V = \{S\} \qquad P = \left\{ S \underset{(1)}{\rightarrow} aaSbb,\ S \underset{(2)}{\rightarrow} aabb,\ S \underset{(3)}{\rightarrow} \lambda \right\}.$$

<u>Esercizio 5.3</u>

Si utilizzi la proprietà di chiusura della classe L_2 rispetto all'unione per dimostrare che ciascuno dei seguenti linguaggi è non contestuale:

(a) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j,\ i, j \geq 0\}$

(b) $L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R \right\}$

(c) $L = \{a,b\}^* - \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$

(a) Analizziamo le parole del linguaggio:

$$L = \{a^i b^j \mid i \neq j,\ i, j \geq 0\} =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} b, b^2, ..., b^n, ..., a, ab^2, ..., ab^n, \\ a^2, a^2b, a^2b^3, ..., a^2b^n, ..., a^3b, a^3b^2, a^3b^4, ..., a^3b^n, ... \end{matrix} \right\} =$$
$$= \{a^n b^m \mid 0 \leq n < m\} \cup \{a^m b^n \mid 0 \leq n < m\}$$

Poniamo:

$$L_1 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n < m\}$$
$$L_2 = \{a^m b^n \mid 0 \leq n < m\}$$

Si ha:

$$L = L_1 \cup L_2 .$$

L_1 è generato da:

$$G_1 = (X_1, V_1, S_1, P_1)$$

ove:

$$X_1 = \{a,b\} \qquad V_1 = \{S_1, B\}$$
$$P_1 = \left\{ S_1 \underset{(1)}{\rightarrow} aS_1b,\ S_1 \underset{(2)}{\rightarrow} Bb,\ B \underset{(3)}{\rightarrow} Bb,\ B \underset{(4)}{\rightarrow} \lambda \right\}.$$

Analogamente, L_2 è generato da:

$$G_2 = (X_2, V_2, S_2, P_2)$$

ove:

$$X_2 = \{a,b\} \qquad V_2 = \{S_2, A\}$$

$$P_2 = \left\{ S_2 \underset{(1)}{\rightarrow} aS_2b,\ S_2 \underset{(2)}{\rightarrow} aA,\ A \underset{(3)}{\rightarrow} aA,\ A \underset{(4)}{\rightarrow} \lambda \right\}.$$

L_1 ed L_2 sono non contestuali perché generati da grammatiche non contestuali.

Poiché la classe dei linguaggi non contestuali è chiusa rispetto all'unione, anche:

$$L = L_1 \cup L_2$$

è non contestuale. La grammatica che genera L è:

$$G = (X, V, S, P)$$

ove:

$$X = \{a,b\} \qquad V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\} = \{S, S_1, S_2, A, B\}$$

$$\begin{aligned} P &= \{S \rightarrow S_1,\ S \rightarrow S_2\} \cup P_1 \cup P_2 = \\ &= \{S \rightarrow S_1,\ S \rightarrow S_2, \\ &\quad S_1 \rightarrow aS_1b \mid Bb,\ B \rightarrow Bb \mid \lambda, \\ &\quad S_2 \rightarrow aS_2b \mid aA,\ A \rightarrow aA \mid \lambda\}. \end{aligned}$$

Si provi a svolgere lo stesso esercizio *escludendo* la possibilità che i e j assumano valore zero.

(b) $L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R \right\}$

Analizziamo le parole che costituiscono L:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R \right\} = \\ &= \{\lambda, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, aaaa, abba, baab, bbbb, ...\} \end{aligned}$$

L è l'insieme dei palindromi sull'alfabeto $\{a,b\}$.

Dunque, per il teorema di caratterizzazione, si ha che:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \alpha x \alpha^R \mid \alpha \in \{a,b\}^*,\ x \in \{a,b,\lambda\} \right\} = \\ &= \left\{ \alpha\alpha^R \mid \alpha \in \{a,b\}^* \right\} \cup \left\{ \alpha a \alpha^R \mid \alpha \in \{a,b\}^* \right\} \cup \left\{ \alpha b \alpha^R \mid \alpha \in \{a,b\}^* \right\} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$L_1 = \left\{ \alpha\alpha^R \mid \alpha \in \{a,b\}^* \right\}$$
$$L_2 = \left\{ \alpha a \alpha^R \mid \alpha \in \{a,b\}^* \right\}$$
$$L_3 = \left\{ \alpha b \alpha^R \mid \alpha \in \{a,b\}^* \right\}$$

La grammatica che genera L_1 è:

$$G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$$

ove:

$$X = \{a,b\} \qquad V_1 = \{S_1\} \qquad P_1 = \{S_1 \rightarrow aS_1a \mid bS_1b \mid \lambda\}.$$

La grammatica che genera L_2 è:

$$G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$$

ove:

$$X = \{a, b\} \qquad V_2 = \{S_2\} \qquad P_2 = \{S_2 \to aS_2a \mid bS_2b \mid a\}.$$

La grammatica che genera L_3 è:

$$G_3 = (X, V_3, S_3, P_3)$$

ove:

$$X = \{a, b\} \qquad V_3 = \{S_3\} \qquad P_3 = \{S_3 \to aS_3a \mid bS_3b \mid b\}.$$

L_1, L_2 ed L_3 sono linguaggi non contestuali perché G_1, G_2 e G_3 sono grammatiche non contestuali. $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ è un linguaggio non contestuale dato che la classe dei linguaggi di tipo ‘2’ è chiusa rispetto all’unione.

La grammatica che genera L è:

$$G = (X, V, S, P)$$

ove:

$$X = \{a, b\} \qquad V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{S\} = \{S, S_1, S_2, S_3\}$$
$$P = \{S \to S_1,\ S \to S_2,\ S \to S_3\} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 =$$
$$= \{S \to S_1 \mid S_2 \mid S_3,\ S_1 \to aS_1a \mid bS_1b \mid \lambda,$$
$$S_2 \to aS_2a \mid bS_2b \mid a,\ S_3 \to aS_3a \mid bS_3b \mid b\}.$$

(c) Risolvere per esercizio.

<u>Esercizio 5.4</u>

Dimostrare che il linguaggio:

$$L = \{a^n b^m \mid n \neq m,\ n, m > 0\}$$

non è lineare destro, utilizzando le proprietà di chiusura di questa classe di linguaggi.

Se L fosse lineare destro, allora, per le proprietà di chiusura dei linguaggi lineari destri, anche il linguaggio:

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

sarebbe un linguaggio lineare destro. Infatti, si ha:

$$L_1 = L_2 - L$$

ove $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m > 0\}$. L_2 è un linguaggio lineare destro. Inoltre abbiamo che:

$$L_1 = L_2 - L = L_2 \cap \overline{L}$$

Se L fosse lineare destro, $\overline{L}$ sarebbe lineare destro (poiché $\mathcal{L}_3$ è chiusa rispetto al complemento).
Di conseguenza, anche L_1 sarebbe lineare destro in quanto L_2 è lineare destro ed $\mathcal{L}_3$ è chiusa anche rispetto all’operazione di intersezione. Ma L_1 è un linguaggio libero da contesto e non è lineare destro (si veda la dimostrazione del Teorema 5.1). Dunque L non è lineare destro.