Analisi Matematica - 7.3.2019 - prima parte

Wednesday, March 6, 2019 20:16

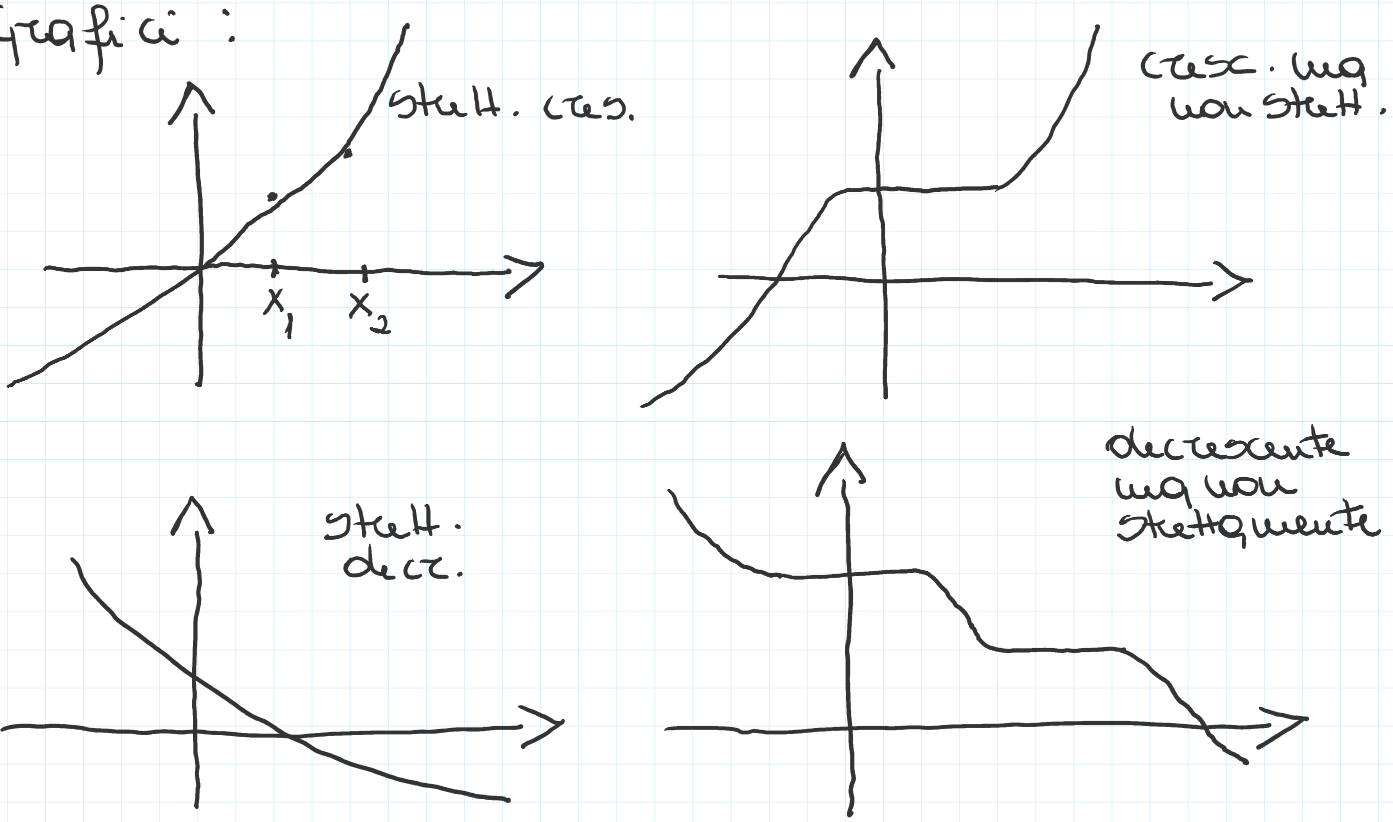
Funzioni MONOTONE

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Def: Si dice che

- f è (monotona) crescente se
  $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f è strettamente crescente se
  $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  !
- f è (monotona) decrescente se
  $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- f è strettamente decrescente se
  $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Grafici:



OSS:

f strett. crescente $\Rightarrow$ f crescente

f strett. decrescente $\Rightarrow$ f decrescente

Esempi:

1. $f(x) = 2x \quad x \in \mathbb{R}$ è strett. crescente

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$x_1 < x_2 \underset{2>0}{\Rightarrow} 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2. $f(x) = -2x$

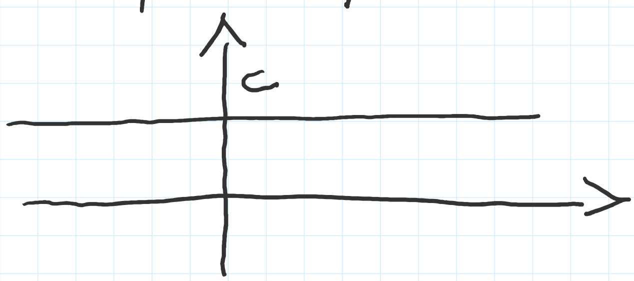
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$x_1 < x_2 \underset{-2<0}{\Rightarrow} -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- funzione costante $c \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto c$

$\text{Graf } f = \{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}$ retta orizzontale



f è crescente e decrescente

$x_1 < x_2 \quad \underset{c}{\underset{\parallel}{f(x_1) = f(x_2)}} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{array}$

f crescente e decr. $\Leftrightarrow$ f costante

f monotona significa f crescente o f decrescente

f strett. mon. " f strett. cresc. o f strett. decr.

Teorema Sia $f: A \to \mathbb{R}$ strett. monotona. Allora f è iniettiva e quindi è ben definita f^{-1}.
f^{-1} è strett. monotona (dello stesso tipo di f).

Dim: Sia f strett. crescente

f è iniettiva: $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$

Posso supporre che $x_1 < x_2 \underset{\substack{f \text{ strett.} \\ \text{cres}}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2)$

$f^{-1}: \operatorname{Im} f \to A = \operatorname{dom} f$

TESI $\quad y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f \; \underline{y_1 < y_2} \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

$\Downarrow$ spero

$f^{-1}(y_1) = x_1 \quad$ ove $\quad x_1 \in A \quad f(x_1) = y_1$

$f^{-1}(y_2) = x_2 \quad$ ove $\quad x_2 \in A \quad f(x_2) = y_2$

Devo prov. che $x_1 < x_2$.

Se non fosse vero $x_2 \leq x_1 \underset{\substack{f \\ \text{strett.} \\ \text{crescente}}}{\Rightarrow} f(x_2) \leq f(x_1)$

$\Rightarrow \underline{y_2 \leq y_1}$ Ass.

Operazioni (algebriche) con le funzioni

$f, g: A \to \mathbb{R}$

- $f+g : A \to \mathbb{R} \quad x \to f(x)+g(x)$ — somma
- $f \cdot g : A \to \mathbb{R} \quad x \to f(x) \cdot g(x)$ — prodotto
- $\dfrac{f}{g} : A \setminus \{x \in A / g(x) = 0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ — rapporto
- $f-g : A \to \mathbb{R} \quad x \to f(x)-g(x)$ — differenza
- $-f : A \to \mathbb{R} \quad x \to -f(x)$ — opposto
- $\frac{1}{f} : A \setminus \{x \in A / f(x) = 0\} \quad x \mapsto \frac{1}{\ldots}$ — reciproco

- $-f : A \to \mathbb{R}$ $x \to -f(x)$ opposto
- $\frac{1}{f} : A \setminus \{x \in A / f(x) = 0\}$ $x \to \frac{1}{f(x)}$ reciproco

Somma e monotonia

Si hanno le seg. proprietà:

f, g crescenti $\Rightarrow f+g$ è crescente
f, g decrescenti $\Rightarrow f+g$ è decrescente
f crescente, g strett. cresc. $\Rightarrow f+g$ è strett. cresc.
f decr., g strett. decr. $\Rightarrow f+g$ è strett. decr.

Composizione e monotonia

Prop: f, g funzioni tali che sia ben def. $g \circ f$
Allora

f, g cres. $\Rightarrow g \circ f$ cres.
f, g decr. $\Rightarrow g \circ f$ cres.
f crescente, g decres. $\Rightarrow g \circ f$ decrescente
f decres., g cres. $\Rightarrow g \circ f$ decrescente

Se f oppure g è strett. monotona anche $g \circ f$ lo è.

Eq. e iniettività

Se f è iniettiva allora $\cancel{f}(x) = \cancel{f}(y) \Rightarrow x = y$

$2^{x+2} = 2^{3x+3} \Rightarrow x+2 = 3x+3 \Rightarrow 2x = -1$

2^x è iniettiva (visto prima)

$x = -\frac{1}{2}$

$\log_2 x = 5$

$\log_2 x = \log_2 2^5 \Rightarrow x = 2^5$

$\log_2$ è iniettiva

$$e^{x+2} = 3$$

$$e^{x+2} = e^{\log 3} \Rightarrow$$ e^x iniettiva

$$x+2 = \log 3$$

$$x = -2 + \log 3$$

Disequazioni e monotonia

- Se f è strett. crescente
  $$f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y$$
  "posso togliere f"

  [se fosse $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$!!]

- Se f è strett. decrescente
  $$f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \geq y$$
  "posso togliere f ma la disug. cambia verso"

- se f è crescente
  $$f(x) < f(y) \Rightarrow x < y$$

- se f è decrescente
  $$f(x) < f(y) \Rightarrow x > y$$

Analisi Matematica - 7.3.2019 - seconda parte -

Il principio di induzione

Supponiamo di dover dim. la verità di un enunciato del tipo:

(E) "$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vale la proprietà $P(n)$"

ove $n_0 \in \mathbb{N}$ fissato.

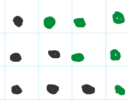
Se

1. $P(n_0)$ è vero — PASSO BASE
2. $P(n)$ vero $\Rightarrow$ $P(n+1)$ è vero — PASSO INDUTTIVO

allora $P(n)$ è vero $\forall n \geq n_0$ (cioè (E) è vero)

Esempi

1. $\forall n \geq 1 \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$n = 1 \qquad S_1 = 1 \qquad \dfrac{n(n+1)}{2} \quad n = 1 \quad \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$

PASSO base OK

Passo induttivo: $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \longleftarrow$ ipotesi

Tesi: $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$S_{n+1} = S_n + n + 1 \underset{\substack{\text{ipotesi}\\ \text{induttiva}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2. Sia $q \in \mathbb{R}, \; q \neq 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$S_0 = q^0 = 1$ (caso base O.K)

Passo induttivo

Ipotesi: $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Tesi: $S_{n+1} = \dfrac{1-q^{n+2}}{1-q}$

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = S_n + q^{n+1}$$

$$\underset{\text{ipotesi}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} =$$

$$= \frac{1 - \cancel{q^{n+1}} + \cancel{q^{n+1}} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

- Disuguaglianza di BERNOULLI

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$

CASO BASE $n = 0$ $(1+x)^0 = 1$

$1 + nx$ per $n = 0$ vale 1

$1 \geq 1$

Passo induttivo: Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \underset{\star}{\geq}$$

$\star$ Ipotesi induttiva + $1+x > 0$

$$\geq (1+nx)(1+x)$$

$$= 1 + x + nx + nx^2$$

$$= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)x$$

3. Per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha $2^n \geq n^2$

3. Per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha $2^n \geq n^2$

Esploro il problema:

$n=0$	$1 \geq 0$	OK
$n=1$	$2 \geq 1$	OK
$n=2$	$4 \geq 4$	OK
$n=3$	$8 \geq 9$	NO!!
$n=4$	$16 \geq 16$	OK
$n=5$	$32 \geq 25$	OK

Da qui in poi mi aspetto solo OK

Ipotesi: $\forall n \geq 4 \quad 2^n \geq n^2$

Base: $n=4$ OK

Passo induttivo: ip. $2^n \geq n^2$

Tesi: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \underset{\substack{2>0 \\ \text{ipotesi}}}{\geq} n^2 \cdot 2 \underset{\text{spero}}{\geq} (n+1)^2$$

Controlliamo che $2n^2 \geq (n+1)^2 \quad \forall n \geq 4$

$$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$
$$n^2 - 2n - 1 \geq 0$$
$$n^2 - 2n + 1 - 1 - 1 \geq 0$$
$$(n-1)^2 - 2 \geq 0$$
$$(n-1)^2 \geq 2$$
$$n - 1 \geq \sqrt{2}$$
$$n \geq 1 + \sqrt{2} \quad \text{per } n \geq 4 \text{ OK}$$

4. Per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha $n! \geq 2^n$

$n! = 1$ se $n = 0$

$n \in \mathbb{N}$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot 1 & \text{se } n>0 \end{cases} \qquad n\in\mathbb{N}$$

$n=0$	$1 \geq 1$	OK
$n=1$	$1 \geq 2$	NO!
$n=2$	$2 \geq 4$	NO!
$n=3$	$6 \geq 8$	NO!
$n=4$	$24 \geq 16$	OK!
$n=5$	$5! \geq 32$	OK!

Ipotesi: $\forall n \geq 4 \quad n! \geq 2^n$

Caso base: $n=4$ OK

Passo induttivo: Ip. $n! \geq 2^n$ Tesi $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

$$(n+1)! = (n+1)\,n! \underset{\substack{\text{ipotesi} \\ +\ (n+1)>0}}{\geq} (n+1)\,2^n \underset{\substack{? \\ \text{spero}}}{\geq} 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Controlliamo che $n+1 \geq 2$

$n \geq 1$ OK per $n \geq 4$

$$n! \geq 2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4$$

Si generalizza $\forall a > 1 \ \forall \alpha \geq 1$

$$n! \geq a^n \geq n^\alpha$$

Esempio (Trovare l'errore)

"Tutti gli studenti all'esame prendono lo stesso voto"

$P(n) =$ "dato un gruppo di n studenti, essi prendono lo stesso voto all'esame"

Dim. che $P(n)$ è vera $\forall n \geq 1$

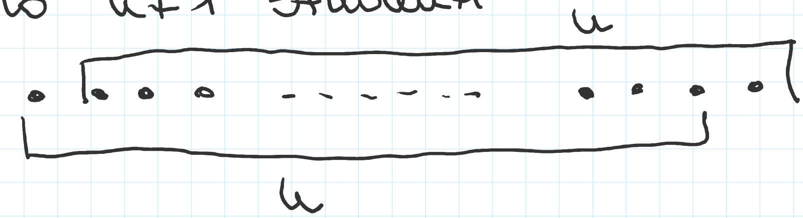
Dim. (SBAGLIATA)

Passo base: $n = 1$ ovvio

Passo induttivo: Hp. vale per gruppi di n

Th. " " " " $n+1$

Considero $n+1$ studenti



Ho due gruppi da n studenti con elem.ni comuni

Ipotesi sui gruppi da n + elem comuni $\Rightarrow$

tutti gli $n+1$ sono costretti ad avere lo stesso voto.

Dove è l'errore?

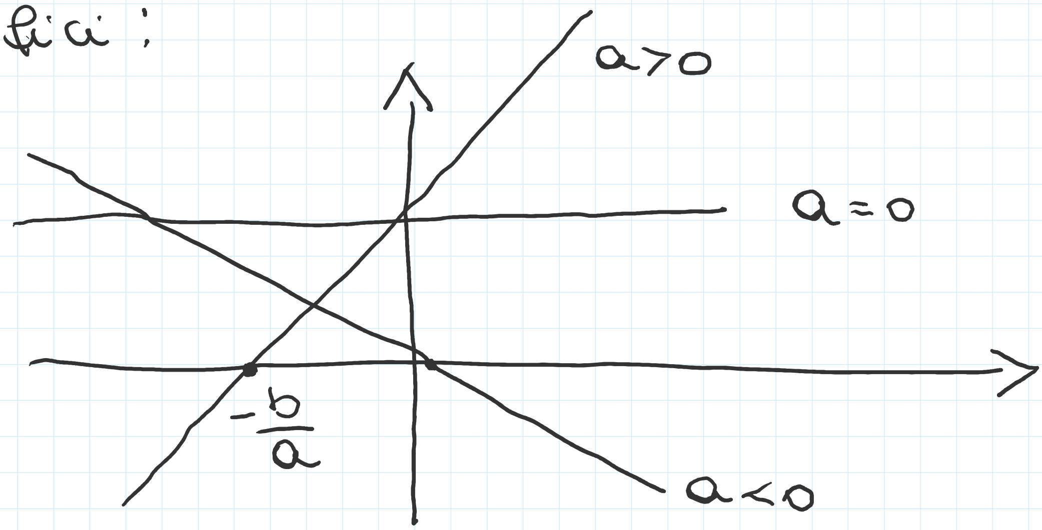
Le funzioni elementari

Funzioni lineari

Sono del tipo
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \longmapsto a \cdot x + b$$
ove $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Oss: se $a = 0$ f è una funzione costante.

Grafici:



$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

Se $a \neq 0$, f è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ f ammette inversa

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \mapsto \frac{1}{a} y - \frac{b}{a}$

$ax + b = y$

$ax = y - b$

$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a}$

f^{-1} è di tipo lineare

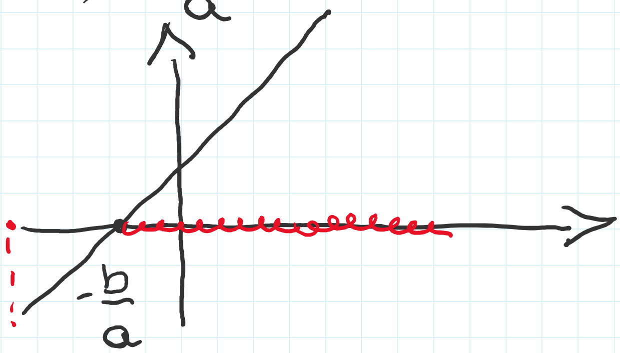
$a \neq 0$:

Estremi: $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ $\quad \inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$

Monotonia: se $a > 0$ f è strett. crescente

se $a < 0$ f è strett. decrescente

$f(x) \geq 0 \quad x \geq -\frac{b}{a} \quad$ se $a>0 \quad x \in [-\frac{b}{a}, +\infty)$



Valore assoluto

Def: Sia $a \in \mathbb{R}$. Si chiama valore assoluto di a il numero reale definito da

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

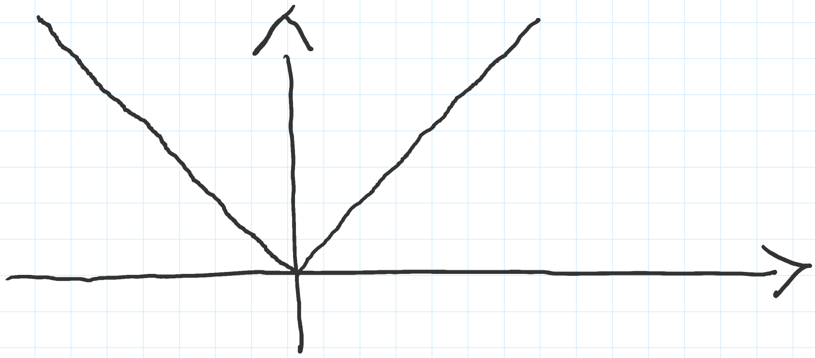
notazione

$|0| = 0 \qquad \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \qquad |-2| = -(-2) = 2$

Funzione valore assoluto

$f: x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x| \in \mathbb{R}$

Grafico:



$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}\, f = [0, +\infty)$

$\min_{\mathbb{R}} f = 0 = f(0) \qquad \sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$

f è pari: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$

f non è iniettiva: $|-1| = |1|$

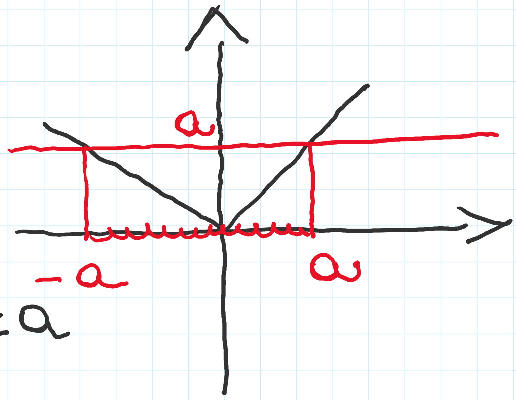
f è strett. crescente in $[0, +\infty)$

f non è iniettiva: $|-1| = |1|$

f è strett. crescente in $[0, +\infty)$

f è strett. decrescente in $(-\infty, 0]$

Sia $a > 0$



$|x| \le a \iff -a \le x \le a$

$\quad < \qquad\qquad <\quad <$

$|x| \ge a \iff x \le -a$ oppure $x \ge a$

$\quad > \qquad\qquad < \qquad\qquad\qquad >$

$a < 0$

$|x| \le a \quad \emptyset$

$|x| < a \quad \emptyset$

$|x| \ge a \quad \mathbb{R}$

$|x| > a \quad \mathbb{R}$

$|x| \le 6 \iff -6 \le x \le 6 \quad x \in [-6, 6]$

$|x| \le -1 \quad \emptyset$

$|x+5| < 1 \iff -1 < x+5 < 1$

$-1-5 < x < -5+1$

$-6 < x < -4 \qquad (-6, -4)$

$|x+6| \ge 3 \iff x+6 \le -3$ oppure $x+6 \ge 3$

$x \le -9 \qquad\qquad x \ge -3$

$x \in (-\infty, -9] \cup [-3, +\infty)$