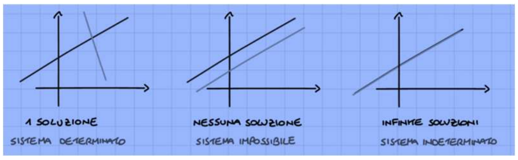
Sistemi di Equazioni

● Definizione

I sistemi si classificano:
- in base al numero di incognite (“ad 1 incognita”, “a 2 incognite”, …)
- in base al grado (che si ottiene moltiplicando [non sommando!] i gradi delle equazioni: es. un sistema è di 6° grado se ha un eq. di 3° e un eq. di 2° grado)

I sistemi di 1° grado sono detti “sistemi lineari”.

Interpretazione grafica dei sistemi lineari a 2 incognite:
Ciascuna delle equazioni in 2 incognite può essere pensata come l’equazione di una retta.
Le (eventuali) soluzioni del sistema sono le coordinate dei punti di intersezione tra le rette.
1 soluzione (x = n, y = m) → Le rette si intersecano nel punto (n, m)
Zero soluzioni (impossibile) → le rette sono parallele
Infinite soluzioni (indeterminato) → le rette sono coincidenti
(Un sistema infatti è indeterminato quando le sue equazioni “dicono la stessa cosa”)
(Se il sistema ha 3 o più incognite ovviamente non vale l’interpretazione grafica, in quanto un punto è definito da 2 coordinate)



● Metodo di sostituzione

1) Isolo un’incognita in un’equazione
2) Sostituisco il valore ottenuto nell’altra equazione, e la risolvo
3) Inserisco il risultato ottenuto al punto 2 nell’equazione di partenza

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+8}{2} \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+8}{2} \\ 4\left(\dfrac{-3y+8}{2}\right)-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3(2)+8}{2} \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

● Metodo di riduzione

1) Ordino tutte le equazioni per incognita, ed eventualmente “riempio” le incognite mancanti (Es. se non c’è la y scrivo “+0y”)
2) Si manipolano una o più equazioni (Es. moltiplicando ambo i membri),
   facendo in modo che i vari coefficienti di un’incognita (nell’esempio a seguire si sceglie la y), se sommati si annullino
   (ovviamente si sceglie l’incognita che è più facile da far annullare)
3) Si sommano membro a membro le equazioni
4) Si sostituisce una delle equazioni (a piacere) del sistema di partenza con l’equazione trovata al punto 3
5) Si procede a piacere con il sistema risultante (si può ri-applicare il metodo di riduzione, o usare un altro metodo), fino ad avere i risultati del sistema

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \quad \textit{Trovo la } x \textit{ (elimino la } y) \quad \rightarrow \frac{\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}}{6x+0y=6} \rightarrow \begin{cases} 6x=6 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ 4(1)-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Oppure:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \textit{Trovo la } y \rightarrow \begin{cases} (-2)\cdot(2x+3y)=(8)\cdot(-2) \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x-6y=-16 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \rightarrow \frac{\begin{cases} -4x-6y=-16 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}}{0x-9y=-18} \rightarrow \begin{cases} -9y=-18 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \rightarrow [\ldots]$$

● Metodo di Cramer

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1) Scrivo queste 3 matrici

(N: Termine noto)

$$\begin{array}{cc} X & Y \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{cc} N & Y \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{cc} X & N \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

L'ordine delle 3 matrici è importante per non confondersi.

Per non impararle a memoria, il senso è:
- la matrice con i coefficienti delle incognite
- la matrice della X (dove NON si mettono i coefficienti della x)
- la matrice della Y (dove NON si mettono i coefficienti della y)

2) Calcolo i determinanti delle matrici

$D_1\ (D) = (a_1 \cdot b_2) - (b_1 \cdot a2)$
$D_2\ (D_x) = (c_1 \cdot b_2) - (b_1 \cdot c_2)$
$D_3(D_y) = (a_1 \cdot c_2) - (c_1 \cdot a_2)$

3) Soluzioni

Caso 1:
D ≠ 0 → $x = D_x/D$ e $y = D_y/D$

Caso 2:
D = 0 → indeterminato (se tutte le equazioni nel sistema sono uguali), altrimenti impossibile

Esempio:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow D = \big(2 \cdot (-3)\big) - (3 \cdot 4) = -6 - 12) = -18$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow D_x = \big(8 \cdot (-3)\big) - \big(3 \cdot (-2)\big) = -24 - (-6) = -18$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow D_y = \big(2 \cdot (-2)\big) - (8 \cdot 4) = -4 - 32 = -36$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{-18} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{-18} = 2$$

Casi particolari

● Trasformazione da sistema non lineare a sistema lineare

In alcuni casi (non sempre) un sistema non lineare può essere ricondotto ad uno lineare.
Nell'esempio qui sotto non è lineare perché non ha incognite di grado 1 (ad esempio $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

Esempio:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 3 \\ \frac{7}{x} - \frac{4}{y} = 5 \end{cases} \rightarrow \ Pongo\ t = \frac{1}{x}\ e\ pongo\ s = \frac{1}{y} \ \rightarrow \begin{cases} t + 4s = 3 \\ 7t - 4s = 5 \end{cases} \rightarrow \ Risolvo\ per\ t, s \ \rightarrow \ t = 1\,, s = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ \frac{1}{x} = 1\,, \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ x = 1\,, y = 2$$

● Sistema a 3 incognite

Si risolve normalmente, applicando più volte i vari metodi.

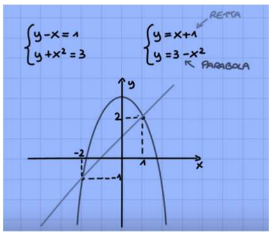
Esempio:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 5x + 4y - z = 2 \\ -3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y + z - 1 \\ 5 \cdot (-y + z - 1) + 4y - z = 2 \\ -3 \cdot (-y + z - 1) + 3y + 2z = 7 \end{cases} \rightarrow [\dots] \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

● Sistema di 2° grado

Un sistema di 2° grado può avere:
- 1 o 2 soluzioni
- nessuna soluzione (impossibile)
- infinite soluzioni (indeterminato)

Interpretazione grafica dei sistemi di secondo grado a 2 incognite:
L'equazione di 1° grado rappresenta una retta, quella di 2° grado una parabola.
Se ci sono 1 o 2 soluzioni, rappresentano gli 1 o 2 punti di contatto fra la retta e la parabola.
Se non ci sono soluzioni, le due funzioni non si intersecano.
(Se il sistema ha 3 o più incognite ovviamente non vale l'interpretazione grafica, in quanto un punto è definito da 2 coordinate)



Guida:
1) Si risolve normalmente fino ad arrivare a calcolare le due soluzioni di un'incognita per l'equazione di secondo grado
2) Il sistema di sdoppia in 2 sistemi, in cui si sostituiscono rispettivamente i 2 valori trovati

Esempio:

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x^2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ (x + 1) + x^2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 1 \ \vee \ x = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = (1) + 1 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = (-2) + 1 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Sistemi di Disequazioni

Nelle disequazioni con più fattori, si calcolano le soluzioni di ogni fattore, e poi si considerano i "+" e i "−".
Quindi, nelle disequazioni, "meno per meno = più", e si prendono anche le x.

Invece, nei sistemi di disequazioni, si prendono solo le x che risolvono OGNI disequazione.
NON si fa il calcolo dei segni.
Si prendono gli intervalli dove ci sono TUTTE linee continue.

Esempio:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{(x+1)\cdot(5-x)} \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} < \dfrac{1}{x-3} \end{cases} \rightarrow \; [\ldots] \; \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-2)}{(x+1)\cdot(5-x)} \geq 0 \\ \dfrac{-2}{(x+3)\cdot(x-3)} < 0 \end{cases}$$

Soluzioni nelle disequazioni:

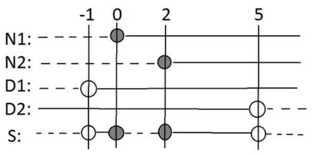
Disequazione 1:

$N_1: x \geq 0$

$N_2: x - 2 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 2$

$D_1: x + 1 > 0 \;\rightarrow\; x > -1$

$D_2: 5 - x > 0 \;\rightarrow\; x < 5$



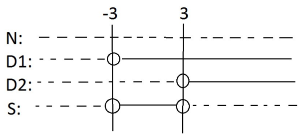
C'è il "≥" nella disequazione → Prendo i "+" → $-1 < x \leq 0 \quad \vee \quad 2 \leq x < 5$

Disequazione 2:

N: $-2 > 0$ (Si studiano TUTTI i fattori, anche quelli senza incognita; non è MAI vero "$-2 > 0$", quindi metto la linea tratteggiata nel grafico)

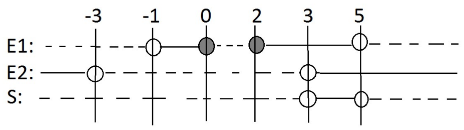
$D_1: x + 3 > 0 \;\rightarrow\; x > -3$

$D_2: x - 3 > 0 \;\rightarrow\; x > 3$



C'è il "<" nella disequazione → Prendo i "−" → $-3 < x < 3$

Soluzione nel sistema:
Si prendono i valori che soddisfano contemporaneamente TUTTE le disequazioni (gli intervalli dove ci sono tutte linee continue).



S:
$3 < x < 5$
$(3, 5)$