RISOLVERE GLI INTEGRALI

1°

Usando le regole di integrazione immediata ovvero:

- Somma algebrica

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- Costante da portare fuori

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

- Integrali di funzioni composte

2°

Integrazione per sostituzione.

Si fa quando l'integrale NON E' immediato, ~~non~~ ~~e~~ NON E' un integrale con PRODOTTO, se NON E' un integrale con FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

COME SOSTITUIRE

- Si pone la funzione più ricorrente come t $\qquad \log x = t$
- Cerco di arrivare a trovare a cosa è uguale la x $\qquad x = e^{t}$
- Trovo a cosa è uguale dx. Ci sono 2 modi per trovarlo

(1) Calcolo il dt

$dx = D(f(x)) \cdot dt$

questa corrisponde a cosa è uguale la x

METODO + SEMPLICE per TUTTE le funzioni TRANNE quelle TRIGONOMETRIC

(2) Uso la formula

$dt = D(f(x)) \cdot dx$

questa è la funzione che sostituisco

METODO + SEMPLICE per le funzioni TRIGONOMETRICHE

3°

Quando mi trovo di fronte a un prodotto tra 2 fattori e non vi è un rapporto di derivazione tra i due.

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

questa è il prototipo della traccia. Siamo noi a scegliere chi è $f(x)$ e chi è $g'(x)$.

$f(x)$ è sempre log e archi

$g'(x)$ sono sempre sen, cos ed esponenziali

La formula è:

$$f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Ovviamente devo trovarmi $f'(x)$ e $g(x)$. Questa formula si può iterare

4°

Quando mi trovo davanti a una frazione tra funzioni razionali, ovvero senza funzioni elementari

- Se ho al Numeratore la derivata del Denominatore

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|x|$$

- Se ho il N di grado minore del D il quale è di grado 2

- Devo studiare il Δ del D e trovare $x_{1/2}$

se ho

$$\Delta > 0 \longrightarrow \int \frac{A}{x-x_1}\, dx + \int \frac{B}{x-x_2}\, dx$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow \int \frac{A}{x-x_1}\, dx + \int \frac{B}{(x-x_1)^2}\, dx$$

In entrambi i casi devo poi fare il MCD ignorando gli integrali, fare tutti i calcoli e poi fare un sistema per trovare i valori di A e B per

$\Delta < 0$

Ciò che bisogna fare dipende se al numeratore c'è o meno l'incognita

Se c'è dovrò creare al numeratore la derivata del denominatore

Al denominatore dovrò costruire un quadrato di binomio più una costante.

Se non c'è passo direttamente a costruire il quadrato di binomio più la costante al D

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+m^2} = \frac{1}{m} \arctan\left(\frac{f(x)}{m}\right)$$

- Se il numeratore è di grado maggiore o uguale al denominatore devo fare la divisione tra polinomi e seguire poi questa formula

$$\int \frac{N}{D} dx = \int Q \, dx + \int \frac{R}{D} dx$$

DIVISIONE TRA POLINOMI

Si fa la divisione in colonne mettendo a sx il N e a dx il D.

Si dividono i gradi maggiori poi il risultato va moltiplicato con il denominatore il risultato va cambiato di segno per poi sommarlo al numeratore

5°

Quando mi trovo davanti a una frazione con funzioni razionali con denominatore di grado maggiore al 2° la regola è quella che riguarda il criterio di scomponibilità in fattori primi o attraverso ruffini

① Denominatore completamente scomponibile in fattori primi

$$\int \frac{A}{x-x_1} dx + \int \frac{B}{x-x_2} dx + \int \frac{C}{x-x_3} dx$$

② Denominatore di 3° grado scomponibile ma con un fattore quadrato di bino

$$\int \frac{A}{x-x_1} dx + \int \frac{B}{(x-x_1)^2} dx + \int \frac{C}{x-x_2}$$

→ Termine di 1° grado già scomposto

③ Denominatore non completamente scomponibile in fattori di 1° grado per colpa di un fattore di 2° grado con $\Delta < 0$

$$\int \frac{A}{1^\circ \text{grado}}\, dx + \int \frac{B}{2^\circ \text{grado}}\, dx$$

Vi sono delle differenti tipologie di integrale: Indefiniti, Definiti e Impropri

INDEFINITO

$$\int f(x)\, dx$$

DEFINITO

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{Con } a<b \text{ e } a, b \in \mathbb{R}$$

Dopo la risoluzione normale dell'integrale bisogna impostare una differenza:

$$\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dove F è la primitiva trovata con la risoluzione dell'integrale

IMPROPRIO

$$\int_a^b f(x) \qquad \text{Con } a \text{ o } b = \pm\infty$$

Dopo la risoluzione dell'integrale si pone $\pm\infty = t$ e si imposta il limite

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left[F(x)\right]_{a/t}^{b/t}$$

INTEGRAZIONI IMMEDIATE

$$\int k\,dx = kx$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$$

(x^{-n})

$$\int \sqrt[n]{x^m} = \int x^{\frac{m}{n}} = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$$

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x \quad / \quad \int 1+\tan^2 x\,dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = -\cot x$$

REGOLE DI INTEGRAZIONE

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{k} \int k\, f(x)\, dx$$

COME RISOLVERE I LIMITI

Per prima cosa devo sostituire il valore a cui tende la x al posto della x stessa nella funzione e vedere come essa si comporta. Se si risolve normalmente non ci sono problemi, ricordando che:

$\frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0)$

$\frac{a}{\infty} = 0$

$a \cdot \infty = \infty \quad (a \neq 0)$

$a + \infty = +\infty$

$a - \infty = -\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

Ci sono però delle forme dove non è possibile trovare un risultato, sono dette Forme d'Indeterminazione:

$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \cdot \infty \qquad \infty - \infty \qquad 0^{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0}$

Quando mi trovo nella F.I. $\frac{0}{0}$ posso utilizzare le stime asintotiche, esse sono semplicemente delle sostituzioni.

Se invece mi trovo nel caso in cui ho la F.I. 1^{∞}, 0^{∞} o ∞^{0} utilizzo la formula di trasformazione

$$f(x)^{g(x)} \overset{[0^{\infty}, 1^{\infty}, \infty^{0}]}{=} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

Ciò dovrebbe semplificare la situazione.

Quando invece ho la F.I. $\frac{\infty}{\infty}$ devo utilizzare la gerarchia degli infiniti ovvero scegliere la funzione che va più velocemente ad infinito secondo questa gerarchia

Velocità ↑
- fattoriali
- esponenziali
- potenze
- logaritmi

$$\operatorname{sen} f(x) \sim f(x)$$

$$\tan f(x) \sim f(x)$$

$$\operatorname{arcsen} f(x) \sim f(x)$$

$$\arctan f(x) \sim f(x)$$

$$1-\cos f(x) \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2$$

$$e^{f(x)}-1 \sim f(x)$$

$$f(x)-\operatorname{sen} f(x) \sim \frac{1}{6}[f(x)]^3$$

$$f(x)-\tan f(x) \sim -\frac{1}{3}[f(x)]^3$$

$$f(x)-\operatorname{arcsen} f(x) \sim -\frac{1}{6}[f(x)]^3$$

$$f(x)-\arctan f(x) \sim \frac{1}{3}[f(x)]^3$$

$$a^{f(x)}-1 \sim f(x)\cdot \log a$$

$$\log(1+f(x)) \sim f(x)$$

$$\log_a(1+f(x)) \sim f(x)\,(\log_a e)$$

$$(1+f(x))^k-1 \sim k\,f(x)$$

$$\sqrt[k]{1+f(x)}-1 \sim \frac{1}{k}f(x)$$

$\operatorname{sen} f(x) \sim f(x)$

$\tan f(x) \sim f(x)$

$\operatorname{arcsen} f(x) \sim f(x)$

$\arctan f(x) \sim f(x)$

$1-\cos f(x) \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2$

$e^{f(x)}-1 \sim f(x)$

$f(x)-\operatorname{sen} f(x) \sim \frac{1}{6}[f(x)]^3$

$f(x)-\tan f(x) \sim -\frac{1}{3}[f(x)]^3$

$f(x)-\operatorname{arcsen} f(x) \sim -\frac{1}{6}[f(x)]^3$

$f(x)-\arctan f(x) \sim \frac{1}{3}[f(x)]^3$

$a^{f(x)}-1 \sim f(x) \cdot \log a$

$\log(1+f(x)) \sim f(x)$

$\log_a(1+f(x)) \sim f(x)\,(\log_a e)$

$(1+f(x))^k-1 \sim k f(x)$

$\sqrt[k]{1+f(x)}-1 \sim \frac{1}{k} f(x)$

Serie Numeriche

CRITERIO DI CONVERGENZA

facendo il limite della successione per $n \to +\infty$ deve dare come risultato 0.
Se lo fa la serie POTREBBE convergere.
Se invece da un altro numero o $\pm\infty$ la serie diverge.

ESISTONO 3 TIPI DI ESERCIZI

① Serie a Termini Positivi Normale
La risolvo facendo il limite di a_n e vedo se posso applicare qualche criterio

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

② Serie a Segno Alternato
La risolvo con i CRITERI DI LEIBNITZ. I quali devono essere tutti e 3 Veri

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

③ Serie di potenze
Per risolverla devo trovare il campo di convergenza

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x-x_0)^n$$

CRITERI DI LEIBNITZ
I criteri di Leibnitz indicano se una serie a segno alternato converge o meno.
Si deve dimostrare che

$\boxed{1}$

$a_n \geq 0 \quad \forall n$

devo vedere i "componenti" della successione

$\boxed{2}$

$\{a_n\}$ decrescente

lo dimostro provando a dare dei valori consecutivi ad n e vedo il comportamento

$\boxed{3}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

CRITERI PER SERIE A TERMINI POSITIVI

Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{Definitivamente}$$

Allora

Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ Converge

Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge

Criterio del confronto Asintotico

Se due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di numeri positivi tali che

$$a_n \sim b_n$$

le corrispondenti serie hanno lo stesso carattere.

SERIE A SEGNI ALTERNATI

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

per risolverle devo:

$\boxed{1}$

Ignorare x_0.

$\boxed{2}$

Considerare l'insieme di convergenza dato da $(x_0 - R, x_0 + R)$ dove R è il raggio di convergenza.

Per trovare R ho 2 modi.

Criterio della radice

risolvo il $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \neq 0, +\infty \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

Criterio del Rapporto

risolvo il $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \neq 0, +\infty \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

$\boxed{3}$

se

- $|x - x_0| < R$ la serie converge (ASSOLUTAMENTE)
- $|x - x_0| > R$ la serie non converge

DERIVATE FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = kx$	$f'(x) = k$
$f(x) = x^m$	$f'(x) = m \cdot x^{m-1}$
$f(x) = kx^m$	$f'(x) = km \cdot x^{m-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[m]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \log a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{cotan} x$	$f'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arctan x$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

OPERAZIONI CON DERIVATE

$f(x) \pm g(x) \Rightarrow f'(x) \pm g'(x)$

$K f(x) \Rightarrow K f'(x)$

$f(x) \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

CALCOLO LIMITI SIGNIFICATIVI

Guardo il dominio e in particolare gli estremi

Esempio

Dom: (a, b) DOM: $(-\infty, a)$

$\lim_{x \to a^\pm} f(x)$ $\lim_{x \to b^\pm}$ $\lim_{x \to -\infty^+} f(x)$ $\lim_{x \to a^\pm} f(x)$

ASINTOTI

Se

$\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$ $x = a$ ASINTOTO VERTICALE

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = n$ $y = n$ ASINTOTO ORIZZONTALE

Se non esiste l'asintoto orizzontale vi è un probabile obliquo

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $y = mx + q$ ASINTOTO OBLIQUO

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$q = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$

MONOTONIA

Si pone la derivata maggiore di 0

$f'(x) > 0$

Studio la tabella dei segni, trovo intervalli

in cui la f è crescente o decrescente

PUNTI MINIMO E MASSIMO

Pongo $f'(x)=0$ risolvo e trovo i punti

CONCAVITÁ E CONVESSITÁ

Pongo la derivata seconda >0 e studio la tabella

dei segni, dove è + la funzione è ∪ dove è

− la funzione è ∩