# Capitolo 12

# Serie numeriche

Il problema di sommare infiniti addendi è uno dei problemi classici dell'analisi matematica. Anzi si tratta di un problema che nell'antichità ha avuto anche implicazioni filosofiche (*paradosso di Zenone*).

Un semplice esempio mostra che un qualsiasi numero può essere "immaginato" come risultato di una "somma di infiniti addendi", infatti abbiamo:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Quindi, con un piccolo salto logico,

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

D'altra parte rimane aperto il problema di formalizzare questa situazione partendo da una successione $\{a_n\}$ generica.

## 12.1 Generalità

Assegnata $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$, abbiamo definito per ricorrenza la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali

$$\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_n = s_{n-1} + a_n \end{cases}$$

In forma esplicita

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0, \\ s_1 &= a_0 + a_1, \\ &\dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

Abbiamo anche introdotto il simbolo

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = s_n$$

La locuzione "*serie di termine generale* $a_n$", a cui associamo il simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \tag{12.1}$$

va intesa come abbreviazione (o sinonimo) di "successione delle somme parziali di $\{a_n\}$". Quindi tutto quello che si riferisce alla serie (12.1) in realtà si riferisce alla successione $\{s_n\}$.

Vediamo tutto questo nella definizione che segue.

**Definizione 12.1** *Studiare la serie (12.1) vuol dire studiare la successione* $\{s_n\}$.

*Si dice che la serie (12.1) converge ad* $S \in \mathbf{R}$ *se la successione* $\{s_n\}$ *converge ad* $S$. *In tal caso si scrive*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S.$$

*Il numero* $S$ *si dice anche* somma della serie.

*Analogamente si dice che la serie (12.1) diverge (posit. o negat.) se la successione* $\{s_n\}$ *diverge (posit. o negat.). In tal caso si scrive*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \pm\infty$$

*Infine si dice che la serie (12.1) non è regolare se tale risulta la successione* $\{s_n\}$.

Dobbiamo mettere in evidenza una piccola difficoltà generata dal linguaggio comune:

- in matematica una successione è un insieme di oggetti ciascuno contraddistinto da un indice, una serie è la "somma" degli infiniti termini di una preassegnata successione;
- nel linguaggio comune il termine "serie" viene riferito a oggetti, o eventi, ripetuti esattamente identici (produzione in serie, in cui gli oggetti sono distinti da un numero di serie), oppure ripetuti non identici ma con certe analogie (i delitti di un serial killer), oppure diversi ma in un qualche senso concatenati (gli episodi di una serie televisiva).

Quindi nel linguaggio comune (italiano) il termine serie ha la stessa accezione di ciò quello che in matematica chiameremmo successione.

**Osservazione 12.2** *Osserviamo che, in base a quanto detto, parlando di serie la successione delle somme* $\{s_n\} = \{\sum_{k=0}^{n} a_k\}$. *D'altra parte, con un piccolo abuso di notazione, quando scriviamo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L \in \bar{\mathbf{R}}$$

*intendiamo*

$$\lim_n s_n = L.$$

*Quindi lo stesso simbolo denota la successione e il suo limite (se esiste).*

Come nelle somme finite, l'indice di sommazione non è rilevante e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

### 12.1.1 Primi esempi: calcolo di somme

Gli esempi più semplici di serie numeriche si presentano quando è possibile dare un'espressione analitica per la successione $\{s_n\}$ e quindi calcolarne il limite. Precisiamo che si tratta di situazioni estremamente rare.

#### Serie geometrica

Alla progressione geometrica $\{q^n\}$ si associa la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n. \tag{12.2}$$

Sappiamo che

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{se } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

Quindi risulta quanto segue:

- se $|q| < 1$, allora la serie (12.2) converge e risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_n s_n = \frac{1}{1-q};$$

- se $q \geq 1$, allora la serie (12.2) diverge positivamente;
- se $q \leq -1$, allora la serie (12.2) non è regolare.

Osserviamo che, nel caso $|q| < 1$, risulta

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^n = q^m \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}. \tag{12.3}$$

#### Serie telescopiche

**Esempio 12.3** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

*Osserviamo che*

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

*e passiamo a calcolare le somme parziali. Con pochi tentativi ed un pizzico di intuizione si riconosce che, per ogni* $n \geq 4$

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \tag{12.4}$$

*In realtà la dimostrazione rigorosa di (12.4) si avrebbe con il principio di induzione. Passando al limite, concludiamo*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim_n s_n = \frac{3}{4}.$$

**Esempio 12.4** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

*Osserviamo che*

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$$

*da cui si deduce, per ogni* $n \geq 2$

$$s_n = \log(n+1).$$

*Pertanto, passando al limite,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_n s_n = +\infty.$$

### 12.1.2 Teoremi sulle serie convergenti

Ove non sia possibile dare un'espressione analitica di $\{s_n\}$ o calcolarne il limite, ci si accontenta di stabilire il carattere della serie (convergente, divergente, non regolare).

A questo scopo si utilizzano vari criteri che esporremo nei prossimi paragrafi. Per il momento possiamo enunciare alcune utili proposizioni, anzitutto una condizione necessaria per la convergenza.

**Proposizione 12.5 (condizione necessaria per la convergenza)** *Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è convergente, allora risulta* $\lim_n a_n = 0$.

**Osservazione 12.6** *Non è vero il viceversa. Un controesempio è dato dalla serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{12.5}$$

*Infatti, anche se risulta*

$$\lim_n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

*abbiamo visto nell'Esempio 12.4 che la serie (12.5) è divergente.*

*Un altro classico controesempio è dato dalla serie armonica che studieremo in seguito (Esempio 12.22).*

**Osservazione 12.7** *Se due serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

*hanno i termini definitivamente uguali, allora hanno anche lo stesso carattere. Infatti le rispettive successioni delle somme parziali differiscono per una costante.*

*In generale i criteri di convergenza chiamano in causa limiti o proprietà di tipo definitivo.*

Passiamo ad enunciare proprietà di tipo algebrico.

**Proposizione 12.8** *Se le serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n, \tag{12.6}$$

*sono convergenti, anche la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) \tag{12.7}$$

*è convergente e risulta*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

*Se le serie (12.6) sono divergenti con lo stesso segno, anche la serie (12.7) è divergente.*

*Se una delle due serie (12.6) è divergente e l'altra è convergente, allora la serie (12.7) è divergente.*

**Proposizione 12.9** *Sia $\lambda \neq 0$. Le serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n)$$

*hanno lo stesso comportamento. In particolare, se convergono, risulta anche*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Passiamo ora a considerare una situazione che possiamo definire di *somma per incastro.* Accanto alla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{12.8}$$

consideriamo le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}. \tag{12.9}$$

Il teorema che segue è formalmente identico al teorema relativo alla serie somma.

**Proposizione 12.10** *Se le serie (12.9) sono convergenti, anche la serie (12.8) è convergente e risulta*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}.$$

*Se le serie (12.9) sono divergenti con lo stesso segno, anche la serie (12.8) è divergente.*

*Se una delle due serie (12.9) è divergente e l'altra è convergente, allora la serie (12.8) è divergente.*

Vedremo in seguito (nell'Esempio 12.53) che, se le serie (12.9) divergono con segno opposto, non è escluso che (12.8) sia convergente.

### 12.1.3 Somme approssimate

Sia assegnata la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{12.10}$$

Supponiamo di aver stabilito che (12.10) è convergente, ma di non essere in grado di calcolarne la somma $S$. In questo caso, fissata una soglia di precisione $\epsilon > 0$ (ad esempio $\epsilon = 1/1000$), possiamo chiedere di determinare un valore $\sigma$ tale che

$$|S - \sigma| < \epsilon.$$

Diremo che $\sigma$ è un valore approssimato della somma a meno di $\epsilon$.

Poiché sappiamo che la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è convergente ad $S$, per la definizione stessa di limite, avremo che, definitivamente,

$$|S - s_n| < \epsilon. \tag{12.11}$$

Pertanto le somme parziali $s_n$ sono ottimi candidati ad essere valori approssimati della somma. Rimane il problema di stabilire il valore minimo di $n$ per cui vale (12.11).

Ovviamente, poiché $S$ è incognita, non ha senso chiedere di risolvere (12.11) rispetto ad $n$. Se si riesce a scrivere una maggiorazione

$$|S - s_n| \le R_n,$$

(con un $R_n$ noto in forma esplicita), per ottenere la (12.11) sarà sufficiente risolvere

$$R_n < \epsilon.$$

Per procedere può fare comodo introdurre una definizione.

**Definizione 12.11** *Si definisce* resto $n$-simo *la differenza*

$$\begin{aligned} r_n &= S - s_n \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k. \end{aligned} \tag{12.12}$$

**Osservazione 12.12** *Attraverso diversi esempi avremo modo di vedere che, a parità di $\epsilon > 0$, il valore dell'indice $n_0$ per cui risulta*

$$|r_{n_0}| < \epsilon$$

*è estremamente variabile:*

- *se tale $n_0$ è piccolo vuol dire che l'errore diventa subito piccolo: la serie converge velocemente;*
- *se tale $n_0$ è grande vuol dire che la serie converge lentamente.*

A questo proposito vediamo ora un esempio che sarà utile per il seguito.

**Esempio 12.13** *Si consideri la serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

*con $|q| < 1$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sappiamo (vedi (12.3)) che*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

*e quindi*

$$|r_n| = \frac{|q|^{n+1}}{1-q}.$$

*In questo caso, poiché disponiamo della somma, ovviamente non ci interessano le somme approssimate, tuttavia possiamo osservare diverse velocità di convergenza, al variare della base. Ci chiediamo per quale $n_0$ risulti*

$$|r_{n_0}| < 1/1000$$

*Dunque dobbiamo risolvere*

$$\frac{|q|^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1000}$$

- *se $q = -1/2$ dobbiamo risolvere*

  $$\frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1+\frac{1}{2}} < \frac{1}{1000}$$

  *e si ottiene $n \geq 9$;*

- *se $q = 3/4$ dobbiamo risolvere*

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} < \frac{1}{1000}$$

*e si ottiene $n \geq 28$.*

La nozione di resto si può dare per una serie generica.

**Definizione 12.14** *Assegnata una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si definisce* (serie) resto $n$-simo *la serie*

$$r_n = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_k.$$

**Osservazione 12.15** *E' immediato verificare che le serie resto hanno lo stesso carattere della serie di partenza.*

*Se la serie è convergente abbiamo $r_n \in \mathbf{R}$, inoltre da (12.12) si deduce*

$$\lim_n r_n = 0.$$

## 12.2 Serie a termini positivi

**Definizione 12.16** *Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice a termini positivi se (almeno definitivamente) risulta $a_n \geq 0$.*

La proprietà principale è espressa di seguito.

**Proposizione 12.17** *Ogni serie a termini positivi è regolare, precisamente o converge o diverge positivamente.*

*Se la serie converge ad $S$, abbiamo*

$$s_n \leq S$$

*e quindi i resti $r_n$ sono positivi.*

**Dimostrazione.** ... ■

**Corollario 12.18** *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se la successione $\{a_n\}$ non converge a 0, allora la serie è divergente.*

Per le serie a termini positivi si può dimostrare che vale il viceversa della Proposizione 12.10 sulla somma per incastro.

**Corollario 12.19** *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Tale serie è convergente se e solo se entrambe le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$ sono convergenti.*

**Osservazione 12.20** *Se abbiamo una serie a termini (definitivamente) negativi, in base alla Proposizione 12.9, essa avrà lo stesso comportamento della serie opposta (a termini positivi). Dunque le proprietà riportate in questo paragrafo, con le opportune modifiche, si riferiscono alle serie a segno (definitivamente) costante.*

Passiamo ora ad illustrare i principali criteri di convergenza.

**Criterio 12.21 (di confronto)** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali tali che (definitivamente)*

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

*Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.*

*Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge positivamente.*

*Infine, se poniamo*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k, \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k,$$

*risulta (definitivamente)*

$$r_n \leq R_n.$$

**Esempio 12.22** *Studiamo la* serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

*Ricordiamo che nel Capitolo sulle successioni abbiamo visto che*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

*Quindi, applicando i logaritmi ad ambo i membri, si deduce che*

$$n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$$

*ossia*

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

*Abbiamo già visto nell'Esempio 12.4 che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

*è divergente, quindi, per il Criterio del confronto, anche la serie armonica è divergente.*

**Esempio 12.23** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan^n n}{n 2^n}$$

*E' abbastanza facile osservare che, per ogni $n \geq 1$*

$$\frac{\arctan^n n}{n 2^n} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \tag{12.13}$$

*quindi, poichè*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

*è una serie geometrica con ragione* $\pi/4 < 1$*, per il Criterio di confronto, si conclude che anche la serie assegnata è convergente.*

*Ora passiamo a calcolare una somma approssimata, con errore inferiore a* $1/1000$*. Da (12.13), si deduce*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\arctan^k k}{k 2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^k = R_n,$$

*quindi è sufficiente imporre*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^k \leq \frac{1}{1000}.$$

*In altri termini, per la (12.3),*

$$\frac{1}{1-\pi/4} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{1000}$$

*Risolvendo questa disequazione rispetto ad* $n$ *otteniamo*

$$\frac{\log 4000 - \log(4-\pi)}{\log 4 - \log \pi} \leq n+1$$

*cioè*

$$33.\,966\,756\,432\,568\,7 \leq n.$$

*In conclusione una somma approssimata, entro il margine di errore prefissato, è data da* $s_{34}$*.*

**Criterio 12.24 (di confronto asintotico)** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni (definitivamente) strettamente positive e tali che*

$$\exists \lim_n \frac{a_n}{b_n} = M.$$

- *Se* $M \in (0, +\infty)$*, allora le serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *hanno lo stesso comportamento, ossia una converge (risp. diverge) se e solo se l'altra converge (risp. diverge).*
- *Se* $M = 0$ *e la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *converge, allora anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge.*

In maniera perfettamente coerente con la teoria svolta a proposito dei limiti di funzioni, possiamo dare la seguente definizione.

**Definizione 12.25** *Due successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *si dicono* asintoticamente equivalenti *se risulta*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

*In tal caso si scrive*

$$a_n \cong b_n.$$

Evidentemente per le successioni asintoticamente equivalenti valgono le stesse regole viste per le funzioni nel Capitolo ..... Tenuto conto di questa definizione possimo riportare una seconda versione del Criterio di confronto asintotico, quella utilizzata più di frequente.

**Criterio 12.26 (di confronto asintotico - seconda versione)** *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni (definitivamente) strettamente positive ed asintoticamente equivalenti. Allora le serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *hanno lo stesso comportamento, ossia una converge (risp. diverge) se e solo se l'altra converge (risp. diverge).*

**Esempio 12.27** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3}{3^n - 2}$$

*Risulta*

$$\frac{2^n}{3^n} \leq \frac{2^n + 3}{3^n - 2}$$

*quindi anche se sappiamo che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \tag{12.14}$$

*converge, il Criterio di confronto 12.21 non fornisce informazioni significative. Invece, utilizzando le consuete regole di equivalenza, si ha che*

$$\begin{aligned} 2^n + 3 &\cong 2^n \\ 3^n - 2 &\cong 3^n \end{aligned}$$

*e quindi*

$$\frac{2^n + 3}{3^n - 2} \cong \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

*Dunque la serie assegnata è convergente in quanto, in base al Criterio 12.26, ha lo stesso comportamento della serie (12.14).*

**Osservazione 12.28** *Si abbia una serie a termini positivi* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *convergente. Se risulta* $a_n \cong b_n$*, possiamo affermare che anche la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *è convergente, ma, in generale, è falso che le due somme coincidano.*

**Osservazione 12.29** *Per applicare i criteri di confronto dobbiamo stabilire a priori che le serie in questione sono a termini positivi, o almeno a segno costante. In realtà osserviamo che se* $a_n \cong b_n$*, allora le successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *hanno (definitivamente) lo stesso segno. Quindi, se stabiliamo un'equivalenza asintotica e conosciamo il segno della seconda successione, non è necessario studiare a priori il segno della successione di partenza.*

**Esempio 12.30** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log\cos\frac{1}{3^n}.$$

*Osserviamo subito che* $1/3^n \to 0$, *quindi applichiamo le equivalenze notevoli tra infinitesimi.*

*Ricordiamo che, per* $t \to 0$, *abbiamo*

$$\cos t - 1 \to 0$$

*e quindi*

$$\begin{aligned} \log\cos t &= \log(1+\cos t - 1) \cong \cos t - 1 \\ &= -(1-\cos t) \cong -\frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

*Pertanto risulta*

$$\log\cos\frac{1}{3^n} \cong -\frac{1}{2}\frac{1}{9^n}.$$

*Dunque la serie assegnata è a termini negativi ed avrà lo stesso comportamento della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{9^n}\right).$$

*Per la Proposizione 12.9 quest'ultima serie ha lo stesso comportamento della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9^n},$$

*la quale converge.*

### 12.2.1 Serie armonica generalizzata

I criteri precedenti consentono di ottenere informazioni su una serie assegnata confrontandola con un'altra di cui si conosca il carattere. In generale come serie di confronto si considerano la serie geometrica, come negli esempi precedenti, e la cosiddetta *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}. \tag{12.15}$$

**Proposizione 12.31** *La serie (12.15) converge se e solo se* $\alpha > 1$. *In tal caso, con il consueto significato dei simboli, risulta anche*

$$r_n < \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}. \tag{12.16}$$

Il caso $\alpha \leq 1$ si deduce dallo studio della serie armonica e dal Criterio di confronto. La dimostrazione della convergenza per $\alpha > 1$ è ottenibile in diversi modi. Noi rimandiamo la dimostrazione alla conclusione del corso, quando utilizzeremo il *Criterio dell'integrale.*

**Esempio 12.32** *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos n}{n^3}.$$

*E' abbastanza facile osservare che, per ogni* $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{1-\cos n}{n^3} \leq \frac{2}{n^3}.$$

*Osserviamo che, a meno del fattore* 2,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$$

*è una serie armonica generalizzata con esponente* 3 *quindi convergente; per il Criterio di confronto, si conclude che anche la serie assegnata è convergente.*

*Nello studio della convergenza sarebbe un grave errore scrivere*

$$1-\cos n \cong n^2/2.$$

*Infatti nello studio del carattere di una serie si considera* $n \to +\infty$*, mentre l'equivalenza*

$$1-\cos t \cong t^2/2$$

*sussiste per* $t \to 0$.

*Ora passiamo a calcolare una somma approssimata, con errore inferiore a* $1/1000$*. Quindi, in base alla (12.16), per ottenere*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1-\cos k}{k^3} < \frac{1}{1000}$$

*è sufficiente imporre*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} < \frac{1}{1000}, \tag{12.17}$$

*A sua volta per ottenere (12.17), in base alla (12.16), è sufficiente richiedere*

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1000}$$

*Quindi risolvendo quest'ultima disequazione rispetto ad* $n$ *otteniamo*

$$1000 < n^2$$

*cioè*

$$31.6227766016838 < n.$$

*In conclusione una somma approssimata, entro il margine di errore prefissato, è data da* $s_{32}$.

**Esempio 12.33** *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+1} \sin \frac{1}{n}.$$

*Per* $n \to +\infty$ *abbiamo* $n+1 \cong n$ *e quindi* $\sqrt{n+1} \cong \sqrt{n}$*; inoltre* $1/n \to 0$ *e quindi*

$$\sin \frac{1}{n} \cong \frac{1}{n}.$$

*In definitiva*

$$\sqrt{n+1}\sin\frac{1}{n} \cong \sqrt{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

*Dunque la serie assegnata ha lo stesso comportamento della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$

*cioè diverge.*

### 12.2.2 Stima del resto nel confronto asintotico

Assegnata una serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{12.18}$$

il primo suggerimento [sempre valido!] è quello di ottenere, tramite equivalenze, una serie più semplice da studiare.

In questo sottoparagrafo ci occupiamo di un caso particolare: supponiamo di aver ottenuto un'equivalenza del tipo

$$a_n \cong M\ b_n \tag{12.19}$$

dove $M \in (0, +\infty)$ e

$$b_n = q^n \qquad o \qquad b_n = 1/n^\alpha. \tag{12.20}$$

In questo caso lo studio della convergenza è concluso (grazie al Criterio di confronto asintotico 12.26).

- Se $a_n \cong M\ q^n$, la serie (12.18) è convergente se e solo se $q \in (0, 1)$.
- Se $a_n \cong M/n^\alpha$ , la serie (12.18) è convergente se e solo se $\alpha > 1$.

In caso di convergenza, è auspicabile calcolare una somma approssimata a meno di una prefissata soglia di errore $\epsilon > 0$. Indichiamo, come sempre, con $r_n$ il resto $n$-simo. Dunque cerchiamo $n$ (il più basso possibile) tale che $r_n < \epsilon$.

La *situazione ottimale* sarebbe la seguente: l'equivalenza (12.19) corrisponde ad una disuguaglianza globale, ossia, per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$a_n \leq M\ b_n$$

Utilizzando il Criterio di confronto, nei due casi (12.20), si deduce rispettivamente

$$r_n \leq M\frac{q^{n+1}}{1-q} \qquad o \qquad r_n \leq \frac{M}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \tag{12.21}$$

e quindi è sufficiente risolvere (rispetto ad $n$)

$$M\frac{q^{n+1}}{1-q} < \epsilon \qquad o \qquad \frac{M}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} < \epsilon. \tag{12.22}$$

Il resto del sottoparagrafo è dedicato al *caso non ottimale*: quando l'equivalenza (12.19) NON corrisponde ad una disuguaglianza.

Anzitutto osserviamo che (12.19) equivale a dire

$$\frac{a_n}{b_n} \to M \tag{12.23}$$

Sappiamo che le successioni convergenti sono limitate e pertanto siamo sicuri che sicuramente esisterà $\overline{M} > M$ tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \overline{M}$$

ossia

$$a_n \leq \overline{M}\ b_n. \tag{12.24}$$

Quindi abbiamo concluso che, anche se non siamo nel caso ottimale, a patto di cambiare costante, sarà sempre possibile ottenere disuguaglianze analoghe alle (12.21) e alle (12.22) e quindi si potrà procedere esattamente come sopra.

Dunque, in qualche modo, dobbiamo ottenere una costante $\overline{M}$ che realizza (12.24). Possiamo procedere per tentativi, all'ingrosso.

**Esempio 12.34** *Studiamo la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{11n^2 + 32n}{n^4 + 1}$$

*Osserviamo che*

$$\frac{11n^2 + 32n}{n^4 + 1} \cong \frac{11}{n^2}, \tag{12.25}$$

*(dunque la serie è convergente) tuttavia è falso che*

$$\frac{11n^2 + 32n}{n^4 + 1} \leq \frac{11}{n^2}.$$

*Si verifica facilmente che*

$$\frac{11n^4 + 32n^3}{n^4 + 1} = \frac{n^4(11 + 32/n)}{n^4(1 + 1/n^4)} = \frac{(11 + 32/n)}{(1 + 1/n^4)} \leq 43$$

*E pertanto*

$$\frac{11n^2 + 32n}{n^4 + 1} \leq \frac{43}{n^2}$$

*Da cui*

$$r_n \leq \frac{43}{n}$$

*Se vogliamo una somma approssimata a meno di* $1/1000$*, dobbiamo risolvere*

$$\frac{43}{n} < \frac{1}{1000}$$

*e otteniamo*

$$43000 < n. \tag{12.26}$$

Per ottenere qualcosa di meglio possiamo ritoccare al ribasso la costante $\overline{M}$ che realizza (12.24). Sarebbe sufficiente calcolare

$$\sup_n \frac{a_n}{b_n}$$

infatti l'estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti.

**Esempio 12.35 (riprende 12.34)** *Con le tecniche del calcolo differenziale (che vedremo in seguito) possiamo calcolare il massimo della funzione*

$$f(x) = \frac{11x^4 + 32x^3}{x^4 + 1}.$$

*Si scopre che, per ogni* $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{11x^4 + 32x^3}{x^4 + 1} \leq 27$$

*da cui*

$$\frac{11n^2 + 32n}{n^4 + 1} \leq \frac{27}{n^2}$$

*Pertanto si possono rifare tutti i calcoli svolti in precedenza e, per il calcolo della somma approssimata a meno di* $1/1000$, *otterremo*

$$n > 27000. \tag{12.27}$$

*Rispetto a (12.26) ci sembra un vantaggio consistente.*

Per migliorare ulteriormente il risultato possiamo fare un'altra considerazione. Da (12.23), applicando la definizione di limite, otteniamo che

$$\forall \widetilde{M} > M \quad \exists \tilde{n} \in \mathbf{N} \text{ (dipendente da } \widetilde{M}) \text{ t.c. } \forall n \geq \tilde{n} \quad \frac{a_n}{b_n} \leq \widetilde{M}.$$

ossia

$$\forall n \geq \tilde{n} \quad a_n \leq \widetilde{M} b_n$$

Dunque possiamo ripetere tutti i calcoli di sopra utilizzando $\widetilde{M}$, ma questa volta dovremo tener conto anche della limitazione aggiuntiva

$$n \geq \tilde{n}. \tag{12.28}$$

**Esempio 12.36 (riprende 12.34)** *Sappiamo che sussiste (12.25). Proviamo a vedere per quali* $n$ *risulta*

$$\frac{11n^2 + 32n}{n^4 + 1} \leq \frac{12}{n^2}. \tag{12.29}$$

*Abbastanza approssimativamente possiamo rispondere che (12.29) è verificata per*

$$n \geq 32$$

*Possiamo utilizzare (12.29) e rifare tutti i calcoli svolti in precedenza e, per il calcolo della somma approssimata a meno di* $1/1000$ *otterremo*

$$n > 12000. \tag{12.30}$$

*Rispetto a entrambe le stime precedenti (12.26) e (12.27) ci sembra un vantaggio molto consistente.*

Ovviamente, man mano che scegliamo $\widetilde{M}$ sempre più vicino ad $M$ otterremo la somma approssimata desiderata, con un valore di $n$ sempre più basso. Però il vincolo aggiuntivo (12.28) può dare origine a situazioni paradossali.

**Esempio 12.37 (riprende 12.34)** *Sappiamo che sussiste (12.25). Proviamo a vedere per quali $n$ risulta*

$$\frac{11n^2 + 32n}{n^4 + 1} \leq \frac{11.001}{n^2}. \tag{12.31}$$

*Abbastanza approssimativamente possiamo rispondere che (12.31) è verificata per*

$$n \geq 32000$$

*Evidentemente rispetto alla stima (12.30) andiamo molto peggio. Quindi la maggiorazione (12.31) non presenta alcuna utilità.*

*Consideriamo, inoltre, una generica serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

*tale che*

$$a_n \cong \frac{11}{n^2} \qquad \text{con} \qquad a_n \leq \frac{11}{n^2},$$

*dunque nel caso ottimale. Se, utilizzando la procedura illustrata all'inizio, volessimo stabilire per quali valori di $n$ il resto è inferiore a $1/1000$ otterremmo*

$$n > 11000 \stackrel{def}{=} n_{ott}.$$

*Dunque la stima (12.30) che avevamo ottenuto in precedenza è ragionevolmente vicina al valore di $n$ ottimale (e lo svolgimento dell'esempio può dirsi concluso).*

**Osservazione 12.38** *Nell'Esempio 12.34, che abbiamo lungamente sviluppato, avevamo un termine generale equivalente a $M/n^\alpha$. Dobbiamo rilevare che nell'altro caso ($a_n \cong M\ q^n$) tutta la discussione sulla scelta di un maggiorante globale $\overline{M} > M$ (o definivo $\widetilde{M} > M$) perde interesse. Infatti, come si potrebbe verificare facilmente, [a parità di $\epsilon > 0$ e $q \in (0, 1)$] il valore $n_0$ ottenuto da*

$$\overline{M}\frac{q^{n+1}}{1-q} < \epsilon$$

*risente "poco" di diverse scelte di $\overline{M}$.*

### 12.2.3 Criteri immediati

Per criteri immediati intendiamo criteri che non richiedano l'individuazione di una serie di confronto.

**Criterio 12.39 (del rapporto)** *Sia assegnata una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini strettamente positivi, cioè tale che $a_n > 0$. Esista*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell.$$

*Se $\ell < 1$, allora la serie è convergente.*

*Se $\ell > 1$, allora la serie è divergente.*

**Dimostrazione.** La dimostrazione si basa sul confronto con la serie geometrica. ■

**Osservazione 12.40** *Qualora il limite del rapporto sia uguale ad* 1 *il criterio non fornisce informazioni. Infatti per la serie armonica generalizzata il limite del rapporto è sempre* 1*, indipendentemente dal fatto che la serie converga o diverga.*

**Esempio 12.41** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n/2}}{2^n}.$$

*Si tratta di una serie a termini strettamente positivi ed applichiamo il Criterio del rapporto*

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^{n/2}} = \\
&= \lim_n \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n}} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_n \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\sqrt{n+1} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{e}(+\infty) = +\infty.
\end{aligned}$$

*Dunque la serie assegnata è divergente.*

Tipico l'uso del Criterio del rapporto nelle serie che coinvolgono i fattoriali (vedi Esempio **??**).

**Criterio 12.42 (degli infinitesimi)** *Sia assegnata una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *a termini positivi.*

*Se* $\lim_n n\, a_n = \ell > 0$*, allora la serie è divergente.*

*Se esiste* $p > 1$ *tale che* $\lim_n n^p a_n = \ell < +\infty$*, allora la serie è convergente.*

**Dimostrazione.** La dimostrazione si basa sul confronto con la serie armonica generalizzata. ■

A vantaggio del lettore enunciamo come corollario un caso particolare.

**Corollario 12.43** *Sia assegnata una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *a termini positivi. Se*

$$\lim_n n^2 a_n = \ell < +\infty,$$

*allora la serie è convergente.*

**Osservazione 12.44** *Lo studio di una serie a termini positivi tramite il criterio degli infinitesimi si può riassumere in una sorta di protocollo fisso.*

1. *Si calcola anzitutto*

$$\ell_1 = \lim_n n\, a_n$$

*Se* $\ell_1 > 0$ *la serie diverge, se* $\ell_1 = 0$ *si procede.*

2. *Si calcola*

$$\ell_2 = \lim_n n^2 \, a_n$$

*Se* $\ell_2 < +\infty$ *la serie converge, se* $\ell_2 = +\infty$ *si procede.*

3. *Si calcola*

$$\ell_3 = \lim_n n^{3/2} \, a_n$$

*Se* $\ell_3 < +\infty$ *la serie converge, se* $\ell_3 = +\infty$ *si procede.*

4. *Si calcola*

$$\ell_4 = \lim_n n^{5/4} \, a_n$$

*Se* $\ell_4 < +\infty$ *la serie converge, se* $\ell_4 = +\infty$ *si procede.*

5. ...

*Osserviamo che dal secondo passo in poi si considerano esponenti del tipo* $p_k = 1 + 1/2^{k-2}$. *Dobbiamo precisare che non è affatto garantito che il processo si arresti in un numero finito di passi.*

**Esempio 12.45** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\sqrt[3]{n} + 2)}{n+3}.$$

*Al primo passo si conclude che la serie diverge*

**Esempio 12.46** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(1+n^2)}{n^3}.$$

*Al secondo passo si conclude che la serie converge.*

Un altro esempio di applicazione del Criterio degli infinitesimi è riportato di seguito.

**Esempio 12.47** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3} \log n}.$$

*Calcoliamo anzitutto*

$$\begin{aligned}
\lim_n n \, a_n &= \lim_n \frac{n}{\sqrt{n^3+3} \log n} = \\
&= \lim_n \frac{1}{\sqrt{n} \log n} = 0.
\end{aligned}$$

*Quindi non possiamo trarre alcuna conclusione.*

*Calcoliamo*

$$\begin{aligned}\lim_n n^2\, a_n &= \lim_n \frac{n^2}{\sqrt{n^3+3}\log n} = \\ &= \lim_n \frac{\sqrt{n}}{\log n} = +\infty.\end{aligned}$$

*Quindi non possiamo trarre ancora alcuna conclusione.*

*Calcoliamo allora*

$$\begin{aligned}\lim_n n^{3/2}\, a_n &= \lim_n \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3+3}\log n} = \\ &= \lim_n \frac{1}{\log n} = 0.\end{aligned}$$

*Quindi si conclude che la serie assegnata converge.*

**Osservazione 12.48** *A questi due criteri immediati dobbiamo aggiungere il Criterio dell'integrale, che potremo enunciare solo alla fine del corso.*

*Va segnalato che questi tre criteri hanno un diverso grado di efficienza.*

- *Il Criterio degli infinitesimi è strettamente più efficiente del Criterio del rapporto, nel senso di seguito precisato:*
  - *il Criterio degli infinitesimi è risolutivo in tutti i casi in cui il Criterio del rapporto è risolutivo;*
  - *esistono serie per le quali il Criterio del rapporto non fornisce informazioni (serie armonica generalizzata), ma per le quali è sufficiente il Criterio degli infinitesimi è adeguato.*
- *Il Criterio dell'integrale consentirà di affrontare alcune serie che sfuggono al Criterio degli infinitesimi.*

A conclusione del paragrafo riportiamo un paio di esempi riepilogativi, in cui si mostra che la scelta di un approccio al posto di un altro può essere talvolta solo un fatto di gusti.

**Esempio 12.49** *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \tan\frac{1}{5^n}$$

*In tutti gli approcci dovremo tener presente che*

$$\frac{1}{5^n} \to 0$$

*e quindi*

$$\tan\frac{1}{5^n} \cong \frac{1}{5^n}.$$

*Metodo 1. Applichiamo il Corollario 12.43*

$$\lim_n n^2\cdot n^2 \tan\frac{1}{5^n} = \lim_n \frac{n^4}{5^n} = 0$$

*(ricordiamo che si tratta di un limite notevole). Dunque la serie converge.*

*Metodo 2. Applichiamo il Criterio del rapporto*

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{(n+1)^2 \tan \frac{1}{5^{n+1}}}{n^2 \tan \frac{1}{5^n}} &= \lim_n \frac{(n+1)^2 \frac{1}{5^{n+1}}}{n^2 \frac{1}{5^n}} = \\ &= \lim_n \frac{(n+1)^2\, 5^n}{n^2\, 5^{n+1}} = \frac{1}{5} < 1\end{aligned}$$

*dunque la serie converge.*

*Metodo 3. Osserviamo che*

$$n^2 \tan \frac{1}{5^n} \cong \frac{n^2}{5^n},$$

*quindi la serie assegnata ha lo stesso comportamento della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}.$$

*A questa serie applichiamo il Criterio del rapporto e, come sopra, troviamo che la serie assegnata converge.*

**Esempio 12.50** *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n + 3}{n! + 3}$$

*Anzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi: il denominatore è positivo, riguardo il numeratore osserviamo che*

$$2 \leq \cos n + 3 \leq 4. \tag{12.32}$$

*Poiché $n! \to +\infty$ abbiamo*

$$n! + 3 \cong n!$$

*e quindi*

$$\frac{\cos n + 3}{n! + 3} \cong \frac{\cos n + 3}{n!}.$$

*Pertanto, per il Criterio 12.26 la serie assegnata avrà lo stesso comportamento della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n + 3}{n!} \tag{12.33}$$

*Per studiare la (12.33) abbiamo diverse possibilità. La scelta più ovvia è quella di utilizzare il Criterio di confronto 12.21. Infatti abbiamo*

$$\frac{\cos n + 3}{n!} \leq \frac{4}{n!}.$$

*Poiché la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{n!}$$

*converge (Criterio del rapporto), si conclude che anche la serie (12.33) converge.*

*Volendo potremmo applicare il Criterio del rapporto direttamente alla (12.33). Si deve calcolare il limite di*

$$\frac{\cos(n+1)+3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cos n + 3} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\cos(n+1)+3}{\cos n + 3}.$$

*Dalla (12.32) si deduce*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\cos(n+1)+3}{\cos n + 3} \leq 2,$$

*e pertanto*

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\cos(n+1)+3}{\cos n + 3} = 0.$$

*Anche in questo modo si perviene alla conclusione che la serie (12.33) converge.*

## 12.3 Serie a segno non costante

Ora vogliamo studiare le serie a segno non (definitivamente) costante, partendo da una situazione abbastanza semplice.

### 12.3.1 Serie a segno alterno

Occupiamoci di serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n \tag{12.34}$$

con $\alpha_n \geq 0$ (definitivamente), in modo che il termine generale $a_n = (-1)^n \alpha_n$ risulti (definitivamente) a segno alterno.

Sussiste il seguente criterio di convergenza.

**Criterio 12.51 (di Leibnitz)** *Se $\alpha_n > 0$ e inoltre*

**a)** $\lim_n \alpha_n = 0$;

**b)** $\{\alpha_n\}$ *è strettamente decrescente;*

*allora la serie (12.34) è convergente.*

*Inoltre, denotate con $s_n$ ed $S$ rispettivamente le somme parziali e la somma della serie, si ha*

$$|S - s_n| < \alpha_{n+1}. \tag{12.35}$$

**Osservazione 12.52** *Assegnata una serie scritta nella forma (12.34), la condizione **a)** è necessaria per la convergenza. Infatti se (12.34) converge, per la Proposizione 12.5, si ha $(-1)^n \alpha_n \to 0$. E quindi (Osservazione ...) si ha*

$$\alpha_n = |(-1)^n \alpha_n| \to 0.$$

*Quindi se la condizione **a)** non è verificata, la serie (12.34) non converge, dunque o diverge o non è regolare.*

**Esempio 12.53** *La* serie armonica a segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

*soddisfa le condizioni del Criterio di Leibnitz quindi è convergente.*

*Se vogliamo calcolare un valore approssimato della somma con errore inferiore a* $1/1000$ *imponiamo*

$$\alpha_{n+1} \leq 1/1000$$

*ossia*

$$\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{1000}$$

*da cui ricaviamo*

$$998 \leq n.$$

*Pertanto* $s_{998}$ *rappresenta una somma approssimata entro il margine di errore che abbiamo prefissato, ossia*

$$|S - s_{998}| < 1/1000. \tag{12.36}$$

*Con l'ausilio di un calcolatore otteniamo*

$$s_{998} = 0.693\,647\,431\ldots$$

*Utilizzando le serie di Taylor (vedi Capitolo ...), si può dimostrare che la somma (esatta) della serie è pari a* $\log 2 = 0.693\,147\,181\ldots$ *in perfetto accordo con la (12.36).*

**Osservazione 12.54** *La serie armonica a segno alterno si presta a due interessanti osservazioni.*

*Osserviamo che*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} \alpha_{2n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty \\
\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n+1} \alpha_{2n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2(n+1)} = -\infty
\end{aligned}$$

*Quindi una serie convergente può essere ottenuta come somma per incastro di due serie divergenti (con segno opposto).*

*Per una volta (e sarà l'unica) scriviamo la serie come una somma.*

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots \tag{12.37}$$

*Se moltiplichiamo i termini della serie per* $1/2$ *e otteniamo*

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} - \frac{1}{20} + \ldots \tag{12.38}$$

*Nella serie (12.38) la somma non cambia se intercaliamo una successione di zeri*

$$\frac{S}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \ldots \tag{12.39}$$

*Ora sommiamo i termini della serie (12.37) e (12.39) e otteniamo*

$$\frac{3}{2}S = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \dots \tag{12.40}$$

*Nella serie (12.40), eliminati gli zeri, la somma evidentemente non cambia e si ottiene*

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \dots \tag{12.41}$$

*A secondo membro della (12.37) e della (12.41) compaiono esattamente gli stessi termini, con un ordinamento diverso. Dunque osserviamo che, dopo un riordinamento dei termini, la somma della serie è cambiata.*

**Esempio 12.55** *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2n^2 - 1}.$$

*Posto*

$$\alpha_n = \frac{n}{2n^2 - 1},$$

*è immediato verificare che $\alpha_n \geq 0$ e che*

$$\lim_n \alpha_n = 0.$$

*Andiamo a studiare la monotonia della successione $\{\alpha_n\}$ applicando direttamente la definizione*

$$\alpha_{n+1} < \alpha_n.$$

*Si ottiene la disequazione*

$$\frac{n+1}{2(n+1)^2 - 1} < \frac{n}{2n^2 - 1}$$

*che si riduce a*

$$0 < 2n^2 + 2n + 1$$

*verificata per ogni $n \in \mathbf{N}$. Dunque la serie converge.*

*Se vogliamo calcolare un valore approssimato della somma con errore inferiore a $1/1000$ imponiamo*

$$\alpha_{n+1} \leq 1/1000,$$

*ossia*

$$\frac{n+1}{2(n+1)^2 - 1} \leq \frac{1}{1000},$$

*che si riduce a*

$$0 < 2n^2 - 996n + 999.$$

*La soluzione è data da*

$$496.994\,959\,626\,199 < n.$$

*Pertanto $s_{497}$ rappresenta una somma approssimata entro il margine di errore che abbiamo prefissato.*

**Osservazione 12.56** *Assegnata una successione $\alpha_n > 0$, osserviamo che le condizioni **a)** e **b)** sono rispettivamente equivalenti a*

**a$_1$)** $\lim_n 1/\alpha_n = +\infty$*;*

**b$_1$)** $\{1/\alpha_n\}$ *è strettamente crescente.*

**Esempio 12.57** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 4\arctan^2 n}.$$

*Abbiamo*

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n} + 4\arctan^2 n}$$

*e quindi*

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{n} + 4\arctan^2 n.$$

*In questo caso la condizione $\alpha_n > 0$ è verificata per ogni $n \geq 1$. La condizione **a$_1$)** è soddisfatta. Infine dobbiamo verificare **b$_1$)**. In base alla definizione deve risultare*

$$\sqrt{n} + 4\arctan^2 n < \sqrt{n+1} + 4\arctan^2 (n+1)\,.$$

*Anche questa condizione è soddisfatta, in quanto si ottiene sommando membro a membro le seguenti disuguaglianze*

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{n} & < & \sqrt{n+1}; \\ 4\arctan^2 n & < & 4\arctan^2 (n+1)\,. \end{array}$$

*Se vogliamo calcolare un valore approssimato della somma con errore inferiore a $1/1000$ imponiamo*

$$\alpha_{n+1} \leq 1/1000$$

*ossia*

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + 4\arctan^2 (n+1)} \leq 1/1000$$

*che, a sua volta, equivale a*

$$1000 \leq \sqrt{n+1} + 4\arctan^2 (n+1)\,. \tag{12.42}$$

*Per ottenere la (12.42) è sufficiente imporre*

$$1000 \leq \sqrt{n+1}$$

*ossia*

$$999999 \leq n.$$

*Si conclude che una somma approssimata entro il margine di errore prefissato è data da $s_{999999}$. In realtà con l'ausilio di una calcolatrice, tenendo conto del secondo addendo $4\arctan^2 (n+1)$, possiamo stabilire che è sufficiente considerare $s_{980359}$.*

**Osservazione 12.58** *Assegnata una successione $\{\alpha_n\}$ infinitesima, per garantire la convergenza della serie (12.34) le altre due ipotesi (positività e monotonia di $\{\alpha_n\}$) sono sufficienti in forma definitiva.*

*Se esiste $\nu_0$ tale che $\{\alpha_n\}$ è decrescente per ogni $n \geq \nu_0$, allora la stima dell'errore (12.35) vale a partire dall'indice $\nu_0$.*

*Analogamente assegnata una successione $\alpha_n \neq 0$ tale che $\{1/\alpha_n\}$ è divergente positivamente, se esiste $\nu_0$ tale che $\{1/\alpha_n\}$ è crescente per ogni $n \geq \nu_0$, allora esiste $\nu_1 \geq \nu_0$ tale che $1/\alpha_n > 0$ per ogni $n \geq \nu_1$. Allora la stima dell'errore (12.35) vale a partire dall'indice $\nu_1$.*

**Esempio 12.59** *Studiamo la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n - 150n}. \tag{12.43}$$

*Abbiamo*

$$\alpha_n = \frac{1}{3^n - 150n}.$$

*Il segno di $\alpha_n$ non è noto a priori quindi studiamo*

$$\frac{1}{\alpha_n} = 3^n - 150n.$$

*La condizione **a**$_1$) è verificata, infatti*

$$\lim_n (3^n - 150n) = \lim_n 3^n \left(1 - \frac{150n}{3^n}\right) = +\infty.$$

*Riguardo **b**$_1$), applichiamo la definizione ed osserviamo che*

$$3^n - 150n < 3^{n+1} - 150(n+1)$$

*si riduce a*

$$75 < 3^n,$$

*verificata per ogni $n \geq \log 75/\log 3 = 3.929\,947\,04$, ossia $n \geq 4$.*

*Ora dobbiamo invidiare un indice $\nu \geq 4$ tale che $3^v - 150v > 0$. Con l'ausilio di una calcolatrice, procedendo per tentativi, stabiliamo che*

$$\begin{aligned} 3^6 - 150 \cdot 6 &< 0 \\ 3^7 - 150 \cdot 7 &= 1037 > 0 \end{aligned}$$

*Se vogliamo calcolare un valore approssimato della somma con errore inferiore a $1/1000$ imponiamo*

$$\alpha_{n+1} \leq 1/1000. \tag{12.44}$$

*con $n \geq 7$. In base al ragionamento precedente, sappiamo che*

$$\alpha_8 < \alpha_7 = 1/1037$$

*quindi concludiamo che la disuguaglianza (12.44) è verificata per $n = 7$. Dunque una somma approssimata entro il margine di errore prefissato è data da $s_7$.*

**Osservazione 12.60** *Per verificare la condizioni di monotonia (**b**) o **b**$_1$)), qualora sia difficile applicare la definizione, possiamo studiare la monotonia di una funzione (di variabile reale)*

$$f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

*tale che $f(n) = \alpha_n$ (risp. $f(n) = 1/\alpha_n$). Il passaggio alla funzione associata alla successione ci consentirà di utilizzare alcuni teoremi del calcolo differenziale.*

**Esempio 12.61** *Consideriamo la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \pi\sqrt[3]{n}}$$

*Dopo aver osservato che la serie è ben definita (perchè?), avremo*

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{n} - \pi\sqrt[3]{n}.$$

*Quindi potremo calcolare*

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{1}{\alpha_n} &= \lim_n \left(\sqrt{n} - \pi\sqrt[3]{n}\right) = \lim_n \sqrt{n}\left(1 - \frac{\pi\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \lim_n \sqrt{n}\left(1 - \frac{\pi}{\sqrt[6]{n}}\right) = +\infty\end{aligned}$$

*La studio della monotonia di $1/\alpha_n$ è tutt'altro che scontato.*

*Al contrario con il calcolo differenziale sarà abbastanza semplice stabilire che la funzione associata*

$$f(x) = \sqrt{x} - \pi\sqrt[3]{x}$$

*è strettamente crescente per $x \geq (2\pi/3)^6$ e assume valori positivi per $x \geq \pi^6$. Dunque potremo concludere che la serie è convergente.*

*Risolvendo per tentativi (abbastanza difficoltosi)*

$$\alpha_{n+1} < \frac{1}{1000}$$

*ossia*

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \pi\sqrt[3]{n+1}} < \frac{1}{1000},$$

*si conclude che una somma approssimata entro il margine di errore prefissato è data da $s_{1937000}$ (il lettore incuriosito potrà cercare di migliorare questa stima!).*

Se si rinuncia al calcolo della somma approssimata, per il quale serve conoscere l'indice iniziale da cui è verificata la condizione di monotonia, può essere utile il seguente risultato.

**Lemma 12.62** *Assegnata una successione $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, se risulta*

$$\lim_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1 \tag{12.45}$$

*allora la successione è infinitesima e definitivamente strettamente decrescente.*

**Esempio 12.63** *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+1}{e^n - n^4} \tag{12.46}$$

*Osserviamo che la serie è ben definita in quanto, per ogni* $n \geq 0$

$$e^n - n^4 \neq 0$$

*infatti* $e^n$ *non è intero mentre* $n^4$ *è intero.*

*Abbiamo*

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{e^n - n^4}{n+1}$$

*Da*

$$\lim_n \frac{1}{\alpha_n} = \lim_n \frac{e^n - n^4}{n+1} = \lim_n \frac{e^n}{n+1}\left(1 - \frac{n^4}{e^n}\right) = +\infty$$

*consegue che definitivamente* $\alpha_n > 0$*. Ora calcoliamo*

$$\lim_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_n \frac{n+1}{n+2}\frac{e^n - n^4}{e^{n+1} - (n+1)^4} = \lim_n \frac{e^n(1 - n^4/e^n)}{e^{n+1}(1 - (n+1)^4/e^n)} = \frac{1}{e} < 1.$$

*Dunque, in base alla proposizione precedente, la serie assegnata è convergente.*

**Osservazione 12.64** *La condizione (12.45) assicura non solo la convergenza ma anche la assoluta convergenza, di cui parleremo nel sottoparagrafo seguente (vedi Osservazione 12.80).*

**Osservazione 12.65** *Un errore abbastanza frequente è quello di pensare di poter stabilire la monotonia tramite equivalenza asintotica. Ad esempio consideriamo la successione*

$$\alpha_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2}.$$

*Abbiamo*

$$\alpha_n \cong \frac{1}{n}$$

*tuttavia è facile verificare che* $\{\alpha_n\}$ *non è strettamente decrescente.*

**Osservazione 12.66** *Assegnata la serie (12.34) con* $\alpha_n > 0$*, se è verificata la condizione **a)** ma non la condizione **b)**, nulla si può dire a priori sul carattere della serie stessa.*

*In alcuni casi si riesce a dire qualcosa con la Proposizione sulle somme per incastro o con il Criterio di assoluta convergenza che esporremo nel sottoparagrafo seguente. Ad esempio la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3 + (-1)^n)^n}$$

*è convergente, con somma pari a* $2/5$*. Invece la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2 + (-1)^n)^n}$$

*diverge negativamente.*

### 12.3.2 Assoluta convergenza

Se i segni dei termini $a_n$ sono disposti in modo non ordinato, il principale criterio di convergenza è enunciato di seguito.

**Criterio 12.67** *Si abbia una generica serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{12.47}$$

*Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \tag{12.48}$$

*è convergente, allora la serie (12.47) è convergente e risulta*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,.$$

**Osservazione 12.68** *Non vale il viceversa, nel senso che, se converge la serie (12.47), non è detto che debba convergere anche la serie (12.48); si consideri, ad esempio, la cosiddetta serie armonica a segno alterno*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

**Esempio 12.69** *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2\cos n^2}{1+2n^2}.$$

*Il segno dei termini della serie non presenta alcuna regolarità, quindi studiamo la serie con il Criterio 12.67 e con opportune maggiorazioni.*

*Abbiamo*

$$\begin{aligned}\left|\frac{1+2\cos n^2}{1+2n^2}\right| &= \frac{\left|1+2\cos n^2\right|}{1+2n^2} \leq \\ &\leq \frac{1+2\left|\cos n^2\right|}{2n^2} \leq \frac{3}{2n^2}.\end{aligned}$$

*La serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2n^2}$$

*è convergente, quindi per confronto la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{1+2\cos n^2}{1+2n^2}\right|$$

*è convergente. Dunque la serie assegnata è convergente.*

**Esercizio 12.70** *Vogliamo studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+3\sin n}{n^2-123}.$$

*Il segno dei termini della serie non presenta alcuna regolarità, quindi studiamo la serie con il Criterio 12.67.*

*Abbiamo*

$$\left|\frac{1+3\sin n}{n^2-123}\right| \leq \frac{4}{|n^2-123|} \tag{12.49}$$

$$\frac{4}{|n^2-123|} \cong \frac{4}{n^2} \tag{12.50}$$

*La serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}$$

*è convergente.*

*Grazie alla (12.50) e il Criterio di confronto asintotico, otteniamo che la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{|n^2-123|}$$

*Grazie alla (12.49) e il Criterio di confronto, otteniamo che la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{1+3\sin n}{n^2-123}\right|$$

*Concludiamo che la serie assegnata è convergente.*

Diamo ora una definizione.

**Definizione 12.71** *Una serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *si dice* assolutamente convergente *se è convergente la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

**Osservazione 12.72** *Alla luce di questa definizione il Criterio 12.67 può essere enunciato al modo seguente:* ogni serie assolutamente convergente è convergente. *Il medesimo criterio in un certo senso giustifica la definizione: non avrebbe molto senso chiamare "assolutamente convergente" una serie che non fosse convergente.*

**Osservazione 12.73** *In base allo stesso Criterio 12.67 e del controesempio che lo segue, possiamo affermare che le serie assolutamente convergenti costituiscono un sottoinsieme proprio delle serie convergenti.*

*Ovviamente per le serie a termini positivi (o a segno definitivamente costante) la nozione di assoluta convergenza coincide con la convergenza.*

*Ciò che rende significativa la Definizione 12.71 è che solo le serie assolutamente convergenti godono di particolari proprietà. Ad esempio vale la proprietà commutativa, opportunamente formulata; quindi sono esclusi i fenomeni che abbiamo presentato nell'Osservazione 12.54.*

**Osservazione 12.74** *Le serie (a segno non costante) convergenti ma non assolutamente convergenti (come la serie armonica a segno alterno), talvolta, vengono dette* semplicemente convergenti.

Vogliamo sottolineare che la serie (12.48) è a termini positivi, quindi tutti i criteri visti in precedenza, opportunamente trascritti, diventano criteri di assoluta convergenza. Riportiamo i due criteri immediati.

**Proposizione 12.75** *Se la serie (12.47) è a termini non nulli, cioè $a_n \neq 0$, e risulta*

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

*allora la medesima serie (12.47) è assolutamente convergente.*

**Esempio 12.76** *Al variare di $x \in \mathbf{R}$ consideriamo la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{12.51}$$

*Per $x \geq 0$ si tratta di una serie a termini positivi, mentre per $x < 0$ è a segno alterno. Possiamo unificare la trattazione*

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_n \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \left| \frac{n!}{x^n} \right| = \\ &= \lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

*Dunque la serie assegnata è assolutamente convergente per ogni valore di $x$.*

*Si può dimostrare che*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

*Per questa ragione la serie (12.51) prende il nome di* serie esponenziale.

**Proposizione 12.77** *Se esiste $\alpha > 1$ tale che $\lim_n n^\alpha |a_n| = \ell < +\infty$, allora la serie (12.47) è assolutamente convergente.*

Concludiamo con qualche osservazione sulla assoluta convergenza delle serie di tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n \qquad \text{con } \alpha_n > 0. \tag{12.52}$$

Come si diceva nell'Osservazione 12.52, abbiamo

$$|(-1)^n \alpha_n| = \alpha_n. \tag{12.53}$$

Pertanto risulta quanto segue.

**Proposizione 12.78** *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

**a)** *la serie (12.52) è assolutamente convergente;*

**b)** *la serie (a termini positivi)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ *è convergente;*

**c)** *entrambe le serie (a termini positivi)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n}$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}$ *sono convergenti.*

**Esempio 12.79** *La serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3+(-1)^n)^n}$$

*(che non verifica la **b)** del Criterio 12.51) non solo è convergente ma è anche assolutamente convergente.*

**Osservazione 12.80** *Grazie al Lemma 12.62, la condizione*

$$\lim_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$$

*assicura che sia applicabile il Criterio di Leibnitz. Tenuto conto della Proposizione 12.75 e della (12.53), la stessa condizione ci assicura che la serie (12.52) è anche assolutamente convergente.*

**Esempio 12.81** *La serie (12.43) e (12.46) sono anche assolutamente convergenti.*

## 12.4 Serie di potenze

**Definizione 12.82** *Si definisce* serie di potenze *di centro* $x_0 \in \mathbf{R}$ *una serie di tipo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{12.54}$$

*essendo* $x \in \mathbf{R}$, $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$.

Se consideriamo in caso più semplice, con il centro $x_0 = 0$, la serie di potenze si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

e costituisce, in un certo senso, una generalizzazione della nozione di polinomio.

Riguardo la serie (12.54) studieremo un solo problema, il più semplice: determinare per quali $x$ la serie converge. Tali $x$ costituiranno un insieme che chiameremo *insieme di convergenza* $I_C$. Ammesso che la serie converga, la somma della serie dipende dalla variabile $x$, per cui ha senso parlare di *funzione somma* $S(x)$ definita su $I_C$.

**Esempio 12.83** *L'esempio banale di serie di potenze, con* $x_0 = 0$ *e* $a_n = 1$, *non è altro che la serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n. \tag{12.55}$$

*Pertanto l'insieme di convergenza è dato da* $(-1,1)$ *e che la funzione somma è data da*

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

*Anche il caso* $a_n = L^n$ *(con* $L \neq 0$*),*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L^n (x - x_0)^n ,$$

*con un semplice cambio di variabili, è riconducibile ad un serie geometrica. Si scopre che l'insieme di convergenza è dato da* $\left(x_0 - \frac{1}{|L|}, x_0 + \frac{1}{|L|}\right)$ *e che la somma è data da* $\frac{1}{1-L(x-x_0)}$.

**Esempio 12.84** *Possiamo riconoscere che anche la serie esponenziale (Esempio 12.76)*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

*ha la struttura di una serie di potenze, essendo* $x_0 = 0$ *e* $a_n = 1/n!$. *Sappiamo che questa serie è (assolutamente) convergente per ogni* $x \in \mathbf{R}$ *.*

Una prima osservazione è banale: l'insieme di convergenza di (12.54) non è mai vuoto. Risulta infatti

$$x_0 \in I_C \qquad \text{e} \qquad S(x_0) = a_0.$$

Un'informazione più precisa viene dal teorema che segue.

**Teorema 12.85 (sull'insieme di convergenza)** *Assegnata un'arbitraria serie di potenze (12.54) si presenta uno (e ovviamente soltanto uno) dei seguenti tre casi*

**i)** *la serie (12.54) converge assolutamente per ogni* $x \in \mathbf{R}$.

**ii)** *esiste* $r > 0$ *tale che la serie (12.54) converge assolutamente per ogni* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$*, non converge se* $|x - x_0| > r$.

**iii)** *la serie (12.54) converge solo per* $x = x_0$.

**Osservazione 12.86** *Il numero* $r > 0$ *previsto nel caso* ***ii)*** *prende il nome di* raggio di convergenza*. Per analogia, nel caso* ***i)*** *si dice che il raggio di convergenza è* $+\infty$*; nel caso* ***iii)*** *si dice che il raggio di convergenza è* $0$.

È evidente che il Teorema 12.85, nella formulazione che abbiamo riportato, non è di grande utilità. È solo un teorema di classificazione: nel senso che una qualsiasi serie di potenze si comporta in uno dei tre modi riportato sopra. Ed è anche un teorema di struttura: l'insieme di convergenza risulta sempre un intervallo e si esclude, ad esempio, che possa essere una "semiretta".

In realtà serve un Teorema più preciso che, a partire dalla successione $\{a_n\}$, individui direttamente in quale caso dei tre ricade la serie (12.54) e fornisca il raggio di convergenza. Un siffatto teorema esiste e prende il nome di Teorema di Cauchy-Hadamard. Purtroppo la formula per la determinazione del raggio di convergenza (valida per tutte le possibili serie di potenze) richiede nozioni che esulano dal questo corso. Riportiamo di seguito un teorema per il calcolo del raggio di convergenza che funziona in presenza di ipotesi aggiuntive.

**Teorema 12.87 (di d'Alambert)** *Supponiamo che, almeno definitivamente,*

$$a_n \neq 0 \tag{12.56}$$

*e che esista*

$$L = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty]. \tag{12.57}$$

*Allora si distinguono tre casi.*

**a)** *Se $L = 0$, allora siamo nel caso **i):** la serie (12.54) converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$.*

**b)** *Se $L \in (0, +\infty)$, allora siamo nel caso **ii):** il raggio di convergenza è dato da $r = 1/L$.*

**c)** *Se $L = +\infty$, allora siamo nel caso **iii):** la serie (12.54) converge solo per $x = x_0$.*

**Osservazione 12.88** *In sintesi il Teorema di D'Alambert ci dice che il raggio di convergenza è l'*"inverso" *di $L$.*

*Se ci troviamo nel caso **b)**, sappiamo che la serie (12.54) converge assolutamente per ogni $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, non converge se $|x - x_0| > r$; per determinare completamente l'insieme di convergenza, rimane da studiare il comportamento della serie in soli due punti: $x = x_0 \pm r$.*

**Esempio 12.89** *Determiniamo l'intervallo di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n} (x-3)^n \tag{12.58}$$

*Abbiamo $x_0 = 3$ e*

$$a_n = \frac{n^2+1}{2^n}$$

*quindi possiamo applicare il Teorema di D'Alambert*

$$L = \lim_n \frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}$$

*Quindi siamo nel caso b). Abbiamo $r = 2$; la serie converge assolutamente in*

$$(x_0 - r, x_0 + r) = (1, 5).$$

*Rimane da testare quello che succede ai due estremi. Sostituiamo $x = 1$ nella (12.58) e otteniamo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n} (1-3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(n^2+1\right)$$

*che è una serie non convergente. Analogamente se sostituiamo $x = 5$ nella (12.58) e otteniamo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n} (5-3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+1\right)$$

*che è una serie divergente. Quindi l'intervallo di convergenza della serie è dato da $(1, 5)$.*

**Esempio 12.90** *Determiniamo l'intervallo di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n}} (x-2)^n \tag{12.59}$$

*Abbiamo* $x_0 = 2$ *e*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

*quindi possiamo applicare il Teorema di D'Alambert*

$$L = \lim_n \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{3^n \sqrt{n}}{(-1)^n} \right| = \frac{1}{3}$$

*Quindi siamo ancora nel caso b). Abbiamo* $r = 3$*; la serie converge assolutamente in*

$$(x_0 - r, x_0 + r) = (-1, 5).$$

*Rimane da testare quello che succede ai due estremi. Sostituiamo* $x = -1$ *nella (12.59) e otteniamo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n}} (-1-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

*che è una serie divergente. Analogamente se sostituiamo* $x = 5$ *nella (12.59) e otteniamo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n}} (5-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

*che è una serie convergente (per il Criterio di Leibnitz). Quindi l'intervallo di convergenza della serie è dato da* $(-1, 5]$*.*

## 12.5 Funzioni generatrici

Assegnata una successione $\{a_n\}$ è sempre possibile considerare la serie di potenze associata

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{12.60}$$

Supponiamo che tale serie di potenze abbia raggio di convergenza $r \in (0, +\infty]$ (in sostanza stiamo escludendo il caso c), degenere, per il quale si avrebbe $r = 0$). Nell'intervallo di convergenza di (12.60) rimane definita una funzione somma $F(x)$. Questa funzione prende il nome di *funzione generatrice della successione* $\{a_n\}$.

**Esempio 12.91** *La funzione generatrice della successione costante* $a_n = 1$ *è data da* $1/(1-x)$*.*

*La funzione generatrice della progressione geometrica* $a_n = q^n$ *è data da* $1/(1-qx)$

Presentiamo ora una procedura abbastanza frequente nelle applicazioni. Indicata con $F(x)$ la funzione generatrice della successione $\{a_n\}$, ossia

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

vogliamo scrivere

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} x^n$$

in termini di $F(x)$.

Procediamo formalmente

$$\begin{aligned} x^k G(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} x^{n+k} = \sum_{m=k}^{+\infty} a_m x^m = \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m - \sum_{m=0}^{k-1} a_m x^m = F(x) - \sum_{m=0}^{k-1} a_m x^m \end{aligned}$$

e dunque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} x^n = G(x) = \frac{1}{x^k}\left(F(x) - \sum_{m=0}^{k-1} a_m x^m\right) \tag{12.61}$$

**Esempio 12.92** *Consideriamo la* successione di Fibonacci*, definita da*

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{12.62}$$

$$a_0 = 0 \tag{12.63}$$

$$a_1 = 1 \tag{12.64}$$

*Vogliamo scrivere la corrispondente funzione generatrice. Vediamo che è possibile farlo direttamente dalla definizione per ricorrenza; anzi dalla funzione generatrice sarà possibile calcolare esplicitamente i termini $\{a_n\}$. Indichiamo con $F(x)$ tale funzione*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

*Nell'equazione (12.62) moltiplichiamo ambo i membri per $x^n$ e otteniamo*

$$a_{n+2}x^n = a_{n+1}x^n + a_n x^n.$$

*Ora "sommiamo su tutti gli n" e otteniamo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \tag{12.65}$$

*Ora è venuto il momento di applicare la formula (12.61), tenendo conto di (12.63)-(12.64):*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^n &= \frac{1}{x^2}\left[F(x) - (a_0 + a_1 x)\right] = \frac{1}{x^2}\left[F(x) - x\right], \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n &= \frac{1}{x}\left[F(x) - a_0\right] = \frac{1}{x}F(x). \end{aligned}$$

*Sostituiamo in (12.65) e otteniamo*

$$\frac{1}{x^2}\left[F(x)-x\right]=\frac{1}{x}F(x)+F(x),$$

*da cui*

$$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

**Esercizio 12.93** *Calcolare la funzione generatrice della successione definita per ricorrenza da*

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1}+2a_n \\ a_0 &= 6 \\ a_1 &= -3 \end{aligned}$$

**Esercizio 12.94** *Calcolare la funzione generatrice della successione definita per ricorrenza da*

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1}+2a_n+6 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

### 12.5.1 Dalla funzione generatrice alla successione

Si può dimostrare che la funzione generatrice individua univocamente la successione $\{a_n\}$, nel senso che due successioni hanno la stessa funzione generatrice se e solo se tutti i termini della successione sono uguali [purché la funzione generatrice sia definita su intervallo non degenere].

Quindi dalla successione si ottiene la funzione generatrice, dalla funzione generatrice si può ricostruire la successione.

**Osservazione 12.95** *Che alla successione sia univocamente associata una funzione generatrice costituisce una generalizzazione di un fatto ben noto: due polinomi [intesi come successione finita dei coefficienti] coincidono se e solo coincidono le corrispondenti funzioni polinomiali. Quindi parleremo di* principio di identità delle serie di potenze, *così come parlavamo del principio di identità dei polinomi.*

**Esempio 12.96** *Assegnata la funzione $A/(x+B)$, si riconosce che si tratta della funzione generatrice della successione $a_n=A(-1)^n/B^{n+1}$*

**Esercizio 12.97** *Determinare la successione $\{a_n\}$ la cui funzione generatrice è data da*

$$F(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}.$$

Illustriamo ora una procedura valida in generale attraverso un esempio particolarmente interessante. Riprendiamo la funzione generatrice dei numeri di Fibonacci:

$$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{-x}{x^2+x-1}$$

Decomponiamo il denominatore

$$x^2 + x - 1 = (x - q_1)(x - q_2)$$

dove

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ q_2 &= \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= \sqrt{5} \\ q_1 q_2 &= -1 \end{aligned}$$

Decomponiamo in fratti semplici

$$\frac{-x}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-q_1} + \frac{B}{x-q_2}$$

Procedendo al solito modo si ottiene

$$\begin{aligned} A &= -\frac{q_1}{q_1-q_2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ B &= \frac{q_2}{q_1-q_2} \end{aligned}$$

Pertanto in definitiva

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{-x}{x^2+x-1} \\ &= \frac{1}{q_1-q_2}\left(\frac{-q_1}{x-q_1} + \frac{q_2}{x-q_2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-x/q_1} - \frac{1}{1-x/q_2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1+q_2x} - \frac{1}{1+q_1x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-q_2)^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(-q_1)^n x^n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-q_2)^n - (-q_1)^n\right] x^n \end{aligned}$$

D'altra parte, per definizione

$$\frac{x}{1-x-x^2}$$

è la funzione generatrice dei numeri di Fibonacci $\{a_n\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Applicando il principio di identità delle serie di potenze, deduciamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-q_2)^n - (-q_1)^n\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

ottenendo l'espressione esplicita dei numeri di Fibonacci. Questa rappresentazione prende il nome di *Formula di Binet*.

Osserviamo che i suddetti numeri sono interi eppure si scrivono come somma di due numeri irrazionali. Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n &\to +\infty \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n &\to 0 \end{aligned}$$

per cui

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \cong \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$$

Questa formula ci dice che, a meno della costante $1/\sqrt{5}$, la successione di Fibonacci è asintoticamente equivalente alla progressione geometrica di ragione

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Otteniamo in questo modo la dimostrazione di una delle tante proprietà della successione di Fibonacci: il rapporto tra due numeri consecutivi converge a $\Phi$, infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cong \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^n = \Phi.$$

Tale numero $\Phi$ non è un numero qualsiasi ma è esattamente l'inverso della *sezione aurea*

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

**Esercizio 12.98** *A partire dalla funzione generatrice determinare l'espressione esplicita della successione definita nell'Esercizio 12.93.*

*Soluzione:*

$$\begin{aligned} F(x) &= 3\frac{3x-2}{2x^2+x-1}, \\ a_n &= 5\,(-1)^n + 2^n. \end{aligned}$$

**Esercizio 12.99** *A partire dalla funzione generatrice determinare l'espressione esplicita della successione definita nell'Esercizio 12.94.*

*Soluzione:*

$$\begin{aligned} F(x) &= 3\frac{x}{(2x-1)\,(x-1)}, \\ a_n &= 3(2^n-1). \end{aligned}$$