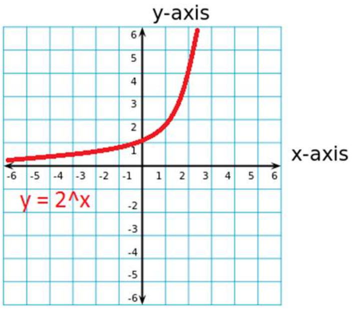
Potenze

● Definizione

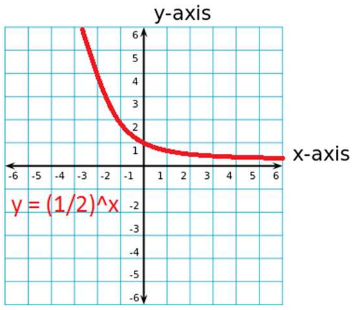
Caso semplice: Potenza ad esponente naturale: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n\ volte)$

Caso generale: Potenza ad esponente reale: $f(x) = a^x$

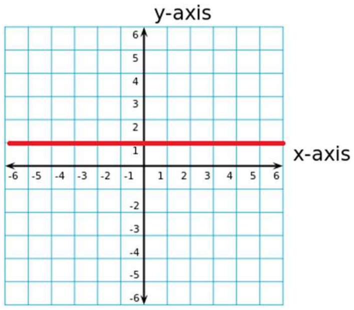
Per a > 1



Per 0 < a < 1



Per a = 1



$2^0 = 1; 2^1 = 2; 2^2 = 4;$ [...]

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1; \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}; \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$ [...]

NB: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ → grafici simmetrici

● Condizioni d'esistenza

1) a > 0

2) a ≠ 1

Perché a ≠ 0 ?
Se x < 0, allora a^x è una frazione, $1/a^y$ (con y = -x), e non può essere a = 0 perché si dividerebbe per 0.
Se x = 0, allora si avrebbe 0^0, che è una forma indeterminata.

Perché $a \nless 0$?
Se x è frazionario (ovvero 0 < x < 1), allora a^x è una radice, $\sqrt[y]{a}$ (con y = 1/x), e non si può calcolare la radice (pari) di un numero negativo.
Inoltre, anche se x > 1, come vedremo nei radicali, sarebbe un problema accettare a < 0,
in quanto dato ad esempio $f(x) = \sqrt{x}$, $f(4)$ non può essere SIA +2 SIA –2.

Perché a ≠ 1 ?
Per convenzione, in quanto è inutile studiare 1^x, che è sempre uguale ad 1 per ogni x.

● Proprietà di base

$a^0 = 1 \quad (con\ a \neq 0)$ $\qquad 0^n = 0 \quad (con\ n \neq 0)$ $\qquad 0^0 = indeterminato$

● Proprietà principali

○ Potenze con la stessa base

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ *Prova veloce*: $2^3 \cdot 2^2 = (8) \cdot (4) = 32; \quad 2^5 = 32; \quad 2^3 \cdot 2^2 = 2^5$

$a^m / a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\qquad$ *Prova veloce*: $(2^3)^2 = (8)^2 = 64; \quad 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64; \quad (2^3)^2 = 2^{2 \cdot 3}$

○ Potenze ad esponente negativo e frazionario

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

○ Potenze con la stessa base

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad$ *Prova veloce*: $2^4 \cdot 3^4 = (16) \cdot (81) = 1296; \quad (2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296; \quad 2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

● Equazioni con esponenziali

1) Mi riconduco ad avere la stessa base ad ambo i membri

2) Confronto gli esponenti

$a^x = a^y \quad \rightarrow \quad x = y$

● Disequazioni con esponenziali

$a^x > a^y$

Se a > 1:
Il segno della disequazione RIMANE INVARIATO quando si confrontano gli esponenti.
$x > y$

Se 0 < a < 1:
Il segno della disequazione VIENE INVERTITO quando si confrontano gli esponenti.
$x < y$

Una base frazionaria (0 < a < 1) più viene elevata, più piccola diventa.
Quindi, fra due esponenziali con basi frazionarie, quello più grande è quello che viene elevato meno volte.

Esempio:

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^y \quad \rightarrow \quad x < y$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.125$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow 2 < 3$

● Esercizi complessi

ES 01)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq 27 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{1-x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq 3^3 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{1-x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq 3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot(1-x)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq 3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{2-2x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-2x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{(-3)+(2-2x)}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1-2x}$$

$ERRORE$: $\frac{x-2}{2} \leq -1-2x$ Fra due frazioni, la più piccola è quella con l'esponente più grande

$CORRETTO$: $\frac{x-2}{2} \geq -1-2x$

$x-2 \geq -2-4x$

$5x-2 \geq -2$

$5x \geq 0$

Risultato: $x \geq 0$

ES 02)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 6 \geq 0$$

$Pongo\ t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$t^2 - 5t + 6 \geq 0 \to (\dots) \to t \leq 2 \vee t \geq 3$

E_1: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2$

$2^{-x} \leq 2^1$

$-x \leq 1$

$x \geq -1$

E_2: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 3$

$2^{-x} \geq 3$

$-x \geq \log_2(3)$

$x \leq -\log_2(3)$

Risultato: $x \leq -\log_2(3) \vee x \geq -1$