Capitolo 7

Limiti di successioni

7.1 Successioni regolari

Ai fini dello studio delle successioni, i comportamenti rilevanti sono quelli che si verificano da un certo indice in poi. A questo scopo introduciamo una definizione importante.

Definizione 7.1 *Una proprietà inerente i termini di una successione* $\{x_n\}$ *si dice* definitiva *se è è verificata da un certo indice in poi.*

Esempio 7.2 *Si consideri la successione*

$$x_n = \frac{n^2}{2} + 4(-1)^n$$

essa è definitivamente monotona crescente (infatti è monotona da $n = 7$ *in poi).*

Se volessimo dare una definizione intuitiva di limite (finito) di una successione dovremmo dire che $\ell \in \mathbf{R}$ è il limite di una successione $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ se, quando n diventa sempre più grande, i valori x_n diventano infinitamente vicini ad ℓ. Si tratta di una definizione assolutamente insoddisfacente: cosa vuol dire "infinitamente vicino"?

Di seguito diamo una definizione, formale e logicamente corretta, che aggira le nozioni di infinito e di infinitamente vicino; alla nozione di limite si perviene in due passaggi.

Definizione 7.3 *Siano* $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ *ed* $\ell \in \mathbf{R}$*. Si dice che* la successione $\{x_n\}$ è convergente ad ℓ *se, per ogni* $\epsilon > 0$*, definitivamente risulta*

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon$$

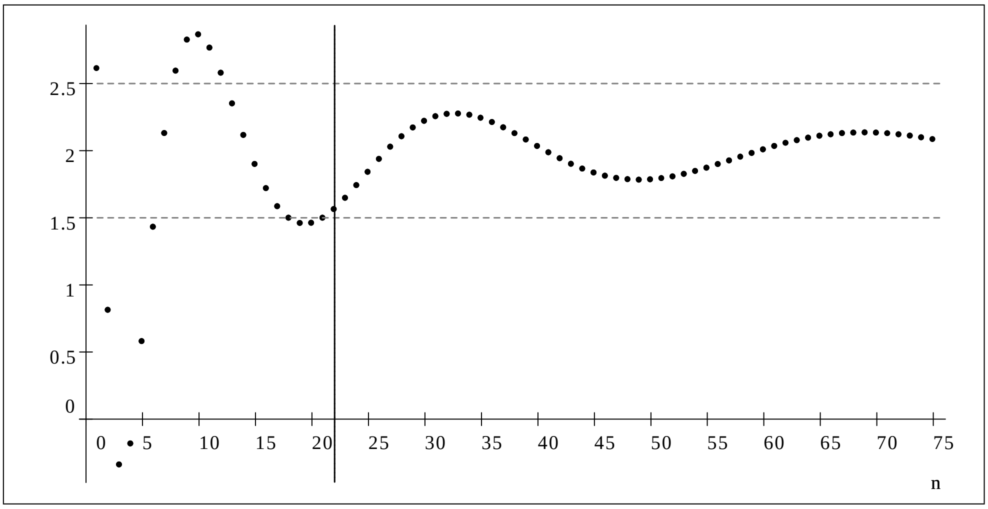
In termini grafici, fissata una semiampiezza arbitraria $\epsilon > 0$ (si dice talvolta "piccola a piacere"), si richiede che, da un certo indice in poi (dipendente da ϵ), la successione x_n sia contenuta nella "striscia orizzontale" $\{\ell - \epsilon < y < \ell + \epsilon\}$.

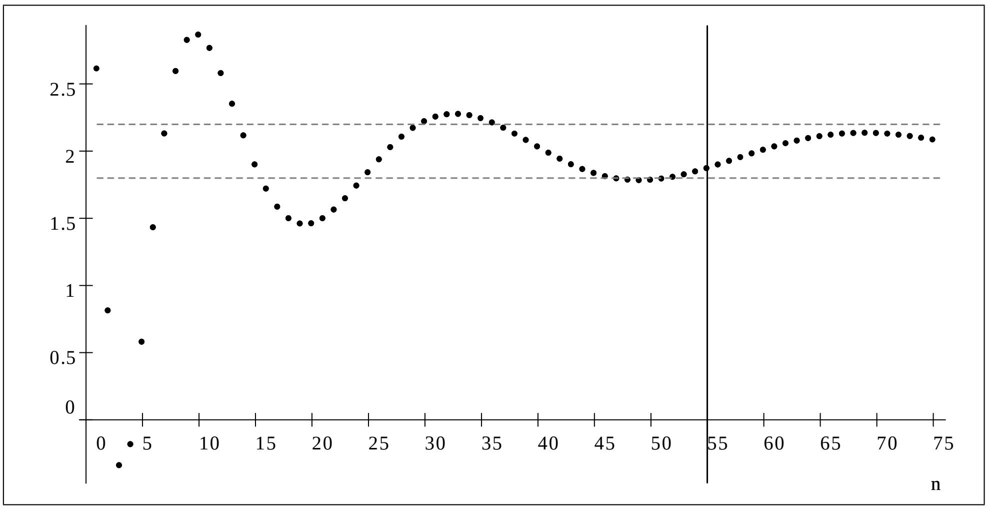
Le figure seguenti illustrano questa situazione, utilizzando la stessa successione vista sopra.

- La condizione
$$2 - \frac{1}{2} < x_n < 2 + \frac{1}{2}$$
è verificata per ogni $n \geq 22$.

- La condizione
$$2 - \frac{1}{5} < x_n < 2 + \frac{1}{5}$$
è verificata per ogni $n \geq 55$.

- Si può dimostrare (cosa ben diversa dal tracciare due disegni) che la successione in oggetto converge ad $\ell = 2$.





Esempio 7.4 *Una successione costante $x_n = a$ converge al valore a.*

Esempio 7.5 *La successione $x_n = 1/(n^2 + 4)$ converge a 0.*

Lemma 7.6 *Se la successione $\{x_n\}$ è convergente ad ℓ_1 ed ℓ_2, allora necessariamente*

$$\ell_1 = \ell_2$$

Il lemma giustifica la definizione che segue.

Definizione 7.7 *Se la successione $\{x_n\}$ è convergente ad ℓ, si dice che ℓ è* il limite *(per n che tende all'infinito) di x_n e si scrive*

$$\ell = \lim_n x_n.$$

Osservazione 7.8 *Il simbolo che noi adottiamo tiene conto di una particolare circostanza: in presenza di una successione, il limite si effettua* sempre *per n che tende all'infinito. Sarà diversa la situazione per i limiti di funzioni.*

Le seguenti proposizioni discendono immediatamente dalla definizione.

Proposizione 7.9 *Si ha $\lim_n x_n = \ell$ se e solo se $\lim_n (x_n - \ell) = 0$.*

Proposizione 7.10 *Si ha $\lim_n a_n = 0$ se e solo se $\lim_n |a_n| = 0$.*

Proposizione 7.11 *Se la successione $\{x_n\}$ è convergente, è anche limitata.*

Non vale il viceversa, come mostra la successione $\{(-1)^n\}$. Dunque, a parte la somiglianza terminologica, tipica della lingua italiana, esistono successioni limitate che non ammettono limite.

Definizione 7.12 *Si dice che la successione $\{x_n\}$ è* divergente positivamente *se, per ogni $M \in \mathbf{R}$, definitivamente risulta*

$$M < x_n.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_n x_n = +\infty.$$

In termini grafici, fissata una quota arbitraria $M \in \mathbf{R}$ (si dice talvolta "grande a piacere"), si richiede che, da un certo indice in poi (dipendente da m), la successione x_n sia contenuta nella "semipiano" $\{y > M\}$.

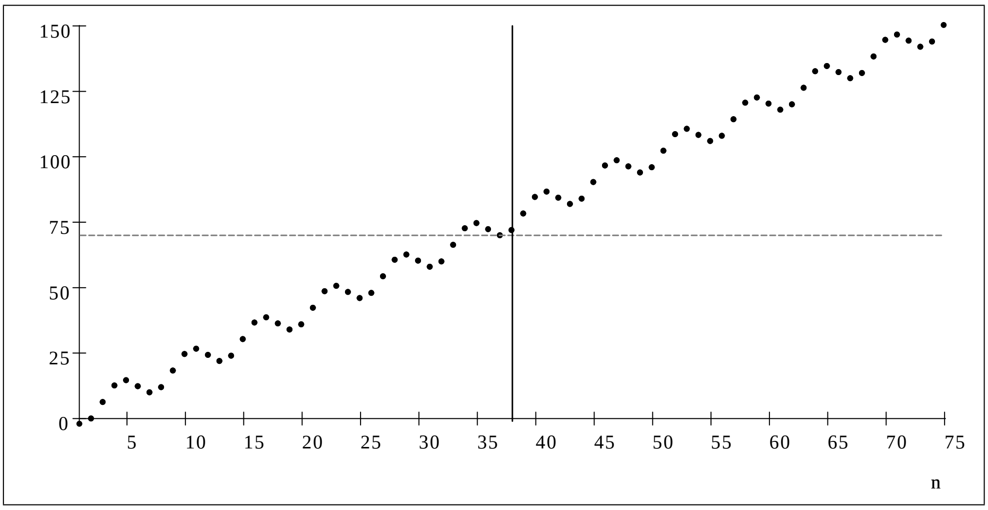
Le figure seguenti, relative alla successione

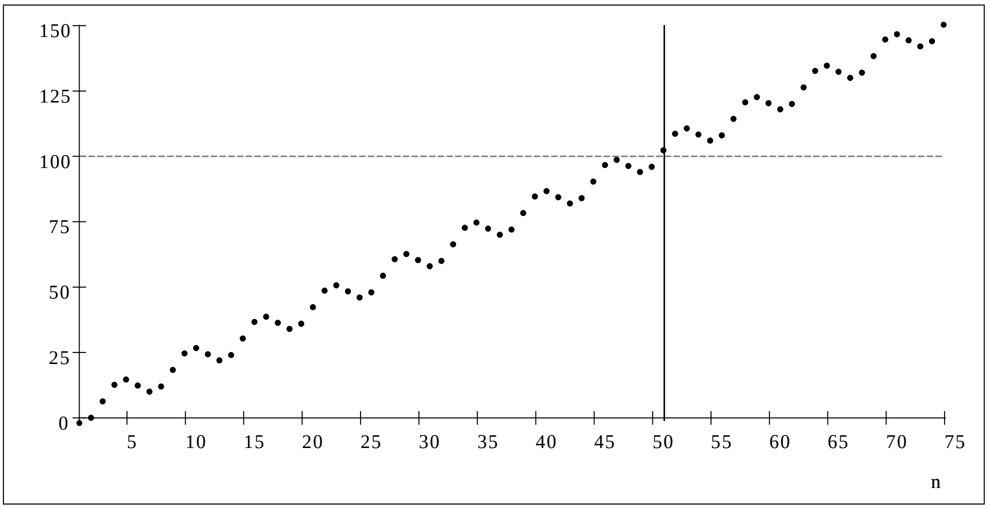
$$x_n = 2n - 5\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

illustrano questa situazione.

- La condizione
$$x_n > 70$$
è verificata per ogni $n \geq 38$.

- La condizione
$$x_n > 100$$
è verificata per ogni $n \geq 51$.





Esempio 7.13 *La successione*

$$x_n = \sqrt{n+4}$$

è divergente positivamente.

Esempio 7.14 *Per ogni* $a \in \mathbf{R}$ *e* $b > 0$ *la successione*

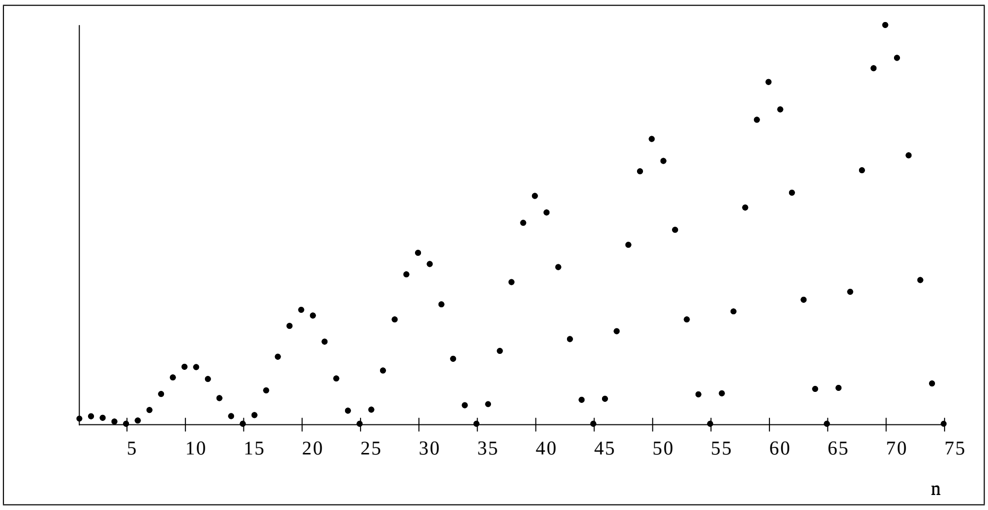
$$x_n = a + bn$$

è divergente positivamente.

Esempio 7.15 *La successione*

$$x_n = [1 + \cos \frac{\pi n}{5}]n$$

è illimitata superiormente ma non *diverge positivamente (vedi figura seguente).*



Definizione 7.16 *Si dice che la successione* $\{x_n\}$ *è* divergente negativamente *se, per ogni* $m \in \mathbf{R}$, *definitivamente risulta*

$$x_n < m.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_n x_n = -\infty.$$

Definizione 7.17 *La successione* $\{x_n\}$ *si dice* regolare *se ammette limite (finito o infinito).*

Osservazione 7.18 *Siano* $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ *ed* $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *Talvolta, invece di scrivere*

$$\lim_n x_n = \ell$$

si adotta la notazione

$$x_n \to \ell.$$

7.1.1 Successioni monotone

Teorema 7.19 (di regolarità) *Se* $\{a_n\}$ *è una successione crescente (risp. decrescente) allora esiste*

$$\lim_n a_n = \sup_n a_n \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$
$$(\textit{risp.} \lim_n a_n = \inf_n a_n \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}\,).$$

Pertanto le successioni monotone sono regolari.

Dimostrazione. Limitatamente al caso $\sup_n a_n = +\infty$ ∎

Esempio 7.20 (il numero di Nepero) *Si consideri la successione*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Si può dimostrare che tale successione è strettamente monotona crescente e limitata dall'alto. Pertanto tale successione ammette limite finito. Tale limite prende il nome di numero di Nepero *e si denota con la lettera* e. *Risulta dunque*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Si può dimostrare, inoltre, che e *è un numero irrazionale (trascendente) compreso tra* 2 *e* 3.

7.2 Retta ampliata ed intorni

Considerato che una successione può ammettere come limite sia un numero reale che $\pm\infty$, conviene introdurre un nuovo insieme.

Definizione 7.21 *Si definisce* retta ampliata *l'insieme*

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Per analogia con $\mathbf{R}$, gli elementi di $\overline{\mathbf{R}}$ continueremo a chiamarli punti.

Ad ogni $x \in \overline{\mathbf{R}}$ si associa una famiglia di sottoinsiemi denominati *intorni di* x. Al solo scopo di semplificare la trattazione noi diamo una definizione leggermente più restrittiva.

Definizione 7.22 *Se* $x \in \mathbf{R}$*, si definiscono intorni di* x *gli intervalli*

$$(x-\epsilon, x+\epsilon),$$

essendo $\epsilon > 0$.

Si definiscono intorni di $+\infty$ *le semirette*

$$(M, +\infty),$$

essendo $M \in \mathbf{R}$.

Si definiscono intorni di $-\infty$ *le semirette*

$$(-\infty, m),$$

essendo $m \in \mathbf{R}$.

Gli intorni così definiti consentono di dare una caratterizzazione unificata del limite delle successioni.

Teorema 7.23 *Siano* $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ *ed* $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. *Risulta*

$$\lim_n x_n = \ell$$

se e solo se, per ogni I *intorno di* ℓ *risulta definitivamente*

$$x_n \in I$$

7.3 Teoremi sui limiti

La Proposizione seguente esprime una circostanza importante: il limite di una successione non dipende dai primi termini della successione stessa.

Proposizione 7.24 *Assegnate due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ definitivamente uguali, risulta*

$$\exists \lim_n a_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}} \iff \exists \lim_n b_n = \ell.$$

Ora vediamo in che modo il segno di una successione ed il segno del rispettivo limite si influenzano reciprocamente. Il primo risultato illustra la "propagazione del segno" dal limite alla successione.

Lemma 7.25 (permanenza del segno) *Sia assegnata una successione $\{a_n\}$. Se $\lim_n a_n > 0$, allora esiste $m > 0$ tale che definitivamente $a_n \geq m$; in particolare definitivamente $a_n > 0$.*

Osservazione 7.26 *Ovviamente vale un risultato analogo nel caso di limite negativo.*

Il secondo teorema illustra la "propagazione del segno" in verso opposto: dalla successione al proprio limite (se esiste).

Teorema 7.27 (di confronto) *Sia assegnata una successione $\{a_n\}$ regolare e tale che, definitivamente*

$$0 \leq a_n.$$

Allora

$$0 \leq \lim_n a_n.$$

Dimostrazione. Per assurdo se fosse $\lim_n a_n < 0$ dovrebbe risultare definitivamente $a_n < 0$, in contraddizione con l'ipotesi. ∎

Osservazione 7.28 *Il Teorema di confronto non vale con disuguaglianze strette. Un controesempio è dato da $1/n > 0$ con $\lim_n 1/n = 0$.*

La proposizione seguente ci sarà utile per lo studio della progressione geometrica.

Proposizione 7.29 *Sia assegnata una successione $\{a_n\}$ divergente positivamente (o negativamente), allora ha senso considerare la successione $\{1/a_n\}$ e risulta*

$$\lim_n \frac{1}{a_n} = 0.$$

Concludiamo con due teoremi di "comportamento obbligato".

Teorema 7.30 (di divergenza obbligata) *Siano assegnate due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, definitivamente*

$$a_n \leq b_n.$$

Se $\{a_n\}$ diverge positivamente, allora anche $\{b_n\}$ diverge positivamente.

Se $\{b_n\}$ diverge negativamente, allora anche $\{a_n\}$ diverge negativamente.

Teorema 7.31 (di convergenza obbligata) *Siano assegnate tre successioni* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *tali che, definitivamente*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Se $\{a_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *convergono ad* $\ell \in \mathbf{R}$*, allora anche* $\{b_n\}$ *converge ad* ℓ.

7.4 Due particolari successioni estratte

Sia assegnata una successione $\{x_n\}$. Accanto a questa successione possiamo considerarne altre due

$$\{x_{2n}\} = \{x_0, x_2, x_4, \dots\}$$

(*successione dei termini di indice*, o posto, *pari*) e analogamente

$$\{x_{2n+1}\} = \{x_1, x_3, x_5, \dots\}$$

(*successione dei termini di indice*, o posto, *dispari*).

A livello informale possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 7.32 *Una successione* $\{y_n\}$ *si dice* estratta *dalla* $\{x_n\}$ *se è ottenuta dalla* $\{x_n\}$ *selezionando un insieme infinito di indici. Tipicamente le successioni estratte si denotano con* $\{x_{k_n}\}$.

Talvolta invece di successioni estratte si parla di *sottosuccessioni*.

Un esempio di sottosuccessione (se vogliamo l'esempio banale) si ottiene "sopprimendo" i primi N termini della successione

$$\{x_{n+N}\} = \{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$$

Si tratta dell'esempio banale in quanto la successione $\{x_{n+N}\}$ condivide tutte le proprietà essenziali della successione madre (limitatezza, regolarità). Come ulteriori esempi possiamo considerare

- $\{x_{3n}\} = \{x_0, x_3, x_6, \dots\}$;
- $\{x_{n^2}\} = \{x_0, x_1, x_4, \dots\}$.

Proposizione 7.33 *Se* $\{x_n\}$ *è regolare, tutte le successioni estratte sono regolari ed hanno lo stesso limite della* $\{x_n\}$.

Le successioni $\{x_{2n}\}$ e $\{x_{2n+1}\}$, considerate congiuntamente, godono di una ulteriore proprietà.

Proposizione 7.34 *La successione* $\{x_n\}$ *è regolare se e solo se le successioni* $\{x_{2n}\}$ *e* $\{x_{2n+1}\}$ *hanno lo stesso limite* $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$*. In questo caso risulta anche*

$$\lim_n x_n = \ell.$$

7.5 Progressione geometrica

Ricordiamo che la progressione geometrica $\{q^n\}$ è definita da

$$q^0 = 1$$
$$q^{n+1} = q^n \cdot q$$

Ora passiamo a studiare il comportamento di questa successione al variare di q. Premettiamo un lemma.

Lemma 7.35 (Disuguaglianza di Bernoulli) *Per ogni $h > -1$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

Dimostrazione. per induzione ■

Dalla Disuquaglianza di Bernoulli si deduce che, per ogni $q > 0$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta

$$q^n \geq 1 + (q-1)n$$

Infatti si considera $h = q - 1$ e quindi ...

- Se $q > 1$, allora $\{q^n\}$ è strettamente monotona crescente; inoltre, per confronto, diverge positivamente.

- Se $q = 1$, allora $q^n = 1$ e quindi la successione tende ad 1.

- Se $q \in (0, 1)$, allora $\{q^n\}$ è strettamente monotona decrescente, inoltre tende a 0. Infatti abbiamo

$$\frac{1}{q} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{q}\right)^n \to +\infty$$

  e quindi

$$q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} \to 0.$$

- Se $q = 0$, allora $q^n = 0$ (per $n \geq 1$).

- Se $q \in (-1, 0)$, allora $|q| < 1$ e quindi

$$|q|^n \to 0.$$

  D'altra parte

$$|q^n| = |q|^n \to 0.$$

  e quindi $q^n \to 0$.

- Se $q = -1$, allora $\{q^n\}$ è limitata, non regolare (comportamento difforme tra estratta pari e dispari)

- Se $q < -1$, allora $\{q^n\}$ è non limitata, non regolare (come sopra)

7.6 Medie di una successione

Assegnata una successione $\{a_n\}$, tramite una procedura per ricorrenza, abbiamo definito la successione delle somme $\{s_n\}$.

Utilizzando la $\{s_n\}$ si definisce un'altra successione $\{m_n\}$

$$m_n = \frac{s_n}{n+1}$$

che prende il nome di *successione delle medie di* a_n.

Esempio 7.36 $a_n = \ell$, $a_n = n$, $a_n = q^n$

Riguardo le medie esiste un'interessante proprietà.

Proposizione 7.37 *Se la successione* $\{a_n\}$ *tende a* $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$, *allora anche* $\{m_n\}$ *tende allo stesso* ℓ.

Osservazione 7.38 *Non vale il viceversa, nel senso che esistono successioni non regolari la cui corrispondente successione delle medie è regolare. Un esempio di questo genere è dato da* $\{(-1)^n\}$.

Pertanto, in sintesi, l'operazione di media conserva il limite ove la successione di partenza sia regolare e, in alcuni casi, fa guadagnare l'esistenza del limite (*effetto regolarizzante*).