Analisi Matematica - 12.11.2018

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-8}$

(a) Dominio: f è ben definita se $x^2-8 \neq 0$, $x^2 \neq 8$

$x \neq \pm 2\sqrt{2}$. Quindi $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\sqrt{2}\}$

Intersezioni con gli assi:

$x=0 \quad f(0) = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8} \Rightarrow (0, -\frac{1}{8}) \in G_f$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ mai vero

Segno di f: poiché $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ si ha che

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow x < -2\sqrt{2}$ oppure $x > 2\sqrt{2}$

Quindi

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

(b) Limiti significativi: $\pm 2\sqrt{2}$, $\pm\infty$

$\lim\limits_{x \to -2\sqrt{2}} f(x) = \left\{ \dfrac{e^{-2\sqrt{2}}}{0} \right\} = \pm\infty$ (dipende dal segno di f "vicino" a $-2\sqrt{2}$).

Tenendo conto del segno si ha

$$\lim_{x \to -2\sqrt{2}^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -2\sqrt{2}^+} f(x) = -\infty.$$

In modo analogo:

$$\lim_{x \to 2\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$$

Per $x \to -\infty$ $\quad e^x \to 0$, $\quad x^2 - 8 \to +\infty \quad \Rightarrow f(x) \to 0$

Per $x \to +\infty$ $\quad \left.\begin{array}{l} e^x \to +\infty \\ x^2-8 \to +\infty \end{array}\right\}$ forma di indecisione $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$f(x) \sim \frac{e^x}{x^2} \to +\infty$$

Asintoti: $x = \pm 2\sqrt{2}$ asintoti verticali

$y=0$ asintoto orizzontale a $-\infty$

Non esiste l'asintoto obliquo a $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} \sim \frac{e^x}{x^3} \to +\infty$$

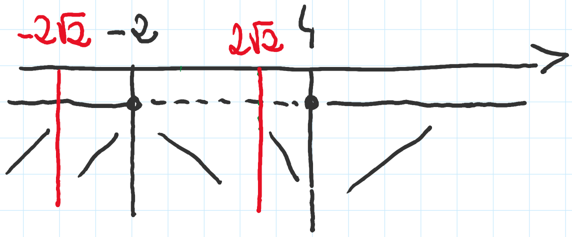
(c) $\forall x \in \operatorname{dom} f$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2-8) - e^x\, 2x}{(x^2-8)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-8)}{(x^2-8)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2-2x-8 \geq 0$$

$$\left\{ x = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \begin{array}{l} \nearrow -2 \\ \searrow 4 \end{array} \right\}$$

$$x \leq -2 \quad x \geq 4$$



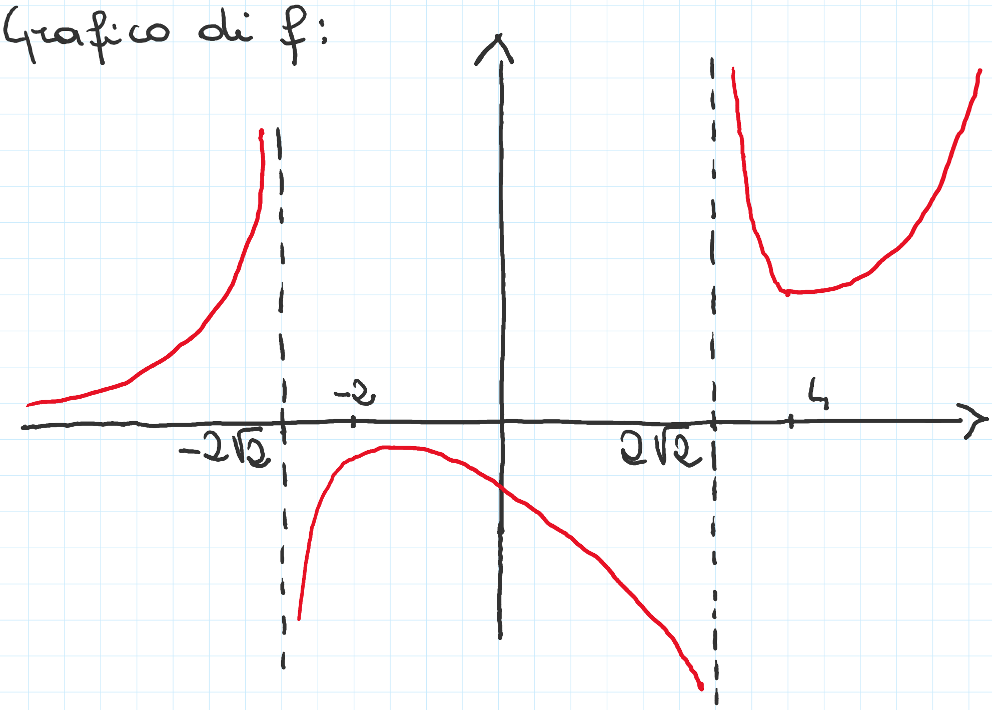
f è crescente in $(-\infty, -2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, -2)$, $(4, +\infty)$

f è decrescente in $(-2, 2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 4)$

$x = 2$ pto di massimo relativo;

$x = 4$ p.to di min. relativo.

(d) Grafico di f:



(e) $\operatorname{Im} f = (-\infty, f(-2)] \cup (0, +\infty)$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha

2 sol. se $\lambda < f(-2)$;

1 sol. se $\lambda = f(-2)$;

0 sol. se $f(-2) < \lambda \leq 0$;

1 sol. se $0 < \lambda < f(4)$;

2 sol. se $\lambda = f(4)$;

3 sol. se $\lambda > f(4)$.

2. $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n^2 + \operatorname{arctg} n} = \ell$

$$3^n + (-1)^n = 3^n \Big(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{3^n}}_{\to 0} \Big) \sim 3^n$$

$\to 0$ poiché $(-1)^n$ è lim. e $1/3^n \to 0$

$$n^2 + \operatorname{arctg} n = n^2 \Big(1 + \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}}_{\to 0} \Big) \sim n^2$$

poiché $\operatorname{arctg} n$ è limitato e $\frac{1}{n^2} \to 0$

Quindi $\displaystyle \ell = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n^2} = +\infty$.

3.

$$I = \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$$

Occorre usare la tecnica di integrazione per parti.

$$I = \int_0^1 D\,\frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$I = \int_0^1 D\,\frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$\left\{ \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2} \right\}$$

quindi

$$I = \left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \log(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \log 2 = \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \log 2 .$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{n!}$$

Si tratta di una serie numerica a termini di segno variabile. Occorre dunque studiare la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{ove } a_n = (-1)^n \frac{\cos n}{n!}$$

$$|a_n| = \frac{|\cos n|^{\leq 1}}{n!}$$

Si osservi che

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{1}{n!} = b_n$$

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{1}{n!} = b_n$$

e che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge per il criterio del rapporto:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi, per il criterio del confronto, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e la serie assegnata converge assolutamente.