Serie numeriche e di potenze

Giustificare tutti i passaggi mediante la teoria studiata.

1. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2+1};$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e^n+3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right);$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{n+1}{n^2}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right);$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{2}{5n}\right); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!+1};$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\cos n^2; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5+1}{2^n};$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n^2+6}{n^5+n+8}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1};$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{1}{\log(n+1)}; \quad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log(n+1)}-\frac{1}{\log n}\right);$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right);$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n+3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\operatorname{sen} n}{n^4+6};$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n;$

(k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{2^n}.$

Soluzioni:

(a):

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}}$ diverge per il criterio del confronto asintotico, poiché

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2} \cdot n^{1/3}} = \frac{1}{n^{5/6}}.$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2+1}$ converge assolutamente per il criterio del confronto:

$$0 \leq \left| \frac{\cos n}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

(b):

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e^n+3}$ converge per il criterio del confronto, poichè

$$0 < \frac{2^n}{e^n+3} \leq \frac{2^n}{e^n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

e $2/e < 1$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n}\right)$ non converge. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

non vale la condizione necessaria per la convergenza.

(c):

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ converge per il criterio di Leibniz. Infatti sia $a_n = (n+1)/n^2$, per ogni $n \geq 1$. Si ha

$$a_n \geq 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

e la successione $\{a_n\}$ è decrescente: la condizione $a_{n+1} \leq a_n$ si scrive

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$$

che, facendo i calcoli, diventa

$$n^2 + 3n + 1 \geq 0$$

verificata da ogni $n \geq 1$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)$ diverge per il criterio del confronto asintotico poiché

$$\left(\sqrt{n+1}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right) \sim \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

(d):

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{2}{5n}\right)$ converge per il criterio del confronto asintotico, poiché

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{2}{5n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{5n} = \frac{2}{5}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!+1}$ converge. Infatti si ha

$$0 < \frac{1}{n!+1} \leq \frac{1}{n!}$$

e la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ converge per il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

(e):

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\cos n^2$ converge assolutamente per i criteri del confronto e del confronto asintotico:

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\cos n^2\right| \leq \operatorname{sen}\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^5+1}{2^n}$ converge per il criterio del rapporto, poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left((n+1)^5+1\right)/2^{n+1}}{\left((n^5+1\right)/2^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{(n+1)^5+1}{n^5+1} = \frac{1}{2}.$$

(f):

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n^2+6}{n^5+n+8}$ converge per il criterio del confronto asintotico poichè

$$\frac{n^3+n^2+6}{n^5+n+8} \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$ converge assolutamente per il criterio del confronto poichè

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1} \right| \le \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}.$$

(g):

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$ converge per il criterio di Leibniz. Infatti sia $a_n = 1/\log(n+1)$, per ogni $n \ge 1$. Si ha

$$a_n \ge 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

e la successione $\{a_n\}$ è decrescente: la condizione $a_{n+1} \le a_n$ si scrive

$$\frac{1}{\log(n+2)} \le \frac{1}{\log(n+1)}$$

che è verificata da ogni $n \ge 1$ poiché la funzione log è strettamente crescente.

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(n+1)} - \frac{1}{\log n} \right)$ è una serie telescopica convergente a $-1/\log 2$. Infatti la sua somma parziale S_n, per ogni $n \ge 2$, è

$$S_n = \frac{1}{\log(n+2)} - \frac{1}{\log 2},$$

che tende a $-1/\log 2$.

(h):

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+3}$ è una serie a termini positivi, convergente per il criterio del confronto asintotico. Infatti

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+3} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$ è una serie telescopica convergente ad 1. Infatti la sua somma parziale S_n, per ogni $n \ge 1$, è

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2},$$

che tende a 1.

(i):

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n+3}$ diverge per il criterio del confronto asintotico, poichè

$$\frac{n+1}{n^2+2n+3} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{n^4+6}$ converge assolutamente, per il criterio del confronto:

$$\left|\frac{n \operatorname{sen} n}{n^4+6}\right| \leq \frac{n}{n^4+6} \leq \frac{1}{n^3}.$$

(j):

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$ è una serie a termini positivi, che converge per il criterio del confronto asintotico:

$$\frac{1}{n}\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right) \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ è una serie a termini positivi, che converge per il criterio della radice. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} < 1.$$

(k):

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ converge per il criterio del confronto asintotico (caso limite). Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2 \log n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log n} = 0.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{2^n}$ converge per il criterio della radice. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+2n+1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2+2n+1}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Si noti che

$$\sqrt[n]{n^2+2n+1} = (\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

quindi converge ad 1.

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+4}$; $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$; $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (x-4)^n$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$; $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x+7)^n$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}$; $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^7}{(n+1)!} x^n$.

Soluzioni: Sia I l'insieme di convergenza di ciascuna serie.

(a): $I = [-1, 1)$; $I = \{0\}$

(b): $I = [-1, 1)$; $I = (2, 6)$

(c): $I = [-6, -2)$; $I = \{-7\}$

(d): $I = [-3, -1]$; $I = \mathbb{R}$