Capitolo 9

Forme indeterminate

9.1 Artifici

Richiamare funzioni localmente uguali

Lemma 9.1 *Siano $A \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A, f e g funzioni definite in A.*

Supponiamo di poter scrivere (localmente in t_0)

$$f(t) = g(t)\phi(t)$$

Se $\lim_{t\to t_0} \phi(t) = 1$, allora

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{t\to t_0} g(t)$$

9.1.1 Funzioni polinomiali

Consideriamo un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Ora consideriamo $g(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$

Le funzioni $P(x)$ e $g(x)$ coincidono per ogni $x \neq 0$, in particolare sono localmente uguali a $\pm\infty$. Poi osserviamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1$$

In definitiva

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \tag{9.1}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo utilizzato le funzioni localmente uguali, nella seconda abbiamo utilizzato il Lemma 9.1

Funzioni razionali

9.1.2 Altri artifici

....

9.2 Equivalenze asintotiche

In questo paragrafo presentiamo una nuova tecnica per risolvere le forme indeterminare: l'uso delle equivalenze asintotiche. L'idea di base è tutto sommato semplice: si effettuano "sostituzioni dentro il limite", precisamente ad uno o più termini che compaiono dentro il limite se ne sostituiscono altri in modo che

1. il valore del limite non cambi;

2. il limite ottenuto dopo la sostituzione sia più facile da studiare.

Questo tipo di approccio è stato già utilizzato quando abbiamo stabilito la formule (9.1) e (funzioni razionali).

Per poter applicare efficacemente questa teoria, come sempre, avremo bisogno di:

- regole di carattere generale per poter effettuare sostituzioni corrette;

- esempi concreti relativi alle funzioni elementari.

Vedremo che questa teoria che rappresenta una rivisitazione, con un linguaggio più vicino alle applicazioni, della classica tecnica di applicazione dei *limiti notevoli*. Sotto questo nome tradizionale passano alcuni limiti che coinvolgono le funzioni elementari e si presentano come forme indeterminate. Per la precisione dovremmo distinguere tra

- limiti notevoli che coinvolgono solo infinitesimi (che tratteremo in questo paragrafo);

- limiti notevoli che coinvolgono anche infiniti (che studieremo nel paragrafo successivo).

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A.

Definizione 9.2 *Due funzioni*

$$\begin{array}{rcl} f & : & A \to \mathbf{R} \\ g & : & A \to \mathbf{R} \end{array}$$

(localmente) non nulle si dicono asintoticamente equivalenti in t_0 se

$$\lim_{t \to t_0} \frac{g(t)}{f(t)} = 1.$$

In questo caso scriveremo

$$g(t) \cong f(t) \qquad (\textit{per } t \to t_0).$$

Sottolineiamo che l'equivalenza è una nozione di carattere locale, nel senso che due funzioni equivalenti in un punto non è detto che lo siano in altri punti. La specificazione $t \to t_0$ verrà omessa tutte le volte che essa risulti chiara dal contesto.

Il risultato principale viene illustrato nel seguente teorema.

Teorema 9.3 *Sia*

$$g(t) \cong f(t) \qquad \textit{(per } t \to t_0\textit{)},$$

allora

$$\lim_{t \to t_0} g(t) = \lim_{t \to t_0} f(t).$$

In altri termini potremo sostituire la funzione di cui si calcola il limite con un'altra ad essa equivalente.

La dimostrazione si ottiene immediatamente dal lemma richiamato all'inizio, sfruttando l'ipotesi di equivalenza.

$$\lim_{t \to t_0} g(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{g(t)}{f(t)} f(t) = \lim_{t \to t_0} f(t).$$

Ora sono da stabilire alcune regole di equivalenza.

Proposizione 9.4 *Se, per $t \to t_0$,*

$$\begin{array}{c} g_1(t) \cong f_1(t) \\ g_2(t) \cong f_2(t) \end{array} \tag{9.2}$$

allora

$$\begin{array}{rcl} (g_1(t))^p & \cong & (f_1(t))^p \,, \\ |g_1(t)| & \cong & |f_1(t)| \,, \\ g_1(t)g_2(t) & \cong & f_1(t)f_2(t), \\ \dfrac{g_2(t)}{g_1(t)} & \cong & \dfrac{f_2(t)}{f_2(t)}. \end{array}$$

In breve: l'equivalenza si conserva nell'elevamento a potenza, nei prodotti e nei rapporti. L'equivalenza si conserva anche nella composizione, come precisato di seguito.

Proposizione 9.5 *Supponiamo*

$$\begin{array}{lr} \varphi(x) \to t_0 & \textit{per } x \to x_0, \\ g(t) \cong f(t) & \textit{per } t \to t_0. \end{array}$$

Risulta allora

$$g(\varphi(x)) \cong f(\varphi(x)) \qquad \textit{per } x \to x_0.$$

Osservazione 9.6 *Più delicato è il caso della somma. Infatti, anche se vale (9.2), non possiamo affermare che*

$$g_1(t) + g_2(t) \cong f_1(t) + f_2(t).$$

Del resto è evidente che potremmo incontrare la seguente situazione

$$\begin{aligned} g_1(t) &\cong f(t), \\ g_2(t) &\cong -f(t). \end{aligned}$$

Ovviamente non ha senso affermare che

$$g_1(t) + g_2(t) \cong f(t) + (-f(t)) = 0.$$

Infatti per parlare di equivalenza entrambi i termini devono essere diversi da zero.

L'equivalenza nella somma si conserva solo in alcuni casi particolari. La Proposizione seguente riporta i casi di uso più frequente.

Proposizione 9.7 *Supponiamo $t \to 0$ oppure $t \to \pm\infty$. Supponiamo*

$$\begin{aligned} f_1(t) &\cong c_1 t^{p_1} \\ f_2(t) &\cong c_2 t^{p_2} \end{aligned}$$

Se

$$c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_2} \neq 0$$

allora

$$f_1(t) + f_2(t) \cong c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_2}.$$

Osservazione 9.8 *Dunque, per poter stabilire l'equivalenza della somma (per $t \to 0$ oppure $t \to \pm\infty$) si richiedono due condizioni:*

- *che ciascun addendo sia equivalente a un "monomio";*
- *che il binomio somma sia diverso da 0.*

In presenza di più addendi, si dovranno sommare due addendi alla volta: ad ogni passo si ottiene un binomio che deve essere ricondotto ad un monomio (vedi Proposizione 9.18). Il risultato finale della procedura non dipenderà dall'ordine di sommazione.

Questa situazione viene ripresa nella Proposizione 9.18.

9.2.1 Equivalenze notevoli per infinitesimi

Ovviamente i teoremi precedenti rimangono privi di utilità fino a quando non si forniscono esempi concreti di funzioni equivalenti.

Dalla definizione consegue immediatamente che, se $f(t)$ converge ad numero $\ell \neq 0$ (per $t \to t_0$), allora ovviamente $f(t) \cong \ell$ (intendendo la funzione di costante valore ℓ). D'altra parte l'equivalenza si applica principalmente a funzioni infinite o infinitesime.

Consideriamo in primo luogo funzioni infinitesime.

Teorema 9.9 *Consideriamo $t \to 0$. Allora risulta*

$$\begin{array}{rcl} e^t - 1 & \cong & t \\ \log(1+t) & \cong & t \\ \sin t & \cong & t \\ 1 - \cos t & \cong & \dfrac{1}{2}t^2 \\ \tan t & \cong & t \\ \arcsin t & \cong & t \\ \arctan t & \cong & t \\ \sqrt[n]{1+t} - 1 & \cong & \dfrac{1}{n}t \end{array}$$

Ora possiamo dare alcuni esempi di applicazione.

Esempio 9.10 *Calcolare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}.$$

Abbiamo solo prodotti e rapporti. Possiamo utilizzare direttamente le equivalenze notevoli

$$\begin{array}{rcl} \sin x & \cong & x \\ 1 - \cos x & \cong & x^2/2 \end{array}$$

Quindi il limite assegnato è uguale a

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{x^2/2} = 2.$$

Esempio 9.11 *Calcolare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{(1 - \cos x)^3}.$$

Da

$$\begin{array}{rcl} \sin x & \cong & x \\ 1 - \cos x & \cong & x^2/2 \end{array}$$

si ricava rispettivamente

$$\begin{array}{rcl} \sin^2 x & \cong & x^2 \\ (1 - \cos x)^3 & \cong & x^6/8 \end{array}$$

Quindi il limite assegnato è uguale a

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^6/8} = \lim_{x \to 0} \frac{8}{x^4} = +\infty.$$

Esempio 9.12 *Calcolare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\log(1 + 3 \sin x)}.$$

Questa volta abbiamo un rapporto di funzioni composte. Sappiamo che

$$\arcsin x \to 0, \qquad \text{per } x \to 0$$

quindi da

$$e^t - 1 \cong t, \qquad \text{per } t \to 0$$

per la Proposizione 9.5

$$e^{\arcsin x} - 1 \cong \arcsin x$$

Inoltre sappiamo che

$$\arcsin x \cong x.$$

Quindi, per transitività dell'equivalenza

$$e^{\arcsin x} - 1 \cong x$$

Analogamente abbiamo

$$\log(1 + 3\sin x) \cong 3x$$

Pertanto il limite assegnato è uguale a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 9.13 *Calcolare*

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \arctan \frac{1}{x} = +\infty$$

Esempio 9.14 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{4^{x^2} - 1}.$$

Al numeratore applichiamo un artificio

$$\begin{aligned} \log(\cos x) &= \log(1 + \cos x - 1) \\ &\cong \cos x - 1 \\ &\cong -\frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Al denominatore conviene cambiare base all'esponenziale

$$4^{x^2} = e^{x^2 \log 4}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} 4^{x^2} - 1 &= e^{x^2 \log 4} - 1 \\ &\cong x^2 \log 4 \\ &= 2x^2 \log 2. \end{aligned}$$

Pertanto il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2 \log 2} = -\frac{1}{4\log 2}.$$

Esempio 9.15 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{1/x}$$

Trasformiamo

$$(1+\tan x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\log(1+\tan x)}.$$

Abbiamo

$$\log(1+\tan x) \cong \tan x \cong x$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+\tan x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1.$$

Tornando al limite iniziale otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{1/x} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\log(1+\tan x)} \\ &= e^1 = e\end{aligned}$$

9.2.2 Cancellazione di addendi

La teoria delle funzioni equivalenti può essere anche utilizzata in uno spirito diverso dalla “sostituzione dentro il limite”. In alcune situazioni si può cancellare un addendo ottenendo una funzione equivalente e quindi conservando il valore del limite.

Proposizione 9.16 *Si abbiano due funzioni f_1 ed f_2. Se f_2 è (localmente) limitata e*

$$\lim_{t\to t_0} f_1(t) = \pm\infty$$

allora

$$f_1(t) + f_2(t) \cong f_1(x).$$

Osservazione 9.17 *In altri termini se abbiamo due addendi uno infinito ed uno limitato, quello limitato si può trascurare. Precisiamo che questa regola vale soltanto nel caso di due addendi.*

Proposizione 9.18 *Si considerino due funzioni $c_1t^{p_1}$ e $c_2t^{p_2}$ con $p_1 < p_2$.*
Se $t \to 0^+$, allora $c_1t^{p_1} + c_2t^{p_2} \cong c_1t^{p_1}$.
Se $t \to +\infty$, allora $c_1t^{p_1} + c_2t^{p_2} \cong c_2t^{p_2}$.

Osservazione 9.19 *La seconda parte della proposizione precedente ci ricorda una circostanza che dovrebbe essere già nota*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \cong a_nx^n.$$

Esempio 9.20 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+x^2}\,\sin^2\frac{1}{x}$$

Si tratta di una forma indeterminata $(+\infty)\cdot 0$. Occupiamoci del fattore infinitesimo $\sin^2\frac{1}{x}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} 1/x &\to 0 && \textit{per } x\to+\infty, \\ \sin t &\cong t && \textit{per } t\to 0.\end{aligned}$$

Pertanto, per la Proposizione 9.5, abbiamo

$$\sin\frac{1}{x} \cong \frac{1}{x} \qquad \textit{per } x \to +\infty.$$

Inoltre, poiché l'elevamento a potenza conserva l'equivalenza, si conclude

$$\sin^2\frac{1}{x} \cong \frac{1}{x^2} \qquad \textit{per } x \to +\infty.$$

D'altra parte

$$1 + x + x^2 \cong x^2$$

e quindi

$$\sqrt{1 + x + x^2} \cong x.$$

In definitiva il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = 0.$$

Esempio 9.21 *Calcolare*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\,\log(1+3x^2)}{e^{2\sin x}-\cos x}$$

Si tratta di una forma 0/0. Il numeratore è equivalente a $3x^3$. Il denominatore richiede maggiore attenzione. Possiamo scrivere

$$e^{2\sin x} - \cos x = e^{2\sin x} - 1 + 1 - \cos x.$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned} e^{2\sin x} - 1 &\cong 2x \\ 1 - \cos x &\cong x^2/2 \end{aligned}$$

Siamo nelle ipotesi della Proposizione 9.7: poiché

$$2x + x^2/2 \neq 0$$

possiamo affermare che

$$\begin{aligned} e^{2\sin x} - \cos x &\cong 2x + x^2/2 \\ &\cong 2x. \end{aligned}$$

infatti $x \to 0$ e possiamo utilizzare la Proposizione 9.18.

Pertanto il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^3}{2x} = 0.$$

Esempio 9.22 *Consideriamo la funzione*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+2x} - \cos x - \tan x = \\ &= \sqrt{1+2x} - 1 + 1 - \cos x - \tan x. \end{aligned}$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x}-1 &\cong x, &(9.3)\\ 1-\cos x &\cong x^2/2, &(9.4)\\ -\tan x &\cong -x, &(9.5)\end{aligned}$$

quindi saremmo tentati di scrivere

$$f(x) \cong x^2/2 \tag{9.6}$$

Se consideriamo direttamente (9.3) e (9.5) otteniamo

$$\sqrt{1+2x}-1-\tan x \cong x-x=0$$

scrittura evidentemente priva di senso. Quindi l'equivalenza NON si conserva nella somma.

Alla stessa conclusione si giunge se cambiamo l'ordine di sommazione. Da (9.3) e (9.4) otteniamo correttamente

$$\sqrt{1+2x}-1+1-\cos x \cong x+x^2/2.$$

Per applicare la Proposizione 9.7 ciascun addendo deve essere equivalente ad un monomio. Pertanto, in base alla Proposizione 9.18

$$\sqrt{1+2x}-1+1-\cos x \cong x+x^2/2 \cong x.$$

A questo punto otteniamo nuovamente una scrittura priva di senso

$$\left(\sqrt{1+2x}-1+1-\cos x\right)-\tan x \cong x-x=0.$$

Vedremo in seguito che l'equivalenza (9.6) è falsa.

9.3 Limiti notevoli con infiniti

Proposizione 9.23 *Per ogni $p>0$ e per ogni $b>1$*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{b^x}=0.$$

Gli esempi seguenti mostrano come utilizzare i limiti notevoli, accompagnati da qualche semplice artificio.

Esempio 9.24 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin 4^x}{2^x-1}.$$

Si tratta di una forma $\frac{+\infty}{+\infty}$. In base alla Proposizione 9.16 abbiamo

$$\begin{aligned}x+\sin 4^x &\cong x,\\ 2^x-1 &\cong 2^x.\end{aligned}$$

Pertanto il limite assegnato si riduce a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=0.$$

Esempio 9.25 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+1}}{x^6+x^3}$$

Si tratta di una forma $\frac{\pm\infty}{+\infty}$. *Al numeratore abbiamo*

$$e^{x^2+1} = e\ e^{x_2}$$

Riguardo il denominatore osserviamo che

$$x^6+x^3 \cong x^6$$

Pertanto il limite assegnato si riduce a

$$e \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^6}.$$

Se cambiamo variabile $t = x^2 \to +\infty$, *il limite si riduce a*

$$e \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^3} = +\infty.$$

Esempio 9.26 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/\sqrt{x}} \tan x^5.$$

Si tratta di una forma $(+\infty)\cdot 0$. *Anzitutto cerchiamo di semplificare il limite: per* $x \to 0^+$

$$\tan x^5 \cong x^5$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/\sqrt{x}} \tan x^5 = \lim_{x\to 0^+} e^{1/\sqrt{x}} x^5.$$

Ora possiamo cambiare variabile: $t = 1/\sqrt{x} \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/\sqrt{x}} x^5 = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^{10}} = +\infty.$$

Esempio 9.27 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x+1}} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$$

Si tratta di una forma $(+\infty)\cdot 0$. *Anzitutto cerchiamo di semplificare il limite: per* $x \to +\infty$

$$1-\cos\frac{1}{x} \cong \frac{1}{2x^2}$$

Quindi ci siamo ricondotti al limite

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x^2}$$

Come sopra, cambiamo variabile

$$t = \sqrt{x+1} \to +\infty$$

ed il limite si riduce a

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{\left(t^2-1\right)^2}$$

D'altra parte sappiamo che per $t \to +\infty$

$$\left(t^2-1\right)^2 = t^4 - 2t^2 + 1 \cong t^4$$

Dunque il limite si riduce ulteriormente a

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^4} = +\infty$$

Prima di un esempio più impegnativo enunciamo un ovvio corollario della Proposizione 9.23.

Corollario 9.28 *Sia* $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = +\infty$. *Per ogni* $b > 1$ *e per ogni* $p > 0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(\varphi(x))^p}{b^{\varphi(x)}} = 0.$$

Esempio 9.29 (più impegnativo) *Calcolare*

$$\lim_{x\to0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}}\tan x^5.$$

E' ancora una forma $(+\infty)\cdot 0$. *Come in un esempio precedente abbiamo*

$$\lim_{x\to0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}}\tan x^5 = \lim_{x\to0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}}x^5.$$

In questo caso non possiamo cambiare variabile, pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} e^{1/\sqrt{\sin x + x}}x^5 &= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{\left(1/\sqrt{\sin x + x}\right)^p}\left(1/\sqrt{\sin x + x}\right)^p x^5 = \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{\left(1/\sqrt{\sin x + x}\right)^p}\frac{x^5}{(x+\sin x)^{p/2}}\end{aligned}$$

Come sopra, il primo fattore è infinito (per ogni $p > 0$*), per* $p = 10$ *il secondo fattore tende ad* 1 *e quindi, complessivamente*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/\sqrt{\sin x + x}}}{\left(1/\sqrt{\sin x + x}\right)^p}\frac{x^5}{(x+\sin x)^{p/2}} = +\infty$$

Proposizione 9.30 *Per ogni* $p > 0$ *e per ogni* $b > 0$, $b \neq 1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_b x}{x^p} = 0$$

Corollario 9.31 *Per ogni* $p > 0$, *per ogni* $b > 1$, $b \neq 1$ *e per ogni* $q > 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_b^q x}{x^p} = 0.$$

Esempio 9.32 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2/\sqrt{x}}$$

Anzitutto trasformiamo

$$x^{2/\sqrt{x}} = e^{\frac{2}{\sqrt{x}}\log x}$$

quindi siamo ricondotti a calcolare il limite dell'esponente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}\log x = 0$$

Dunque, tornando al limite assegnato, abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^{2/\sqrt{x}} &= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{\sqrt{x}}\log x} = \\ &= e^0 = 1.\end{aligned}$$

Esercizio 9.33 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x + \log^2 x}{\cos^2 x + 2^x}$$

Proposizione 9.34 *Per ogni $p > 0$ e per ogni $b > 0$, $b \neq 1$*

$$\lim_{x\to0^+} x^p \log_b x = 0.$$

Corollario 9.35 *Per ogni $p > 0$, per ogni $b > 1$, $b \neq 1$ e per ogni $q > 0$*

$$\lim_{x\to0^+} x^p \left|\log_b x\right|^q = 0.$$

Se scriviamo

$$x^p \left|\log_b x\right|^q = \frac{\left|\log_b x\right|^q}{\frac{1}{x^p}},$$

osserviamo che anche i limiti ... si presentano come confronto di infiniti.

Esempio 9.36 *Calcolare*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log x \, \arctan x^2}{\sqrt[3]{1+3x} - 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x \, \arctan x^2}{\sqrt[3]{1+3x} - 1}$$

Esempio 9.37 *Calcolare*

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x+x^3}\log\sin x.$$

Si tratta di una forma $0\cdot(-\infty)$. Studiamo separatamente i due fattori.

Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$x + x^3 \cong x$$

(vedi Proposizione 9.18) e quindi

$$\sqrt{x+x^3} \cong \sqrt{x}.$$

Riguardo il secondo fattore adoperiamo il seguente artificio

$$\log \sin x = \log \left(x \frac{\sin x}{x} \right) = \log x + \log \frac{\sin x}{x} \cong \log x,$$

infatti $\log x \to -\infty$ *mentre* $\log(\sin x/x) \to 0$ *(vedi Proposizione 9.16).*

Ora possiamo risolvere il limite assegnato

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x + x^3} \log \sin x = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \log x = 0.$$

Proposizione 9.38 *Per ogni* $b > 1$ *e per ogni* $a > 0$

$$\lim_{x\to -\infty} b^x |x|^a = 0$$

9.4 Confronto di infiniti ed infinitesimi

Si abbiano $A \subset \mathbf{R}$, x_0 punto di accumulazione per A, $f_1, f_2 : A \to \mathbf{R}$.

Partiamo con una definizione sintetica.

Definizione 9.39 *La funzione* f *si dice infinita in* x_0 *se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Definizione 9.40 *Se* f_1 *ed* f_2 *sono funzioni infinite in* x_0 *si dice che* f_1 è di ordine superiore a f_2 *se risulta*

$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| = +\infty. \tag{9.7}$$

Se vale la (9.7) si dice che "f_1 *diverge più rapidamente di* f_2". Talvolta si dice anche che "f_1 *cresce più rapidamente di* f_2", ma ovviamente non vi è alcun riferimento alla monotonia. Si dice anche che f_2 è trascurabile rispetto a f_1.

Esempio 9.41 *In base alla Proposizione 9.23 possiamo affermare che, per* $x \to +\infty$*, gli esponenziali (di base* $b > 1$*) sono infiniti di ordine superiore alle potenze.*

In base alla Proposizione 9.30 (e al Corollario 9.31) possiamo affermare che, per $x \to +\infty$*, le potenze sono infiniti di ordine superiore ai logaritmi (e a tutte le potenze dei logaritmi).*

Infine, assegnate due potenze x^{p_1} *e* x^{p_2}*, per* $x \to +\infty$*, la funzione infinita* x^{p_1} *è di ordine superiore a* x^{p_2} *se e solo se* $p_1 > p_2$*.*

Sussistono definizioni in un certo senso analoghe per gli infinitesimi.

Definizione 9.42 *Se* f_1 *ed* f_2 *sono funzioni infinitesime in* x_0 *si dice che* f_1 *è* di ordine superiore a f_2 *se risulta*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0. \tag{9.8}$$

Se vale la (9.8) si dice anche che "f_1 *tende a* 0 *più rapidamente di* f_2". Si dice anche che f_1 è trascurabile rispetto a f_2.

Osservazione 9.43 *Si noti che, anche se (9.7) e (9.8) sono formalmente lo stesso limite, la denominazione per infiniti ed infinitesimi è "opposta".*

In generale sussiste la seguente definizione.

Definizione 9.44 *Assegnate due funzioni qualsiasi f_1 ed f_2 definite su A, si dice che f_1 è* trascurabile *rispetto ad f_2 (in x_0) se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Osservazione 9.45 *Se $h(x)$ è trascurabile rispetto ad $f(x)$ in x_0, allora*

$$f(x) + h(x) \cong f(x).$$

Di conseguenza, in tutte le somme, i termini trascurabili possono essere "cancellati", ottenendo una funzione equivalente.

È vero anche il viceversa, nel senso che, se due funzioni sono equivalenti in x_0, allora differiscono per un termine trascurabile rispetto a ciascuna di esse.

9.4.1 Teoria degli ordini

Vogliamo sottolineare che noi non abbiamo definito l'*ordine* di una funzione infinita o infinitesima. Assai di rado useremo questa terminologia e sarà solo nel senso delle definizioni precedenti.

Affermazioni generiche, tratte da una non meglio precisata "Teoria degli ordini", possono condurre gli studenti a gravi errori negli esercizi di calcolo dei limiti.

Consideriamo ad esempio il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^x + 1)}{\sqrt{x} + 1}. \tag{9.9}$$

Quella che segue è una tipica *risoluzione sbagliata*:

a) al numeratore abbiamo un logaritmo,

b) al denominatore abbiamo una potenza,

c) i logaritmi sono di ordine inferiore rispetto alle potenze.

pertanto concludiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^x + 1)}{\sqrt{x} + 1} = 0.$$

L'affermazione *c)* è senza dubbio corretta; l'affermazione *b)* è sostanzialmente corretta, nel senso che la funzione al denominatore è asintoticamente equivalente a $\sqrt{x}$. L'affermazione *a)* è del tutto *non corretta*, nel senso che la funzione al numeratore non è equivalente ad alcuna funzione $|\log_b x|^q$.

La Teoria degli ordini si propone di precisare il concetto di ordine e introduce una valutazione numerica dell'ordine stesso (rispetto ad infiniti ed infinitesimi campione). Per le potenze appare naturale porre l'ordine uguale all'esponente. In realtà semplici esempi mostrano che i numeri reali non sono sufficienti per valutare tutti i possibili ordini. Ad esempio, per $x \to +\infty$, le funzioni 2^x, $x^4 2^x$

e 3^x da una parte hanno ordine superiore rispetto a tutte le potenze e dall'altra hanno ordine diverso tra loro (strettamente crescente).

Ma il vero obiettivo della teoria dovrebbe essere quello di calcolare rapidamente un'ampia classe di limiti che si presentano come forme indeterminate. A questo scopo è necessario fornire gli strumenti (ossia i teoremi) per stimare l'ordine di una generica funzione infinita (o infinitesima) ottenuta tramite operazioni e/o composizione. Dunque, se vogliamo utilizzare efficacemente questa teoria, dobbiamo mettere in conto una consistente trattazione preliminare. Secondo il parere di chi scrive, i costi di questa trattazione superano largamente i benefici nello svolgimento degli esercizi.

Inoltre va precisato che, con tutto il suo pesante armamentario, la teoria degli ordini, pur correttamente applicata, non riuscirebbe a calcolare alcuni limiti, ad esempio il limite (9.9).

A conclusione del paragrafo, per soddisfare la curiosità del lettore, presentiamo lo svolgimento corretto dello stesso limite (9.9), utilizzando il linguaggio a noi familiare delle equivalenze asintotiche. Abbiamo

$$\begin{aligned} \log(e^x+1) &= \log(e^x(1+e^{-x})) \\ &= \log e^x + \log(1+e^{-x}) \\ &= x + \log(1+e^{-x}) \\ &\cong x, \end{aligned}$$

e d'altra parte

$$\sqrt{x}+1 \cong \sqrt{x},$$

dove, in entrambe le equivalenze, abbiamo utilizzato la Proposizione 9.16. Dunque il limite (9.9) si riduce a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

9.5 Differenze di infiniti

Ricordiamo che le forme indeterminate sono quattro

$$+\infty-\infty, \qquad 0\cdot(\pm\infty)\,, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Nel caso della differenza di infiniti si presentano situazioni molto diverse.

Abbiamo casi banali, in cui applichiamo le Proposizione 9.7 e 9.18. Ad esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2+3x}-x = ... = -\infty$$

Altri casi non sono così banali. Ad esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x}-x \tag{9.10}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+2x}-x \tag{9.11}$$

Il limite (9.10) è risolubile con artifici, mentre (9.11) sfugge anche agli artifici. Cerchiamo allora di presentare una strategia generale.

Si abbia
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$
e si voglia studiare la forma indeterminata
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = +\infty - \infty$$

Si suggerisce di effettuare la trasformazione
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right). \tag{9.12}$$
Ci siamo ricondotti a studiare la forma indeterminata
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Supponiamo ora di aver risolto
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$$

- Se $\ell \neq 1$, la forma al secondo membro di (9.12) è determinata e il risultato è infinito (con il segno appropriato).
- Se $\ell = 1$ (infiniti equivalenti), la forma al secondo membro di (9.12) è indeterminata $+\infty \cdot 0$. In questo caso si suggerisce di studiare la natura del termine infinitesimo
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right),$$
infatti per gli infinitesimi disponiamo di comode equivalenze.

Osservazione 9.46 *Riesaminiamo la procedura descritta sopra, basata su (9.12). Se risulta $\ell = 0$ o $\ell = \infty$ vuol dire che i due infiniti hanno ordine diverso. Possiamo affermare che* la differenza di infiniti di ordine diverso è un infinito con il segno dell'infinito di ordine superiore. *La verifica di questa affermazione è immediata.*

Esempio 9.47 *Calcolare*
$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^9 2^x - x^4 3^x \right)$$
Si tratta della differenza di due infiniti il cui ordine non è immediatamente stimabile. Applichiamo la procedura descritta sopra e otteniamo
$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^9 2^x - x^4 3^x \right) = -\infty$$

Esempio 9.48 *Svolgiamo il limite (9.11). Applichiamo anzitutto la procedura descritta sopra.*
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 4x^2} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} x \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 + 4x^2}}{x} - 1 \right)$$

Siamo nel caso difficile in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+4x^2}}{x} = 1.$$

Quindi si deve studiare

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+4x^2}}{x} - 1\right) \cong \frac{4}{3x}$$

e si conclude

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+2x}}{x} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

Osservazione 9.49 *Talvolta abbiamo la differenza di due infiniti con un terzo addendo convergente. Abbiamo due possibilità.*

- *Possiamo accorpare il termine convergente ad uno dei due infiniti, applicando la regola generale.*
- *In altri casi, per semplificare i calcoli, potrebbe essere conveniente tenere da parte il termine convergente, che verrà aggiunto solo dopo aver risolto la forma indeterminata* $+\infty - \infty$.