Analisi Matematica - 18.3.2019

Sunday, March 17, 2019 18:49

Limiti di successioni

Teoremi algebrici

Retta reale estesa

<u>Def</u>: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ "$\mathbb{R}$ ampliato"

L'operazione di limite è a valori in $\overline{\mathbb{R}}$.
Se scrivo $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ vuol dire che $\{a_n\}$ è di tipo 1 o 2 o 3.

Si estende ad $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordinamento di $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty$$

Possiamo estendere ad $\overline{\mathbb{R}}$ le operazioni di $\mathbb{R}$?

Quasi sempre sì:

$$a + \infty = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$a - \infty = -\infty \quad ''$$

$$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a > 0 \\ \mp\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \left(\text{In particolare } \frac{0}{\pm\infty} = 0\right)$$

Problemi nascono nei seguenti casi:

$$+\infty - \infty \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$
$$-\infty + \infty$$

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{a}{0} \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$$

<u>Teorema</u>: Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni tali che

$$a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}} \qquad b_n \to b \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

- $a_n+b_n \to a+b$
- $a_n-b_n \to a-b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda a_n \to \lambda a$
- $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$

se l'operazione prevista a dx. ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$

oss: In particolare se $a, b \in \mathbb{R}$ OK sempre, tranne nell'ultimo caso se $a=b=0$ o $a=b=\pm\infty$.

- Se l'op. a destra non ha senso non significa che siamo nel caso 4. (irregolarità della succ.), vuol dire solo che non si può dedurre il comportamento di a_n+b_n da a e b (per esempio).
  Si dice che abbiamo una forma di INDECISIONE o forma INDETERMINATA.

Esempio: $0 \cdot (+\infty)$

$a_n \to 0 \qquad b_n \to +\infty$

- $a_n = \dfrac{1}{n} \quad b_n = n^2 \quad a_n \to 0,\ b_n \to +\infty \quad a_n \cdot b_n = n \to +\infty$
- $a_n = \dfrac{1}{n^2} \quad b_n = n \quad a_n \to \left[\dfrac{1}{\infty}\right] 0 \quad b_n \to +\infty \quad a_n \cdot b_n = \dfrac{1}{n} \to 0$
- $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0 \quad b_n = 3n \to \left[3 \cdot (+\infty)\right] +\infty \quad a_n \cdot b_n = 3 \to 3$
- $a_n = -\dfrac{1}{n} \to 0 \quad b_n = n^2 \to +\infty \quad a_n \cdot b_n = -n \to -\infty$
- $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0 \quad b_n = n \to +\infty \quad a_n \cdot b_n = (-1)^n$ irregolare

0

Perché $a_n \to 0$? $\quad a_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{(-1)^n}_{\text{limitata}} \to 0$

Conseguenze dei teoremi algebrici, confronto, permanenza del segno

$\{a_n\}$ $\{b_n\}$ succ.

1. $\left.\begin{array}{l} a_n \leq b_n \text{ def in.} \\ a_n \to a \in \mathbb{R} \\ b_n \to b \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq b$

[Dim: $\left.\begin{array}{l} b_n - a_n \to b - a \\ b_n - a_n \geq 0 \text{ def.} \end{array}\right\} \overset{\text{(teo. algebrico)}}{\Rightarrow} b - a \geq 0 \Rightarrow b \geq a$]

2. $\left.\begin{array}{l} |a_n| \leq b_n \text{ definit.} \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \to 0$

[$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-b_n} \leq a_n \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{b_n}$ def. $\underset{\text{confronto}}{\Rightarrow} a_n \to 0$]

3. Se a_n è limitata e $b_n \to 0$ allora $a_n \cdot b_n \to 0$

[a_n limitata $\Rightarrow \exists K > 0 : -K \leq a_n \leq K \quad \forall n$

$|a_n| \leq K$

$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq \underbrace{K \cdot |b_n|}_{\downarrow\, 0} \underset{2}{\Rightarrow} a_n \cdot b_n \to 0$

$|b_n| \to 0 \Rightarrow K|b_n| \to 0$]

Limiti delle potenze

Limiti delle potenze

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>0 \\ 1 & \text{se } a=0 \\ 0 & \text{se } a<0 \end{cases}}$$

se $a>0$ già visto

se $a=0$ $\quad n^0 = 1$ succ. costante di valore 1

se $a<0$

$$n^a = \frac{1}{n^{-a}} \xrightarrow[-a>0]{} \left[\frac{1}{+\infty}\right] \quad 0$$

$$n^{-2} = \frac{1}{n^2}$$

Limiti di polinomi e rapporti tra polinomi

" Raccolgo il termine di grado più grande "

- $\lim_{n\to+\infty} (n^2 - 3n + 6) = [+\infty - \infty]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^2}_{\downarrow +\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{3}{n}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{6}{n^2}}_{\downarrow 0}\right) = [+\infty \cdot 1] = +\infty$$

- $\lim_{n\to+\infty} (-n^3 + 6n^2 + 8) = [-\infty + \infty] =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^3}_{\downarrow +\infty}\left(-1 + \underbrace{\frac{6}{n}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{8}{n^3}}_{\downarrow 0}\right) = [+\infty(-1)] = -\infty$$

- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 + 3n^2 + 5}{4n^3 - 7n + 8} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \qquad \dfrac{1}{4}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1 + \frac{3}{n}^{\to 0} + \frac{5}{n^3}^{\to 0}\right)}{\ldots} = \left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{\cdot}{n}+\frac{\cdot}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(4-\underbrace{\frac{7}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{8}{n^3}}_{\to 0}\right)} = \left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

Lo stesso metodo funziona per

$$\frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(n)}{Q(n)} \qquad \text{grado di } P = \deg P$$

Si ottiene

- se $\deg P = \deg Q \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ = rapporto dei coeff. di grado più alto

- se $\deg P < \deg Q \Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$$

- se $\deg P > \deg Q \Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$$ (dipende dal segno dei coeff. di grado più alto)

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n+2}{n^5+7n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1-\overbrace{\frac{3}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0}\right)}{n^{\cancel{5}3}\left(1+\underbrace{\frac{7}{n^4}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{n^5}}_{\to 0}\right)} = \left[\frac{1}{+\infty}\cdot\frac{1}{1}\right] = 0$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n}{-n^2+6n+2} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$$

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + 2n}{-n^2+6n+2} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\cancel{3}}\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(-1+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \left[+\infty \cdot \frac{1}{-1}\right] = -\infty$$

$\frac{2}{n^2} \to 0$, $\frac{6}{n} \to 0$, $\frac{2}{n^2} \to 0$

Stessa tecnica si deve applicare se ci sono potenze non intere

- $$\lim_{n \to +\infty} \left(n\sqrt{n} + 2n + 3 \right) =$$

$n\sqrt{n} = n \cdot n^{1/2} = n^{3/2}$

$$= \lim_{n \to +\infty} n^{3/2}\left(1 + \frac{2}{n^{1/2}} + \frac{3}{n^{3/2}}\right) \to \left[+\infty \cdot 1\right] =$$

$$= +\infty .$$

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n + 2n\sqrt{n} + 4}{2n - 4n\sqrt[3]{n} + 7} =$$

$n\sqrt{n} = n^{3/2}$

$n\sqrt[3]{n} = n \cdot n^{1/3} = n^{\frac{4}{3}}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2 + \frac{4}{n\sqrt{n}}\right)}{\cancel{n}\sqrt[3]{n}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{n}} - 4 + \frac{7}{n\sqrt[3]{n}}\right)} = \left[(+\infty) \cdot \frac{2}{-4}\right]$$

$= -\infty$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, $\frac{4}{n\sqrt{n}} \to 0$, $\frac{2}{\sqrt[3]{n}} \to 0$, $\frac{7}{n\sqrt[3]{n}} \to 0$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}} = \frac{n^{1/2}}{n^{1/3}} = n^{1/6} \to +\infty$$

Stessa tecnica funziona se ci sono termini limitati

$$\lim \left(n^2 \ldots \right)$$

• $$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 - n \operatorname{sen} n\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2 \Big(1 - \underbrace{\frac{1}{n}\operatorname{sen} n}_{\to 0}\Big) = [+\infty \cdot 1] = +\infty$$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\{\operatorname{sen} n\}$ limitata $\Rightarrow \frac{1}{n}\operatorname{sen} n \to 0$

• $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n! + \operatorname{sen} \log(n^2+8)}{\sqrt{n}} = 0$$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

$$a_n = \overset{\le 1}{\cos n!} + \operatorname{sen} \overset{\le 1}{\log(n^2+8)}$$

$$\underset{\ge -1}{-1} - \underset{\ge -1}{1} \le a_n \le 1 + 1$$

$$-2 \le a_n \le 2 \Rightarrow \{a_n\} \text{ è limit.}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \forall a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}}$$

• $a > 1$ $\quad a^n = (1 + \underbrace{(a-1)}_{>0>-1})^n \ge 1 + n(a-1)$ $\quad \left[(1+x)^n \ge 1 + nx \quad x > -1 \ \forall n \in \mathbb{N}\right]$

$1 + n\underset{>0}{(a-1)} \to +\infty \Rightarrow a^n \to +\infty$

teo. di confronto (a due succ.)

• $a = 1$ $\quad a^n = 1$ $\quad$ succ. costante

- $0<a<1$

$$a^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} \to \left[\frac{1}{+\infty}\right] 0$$

$\frac{1}{a}>1$

- $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a>0}$$

Se $a>1$:

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x>-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{\ }$ è cresc.

$(1+x) \geq \sqrt[n]{1+nx}$

$\left[1+nx = a \qquad x = \frac{a-1}{n} > 0 > -1\right]$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} \\ a>1 \underset{\sqrt[n]{\ }\text{ crescente}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underset{\downarrow\atop 1}{1} \leq \sqrt[n]{a} \leq \underset{\downarrow\atop 1}{1+\frac{a-1}{n}} \quad \frac{a-1}{n}\to 0$$

Per confronto $\sqrt[n]{a} \to 1$

Se $a=1$ $\sqrt[n]{a}=1$ succ. costante

Se $0<a<1$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to \left[\frac{1}{1}\right] = 1$$

Tre criteri utili nel calcolo dei limiti:

CRITERIO DELLA RADICE Sia $\{a_n\}$ una succ. tc. $a_n \geq 0$ definit.

Supp. che

$$\sqrt[n]{a_n} \to \rho \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora

se $\rho > 1$ si ha che $a_n \to +\infty$
se $\rho < 1$ si ha che $a_n \to 0$
se $\rho = 1$ nulla si può dire

CRITERIO DEL RAPPORTO: Sia $\{a_n\}$ una succ. tale che $a_n > 0$ definit.
Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora valgono le stesse conclusioni del criterio della radice

RAPPORTO → RADICE Sia $\{a_n\}$ succ. t.c. $a_n > 0$ definit.

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ allora anche $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$.

Non vale il viceversa:

a_n: $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$

$$1 \leq a_n \leq 2 \Rightarrow \underset{\underset{1}{\parallel}}{\sqrt[n]{1}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\sqrt[n]{2}}$$

$\underset{\text{confronto}}{\Rightarrow} \sqrt[n]{a_n} \to 1$

Ma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$: $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots$

ē irregolare.