Capitolo 10

Comportamenti asintotici

10.1 Funzioni divergenti all'infinito

Sia $A \subset \mathbf{R}$ tale che $+\infty$ sia punto di accumulazione per A. Consideriamo una funzione $f : A \to \mathbf{R}$.

Ora consideriamo il caso in cui

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty.$$

In questo caso può essere interessante confrontare la crescita della funzione f con la crescita della funzione lineare x.

Passiamo a calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Si tratta evidentemente di una forma indeterminata. Supponiamo che risulti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

- Se $m = 0$, si dice che la funzione presenta una *crescita sublineare (infinito di ordine inferiore al primo)*. In base alla Proposizione ..., per ogni $\epsilon > 0$, localmente a $+\infty$ risulta

  $$|f(x)| \leq \epsilon\, |x|\,.$$

  Ossia, per x sufficientemente grande, il grafico di f è contenuto nel settore delimitato dalle rette $y = \pm\epsilon x$ (ovviamente solo da una parte rispetto all'asse delle x stesse).

  Questo comportamento è quello della funzione $\log_b$ e delle funzioni radice

- Se $m = \pm\infty$, si dice che la funzione presenta una *crescita superlineare (infinito di ordine superiore al primo)*. In base alla Proposizione ..., per ogni $M > 0$, localmente a $+\infty$ risulta

  $$M\, |x| \leq |f(x)|$$

  Ossia, per x sufficientemente grande, il grafico di f è contenuto...

  Questo comportamento è quello della funzione esponenziale $\exp_b$ (con $b > 1$) e delle funzioni potenza con esponente $p > 1$.

- Se $m \in \mathbf{R} - \{0\}$, si dice che la funzione presenta una *crescita lineare*. In questo caso si passa a studiare un altro limite

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx).$$

Definizione 10.1 *Se $q \in \mathbf{R}$ si dice che la retta di equazione*

$$y = mx + q$$

rappresenta (per $x \to +\infty$) un asintoto obliquo *per il grafico di f.*

Osservazione 10.2 *Ovviamente, qualora $-\infty$ sia punto di accumulazione per A sussistono definizioni analoghe per $x \to -\infty$.*

Nel caso sia possibile effettuare lo studio sia a $+\infty$ che a $-\infty$, in generale dobbiamo non attenderci lo stesso comportamento.

Osservazione 10.3 *In presenza di asintoti orizzontali o obliqui, lo studio delle intersezioni (nulla vieta che tali intersezioni esistano!) e della posizione del grafico rispetto agli asintoti fornisce utili informazioni.*

Osservazione 10.4 *Consideriamo $x \to +\infty$ e $f(x) \to +\infty$. Si può dimostrare quanto segue:*

- *Se f è convessa all'infinito, la crescita non può essere sublineare e il grafico di f si trova al di sopra dell'eventuale asintoto a $+\infty$ (orizzontale o obliquo).*

- *Se f è concava all'infinito, la crescita non può essere superlineare e il grafico di f si trova al di sopra dell'eventuale asintoto a $+\infty$ (orizzontale o obliquo).*

Dunque, se abbiamo una funzione con crescita superlineare (risp. sublineare), ci aspettiamo che all'infinito sia convessa (risp. concava).

10.1.1 Esempi sulle funzioni divergenti

Esempio 10.5 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \log(e^x - x).$$

In questo momento non siamo in grado di determinare il dominio, ossia risolvere

$$e^x - x > 0.$$

In seguito potremo dimostrare che essa è verificata per ogni x e quindi il dominio di f è dato da tutto $\mathbf{R}$.

È immediato verificare che

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x - x) = +\infty$$

Inoltre abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \to +\infty} e^x (1 - \frac{x}{e^x}) = +\infty$$

in quanto

$$\frac{x}{e^x} \to 0.$$

Dunque, per il Teorema della permanenza del segno, è chiaro che ha senso studiare la funzione f per $x \to \pm\infty$ e risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log(e^x - x) = +\infty$$

Rimane da studiare il tipo di crescita.

Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x - x)}{x}$$

A questo punto osserviamo che

$$\begin{aligned}
\log(e^x - x) &= \log\left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right] \\
&= \log e^x + \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \\
&= x + \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right).
\end{aligned}$$

Per la () abbiamo

$$\log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \to 0.$$

Utilizzando la Proposizione **??** *si deduce*

$$\log(e^x - x) = x + \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \cong x$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x - x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Quindi la nostra f presenta una crescita lineare a $+\infty$.

Passiamo a valutare l'esistenza dell'asintoto obliquo. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} (\log(e^x - x) - x)$$

Questa forma indeterminata $+\infty - \infty$ si può risolvere immediatamente; infatti

$$\begin{aligned}
\log(e^x - x) - x &= \log(e^x - x) - \log e^x \\
&= \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)
\end{aligned}$$

Quindi, tenendo conto di (), si conclude

$$\lim_{x\to+\infty} [\log(e^x - x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 0.$$

Dunque si conclude che la nostra f presenta, per $x \to +\infty$, l'asintoto obliquo

$$y = x$$

*Ovviamente, nel calcolo del limite () avremmo ottenuto lo stesso risultato utilizzando la trasformazione (**??**). Infatti*

$$\log(e^x - x) - x = x\left[\frac{\log(e^x - x)}{x} - 1\right].$$

Utilizzando la (), studiamo il termine in parentesi quadra

$$\begin{aligned}\frac{\log(e^x - x)}{x} - 1 &= \frac{x + \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x} - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{x}\log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{x}\log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right).\end{aligned}$$

Pertanto, sostituendo in () otteniamo

$$\begin{aligned}\log(e^x + x) - x &= x\left(\frac{\log(e^x - x)}{x} - 1\right) \\ &= x\frac{1}{x}\log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \\ &= \log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right).\end{aligned}$$

esattamente come sopra.

Possiamo valutare le intersezioni tra il grafico di f e l'asintoto obliquo. Dobbiamo risolvere la disequazione

$$\log(e^x - x) \geq x$$

Applicando l'esponenziale ad ambo i membri otteniamo

$$e^x - x \geq e^x$$

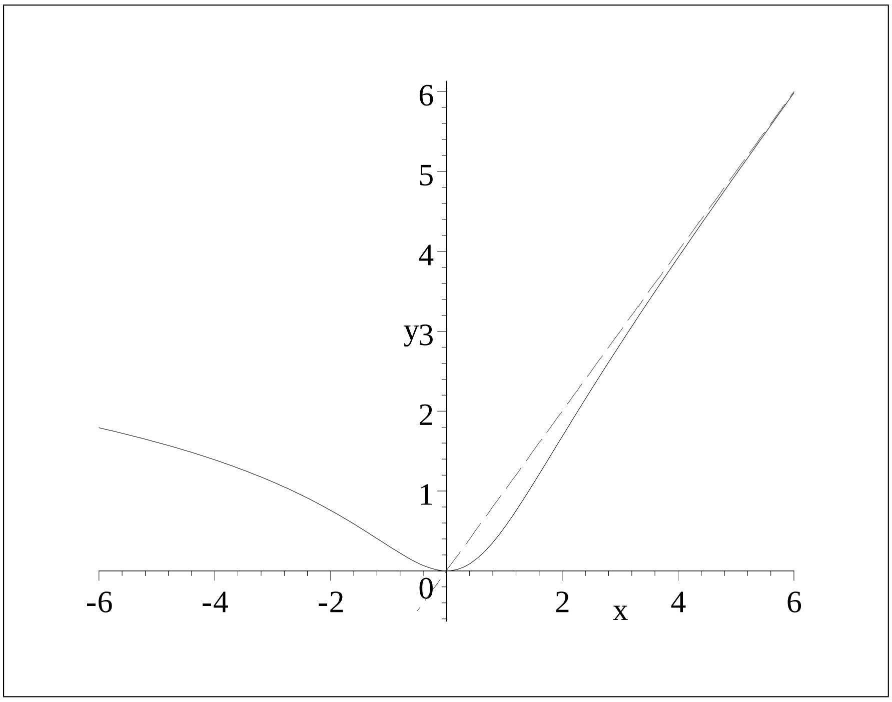
e concludiamo immediatamente $x \leq 0$. Pertanto la funzione f si mantiene al di sotto dell'asintoto obliquo per ogni $x \geq 0$.

Infine si calcola

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(e^x - x)}{x} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{\log(t + e^{-t})}{-t} \\ &= ... = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0\end{aligned}$$

Quindi si conclude che, per $x \to -\infty$, la crescita è sublineare.

Per completezza riportiamo anche il grafico



Esempio 10.6 *Studiamo dominio e comportamento al bordo della funzione*

$$f(x) = e^{1/2x}(x-1)$$

La funzione è definita per $x \neq 0$.

Sono significativi i limiti per x *che tende a* $\pm\infty$ *e a* $0^{\pm}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/2x}(x-1) = \pm\infty$$

Passiamo a valutare il tipo di crescita

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/2x}\frac{(x-1)}{x} = 1$$

Quindi abbiamo una crescita lineare. Studiamo l'eventuale asintoto obliquo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(e^{1/2x}(x-1) - x\right)$$

*Con la trasformazione (**??**) abbiamo*

$$e^{1/2x}(x-1) - x = x\left(e^{1/2x}\frac{x-1}{x} - 1\right)$$

Il termine tra parentesi è infinitesimo e questa volta non si sembra immediata l'applicazione di equivalenze. Dunque utilizziamo la scomposizione suggerita nell'Osservazione ...

$$e^{1/2x}(x-1) - x = x\left(e^{1/2x} - 1\right) - e^{1/2x}$$

Poiché $1/2x \to 0$, *abbiamo*

$$\left(e^{1/2x} - 1\right) \cong \frac{1}{2x}$$

dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \left[x\left(e^{1/2x} - 1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

Pertanto si conclude

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(e^{1/2x}(x-1) - x\right) &= \lim_{x\to0^+} \left[x\left(e^{1/2x} - 1\right) - e^{1/2x}\right] \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

L'asintoto orizzontale (a $\pm\infty$*) è dato da* $y = x - 1/2$

Possiamo anche studiare i limiti per $x \to 0^{\pm}$*. Abbiamo*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} e^{1/2x}(x-1) &= -\infty \\ \lim_{x\to0^-} e^{1/2x}(x-1) &= 0\end{aligned}$$

10.2 Classificazione di infinitesimi

Esattamente come abbiamo fatto con le funzioni divergenti per $x \to \pm\infty$, possiamo introdurre una classificazione per le funzioni infinitesime per $x \to x_0$, essendo $x_0 \in \mathbf{R}$.

Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ punto di accumulazione per A. Assumiamo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Passiamo a calcolare

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0}.$$

Si tratta evidentemente di una forma indeterminata. Supponiamo che risulti

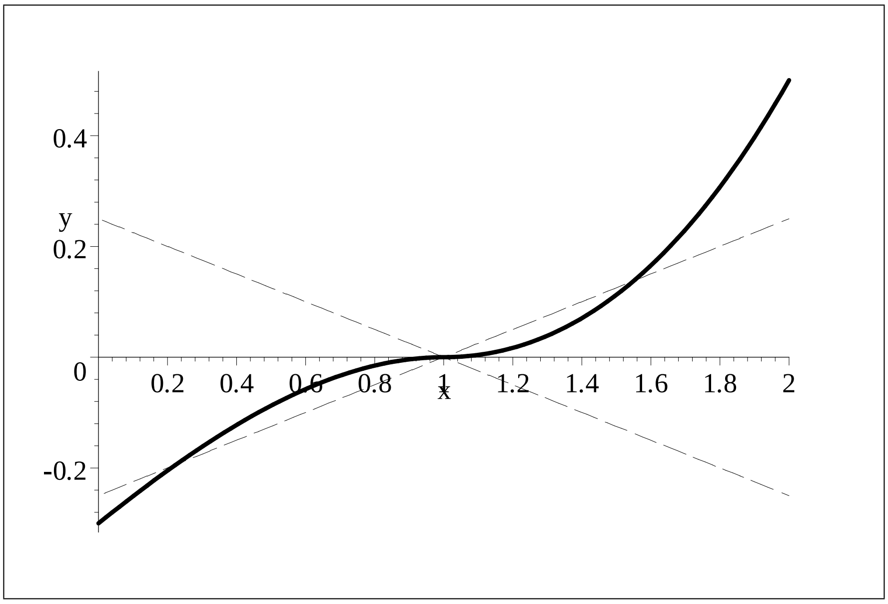
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = \ell$$

Osservazione 10.7 *Anche se* $x_0 \notin A$*, in base alla (...) potremo considerare* $f(x_0) = 0$ *(prolungamento per continuità, cfr ...). Pertanto risulta*

$$\ell = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Vedremo in seguito che quest'ultimo limite prende il nome di derivata di f *in* x_0*. Tuttavia, per il momento, questa interpretazione di* ℓ *non ci interessa.*

Definizione 10.8 *Se* $\ell = 0$ *si dice che* $f(x)$ *è un* infinitesimo di ordine superiore al primo*.*



In base alla Proposizione ... possiamo affermare che, per ogni $\epsilon > 0$, localmente in x_0 si ha

$$\left|\frac{f(x)}{x - x_0}\right| < \epsilon$$

da cui si deduce

$$-\epsilon\,|x - x_0| < f(x) < +\epsilon\,|x - x_0|\,.$$

L'interpretazione grafica di () dovrebbe essere evidente: localmente in x_0 il grafico della funzione è compreso tra due rette passanti per il punto $(x_0, 0)$:

$$\begin{aligned} y &= \epsilon(x - x_0), \\ y &= -\epsilon(x - x_0). \end{aligned}$$

Il coefficiente angolare di tali rette è dato da $\pm\epsilon$, quindi può essere preso piccolo a piacere. Ciò vuol dire che il grafico tende a schiacciarsi sull'asse delle x.

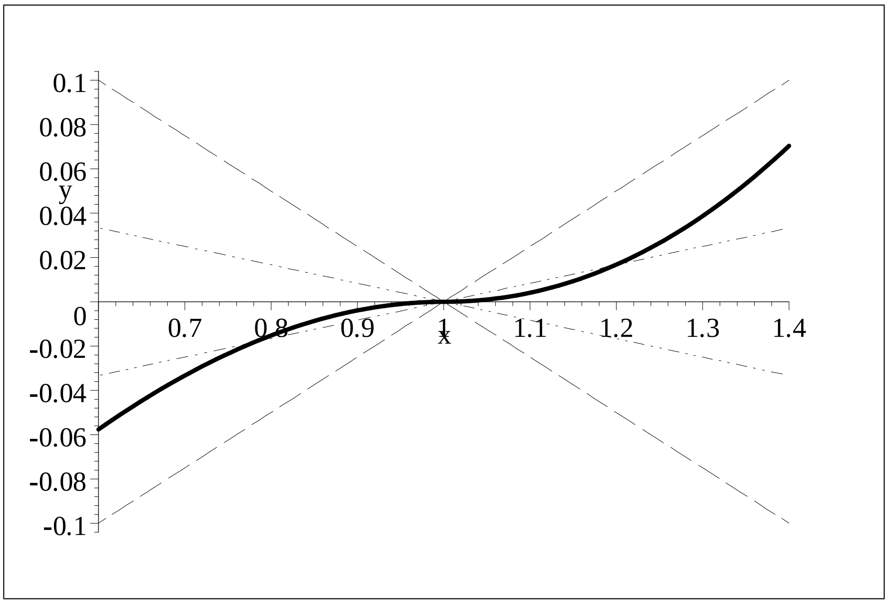
Lasciamo da parte il caso $\ell \in \mathbf{R} - \{0\}$ e passiamo a considerare l'altro caso estremo.

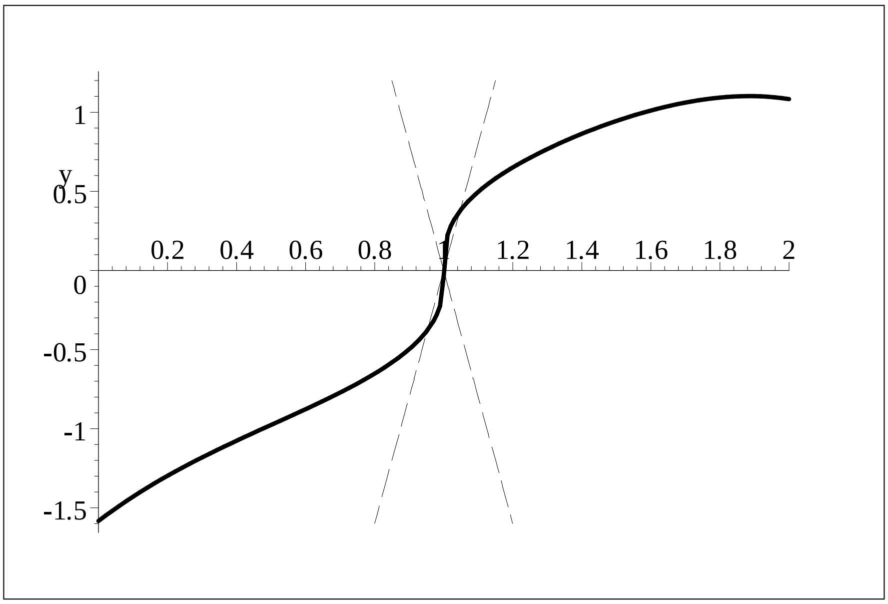
Definizione 10.9 *Se $\ell = +\infty$, si dice che $f(x)$ è un* infinitesimo di ordine inferiore al primo*.*

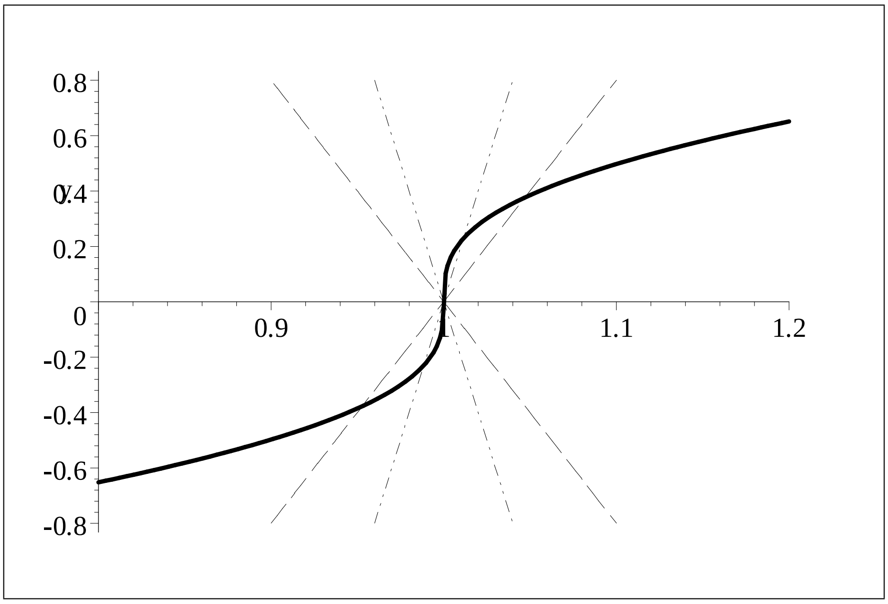
... localmente in x_0 il grafico della funzione è compreso tra due rette passanti per il punto $(x_0, 0)$:

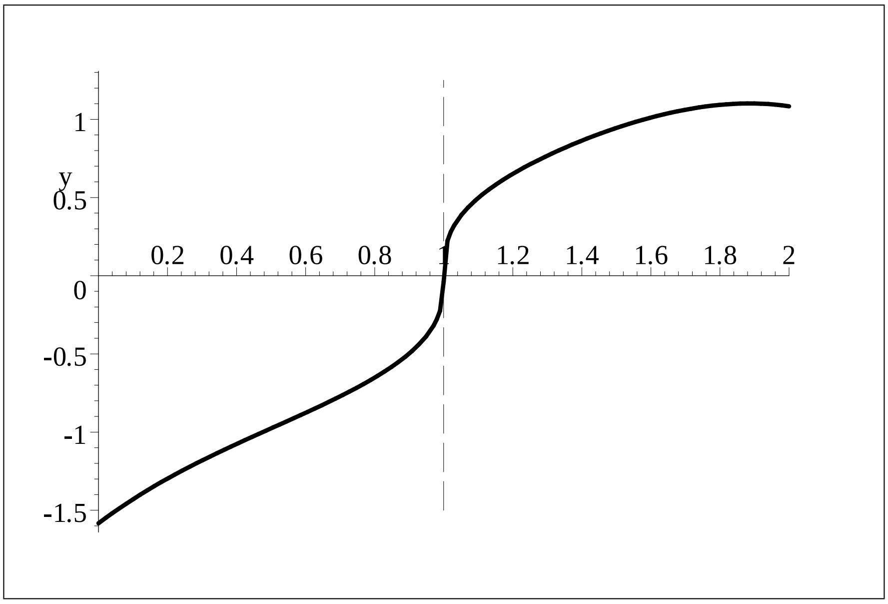
$$\begin{aligned} y &= M(x - x_0), \\ y &= -M(x - x_0). \end{aligned}$$

Il coefficiente angolare di tali rette è dato da $\pm M$, quindi può essere preso grande a piacere. Ciò vuol dire che il grafico tende a schiacciarsi sulla retta verticale di equazione $x = x_0$.


0.1
0.08
0.06
y
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
1.4
x


1
y
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2





10.2.1 Infinitesimi di ordine superiore

La formula () non è l'unica che esprime lo schiacciamento del grafico sull'asse delle x. Ne esistono altre per rappresentare curve ancora più schiacciate.

Partiamo da una definizione di carattere generale.

Definizione 10.10 *Se è verificata una condizione del tipo*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^p} = 0$$

diremo che f è un infinitesimo di ordine superiore a p.

Osservazione 10.11 *La definizione è ben posta, nel senso che se abbiamo $q < p$ risulta che*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|^p} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|^q} = 0$$

(e non vale il viceversa). Dunque una funzione infinitesima di ordine superiore a p è anche infinitesima di ordine superiore a q.

Pertanto se vale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|^p} = 0,$$

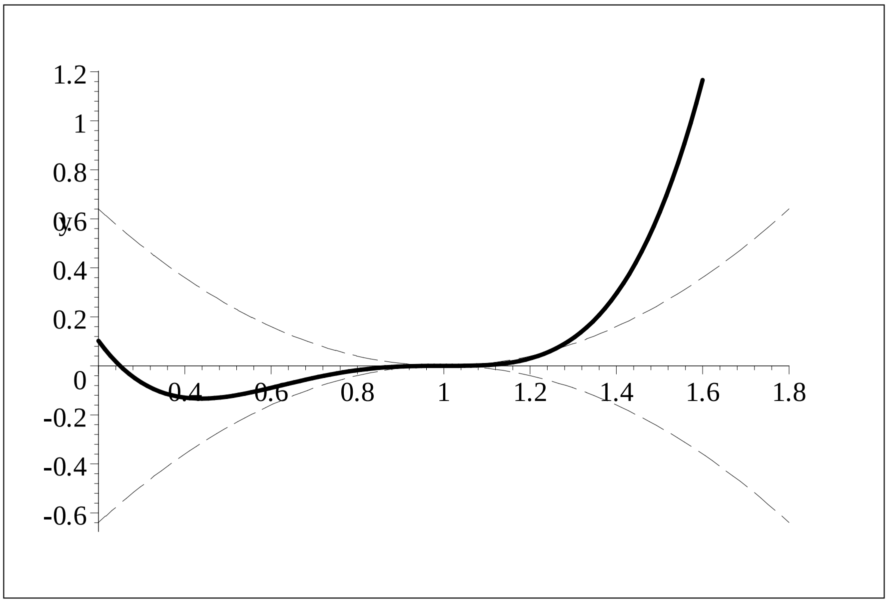
con $p > 1$, ci attendiamo anzitutto uno schiacciamento sull'asse delle x. Ora possiamo precisare che, quanto più alto è p, tanto maggiore sarà lo schiacciamento.

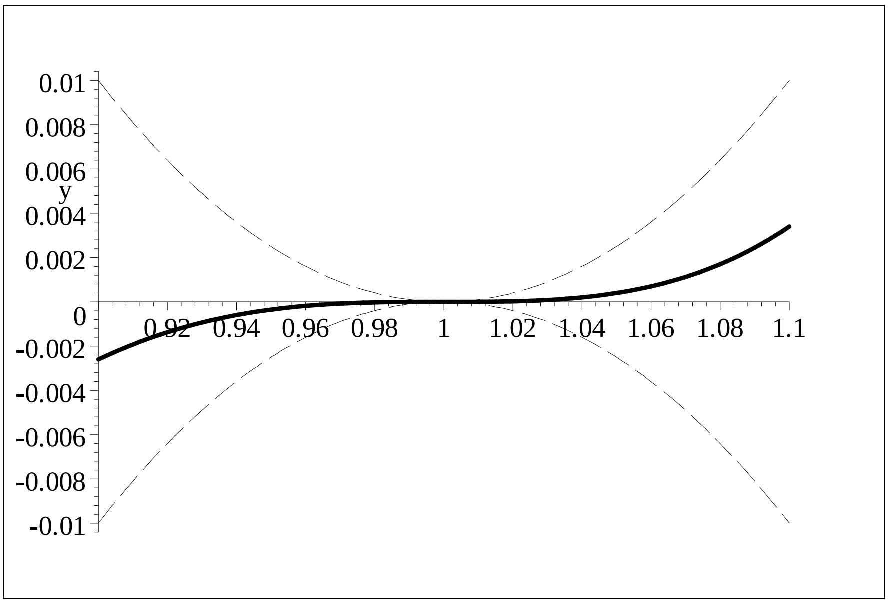
Con $p = 2$, ad esempio, ragionando come sopra, concludiamo che, localmente in x_0, il grafico della funzione è compreso tra due parabole passanti per il punto $(x_0, 0)$:

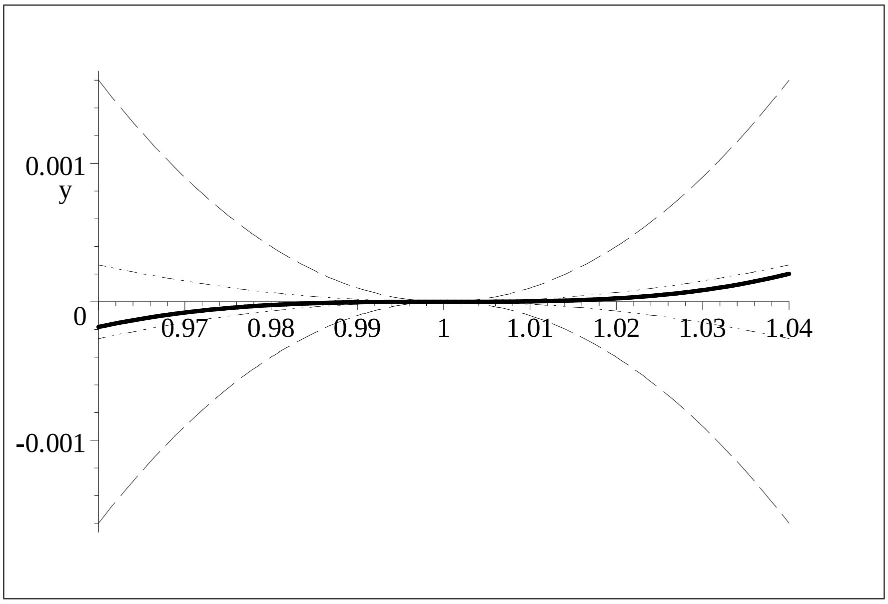
$$\begin{aligned} y &= \epsilon(x-x_0)^2, \\ y &= -\epsilon(x-x_0)^2. \end{aligned}$$

con ϵ piccolo a piacere.

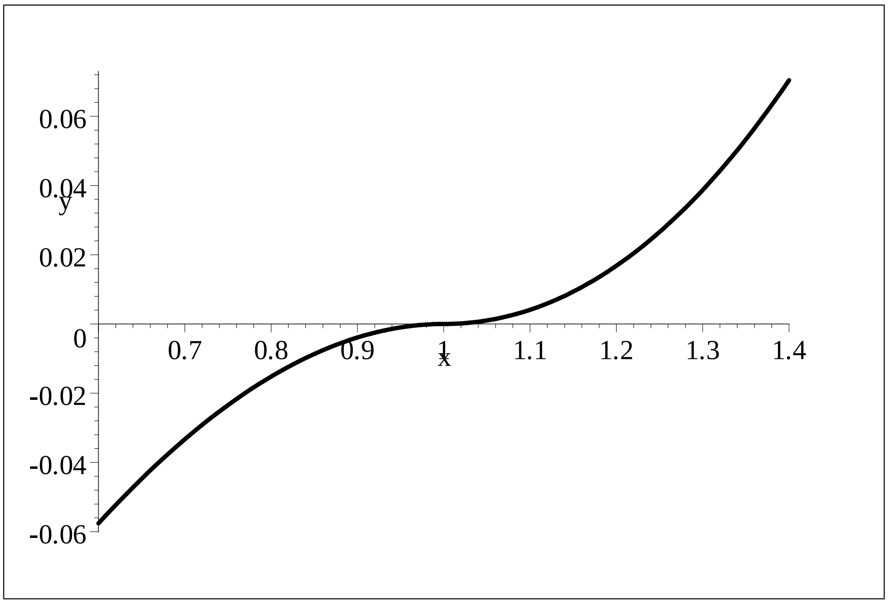
Vediamo un esempio attraverso alcune figure.



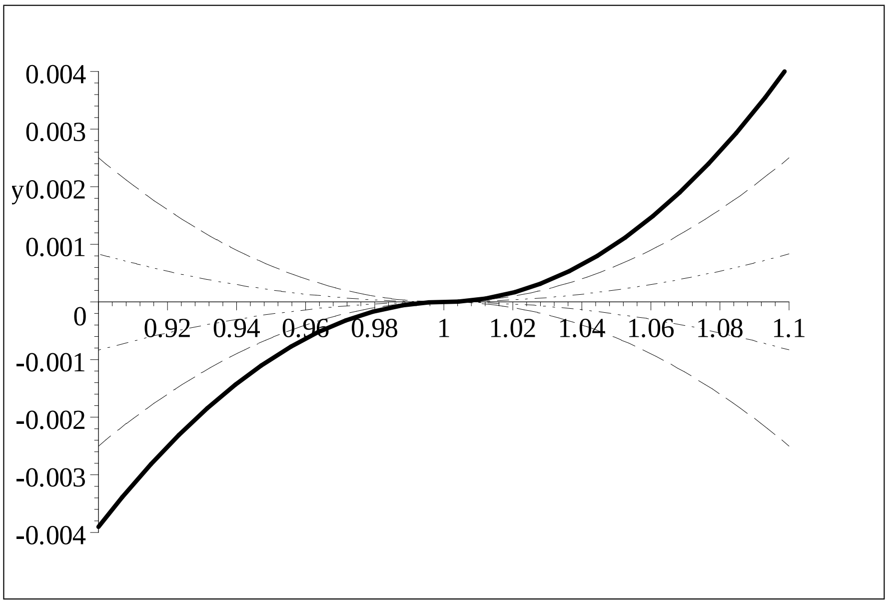




Osservazione 10.12 *Riprendiamo la funzione considerata nel paragrafo precedente*



Le figure mostravano che si tratta di un infinitesimo di ordine superiore al primo. Tuttavia, come illustra la figura che segue, questa funzione NON verifica la condizione di infinitesimo di ordine superiore al secondo.



Osservazione 10.13 *Ribadiamo quanto si diceva nel capitolo precedente: il problema di classificare le funzioni attraverso l'ordine di infinito o infinitesimo è tutt'altro che banale.*

Allo stesso modo è tutt'altro che banale stimare a priori l'ordine di infinito o infinitesimo.

10.2.2 Contatto tra due grafici

La nozione di infinitesimo di ordine superiore al primo può essere generalizzata anche in un'altra direzione.

Come sopra sia $x_0 \in \mathbf{R}$. Supponiamo di avere due funzioni $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ tali che

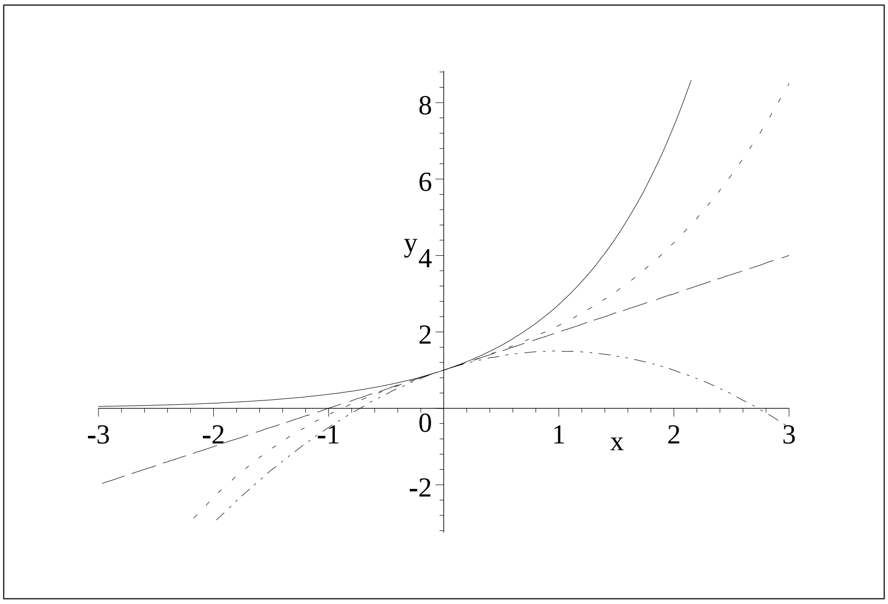
$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = y_0 \in \mathbf{R}.$$

Definizione 10.14 *Sia $p > 0$. Diremo che i due grafici hanno in (x_0, y_0) un* contatto di ordine superiore a p *se risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{|x - x_0|^p} = 0$$

Osservazione 10.15 *Argomentando come sopra, se due grafici hanno in (x_0, y_0) un contatto di ordine superiore al primo, allora i due grafici sono localmente schiacciati uno sull'altro.*

Nella figura che segue riportiamo i grafici di diverse funzioni che nel punto $(0, 1)$ hanno un contatto di ordine superiore al primo



Osservazione 10.16 *Si verifica immediatamente che se due rette hanno un contatto di ordine superiore al primo, necessariamente esse coincidono. Da questa osservazione il passo è breve alla definizione ragionevole (e non solo intuitiva) di retta tangente.*