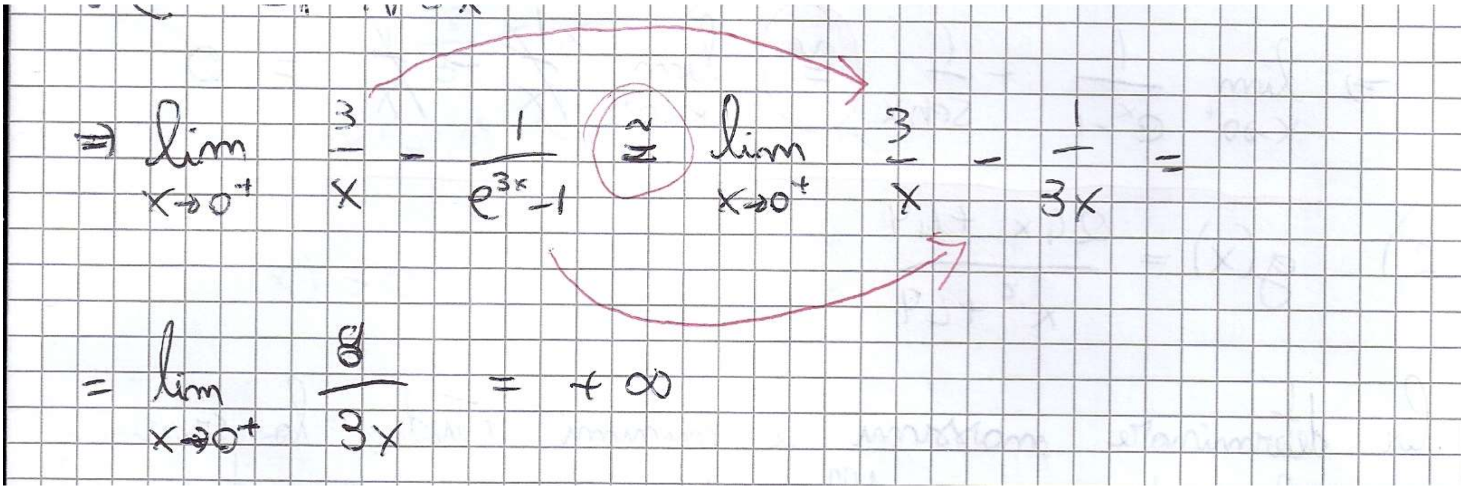
Errori: equivalenza nelle somme

Nell'appello del 12 aprile 2017 si doveva svolgere il limite (relativamente facile)

$\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x} - \frac{1}{e^{3x}-1}$

Uno studente scrive



Evidentemente, nel primo passaggio, c'è un **errore di sintassi**: *la relazione di equivalenza si riferisce alle funzioni, non ai limiti*. Lo studente intendeva dire che i limiti sono uguali, in quanto le funzioni sono equivalenti.

Ora ci chiediamo: le funzioni sono equivalenti?

Nello svolgimento dello studente c'è anche un **errore di procedura**: lo studente avrebbe dovuto verificare (scrivendolo separatamente) che

- ciascun addendo è equivalente a un monomio
- il binomio somma è diverso da zero.

In questo caso l'errore di procedura è senza conseguenze.

Nello stessa prova di esame era presente un altro limite

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{x}-1} - \frac{1}{\sin x}$

Uno studente scrive

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} =$$

$$e^x - 1 \cong x \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0$$

Questa volta non ci sono errori di sintassi ma un errore di procedura, che porta ad un risultato errato.

Possiamo affermare che

$\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\sin x} \cong \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$?

Purtroppo NO.

Gli addendi sono a due a due equivalenti (anzi uno dei due addendi non è cambiato), ma purtroppo, se usciamo dal Teorema ricordato sopra, non siamo autorizzati ad affermare che l'equivalenza si conservi nell'operazione di somma.

Inoltre nell'ultimo passaggio viene applicato il teorema di De L'Hospital, commettendo un errore nel calcolo della derivata. Anche se avessimo calcolato correttamente la derivata, avremmo ottenuto

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = 0$

D'altra parte, la procedura di calcolo corretta ci dirà che

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\sin x} = -1/2$

Il fatto che i due limiti siano diversi costituisce la vera conferma di quello che di diceva sopra: l'equivalenza non si è conservata nella somma.

Sullo stesso limite un altro studente ha scritto

$$-\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

- $e^x - 1 \sim x$
- $\operatorname{sen} x \sim x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cong \lim_{x\to 0^+} \overbrace{\cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{1}{x}}}^{0} = 0$$

Ritroviamo lo stesso **errore di sintassi** riportato prima: la relazione di equivalenza non riguarda i limiti. Lo studente intendeva dire che i limiti sono uguali, in quanto le funzioni sono equivalenti.

In realtà se si fosse scritta la spiegazione separatamente, si sarebbe stato evidente (e quindi si sarebbe evitato) un grave **errore concettuale**:

$\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\sin x} \cong \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$

Infatti la relazione di equivalenza ha senso solo tra funzioni (localmente) non nulle.

Ultime modifiche: mercoledì, 19 aprile 2017, 23:15