$L = \{ a^n b^m \mid n > 2^m \}$

Dimostrare che L non è libero da contesto

Per assurdo supponiamo che L sia libero da contesto. Vale quindi il P.L. per i linguaggi liberi da contesto. Quindi:

$\exists p \in \mathbb{N}$, p dipendente solo da L, tale che se $z \in L, |z| > p$ allora:

$$z = uvwxy \quad \text{con}$$

1) $|vwx| \leq p$

2) $vx \neq \varepsilon$

3) $uv^i w x^i y \in L, \quad \forall i \geq 0$

Considero la parola: $z = a^{2^p+1} \; b^p$

$z \in L$, $|z| = 2^p + 1 + p > p$. Quindi per il P.L.

$z = uvwxy$ con $|vwx| \leq p$

Considero la stringa uv^2wx^2y. Per la 3) del P.L. $uv^2wx^2y \in L$ MA:

$$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq$$

$$\leq 2^p + p + p + 1 \leq 2^p + 2^p + p + 1 =$$

$$= 2 \cdot 2^p + p + 1 < 2^{p+1} + p + 2$$

Inoltre $|uv^2wx^2y| > |uvwxy|$ perché per la 2) del P.L. $vx \neq \varepsilon$

Ne consegue che $uv^2wx^2y \notin L$. ASSURDO

Quindi L non è libero da contesto

$L = \{ a^n b^m c^p \mid 1 \leq n \leq m \leq p \}$

Dimostrare che L non è libero da contesto

Per assurdo, supponiamo L libero da contesto quindi vale il P.L. per i linguaggi liberi da contesto. Per il P.L.:

$\exists p \in \mathbb{N}$, p dipendente solo da L, tale che se $z \in L$, $|z| > p$ allora:

$$z = uvwxy \quad \text{con}$$

1) $|vwx| \leq p$
2) $vx \neq \varepsilon$
3) $uv^i w x^i y \in L, \quad \forall i \geq 0$

Considero la parola: $z = a^p b^p c^p$

$z \in L, \quad |z| = 3p > p$

Quindi per il P.L. z può essere scritto come: $z = uvwxy$

Per la 1) del P.L., si distinguono i seguenti casi:

1) vwx è formata da sole a: $vwx = a^k$ con $0 < k \leq p$
2) vwx è formata da sole b: $vwx = b^k$ con $0 < k \leq p$
3) vwx è formata da sole c: $vwx = c^k$ con $0 < k \leq p$
4) vwx è a cavallo tra a e b: $vwx = a^k b^r$ con $0 < k + r \leq p$
5) vwx è a cavallo tra b e c: $vwx = b^k c^r$ con $0 < k + r \leq p$

Analizzo ciascun caso:

1) Considero la stringa pompata uv^2wx^2y
aggiungo almeno una a ed al massimo p a
$uv^2wx^2y = a^{p+t} b^p c^p$ con $0 < t \leq p$
$uv^2wx^2y \notin L$ perché $\#(a) > \#(b)$ e $\#(c)$

2) Considero la stringa pompata uv^2wx^2y
aggiungo almeno una b ed al massimo p b
$uv^2wx^2y = a^p b^{p+t} c^p$ con $0 < t \leq p$
$uv^2wx^2y \notin L$ perché $\#(b) > \#(c)$

3) Considero la stringa spompata uv^0wx^0y
sottraggo almeno una c ed al massimo p c
$uv^0wx^0y = a^p b^p c^{p-t}$ con $0 < t \leq p$
$uv^0wx^0y \notin L$ perché $\#(c) < \#(b)$ e $\#(a)$

4) Per la 2) del P.L. si hanno le seguenti possibilità:

4a) $v \neq \varepsilon, \; x \neq \varepsilon$

4b) $v \neq \varepsilon, \; x = \varepsilon$

4c) $v = \varepsilon, \; x \neq \varepsilon$

Si osserva che se $v \neq \varepsilon$ allora v è formata da sole a perché altrimenti ci sarebbe una ripetizione di a e b alternate nella stringa uv^2wx^2y il che non sarebbe ammesso dal linguaggio. Analogamente se $x \neq \varepsilon$ allora x è costituita da sole b perché altrimenti ci sarebbe sempre una ripetizione di a e b alternate nella stringa uv^2wx^2y il che non è ammesso dal linguaggio

4a) $x \neq \varepsilon, \; v \neq \varepsilon$ allora $v = a^{k'}$ con $0 < k' \leq k$ e $x = b^{r'}$ con $0 < r \leq r'$
Considero la stringa pompata uv^2wx^2y
$uv^2wx^2y = a^{p+k'} b^{p+r'} c^p$
$uv^2wx^2y \notin L$ perché $\#(c) < \#(a)$ e $\#(b)$

4b) $v \neq \varepsilon$, $x = \varepsilon$ allora $v = a^{k'}$ con $0 < k' \leq k$

Considero la stringa pompata uv^2wx^2y

$uv^2wx^2y = a^{p+k'} b^p c^p$

$uv^2wx^2y \notin L$ perché $\#(a) > \#(b)$ e $\#(c)$

4c) $v = \varepsilon$, $x \neq \varepsilon$ allora $x = b^{r'}$ con $0 < r' \leq r$

Considero la stringa pompata uv^2wx^2y

$uv^2wx^2y = a^p b^{p+r'} c^p$

$uv^2wx^2y \notin L$ perché $\#(b) > \#(c)$

5) Per la 2) del P.L. si hanno le seguenti possibilità:

5a) $v \neq \varepsilon$, $x \neq \varepsilon$

5b) $v \neq \varepsilon$, $x = \varepsilon$

5c) $v = \varepsilon$, $x \neq \varepsilon$

Per lo stesso motivo esplicitato nel punto 4) se $v \neq \varepsilon$ allora v è formata da sole b. Analogamente se $x \neq \varepsilon$ allora x è formata da sole c

5a) $v \neq \varepsilon$, $x \neq \varepsilon$ allora $v = b^{k'}$ con $0 < k' \leq k$ e $x = c^{r'}$ con $0 < r' \leq r$

Considero la stringa spompata uv^0wx^0y

$uv^0wx^0y = a^p b^{p-k'} c^{p-r'}$

$uv^0wx^0y \notin L$ perché $\#(a) > \#(b)$ e $\#(c)$

5b) $v \neq \varepsilon$, $x = \varepsilon$ allora $v = b^{k'}$ con $0 < k' \leq k$
Considero la stringa pompata uv^2wx^2y
$uv^2wx^2y = a^p\, b^{p+k'}\, c^p$
$uv^2wx^2y \notin L$ perché $\#(b) > \#(c)$

5c) $v = \varepsilon$, $x \neq \varepsilon$ allora $x = c^{r'}$ con $0 < r' \leq r$
Considero la stringa spompata uv^0wx^0y
$uv^0wx^0y = a^p\, b^p\, c^{p-r'}$
$uv^0wx^0y \notin L$ perché $\#(c) < \#(b)$ e $\#(a)$

In ciascuno dei casi analizzati, la stringa uv^iwx^iy con $i \neq 1$ $\notin L$. ASSURDO
Ne consegue che L NON È LIBERO DA CONTESTO

Di che tipo è $L(G)$ con:

$G = (\{1\}, \{S, U, B\}, S, P)$ e

$$P = \{ S \to U \mid BS$$
$$U \to 1$$
$$BU \to 1U$$
$$B1 \to 11B \}$$

Appello del 23/09/2011

$S \to U \to \boxed{1}$

$S \to BS \to BU \to 1U \to \boxed{11}$

$S \to BS \to BBS \to BBU \to B1U \to 111U \to \boxed{1111}$

$S \to BS \to BBS \to BBBS \to BBBU \to BB1U \to$

$\to B11BU \to 11B1BU \to 1111BBU \to 1111B1U \to$

$\to 111111BU \to 1111111U \to \boxed{11111111}$

$S \to BS \to BBS \to BBBS \to BBBBS \to BBBBU \to$

$\to BBB1U \to BB11BU \to B11B1BU \to$

$\to 11B1B1BU \to 1111BB1BU \to 1111B11BBU \to$

$\to 111111B1BBU \to 11111111BBBU \to$

$\to 11111111BB1U \to 11111111B11BU \to 1111111111B1BU$

$\to 11111111111\,11\,B\underline{BU} \to 1111111111111\underline{B1}V \to$

$\to 1111111111111111\underline{BU} \to 1111111111111111\,1U \to$

$\to \boxed{1111111111111\,11111}$

Si deduce quindi che $L(G) = \{ 1^{2^n} \mid n \geq 0 \}$

$L(G)$ è almeno tipo 1 in quanto generato da una grammatica contestuale.
Verifichiamo se $L(G)$ può essere di tipo 2.
Per assurdo supponiamo $L(G)$ libero da contesto. Quindi vale il P.L. per i linguaggi liberi da contesto. Per il P.L.:

$\exists p \in \mathbb{N}$, p dipendente solo dal linguaggio, tale che, se $z \in L$, $|z| > p$ allora $z = uvwxy$ e

1) $|vwx| \leq p$
2) $vx \neq \varepsilon$
3) $uv^i w x^i y \in L \quad \forall i \geq 0$

Consideriamo la parola: $z = 1^{2^p}$ $\quad z \in L$, $|z| = 2^p > p$ quindi per il P.L.

$z = uvwxy$

Consideriamo la stringa uv^2wx^2y. Per la 3) del P.L. tale stringa deve appartenere al L MA:

$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq 2^p + p <$

$< 2^p + 2^p = 2 \cdot 2^p = 2^{(p+1)}$. Inoltre $|uv^2wx^2y| > |uvwxy|$ perché per la 2) del P.L. $vx \neq \varepsilon$

Quindi $uv^2wx^2y \notin L$. ASSURDO. Si deduce quindi che $L(G)$ non è libero da contesto.

In conclusione $L(G)$ è al più di tipo 1

Stabilire se sia libero:

$L = \{ 0^n 1^m \mid m \geq 0,\ n = m^2 \}$

Appello del 3/9/2012

Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto, quindi vale il P.L. per i linguaggi liberi da contesto. Per il P.L.:

$\exists p \in \mathbb{N}$, p dipendente solo da L, tale che se $z \in L$, $|z| \geq p$ allora

$$z = uvwxy \quad \text{con}$$

1) $|vwx| \leq p$

2) $vx \neq \varepsilon$

3) $uv^i w x^i y \in L$, $\forall i \geq 0$

Consideriamo la parola: $z = 0^{(p+1)^2} 1^{(p+1)}$

$z \in L$, $|z| = (p+1)^2 + p + 1 > p$. Quindi per il P.L.:

$z = uvwxy$

Consideriamo la stringa uv^2wx^2y. Per la 3) del P.L. $uv^2wx^2y \in L$. MA

$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| \leq |uvwxy| + |vwx| \leq$

$\leq (p+1)^2 + p + 1 + p = p^2 + 4p + 2 < p^2 + 5p + 6 =$

$= (p+2)^2 + p + 2$

Inoltre $|uv^2wx^2y| > |uvwxy|$ perché per la 2) del P.L $vx \neq \varepsilon$

Quindi $uv^2wx^2y \notin L$. ASSURDO

Si deduce quindi che L non è libero da contesto

Dati i linguaggi L_P e L_D, rispettivamente delle stringhe su $\Sigma = \{a, b\}$ con un numero pari e dispari di a, fornire una grammatica G per il complemento del loro prodotto

Appello del 3/9/2012

Sia $L = L_P \cdot L_D$

Sia $\#(a)$ il numero di occorrenze del simbolo a nelle stringhe che appartengono ad L

Si ha che $\#(a) =$ dispari

Sia $L' = \overline{L}$

Sia ora $\#(a)$ il numero di occorrenze del simbolo a nelle stringhe che appartengono ad L'

Si ha quindi che $\#(a) =$ pari.

In conclusione si ha che il numero di occorrenze del simbolo a nelle stringhe che appartengono al linguaggio complemento del prodotto tra L_P e L_D è PARI QUINDI:

$$\overline{L_P \cdot L_D} = L_P$$

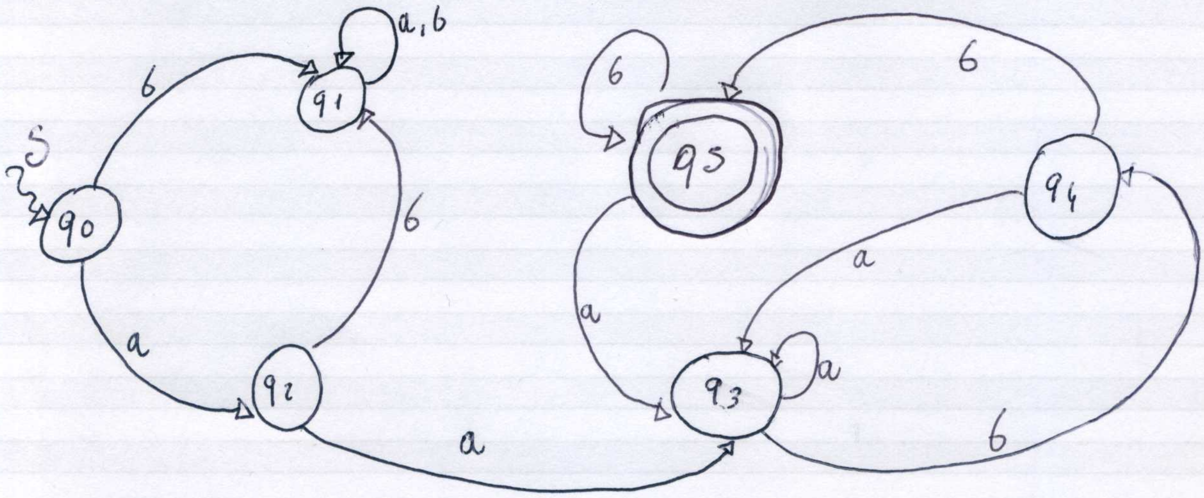
Una grammatica che genera L_P è la seguente:

$G = (\{a, b\}, V, S, P)$ con $V = \{S, A\}$

$$P = \{ S \to bS \mid aA \mid b \mid \varepsilon$$
$$A \to a \mid aS \mid bA$$
$$\}$$

Dato il linguaggio delle stringhe su $\{a, b\}$ che iniziano con aa e terminano con bb, fornire l'automa M che riconosca il suo complemento Appello del 23/9/2011

L'automa M' che riconosce il linguaggio è:



Quindi l'automa M complemento di M' è: