Capitolo 3

Proprietà ed algebra delle funzioni

3.1 Simmetrie

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$.

Supponiamo che il *dominio* A sia *simmetrico* rispetto all'origine, nel senso che

$$x \in A \Longrightarrow -x \in A.$$

In questo caso ha senso confrontare i valori che la funzione assume nei punti x e $-x$.

La *funzione* f si dice *pari* se risulta

$$f(-x) = f(x).$$

In questo caso il grafico di f risulta simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Esempi di funzioni pari sono la funzione costante e la funzione valore assoluto.

La *funzione* f si dice *dispari* se risulta

$$f(-x) = -f(x).$$

In questo caso il grafico di f risulta simmetrico rispetto all'origine.

Esempi di funzioni dispari sono la funzione identica e la funzione $1/x$.

Supponiamo ora che il *dominio* A sia *periodico* di periodo $T > 0$, ossia

$$x \in A \Longrightarrow x \pm T \in A.$$

La *funzione* f si dice *periodica* di periodo T se, per ogni $x \in A$

$$f\,(x + T) = f(x)$$

In questo caso il grafico di f si ripete periodicamente su ogni intervallo di ampiezza T.

Un esempio di funzione periodica (di periodo 1) è dato dalla funzione mantissa.

E' facile osservare che se f è periodica di periodo T, allora f è anche di periodo nT per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. Questo rende interessante la ricerca del cosiddetto *periodo minimo* di f.

Osserviamo, infine, che le funzioni pari e le funzioni periodiche non sono ingettive.

3.2 Monotonia

Siano $A \subset \mathbf{R}$ e $f : A \to \mathbf{R}$. La funzione f si dice

1. *monotona crescente* se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$
$$f(x_1) \leq f(x_2);$$
2. *monotona decrescente* se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$
$$f(x_1) \geq f(x_2);$$
3. *monotona strettamente crescente* se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$
$$f(x_1) < f(x_2);$$
4. *monotona strettamente decrescente* se per ogni $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$
$$f(x_1) > f(x_2).$$

La funzione f si dice *monotona* se vale una qualsiasi delle quattro precedenti condizioni.

La funzione f si dice *strettamente monotona* se vale la condizione **3.** o la condizione **4.**

Evidentemente ogni funzione strettamente monotona è anche monotona. Non vale il viceversa, nel senso che esistono funzioni monotone ma non strettamente; si consideri, ad esempio, la funzione parte intera.

Ricordiamo, infine, il teorema fondamentale sulle funzioni monotone.

Teorema 3.1 *Ogni funzione strettamente monotona è ingettiva, quindi può considerarsi invertibile. La funzione inversa è strettamente monotona, dello stesso tono.*

3.2.1 Successioni monotone

La monotonia si esprime in maniera diversa rispetto alle funzioni.

Proposizione 3.2 *Assegnata una successione $\{x_n\}$ le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a) *Per ogni $n, m \in \mathbf{N}$: $n \leq m \implies x_n \leq x_m$;*

b) *Per ogni $n \in \mathbf{N}$: $x_n \leq x_{n+1}$;*

c) *Per ogni $n, k \in \mathbf{N}$: $x_n \leq x_{n+k}$.*

La proprietà a) rappresenta la trascrizione della monotonia per le successioni; le implicazione a) $\Rightarrow$ b) e c) $\Rightarrow$ a) sono banali (infatti ogni $m \geq n$ può essere scritto come $n + k$); l'implicazione b) $\Rightarrow$ c) si ottiene per induzione. Stante l'equivalenza, possiamo dare la seguente definizione.

Proposizione 3.3 *Una successione $\{x_n\}$ si dice monotona crescente se, per ogni $n \in \mathbf{N}$*

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

Analogamente si danno le definizioni di successione strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente.

3.3 Convessità

Siano $I \subset \mathbf{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$.

Definizione 3.4 *f si dice* convessa *in I se per ogni $a, b \in I$, $a < b$ e per ogni ogni $x \in [a, b]$ risulta*

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Interpretazione grafica: nell'intervallo $[a, b]$ il grafico di f è collocato al di sotto del segmento congiungente $(a, f(a)), (b, f(b))$; tale segmento prende anche il nome di *corda* (in analogia alla definizione data per segmenti che congiungono due punti su una circonferenza).

Proposizione 3.5 *f è convessa in I se e solo se per ogni $a, b \in I$, $a < b$ e per ogni ogni $x \in (a, b)$ risulta*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Definizione 3.6 *f si dice* concava *se $-f$ è convessa, cioè se è soddisfatta la disuguaglianza opposta alla (), cioè se per ogni $a, b \in I$, $a < b$ e per ogni ogni $x \in [a, b]$ risulta*

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

3.4 Estremi e limitatezza

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$.

Definizione 3.7 *Un punto $x_0 \in A$ si dice di* minimo *(risp.* massimo*)* assoluto *per f se, per ogni $x \in A$, risulta*

$$f(x_0) \leq f(x)$$
$$(\textit{risp.} \quad f(x) \leq f(x_0))$$

Il valore $f(x_0)$ prende il nome di valore minimo *(risp.* massimo*) assoluto di f.*

Esempio 3.8 *Se consideriamo le funzioni* x^2 *e* $|x|$*, per entrambe il punto* $x_0 = 0$ *risulta di minimo assoluto.*

Definizione 3.9 *La funzione* f *si dice* limitata dal basso *(risp.* dall'alto*) se esiste* $m \in \mathbf{R}$ *(risp.* $M \in \mathbf{R}$*) tale che per ogni* $x \in A$ *risulta*

$$m \leq f(x)$$
$$\textit{(risp.} \quad f(x) \leq M\textit{)}.$$

Tale m *(risp.* M*) prende il nome di* minorante *(risp.* maggiorante*) di* f*.*

Una funzione si dice limitata *se è limitata sia dal basso che dall'alto.*

È del tutto evidente che se f ammette minimo (risp. massimo) assoluto, allora f è limitata dal basso (risp. dall'alto). Tuttavia esistono casi di funzioni limitate dal basso (risp. dall'alto) che non ammettono minimo (risp. massimo) assoluto.

Esempio 3.10 *La funzione mantissa* $m(x) = x - \lfloor x \rfloor$ *è limitata, ammette minimo assoluto (nei punti* $x \in \mathbf{Z}$*) ma non ammette massimo assoluto.*

Occupiamoci delle funzioni limitate inferiormente. È evidente che se f ammette un minorante, ne ammette infiniti. In questo modo si viene a creare la seguente situazione:

- da una parte abbiamo l'insieme dei valori della funzione (insieme che abbiamo denominato codominio);
- dall'altra abbiamo l'insieme dei minoranti.

Si tratta di insiemi separati.

Dall'assioma di completezza consegue che esiste un elemento che separa questi due insiemi.

Teorema 3.11 *L'elemento di separazione tra codominio e minoranti è unico.*

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo di avere due distinti elementi di separazione, a e b; sia

$$a < b. \tag{3.1}$$

i) Poiché b è elemento di separazione, avremo che b è minore uguale di tutti gli elementi del codominio, cioè b è un minorante.

ii) Poiché a è elemento di separazione, avremo che a è maggiore uguale di tutti i minoranti.

Da **i)** e **ii)** consegue che $b \leq a$, in contraddizione con (3.1). ■

Definizione 3.12 *Tale unico elemento di separazione, il più grande di tutti i minoranti, prende il nome di* estremo inferiore *di* f *e si denota con il simbolo*

$$\inf_{x \in A} f(x)$$

Analogamente si tratta il caso di funzioni limitate superiormente: esiste il più piccolo dei maggioranti, prende il nome di *estremo superiore* e viene denotato con

$$\sup_{x \in A} f(x).$$

È ovvio che, se una funzione ammette minimo (risp. massimo) assoluto, il valore minimo (risp. massimo) assoluto coincide con l'estremo inferiore (risp. superiore). In questo senso l'estremo inferiore (risp. superiore) rappresenta un surrogato del valore minimo (risp. massimo).

Esempio 3.13 *Consideriamo la funzione $\phi(x)$ ristretta all'intervallo $(0, +\infty)$. Abbiamo già osservato che, se $x > 0$, allora $1/x > 0$, quindi si tratta di una funzione limitata. Il valore 0 è un minorante, passiamo a provare che*

$$0 = \inf_{x>0} \frac{1}{x}.$$

Per provare questo è sufficiente provare che un qualsiasi $m > 0$ non è minorante. Fissiamo $m > 0$ e proviamo che esiste $x_0 > 0$ tale che

$$\phi(x_0) < m.$$

Evidentemente 0 non è valore minimo della funzione.

Soffermiamoci ora sulla negazione della limitatezza.

Dire che f non è limitata dal basso (risp. dall'alto) equivale a dire che, per ogni $m < 0$ (risp. $M > 0$) esiste $x_0 \in A$ tale che

$$f(x_0) < m,$$
$$(\text{risp.} \quad M < f(x_0)).$$

Esempio 3.14 *La funzione identica non è limitata, né inferiormente, né superiormente.*

Le funzioni $|x|$ e x^2 non sono limitate superiormente.

La funzione $\phi(x) = 1/x$ non è limitata, né inferiormente, né superiormente. Infatti, fissato $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $M < n_0$ ossia

$$M < \frac{1}{1/n_0} = \phi(1/n_0)$$

Introduciamo, infine, una notazione convenzionale.

Notation 3.15 *Se la funzione f non è limitata dal basso (risp. dall'alto), si pone*

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty$$
$$(\textit{risp.} \sup_{x \in A} f(x) = +\infty).$$

Osservazione 3.16 *Poiché una successione $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ è in sostanza una funzione possiamo parlare di*

- *successioni limitate (dall'alto o dal basso),*
- *maggioranti e minoranti,*
- *estremo inferiore e superiore, denotati rispettivamente con*

$$\inf_n x_n, \qquad \sup_n x_n.$$

3.5 Algebra delle funzioni

Fino a questo momento ci siamo occupati delle più semplici proprietà attribuibili ad una singola funzione reale di variabile reale. Oltre le funzioni riportate nel capitolo precedente, la pratica matematica ha individuato un piccolo insieme di funzioni, dette appunto *elementari*, che costituiscono gli ingredienti base con cui definire quasi tutte le funzioni utilizzate nella matematica di base. Delle funzioni elementari ci occuperemo con la dovuta attenzione nei capitoli seguenti. Ora andiamo a vedere come si possono "generare" nuove funzioni con operazioni algebriche e di composizione.

Siano assegnate due funzioni reali di variabile reale

$$\begin{aligned} f &: A \to \mathbf{R} \\ g &: B \to \mathbf{R} \end{aligned}$$

con $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$.

Se i domini di f e g non sono disgiunti, ossia se $A \cap B \neq \varnothing$, rimangono immediatamente definite due nuove funzioni

$$\begin{aligned} f + g &: A \cap B \to \mathbf{R} \\ f \cdot g &: A \cap B \to \mathbf{R} \end{aligned}$$

Si pone, infatti, per ogni $x \in A \cap B$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Parleremo di somma (risp. prodotto) di f e g per indicare la funzione somma (risp. prodotto) $f + g$ (risp. $f \cdot g$).

E' evidente che, come caso particolare del prodotto, possiamo considerare il prodotto per una costante: $c\, f$.

- Un esempio di grande importanza è dato da

  $$f(x) = mx + q.$$

  Una funzione di questo tipo prende il nome di *funzione lineare affine* e il suo grafico è una retta. Si dimostri che la funzione è strettamente crescente se e solo se $m > 0$.

- La generalizzazione dell'esempio precedente è dato dalle *funzioni polinomiali*

  $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

  ottenute sommando un numero finito di funzioni del tipo $a\, x^n$.

3.5.1 Operazioni e proprietà qualitative

Alcune caratteristiche qualitative si trasmettono attraverso le operazioni. La dimostrazione di queste proprietà può costituire un utile esercizio.

Proposizione 3.17 *La somma di due funzioni pari (risp. dispari) è essa stessa pari (dispari).*

Proposizione 3.18 *Il prodotto di due funzioni aventi la stessa parità è pari; il prodotto di due funzioni aventi parità diversa è dispari.*

Come si generalizza questa proprietà al prodotto di n funzioni?

Proposizione 3.19 *Se f e g sono funzioni periodiche con lo stesso periodo T, allora anche $f+g$ e $f \cdot g$ sono periodiche di periodo T.*

Osserviamo che non si può stabilire a priori se si tratta del periodo minimo.

Proposizione 3.20 *Siano f e g sono funzioni periodiche di periodo rispettivamente T_1 e T_2. Supponiamo inoltre che esistano $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ tali che*

$$n_1 T_1 = n_2 T_2$$

Allora sia f che g sono periodiche di periodo

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

e quindi tali risultano anche $f+g$ e $f \cdot g$.

Osservazione 3.21 *Osserviamo che la condizione (...) equivale a dire che il rapporto dei periodi è un numero razionale. Non è facile dimostrare che questa condizione è anche necessaria.*

Proposizione 3.22 *La somma di due funzioni monotone dello stesso tono è essa stessa monotona.*

Proposizione 3.23 *La somma di due funzioni convesse (risp. concave) è essa stessa convessa (concava).*

Proposizione 3.24 *La somma di due funzioni limitate (dal basso e/o dall'alto) è essa stessa limitata (dal basso e/o dall'alto).*

Non esistono analoghi risultati per il prodotto.

3.6 Funzione composta

Siano assegnate le funzioni

$$\begin{gathered} f : A \to \mathbf{R} \\ g : B \to \mathbf{R} \end{gathered}$$

con $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$.

Sappiamo che la funzione composta

$$\begin{gathered} g \circ f : A \to \mathbf{R} \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{gathered}$$

ha senso se

$$f(A) \subset B \tag{3.2}$$

ossia se per ogni $x \in A$ risulta $f(x) \in B$.

Qualora la condizione (3.2) non sia verificata ha ancora senso parlare di funzione composta, a patto di restringere il dominio. Precisamente si considera

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

e si considera

$$g \circ f : A_1 \to \mathbf{R}$$

Un esempio di questa situazione viene fornito nel sottoparagrafo seguente, per introdurre la funzione reciproca.

La dimostrazione delle proprietà seguenti può costituire un utile esercizio.

Proposizione 3.25 *Componendo due funzioni simmetriche, se una delle due funzioni presenti nella composizione è pari, allora la funzione composta è pari; se entrambe le funzioni sono dispari, allora la funzione composta è dispari.*

Proposizione 3.26 *La funzione composta di due funzioni monotone dello stesso tono è monotona crescente. La funzione composta di due funzioni monotone di tono opposto è monotona decrescente.*

E' ancora un utile esercizio chiedersi: come si generalizzano queste proprietà alla composizione di tre o più funzioni?

3.6.1 Funzione reciproca e rapporti

Sia assegnata una funzione reale di variabile reale $f : A \to \mathbf{R}$. Vogliamo introdurre la funzione reciproca

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)} \tag{3.3}$$

Evidentemente si tratta della funzione composta di f con la funzione $\phi(x) = 1/x$.

Valgono ora le considerazioni svolte sulla funzione composta.

- Se per ogni $x \in A$ risulta $f(x) \neq 0$, allora la funzione reciproca (3.3) è definita per ogni $x \in A$.
- Altrimenti dobbiamo operare una restrizione, precisamente la funzione reciproca sarà definita sul sottoinsieme
$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}.$$

E' importante ora una precisazione terminologica.

- Se x è un numero reale, i termini "inverso di x" e "reciproco di x" sono sostanzialmente sinonimi.
- Se f è una funzione reale,
  - quando parliamo di "inversa di f" intendiamo la funzione inversa nel senso della composizione, ammesso che esista; ricordiamo che l'inversa si denota con f^{-1};
  - la funzione reciproca è quella introdotta in questo paragrafo, denotata con $1/f$.

Esempio 3.27 *Se consideriamo la funzione* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$, *la funzione inversa è data da* $\sqrt[3]{x}$, *definita ancora per ogni* $x \in \mathbf{R}$, *la funzione reciproca è data da* $1/x^3$ *definita per* $x \neq 0$.

Osservazione 3.28 *In forza della Proposizione ..., poichè la funzione* $\phi(x) = 1/x$ *è dispari, se* f *è pari (risp. dispari) la funzione reciproca è pari (risp. dispari).*

Assegnate le funzioni

$$f : A \to \mathbf{R}$$
$$g : B \to \mathbf{R}$$

con $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$, possiamo ora introdurre il rapporto f/g, da intendersi ovviamente come prodotto di f per la reciproca di g.

Abbiamo

$$f/g : A \cap B_1 \to \mathbf{R}$$

dove

$$B_1 = \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}.$$

Per ogni $x \in A \cap B_1$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Possiamo ricordare che, secondo una classica terminologia, i rapporti di funzioni polinomiali

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

  prendono il nome di *funzioni razionali.*

Esempio 3.29 *Consideriamo due funzioni polinomiali*

$$p(x) = 3x + 2$$
$$p_1(x) = 3x^2 + 2$$

Entrambe sono definite su tutto $\mathbf{R}$. *La funzione reciproca di* p_1

$$\frac{1}{p_1}(x) = \frac{1}{3x^2 + 2}$$

è definita ancora su tutto $\mathbf{R}$, *mentre la funzione reciproca di* p

$$\frac{1}{p}(x) = \frac{1}{3x + 2}$$

è definita in $\mathbf{R} \setminus \{-2/3\}$.

La funzione p *introdotta sopra è invertibile. La sua inversa, ben diversa dalla reciproca, è data da*

$$p^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 2).$$

3.7 Operazioni sui grafici

Sia assegnata $f : A \to \mathbf{R}$ di cui supponiamo di conoscere il grafico. Per particolari funzioni g il grafico si può ricavare direttamente dal grafico di f.

Se	il grafico di g si ottiene tramite
$g(x) = f(x) + c$	traslazione verticale (verso l'alto se $c > 0$)
$g(x) = cf(x), \qquad c > 0$	dilatazione (o contrazione) verticale
$g(x) = -f(x)$	ribaltamento rispetto all'asse x
$g(x) = f(x - c)$	traslazione orizzontale (verso destra se $c > 0$)
$g(x) = f(x/c), \qquad c > 0$	dilatazione (o contrazione) orizzontale
$g(x) = f(-x)$	ribaltamento rispetto all'asse y
$g(x) = \lvert f(x)\rvert$	ribalt. risp. all'asse x delle parti negative

Ovviamente queste operazioni possono essere applicate consecutivamente.

Esempio 3.30 *Il grafico della funzione $g(x) = 3f(x - 2)$ si ottiene dal grafico della funzione f applicando prima una traslazione orizzontale (verso destra di 2 unità) e poi una dilatazione verticale (di un fattore 3).*

Osservazione 3.31 *Un esempio importante di applicazione di queste "operazioni" viene fornito nell'Appendice ..., dove si studia il grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

3.8 Equazioni

Si definisce *equazione in una incognita* (reale) una uguaglianza del tipo

$$g(x) = h(x) \tag{3.4}$$

essendo $g : A \to \mathbf{R}$, $h : B \to \mathbf{R}$.

Si definisce *soluzione* di (3.4) ogni $x \in A \cap B$ tale che l'uguaglianza sia verificata.

Osservazione 3.32 *Tradizionalmente le equazioni verificate per ogni $x \in \mathbf{R}$ vengono denominate* identità*.*

Se consideriamo la funzione

$$f : A \cap B \to \mathbf{R}$$
$$f(x) = g(x) - h(x)$$

l'equazione

$$f(x) = 0 \tag{3.5}$$

è equivalente all'equazione (3.4). Ricordiamo che due equazioni si dicono *equivalenti* se le soluzioni di una sono tutte e sole le soluzione dell'altra.

Le soluzioni di (3.5) sono detti anche zeri della funzione f.

Sussiste un'ovvia *interpretazione grafica*.

- Risolvere la (3.4) vuol dire determinare le ascisse dei punti in cui il grafico di g interseca il grafico di h.
- Risolvere la (3.5) vuol dire determinare in quali punti (eventualmente intervalli) il grafico di f interseca l'asse delle ascisse $y = 0$.

3.8.1 Fattorizzazione

La forma (3.5) delle equazioni è quasi sempre la più conveniente. In particolare essa ci consente di avvalerci di una tipica strategia risolutiva: la fattorizzazione.

Assegnata l'equazione (3.5), se si riesce a scrivere

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

possiamo considerare due nuove equazioni

$$f_1(x) = 0 \tag{3.6}$$

$$f_2(x) = 0 \tag{3.7}$$

e, in forza della legge di annullamento del prodotto, avremo

$$\{\text{soluzioni di } (3.5)\} = \{\text{soluzioni di } (3.6)\} \cup \{\text{soluzioni di } (3.7)\}$$

Ovviamente lo stesso discorso vale per un numero maggiore di fattori.

3.8.2 Equazioni elementari

Accanto alle equazioni algebriche, rivestono particolare importanza le cosiddette *equazioni elementari*

$$\varphi(x) = b, \tag{3.8}$$

con particolare enfasi al caso in cui φ sia una funzione elementare.

Proposizione 3.33 *Se $\varphi : A \to \mathbf{R}$ è invertibile con inversa ψ e $b \in \varphi(A)$, allora (3.8) ha soluzione unica*

$$x = \psi(b).$$

Purtroppo dobbiamo osservare che non tutte le funzioni elementari sono invertibili, a causa di parità e/o periodicità. In concreto noi otterremo le soluzioni partendo dal grafico φ, dato per noto, e studiando le intersezioni con la retta orizzontale $y = b$.

3.9 Disequazioni

La teoria delle disequazioni è in qualche modo parallela a quella delle equazioni.

Si definisce *disequazione* una delle seguenti disuguaglianze

$$g(x) \leq h(x) \tag{3.9}$$

$$g(x) < h(x) \tag{3.10}$$

essendo $g : A \to \mathbf{R}$, $h : B \to \mathbf{R}$. Si definisce *soluzione* ogni $x \in A \cap B$ tale che l'uguaglianza sia verificata.

Se consideriamo la funzione

$$f : A \cap B \to \mathbf{R}$$
$$f(x) = h(x) - g(x)$$

le disequazioni

$$0 \leq f(x) \tag{3.11}$$
$$0 < f(x) \tag{3.12}$$

sono rispettivamente equivalenti alle disequazioni (3.9) e (3.10).

Ovviamente sussiste un'*intepretazione grafica.*

- Risolvere la (3.9) e la (3.10) vuol dire determinare in quali intervalli (o punti isolati) il grafico di g si trova al di sotto del grafico di h; nel caso della (3.9) si includono i punti di contatto, nel caso della (3.10) si escludono.
- Risolvere la (3.11) e la (3.12) vuol dire determinare in quali intervalli (o punti isolati) il grafico di f giace nel semipiano positivo $y \geq 0$; nel caso della (3.11) si includono i punti di contatto, nel caso della (3.12) si escludono.

Anche per le disequazioni, la forma (3.11) e (3.12) consente di avvalerci di una conveniente strategia risolutiva. Se si riesce a scrivere

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

sarà sufficiente studiare il segno di ciascuno dei due fattori $f_1(x)$ e $f_2(x)$ ed applicare la ben nota regola dei segni. Ovviamente lo stesso discorso vale per un numero superiore di fattori.

Possiamo anche considerare le seguenti *disequazioni elementari*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq b, \\ \varphi(x) &< b, \\ b &\leq \varphi(x), \\ b &< \varphi(x). \end{aligned}$$

Tuttavia non si riesce a dare un'unica formula risolutiva (in altre parole non conviene avvalersi di formule mnemoniche); è molto più semplice ottenere la soluzione partendo dal grafico φ, che deve essere noto, ed osservando come il grafico è collocato rispetto alla retta orizzontale $y = b$.