Proprietá di chiusura dei linguaggi lineari destri

4 aprile 2007

1. Operazioni sui Linguaggi
   - Proprietà delle Operazioni
   - Chiusura rispetto alle Operazioni

Operazioni sui Linguaggi

Dati due linguaggi L e L' definiti sullo stesso alfabeto X:

- **unione** $L \cup L' = \{w \in X^* \mid w \in L \vee w \in L'\}$
- **prodotto** $L \cdot L' = \{w = w_1 \cdot w_2 \in X^* \mid w_1 \in L \wedge w_2 \in L'\}$
- **iterazione** $L^* = \{w_1 \dots w_n \in X^* \mid \forall n \forall i: \ w_i \in L,\ 0 \leq i \leq n\}$
- **complemento** $\overline{L} = \{w \in X^* \mid w \notin L\}$
- **intersezione** $L \cap L' = \{w \in X^* \mid w \in L \wedge w \in L'\}$
- **potenza** $L^k = \begin{cases} \{\lambda\} & \text{k=0} \\ L^{k-1} \cdot L & \text{k>0} \end{cases}$
- **chiusura** (transitiva) $L^+ = \bigcup_{k>0} L^k$
  (quindi si può scrivere $L^* = L^0 \cup L^+ = \{\lambda\} \cup L^+$)

Proprietà delle Operazioni sui Linguaggi

Dati i linguaggi L, L', L'' definiti sullo stesso alfabeto X:

1. $(L \cdot L') \cdot L'' = L \cdot (L' \cdot L'')$ *proprietá associativa*
2. $L \cdot L' \neq L' \cdot L$ *non commutativitá*
3. $L \cdot \{\lambda\} = \{\lambda\} \cdot L = L$ *elemento neutro*

Quindi anche $(\wp(X^*), \cdot)$ è un monoide.

4. $L \cdot \emptyset = \emptyset \cdot L = \emptyset$ *elemento assorbente*
5. Se $\lambda \in L$: $L' \subseteq L \cdot L'$
   $L' \subseteq L' \cdot L$
6. Se $\lambda \in L'$: $L \subseteq L \cdot L'$
   $L \subseteq L' \cdot L$

Esempi.

Dati i linguaggi $L_1 = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ e $L_2 = \{b, cc\}$

- $L_1 \cdot L_2 = \{b, cc, aab, aacc, aaaab, aaaacc, \ldots\}$
- $L_2 \cdot L_1 = \{b, cc, baa, ccaa, baaaa, ccaaaa, \ldots\}$

è verificata quindi la proprietá 5)
mentre non vale la 6).
Inoltre:

- $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1 = \{\lambda, b, cc, aa, aaaa, aaaaaa, \ldots\}$
- $L_1^* = \{\lambda, aa, aaaa, aaaaaa, aaaaaaaa, \ldots\}$
- $L_2^* = \{\lambda, b, cc, bb, bcc, ccb, bbb, cccc, \ldots\}$
- $L_2^0 = \{\lambda\}$
  $L_2^1 = \{b, cc\}$
  $L_2^2 = \{bb, bcc, ccb, cccc\} \ldots$
- $L_2^+ = \{b, cc, bb, bcc, ccb, bbb, cccc, \ldots\}$

Chiusura rispetto alle Operazioni

Sia $\mathcal{L}$ una classe di linguaggi su X.

- **operazione unaria** $\triangle$:

$$\wp(X^*) \longrightarrow \wp(X^*)$$

$$L \mapsto \triangle(L)$$

$\mathcal{L}$ è **chiusa** rispetto a $\triangle$ sse

$$\forall L \in \mathcal{L} : \ \triangle(L) \in \mathcal{L}$$

- **operazione binaria** $\Box$:

$$\wp(X^*) \times \wp(X^*) \longrightarrow \wp(X^*)$$

$$(L_1, L_2) \mapsto \Box(L_1, L_2)$$

$\mathcal{L}$ è **chiusa** rispetto a $\Box$ sse

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L} : \ \Box(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$$

Schema di dimostrazione.
Dati i linguaggi L_1 e L_2 generati da
$G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$
assumiamo che: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

- considerare una operazione $\Box$
- costruire G date G_1 e G_2;
- dimostrare che se G_1 e G_2 sono di tipo i allora anche G è di tipo i;
- dimostrare che $L(G) = \Box(L_1, L_2)$ quindi $\mathcal{L}$ è chiusa rispetto all'operazione $\Box$

Analogamente per le operazioni unarie:

- Considerata G costruire una grammatica G';
- Dimostrare che se G è di tipo i allora anche G' è di tipo i;
- dimostrare che $L(G') = \triangle(L(G))$ quindi $\mathcal{L}$ è chiusa rispetto all'operazione $\triangle$

Teorema di Chiusura rispetto all'Unione (caso $\mathcal{L}_3$)

La classe dei linguaggi $\mathcal{L}_3$, é chiusa rispetto all'unione.

Dimostrazione.

$$\mathcal{L}_3 \text{ è } \textbf{chiusa} \text{ rispetto a } \cup \Leftrightarrow \forall L_1, L_2 \ \in \mathcal{L}_3 : \ (L_1 \cup L_2) \in \mathcal{L}_3$$

Siano date $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$ grammatiche di tipo 3 (lineari destre) tali che
$L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$
Sia $G_3 = (X, V_3, S_3, P_3)$ ove: $S_3 \notin V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
Definiamo $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ e le produzioni

$$\begin{aligned} P_3 = \quad & \{(S \longrightarrow w) \mid (S_1 \longrightarrow w) \in P_1\} \cup \\ \cup \quad & \{(S \longrightarrow w) \mid (S_2 \longrightarrow w) \in P_2\} \cup \\ \cup \quad & P_1 \cup P_2 \end{aligned}$$

G_3 é lineare destra se G_1 e G_2 lo sono. Inoltre

$$L(G_3) = L_1 \cup L_2$$

$\mathcal{L}_3$ é chiusa rispetto all'unione

Esempio.
Date le grammatiche
G_1 con $P_1 = \{S_1 \longrightarrow aA, A \longrightarrow b\}$ e G_2 con
$P_2 = \{S_2 \longrightarrow cC, C \longrightarrow b\}$
Si osservi che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $X = \{a, b, c\}$
Si consideri $G = (X, V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, S, P)$ con

$$P = \{S \longrightarrow aA, S \longrightarrow cC, S_1 \longrightarrow aA, A \longrightarrow b, S_2 \longrightarrow cC, C \longrightarrow b\}$$

E' facile vedere che $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = \{ab, cb\}$
Si osservi che le produzioni $S_1 \longrightarrow aA$, $S_2 \longrightarrow cC$ diventano inutili e possono essere eliminate:

$$G = (X, V_1 \cup V_2 \cup \{S\},\ S, \{S \longrightarrow aA \mid cC, A \longrightarrow b, C \longrightarrow b\})$$

Teorema di Chiusura rispetto al Prodotto (caso $\mathcal{L}_3$)

La classe dei linguaggi $\mathcal{L}_3$, é chiusa rispetto al prodotto.

Dimostrazione.

$$\mathcal{L}_3 \text{ è } \textbf{chiusa} \text{ rispetto a } \cdot \Leftrightarrow \forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 : \ (L_1 \cdot L_2) \in \mathcal{L}_3$$

Siano date $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$ grammatiche di tipo 3 (lineari destre) tali che
$L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$

costruiamo $G_4 = (X, V_4, S_4, P_4)$.

Dovremmo simulare una regola del tipo $S \longrightarrow S_1 S_2$ per concatenare stringhe generate da S_1 e S_2.

Si sfrutta il fatto che l'unico (al piú) simbolo non terminale compare come simbolo piú a destra in una produzione.

Perció si sostituisce ogni produzione del tipo $A \longrightarrow b$ in G_1 con produzioni del tipo $A \longrightarrow bS_2$

(in modo da far cominciare la derivazione da S_2 appena terminata quella da S_1) :

sia $G_4 = (X, V_4, S_4, P_4)$ ove: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Definiamo $V_4 = V_1 \cup V_2$ e le produzioni

$$
\begin{aligned}
P_4 = & \{A \longrightarrow bB \mid \forall (A \longrightarrow bB) \in P_1\} \cup \\
& \cup \{A \longrightarrow bS_2 \mid \forall (A \longrightarrow b) \in P_1, b \neq \lambda\} \cup \\
& \cup \{A \longrightarrow bS_2 \mid \forall (A \longrightarrow bB) \in P_1,\ (B \longrightarrow \lambda) \in P_1\} \cup \\
& \cup \{S_1 \longrightarrow w \mid \forall (S_2 \longrightarrow w) \in P_2, (S_1 \longrightarrow \lambda) \in P_1\} \cup \\
& \cup P_2
\end{aligned}
$$

G_4 é lineare destra se G_1 e G_2 lo sono. Inoltre

$$L(G_4) = L_1 \cdot L_2$$

<u>$\mathcal{L}_3$ é chiusa rispetto al prodotto</u>

Teorema di Chiusura rispetto all'Iterazione (caso $\mathcal{L}_3$)

La classe dei linguaggi $\mathcal{L}_3$ é chiusa rispetto all'iterazione.

Dimostrazione.

$$\mathcal{L}_3 \text{ è } \textbf{chiusa} \text{ rispetto a } \cdot \Leftrightarrow \forall L_1, L_2 \ \in \mathcal{L}_3 : \ (L_1^*) \in \mathcal{L}_3$$

Sia data $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ grammatiche di tipo 3 (lineari destre) tali che $L_1 = L(G_1)$

costruiamo $G_5 = (X, V_5, S_5, P_5)$ ove: $S_5 \notin V_1$ e
Definiamo $V_5 = V_1 \cup S_5$. Inoltre

- si introduce la produzione $S_5 \longrightarrow \lambda$ (elimin., se c'é, $S_1 \longrightarrow \lambda \in P_1$)
- a P_5 si aggiunge $S_5 \longrightarrow w$ per ogni $S_1 \longrightarrow w \in P_1$

- se in P_1 esistono produzioni del tipo:
  $A \longrightarrow b$ oppure $A \longrightarrow bB$ quando $B \longrightarrow \lambda \in P$
  allora si aggiunge a P_5 anche $A \longrightarrow bS$
- ottenendo (in forma ricorsiva):

$$
\begin{aligned}
P_5 = &\{S \longrightarrow \lambda\} \cup (P_1 \setminus \{S_1 \longrightarrow \lambda\}) \cup \\
&\cup \{S \longrightarrow w \mid \forall (S_1 \longrightarrow w) \in P_1\} \cup \\
&\cup \{A \longrightarrow bS \mid \forall (A \longrightarrow b) \in P \wedge b \neq \lambda\} \cup \\
&\cup \{A \longrightarrow bS \mid \forall (A \longrightarrow bB) \in P \wedge (B \longrightarrow \lambda) \in P\}
\end{aligned}
$$

G_5 é lineare destra se G_1 lo é. Inoltre

$$L(G_5) = L_1^*$$

<u>$\mathcal{L}_3$ é chiusa rispetto all'iterazione</u>

Riassumiamo

Dati i linguaggi L_1 e L_2 generati da $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$ di tipo 3 assumiamo che: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

unione $G_3 = (X, V_3, S_3, P_3)$ con $S_3 \notin V_1 \cup V_2$
$V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$

$$\begin{array}{rl} P_3 = & \{(S \longrightarrow w) \mid (S_1 \longrightarrow w) \in P_1\} \cup \\ \cup & \{(S \longrightarrow w) \mid (S_2 \longrightarrow w) \in P_2\} \cup \\ \cup & P_1 \cup P_2 \end{array}$$

prodotto $G_4 = (X, V_4, S_4, P_4)$ $V_4 = V_1 \cup V_2$

$$\begin{aligned} P_4 = & \{A \longrightarrow bB \mid \forall (A \longrightarrow bB) \in P_1\} \cup \\ & \cup \{A \longrightarrow bS_2 \mid \forall (A \longrightarrow b) \in P_1, b \neq \lambda\} \cup \\ & \cup \{A \longrightarrow bS_2 \mid \forall (A \longrightarrow bB) \in P_1,\ (B \longrightarrow \lambda) \in P_1\} \cup \\ & \cup \{S_1 \longrightarrow w \mid \forall (S_2 \longrightarrow w) \in P_2, (S_1 \longrightarrow \lambda) \in P_1\} \cup \\ & \cup P_2 \end{aligned}$$

iterazione $G_5 = (X, V_5, S_5, P_5)$ con $S_5 \notin V_1$ e
$V_5 = V_1 \cup \{S_5\}$.

$$\begin{aligned} P_5 = & \{S \longrightarrow \lambda\} \cup (P_1 \setminus \{S_1 \longrightarrow \lambda\}) \cup \\ & \cup \{S \longrightarrow w \mid \forall (S_1 \longrightarrow w) \in P_1\} \cup \\ & \cup \{A \longrightarrow bS \mid \forall (A \longrightarrow b) \in P \wedge b \neq \lambda\} \cup \\ & \cup \{A \longrightarrow bS \mid \forall (A \longrightarrow bB) \in P \wedge (B \longrightarrow \lambda) \in P\} \end{aligned}$$

Altri Teoremi di Chiusura

La classe dei linguaggi lineari destri $\mathcal{L}_3$
è chiusa rispetto a

1. complemento
2. intersezione.

Dando per scontato la 1, per dimostrare la due si sfrutta la legge di De Morgan:

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

Operatore di Riflessione

- Data una parola $w = x_1 x_2 \cdots x_n$, con $x_i \in X \quad \forall i = 1, \ldots, n$
dicesi **stringa riflessa** (o *riflessione*) di w
la stringa $w^R = x_n x_{n-1} \cdots x_1$
- Questo definisce un operazione unaria

$$(\cdot)^R : \; X^* \longrightarrow X^*$$

- Un **palindromo** è una parola $w \in X^*$ tale che: $w = w^R$

Teorema. Sia w una stringa su X.
Allora w è palindroma sse $\exists x \in X \cup \{\lambda\}$

$$w = \alpha x \alpha^R$$

Teorema. La classe dei linguaggi $\mathcal{L}_2$ è chiusa rispetto a riflessione.