Proprietà dell'integrale

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a,b]$. Allora

1. (Linearità) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ è integrabile e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

2. (Additività) Se $c \in [a,b]$ allora f è integrabile in $[a,c]$ e in $[c,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

3. (Positività e monotonia)

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\Big[\, f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0 \underset{\text{positività}}{\Rightarrow} \int_a^b f - g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f\,dx - \int_a^b g\,dx \geq 0$$

- $\int_a^b f(x)\,dx$ se $a<b$ lo abbiamo definito

Vogliamo def : $\int_a^a f(x)\,dx$ e $\int_b^a f(x)\,dx$

<u>Def</u>: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile si pone

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

oss: Con questa def. la formula in 2. vale qualunque sia l'ordinamento dei punti a, b, c.
Per esempio se $f: [1,3] \to \mathbb{R}$ integrabile

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \underbrace{\int_3^2 f(x)\,dx}_{= -\int_2^3 f(x)\,dx}$$

<u>Teorema</u>: (della media integrale) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

<u>Dim</u>: Poiché f è continua in $[a,b]$, f ammette massimo (M) e minimo (m), per il teo. di Weier.

$$\forall x \in [a,b] \quad m \le f(x) \le M.$$

m, M, f integrabili in $[a,b]$ $\Rightarrow$ (prop di monotonia)

$$\underbrace{\int_a^b m\,dx}_{= m(b-a)} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \underbrace{\int_a^b M\,dx}_{= M(b-a)}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{m}_{= f(x_m)} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \underbrace{M}_{= f(x_M)}.$$

f, essendo continua, assume tutti i valori compresi tra $f(x_m)$ e $f(x_M)$, quindi in particolare esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

a

OSS: - Interpretazione geometrica: la tesi si scrive quindi

$$\int_a^b f\,dx = (b-a)f(c) \quad c \in [a,b]$$

Quindi se $f \geq 0$, l'area sotteso da graf f in $[a,b]$ è uguale all'area di un rettangolo di base $[a,b]$ e altezza opportuna $f(c)$ (che varia da funzione a funzione)

- Perché media integrale?

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ si chiama media integrale di f in $[a,b]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to+\infty} S_n$$

$$= \frac{1}{\cancel{b-a}}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{b-a}}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)$$

$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$

$$= \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)}_{\substack{\text{media aritmetica}\\ \text{di punti scelti nella}\\ \text{costruzione dell'integrale}}}$$

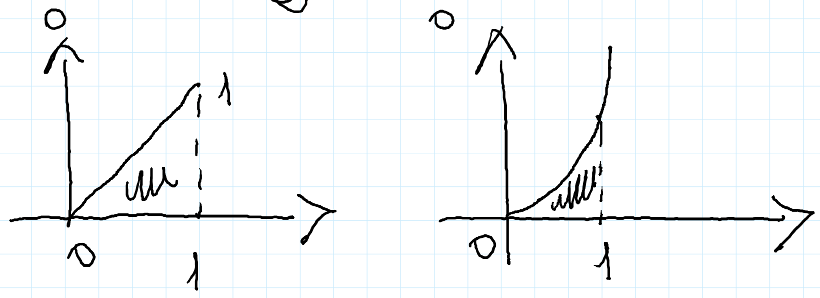
La media integrale è il limite di una media aritmetica.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

La def. di integrale non è agevole da applicare per il calcolo di integrali.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 x^2\,dx \;?$$

$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ $\qquad \int_0^1 x^2\,dx$;



Il metodo più usato si basa sulla nozione di primitiva.

<u>Def</u>: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Una primitiva di f è una funzione $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$ e tale che

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$(G' = f)$$

Esempi:

- $f(x) = x^2 \qquad G_1(x) = \frac{1}{3}x^3 \qquad x \in [0,1]$

  $G_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10$

  G_1 e G_2 sono primitive di f. Una prim. se esiste non è unica.

- $f(x) = e^x \qquad G(x) = e^x$
- $f(x) = \cos x \qquad G(x) = \operatorname{sen} x$
- $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad G(x) = -\cos x$

<u>Teorema</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

- Se $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f allora per ogni $c \in \mathbb{R}$, $G + c$ è una primitiva di f

$$\left[\forall x \in [a,b] \quad (G+c)' = G' + 0 = f\right]$$

- Se $G_1, G_2 : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ sono primitive di f allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G_1 = G_2 + c$$
$$(G_1 - G_2 = c)$$

[G_1, G_2 prim. di $f \Rightarrow G_1' = f = G_2' \Rightarrow$
$G_1' - G_2' = 0 \Rightarrow (G_1 - G_2)' = 0$
Per la caratterizz. delle funzioni costanti, esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $G_1 - G_2 = c$]

Relazione tra primitive e integrale definito.

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \qquad (I)$$

$$= \underbrace{\left[G(x) \right]_a^b}_{}$$

notazione

(formula fondamentale del calcolo integrale)

EX:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^2 e^x\,dx = \left[e^x\right]_1^2 = e^2 - e$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos x\,dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dim: Calcolo $G(b) - G(a)$

$\forall j = 0, \dots n \qquad x_j = a + j\,\dfrac{b-a}{n}$

$x_0 = a \qquad x_n = b$

$$G(b) - G(a) =$$

$$= G(x_n) - G(x_0) =$$

$$= \left[G(x_n) - G(x_{n-1})\right] + \left[G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})\right] + \dots + \left[G(x_1) - G(x_0)\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(G(x_j) - G(x_{j-1})\right) \qquad (S)$$

$G : [x_{j-1}, x_j] \to \mathbb{R}$ è deriv. in $[x_{j-1}, x_j]$ e $G' = f$ quindi, per il teo. di Lagrange, esiste

$c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tale che

$$G(x_j) - G(x_{j-1}) = G'(c_j)(x_j - x_{j-1}) \underset{G'=f}{=} f(c_j)(x_j - x_{j-1})$$

Sostituendo in (S) si ha

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1})$$

$$= S_n = S(n, T_n) \qquad T_n = \{c_1, \dots, c_n\}$$

$\{S_n\}$ è costante di cost. valore $G(b) - G(a)$ $\Rightarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = G(b) - G(a)$$

$$\| $$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ (F).

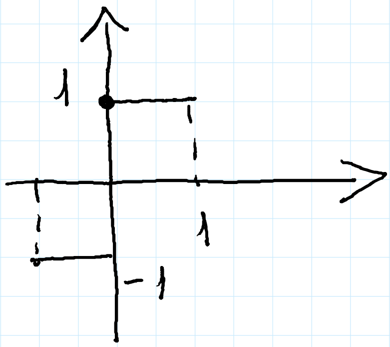
Esistenza di primitive

Le primitive servono al calcolo di integrali.

Ma tutte le funzioni hanno primitive? no

Per esempio: $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0) \\ 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$$



non ha primitive.

(Tutte le funzioni con disc. a salto non hanno primitive)

Se esiste se $G : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ primitiva di f

allora $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in [-1, 1]$ quindi

$$G(x) = \begin{cases} -x + c_1 & x \in [-1, 0) \\ \dots \end{cases} \qquad c, c \in \mathbb{R}$$

$$G_1(x) = \begin{cases} -x + c_1 & x \in [-1, 0) \\ x + c_2 & x \in [0, 1] \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

G_1 deve essere continua in $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} G_1(x) = G_1(0) = c_2 \\ \lim_{x \to 0^-} G_1(x) = c_1 \quad \lim_{x \to 0^+} G_1(x) = c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Dobbiamo prendere $c_1 = c_2 = c$.

Riscrivo G_1:

$$G_1(x) = \begin{cases} -x + c & x \in [-1, 0) \\ x + c & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Ma questa G_1 non può essere derivabile in $x=0$ per nessun valore di c.

$$G_1'(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0) \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$G'_{1+}(0) = 1$ e $G'_{1-}(0) = -1 \Rightarrow$ non esiste $G_1'(0)$

Se G_1 non è der. in $[-1, 1]$ non può essere primitiva di f.

Oss: Le funzioni discontinue non hanno primitive. Quindi nel teo. fond. calc. int. si può mettere come ipotesi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (invece che f integrabile).

Invece ogni funzione continua ammette primitive.

<u>**Def**</u>: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Sia $x_0 \in [a,b]$

La funzione $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ def. da

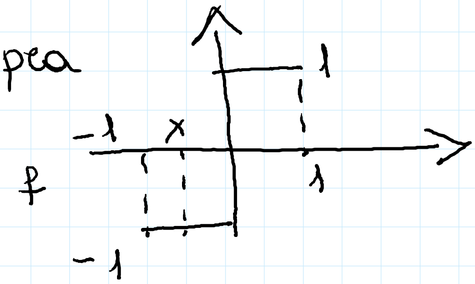
Def.: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Sia $x_0 \in [a,b]$

La funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ def. da

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

si chiama funzione integrale associata ad f.

Esempio: Sia f come sopra



Scrivere la funz. integrale associata, con $x_0 = 0$.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad F : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

$x = 0 \qquad F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$x > 0 \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dx = 1 \cdot x = x$

$x < 0 \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = -\int_x^0 f(t)\,dt = -\int_x^0 -1\,dt$

$$= \int_x^0 1\,dt = 1 \cdot (-x) = -x$$

$$F(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|$$

Teorema: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia F la funzione integrale definita sopra. Allora

1. F è continua in $[a\ b]$,

2 se f è continua allora F è derivabile
e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$
(ovvero F è una primitiva di f).

Oss: Esistono funzioni le cui primitive non sono esprimibili tramite funzioni elementari

$$e^{x^2} \qquad e^{\alpha x^2} \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \underbrace{F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt}_{\text{è non calcolabile}}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \frac{e^x}{x}$$

Oss Se f è derivabile $\Rightarrow F' = f \Rightarrow F'$ è deriv.
$\Rightarrow F$ è der. 2 volte

La funzione F ha sempre un grado di regolarità in più rispetto ad f.

Analisi Matematica - 17.5.2019 - terza parte

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \left(\frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{\cancel{n!}}\right)^2 \frac{2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1}}$$

$$= (n+1)^2 \frac{1}{2^{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}}} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$$

$$\sim \frac{n^2}{2\cdot 2^{2n}} = \frac{n^2}{2\cdot 4^n} \to 0 < 1$$

La serie converge per il criterio del rapporto.

- $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1-\cos n}{n^3-1}$$

$$a_n = \frac{1-\cos n}{n^3-1}$$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \qquad \forall n$$

$$-1 \leq -\cos n \leq 1$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{-1+1} \leq 1-\cos n \underset{(*)}{\leq} 1+1 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$a_n > 0 \qquad \begin{array}{l} Num > 0 \\ n^3-1 > 0 \end{array}$$

$$0 < a_n \overset{(*)}{\leq} \frac{2}{n^3-1}$$

$$\sum \frac{2}{n^3-1} \text{ converge? si: } \frac{2}{n^3-1} \sim \frac{2}{n^3}$$

$$\sum \frac{2}{n^3} < +\infty$$

Per il criterio del confr., $\sum a_n$ converge

Serie di potenze

Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (x-3)^n \qquad x \in \mathbb{R}$

$a_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}$, $x_0 = 3$

Calcolo il raggio di conv. R

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \qquad \left[R = \frac{1}{\rho} \right]$$

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$|a_n| = |(-1)^n| \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \overbrace{\frac{n+1}{n}}^{\to 1} \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 1}}{2} \to \frac{1}{2}$$

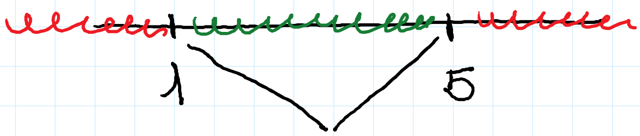
$$\rho = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$$

La serie conv. assolut. se $|x-3|<2$

$$-2<x-3<2$$
$$1<x<5$$

La serie non conv. se $|x-3|>2$

$$x<1 \quad o \quad x>5$$



$x=1$
$x=5$ Non so

$$x=1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\cancel{2^n}} \cdot \cancel{2^n} = +\infty$$

2^n

$$a_n = n \to +\infty \underset{\text{cond. necess.}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ non conv} \underset{a_n>0}{\Rightarrow} \sum a_n = +\infty$$

$$x=5 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

$$|(-1)^n n| = n \to +\infty \qquad \Downarrow \text{Non converge}$$

Ins. di conv: $I=(1,5)$ In I ho conv. assoluta

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n \qquad x \in \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{n+1}{n!} \qquad x_0 = 0 \qquad a_n > 0$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{\cancel{(n+1)!}_{\,n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \to 0$$

$$\sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$R = +\infty$

La serie converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$

$I = \mathbb{R}$

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}$

$a_n = \dfrac{1}{\log(1+n)}$ $\quad x_0 = 0 \quad a_n > 0$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\log(1+n)}{\log(2+n)} \sim \frac{\log n}{\log n} = 1 \to 1$$

$R = 1$ La serie conv. ass se $|x| < 1$

$-1 < x < 1$

" non conv se $x < -1$ oppure $x > 1$

$x = \pm 1$? Non si sa

$x = 1 \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\log(1+n)}}_{a_n}$

Confronto asintotico con $b_n = \dfrac{1}{n}$ $\quad \sum \dfrac{1}{n} = +\infty$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\log(1+n)} \sim \frac{n}{\log n} \to +\infty$$

La serie diverge

$x = -1 \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+n)}$

Dal caso $x=1$ so che la serie non conv. ass.

Uso il crit. di Leibnitz: $b_n = \dfrac{1}{\log(1+n)}$

$b_n > 0$, $b_n \to 0$, $\{b_n\}$ decrescente

$1+n>1$ $\quad \left[\frac{1}{\infty}\right]$ $\quad \log_c(1+n)$ è crescente

La serie converge

$(-1, 1)$ convergenza assoluta

$[-1, 1)$ convergenza

$$\log_c(1+n) = \log_c n\left(\frac{1}{n}+1\right) = \log_c n + \log_c\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \log_c n\left[1 + \underbrace{\frac{\log_c\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log_c n}}_{0\ \left[\frac{0}{+\infty}\right]}\right] \sim \log_c n$$

$$\log_c(2+n) \sim \log_c n$$