Limiti – Introduzione

● Definizione formale

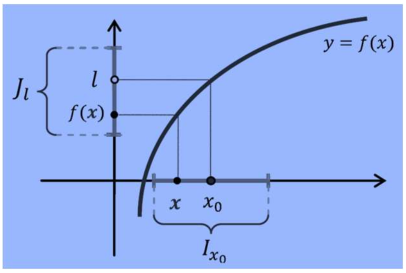
Consideriamo una funzione y = f(x), di dominio D.
Sia x_0 un punto di accumulazione per D.

Si dice che ℓ è il limite per x che tende a x_0 della funzione f(x), e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) \to \ell$,
se: per ogni possibile intorno J di ℓ, esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I(x_0), f(x) \in J(\ell)$.

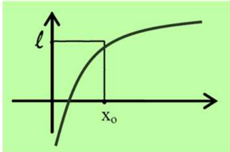
Spiegazione:

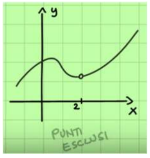
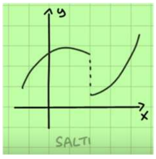
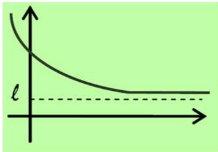
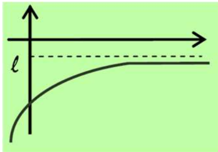
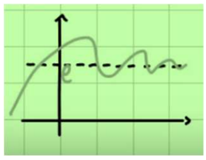
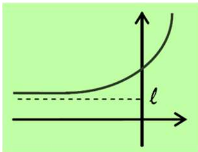
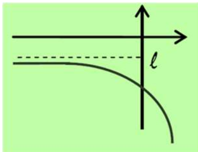
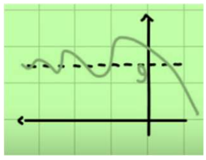
1) "Sia x_0 un punto di accumulazione per D."
Ovvero: x_0 è un qualsiasi punto (appartenente o "adiacente") a D, tale che fra i valori immediatamente intorno, ne ha almeno uno (oltre eventualmente a sé stesso) che appartiene a D.
Esempio: Con D $= \mathbb{R} - \{0\}$, anche $x_0 = 0$ è un possibile punto di accumulazione per D (in quanto ha attorno valori ∈ D).

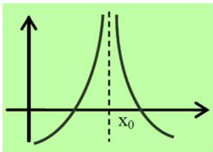
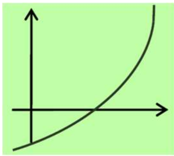
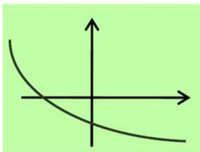
2) "Si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) \to \ell$, Se: per ogni intorno J di ℓ, esiste un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I(x_0), f(x) \in J(\ell)$"
Ovvero: $(x - \mathcal{E}) \in I(x_0) \to f(x - \mathcal{E}) \in J(\ell)$. Ovvero: $f(x - \mathcal{E}) \cong \ell$

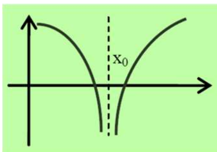
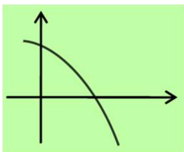
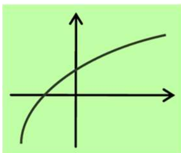


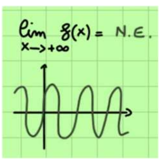
● Esempi di possibili casi

1) $\lim f(x) = \ell$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	

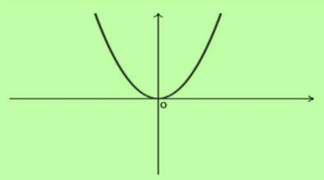
2) $\lim f(x) \cong \ell$	2.1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$			
	2.2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$			
	2.3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$			

3) $\lim f(x) \cong +\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	

4) $\lim f(x) \cong -\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	
	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	

5) $\lim f(x) = \emptyset$	Esempio: $\text{Lim}_{x \to +\infty} \sin(x) = \emptyset$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x) \in [-1, +1]$	

● Limiti funzioni elementari

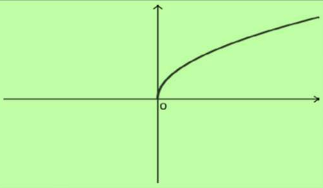


$y = x^n$ potenza con esponente pari

$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

$\lim_{x\to 0} x^n = 0$

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

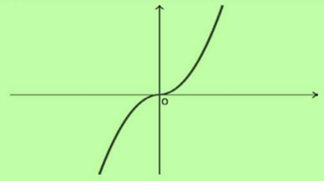


$y = \sqrt[n]{x}$ radice con indice pari

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = non\ esiste$

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

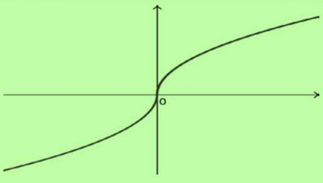


$y = x^n$ potenza con esponente dispari

$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

$\lim_{x\to 0} x^n = 0$

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

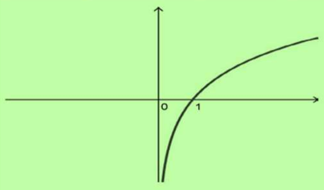


$y = \sqrt[n]{x}$ radice con indice dispari

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$

$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

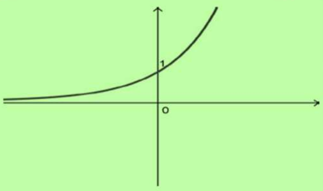


$y = \log_a x$ logaritmo con base > 1

$\lim_{x\to-\infty} \log_b x = non\ esiste$

$\lim_{x\to 0^+} \log_b x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \log_b x = +\infty$

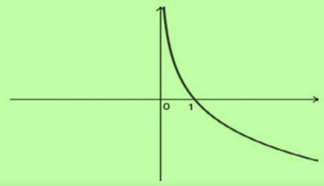


$y = a^x$ esponenziale con base > 1

$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

$\lim_{x\to 0} a^x = 1$

$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

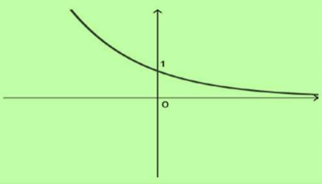


$y = \log_a x$ logaritmo con 0 < base < 1

$\lim_{x\to-\infty} \log_b x = non\ esiste$

$\lim_{x\to 0^+} \log_b x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \log_b x = -\infty$

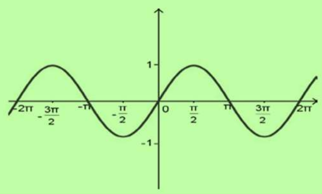


$y = a^x$ esponenziale con 0 <base < 1

$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x\to 0} a^x = 1$

$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$

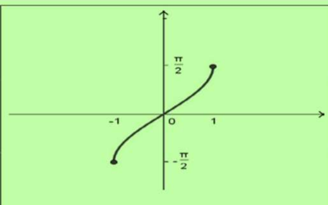


$y = sen\,x$ seno

$\lim_{x\to\pm\infty} sen\,x = [-1,+1]$

$\lim_{x\to 0} sen\,x = 0$

$\lim_{x\to\pi/2} sen\,x = 1$

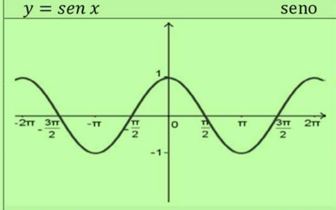


$y = arcsenx$ arcoseno

$\lim_{x\to-1} arcsen\,x = -\pi/2$

$\lim_{x\to 0} arcsen\,x = 0$

$\lim_{x\to 1} arcsen\,x = \pi/2$

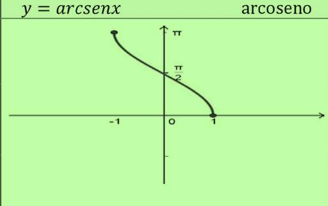


$y = cos\,x$ coseno

$\lim_{x\to\pm\infty} cos\,x = [-1,+1]$

$\lim_{x\to 0} cos\,x = 1$

$\lim_{x\to\pi/2} cos\,x = 0$

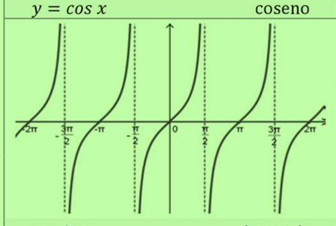


$y = arccosx$ arcocoseno

$\lim_{x\to-1} arccos\,x = \pi$

$\lim_{x\to 0} arccos\,x = \pi/2$

$\lim_{x\to 1} arccos\,x = 0$

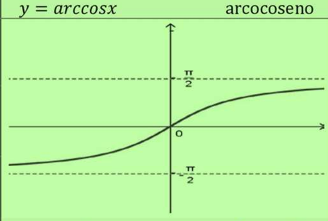


$y = tg\,x$ tangente

$\lim_{x\to 0} tg\,x = 0$

$\lim_{x\to\pi/2^-} tg\,x = +\infty$

$\lim_{x\to\pi/2^+} tg\,x = -\infty$

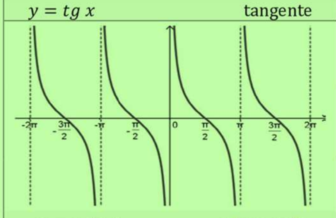


$y = arctgx$ arcotangente

$\lim_{x\to-\infty} arc\,tg\,x = -\pi/2$

$\lim_{x\to 0} arc\,tg\,x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} arc\,tg\,x = \pi/2$

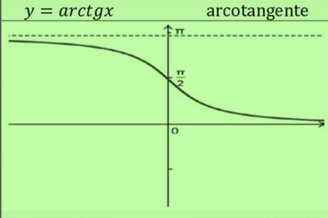


$y = cotg\,x$ cotangente

$\lim_{x\to 0^-} co\,tg\,x = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} co\,tg\,x = +\infty$

$\lim_{x\to\pi/2} co\,tg\,x = 0$



$y = arccotgx$ arcocotangente

$\lim_{x\to-\infty} arcco\,tg\,x = \pi$

$\lim_{x\to 0} arcco\,tg\,x = \pi/2$

$\lim_{x\to+\infty} arcco\,tg\,x = 0$

● Algebra dei limiti

Le regole dell'algebra dei limiti si applicano ESCLUSIVAMENTE al calcolo dei limiti, e non nell'algebra classica.

Somma	$+\infty \pm a = +\infty$	$-\infty \pm a = -\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$

Prodotto	$\pm\infty \cdot a = \pm\infty$ con $a > 0$	$\pm\infty \cdot a = \mp\infty$ con $a < 0$	$+\infty \cdot +\infty = +\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$	$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Rapporti	$\frac{a}{0^+} = +\infty$ con $a > 0$	$\frac{a}{0^+} = -\infty$ con $a < 0$	$\frac{a}{0^-} = -\infty$ con $a > 0$	$\frac{a}{0^-} = +\infty$ con $a < 0$
	$\frac{a}{\pm\infty} = 0$	$\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$	$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$	$\frac{0}{\pm\infty} = 0$

Potenza	$(+\infty)^a = +\infty$ con $a > 0$	$(\pm\infty)^a = \frac{1}{(\pm\infty)^{-(a)}} = 0$ con $a < 0$ Esempio: $(+\infty)^{-3} = \frac{1}{(+\infty)^3} = 0$	$(-\infty)^a = +\infty$ con $a > 0, a$ pari Esempio: $(-\infty)^2 = -\infty \cdot -\infty = +\infty$	$(-\infty)^a = -\infty$ con $a > 0, a$ dispari Esempio: $(-\infty)^3 = -\infty \cdot -\infty \cdot -\infty = -\infty$
	$+\infty^{+\infty} = +\infty$	$+\infty^{-\infty} = \frac{1}{+\infty^{+\infty}} = 0$		

● Forme indeterminate

Per risolvere queste forme indeterminate bisogna applicare varie tecniche (mostrate in seguito).

$\frac{0}{0}$ $(\neq \pm\infty)$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $(\neq 1)$	$0 \cdot \pm\infty$ $(\neq 0)$	$+\infty - \infty$ $(\neq 0)$	0^0 $(\neq 1)$	$1^{\pm\infty}$ $(\neq 1)$	$\pm\infty^0$ $(\neq 1)$

● Risolvere limiti che NON sono in forma indeterminata

1) In caso di x che tende ad un numero finito, calcolare sia il limite sx che il limite dx

Ovvero, Esempio:
Nel $\lim_{x\to 0} f(x)$, vanno calcolati:
- il limite sx, ovvero x che si avvicina a 0 da sx ($-0.0008, -0.0007, \ldots$), che si scrive $\lim_{x\to 0^-} f(x)$,
- il limite dx, ovvero x che si avvicina a 0 da dx, ed è quindi positivo

2) Sostituire, nel testo della funzione, al posto della x, il valore a cui tende x, e levare la scritta "lim"

3) Si sviluppano i calcoli usando l'algebra tradizionale e le regole dell'algebra dei limiti

4) Controllare, in caso di $\lim_{x\to x_0} f(x)$, che i limiti sx e dx coincidano, ovvero $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

(Se il limite sx è diverso dal limite dx, allora il limite complessivo NON esiste)

Esempio 1:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right) \to \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right) = \frac{(0^-)^2-4}{(0^-)+2} = -\frac{4}{2} = -2\ ;\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right) = \frac{(0^+)^2-4}{(0^+)+2} = -\frac{4}{2} = -2\ ;\ \ell = -2$$

Esempio 2:
$$\lim_{x\to -\infty}(\log_5(\sin(2^x+\pi))) = \log_5(\sin(2^{-\infty}+\pi)) = \log_5\left(\sin\left(\frac{1}{2^{+\infty}}+\pi\right)\right) = \log_5(\sin(0+\pi)) = \log_5(\sin(\pi)) =$$
$$= \log_5(0) \to \mathit{Ovvero}: 5^{\log_5(0)} = 0 \to \log_5(0) = -\infty \ \to\ \ell = -\infty$$

Esempio 3:
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{7}{4-2^x}\right) \to \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{7}{4-2^{2^-}}\right) = \frac{7}{4-2^{2^-}} = \frac{7}{4-3.999} = \frac{7}{+0.001} = +\infty\ ;$$
$$\to \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{7}{4-2^{2^+}}\right) \to \frac{7}{4-4.001} = \frac{7}{-0{,}001} = -\infty \ \to\ \textit{i limiti sx e dx non combaciano}\ \to\ \ell = \emptyset$$

● Errori comuni sul calcolo dei limiti

1) Dimenticarsi di ri-scrivere il limite fino a quando non si esce dal limite

Esempio:
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \quad \neq \quad \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{(1)-2}{(1)+1} = -\frac{1}{2}$$
$$\to \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{(1)-2}{(1)+1} = -\frac{1}{2}$$

2) Dimenticarsi di controllare sia il limite sx sia il limite dx

Esempio:
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{7}{4-2^x}\right) \quad \neq \quad \frac{7}{4-2^2} = \frac{7}{4-4} = \frac{7}{0} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{7}{4-2^x}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{7}{4-2^x}\right) = \frac{7}{4-2^{2^+}} = \frac{7}{4-4^+} = \frac{7}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{7}{4-2^x}\right) = \frac{7}{4-2^{2^-}} = \frac{7}{4-4^-} = \frac{7}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow \ell \text{ non esiste}$$