Esercizio 2.2

Sia data la seguente grammatica:

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{0, 1\} \qquad V = \{S, A, B\}$$

$$P = \left\{ S \to \overset{(1)}{0B} \mid \overset{(2)}{1A},\ A \to \overset{(3)}{0} \mid \overset{(4)}{0S} \mid \overset{(5)}{1AA},\ B \to \overset{(6)}{1} \mid \overset{(7)}{1S} \mid \overset{(8)}{0BB} \right\}$$

Determinare il linguaggio generato da G e dimostrare il risultato.

Il linguaggio generato da G è il seguente:

$$L = \left\{ w \,\middle|\, w \in \{0, 1\}^{+}, w \text{ ha lo stesso numero di 0 e di 1} \right\}$$

dobbiamo dimostrare che:

$$L = L(G)$$

Quindi bisogna dimostrare che:

i) $L(G) \subset L$

ii) $L \subset L(G)$

i) Dimostriamo che $L(G) \subset L$. Questo corrisponde a dimostrare che G genera solo parole con lo stesso numero di 0 e di 1.

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della stringa*. Possiamo ricondurre questa dimostrazione a dimostrare che:

i.a) ogni stringa derivabile da S in G possiede un numero uguale di 0 e di 1;

i.b) ogni stringa derivabile da A ha uno 0 in più;

i.c) ogni stringa derivabile da B ha un 1 in più.

Sia w una parola su $X = \{0, 1\}$.

<u>Passo base</u>

$|w| = 1$

i.a) Non vi sono parole di lunghezza 1 derivabili da S in G;

i.b) La sola parola di lunghezza 1 derivabile da A in G è $w = 0$

$$A \underset{(3)}{\Rightarrow} 0$$

e tale parola ha uno 0 in eccesso;

i.c) La sola parola di lunghezza 1 derivabile da B in G è $w = 1$

$$B \underset{(6)}{\Rightarrow} 1$$

e tale parola ha un 1 in eccesso.

$|w| = 2$

i.a) Le sole parole di lunghezza 2 derivabili da S in G sono $w_1 = 01$ e $w_2 = 10$.

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} 0B \underset{(6)}{\Rightarrow} 01$$

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} 1A \underset{(3)}{\Rightarrow} 10$$

sia w_1 sia w_2 hanno lo stesso numero di 0 e di 1;

i.b) Non vi sono parole (stringhe di soli terminali) di lunghezza 2 derivabili da A in G;

$$\begin{array}{lll} A \underset{(3)}{\Rightarrow} 0 & A \underset{(5)}{\Rightarrow} 1AA \underset{(3)}{\Rightarrow} 10A & A \underset{(5)}{\Rightarrow} 1AA \underset{(3)}{\Rightarrow} 1A0 \\ A \underset{(4)}{\Rightarrow} 0S \underset{(1)}{\Rightarrow} 00B & A \underset{(5)}{\Rightarrow} 1AA \underset{(4)}{\Rightarrow} 10SA & A \underset{(5)}{\Rightarrow} 1AA \underset{(4)}{\Rightarrow} 1A0S \\ A \underset{(4)}{\Rightarrow} 0S \underset{(2)}{\Rightarrow} 01A & A \underset{(5)}{\Rightarrow} 1AA \underset{(5)}{\Rightarrow} 11AAA & A \underset{(5)}{\Rightarrow} 1AA \underset{(5)}{\Rightarrow} 1A1AA \end{array}$$

i.c) Non vi sono parole (stringhe di soli terminali) di lunghezza 2 derivabili da B in G;

$$\begin{array}{lll} B \underset{(6)}{\Rightarrow} 1 & B \underset{(8)}{\Rightarrow} 0BB \underset{(6)}{\Rightarrow} 01B & B \underset{(8)}{\Rightarrow} 0BB \underset{(6)}{\Rightarrow} 0B1 \\ B \underset{(7)}{\Rightarrow} 1S \underset{(1)}{\Rightarrow} 10B & B \underset{(8)}{\Rightarrow} 0BB \underset{(7)}{\Rightarrow} 01SB & B \underset{(8)}{\Rightarrow} 0BB \underset{(7)}{\Rightarrow} 0B1S \\ B \underset{(7)}{\Rightarrow} 1S \underset{(2)}{\Rightarrow} 11A & B \underset{(8)}{\Rightarrow} 0BB \underset{(8)}{\Rightarrow} 00BBB & B \underset{(8)}{\Rightarrow} 0BB \underset{(8)}{\Rightarrow} 0B0BB \end{array}$$

<u>Passo induttivo</u>

Dimostriamo che, per ogni $n > 2$, se supponiamo che i.a), i.b) e i.c) siano vere per ogni parola di lunghezza m, con $2 \leq m < n$, allora i.a), i.b) e i.c) risultano vere per parole di lunghezza n.

i.a) Sia w una stringa derivabile da S in G, tale che:

$$|w| = n \quad \text{e} \quad S \overset{*}{\Rightarrow} w$$

Si hanno due possibili casi:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} 0B \overset{*}{\Rightarrow} w \;\text{ e }\; w = 0\beta, \;\text{ ove }\; B \overset{*}{\Rightarrow} \beta,\; |\beta| = n-1$$

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} 1A \overset{*}{\Rightarrow} w \;\text{ e }\; w = 1\alpha, \;\text{ ove }\; A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha,\; |\alpha| = n-1$$

Per ipotesi di induzione i.b), α ha uno 0 in più. Tale 0 è bilanciato dall'1 iniziale in w. Ne segue che w ha lo stesso numero di 0 e di 1. Analogamente, per ipotesi di induzione i.c), β ha un 1 in eccesso, che viene bilanciato dallo 0 iniziale di w. Ne consegue che, anche in questo caso, w ha lo stesso numero di 0 e di 1.

i.b) Sia w una stringa di lunghezza n derivabile da A in G:

$$|w| = n \quad \text{e} \quad A \overset{*}{\Rightarrow} w$$

Si hanno due possibili casi:

$$A \underset{(4)}{\Rightarrow} 0S \overset{*}{\Rightarrow} w \;\text{ e }\; w = 0\beta, \;\text{ ove }\; S \overset{*}{\Rightarrow} \beta,\; |\beta| = n-1$$

$$A \underset{(5)}{\Rightarrow} 1AA \overset{*}{\Rightarrow} w \;\text{ e }\; w = 1\alpha, \;\text{ ove }\; AA \overset{*}{\Rightarrow} \alpha,\; |\alpha| = n-1$$

Nel 1° caso, l'enunciato i.a) appena dimostrato ci garantisce che la stringa β possiede lo stesso numero di 0 e di 1. Dunque $w = 0\beta$ ha uno 0 in eccesso.

Nel 2° caso, per l'ipotesi di induzione i.b), la stringa α ha due 0 in eccesso (in quanto concatenazione di due stringhe derivabili da *A*). Di conseguenza, $w = 1\alpha$ ha uno 0 in eccesso.

i.c) Sia *w* una stringa di lunghezza *n* derivabile da *B* in *G*:

$$|w| = n \text{ e } B \overset{*}{\Rightarrow} w.$$

Si hanno due possibili casi:

$$B \underset{(7)}{\Rightarrow} 1S \overset{*}{\Rightarrow} w \text{ e } w = 1\alpha, \text{ ove } S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha, \ |\alpha| = n-1$$

$$B \underset{(8)}{\Rightarrow} 0BB \overset{*}{\Rightarrow} w \text{ e } w = 0\beta, \text{ ove } BB \overset{*}{\Rightarrow} \beta, \ |\beta| = n-1$$

Nel 1° caso, da i.a) sappiamo che α possiede lo stesso numero di 0 e di 1. Dunque $w = 1\alpha$ ha un 1 in eccesso.

Nel 2° caso, per l'ipotesi di induzione i.c), la stringa β ha due 1 in eccesso (in quanto concatenazione di due stringhe derivabili da *B*). Di conseguenza, $w = 0\beta$ ha uno 1 in eccesso.

Risulta così dimostrato il "teorema" i): $L(G) \subset L$

ii) Dimostriamo che $L \subset L(G)$. Questo corrisponde a dimostrare che "ogni parola con uguale numero di 0 e di 1 è generata da *G*".

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della stringa*.

Possiamo ricondurre questa dimostrazione a dimostrare che:

i.a) ogni stringa con uguale numero di 0 e di 1 è derivabile da *S* in *G*;

i.b) ogni stringa con uno 0 in eccesso è derivabile da *A* (in *G*);

i.c) ogni stringa con un 1 in eccesso è derivabile da *B* (in *G*).

Sia *w* una parola su *L* (ossia, avente uno stesso numero di 0 e di 1).

<u>Passo base</u>

$|w| = 1$

ii.a) Non vi sono parole di lunghezza 1 che abbiano lo stesso numero di 0 e di 1;

ii.b) La sola parola di lunghezza 1 con uno 0 in eccesso è $w = 0$ ed è derivabile direttamente da *A* in *G*:

$$A \underset{(3)}{\Rightarrow} 0$$

ii.c) La sola parola di lunghezza 1 con un 1 in eccesso è $w = 1$ ed è derivabile da *B* in *G*:

$$B \underset{(6)}{\Rightarrow} 1$$

$|w| = 2$

ii.a) Le sole parole di lunghezza 2 che possiedono lo stesso numero di 0 e di 1 sono:

$$w_1 = 01 \text{ e } w_2 = 10$$

Entrambe sono derivabili da S in G attraverso le seguenti derivazioni:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} 0B \underset{(6)}{\Rightarrow} 01$$

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} 1A \underset{(3)}{\Rightarrow} 10$$

ii.b) Non esistono parole di lunghezza due con uno 0 in eccesso.

ii.c) Non esistono parole di lunghezza due con un 1 in eccesso.

<u>Passo induttivo</u>

Dimostriamo che, per ogni $n > 2$, se supponiamo che ii.a), ii.b) e ii.c) siano vere per ogni parola di lunghezza m, con $2 \leq m < n$, allora ii.a), ii.b) e ii.c) risultano vere per parole di lunghezza n.

ii.a) Sia w una parola di lunghezza n con lo stesso numero di 0 e di 1:

$$|w| = n$$

Supponiamo che w inizi con uno 0. Dunque, $w = 0\beta$, ove $|\beta| = n-1$ e β ha un 1 in eccesso.

Per ipotesi di induzione ii.c), β è derivabile da B in G:

$$B \overset{*}{\Rightarrow} \beta$$

Ma allora, w è derivabile da S in G e la relativa derivazione è:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} 0B \overset{*}{\Rightarrow} 0\beta = w$$

Supponiamo che w inizi con un 1. Dunque, $w = 1\alpha$, ove $|\alpha| = n-1$ e α ha uno 0 in eccesso.

Per ipotesi di induzione ii.b), α è derivabile da A in G:

$$A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$$

Ma allora, w è derivabile da S in G e la relativa derivazione è:

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} 1A \overset{*}{\Rightarrow} 1\alpha = w$$

ii.b) Sia w una parola di lunghezza n con uno 0 in eccesso:

$$|w| = n$$

w può avere una delle seguenti due forme:

1) $w = 0\beta$, ove $|\beta| = n-1$ e β ha lo stesso numero di 0 e di 1

2) $w = 1\alpha$, ove $|\alpha| = n-1$ e α ha due 0 in eccesso.

Se $w = 0\beta$, l'enunciato ii.a) vale per β e si ha:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} \beta$$

Dunque, w è derivabile da A in G e la relativa derivazione è:

$$A \underset{(4)}{\Rightarrow} 0S \overset{*}{\Rightarrow} 0\beta = w$$

Se $w = 1\alpha$, nella derivazione di w da A (in G) che stiamo ricercando, il 1° passo consiste nell'applicazione della produzione (5)

$$A \to 1AA$$

Vogliamo dimostrare che:

$$AA \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$$

ove α ha due 0 in eccesso. È sempre possibile considerare α come il risultato della concatenazione di due stringhe, α' e α'', entrambe con uno 0 in eccesso:

$$\alpha = \alpha'\alpha'' \text{ ove } |\alpha'| < n \text{ e } |\alpha''| < n .$$

Per ipotesi di induzione ii.b), si ha:

$$A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha' \qquad \text{e} \qquad A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha''$$

e dunque una derivazione di w da A è:

$$A \underset{(5)}{\Rightarrow} 1AA \overset{*}{\Rightarrow} 1\alpha'A \overset{*}{\Rightarrow} 1\alpha'\alpha'' = 1\alpha = w \text{ (è l'unica derivazione di } w \text{ da } A\text{?)}$$

ii.c) Sia w una parola di lunghezza n con un 1 in eccesso:

$$|w| = n$$

w può avere una delle seguenti due forme:

1) $w = 1\alpha$, ove $|\alpha| = n - 1$ e α ha lo stesso numero di 0 e di 1.

2) $w = 0\beta$, ove $|\beta| = n - 1$ e β ha due 1 in eccesso.

Se $w = 1\alpha$, l'enunciato ii.a) vale per α e si ha:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha$$

Dunque, w è derivabile da B in G e la relativa derivazione è:

$$B \underset{(7)}{\Rightarrow} 1S \overset{*}{\Rightarrow} 1\alpha = w$$

Se $w = 0\beta$, nella derivazione di w da A (in G) che stiamo ricercando, il 1° passo consiste nell'applicazione della produzione (8)

$$B \to 0BB$$

Vogliamo dimostrare che:

$$BB \overset{*}{\Rightarrow} \beta$$

ove β ha due 1 in eccesso. È sempre possibile considerare β come il risultato della concatenazione di due stringhe, β' e β'', entrambe con un 1 in eccesso:

$$\beta = \beta'\beta'' \text{ ove } |\beta'| < n \text{ e } |\beta''| < n$$

Per ipotesi di induzione ii.c), si ha:

$$B \overset{*}{\Rightarrow} \beta' \qquad \text{e} \qquad B \overset{*}{\Rightarrow} \beta''$$

e dunque una derivazione di *w* da *B* è:

$$B \underset{(8)}{\Rightarrow} 0BB \overset{*}{\Rightarrow} 0\beta' B \overset{*}{\Rightarrow} 0\beta'\beta'' = 0\beta = w$$

Risulta così dimostrato il "teorema" ii): $L \subset L(G)$.

Si ha: $L = L(G)$.