Esercizio 2.1

1) Determinare una grammatica che genera il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

e dimostrare questo risultato.

2) Che tipo di grammatica genera L ?

1) $$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b\}, \qquad V = \{S\}, \qquad P = \left\{ S \underset{(1)}{\rightarrow} aSb,\ S \underset{(2)}{\rightarrow} ab \right\}$$

Dobbiamo dimostrare che $L = L(G)$.

i) $L(G) \subset L$

Sia w una stringa derivabile da S (in G).

$$w \in L(G) \ \overset{def}{\Leftrightarrow} \ S \overset{*}{\Rightarrow} w,\ w \in X^*$$

Procediamo *per induzione sulla lunghezza della derivazione* di w da S. Denoto con n la lunghezza della derivazione di w da S.

Passo base

$n = 1$

$S \underset{(2)}{\overset{n}{\Rightarrow}} ab$ è l'unica derivazione di lunghezza $n = 1$ che genera stringhe di soli terminali.

È immediato verificare che $ab \in L$.

Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni $n > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

"se $w' \in L(G)$, $S \overset{n-1}{\Rightarrow} w'$ (w' è derivabile in n–1 passi da S)

allora $w' \in L$"

allora anche l'enunciato:

"se $w \in L(G)$, $S \overset{n}{\Rightarrow} w$ allora $w \in L$"

risulta vero.

Consideriamo:

$$w \in L(G),\ \text{con}\ S \overset{n}{\Rightarrow} w.$$

Per definizione (di derivabilità in n passi), esiste una sequenza di forme di frase $w_1, w_2, ..., w_n$ con $w_n = w$, tale che w_1 deriva direttamente da S e, per ogni i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), w_{i+1} deriva direttamente da w_i.

$$S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow ... \Rightarrow w_n = w$$

È immediato osservare che il primo passo della derivazione è dato dalla applicazione della produzione (1) di G (altrimenti otterremmo la stringa ab, priva di nonterminali ed avremmo finito. Ma allora $n = 1$).

Si ha dunque:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSb \overset{n-1}{\Rightarrow} w_n = w$$

Per ipotesi di induzione, ogni stringa derivabile da S in $n–1$ passi è una parola di L. Dunque, da S è possibile derivare in $n–1$ passi una stringa del tipo: $w' = a^k b^k,\ k > 0$.

Più precisamente, $w' = a^{n-1} b^{n-1}$, poiché:

$$S \underset{(1)}{\overset{k}{\Rightarrow}} a^k S b^k,\ k > 0 .$$

Ma allora la stringa:

$$aw'b = aa^{n-1}b^{n-1}b = a^n b^n$$

è ancora una stringa di L ed inoltre è derivabile da S in n passi.

Si ha, infatti:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSb \overset{n-1}{\Rightarrow} aw'b = a^n b^n = w$$

Risulta così dimostrato $L(G) \subset L$.

ii) $L \subset L(G)$

Sia w una parola di L. Procediamo *per induzione sulla lunghezza della stringa w*.

Passo base

Prendiamo in considerazione la parola di L di lunghezza minima.

$$n = 1 \Leftrightarrow |w| = 2 \qquad\qquad w = ab$$

Dobbiamo dimostrare che: $S \overset{*}{\Rightarrow} ab$.

Banale. Applichiamo la produzione (2) di G ed otteniamo che $w = ab$ è direttamente derivabile da S.

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} ab$$

Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni $n > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\text{“se } w' \in L,\ |w'| = 2(n-1) \text{ allora } S \overset{*}{\Rightarrow} w' \text{”}$$

allora anche il seguente enunciato:

$$\text{“se } w \in L,\ |w| = 2n \text{ allora } S \overset{*}{\Rightarrow} w \text{”}$$

risulta vero.

Sia w una parola su X tale che:

$$w \in L,\ |w| = 2n,\ n > 1\,.$$

Ovviamente, $w = a^n b^n$ (unica parola di L di lunghezza $2n$). Nella (ipotetica) derivazione di w da S, devo necessariamente applicare la produzione (1) di G, come 1° passo (altrimenti riotterrei la parola ab).

Dunque:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSb \qquad \text{(a)}$$

Per ipotesi di induzione, ogni parola di L di lunghezza $2(n-1)$ è derivabile da S (in G). Dunque, anche $w' = a^{n-1}b^{n-1}$ è derivabile da S:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w' = a^{n-1}b^{n-1} \qquad \text{(b)}$$

Ne consegue che $w = a^n b^n$ è derivabile da S e la relativa derivazione è ottenuta applicando in successione (a) e (b).

$$\underbrace{S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSb}_{(a)} \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow}}_{(b)} aw'b = aa^{n-1}b^{n-1}b = w$$

Dunque, $L \subset L(G)$ e

$$L = L(G)$$

2) G è una grammatica libera da contesto.