Sunday, March 3, 2019 19:20

Analisi Matematica - 4.3.2019 - prima parte

Potenze

Già visto: $a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Caso meno noto: a^{τ} $\quad \tau \in \mathbb{R}$ (quindi anche τ irrazionale) $a > 0$ Caso 1) $a > 1$

Fissato τ, consideriamo il suo allineamento decimale

$$\tau = \tau_0 . \tau_1 \tau_2 \tau_3 \text{------}$$

Consideriamo

$$P = \{ a^{\tau_0}, a^{\tau_0.\tau_1}, a^{\tau_0.\tau_1\tau_2}, a^{\tau_0.\tau_1\tau_2\tau_3} \text{----} \}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tau_0 \\ \tau_0.\tau_1 \\ \tau_0.\tau_1\tau_2 \\ \vdots\end{array}\right. \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a^{\tau_0} \\ a^{\tau_0.\tau_1} \\ a^{\tau_0.\tau_1\tau_2} \\ \vdots\end{array}\right. \text{ sono già state definite}$$

$P \neq \emptyset$, si prova che P è limitato superiormente.

Quindi per (AC), esiste $\sup P \in \mathbb{R}$

Si pone

$$a^{\tau} = \sup P$$

EX: $2^{\sqrt{2}} = \sup \{ 2, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, \text{----} \}$

$\sqrt{2} = 1.4142 \text{----}$

Caso 2): $a = 1$ si pone $1^{\tau} = 1$

Caso 3): $0 < a < 1$

$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a} > 1 \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^{\tau}$ O.K.

Si pone

$$a^{\tau} = \frac{1}{\quad}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^c$$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi} = \frac{1}{2^{\pi}}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{a} = 2$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^{\sqrt{2}}}$$

$a = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{a} = \frac{4}{3} > 1$

Proprietà: $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ c, d \in \mathbb{R}$

- $a^c > 0$
- $a^{c+d} = a^c \cdot a^d$
- $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
- $c < d \Rightarrow a^c < a^d$ se $a > 1$
  $c < d \Rightarrow a^c > a^d$ se $0 < a < 1$
- $0 < a < b \Rightarrow a^c < b^c$ $\forall c > 0$

oss: $a^0 = 1$ $\quad \forall a \neq 0$

$$a^0 = a^{-1+1} \underset{\text{prop. potenze}}{=} a^{-1} \cdot a^1 = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Logaritmi

Studiamo eq. in cui l'incognita è un esponente.

Dati $a > 0$, $y > 0$, studiamo

$$a^x = y.$$

Per esempio $2^x = 10$.

<u>Teorema</u>: Sia $a > 0$, $a \neq 1$ e $y > 0$. Allora esiste uno

ed un solo $x \in \mathbb{R}$ sol. di $a^x = y$

Tale x si chiama logaritmo in base a di y e si denota con

$$\log_a y .$$

Ex: $\log_2 6 = x$: $2^x = 6$

$\log_{10} 100 = x$ $\quad 10^x = 100 = 10^2 \Rightarrow x = 2$

Useremo spesso una base particolare chiamata numero di Nepero: e

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $e = 2.7\ldots\ldots$ $\quad e > 1$

$$\log_e x = \log x = \ln x$$

- $a = 1$? $\quad 1^x = y$

  $1^x = 1$ L'eq. ha infinite sol. se $y = 1$ (ogni $x \in \mathbb{R}$) e non ha sol. se $y \neq 1$.

- Se $y \leq 0$ l'eq. $\underset{>0}{a^x} = \underset{\leq 0}{y}$ non ha sol.

Proprietà: $\forall x, y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

1. $a^{\log_a x} = x$
2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

6. $\log_a a = 1$

7. $\log_a 1 = 0$

FUNZIONI

Obiettivo: descrivere matematicamente grandezze variabili.

EX:
- posizione di un oggetto al variare del tempo
- complessità di un algoritmo al variare della lunghezza dell'input.
  lunghezza $n \longrightarrow n^2$ operazioni eseguite

Quindi servono 3 cose:
1. Insieme degli input
2. Insieme degli output
3. una relazione che permetta di passare da un input al corrispondente output in modo univoco.

Sunday, March 3, 2019 19:21

Analisi Matematica - 4.3.2019 - seconda parte

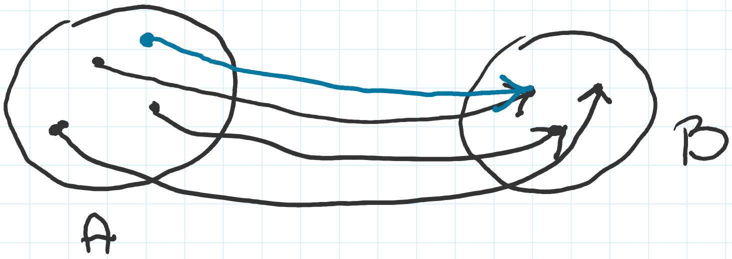
Funzioni

<u>Def</u> : Una funzione f é costituita da 3 elementi:

1. un insieme A detto dominio ($A = \mathrm{dom}\, f$)
2. un insieme B detto codominio
3. una "legge" che ad ogni el. di A associa un UNICO elemento $b \in B$ che si denota con $f(a)$ e si chiama valore di f in a.

Notazione : $f : A \to B \quad f(x) = - - - -$

$x \longmapsto f(x)$



"Da ogni $a \in A$ parte una sola freccia"
Nulla vieta che due frecce possano finire nello stesso $b \in B$.

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n + 1$

  $f(3) = 3 + 1 = 4$

Si chiama immagine di f l'insieme di tutti i possibili output:

$$\mathrm{Im}\, f = \{ y \in B \,/\, \exists x \in A : y = f(x) \} = \{ f(x) \,/\, x \in A \} \subseteq B$$

- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \longmapsto 2n$

$\text{Im } f = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

$=$ insieme dei numeri pari

- In generale $\text{Im } f \subseteq B$, ma può accadere che $\text{Im } f \subset B$ (vedi esempio precedente).

Si chiama grafico di f l'insieme

$$\text{graf } f = \{(\underset{\in A}{x}, \underset{\in B}{f(x)}) \;/\; x \in A\} \subseteq A \times B$$

$$A \times B = \{(a,b) \;/\; a \in A,\ b \in B\}$$

$\Downarrow$

coppia ordinata: insieme di due elementi ove l'ordine conta.

<u>Def</u>: Una funzione $f: A \to B$ si dice

- di variabile reale se $A \subseteq \mathbb{R}$
- reale se $B \subseteq \mathbb{R}$.

Studieremo funzioni reali di var. reale.

Caso particolare:

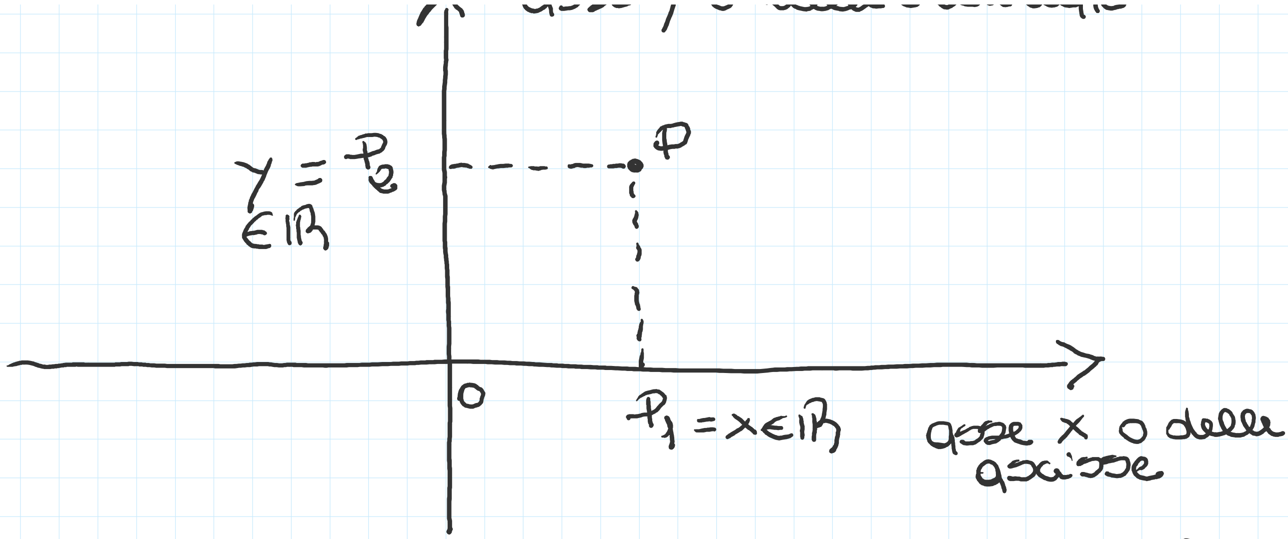
Se $A = \mathbb{N}$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si chiama SUCCESSIONE.

Il grafico di una funzione reale di var. reale è un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ è in corrispondenza biunivoca con un piano euclideo.

Fissiamo un piano π e due rette in π orientate e ortogonali che si intersecano in un unico punto O.

$\uparrow$ asse y o delle ordinate



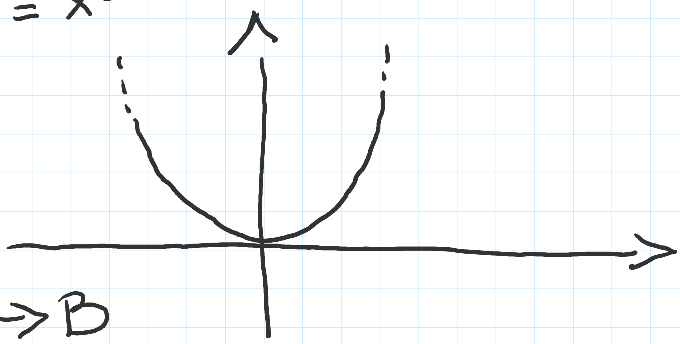
Una corrispondenza biunivoca tra π e $\mathbb{R}^2$ è la funzione: $P \in \pi \longrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$

x ascissa di P

y ordinata di P

- Graf di f è un sottoinsieme di π.

$f(x) = x^2$



$f: A \to B$

Proprietà del grafico: $\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B$

$$\left.\begin{matrix}(x,y_1)\\(x,y_2)\end{matrix}\right\} \in \text{Graf } f \Rightarrow y_1 = y_2$$

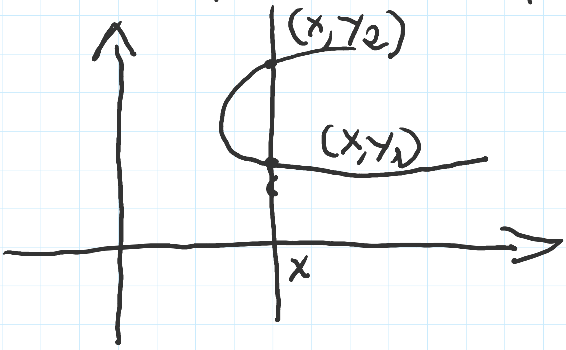
$\Downarrow$

Per la univocità di f

Oss: se $f: A \to B$, A si denota anche con $\text{dom } f$

Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$, ogni retta parallela all'asse y interseca Graf f al più in un punto.

Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$, ogni retta parallela all'asse y interseca Graf f al più in un punto.



Non è il grafico di una funzione

Funzioni ingettive e surgettive

<u>Def</u>: Sia $f: A \to B$ una funzione. $A, B \neq \emptyset$

- Si dice che f è INGETTIVA (o INIETTIVA) se manda ad el. distinti di A el. distinti in B.

  $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

  $\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

- Si dice che f è SURGETTIVA (o SURIETTIVA) se ogni el. di B è immagine di almeno un el. di A

  $\forall b \in B \quad \exists a \in A : \quad f(a) = b$

OSS: $\forall b \in B \Rightarrow b \in \operatorname{Im} f \Rightarrow B \subseteq \operatorname{Im} f$

Ho sempre $\operatorname{Im} f \subseteq B$. Quindi

f è surgettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

Esempi:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to x^2$

   f è ingettiva? NO $\quad -1 \neq 1$ ma $f(-1) = 1 = f(1)$

   f è surgettiva? NO $\quad x^2 \geq 0$!!

   $y < 0$ non è immagine di nessun x

2. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto x + 1$

   g è ingettiva: [illegible] $x, y \in \mathbb{R}$

2. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x+1$

g è iniettiva: siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$g(x_1) = g(x_2) \iff x_1 + \cancel{1} = x_2 + \cancel{1} \underset{\text{prop. di } \mathbb{R}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

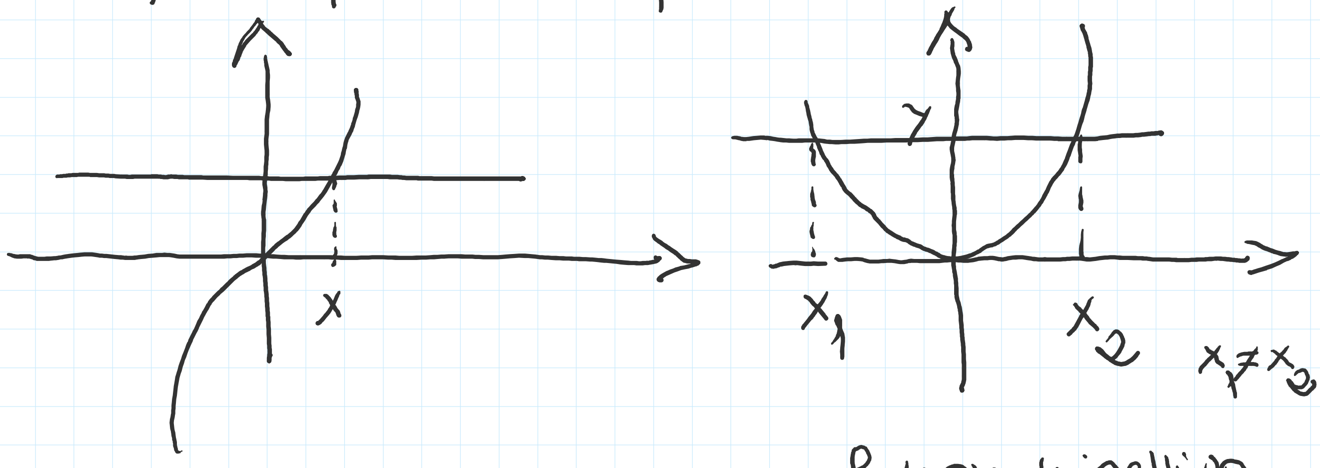
g è surgettiva: sia $y \in \mathbb{R}$. $\exists\, x = y - 1$ tale che

$$f(x) = f(y-1) = y - 1 + 1 = y$$

- Si dice che f è **biiettiva** se f è iniettiva e surgettiva.

OSS: Come è fatto il grafico di una funzione reale di var. reale iniettiva?

Ogni retta parallela all'asse x interseca Graf f al più in un punto.



f iniettiva $\qquad$ f non iniettiva