Prova scritta di Analisi Matematica - 7.6.2017

1) $f(x) = x^3 e^{-x+1}$

a) Dominio: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

Intersezioni e positività: $f(0) = 0$ $(0,0)$

$f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$

b) Limiti significativi: $+\infty, -\infty$

$x \to -\infty$ $\quad \left.\begin{array}{l} x^3 \to -\infty \\ -x+1 \to +\infty \Rightarrow e^{-x+1} \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$

$f(x) \to -\infty$

Asintoto obliquo a $-\infty$?

$\frac{f(x)}{x} = x^2 e^{-x+1} \to +\infty$ se $x \to -\infty$

Non vi è un asintoto obliquo a $-\infty$.

$x \to +\infty$ $\quad \left.\begin{array}{l} x^3 \to +\infty \\ -x+1 \to -\infty \Rightarrow e^{-x+1} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

forma di indecisione: $+\infty \cdot 0$

$f(x) = \frac{x^3}{e^{x-1}} = \frac{x^3}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{-1}} \to 0$ (limiti notevoli)

$y = 0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$.

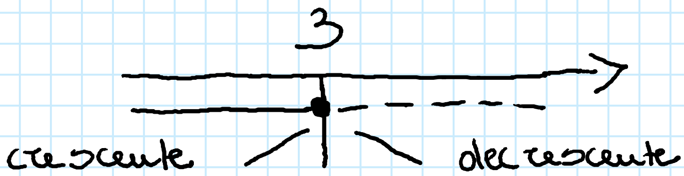
c) Derivata prima

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 e^{-x+1} - x^3 e^{-x+1}$

$= x^2 e^{-x+1} (3 - x)$

$f'(x) \geq 0 \iff 3 - x \geq 0 \iff x \leq 3$



$x = 3$ p.to di max. relativo

d) Derivata seconda

$$f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = (6x - 3x^2)e^{-x+1} - (3x^2 - x^3)e^{-x+1}$$

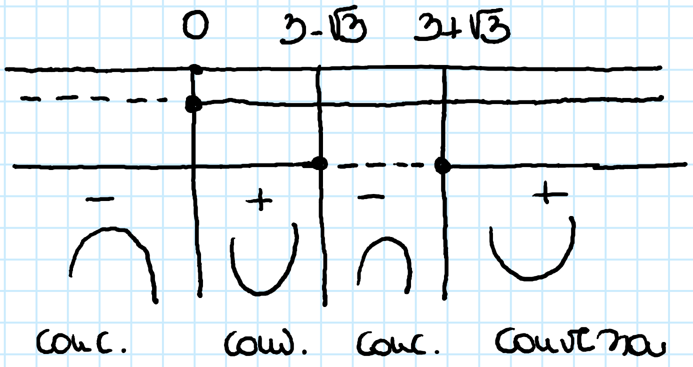
$$= e^{-x+1} \cdot x\,(6 - 3x - 3x + x^2)$$

$$= e^{-x+1}\, x\,(x^2 - 6x + 6)$$

$f''(x) \geq 0$: $x \geq 0$

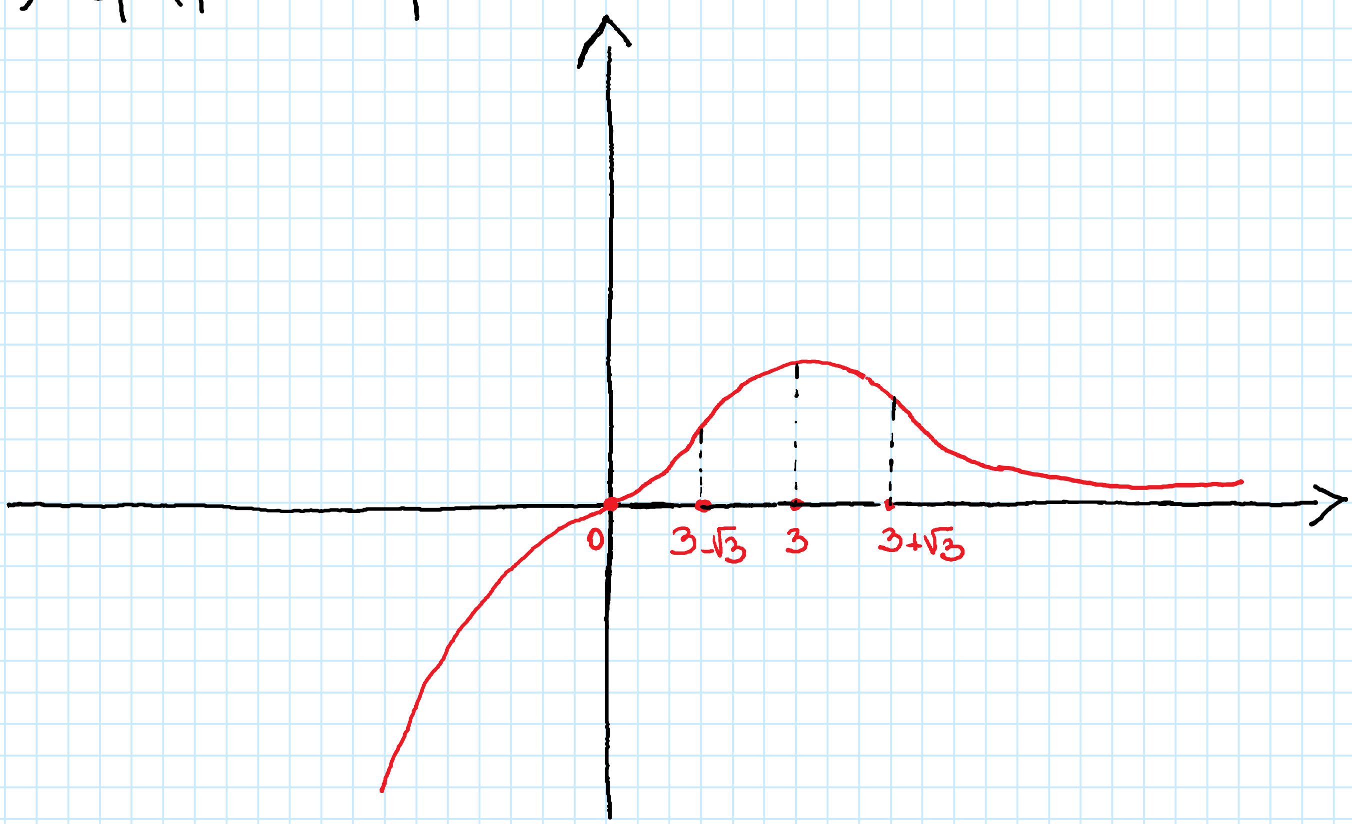
$x^2 - 6x + 6 \geq 0 \quad x \leq 3-\sqrt{3} \quad x \geq 3+\sqrt{3}$

$x = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$



$x=0$, $x = 3\pm\sqrt{3}$ p.ti di flesso

(e) Grafico di f



(f) $\operatorname{Im} f = (-\infty, f(3))$

L'eq. $f(x)=\lambda$ ha
1 soluzione se $\lambda \leq f(0)=0$,
2 soluzioni se $f(0)=0<\lambda<f(3)$,
1 soluzione se $\lambda = f(3)$,
0 soluzioni se $f(3)<\lambda$.

2) $$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Usando le stime asintotiche;
per $x\to+\infty$ si ha

$$x^2 \sim x^2$$
$$\frac{1}{1+x^2}\to 0 \Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right) \sim \frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$$
$$\frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

Quindi per la regola del prodotto:

$$x^2 \log\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)\operatorname{sen}\frac{1}{x} \sim x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

3) $$I=\int_1^2 \frac{\log x}{x^3}\,dx$$

Utilizzando l'integrazione per parti si ha:

$$I=\int_1^2 D\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\log x\,dx =$$
$$=\left[-\frac{1}{2x^2}\log x\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{8}\log 2 + \frac{1}{2}\int_1^2 x^{-3}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{8}\log 2 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2$$
$$= -\frac{1}{8}\log 2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{1}{8}\log 2 + \frac{3}{16}.$$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} n}{3^n - n}$

La serie non è a termini positivi. Conviene studiare la convergenza assoluta: posto

$$a_n = (-1)^n \frac{\operatorname{sen} n}{3^n - n}$$

si ha

$$|a_n| = \frac{|\operatorname{sen} n|}{3^n - n} \leq \frac{1}{3^n - n} \sim \frac{1}{3^n}$$

poiché $\quad 3^n - n = 3^n \left(1 - \underbrace{\frac{n}{3^n}}_{\substack{\downarrow\ n \to +\infty \\ 0}}\right).$

È noto che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ è convergente.

Quindi, per i criteri del confronto e del confronto asintotico,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

è convergente e quindi anche la serie assegnata lo è.