Integrali – Tecniche di Integrazione

● Proprietà degli integrali

Prodotto di una costante per una funzione	$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$ Esempio: $\int 5 \cdot x^3\, dx = 5 \cdot \int x^3\, dx$
Metodo di decomposizione in somma	$\int f(x) \pm g(x) \pm h(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx \pm \int h(x)\, dx$ Esempio: $\int (7x + x^2)\, dx = \int 7x\, dx + \int x^2\, dx$
Metodo per parti	$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$ Esempio: $\int x \cdot sen(x)\, dx \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Scelgo come $f(x) = sen(x);\ g(x) = x \Rightarrow$ $\Rightarrow F(x) = -\cos(x)\,;\, g'(x) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \int sen(x) \cdot x\, dx = [-\cos(x)] \cdot (x) - \int [-\cos(x)] \cdot (1)\, dx =$ $= [-\cos(x)] \cdot (x) + \int [\cos(x)]\, dx = [-\cos(x) \cdot x] + [sen(x) + c]$
Metodo di decomposizione in intervalli (Usato più raramente)	$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \quad ; \quad \text{con } a < c < b$ Esempio: $\int_{-b}^{b} \lvert x - a \rvert\, dx \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Voglio levare il valore assoluto $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Dato a tale che: $0 < a < b$, allora $\lvert x - a \rvert = \begin{cases} x - a & per\ x - a \geq 0 \to x \geq a \\ a - x & per\ x - a < 0 \to x < a \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \int_{-b}^{a} (a - x)\, dx + \int_a^b (x - a)\, dx =$ Risolvo i 2 integrali

● Integrale di una composta come primitiva

$$D[f(g(x))] = f'[g(x)] \cdot g'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

Esempio 1:

Caso base:	$D(\cos(x)) = -sen(x)$	$\int sen(x) = -\cos(x) + c$
Caso generalizzato:	$D(\cos(f(x)) = -sen(f(x)) \cdot f'(x)$	$\int sen(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = -\cos(f(x)) + c$

Esempio 2:

Caso base:	$D(\ln(x)) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\lvert x \rvert) + c$
Caso generalizzato:	$D(\ln(f(x))) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \ln(\lvert f(x) \rvert) + c$

● Integrali Immediati ed Immediati Generalizzati

Per scrivere un integrale generalizzato a partire dal suo integrale immediato:

1) Sostituisco $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{f(x)}$ all'interno dell'integrale di partenza
2) Sostituisco $\boldsymbol{dx}$ con $\boldsymbol{f'(x)\ dx}$ all'interno dell'integrale di partenza
3) Sostituisco $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{f(x)}$ nel risultato dell'integrale di partenza

(Gli integrali generalizzati sono i casi in cui la primitiva è una composta)

Integrale immediato	Integrale immediato generalizzato
$\int k\ dx = \int k \cdot x^0\ dx = k \cdot \int x^0 dx = k \cdot x + c$ con k costante	
$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ con $n \neq -1$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\ dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$; con $n \neq -1$
$\int x^{-1}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \ln(\|x\|) + c$ NB: $\|x\|$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = \ln(\|f(x)\|) + c$
$\int a^x\ dx = a^x \cdot \frac{1}{\ln(a)} + c$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = a^{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln(a)} + c$
$\int e^x\ dx = e^x \cdot \log_e(e) + c = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\ dx = e^{f(x)} + c$

$\int sen(x)\ dx = -\cos(x) + c$	$\int sen[f(x)] \cdot f'(x)\ dx = -\cos[f(x)] + c$
$\int cos(x)\ dx = \text{sen}(x) + c$	$\int cos[f(x)] \cdot f'(x)\ dx = \text{sen}[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = tg(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\ dx = tg[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{\text{sen}^2(x)}\ dx = -cotg(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2[f(x)]}\ dx = -cotg[f(x)] + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsen(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\ dx = arcsen[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg(x) + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\ dx = arctg[f(x)] + c$

● Integrazione per sostituzione (cambio di variabile) – Risolvere per t

Formalmente:

$$\int_a^b f'[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(t)dt \quad ; \qquad \text{Con } t = g(x) \;,\; dt = g'(x)dx$$

Modo 1 (intervallo originale):

Passo 0	Parto da $\int_a^b ?\, dx$
Passo 1	Passo dall'integrale definito $\int_a^b ?\, dx$ a studiare l'integrale indefinito $\int ?\, dx$
Passo 2	Pongo $t = g(x)$
Passo 3	Pongo $dt = D\big(g(x)\big) \cdot dx$
Passo 4	Mi riconduco in forma: $\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx$ Ovvero, cerco di far comparire un $g'(x)$ che mi serve per sostituire dt NB: $f\big(g(x)\big)$ è una qualsiasi funzione composta che contiene dei $g(x)$ $\left(\text{Esempio: } \frac{\sqrt{g(x)}-1}{e^{g(x)}}\right)$ L'importante è che ci sia una $g'(x)$ per sostituite dt
Passo 5	Risolvo $\int f(t)dt = F(t) + c = F\big(g(x)\big) + c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Big[F\big(g(x)\big)\Big]_a^b = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$

Modo 2 (sostituzione dell'intervallo):

Passo 0	Parto da $\int_a^b ?\, dx$
Passo 1	Pongo $t = g(x)$
Passo 2	Pongo $dt = D\big(g(x)\big) \cdot dx$
Passo 3	Mi riconduco in forma: $\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx$ Ovvero, cerco di far comparire un $g'(x)$ che mi serve per sostituire dt
Passo 4	Converto: $\int_a^b f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$
Passo 5	Passo dall'integrale definito $\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$ a studiare l'integrale indefinito $\int f(t)dt$
Passo 6	Risolvo $\int f(t)dt = F(t) + c \Rightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)} = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$

● Integrazione per sostituzione (cambio di variabile) – Risolvere per x

Formalmente:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f'\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\,dt \quad ; \qquad \text{Con } x = g^{-1}(t)\ ,\ \ dx = g'(t)\,dt$$

Quando usare questa tecnica:
- quando serve FAR COMPARIRE dei valori che ci servono per usare degli integrali notevoli / generalizzati
- quando è difficile fare in modo che compaia $g'(x)\,dx$ da sostituire con dt

Modo 1 (intervallo originale), Caso 1 (funzione inversa):

Passo 0	Parto da $\int_a^b f(x)dx$
Passo 1	Passo dall'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ a studiare l'integrale indefinito $\int f(x)dx$
Passo 2	Pongo $t = g(x)$
Passo 3	Pongo $x = g^{-1}(t) = h(t)$ Esempio: Pongo $t = e^x \Rightarrow x = \ln(t)$
Passo 4	Pongo $dx = D\big(h(t)\big)\cdot dt$
Passo 5	Risolvo $\int f\big(h(t)\big)\cdot h'(t)dt = F\big(h(t)\big) + c = F(x) + c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$

Modo 1 (intervallo originale), Caso 2 (intuizione):

Passo 0	Parto da $\int_a^b f(x)dx$
Passo 1	Passo dall'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ a studiare l'integrale indefinito $\int f(x)dx$
Passo 2	Scelgo una funzione $h(t)$ che mi farebbe comodo avere nell'integrale (per ricondurmi a forme note)
Passo 3	Pongo $x = h(t)$
Passo 4	Pongo $dx = D\big(h(t)\big)\cdot dt$
Passo 5	Risolvo $\int f\big(h(t)\big)\cdot h'(t)dt = F\big(h(t)\big) + c = F(x) + c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big)$

Modo 2 (sostituzione dell'intervallo):

Passo 0	Parto da $\int_a^b f(x)dx$
Passo 1	Pongo $t = g(x)$
Passo 2	Pongo $x = g^{-1}(t) = h(t)$
Passo 3	Pongo $dx = D\big(h(t)\big)\cdot dt$
Passo 4	Converto: $\int_a^b f(x)dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f\big(h(t)\big)\cdot h'(t)\,dt$
Passo 5	Passo dall'integrale definito $\int_{h(a)}^{h(b)} f\big(h(t)\big)\cdot h'(t)\,dt$ a studiare l'integrale indefinito $\int f\big(h(t)\big)\cdot h'(t)\,dt$
Passo 6	Risolvo $\int f\big(h(t)\big)\cdot h'(t)\,dt = F\big(h(t)\big) + c \Rightarrow \int_{h(a)}^{h(b)} f\big(h(t)\big)\cdot h'(t)\,dt = \big[F\big(h(t)\big)\big]_{g(a)}^{g(b)} = F\big(h(b)\big) - F\big(h(a)\big)$

● Esempi di Integrazione per Sostituzione

Esempio 1 (sostituzione per t, modo 1):

$\int \cos(x) \cdot \sin[sin(x)]\ dx \Rightarrow$ 1) Salto il passo 1 (è già un integrale indeterminato) ; 2) Sono già con un $g'(x)$ in vista ;

3) $t = sin(x)$; 4) $dt = D[sen(x)]dx = cos(x)\,dx$; 5)Risolvo $\int \sin([t])\,[dt] = -\cos(t) + c = -\cos(sin(x)) + c$

Esempio 2 (sostituzione per t, modo 2):

$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \cos(x^2)\ dx \Rightarrow$ 1) $\int x \cdot \cos(x^2)\ dx$; 2) $t = x^2$; 3) $dt = 2xdx$; 4) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{2}{2} x \cdot \cos(x^2)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) \cdot (2xdx)$;

5) $\frac{1}{2}\int_{(0)^2=0}^{(\sqrt{\pi})^2=\pi} \cos(t)\,dt$; 6) $\frac{1}{2}\int \cos(t)dt = \frac{1}{2}sen(t) + c \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin(t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\sin(\pi) - \frac{1}{2}\sin(0) = 0 - 0 = 0$

NB: Col modo 1 alla fine sarebbe stato simile.

6) $\frac{1}{2}\int \cos(t)dt = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)dt = \frac{1}{2}sen(x^2) + c \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\sin\left([\sqrt{\pi}]^2\right) - \frac{1}{2}\sin(0) = 0 - 0$

Esempio 3 (sostituzione per t, modo1):

$\int \frac{1}{(2x-1)^3} dx \Rightarrow$ 1) Salto ; 2) $t = (2x-1)$; 3) $dt = D(2x-1)dx = 2\text{dx}$;

4) faccio comparire $D(2x-1) = 2$: $\int \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{(2x-1)^3} dx$;

5) $\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2} \cdot \int t^{-3} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\right) + c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2t^2}\right) + c = -\frac{1}{4t^2} + c = -\frac{1}{4(2x-1)^2} + c$

Esempio 4 (sostituzione per x, modo 1, caso 1):

$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\ dx \Rightarrow$ 1) Salto ; 2)$t = \sqrt{x}$; 3) $x = t^2$; 4) $dx = D[t^2]\,dt = 2t\,dt$;

5) $\int \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}+1} \cdot [2t\,dt] = \int \frac{(t^2-1)\cdot 2t}{t+1} dt = \int \frac{(t+1)\cdot(t-1)\cdot 2t}{t+1} dt = \int (t-1)\cdot 2t\,dt = [\dots]$

Esempio 5 (sostituzione per x, modo 1 caso 2):

$\int \sqrt{1-x^2}\ dx \Rightarrow$ 1) Salto ; 2) Penso che , per liberarmi dalla radice, $1 - \sin^2(?) = \cos^2(?)$, e $\sqrt{\cos^2(?)} = \cos(?)$;

3) $x = sen(t)$; 4) $dx = D\big(sen(t)\big)dt = \cos(t)\,dt$;

5) $\int \sqrt{1 - sen^2(t)} \cdot (\cos(t)\ dt) = \int \sqrt{\cos^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt = \int \cos(t) \cdot \cos(t)\ dt =$ integro per parti [...]

● Integrali ciclici

È una tecnica di integrazione che si può usare solo quando, svolgendo un integrale $\int f(x)\,dx$, ci si ritrova con dei valori e l'integrale di partenza CAMBIATO DI SEGNO.

Ovvero: $\int f(x)\,dx = [\dots] = g(x) - \int f(x)\,dx$

Pongo ad equazione: $\displaystyle\int f(x)\,dx = g(x) - \int f(x)\,dx$

E risolvo spostando l'integrale: $\displaystyle\int f(x)\,dx + \int f(x)\,dx = g(x) \;\Rightarrow\; 2\cdot\int f(x)\,dx = g(x) \;\Rightarrow\; \int f(x)\,dx = \frac{g(x)}{2}$

NB: Questo metodo NON funziona se l'integrale non ha il segno opposto.

Cosa succede se non c'è il segno opposto?

$$\int f(x)\,dx = g(x) + \int f(x)\,dx \quad\Rightarrow\quad \int f(x)\,dx - \int f(x)\,dx = g(x) \quad\Rightarrow\quad 0 = g(x)$$

In tal caso, l'integrale di partenza scompare, e non posso calcolare quanto vale.

Esempio valido:

$$\int e^x\cdot\sin(x)\;dx \quad\Rightarrow\quad \text{Parti: Scelgo } f(x) = \sin(x)\,,\, g(x) = e^x \left(F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [-\cos(x)]\cdot e^x - \int[-\cos(x)]\cdot e^x\,dx = [-\cos(x)]\cdot e^x + \int[+\cos(x)]\cdot e^x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Parti: Scelgo } f(x) = \cos(x)\,,\, g(x) = e^x \Rightarrow\; [-\cos(x)]\cdot e^x + \left[sen(x)\cdot e^x - \int sen(x)\cdot e^x\,dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Noto che: } \int e^x\cdot\sin(x)\;dx = [\dots] = \;[-\cos(x)]\cdot e^x + \left[sen(x)\cdot e^x - \int sen(x)\cdot e^x\,dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Porto a sx l'integrale: } \int e^x\cdot\sin(x)\;dx + \int e^x\cdot\sin(x)\;dx = [-\cos(x)]\cdot e^x + sen(x)\cdot e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\int e^x\cdot\sin(x)\;dx = [-\cos(x)]\cdot e^x + sen(x)\cdot e^x \Rightarrow \text{Soluzione: } \int e^x\cdot\sin(x)\;dx = \frac{[-\cos(x)]\cdot e^x + sen(x)\cdot e^x}{2}$$

Esempio NON valido (si ripresenta lo stesso integrale, ma NON col segno opposto):

$$\int x\cdot\log(x^2+x+1)\;dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Parti: Scelgo } f(x) = x, g(x) = \log(x^2+x+1) \Rightarrow \frac{x^2}{2}\cdot\log(x^2+x+1) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\dots] \Rightarrow \int x\cdot\log(x^2+x+1)\;dx = \frac{x^2}{2}\cdot\log(x^2+x+1) - \left[\log(x^2+x+1)\cdot\frac{x^2}{2} - \int\log(x^2+x+1)\cdot x\,dx\right]$$

C'è lo stesso segno, l'integrale ciclico non funge.

Infatti se porto l'integrale a sinistra:

$$\Rightarrow \int x\cdot\log(x^2+x+1)\;dx - \int x\cdot\log(x^2+x+1)\;dx = \frac{x^2}{2}\cdot\log(x^2+x+1) - \log(x^2+x+1)\cdot\frac{x^2}{2} \quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow\;\; 0 = 0 \;\;\Rightarrow\;\;$ NON va bene (non ci da info sull'integrale) $\Rightarrow$ dobbiamo usare un'altra tecnica di integrazione

● Somma/Differenza o Moltiplicazione/Divisione per uno stesso valore

Esempio 1: Ricondursi ad un integrale notevole
$\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Noto che è SIMILE a $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(\lvert f(x)\rvert) + c$ $\left(\text{infatti } D(x^4+1) = 4x^3\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Cerco di ricondurmi al caso $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \Rightarrow \int \frac{x^3}{x^4+1}\cdot\frac{4}{4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\cdot[\ln(\lvert x^4+1\rvert) + c]$

Esempio 2: Creare un secondo fattore per l'integrazione per parti
$\int \ln(x)\,dx \Rightarrow$ $\Rightarrow \int \ln(x)\cdot\frac{1}{1}dx = \int \ln(x)\cdot 1\,dx \Rightarrow$ Scelgo $f(x) = 1$, $g(x) = \ln(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\ln(x) - \int 1\,dx = x\cdot\ln(x) - x + c$

Esempio 3: Creare una differenza di quadrati/cubi
$\int \frac{x^2}{?}dx \Rightarrow$ $\Rightarrow \int \frac{x^2(-1+1)}{?}dx = \int \frac{x^2-1}{?} + \frac{1}{?}dx = \int \frac{x^2-1}{?}dx + \int \frac{1}{?}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{?}dx + \int \frac{1}{?}dx$

● Consigli per gli integrali di funzioni razionali (frazioni di polinomi)

Legenda:

Con $|f(x)|$ intendo "Grado del polinomio $f(x)$".

Con "$f(x)$ non è scomponibile" intendo che $f(x)$ è composto solo da fattori di 1° grado e/o di 2° grado con $\Delta < 0$

Dato un integrale in forma $\int \frac{N}{D} dx$

$\lvert N\rvert \geq \lvert D\rvert$	Applico la divisione fra polinomi
$\lvert N\rvert = \lvert D\rvert - 1$	Mi riconduco ad applicare $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(\lvert f(x)\rvert) + c$ Perché? La derivata di un polinomio $f(x)$ è di un grado minore al polinomio
$\lvert N\rvert = 1$ $\lvert D\rvert = 2$	OPZIONE 1: Mi riconduco ad applicare $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(\lvert f(x)\rvert) + c$ OPZIONE 2: Mi riconduco ad applicare $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\, dx = arctg[f(x)] + c$
$\lvert N\rvert = 0$ $\lvert D\rvert = 2$ con $\Delta < 0$	$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c$ Perché? È una formula che si dimostra partendo da: $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctg(x) + c$
D è scomponibile in fattori	PASSO 1: Scompongo D PASSO 2: Applico i fratti semplici
D è scomposto in fattori D non è ulteriormente scomponibile	Applico i fratti semplici

Ovvero:
Passo 1) Se $|N| \geq |D|$, applico la divisione fra polinomi, se no vado al passo 2

Passo 2) Se i gradi di $|N|$ e $|D|$ rientrano nei casi particolari, mi riconduco agli integrali immediati, se no vado al passo 3

Passo 3) Scompongo il denominatore (Se sono arrivato fin qui, 99% il denominatore è scomponibile)

Passo 4) Applico i fratti semplici

Esempio:

$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\, dx \Rightarrow$ Passo 1: $|N| \geq |D|$, divido $\Rightarrow [...] \Rightarrow \int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\, dx = \int (x+1)dx + \int \frac{1}{x^2-x-2} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Passo 2: Niente integrali immediati, salto $\Rightarrow$ Passo 3: D è scomponibile $\Rightarrow \int (x+1)dx + \int \frac{1}{(x-2)\cdot(x+1)} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Passo 4: Fratti semplici $\Rightarrow \int [(x+1)]dx + \int \left[\frac{\frac{1}{3}}{(x-2)}\right] dx + \int \left[\frac{-\frac{1}{3}}{(x+1)}\right] dx = [...] = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right) + c$