Esercizio 4.5

Sia dato il linguaggio:

$$L = \{a^t \mid t \text{ numero primo}\}$$

Stabilire se L è libero e giustificare formalmente la risposta.

Analizziamo le parole che costituiscono L.

$$L = \{a, a^2, a^3, a^5, a^7, a^{11}, a^{13}, a^{17}, \dots\}$$

$\lvert a \rvert = 1$	$\lvert a^{11} \rvert = 11$	$\lvert a^{29} \rvert = 29$
$\lvert a^2 \rvert = 2$	$\lvert a^{13} \rvert = 13$	$\lvert a^{31} \rvert = 31$
$\lvert a^3 \rvert = 3$	$\lvert a^{17} \rvert = 17$	…
$\lvert a^5 \rvert = 5$	$\lvert a^{19} \rvert = 19$	$\lvert a^n \rvert = n$
$\lvert a^7 \rvert = 7$	$\lvert a^{23} \rvert = 23$	…

La lunghezza delle parole di L non cresce in maniera costante, né è possibile determinare un sottoinsieme infinito di L le cui parole hanno lunghezze che crescono in maniera costante. Dunque L non è un linguaggio libero da contesto.

Proviamo formalmente ciò.

Supponiamo per assurdo che L sia libero da contesto.

Per il Pumping Lemma per i linguaggi liberi deve esistere una costante intera p, dipendente unicamente da L, tale che:

$$\forall z \;\; z \in L,\ |z| > p \;\Rightarrow\; z = uvwxy$$

ed inoltre valgono le seguenti:

(1) $|vwx| \leq p$;

(2) $vx \neq \lambda$;

(3) $\forall i,\ i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$

Consideriamo la seguente parola di L:

$$z = a^{f(p+1)}$$

ove f è una funzione definita in $\aleph$ ed a valori in $\aleph$, che associa ad ogni intero t il t-esimo numero primo.

$$f : \aleph \to \aleph$$

$$\forall t \in \aleph : f(t) = t - \text{esimo numero primo.}$$

Pertanto z è la parola di L ottenuta concatenando un numero di a pari al p+1-esimo numero primo.

È immediato osservare che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \forall t \in \aleph : \quad & f(t) \geq t \qquad (f(t) > t \quad \forall t,\ t > 3) \\ & f(t+1) > t \\ & f(t+1) > f(t) \end{aligned}$$

Pertanto risulta:

$$|z| = f(p+1) > p$$

e z può essere scritta nella forma $z = uvwxy$ in modo tale che valgano le (1), (2) e (3).

Consideriamo la parola:

$$uv^{f(p+1)+1}wx^{f(p+1)+1}y$$

Per la (3), con $i = f(p+1)+1$, si deve verificare che tale parola è un elemento di *L*.

D'altra parte, se valutiamo la lunghezza della parola $uv^{f(p+1)+1}wx^{f(p+1)+1}y$ si ha:

$\left|uv^{f(p+1)+1}wx^{f(p+1)+1}y\right| = \left|uvv^{f(p+1)}wxx^{f(p+1)}y\right| = |uvwxy| + \left|v^{f(p+1)}\right| + \left|x^{f(p+1)}\right|$ (a)

Poiché:

$\left|\alpha^i\right| + \left|\beta^i\right| = i \cdot |\alpha| + i \cdot |\beta| = i \cdot (|\alpha| + |\beta|) = i \cdot |\alpha\beta|$

la (a) può essere scritta nella forma:

$|z| + f(p+1) \cdot |vx| = f(p+1) + f(p+1) \cdot |vx| = f(p+1) \cdot (1 + |vx|)$ (b)

Ora denotiamo con *k* la lunghezza della stringa *vx*:

$$k = |vx|$$

Per la (2), $k > 0$ e per la (1) si ha che $k \le |vwx| \le p$.

Dunque:

$$0 < k \le p$$

Ma allora la (b) diventa:

$f(p+1) \cdot (1 + |vx|) = f(p+1) \cdot (1+k)$ (c)

e, per la (3), deve risultare che:

$$f(p+1) \cdot (1+k)$$

sia un numero primo. Ma questo è un assurdo, poiché $k+1 \neq 1$ per ogni *k*.

Dunque:

$$uv^{f(p+1)+1}wx^{f(p+1)+1}y \notin L$$

contro la (3).

L'assurdo è derivato dall'aver supposto che *L* fosse libero da contesto. Possiamo concludere che *L* non è libero da contesto, in quanto *L* è infinito ma non verifica il Pumping Lemma per i linguaggi liberi.

Inoltre, se *L* fosse libero da contesto, il seguente sarebbe un teorema dell'aritmetica formale (*teoria assiomatica dei numeri*):

$$\begin{array}{l} t \text{ numero primo} \Rightarrow t + k \cdot i \text{ numero primo} \\ t \text{ numero primo} \Rightarrow t + 2k \cdot i \text{ numero primo} \end{array} \quad 0 < k \le p,\ \forall i,\ i \ge 0$$

Il teorema precedente è palesemente falso. Esso sarebbe un corollario del Pumping Lemma per i linguaggi liberi, nell'ipotesi che *L* fosse libero. Il perché è semplice.

È sufficiente considerare

$$z = a^t \text{, } t \text{ numero primo e } t > p.$$

Consideriamo le parole:

$$uv^{i+1}wx^{i+1}y \quad \forall i,\ i \ge 0$$

Per la (3),

$$uv^{i+1}wx^{i+1}y \in L \quad \forall i,\ i \geq 0$$

Ma si ha:

$$\left|uv^{i+1}wx^{i+1}y\right| = |uvwxy| + \left|v^i x^i\right| = t + i \cdot |vx| \qquad \text{(a}'\text{)}$$

Posto $k = |vx|$ e $0 < k \leq p$, per la (1) e la (2) si ha che (a′) diventa:

$$t + i \cdot |vx| = t + i \cdot k \quad \forall i,\ i \geq 0 \qquad \text{(b}'\text{)}$$

e $t + i \cdot k$ deve essere un numero primo per un certo k, $0 < k \leq p$, e per tutti gli interi non negativi i ($i \geq 0$). Ma questo è assurdo.