Prova scritta di Analisi Matematica del 10.6.2019

1. $$f(x) = \frac{e^{1/x}}{x-6}$$

(a) Dominio $x \neq 0$ (esistenza di $\frac{1}{x}$)

$x-6 \neq 0$, $x \neq 6$ (denom. diverso da 0)

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$

Intersezioni con gli assi e segno di f

$0 \notin \text{dom} f$

$f(x) = 0 \iff e^{1/x} = 0$ mai

$f(x) > 0 \underset{e^{1/x} > 0}{\iff} x - 6 > 0 \iff x > 6$

$f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$

Limiti significativi $0, 6, \pm\infty$

Se $x \to 0^+$ $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow e^{1/x} \to +\infty \\ x-6 \to -6 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$f(x) \to -\infty$ $\left[\frac{+\infty}{-6}\right]$

Se $x \to 0^-$ $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{1/x} \to 0 \\ x-6 \to -6 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$f(x) \to 0$ $\left[\frac{0}{-6}\right]$

Se $x \to 6$ $f(x) \sim \frac{e^{1/6} > 0}{x-6} \Rightarrow$

$x \to 6^+$ $f(x) \to +\infty$

$x \to 6^-$ $f(x) \to -\infty$

$x = 6$ as. verticale

Se $x \to -\infty$ $\frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow e^{1/x} \to 1 \Rightarrow$

$f(x) \sim \frac{1}{x-6} \to 0$ $\left[\frac{1}{-\infty}\right]$

$y=0$ asintoto orizzontale

se $x\to+\infty$ $\quad \frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow e^{1/x}\to 1 \Rightarrow$

$$f(x)\sim \frac{1}{x-6}\to 0 \qquad \left[\frac{1}{+\infty}\right]$$

$y=0$ asintoto orizzontale

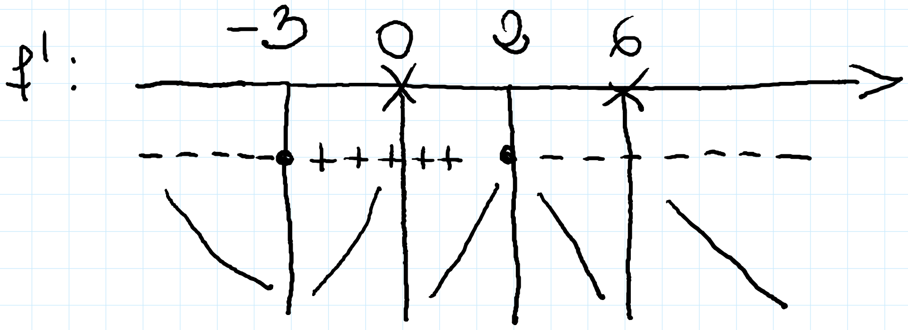
Derivata prima e monotonia $\quad \forall x\in \mathrm{dom}\, f$

$$f'(x)=\frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)(x-6)-e^{1/x}}{(x-6)^2}=$$

$$=-e^{1/x}\,\frac{\frac{x-6}{x^2}+1}{(x-6)^2}=-\underbrace{e^{1/x}}_{>0}\,\frac{x^2+x-6}{\underbrace{(x-6)^2}_{>0}}$$

$$f'(x)\geq 0 \iff x^2+x-6\leq 0 \qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2} \begin{matrix}\nearrow -3\\ \searrow 2\end{matrix}$$

$$\iff -3\leq x\leq 2$$



f è crescente in $(-3,0)$ e in $(0,2)$;

f è decrescente in $(-\infty,-3)$, in $(2,6)$, in $(6,+\infty)$

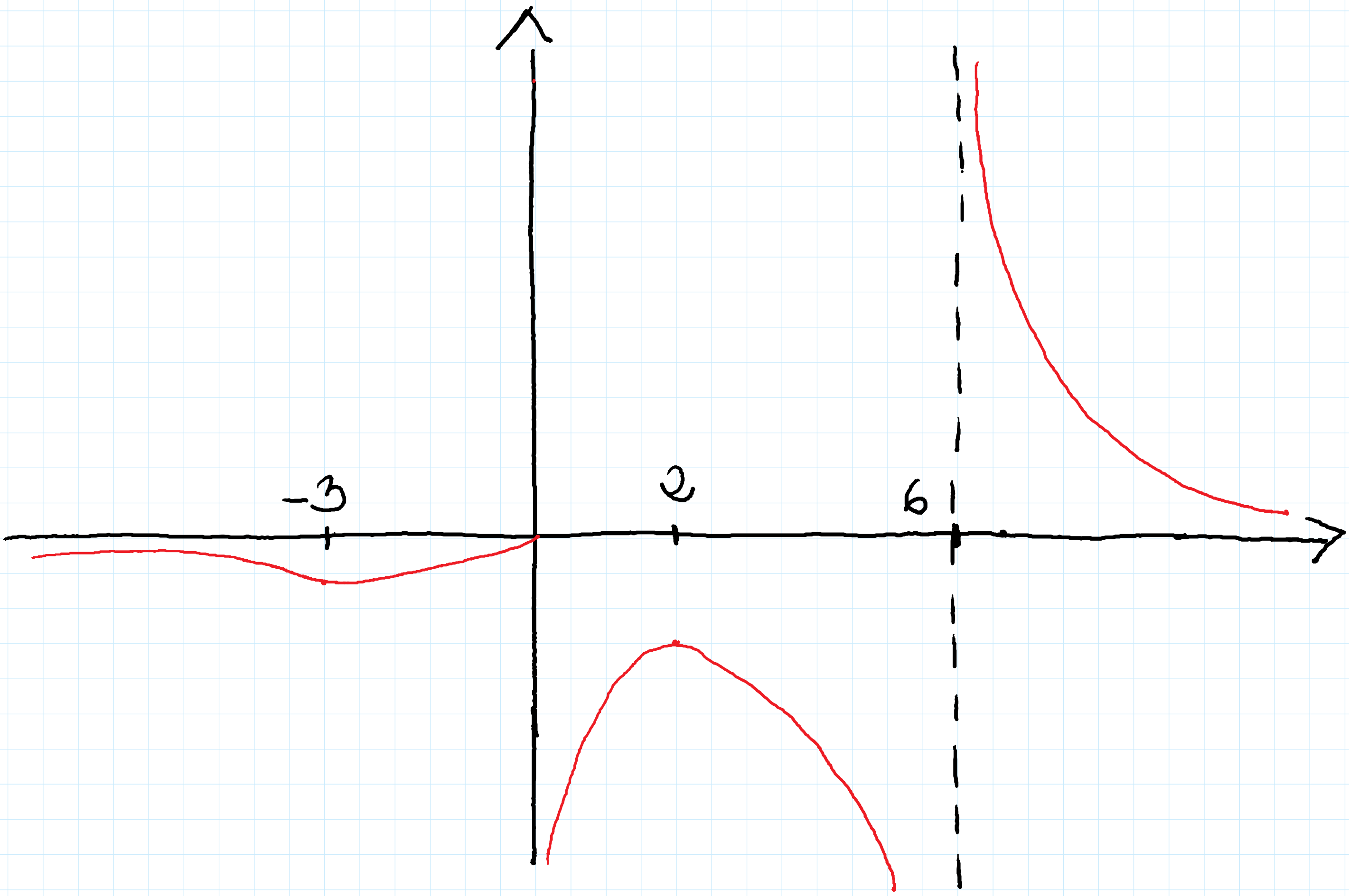
$x=-3$ è un p.to di minimo relativo di f

$$f(-3)=\frac{e^{-1/3}}{-9}\sim -0.1$$

$x=2$ punto di massimo relativo per f

$$f(2)=\frac{e^{1/2}}{-4}\sim -0.4$$

Grafico di f



(b)

i. $\operatorname{Im} f = (-\infty, f(2)) \cup (f(-3), 0) \cup (0, +\infty)$

ii $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$

iii L'eq $f(x) = 0$ ha 0 soluzioni;
l'eq. $f(x) = 10$ ha 1 soluzione;
l'eq. $f(x) = -10$ ha 2 soluzioni.

2. $$\lim_{x \to -\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{3x}} - 1 \right) = ?$$

Per $x \to -\infty$ $\frac{1}{3x} \to 0 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{3x}\right)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2} \frac{1}{3x} = \frac{1}{6x}$

$$x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1 \right) \sim x^2 \cdot \frac{1}{6x} = \frac{x}{6} \to -\infty$$

Quindi $\ell = -\infty$.

3. $$I = \int_0^1 \frac{x^2+5}{(x+1)^2}\,dx$$

grado num. = grado den $\Rightarrow$ faccio la divisione tra polinomi

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & & +5 & x^2+2x+1 \\ -x^2 & -2x & -1 & 1 \\ \hline // & -2x & +4 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+5}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2x+4}{(x+1)^2} = 1 - 2\,\frac{x-2}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - 2\,\frac{(x+1)-1-2}{(x+1)^2} =$$

$$= 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2}$$

$$I = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \left[x - 2\log|x+1| - \frac{6}{x+1}\right]_0^1$$

$$= 1 - 2\log 2 - 3 + 6 = 4 - 2\log 2$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$$

$$a_n = (-1)\,\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$$ $\Rightarrow$ a_n è a segni alterni

Studio la convergenza assoluta, cioè la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{1/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

So che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (serie armonica generalizzata) quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

La serie assegnata, essendo assolutamente convergente, è convergente.