Analisi Matematica - 11.7.2018

Friday, 13 July, 2018 14:39

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}$

(a) Dominio:

$x^2+2x+3 \geq 0 \quad (\Delta = 4-12<0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \neq 0$

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) > 0 \iff x > 0$

Non vi sono punti di intersezione con gli assi cartesiani
$(\Delta < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+3} > 0, \; 0 \notin \text{dom } f)$

(b) Limiti significativi: $0, \pm\infty$

$x \to 0 \qquad \sqrt{x^2+2x+3} \to \sqrt{3} \quad \Rightarrow$

$f(x) \sim \dfrac{\sqrt{3}}{x} \quad \Rightarrow$

se $x \to 0^+$ $\quad f(x) \to +\infty$

se $x \to 0^-$ $\quad f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty \qquad x^2+2x+3 \sim x^2 \quad \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+2x+3} \sim \sqrt{x^2} = |x| = \underset{x>0}{x} \quad \Rightarrow$

$f(x) \sim \dfrac{x}{x} = 1 \to 1$

$x \to -\infty \qquad x^2+2x+3 \sim x^2 \quad \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+2x+3} \sim |x| = \underset{x<0}{-x} \quad \Rightarrow$

$f(x) \sim -\dfrac{x}{x} = -1 \to -1$

$x = 0$ asintoto verticale;

$x = 1$ asintoto orizzontale a $+\infty$;

$x = -1$ asintoto orizzontale a $-\infty$.

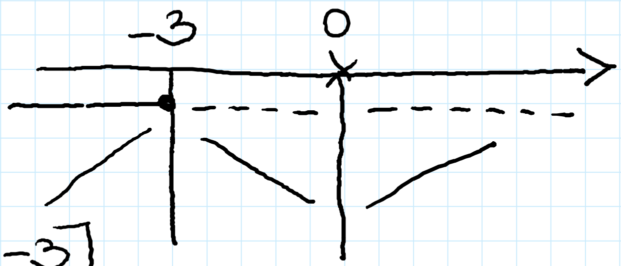
(c) $\forall x \in \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\cancel{2}x+\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2x+3}}\cdot x - \sqrt{x^2+2x+3}}{x^2}$$

$$= \frac{x(x+1)-(x^2+2x+3)}{x^2\sqrt{x^2+2x+3}} =$$

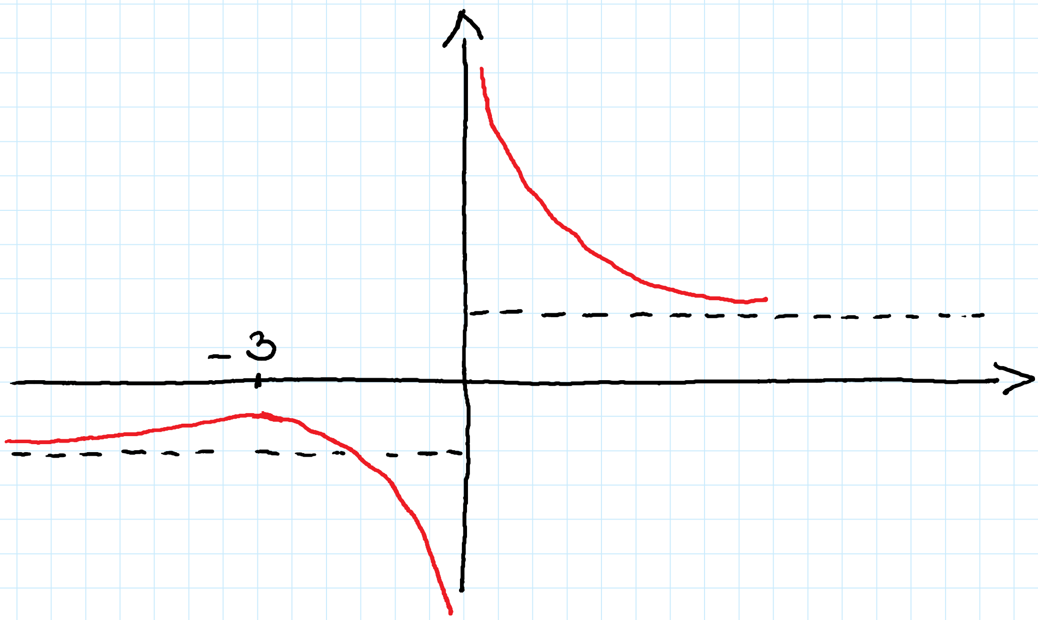
$$= \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}-2x-3}{x^2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{-x-3}{x^2\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$f'(x) \geq 0 \iff -x-3 \geq 0 \iff x \leq -3$



f è crescente in $(-\infty,-3]$,
f è decrescente in $(-3,0)$ e in $(0,+\infty)$;
$x=-3$ p.to di massimo relativo.

(d) Grafico di f:



(e) $\text{Im } f = (-\infty, f(-3)] \cup (1,+\infty)$

L'eq. $f(x)=\lambda$ ha:

1 soluzione se $\lambda \leq -1$;

2 soluzioni se $-1 < \lambda < f(-3)$;

1 soluzione se $\lambda = f(-3)$;

0 soluzioni se $f(-3) < \lambda \leq 1$;

1 soluzione se $\lambda > 1$.

2.
$$\lim_{u \to +\infty} \frac{\sqrt{u^2 + u \log^3 u}}{\sqrt{u}\,\log u} = P$$

Si tratta di una forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$

per $u \to +\infty$
$$u^2 + u\log^3 u = u^2\Big(1 + \underbrace{\frac{\log^3 u}{u}}_{\downarrow 0}\Big) \sim u^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{u^2 + u\log^3 u} \sim \sqrt{u^2} = u$$

$$P = \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{\sqrt{u}\,\log u} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\sqrt{u}}{\log u} = 0.$$

3.
$$I = \int_1^2 \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$$

Conviene calcolare preliminarmente l'int. indefinito
$$I_1 = \int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$$

Occorre effettuare la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & +1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} -x^3 - x & & x \\ \hline // \; -x & +1 & \end{array}$$

da cui

da cui:

$$I_1 = \int \left(x + \frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right]_1^2$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\log 5 + \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}$$

Inoltre

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{2}\log(\omega^2+1)}_{\to +\infty} + \underbrace{\operatorname{arctg}\omega}_{\to \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 5 - \frac{\pi}{4}\Bigg)$$

$$= +\infty$$

ω^2 di ordine superiore rispetto a $\log(\omega^2+1)$

4. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(x-1)^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

Sia $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Per calcolare il raggio di convergenza, occorre calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Quindi il raggio di convergenza è $R = +\infty$.

cioè la serie di potenze converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.