ESERCIZI - VER 29 MAGGIO 2017

Si ricorda che non è consentito l'uso di macchine calcolatrici e di telefoni cellulari.

1. Limiti

Esercizio 1.1 (8 Giugno 2016). Sia

$$f(x) = \frac{\log\left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}\right)}{\sqrt[3]{x^3 + 2x} - x}.$$

 $Si\ calcolino$

$$\lim_{x \to 0} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Esercizio 1.2 (22 Giugno 2016). Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x} - x}{\cos(7x)\sin(5x)}$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x + 4} - x}{\cos(\frac{7}{x})\sin(\frac{5}{x})}$$

Esercizio 1.3 (6 Luglio 2016). Si calcoli il sequente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1 - x)}{x^2 \sin(3x)}.$$

Esercizio 1.4 (7 Settembre 2016). Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[5]{x^5 + 16x^3 - 2} - x \right) (x + \log x).$$

Esercizio 1.5 (21 Settembre 2016). Si calcolino i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ della funzione

$$\frac{\log\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}\right)}{\sqrt[3]{x^3+2x}-x}.$$

Esercizio 1.6 (10 Novembre 2016, B3.182). Si calcolino i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to 0$ della funzione

$$x\log\left(\frac{3x+x^2}{x^2+x+1}\right).$$

Esercizio 1.7 (16 Gennaio 2017, B3.188). Si calcoli il limite per $x \to -\infty$ e per $x \to 0$ della seguente funzione

$$\left(\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 4}\right)^{x + \log|x|}.$$

Esercizio 1.8 (23 Marzo 2017, B3.189). Si calcoli il limite per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ della seguente funzione

$$(\sqrt[3]{x} + \log^2(x^2)) (\sqrt[3]{x^2 + 5|x| - 1} - \sqrt[3]{x^2}).$$

MS1 8.56
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(\sqrt{x-1}) - [\log(x-1)]/2}{5-2 \cos x}$$

MS1 11.37
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^5}{(\sin x-x\cos \frac{x}{\sqrt{3}})^2}$$

MS1 11.41 Calcolare il limite in 0 e all'infinito della funzione

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{\text{sen } x}{x} - \frac{x}{\text{sen } x} \right)$$

MS1 11.58
$$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x)^{1/x^2} - 1/\sqrt{e}}{x^2}$$

B3.142.★

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x \sin x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x + \log(1 + x^2)}{\log|x|}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\log(1+x)}{x} - e^{-x/2}\right) \frac{1}{\operatorname{Ch} x - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} - e^{x^2} \right) \frac{1}{x \sin x} \right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(e^{1/x^2} - \cos\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2}\right)}{\sin^2(1/x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sin 2x}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x \sin x - e^{x^2}}{x \sin(x^3)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - x + \frac{1}{2} \right)$$

P-

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \operatorname{Ch} x}{(\tan^2 x) \tan(x^2)}$$

4.293.
$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^{\sin x} - e^x\right) x^{\alpha}$$
 (al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\operatorname{Sh} x) + \operatorname{Ch}(\sin x) - 2}{x^{\alpha}}$$

 $_{
m al\ variare\ del}$ parametro reale lpha).

4.306.★ Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\cos(e^x - 1) + \sin(x^2 + x^3) - 2}{x^{\alpha}}$$

al variare del parametro reale α .

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x + 1 - e^{x^2}}{x^2 \sin^2 x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x + \log(1 - x^2)}{x^2 (2x + x^2)^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x - 1 \right)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin(x-1)}{\sin^2(\pi x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{2^{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-\sin^2\!x}{\log^2(1+2x^2)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log^2 x \cos(\pi x)}{\sin(\frac{\pi x}{2}) - 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+e^{-x})}{x\log(1+2x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{x^2}{2} + \cos x\right)}{\sin^2 2x \cdot \sin(x^2)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(e^x - x)}{x \log(1 + 3x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\operatorname{Ch} x - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2(e^{2x^2} - 1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{(\sin^2 x)\sin(x^2)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos x}{x \sin x}$$

Forthcoming

2. Serie

Esercizio 2.1 (8 Giugno 2016). Si studi il carattere della sequente serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\log(n^2 - 1) + (-1)^n \log(n+3) - (-1)^n \log n - \log(n^2 - 2n) \right).$$

Esercizio 2.2 (22 Giugno 2016, B5.78). Si studi il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan n \cdot \arctan \frac{1}{n}.$$

Esercizio 2.3 (6 Luglio 2016). Si studi l'assoluta convergenza e la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{n} \right).$$

Esercizio 2.4 (7 Settembre 2016). Si studi la convergenza della seguente serie, e se ne determini la somma, se convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{3^{2n}} + (-1)^n \frac{3^{n+1}}{4^n} \right).$$

Esercizio 2.5 (21 Settembre 2016). Si studi il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n n + \sin(n)}{n^2 \log(n)}.$$

Esercizio 2.6 (10 Novembre 2016, B5.80). Si studi il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) + \cos(n)}{n^2 + 1}.$$

Esercizio 2.7 (16 Gennaio 2017). Si studi la convergenza della seguente serie, e se ne determini la somma, se convergente, al variare del parametro $x \neq 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+2}}{x^{2n+1}}.$$

Esercizio 2.8 (23 Marzo 2017). Si studi la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 1 + \arctan(n)}{n^2 + 1}.$$

Esercizio 2.9. Si studi la convergenza della sequente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}.$$

determinando la somma della serie con precisione di 8 bit dopo la virgola.

Esercizio 2.10. Si studi il carattere della seguente serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{(1-x^2)^{n+1}}{3} \, .$$

Esercizio 2.11. Si studi il carattere della seguente serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^{-n} \left(\frac{x}{1+x} \right)^n.$$

Esercizio 2.12. Si studi il carattere della seguente serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \, \frac{x^n}{(1+x)^n} \, .$$

Esercizio 2.13. Si studi il carattere della seguente serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^x} \, .$$

5.13.
$$\star \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{n+1}{3-n^2}} - e^{\frac{1}{n}} \right)$$

5.17.
$$\star \sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n} \left(\sin \frac{1}{n} + \sin \left(\frac{1}{e^n} \right) \right)$$

5.26.
$$\bigstar$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n} \left(\sin \frac{1}{n} \right) \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \cos n.$$

5.27.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \sin \frac{1}{n} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right).$$

5.46.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + (-1)^n \right] \log \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$$

5.48.
$$\bigstar$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin(\cos n))^n$$

5.52.
$$\star$$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\sin n \right) \left(\sin \frac{1}{n} \right)^2$ 5.54. \star $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\tan \frac{1}{n} \right)$

5.53.
$$\star \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\frac{n}{1+n^2}} - 1 \right) \sqrt{n}$$
 5.55. $\star \sum_{n=0}^{\infty} \log \left(\frac{n^3}{n^3 + 2n} \right)$

$$\mathbf{5.58.} \bigstar \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right]^{\alpha}, \, \alpha > 0 \qquad \qquad \mathbf{5.65.} \bigstar \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n \cdot \tan \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$$

5.59.
$$\star \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{1/n} - 1)}{\sqrt{n}}$$
 5.66.
$$\star \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \sin \frac{1}{n} \cdot \tan \frac{1}{n}$$

$$5.60. \bigstar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{\sqrt{n}}$$

$$5.67. \bigstar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$$

$$5.71. \bigstar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{\sqrt{n}} \qquad \qquad 5.74. \bigstar \sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{1/n^2} - \cos \frac{1}{n} \right) \log n.$$

$$5.72. \bigstar \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log^3 n}{n}$$

$$5.75. \bigstar \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\cos \frac{1}{n} - \operatorname{Ch} \frac{1}{n} \right)$$

3. Funzioni

Esercizio 3.1 (8 Giugno 2016). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico.

$$f(x) = e^{-x^2} \left(x^3 + \frac{3}{2} x \right).$$

Esercizio 3.2 (22 Giugno 2016, B4.159). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico.

$$f(x) = e^{-x} |x(x+1)|$$
.

Esercizio 3.3 (6 Luglio 2016). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico.

$$f(x) = x |e^{x-1} - 1|$$
.

Esercizio 3.4 (7 Settembre 2016,B4.144). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 2}{x + 3}\right).$$

Esercizio 3.5 (21 Settembre 2016). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico:

$$f(x) = e^{-2x} \left(\frac{x+2}{x-3} \right).$$

Esercizio 3.6 (10 Novembre 2016, B4.127). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico:

$$f(x) = e^{-x} \sqrt[3]{x^2 - 1}.$$

Esercizio 3.7 (16 Gennaio 2017,B4.151). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico:

$$f(x) = x(\log|x|)^{\frac{3}{5}}.$$

Esercizio 3.8 (23 Marzo 2017, B3.284). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico:

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}e^{-x}.$$

Esercizio 3.9 (B4.7,L). Si studi la seguente funzione, disegnandone il grafico.

$$f(x) = e^x \left(\frac{5x - 3}{x^2 + 2x - 3} \right).$$

Esercizio 3.10 (B4.9,L). Si studi la seguente funzione, tracciandone il grafico qualitativo:

$$f(x) = \log[(2 - x^2)(1 + x)].$$

Discutere, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$.

Esercizio 3.11 (L). Si studi la seguente funzione, tracciandone il grafico qualitativo:

$$f(x) = \log |(x-2)(1+x)|.$$

Stabilire il più ampio intervallo I contenente un punto di minimo o massimo relativo tale che f ristretta ad I risulti decrescente ed invertibile. Si trovi, infine, l'inversa di tale restrizione.

Esercizio 3.12 (B4.10,L). Si studi la seguente funzione, tracciandone il grafico qualitativo:

$$f(x) = e^x \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Esercizio 3.13 (B4.155,L). Si studi la seguente funzione, tracciandone il grafico qualitativo:

$$f(x) = (1+x)|e^x - 1|.$$

Esercizio 3.14 (B4.174,L). Si consideri la funzione

$$f(t) := \lambda^2 t \exp(1/\lambda t)$$

 $dove \ \lambda > 0 \ \acute{e} \ un \ parametro \ fissato.$

- (1) cercare eventuali massimi e minimi di f per $t \ge 0$.
- (2) studiare il comportamento della funzione per $t \to +\infty$
- (3) completare lo studio della funzione tracciandone il grafico qualitativo

Esercizio 3.15 (L). Si consideri la funzione

$$f(t) := \frac{\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} t \exp(1/\lambda t)$$

dove $\lambda > 0$ é un parametro fissato. Stabilire che f ammette minimo assoluto per $t \geq 0$ e studiare al variare di λ il valore di tale minimo.

Esercizio 3.16 (B4.119,L). Si studi la seguente funzione, tracciandone il grafico qualitativo:

$$f(x) = \log(\frac{1}{\cos^4 x}) - \tan^2 x.$$

Esercizio 3.17 (B4.169,L). Si studi la seguente funzione, tracciandone il grafico qualitativo:

$$f(x) = e^{-x}|e^x - x^2|.$$

4.154.★
$$\log(1+x^2) + \arctan\frac{1}{x}$$

$$4.157. \bigstar \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

4.158.★
$$x^2 - 8x + 4\log|x - 1|$$

4.160.
$$\star xe^{1/(x-1)}$$

4.162.★
$$x^2 - 3x + 2 + \log x$$
.

4.167.
$$\star xe^{-|x^3-1|}$$

4.168.
$$\star e^{3x} (x^2 - |x+1|)$$

4.148.
$$e^x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$$

4.145.
$$\star \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}$$

4.141.
$$\star e^{-x}(|x^2-3|+2x)$$

$$4.142. \star \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$$

4.138.
$$\star e^{-\left|\frac{x+1}{x+2}\right|}$$

4.139.
$$\star x^2 e^{\frac{x-3}{x+1}}$$

4.130.
$$xe^{\frac{x-2}{x+1}}$$

4.138.
$$\star e^{-\left|\frac{x+1}{x+2}\right|}$$

4. Integrali

Esercizio 4.1 (8 Giugno 2016). Si calcoli

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{x-1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \, dx.$$

Esercizio 4.2 (22 Giugno 2016). Si trovino le primitive della funzione

$$\frac{\arctan x}{x^2}$$

Esercizio 4.3 (6 Luglio 2016). Si trovino le primitive della funzione $x \arctan x$.

Esercizio 4.4 (7 Settembre 2016). Si calcoli

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+2}{x^2+2x+3} \, dx \, .$$

Esercizio 4.5 (21 Settembre 2016). Si calcoli

$$\int_{2}^{3} \frac{x^3}{x^2 + x - 2} \, dx \, .$$

Esercizio 4.6 (10 Novembre 2016, B6.69). Si calcoli

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2} \, dx.$$

Esercizio 4.7 (16 Gennaio 2017, B6.61). Si calcoli

$$\int_{e}^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x} \, dx \, .$$

Esercizio 4.8 (23 Marzo 2017, B6.24). Si trovi la primitiva F di $x \sin(x) \cos(x)$

tale che F(0) = 1.

Esercizio 4.9.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

6.12.
$$\star$$
 $\int_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2 + 2x + 5} dx$

6.13.
$$\star \int \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2} dx$$

$$6.23. \bigstar \int x \log_2 x \, dx$$

$$6.24. \bigstar \int x^2 \sin x \cos x dx$$

$$\textbf{6.32.} \bigstar \int_0^{\pi/8} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

$$6.33. \bigstar \int \frac{1 - \sin x}{2 + \cos x} \, dx$$

6.39. Dovendo calcolare

$$6.17. \bigstar \int \frac{x+3}{x^2(x+1)} dx.$$

6.18.
$$\star \int_{-2}^{1} \left(\frac{x+1}{x^2+4x+7} \right) dx$$

$$6.28. \bigstar \int \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

6.29.
$$\star \int_0^1 \frac{\log(x+3)}{(x+2)^2} dx$$

$$6.36. \bigstar \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{2 + \cos^2 x} \, dx$$

$$6.37. \bigstar \int_0^{\pi/2} e^{3\sin x} \sin(2x) \, dx$$

6.40. Dovendo calcolare

$$\int \frac{\sin x}{2 + \sin^2 x} \, dx$$

$$\int \frac{\cos x}{2 + \sin^2 x} \, dx$$

$$\textbf{6.41.} \bigstar \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} dx$$

6.45.★
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\textbf{6.42.} \bigstar \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$$

6.46.
$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

6.43.
$$\int_0^1 x^3 \sqrt{4-x^2} \, dx$$

6.47.
$$\int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx$$

6.52.
$$\int_{-1}^{1} \frac{|x| + \sin x}{1 + x^2} dx$$

6.55.
$$\star \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{|\cos x|}{3 - \cos^2 x} dx$$

$$6.53. \bigstar \int_0^{2\pi} e^{-2x} |\sin x| \, dx$$

$$6.150. \bigstar \int_2^3 \frac{dx}{\sin(\pi x)}$$

$$6.154. \bigstar \int_0^1 \log x dx$$

$$6.151. \bigstar \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

6.155.
$$\star$$
 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x + x}}$

6.152.
$$\bigstar \int_{1}^{+\infty} \sqrt{x} \left[\log \left(1 + x^2 \right) - 2 \log x \right] dx$$

$$6.156. \bigstar \int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x(1+x^2)} dx$$

6.158.★ Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha}} dx.$$

6.159.★ Stabilire per quali valori del parametro reale α converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha} \log x}{1 + x^2} dx.$$

6.160.★ Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^{\alpha}(1+x^{\alpha})} dx.$$

6.169. Stabilire al variare del parametro reale α , se il seguente integrale generalizzato converge oppure no.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha} \log^{\alpha} x}$$

6.170. Stabilire al variare del parametro reale α , se il seguente integrale generalizzato converge oppure no.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha} |\log x|^{2\alpha}}$$

$$6.161. \bigstar \int_0^1 \frac{\cos x}{\log x} \, dx$$

6.165.
$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x\sqrt[3]{1-x^2}} dx$$

6.162.*
$$\int_0^{+\infty} \frac{x + e^{-x}}{2 + 2x + x^2} dx$$

6.166.
$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{x\sqrt[3]{1-x^2}} \, dx$$

[B] Bramanti. Esercitazioni di Analisi Matematica 1. Esculapio [MS1] Marcellini, Sbordone. Esercitazioni di Matematica Volume I parte prima. Liguori

[L] Esercizi svolti a lezione