Prova scritta di Analisi Matematica del 13.11.2017

1. $f(x) = \dfrac{x}{\log^3 x}$

(a) Dominio: f è ben definita se $x>0$ (argomento del logaritmo) e se $\log^3 x \neq 0$ (al denominatore) cioè se $\log x \neq 0$.

$\begin{cases} x>0 \\ \log x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ $\quad \text{dom } f = (0,1)\cup(1,+\infty)$

Non vi sono intersezioni con gli assi: $0 \notin \text{dom} f$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow \log x > 0 \Leftrightarrow x>1$.

(b) Limiti significativi: 0^+, 1, $+\infty$

Se $x\to 0^+$: $\begin{array}{l} x\to 0 \\ \log x \to -\infty \end{array} \Rightarrow f(x)\to 0$

Se $x\to 1$ si ha una forma del tipo $\frac{1}{0}$.
Occorre distinguere:

$x\to 1^-$ $\quad \log x <0 \Rightarrow f(x)\to -\infty$
$x\to 1^+$ $\quad \log x >0 \Rightarrow f(x)\to +\infty$

Se $x\to +\infty$ $\quad f(x)\to +\infty$ (limite notevole)

Asintoti: $x=1$ asintoto verticale.
Non vi sono asintoti orizzontali.

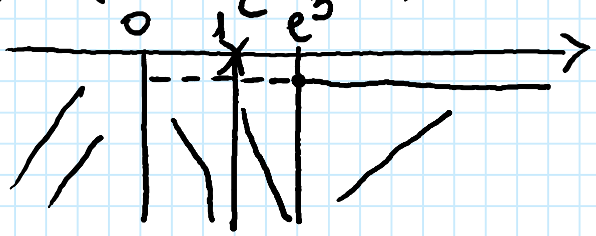
$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\log x} \to 0$ se $x\to+\infty \Rightarrow$ non vi sono asintoti obliqui.

(c) $\forall x \in \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{\log^3 x - \cancel{x}\cdot 3\log^2 x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{\log^6 x}$$

$$= \frac{\log^2 x \, (\log x - 3)}{\log^6 x} = \frac{\log x - 3}{\log^4 x}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \log x - 3 \geq 0 \iff \log x \geq 3 \iff x \geq e^3$$



f è decrescente in $(0,1)$ e in $(1,e^3)$
f è crescente in $(e^3,+\infty)$
$x = e^3$ p.to di minimo relativo

(d) $\forall x \in \text{dom} f$

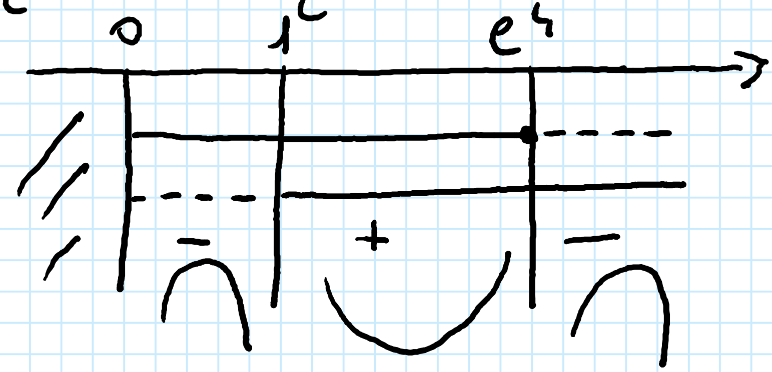
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\log^4 x - (\log x - 3)\, 4 \log^3 x \cdot \frac{1}{x}}{\log^8 x}$$

$$= \frac{\log x - 4(\log x - 3)}{x \log^5 x}$$

$$= \frac{12 - 3\log x}{x \log^5 x} = \frac{3(4 - \log x)}{x \log^5 x}$$

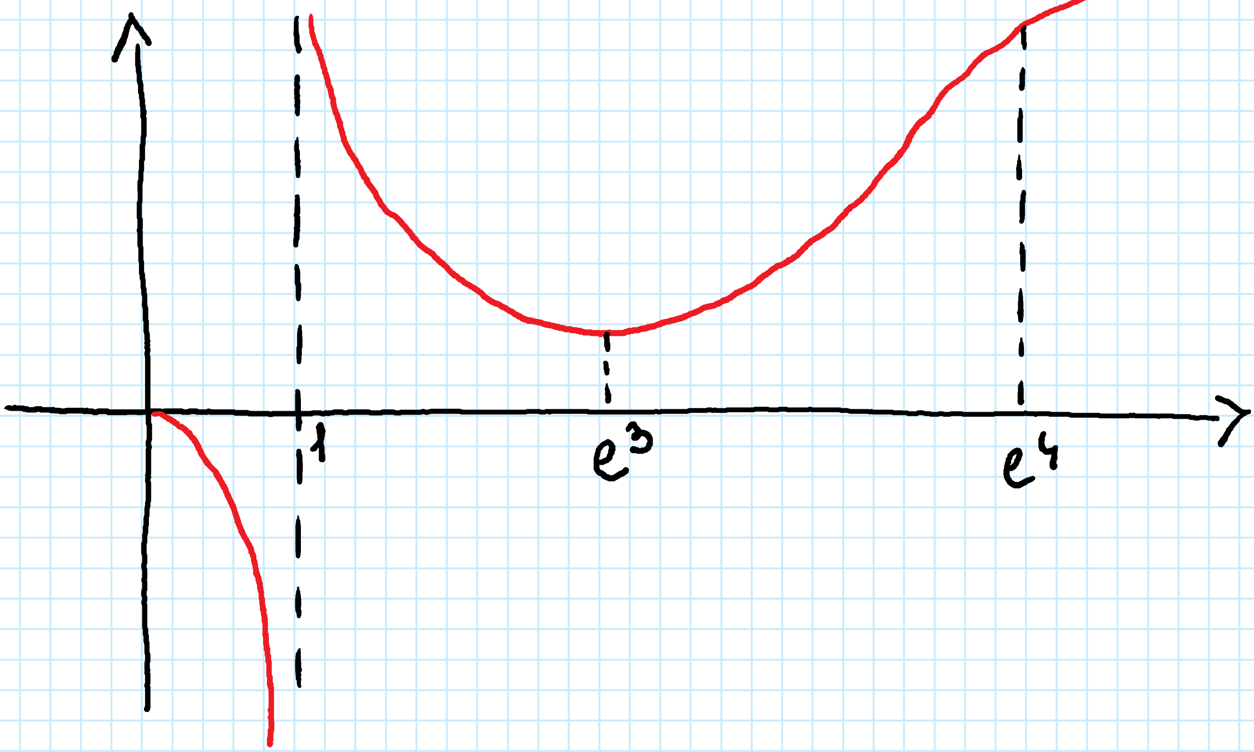
$f''(x) \geq 0$: $\quad 4 - \log x \geq 0 \quad \log x \leq 4 \quad x \leq e^4$
$\quad \log^5 x > 0 \quad \log x > 0 \quad x > 1$

Segno di f'' :



f è convessa in $(1, e^4)$
f è concava in $(0,1)$ e in $(e^4,+\infty)$
$x = e^4$ è un p.to di flesso

(e) Grafico di f:



(f) $\operatorname{Im} f = (-\infty, 0) \cup (f(e^3), +\infty)$

$$f(e^3) = \frac{e^3}{3^3}$$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha:

1 soluzione se $\lambda < 0$;
0 soluzioni se $0 \leq \lambda < f(e^3)$;
1 soluzione se $\lambda = f(e^3)$;
2 soluzioni se $\lambda > f(e^3)$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x^2}{x^2(e^{3x} - 1)} = ?$

Si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$.

Per $x \to 0$:

$\operatorname{tg} x \sim x \Rightarrow \operatorname{tg} x - x^2 \sim x - x^2 = x(1-x)$
(def. $\neq 0$ per $x \to 0$)

$3x \to 0 \Rightarrow e^{3x} - 1 \sim 3x$

$$x^2(e^{3x}-1) \sim x^2 \cdot 3x = 3x^3$$

Quindi

$$P = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-x)}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{1-x}}{\underset{>0}{3x^2}}_{>0} = +\infty .$$

3. $I = \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}dx$ è un integrale improprio.

Occorre quindi calcolare prima

$$\int \frac{x+1}{x^2(x^2+1)} dx$$

scomponendo la funz. integranda:

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$= \frac{ax^3 + ax + bx^2 + b + cx^3 + dx^2}{x^2(x^2+1)} .$$

Da cui

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ b+d = 0 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -a = -1 \\ d = -b = -1 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{x+1}{x^2(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{x+1}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \log|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$I = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}\, dx$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[\log|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x \right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[\log|\omega| - \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) - \operatorname{arctg}\omega + 1 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left(\underbrace{\log \frac{|\omega|}{\sqrt{1+\omega^2}}}_{\downarrow} - \underbrace{\frac{1}{\omega}}_{\to 0} - \underbrace{\operatorname{arctg}\omega}_{\downarrow\ \frac{\pi}{2}} \right) + 1 + \frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\log \frac{\omega}{\omega} = \log 1 = 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}.$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Convergenza assoluta: $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ div.

La serie non converge assolutamente.

Convergenza: la serie è del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ove

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

si ha:

- $a_n > 0$ (poiché $1+\frac{1}{n} > 1 \ \forall n$);

- $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$;
- a_n è decrescente
  (poiché $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ è decrescente e $\log$ è crescente).

Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.