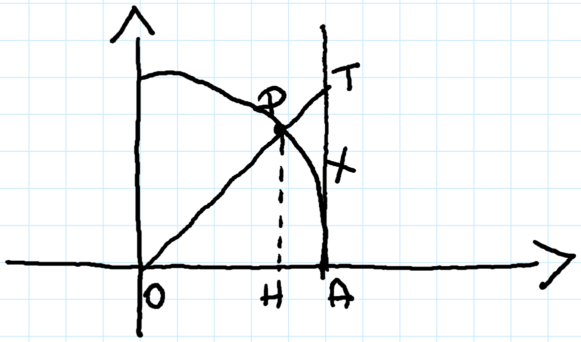
Analisi Matematica - 25.3.2019 - prima parte

Sunday, March 24, 2019 20:34

Limiti di funzioni

Teorema di confronto

Applicazione: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



Sia $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$PH = \operatorname{sen} x$

$AT = \operatorname{tg} x$.

$\frac{AT}{PH} = \frac{OA}{OH}$

$\frac{AT}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x}$

$AT = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

Dal grafico si ricava che

$PH \leq \overset{\frown}{AP} \leq AT$

$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$

$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

pari pari

Quindi:

$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$

$x \to 0$: $\cos x \to \cos 0 = 1$; $1 \to 1$ per $x \to 0$

Dal teo. di confronto, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Altre proprietà dei limiti

Teorema: $f(x), g(x)$ t.c. ha senso calcolare il lim

Altre proprietà dei limiti

Teorema: $f(x), g(x)$ t.c. ha senso calcolare il lim di f e g per $x \to c$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

1. $$\left.\begin{array}{l} x \to c,\ f(x) \to 0 \\ g(x) \text{ limitata def per } x \to c \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \underset{x \to c}{\longrightarrow} 0$$

2. (permanenza del segno)
   $x \to c$ $f(x) \to \ell$, $\ell > 0$ (risp. $\ell < 0$) $\Rightarrow$
   $f(x) > 0$ def. per $x \to c$
   (risp. $f(x) < 0$ def. per $x \to c$)

3. (permanenza del segno per funzioni continue)
   Sia f continua in $c \in \operatorname{dom} f$, allora
   $f(c) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ defin. per $x \to c$
   $f(c) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ def. per $x \to c$

Limiti e operazioni

Teo: Se per $x \to c$, $f(x) \to \ell_1$ e $g(x) \to \ell_2$, con $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$
Allora per $x \to c$

- $f(x) + g(x) \to \ell_1 + \ell_2$
- $f(x) - g(x) \to \ell_1 - \ell_2$
- $f(x) \cdot g(x) \to \ell_1 \cdot \ell_2$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda f(x) \to \lambda \ell_1$

se l'operazione prevista a dx ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$

Nei casi in cui il teo. non si applica si parla di forme di indecisione e bisogna ragionare caso per caso.

Forme di indecisione:

$+\infty - \infty$

$\overset{-}{0} \cdot (\overset{+}{\pm}\infty)$

$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

Ricordo che $\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad a \in \mathbb{R}$

Caso $\frac{a}{0}$ $a \neq 0$:

Non è una vera forma di ind., il risultato è ∞ il cui segno va det. caso per caso (usando la regola dei segni).

Per esempio:

Se $a > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \to a \\ g(x) \to 0 \\ g(x) > 0 \text{ def. per } x \to c \\ (\text{risp. } g(x) < 0 \quad " \quad ") \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty \text{ per } x \to c$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty \text{ per } x \to c\right)$$

Analogamente se $a < 0$ (scrivere gli altri due casi).

Esempio:

- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

  $1 \to 1 > 0$

  $x^2 \to 0 \quad x \to 0$

  $x^2 > 0$ def. per $x \to 0$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{\sin x} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$

  $x \to 0^+ \quad e^x \to e^0 = 1 > 0$

$\operatorname{sen} x \to 0$

$\operatorname{sen} x > 0$ in un intorno destro di 0

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{e^x - 1} = -\infty \qquad \frac{-1}{0^+}$$

$x \to 0^+$ $\quad x^2 - 1 \to 0 - 1 = -1 < 0$

$e^x - 1 \to e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$e^x - 1 > 0 \quad e^x > 1 \quad x > 0$

$0 \leftarrow$

$- - - - - \mid + + + +$

- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-3}{\log_c x} = +\infty \qquad \left[\frac{-2}{0^-}\right]$$

$x \to 1^-$ $\quad x - 3 \to 1 - 3 = -2 < 0$

$\log_c x \to \log_c 1 = 0$

$\log_c x$:

$\to 1$

$- - - - - \mid + + + + +$

- $$\lim_{x \to 2^-} \frac{1-x}{x^2-4} = +\infty$$

$x \to 2^-$ $\quad 1 - x \to 1 - 2 = -1 < 0$

$x^2 - 4 \to 4 - 4 = 0$

$x^2 - 4$

$-2 \quad \to 2$

$+ + + + \mid - - - - - \mid + + +$

Cambio di variabile nei limiti

Teorema: $x_0, t_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g funzioni tali che

sia ben definita $g \circ f$ definit. per $x \to x_0$.
Inoltre

- esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = t_0$
- esiste $\lim_{t \to t_0} g(t) = \ell$
- $f(x) \neq t_0$ definit. per $x \to x_0$.

Allora
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell .$$

- $\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x^2} = 1$

$f(x) = 1+x^2 \qquad g(t) = \sqrt{t}$

$x \to 0 \quad f(x) \to 1$

$t \to 1 \quad g(t) \to \sqrt{1} = 1$

$f(x) \neq 1$ def. per $x \to 0$?

$x^2+1 \neq 1 \qquad \Updownarrow$

$x^2 \neq 0 \qquad \Updownarrow \qquad$ OK

Quindi $\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 1$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x^2} \underset{\substack{t=1+x^2 \\ x \to 0 \\ t \to 1 \\ 1+x^2 \neq 1 \text{ def. per } x \to 0.}}{=} \lim_{t \to 1} \sqrt{t} = \sqrt{1} = 1$$

- $$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} \underset{t=-x^2}{=} \lim_{t \to -\infty} e^{t} = 0$$

$x \to +\infty \quad t \to -\infty$

$-x^2 \neq -\infty \quad$ OK

- $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$

$$t = \frac{1}{x}$$
$$x \to 0^+ \quad t \to +\infty$$
$$\frac{1}{x} \neq +\infty$$

- $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$

$$t = \frac{1}{x}$$
$$x \to 0^- \quad t \to -\infty$$
$$\frac{1}{x} \neq -\infty$$

OSS: La terza ipotesi è certamente verificata se $t_0 = \pm\infty$.

La terza ipotesi non è necessaria se f e g sono continue.

<u>Teorema</u>: se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$ ed è ben definita $g(f(x))$ vicino ad x_0, allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

cioè $g \circ f$ è continua in x_0.

Analisi Matematica - 25.3.2019 - seconda parte

Sunday, March 24, 2019 20:35

Limiti notevoli

(Quasi tutte forme $\frac{0}{0}$)

Già visto:

1) $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$ $\quad \left[\frac{0}{0}\right]$

Da 1) si deducono

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\quad \left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{\downarrow \; 1^2 = 1} \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\downarrow \; \frac{1}{1+1}}$$

$$\to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \to 1 \cdot 1 = 1$$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

6) $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$ $\quad 1^{\pm\infty}$

Da 6) si deducono:

[illegible] 6) [illegible].

7) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\qquad \frac{0}{0}$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\qquad \frac{0}{0}$

Più in generale

9) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a = \frac{1}{\log_a e}$ $\qquad \forall a > 0, a \neq 1$

10) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} = \log_a e$ $\qquad$ "

11) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Logaritmi, potenze, esponenziali:

Per $x \to +\infty$ $\quad \log_a x \to +\infty \quad \forall a > 1$

$x^a \to +\infty \quad \forall a > 0$

$a^x \to +\infty \quad \forall a > 1$

Quale va "più velocemente" a $+\infty$? $\qquad a^x$

12) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^c}{(\log_a x)^b} = +\infty}$ $\qquad \forall a > 1$, $\forall b, c > 0$

(Potenza vince su $\log_a$)

13) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty}$ $\qquad \forall a > 1, \forall b > 0$

(esponenziale vince su potenza)

Infine (limite spesso dimenticato - - - - -)

14) $\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^b \, |\log_a x|^c = 0}$ $\qquad \forall a > 1$, $\forall b, c > 0$

14) $\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^b |\log_a x|^c = 0}$ $\forall a > 1$ $\forall b, c > 0$

Cosa significa?

$x \to 0^+$ $\quad x^b |\log_a x|^c = \dfrac{\overbrace{|\log_a x|^c}^{\to +\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x^b}}_{\to +\infty}} \to 0$

oss: $f(x) \to +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to 0 \quad x \to c$

Quindi per esempio

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{1}{\frac{a^x}{x^b}} \to \left[\frac{1}{\infty}\right] 0 \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Esempi:

- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{3^x}{x^3}} = 0 \qquad \left[\frac{1}{+\infty}\right]$

- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_c^2 x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log_c^2 x}} = 0 \qquad \left[\frac{1}{\infty}\right]$

- $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x^2 \log_c x = 0$

- $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \quad 0 \cdot e^{+\infty} = (0 + \infty)$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{t = \frac{1}{x}}{=} \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

$x \to 0^+ \quad t \to +\infty$

- $\lim_{x \to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot 0] = 0$

$x \to 0^- \quad x \to 0$

$\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to 0.$