Analisi Matematica - 18.9.2018

1. $f(x) = \log x + \dfrac{x+1}{x^2}$

(a) Dominio : $x>0$, $x\neq 0$ $\quad$ dom $f = (0,+\infty)$

Limiti significativi : $0^+, +\infty$

$x \to 0^+$ $\quad \log x \to -\infty$, $\dfrac{x+1}{x^2} \to +\infty$

$-\infty + \infty$: forma di indecisione

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\Big(\underbrace{x^2\log x}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{x+1}_{\downarrow\, 1}\Big) \sim \frac{1}{x^2} \to +\infty$$

$x=0$ è un asintoto verticale di f

$x \to +\infty$ $\quad \log x \to +\infty$ $\quad \dfrac{x+1}{x^2} \to 0 \quad \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log x}{x} + \frac{x+1}{x^3} \to 0 \quad \Rightarrow$$

Non esiste l'asintoto obliquo a $+\infty$.

(b) $\forall x \in$ dom f

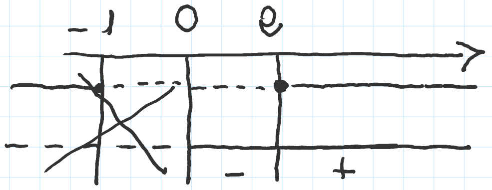
$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^{\cancel{2}} - (x+1)2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{1}{x} + \frac{x-2x-2}{x^3}$$

$$= \frac{x^2-x-2}{x^3}$$

$f'(x) \geq 0$ in dom f se $x^2-x-2 \geq 0 \iff x\leq -1, x\geq 2$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow -1 \\ \searrow 2 \end{array}$$

Segno di f':



f è decrescente in $(0,2)$ ed è crescente in $(2,+\infty)$.

$x=2$ è un p.to di minimo (relativo) di f.

$f(2) = \log 2 + \dfrac{3}{4} > 0$

(c) $\forall x \in$ dom f

$$f''(x) = \frac{(2x-1)x^{\cancel{3}} - (x^2-x-2)3\cancel{x^2}}{}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-1)x^{\cancel{3}} - (x^2-x-2)3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}}$$

$$= \frac{2x^2 - x - 3x^2 + 3x + 6}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2 + 2x + 6}{x^4}$$

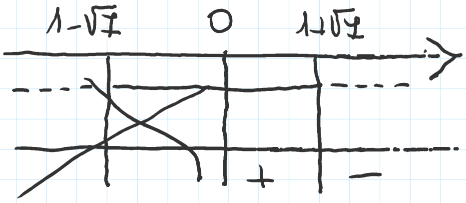
$f''(x) \geq 0 \iff -x^2 + 2x + 6 \geq 0$

$x^2 - 2x - 6 \leq 0 \qquad 1-\sqrt{7} \leq x \leq 1+\sqrt{7}$

$x = 1 \pm \sqrt{1+6} = 1 \pm \sqrt{7}$

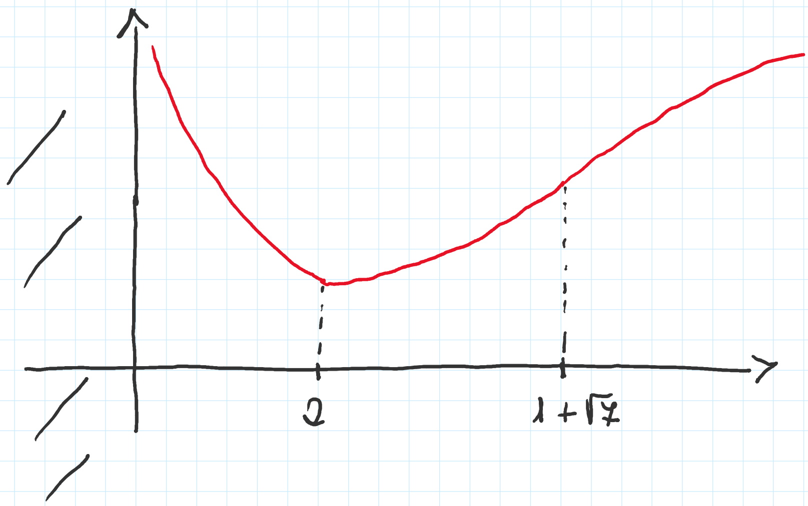
f'' : $\quad x^2 - 2x - 6$

$\quad x^4$



f è convessa in $(0, 1+\sqrt{7})$, è concava in $(1+\sqrt{7}, +\infty)$.
$x = 1+\sqrt{7}$ è un p.to di flesso.

(d) Grafico di f:



$\mathrm{Im}\, f = [f(2), +\infty) = [\log_e 2 + \frac{3}{4}, +\infty)$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha

0 sol. se $\lambda < f(2)$;

1 sol. se $\lambda = f(2)$;

2 sol. se $\lambda > f(2)$.

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)\log\cos x}{(2x^2+x^4)\operatorname{tg} x^2} = \ell$$

Se $x \to 0$

$x^2 \to 0 \Rightarrow e^{x^2}-1 \sim x^2$

$\log\cos x \to \log 1 = 0$

Occorre scrivere:

$$\log\cos x = \log(1+(\underset{\to 0}{\cos x - 1})) \sim \cos x - 1$$
$$= -(1-\cos x) \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$2x^2+x^4 = x^2(2+x^2) \sim x^2\cdot 2 = 2x^2$$

$x^2 \to 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x^2 \sim x^2$

Quindi:

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(-\frac{1}{2}\cancel{x^2})}{2\cancel{x^2}\cdot\cancel{x^2}} = -\frac{1}{4}$$

3. $$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

È opportuno calcolare preliminarmente l'integrale indefinito:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}((\sqrt{x})^2+1)} = 2\int \frac{dx}{2\sqrt{x}((\sqrt{x})^2+1)}$$

$$= 2\int \frac{d}{dx}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x})^2+1}\,dx = 2\left[\operatorname{arctg} t\right]_{t=\sqrt{x}}$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(si è usata la tecnica di integrazione per sostituzione)

Quindi

$$I = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} =$$

$$\omega \to +\infty \quad \int_1 \quad \sqrt{x}\,(x+1)$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right]_1^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left(2 \operatorname{arctg} \sqrt{\omega} - 2 \operatorname{arctg} 1 \right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n - \sin n}$$

Non si tratta di una serie a termini positivi, occorre quindi studiare la convergenza assoluta.

Se $a_n = \dfrac{(-1)^n}{e^n - \sin n}$,

$$|a_n| = \frac{|(-1)^n|}{|e^n - \sin n|} = \frac{1}{e^n - \sin n}$$

$$e^n - \sin n \geq e - 1 > 0$$

$$|a_n| = \frac{1}{e^n \left(1 - \underbrace{\frac{\sin n}{e^n}}_{\to 0}\right)} \sim \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ è una serie geometrica convergente $\left(\frac{1}{e} < 1\right)$, quindi la serie assegnata è assolutamente convergente (e quindi è convergente).

Si è utilizzato il criterio del confronto asintotico.