Funzioni

● Definizione

Definizione generica:
Dati due insiemi A e B, si dice funzione una legge che associa <u>ad ogni</u> elemento di A <u>uno e un solo</u> elemento di B.
Una funzione si indica con $y = f(x)$, dove:
- x è un elemento di A
- f(x) si chiama immagine di x, ed appartiene a B
- l'insieme A è detto Dominio (o Campo di Esistenza) di f(x)
- B contiene un sotto-insieme formato da tutte le immagini del dominio, che si chiama Codominio di f(x)

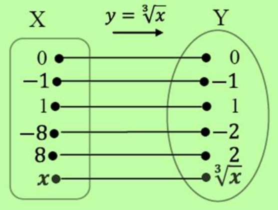
Definizione di funzione numerica:
Una generica funzione si indica con y=f(x).
- x è detta variabile indipendente, ed appartiene al Dominio
- y è detta variabile dipendente, ed appartiene al Codominio
Se x ed y sono numeri reali (appartenenti ad ℝ), allora la funzione si dice funzione reale di una variabile reale

In tutte le funzioni reali, ad ogni coppia di numeri associati corrisponde un punto nel piano cartesiano.
L'insieme di tali punti genera una curva che prende il nome di grafico della funzione.

● Grafico di una funzione

grafico di una funzione reale

consideriamo ad esempio la funzione radice cubica $y = \sqrt[3]{x}$



rappresentazione insiemistica

x	$\sqrt[3]{x}$
0	0
-1	-1
1	1
-8	-2
8	2

coppie di numeri associati

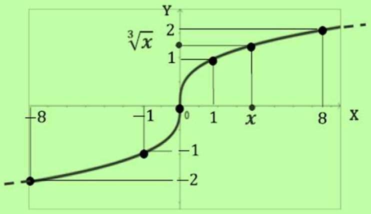
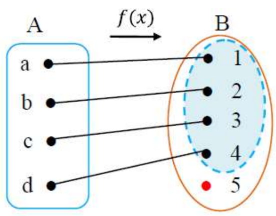


grafico della funzione

● Tipi di Funzione

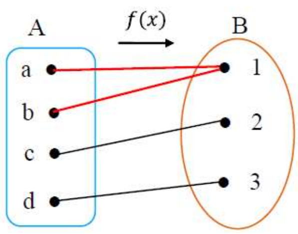


1) **Funzione Iniettiva** (o Ingettiva)
Una funzione si dice iniettiva quando ad elementi distinti dell'insieme A corrispondono elementi distinti di B.
Ovvero quando non ci sono più elementi di A con la stessa immagine.

Formalmente:
$f(x)$ è $iniettiva\ se$: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$

NB: Se f(x) è iniettiva, |A| ≤ |B|.
Quindi, se invece il Dominio contiene più elementi del Codominio, giocoforza alcuni elementi avranno la stessa immagine.

NB: Graficamente, il fatto che non possano esserci due x con la stessa f(x), significa che non ci devono essere punti in cui la funzione è orizzontale.

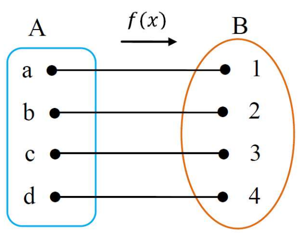


2) **Funzione Suriettiva** (o Surgettiva)
Una funzione si dice suriettiva quando ogni elemento dell'insieme B è immagine di almeno un elemento dell'insieme A.

Formalmente: $f(x)$ è $suriettiva\ se$: $\forall\ y \in B, \exists\ x \in A\ tale\ che\ f(x) = y$

NB: Se f(x) è suriettiva, |A| ≥ |B|.
Quindi se il Codominio contiene meno elementi del Dominio,
visto che ogni elemento può avere una sola immagina,
giocoforza alcuni elementi del Codominio non saranno presi.

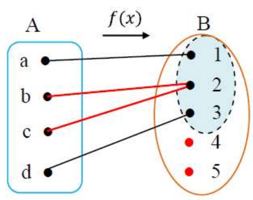
NB: La suriettività significa che ogni y dev'essere presa.
Quindi, graficamente significa 1) che la funzione va verso y = +∞ e y = −∞ ,
e 2) che non ci sono salti nel grafico per alcune y



3) **Funzione Biunivoca** (o Biietiva o Bigettiva)
Una funzione si dice biunivoca quando è sia iniettiva che suriettiva,
ovvero quando ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B,
e viceversa.

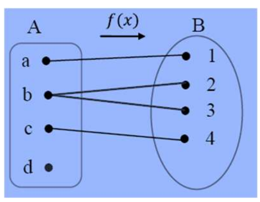
Formalmente:
$\forall\ y \in B, \exists!\ x \in A\ tale\ che\ f(x) = y \quad \wedge \quad \forall\ x \in A, \exists!\ y \in B\ tale\ che\ f(x) = y$

NB: Se f(x) è biunivoca, |A| = |B|.
Quindi se il Dominio e il Codominio sono diversi, non è biunivoca.



4) **Funzione non iniettiva e non suriettiva**
Quando:
- ci sono più elementi del Dominio con la stessa immagine
- ci sono elementi del Codominio non presi

● Corrispondenze

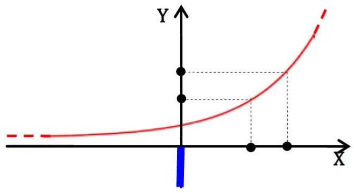


NB: Se $f(x) = y' \wedge f(x) = y''$ e/o
Se ci sono x appartenenti al Dominio che non hanno immagine,
allora f(x) NON è una funzione (non rispetta la definizione di funzione).
Una legge associativa di questo tipo si chiama Corrispondenza.

Infatti, al più una funzione può avere un asintoto che si APPROSSIMA ad una retta verticale (ma non diventa mai verticale).
Ma in una funzione non ci possono essere punti del grafico che vanno precisamente in verticale (paralleli all'asse y),
perché significherebbe che in quel punto una x ha molteplici f(x).

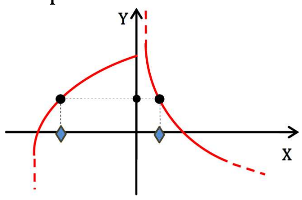
● Metodo grafico per calcolare Iniettività e Suriettività

Esempio 1:



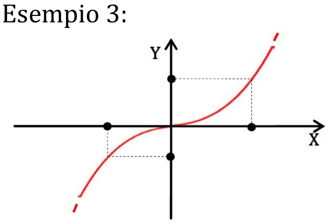
f(x) è iniettiva (perché non ci sono x_1, x_2 diverse con la stessa f(x)/ perché non ci sono punti in cui f(x) è orizzontale).
f(x) non è suriettiva (perché non vengono prese le $y < 0$).

Esempio 2:



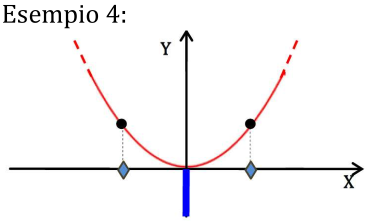
f(x) non è iniettiva (perché ci sono punti x_1, x_2 con la stessa f(x)).
f(x) è suriettiva (perché non ci sono salti e la funziona si estende a $+\infty$ e $-\infty$).

Esempio 3:



f(x) è iniettiva (non ci sono punti con la stessa immagine), ed è suriettiva (non ci sono salti e si estende a $+\infty$ e $-\infty$).
f(x) quindi è biunivoca.

Esempio 4:



f(x) non è iniettiva ($f(x_1) = f(x_2)$). f(x) non è suriettiva (non vengono prese le $y < 0$).

● Metodo analitico per calcolare iniettività

1) Si pone f(x') = f(x'') ; 2) Si sostituiscono x e x' nelle funzioni ; si controlla se si verifica un'identità o meno

Esempio di iniettiva:

$$y = \frac{(x+1)}{x} \;\rightarrow\; Controllo\ se\!: \ f(x') = f(x'') \;\rightarrow\; \frac{((x')+1)}{(x')} = \frac{((x'')+1)}{(x'')} \rightarrow [\ldots] \rightarrow x'' \cdot (x'+1) = (x''+1) \cdot x' \rightarrow$$

$$\rightarrow\; x'x'' + x'' = x'x'' + x' = x'' = \cancel{x' + x'x'' - x'x''} \;\rightarrow\; f(x') = f(x'') \;\; quando \;\; x' = x'' \;\rightarrow\; \text{è } iniettiva$$

Esempio di non iniettiva:

$$y = x + \frac{1}{x} \;\rightarrow\; Controllo\ se\!: \ f(x') = f(x'') \;\rightarrow\; (x') + \frac{1}{(x')} = (x'') + \frac{1}{(x'')} \rightarrow x' - x'' + \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} = 0 \rightarrow [\ldots] \rightarrow$$

$$\frac{(x' - x'') \cdot (x'x'' - 1)}{(x'x'')} = 0 \rightarrow C.E.\ x'x'' \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x' - x'' = 0 \\ x'x'' - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x'' \\ x' = \dfrac{1}{x''} \end{cases} \exists\, x' \neq x'', con\ f(x') = f(x'') \rightarrow NON\ inietitiva$$

● Metodo analitico per calcolare suriettività

Per ogni y, deve esistere una x t.c. f(x) = y. Quindi si sostituisce f(x) con la funzione, si lascia y, e si risolve per x.

NB: Bisogna poi controllare che tale x appartenga al dominio della funzione.
Esempio: Può capitare che l'unica x che può essere immagine di y, sia x=0, in una funzione con C.E. x≠0.

Esempio di suriettiva:

$$f(x) = 3x + 5, \text{con } f\text{: da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R} \;\rightarrow\; f(x) = y \rightarrow 3x + 5 = y \rightarrow\; 3x = y - 5 \rightarrow x = \frac{y-5}{3} \rightarrow x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \text{ è } suriettiva$$

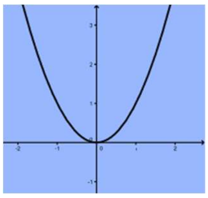
Esempio di non suriettiva:
$y = 2x^2 + 4x - 5 \rightarrow$ qui è più comodo il metodo grafico (infatti è una parabola, che ad occhio non è suriettiva) →
→ col metodo analitico → Provo per una y, es. $y = 1 \rightarrow 1 = 2x^2 + 4x - 5 \rightarrow x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = -3 \vee x = 1$ →
→ provo un'altra y, es. $y = -8 \rightarrow -8 = 2x^2 + 4x - 5 \rightarrow 2x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \emptyset \rightarrow$ per y = 8 non esiste x t. c. $f(x) = -8$

● Rendere iniettiva una funzione non iniettiva (usando la restrizione del dominio)

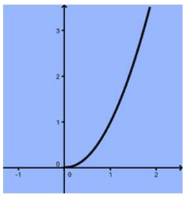
Se f(x): D → C non è iniettiva, perché nel dominio ci sono x e x' con la stessa immagine,
posso sostituire f(x) con una funzione $f'(x) = D' \rightarrow C$,
con D' preso adeguatamente per tagliare le x che generano immagini duplicate, ma senza stravolgere la funzione.

Esempio:

Data $f(x) = x^2, con\ f(x)\!: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$,
non iniettiva, con questo grafico:



Sostituisco con $f'(x) = x^2, con\ f'(x)\!: [0 \rightarrow +\infty) \rightarrow\ \mathbb{R}^+$,
non iniettiva, con questo grafico:



● Rendere suriettiva una funzione non suriettiva (usando la restrizione del codominio)

Se f(x): D → C non è suriettiva, posto Im(f) l'insieme delle immagini della funzione f,
posso sostituire f(x) con una funzione f'(x): D → Im(f).
Questa funzione è suriettiva.

Esempio:
$f(x) = 2x^2 + 4x - 5$, con y: ℝ → ℝ, y non suriettiva
La sostituisco con $f'(x) = 2x^2 + 4x - 5$, con y': R → Im(f), che è suriettiva.

● Funzioni Composte

Date due funzioni f, g:
$f: D_f \to C_f, \quad f(x) = y$
$g: D_g \to C_g, \quad g(x') = y'$

La funzione composta h(x) si può scrivere: $f(x) \circ g(x)$, o anche $f\big(g(x)\big)$

Si può comporre solo se il Codominio ("l'output") della funzione interna contiene al più gli stessi elementi del Dominio della funziona esterna ("l'input accettabile"), quindi se in questo caso $C_g \subseteq D_f$.

Quindi, la funzione composta ha come dominio e codominio:
$h(x): D_g \to C_f$

NB: In generale $f\big(g(x)\big) \neq g\big(f(x)\big)$ (possono essere uguali a volte, ma non si può fare un'assunzione generale).

Esempio di composta:
$f(x) = \cos(x) \quad ; \quad g(x) = x + 1 \quad ; \quad h(x) = \ln(x)$
$f\left(g\big(h(x)\big)\right) = f\big(g(\ln(x))\big) = f\big((\ln(x)) + 1\big) = \cos\big((\ln(x)) + 1\big)$

● Funzioni reciproche

Data una funzione $f(x)$, il reciproco è $\big(f(x)\big)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

Ovviamente $f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$.

Esempio: $f(x)\frac{1}{x!}$ è la funzione reciproca di $g(x) = n!$

● Funzioni inverse

Data una funzione $y = f(x)$, allora l'inversa è $x = f^{-1}(y)$.

Una funzione f(x) dev'essere biunivoca per essere invertibile.

NB: $f^{-1}(y)$ NON vuol dire $\dfrac{1}{f(y)}$

Passi per determinare l'inversa di una funzione:

1) Controllo se è iniettiva (se non è iniettiva, NON può essere invertita; se permesso la converto restringendo il dominio)

2) Controllo se è suriettiva (se non è suriettiva, NON può essere invertita; se permesso converto restringendo codominio)

3) Inverto la biunivoca (risolvendo per x)

Esempio classico:
Data f(x): $y = (x + 2)^3$
Per trovare l'inversa risolvo per x: $\sqrt[3]{y} = x + 2 \to x = \sqrt[3]{y} - 2 \to f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

Esempio di non suriettiva:
Data f(x): $y = e^x, con\ f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
La funzione è iniettiva ma non è suriettiva, quindi non è invertibile.
Invece, se restringo il codominio, la funzione $f'(x)$: $y = e^x$, $con\ f'(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è iniettiva e suriettiva, quindi è invertibile.
Risolvendo per x, si ha: $x = \ln(y)$, quindi l'inversa è $f'^{-1}(x) = \ln(x)$.