Limiti – Forme indeterminate

● Tipi di forme indeterminate

Per risolvere queste forme indeterminate bisogna applicare varie tecniche (mostrate in seguito).

$\frac{0}{0} \quad (\neq \pm\infty)$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad (\neq 1)$	$0 \cdot \pm\infty \quad (\neq 0)$	$+\infty - \infty \quad (\neq 0)$	$0^0 \quad (\neq 1)$	$1^{\pm\infty} \quad (\neq 1)$	$\pm\infty^0 \quad (\neq 1)$

● Calcolo dei limiti in forma indeterminata – metodo classico

Tipo	Forma indeterminata del tipo "differenza di infiniti": $\lim_{x \to \pm\infty} polinomio = [+\infty - \infty]$
Soluzione	Raccolgo massimo grado
Passaggi	1) Metto in evidenza l'incognita di grado massimo 2) Ricalcolo il limite tenendo conto dei segni
Esempio	$\lim_{x \to +\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = [\dots] = [+\infty - \infty] \to$ $\to \lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = (+\infty)^3 \cdot \left(2 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{+\infty^3}\right) = +\infty \cdot (2 - 0 + 0) = +\infty \cdot 2 = +\infty$

Tipo	Forma indeterminata del tipo "rapporto di infiniti": $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$
Soluzione	Raccolgo massimo grado a numeratore e a denominatore
Passaggi	1) Metto in evidenza al numeratore e al denominatore le rispettive incognite di grado massimo 2) semplifico dove possibile, e ricalcolo il limite tenendo conto dei segni
Esempio	$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = [\dots] = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \to$ $\to \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^1 \cdot \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{+\infty}}{(+\infty) \cdot \left(2 - \frac{5}{(+\infty)^2}\right)} = \frac{1+0}{(+\infty) \cdot (2-0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Tipo	Forma indeterminata del tipo "rapporto di zeri": $\lim_{x \to x_0} \frac{polinomio}{polinomio} = \left[\frac{0}{0}\right]$
Soluzione	Scompongo
Passaggi	1) Cerco delle scomposizioni da applicare a numeratore e denominatore 2) Semplifico, e ricalcolo il limite tenendo conto dei segni
Esempio	$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = [\dots] = \left[\frac{0}{0}\right] \to$ $\to \lim_{x \to 1} \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x+1) = (1) + 1 = 2$

Tipo	Forma indeterminata del tipo “differenza di radici”: $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{B} = [+\infty - \infty]$
Soluzione	Scompongo con la differenza di quadrati (se n=2) o differenza di cubi (se n=3)
Passaggi	1) Mi riscrivo per le radici la formula della differenza di quadrati (se n=2) o di cubi (se n=3) Se $\sqrt[2]{}$: So che $(A-B)\cdot(A+B) = (A^2 - B^2) \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\cdot\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right) = (A-B)$ Se $\sqrt[3]{}$: So che $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2) = (A^3 - B^3) \ \Rightarrow \ \left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{AB}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right) = (A-B)$ 2) Mi riporto a quella formula (ad esempio moltiplicando e dividendo per il fattore mancante) 3) Sviluppo i calcoli, semplifico dove possibile, e ricalcolo il limite tenendo conto dei segni
Esempio	$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x} = [\dots] = [+\infty - \infty] \rightarrow$ $\rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x+1)-(x)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}} =$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}} = \frac{2(+\infty)+1}{\sqrt{3(+\infty)}+\sqrt{+\infty}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \rightarrow \textit{applico il metodo per risolvere} \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \rightarrow$ $\rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)}{\sqrt{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{1\cdot\left(\sqrt{\frac{3x+1}{x}}+1\right)} =$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{3+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{\sqrt{+\infty}\cdot\left(2+\frac{1}{+\infty}\right)}{\sqrt{3+\frac{1}{+\infty}}+1} =$ $= \frac{\sqrt{+\infty}\cdot(2+0)}{\sqrt{3+0}+1} = \frac{\sqrt{+\infty}\cdot(2)}{\sqrt{3+1^2}} = \frac{\sqrt{+\infty}\cdot(2)}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{+\infty}}{2} = +\infty$

• Forme indeterminate risolvibili con i limiti notevoli

Tipo	Forma indeterminata del tipo “esponenziale”: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)^{g(x)} = [1^{\pm\infty}]$, $[0^0]$, $[\pm\infty^0]$
Soluzione	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\pm\infty}[g(x)\cdot\ln(f(x))]}$
Passaggi	1) Applico le proprietà dei logaritmi: Sostituisco $f(x)^{g(x)}$ con $e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$ Ovvero: $f(x)^{g(x)} = e^{qualcosa\ che\ faccia\ uscire\ f(x)^{g(x)}} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$ 2) Provo a ricondurmi ad un limite notevole
Esempio	$\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \left(\frac{0}{1+0}\right)^0 = [0^0] \to Riscrivo\ come \lim_{x\to0} e^{\ln\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right)} = \lim_{x\to0} e^{x\cdot\ln\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)} \to$ $e^{0\cdot\ln\left(\frac{0}{1+0}\right)} = e^{0\cdot\ln(0)} = e^{[0\cdot(-\infty)]} \to So\ che \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \to$ $e^{\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x} \to Mi\ calcolo\ il\ limite\ dell'esponente \to \lim_{x\to0}\left(x\cdot\ln\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)\right) = [0\cdot(-\infty)]$ $Opzione\ 1: Limite\ notevole \to \lim_{x\to0}\left(x\cdot\ln\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)\right) = \lim_{x\to0}(x\cdot(1^{-1})) = 0$ $Opzione\ 2: Applico\ il\ metodo\ per\ la\ forma\ [0\cdot(-\infty)] \to \lim_{x\to0}\left(x\cdot\ln\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)\right) = 0$ $\to Sostituisco\ il\ valore\ trovato\ nel\ limite\ originale \to \lim_{x\to0} e^0 = 1$

• Forme indeterminate risolvibili usando De L’Hopital

Tipo	Forma indeterminata del tipo “prodotto di zero e infinito”: $\lim(f(x)\cdot g(x)) = [0\cdot\pm\infty]$
Soluzione	De L’Hopital
Passaggi	Sapendo che $a\cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$ (Esempio: $2\cdot3 = \frac{2}{\frac{1}{3}}$) 1) Sostituisco $f(x)\cdot g(x)$ con $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, in modo da portarmi alla forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ 2) Applico De L’Hopital
Esempio	$\lim_{x\to0}\left(x\cdot\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) = 0\cdot\ln\left(\frac{0}{1+0}\right) = 0\cdot\ln(0) = [0\cdot(-\infty)] \to$ $\to Riscrivo\ come \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right) \to applico\ De\ L'Hopital \to D\left(\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) = \frac{1}{x\cdot(x+1)} \to$ $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \to \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{x\cdot(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}\right) \to \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cancel{x}\cdot(x+1)}\cdot\left(-\frac{x^{\cancel{2}}}{1}\right)\right) \to \lim_{x\to0}\left(\frac{-x}{(x+1)}\right) = \frac{-0}{0+1} = 0$

● Ordini di grandezza (per il calcolo dei limiti con il confronto degli infiniti)

Dalla più piccola alla più grande:

Formula	Tipo di funzione	Esempio Con a=2	x=2	x=4	x=8	x=16	x=32	x=64
$O(a)$	F. costante	$f(x) = 2$	2	2	2	2	2	2
$O(\log_a(x))$	F. logaritmica	$f(x) = \log_2(x)$	1	2	3	4	5	6
$O(\sqrt[a]{x})$	F. radice	$f(x) = \sqrt[2]{x}$	1,41…	2	2,82…	4	5,65…	8
$O(x)$	F. lineare	$f(x) = x$	2	4	8	16	32	64
$O(x \cdot \log_a(x))$	F. semi-lineare	$f(x) = x \cdot \log_2(x)$	2	8	24	64	160	384
$O(x^a)$	F. polinomiale	$f(x) = x^2$	4	16	64	256	1024	4096
$O(a^x)$	F. esponenziale	$f(x) = 2^x$	4	16	256	65.536	$4{,}29 \ldots \cdot 10^9$	$1{,}84 \ldots \cdot 10^{19}$
$O(x!)$	F. fattoriale	$f(x) = x!$	2	24	40.320	$2{,}09 \ldots \cdot 10^{13}$	$2{,}63 \ldots \cdot 10^{35}$	$1{,}26 \ldots \cdot 10^{89}$

● Calcolo dei limiti in forma indeterminata – metodo con confronto degli infiniti

Questo metodo è applicabile solo nei limiti per $x \to \pm\infty$.
Se usato con disattenzione può causare facilmente errori, quindi usarlo come ultima risorsa.

NB: il prof Pisani non accetta questo tipo di risoluzione.

Tipo	Forma indeterminata del tipo "differenza di infiniti": $\lim_{x\to\pm\infty} polinomio = [+\infty - \infty]$
Passaggi	Applico la teoria degli infiniti: Il limite per $x \to \pm\infty$ di un polinomio dipende dal monomio di grado massimo (che arriva "più rapidamente" ad infinito). Quindi: Sostituisco il limite L con un limite L' contenente solo il monomio di grado massimo.
Esempio	Esempio risolvibile sia col metodo classico sia col confronto degli infiniti: $\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 \to Per\ x \to +\infty, (2x^3 - x^2 + 3) \sim (2x^3) \to \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$ Esempio "problematico" col metodo classico, per cui conviene usare il confronto degli infiniti: $\lim_{x\to+\infty} (x^6 - 6^x) \to Per\ x \to +\infty, (x^6 - 6^x) \sim (-6^x) \to \lim_{x\to+\infty} (-6^x) = -\infty$

Tipo	Forma indeterminata del tipo "rapporto di infiniti": $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$
Passaggi	Applico la teoria degli infiniti: Il limite per $x \to \pm\infty$ di un rapporto fra polinomi dipende dal polinomio di grado maggiore (che arriva "più rapidamente" ad infinito). Quindi: Sostituisco il limite L con un limite L' contenente i monomi di grado massimo di Num. e Denom.
Esempio	Esempio con O(N) > O(D) (ovvero numeratore di grado superiore al denominatore) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} \cong \lim_{x\to+\infty} \frac{+4x^5}{+2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{2} = +\infty$ Esempio con O(N) = O(D) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} \cong \lim_{x\to-\infty} \frac{+3x^2}{-2x^2} = -\frac{3}{2}$ Esempio con O(N) < O(D) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} \cong \lim_{x\to+\infty} \frac{+5x^3}{+2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x} = \frac{5}{2 \cdot (+\infty)} = 0$