Limiti di funzioni e funzioni continue

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che
$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to c} g(x) = +\infty.$$
Si calcolino correttamente i seguenti limiti.
   (a) $\lim_{x\to c} \left(e^{f(x)} + g(x)\right) =$ ___ $+\infty$ ___
   (b) $\lim_{x\to c} \log g(x) =$ ___ $+\infty$ ___
   (c) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{e^{f(x)}} =$ ___ $-\infty$ ___
   (d) $\lim_{x\to c} |f(x)| =$ ___ $+\infty$ ___

2. Si completino in modo corretto i seguenti enunciati.
   (a) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 3$, allora $\lim_{x\to c} \frac{3f(x) - 5g(x)}{f(x) + g(x)} =$ ___ -3 ___
   (b) Se $\lim_{x\to c} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 3$, allora $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{(g(x) - 3)^2} =$ ___ $-\infty$ ___
   (c) Se $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 3$, allora $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{(g(x) - 3)^2} =$ ___ $-\infty$ ___
   (d) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} =$ ___ 0 ___

3. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che
$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to c} g(x) = +\infty.$$
Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.
   - ☐ $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = +\infty$
   - ☐ $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = 0$
   - √ Se $h(x) \sim f(x)$ per $x \to c$, allora $\lim_{x\to c} h(x) = 0$.
   - ☐ Non esiste $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x)$

4. Se f è una funzione definita in $[-1, 3]$, tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.
   - ☐ Se $f(x) = |x| + 1$, allora f verifica le ipotesi del teorema degli zeri
   - $\surd$ Se $f(x) = |x| + 5$, allora f non verifica le ipotesi del teorema degli zeri
   - $\surd$ Se $f(x) = |x| - 2$, allora f verifica le ipotesi del teorema degli zeri
   - $\surd$ Se f è strettamente decrescente e verifica le ipotesi del teorema degli zeri, allora esiste un'unico zero di f.

5. Se f è una funzione definita in $[-1, 1]$, tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.
   - $\surd$ Se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ allora non è detto che f sia continua in $x = 0$
   - ☐ Se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ e $f(0) = 1$, allora f non è continua in $x = 0$
   - $\surd$ Se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ allora anche $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
   - ☐ Se
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
   allora f è continua in $x = 0$

6. Considerata l'equazione $x + x^2 + \ln x = 0$, tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.
   - $\surd$ L'equazione ha un'unica soluzione in $(0, +\infty)$
   - ☐ L'equazione ha una soluzione in $[-2, -1]$
   - ☐ L'equazione non ammette soluzione
   - ☐ $x = 3$ è una soluzione dell'equazione

7. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione, si indichino tra i seguenti enunciati quelli sicuramente veri.
   - $\surd$ Se f è continua in $[a, b]$, allora f ammette massimo.
   - $\surd$ Se f è continua $[a, b]$, allora f ammette minimo
   - $\surd$ Se f è continua $[a, b]$, allora f ammette massimo e minimo
   - ☐ Se f è continua (a, b), allora f ammette massimo e minimo

8. Se $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, si indichino tra i seguenti enunciati quelli sicuramente veri.
   - $\surd$ L'immagine di f è un intervallo
   - $\surd$ Se $f(0) = 2$ e $f(4) = 10$, f assume il valore 5
   - ☐ f assume il valore 0
   - $\surd$ Se $f(0) > 0$ e $f(4) < 0$ allora l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione

9. Si indichi quali tra le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Weierstrass.
   - $\surd$ La funzione $f(x) = \log x$ se $x \in [1, 4]$
   - ☐ La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ nel suo dominio
   - $\surd$ La funzione esponenziale nell'insieme $[0, 4]$
   - ☐ La funzione $f(x) = \log x$ se $x \in (0, 4]$

10. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione, si indichino tra i seguenti enunciati quelli sicuramente veri.
    - $\surd$ Se f è continua, f è invertibile se e solo se f è strettamente monotona
    - $\surd$ Se f è continua e f è strettamente decrescente, allora f^{-1} è strettamente decrescente e continua
    - $\surd$ Se f è continua e f è strettamente monotona, allora f^{-1} è continua
    - $\surd$ Se f è invertibile ma non è continua non è detto che f^{-1} sia monotona