

## Le successioni

1. Se  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ , tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

- ☐ Per ogni  $M \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \geq M$  definitivamente
- ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_n < 0$
- ☐  $a_n > 0$  definitivamente
- ☐  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è limitata

2. Si dica quali tra le seguenti implicazioni risultano vere.

- ☐ Se  $a_n \rightarrow 3$  allora  $a_n > 3$  definitivamente
- ☐ Se  $a_n \rightarrow 3$  allora  $a_n > 0$  definitivamente
- ☐ Se  $a_n \rightarrow 3$  allora  $a_n \geq 2$  definitivamente
- ☐ Se  $a_n \rightarrow 3$  allora  $a_n \leq 4$  definitivamente

3. Se  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$ , tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

- ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n > -1$
- ☐ Per ogni  $\epsilon > 0$ ,  $|a_n + 1| \leq \epsilon$  definitivamente
- ☐  $a_n < 0$  definitivamente
- ☐  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è limitata

4. Siano  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tre successioni tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1 \quad a_n \leq b_n \leq c_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Tra i seguenti enunciati si indichino quelli sicuramente veri.

- ☐  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è limitata
- ☐  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente
- ☐ Se  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $b$  allora  $-1 \leq b \leq 1$
- ☐  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0

5. Si indichi quali tra le seguenti proprietà sono sicuramente verificate da una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  strettamente crescente

- ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_{n+1} \leq a_n$
- ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_n \leq a_n + 1$
- ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_n \leq a_{n+1}$
- ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_n < a_{n+1}$

6. Si indichi quali tra le seguenti proprietà sicuramente verificate da una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è decrescente
- ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_{n+1} > a_n$
  - ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_n < a_{n+1}$
  - ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_n < a_n + 1$
  - ☐ Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_n \leq a_{n+1}$
7. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.
- ☐ Ogni successione monotona non è irregolare
  - ☐ Ogni successione limitata è convergente
  - ☐ Ogni successione infinitesima è definitivamente positiva
  - ☐ Ogni successione divergente positivamente è definitivamente positiva
8. Se esiste (in caso contrario spiegare perché non ne esiste nessuna), determinare una successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  che verifica la proprietà indicata.
- (a)  $a_n$  è crescente e limitata \_\_\_\_\_
  - (b)  $a_n$  è decrescente e non limitata \_\_\_\_\_
  - (c)  $a_n$  è crescente, limitata e non convergente \_\_\_\_\_
  - (d)  $a_n$  è crescente, convergente e non limitata \_\_\_\_\_
  - (e)  $a_n$  è limitata, convergente e non monotona \_\_\_\_\_
  - (f)  $a_n$  è limitata, non convergente e non monotona \_\_\_\_\_
9. Esibire due successioni  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n \rightarrow -\infty$  che verifichino la proprietà indicata.
- (a)  $a_n + b_n$  è convergente \_\_\_\_\_
  - (b)  $a_n + b_n$  è divergente a  $+\infty$  \_\_\_\_\_
  - (c)  $a_n + b_n$  è divergente a  $-\infty$  \_\_\_\_\_
  - (d)  $a_n + b_n$  è irregolare \_\_\_\_\_
10. Tra i seguenti enunciati si indichino quelli veri.
- ☐ Ogni successione crescente e limitata superiormente è convergente
  - ☐ Ogni successione divergente a  $+\infty$  è crescente
  - ☐ Ogni successione divergente a  $-\infty$  è decrescente
  - ☐ Ogni successione decrescente e limitata inferiormente è convergente