Capitolo 8

Limiti di funzioni

8.1 Punti di accumulazione

Iniziamo con una definizione che occupa un ruolo centrale nella teoria dei limiti di funzioni.

Definizione 8.1 *Siano $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Il punto x_0 si dice* di accumulazione per A *se esiste una successione di punti $\{x_n\} \subset A$, $x_n \neq x_0$ tale che*

$$\lim_n x_n = x_0.$$

Definizione 8.2 *Siano $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Si dice che x_0 è di accumulazione per A* da destra *(risp.* sinistra*) se esiste una successione di punti $\{x_n\} \subset A$, $x_n > x_0$ (risp. $x_n < x_0$) tale che* $\lim_n x_n = x_0$.

Dire che x_0 è punto di accumulazione da un lato equivale ad effettuare una restrizione sull'insieme A, come espresso dalla proposizione che segue.

Proposizione 8.3 *Siano $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Poniamo*

$$\begin{array}{rcl} A_+ & = & A \cap (x_0, +\infty) \\ \textit{(risp. } A_- & = & A \cap (-\infty, x_0) \textit{).} \end{array}$$

Il punto x_0 è di accumulazione per A da destra (risp. sinistra) se e solo se è di accumulazione per A_+ (risp. A_-).

Osservazione 8.4 *La definizione .... è equivalente a quella tradizionale, basata sugli intorni.*

Proposizione 8.5 *Se l'insieme A è un intervallo o unione finita di intervalli, i punti di accumulazione sono tutti e soli i punti interni e i punti di bordo di ciascun intervallo che compone A (inclusi, eventualmente, $\pm\infty$).*

Osservazione 8.6 *Se il punto x_0 è di accumulazione da destra o da sinistra allora è di accumulazione in generale, ma, evidentemente non vale il viceversa.*

Esempio 8.7 *L'insieme $\mathbf{N}$ ha come unico punto di accumulazione $+\infty$.*

Esempio 8.8 *Considerato un insieme del tipo* $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$*, sono punti di accumulazione tutti i punti di* $\overline{\mathbf{R}}$*.*

Quindi, per evitare situazioni "patologiche", *d'ora in avanti considereremo soltanto intervalli, unioni finite di intervalli o unioni infinite di intervalli aventi lunghezza prefissata.*

Osservazione 8.9 *Se* x_0 *è punto di accumulazione per* A*, si può dimostrare che esistono infinite successioni* $\{x_n\} \subset A$*,* $x_n \neq x_0$ *tali che*

$$\lim_n x_n = x_0.$$

Nel caso di insiemi A *del tipo precisato sopra si tratta di successioni distinte anche a meno di permutazioni.*

Diamo, infine, una definizione che sarà utile nel seguito.

Definizione 8.10 *Si dice che un certa proprietà è vera* localmente *in* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ *se esiste* I *intorno di* x_0 *tale che la proprietà è verificata per ogni* $x \in I - \{x_0\}$*.*

8.2 Limiti di funzioni

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

Definizione 8.11 *Si dice che* ℓ è il limite di f *per* x *che tende ad* x_0 *se, per ogni successione* $\{x_n\} \subset A - \{x_0\}$ *tale che* $x_n \to x_0$*, risulta anche* $f(x_n) \to \ell$*. In questo caso si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Esempio 8.12 *Abbiamo anzitutto due esempi banali di limite, per la funzione costante e per la funzione identica. Per ogni* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ *risulta*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} c &= c, \\ \lim_{x \to x_0} x &= x_0. \end{aligned}$$

Come primo esempio non banale possiamo considerare

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

La definizione di limite può essere riassunta come segue: l'espressione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

vuol dire che f trasforma tutte le successioni $\{x_n\} \subset A - \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ in successioni $f(x_n) \to \ell$.

Osservazione 8.13 *La definizione che abbiamo dato prende il nome di* definizione sequenziale*, cioè basata sulle successioni. Ovviamente tale definizione è equivalente alle definizioni tradizionali del tipo "per ogni ... esiste ...". La definizione sequenziale presenta il vantaggio di essere unificata rispetto ai nove casi possibili al variare di* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$*,* $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$*. Sulle caratterizzazioni non sequenziali torneremo alla fine del paragrafo.*

Il senso della richiesta contenuta nella definizione diventa più chiaro considerando situazioni in cui essa non è soddisfatta.

Esempio 8.14 *Consideriamo la funzione* $f(x) = \lfloor x \rfloor$ *ed il punto* $x_0 = 1$*. Risulta quanto segue*

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{n} \to 1 \qquad f(x_n) = 1 \to 1, \\ t_n &= 1 - \frac{1}{n} \to 1 \qquad f(t_n) = 0 \to 0. \end{aligned}$$

Dunque non esiste $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor$*.*

Esempio 8.15 *Consideriamo la funzione* $f(x) = \sin 1/x$ *ed il punto* $x_0 = 0$*. Risulta quanto segue*

$$\begin{aligned} x_n = \frac{2}{\pi(1+4n)} &\to 0 \qquad f(x_n) = 1 \to 1, \\ t_n = \frac{1}{\pi n} &\to 0 \qquad f(t_n) = 0 \to 0. \end{aligned}$$

Dunque non esiste $\lim_{x\to 0} \sin 1/x$*.*

Osservazione 8.16 *La condizione che* x_0 *sia punto di accumulazione per* A *è essenziale affinché la definizione sia ben posta. Infatti, se di successioni* $\{x_n\} \subset A - \{x_0\}$*,* $x_n \to x_0$ *non ne esiste nemmeno una, la condizione* $f(x_n) \to \ell$ *è verificata per ogni* $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$*. Quindi il limite non sarebbe individuato in maniera univoca.*

Osservazione 8.17 *Sottolineiamo quanto è implicito nella definizione di limite: poiché consideriamo successioni* $\{x_n\} \subset A - \{x_0\}$*, il limite non dipende affatto da ciò che accade nel punto* x_0*, il quale potrebbe anche non appartenere al dominio della funzione.*

Quanto richiamato in quest'ultima osservazione è un elemento essenziale della definizione. Per evidenziarlo possiamo anticipare una delle principali applicazioni del concetto di limite: la derivata.

Esempio 8.18 *Assegnati* $f : I \to \mathbf{R}$ *ed* $x_0 \in I$*, posto*

$$A = I - \{x_0\},$$

ha senso considerare una nuova funzione

$$\begin{aligned} r &: A \to \mathbf{R} \\ r(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Il punto x_0 *non appartiene a* A *tuttavia è di accumulazione per* A*, quindi ha senso calcolare il limite*

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se tale limite esiste, prende il nome di derivata *di* f *in* x_0*. Dal punto di vista storico, la nozione di derivata precede di almeno un secolo la nozione di limite; la necessità di definire in maniera logicamente ineccepibile la derivata è alla base della nozione di limite.*

Per le funzioni vale una classificazione analoga a quella introdotta per le successioni: si parla dunque di funzioni regolari, convergenti, divergenti (intendendo sempre in fissato punto x_0).

Qui di seguito riportiamo due caratterizzazioni dei limiti che useremo nel seguito. Altri esempi di caratterizzazioni non sequenziali dei limiti sono riportati nel Paragrafo 8.2.6.

Proposizione 8.19 *Sia $\ell \in \mathbf{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$;

ii) *per ogni $\epsilon > 0$ localmente in x_0 risulta*

$$|f(x) - \ell| < \epsilon.$$

La proprietà **ii)** è perfettamente analoga alla definizione di successione convergente.

Proposizione 8.20 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$;

ii) *per ogni $M \in \mathbf{R}$ localmente in x_0 risulta*

$$f(x) > M.$$

La proprietà **ii)** è perfettamente analoga alla definizione di successione divergente positivamente.

8.2.1 Continuità in un punto

Definizione 8.21 *Siano $f : A \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in A$; la funzione f si dice* continua in x_0 *se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{8.1}$$

Esempio 8.22 *Riprendendo gli Esempi 8.12 e 8.14 possiamo affermare che*

- *la funzione identica e la funzione costante sono continue in ciascun punto del dominio;*
- *il valore assoluto è continuo nel punto $x_0 = 0$;*
- *la parte intera non è continua nel punto $x_0 = 1$.*

Osservazione 8.23 *La formula (8.1) è all'origine di un modo di dire molto comune: "per effettuare il limite (per $x \to x_0$) si va a sostituire il punto x_0 nella funzione". In realtà questo vale se il punto x_0 appartiene al dominio A e se sappiamo a priori che la funzione è continua nel punto x_0.*

Nella pratica elementare si incontrano sempre funzioni continue, ma negli esercizi viene richiesto di calcolare il limite in punti che non appartengono al dominio. In questa situazione la formula (8.1) non fornisce alcuna informazione.

Se volessimo dare un'interpretazione intuitiva alla formula (8.1) dovremmo dire che: a piccole variazioni della x rispetto a x_0 (variazioni di input), corrispondono piccole variazioni di $f(x)$ rispetto ad $f(x_0)$ (variazioni di output). Una nozione che studieremo in seguito (la derivabilità) stabilirà un legame più preciso tra variazioni di x e variazioni di $f(x)$.

8.2.2 Carattere locale del limite

Come sopra, siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

Proposizione 8.24 (limite della restrizione) *Sia $C \subset A$ e x_0 sia punto di accumulazione anche per C. Se risulta*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

allora risulta anche

$$\lim_{x \to x_0} f_{|C}(x) = \ell.$$

Esempio 8.25 *Sia $x_0 \in (0,1)$; applicando la definizione di limite, calcoliamo*

$$\lim_{x \to x_0} \lfloor x \rfloor = 0.$$

In particolare si deduce che $\lfloor x \rfloor$ è continua in x_0.

L'esempio precedente mostra che il limite dipende solo dal comportamento *locale* di f in x_0. Si tratta di una proprietà valida in generale, come mostrato di seguito.

Proposizione 8.26 *Sia I intorno di x_0. Risulta*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f_{|A \cap I}(x) = \ell.$$

In altri termini, nel caso in cui ci restringiamo ad $A \cap I$, vale anche il viceversa della Proposizione 8.24.

Corollario 8.27 *Siano $B \subset \mathbf{R}$, x_0 punto di accumulazione anche per B, $g : B \to \mathbf{R}$. Esista I intorno di x_0 tale che $I - \{x_0\} \subset A \cap B$ e, per ogni $x \in I - \{x_0\}$,*

$$f(x) = g(x).$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$

Osservazione 8.28 *Con riferimento al corollario precedente, in breve diremo che, se f e g coincidono localmente in x_0, allora i due limiti coincidono.*

Riprendiamo la situazione dell'Esempio ... in un caso concreto.

Esempio 8.29 *Supponiamo di voler calcolare*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}.$$

Sembra naturale effettuare una semplificazione del tipo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(x^2+4x+4\right).$$

Le funzioni

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3-8}{x-2}, \\ g(x) &= x^2+4x+4, \end{aligned}$$

sono diverse, in quanto f è definita per $x \neq 2$, mentre g è definita per ogni x. Tuttavia per ogni $x \neq 2$ risulta $f(x) = g(x)$ e quindi, in forza del Corollario ..., possiamo concludere che l'uguaglianza () è corretta.

Stabilire l'uguaglianza ( ) è vantaggioso. Infatti, come vedremo nei prossimi paragrafi, il calcolo del limite di f si presenta come una forma indeterminata, mentre il calcolo del limite di g è immediato (per continuità e linearità).

8.2.3 Limiti unilaterali

Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, , $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

Definizione 8.30 *Sia $x_0 \in \mathbf{R}$ punto di accumulazione da destra (risp. da sinistra) per A.*

Si dice che ℓ è il limite di f per x che tende ad x_0 da destra (risp. da sinistra) se, per ogni successione $\{x_n\} \subset A$, $x_n > x_0$ (risp. $x_n < x_0$) tale che $x_n \to x_0$, risulta anche $f(x_n) \to \ell$. In questo caso si scrive

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0^+} f(x) &= \ell \\ \text{(risp. } \lim_{x\to x_0^-} f(x) &= \ell\text{).} \end{aligned}$$

Osservazione 8.31 *La definizione di limite per $x \to +\infty$ (risp. $-\infty$) coincide a tutti gli effetti con la definizione di limite da sinistra (risp. da destra).*

Esempio 8.32 *Utilizzando la definizione si dimostra che*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor &= 0, \\ \lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor &= 1. \end{aligned}$$

Proposizione 8.33 *Sia x_0 punto di accumulazione bilaterale. Risulta*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \qquad e \qquad \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell.$$

In altre parole il limite bilaterale esiste se e solo se esistono entrambi i limiti unilaterali e questi coincidono. Osserviamo che una delle due implicazioni è banale conseguenza della Proposizione 8.24 sul limite della restrizione.

Teorema 8.34 (Regolarità delle funzioni monotone) *Siano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$ monotona, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.*

Se il punto x_0 è di accumulazione da destra per A, allora

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf_{x > x_0} f(x) & \text{se } f \text{ è crescente,} \\ \sup_{x > x_0} f(x) & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Se il punto x_0 è di accumulazione da sinistra per A, allora

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup_{x < x_0} f(x) & \text{se } f \text{ è crescente,} \\ \inf_{x < x_0} f(x) & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Ovviamente nelle formule precedenti non si escludono i casi: $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$.

Osservazione 8.35 *La denominazione assegnata al Teorema non è precisa: infatti nei punti interni non è assicurata l'esistenza del limite, ma l'esistenza dei due limiti unilaterali.*

Concludiamo con una definizione.

Asintoto verticale a destra (risp. *sinistra*) ...

8.2.4 Altri esempi di limiti

Studiamo i limiti della funzione $\phi(x) = 1/x$. Essa è definita per ogni $x \neq 0$ e pertanto tutti i punti di $\overline{\mathbf{R}}$ sono di accumulazione per il dominio.

Proposizione 8.36 *Per ogni $x_0 \neq 0$ risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}.$$

Dimostrazione. Consideriamo $x_0 > 0$ e una successione $x_n \to x_0$.

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x_0}{x_n x_0} \right|$$

Definitivamente

$$\frac{1}{2} x_0 < x_n < \frac{3}{2} x_0$$

e quindi

$$\frac{1}{2} x_0^2 < x_n x_0$$

Pertanto

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x_0}{x_n x_0} \right| < \frac{2}{x_0^2} |x_n - x_0|$$

Dal Teorema di convergenza obbligata consegue la tesi. ∎

Osservazione 8.37 *La Proposizione 8.36 mostra che la funzione $\phi(x) = 1/x$ è continua in ogni punto appartenente al suo dominio.*

Proposizione 8.38 *Risulta*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Dimostrazione. Applichiamo anzitutto la Proposizione 8.26 e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x>0 \\ x\to+\infty}} \frac{1}{x}$$

Quindi ricordiamo che la funzione $1/x$ ristretta all'intervallo $(0, +\infty)$ è monotona decrescente per cui, applicando il Teorema 8.34

$$\lim_{\substack{x>0 \\ x\to+\infty}} \frac{1}{x} = \inf_{x>0} \frac{1}{x} = 0$$

■

Proposizione 8.39 *Risulta*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} &= +\infty, \\ \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} &= -\infty. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Ricordiamo che la funzione $1/x$ ristretta all'intervallo $(0, +\infty)$ è monotona decrescente per cui, applicando il Teorema 8.34

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \sup_{x>0} \frac{1}{x} = +\infty$$

■

Passiamo ora a studiare la funzione valore assoluto.

Proposizione 8.40 *Per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$ risulta*

$$\lim_{x\to x_0} |x| = |x_0| . \tag{8.2}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x| = +\infty$$

Osservazione 8.41 *In base alla (8.2) possiamo affermare che la funzione valore assoluto è continua in ogni punto appartenente al suo dominio.*

8.2.5 Rapporto tra successioni e funzioni

Dal punto di vista logico tutta la teoria dei limiti viene a dipendere dai limiti di successioni. Dal punto di vista pratico e, dunque, negli esercizi, le prospettiva è rovesciata: i limiti di successioni si riconducono a limiti di funzioni. Sussiste infatti la seguente proposizione.

Proposizione 8.42 *Assegnata una successione* $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$*. Se esiste* $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *tale che* $a_n = f(n)$*. e se esiste* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$*, allora risulta* $\lim_n a_n = \ell$*.*

Dimostrazione. Dire $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ equivale ad affermare che per ogni successione $x_n \to +\infty$ risulta

$$f(x_n) \to \ell$$

In particolare possiamo considerare la successione $x_n = n$ e quindi risulta

$$f(n) \to \ell.$$

■

Osservazione 8.43 *Non è vero il viceversa, nel senso che, assegnata* $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$*, se* $\lim_n f(n) = \ell$ *non è affatto detto che esista* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *e che sia uguale ad* ℓ*. Si consideri, ad esempio, la funzione* $f(x) = \sin(\pi x)$*.*

Pertanto, nelle ipotesi della proposizione precedente, si usa la formula

$$\lim_n a_n = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Osservazione 8.44 *La proposizione precedente, evidentemente, non fornisce alcun supporto al calcolo dei limiti di successioni per le quali non si conosca una funzione tale che* $a_n = f(n)$*. Un tipico caso è dato da alcune successioni definite per ricorrenza.*

8.2.6 Caratterizzazioni non sequenziali

Come sopra consideriamo $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ punto di accumulazione per A, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

Proposizione 8.45 *Siano* $x_0, \ell \in \mathbf{R}$*. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$;

ii) per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

si ha

$$|f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Proposizione 8.46 *Siano* $x_0 = +\infty$, $\ell \in \mathbf{R}$*. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$;

ii) per ogni $\epsilon > 0$ esiste $K \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in A$ con

$$K < x$$

si ha

$$|f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Proposizione 8.47 *Siano $x_0 \in \mathbf{R}$, $\ell = +\infty$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$;

ii) per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

si ha

$$f(x) > M.$$

Proposizione 8.48 *Sia $x_0 \in A$. Risulta*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(ossia f è continua in x_0*) se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con*

$$|x - x_0| < \delta$$

si ha

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

8.3 Teoremi sui limiti

Teorema di permanenza del segno

Teorema di confronto

Teorema di divergenza obbligata

Teorema di convergenza obbligata

8.4 Limite delle funzioni elementari

Le funzioni elementari sono tutte continue

Tabella dei limiti in punti di bordo del dominio...

8.5 Algebra dei limiti

Siano $A \subset \mathbf{R}$, x_0 punto di accumulazione per A (eventualmente solo da destra o da sinistra), $f, g : A \to \mathbf{R}$.

Vogliamo studiare il comportamento del limite rispetto alle operazioni algebriche. In quanto segue tutti i limiti sono da intendersi per $x \to x_0$ (eventualmente unilateralmente).

Proposizione 8.49 *Se le funzioni f e g sono entrambe convergenti, allora il limite della somma $f + g$ è uguale alla somma dei due limiti.*

Se la funzione f diverge positivamente e la funzione g è localmente limitata dal basso (in particolare divergente positivamente o convergente), allora la funzione somma $f + g$ diverge positivamente.

Se la funzione f diverge negativamente e la funzione g è localmente limitata dall'alto (in particolare divergente negativamente o convergente), allora la funzione somma $f + g$ diverge negativamente.

Osservazione 8.50 *Nulla si può dire sul limite della somma, qualora entrambe le funzioni siano divergenti in senso opposto:* forma indeterminata *(o di indecisione)* $+\infty - \infty$.

Contrariamente all'uso comune nelle equazioni, in questo contesto l'aggettivo "indeterminato" vuol dire che il limite non è determinato (ossia non si ottiene) dalla Proposizione ..., ma va studiato caso per caso, con tecniche ad hoc. L'espressione "forma di indecisione" forse rende meglio questo concetto.

Diamo ora una definizione che useremo più volte nel seguito.

Definizione 8.51 *La funzione f si dice* infinitesima *in x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Proposizione 8.52 *Se le funzioni f e g sono entrambe convergenti, allora il limite del prodotto $f \cdot g$ è uguale al prodotto dei due limiti.*

Se la funzione f diverge e la funzione g verifica localmente la condizione

$$g(x) < -\delta < 0 \qquad \textit{oppure} \qquad 0 < \delta < g(x)$$

(in particolare converge ad $l \neq 0$, oppure diverge), allora la funzione prodotto $f \cdot g$ diverge, con segno da stabilirsi caso per caso.

Se la funzione f è infinitesima e la funzione g è localmente limitata, allora la funzione prodotto $f \cdot g$ è infinitesima.

Osservazione 8.53 *Nulla si può dire sul limite del prodotto qualora una funzione sia infinitesima e l'altra sia divergente:* forma indeterminata *(o di indecisione)* $0 \cdot \pm\infty$.

8.5.1 Limite della funzione composta

Riportiamo i due teoremi più semplici.

Si abbiano $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, $f(A) \subset B \subset \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$, x_0 punto di accumulazione per A; $\lim_{x \to x_0} f(x) = t_0$.

Teorema 8.54 *Supponiamo $t_0 \in B$ e g continua in t_0. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(t_0).$$

Teorema 8.55 *Supponiamo $t_0 = \pm\infty$ punto di accumulazione per B. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{t \to t_0} g(t)$$

ammesso che il limite a secondo membro esista.

Esempio 8.56 *Calcoliamo*

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(\arctan x)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x \\ g(x) &= \sin x \\ x_0 &= +\infty \\ t_0 &= \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \pi/2 \end{aligned}$$

Siamo nelle ipotesi del Teorema 8.54 e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(\arctan x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Esempio 8.57 *Calcoliamo*

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \sqrt[3]{\tan x}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x \\ g(x) &= \sqrt[3]{x} \\ x_0 &= \pi/2^- \\ t_0 &= \lim_{x\to\pi/2^-} \tan x = +\infty \end{aligned}$$

Siamo nelle ipotesi del Teorema 8.55 e quindi

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \sqrt[3]{\tan x} = \lim_{t\to+\infty} \sqrt[3]{t} = +\infty$$

Osservazione 8.58 *Osserviamo che le due formule riportate nei Teoremi 8.54 e 8.55 sono solo apparentemente diverse. Infatti se g è continua in t_0 si ha*

$$g(t_0) = \lim_{t\to t_0} g(t).$$

Pertanto nei due casi indicati la formula del limite della funzione composta è data da

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{t\to t_0} g(t).$$

In pratica per calcolare $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$, si calcola $\lim_{x\to x_0} f(x) = t_0$ e si "cambia variabile" ($t = f(x)$) nel limite stesso.

8.5.2 Funzione reciproca e rapporti

Consideriamo, come sopra, $A \subset \mathbf{R}$, limiti per $x \to x_0$ punto di accumulazione per A, funzioni $f, g : A \to \mathbf{R}$.

Dai Teoremi sul limite della funzione composta, considerando la funzione $g(x) = \phi(x) = 1/x$, deduciamo il seguente teorema sulla funzione reciproca.

Proposizione 8.59 *Se la funzione f converge ad $l \in \mathbf{R}^*$, allora la funzione $1/f$ converge a $1/l$.*

Se la funzione f diverge, allora la funzione $1/f$ è infinitesima.

Sussiste inoltre la proposizione seguente, generalizzazione della Proposizione ...

Proposizione 8.60 *Supponiamo f infinitesima.*

Se localmente in x_0 risulta $f(x) > 0$ (nel qual caso scriveremo $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$), allora la funzione $1/f(x)$ diverge positivamente.

Se localmente in x_0 risulta $f(x) < 0$ (nel qual caso scriveremo $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^-$), allora la funzione $1/f(x)$ diverge negativamente.

Osservazione 8.61 *Nelle ipotesi della Proposizione 8.59 è implicito (per il Teorema di permanenza del segno) che per la funzione $1/f$ si possa calcolare il limite per $x \to x_0$.*

Qualora f sia infinitesima in x_0 ma non sussistano le ipotesi della Proposizione 8.60, il limite di $1/f(x)$ per $x \to x_0$ non è detto che abbia senso e, se ha senso, non è detto che esista. Ad esempio

$$\lim_{x \to 1/2} \lfloor x \rfloor = 0,$$

tuttavia

$$\lim_{x \to 1/2} 1/\lfloor x \rfloor$$

non ha senso, in quanto la funzione $1/\lfloor x \rfloor$ è definita per $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, quindi il punto $1/2$ non è di accumulazione.

Osservazione 8.62 *Tenendo presente che*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

dalle proposizioni precedenti, inerenti il limite del prodotto ed il limite del reciproco, conseguono ovvi risultati concernenti il limite del rapporto.

Osservazione 8.63 *In particolare nei rapporti si presentano due* forme indeterminate

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad e \qquad \frac{0}{0}.$$

A proposito di forme indeterminate è opportuno ricordare che, se $l \in \mathbf{R}$, non è forma indeterminata

$$\frac{l}{\pm\infty},$$

così come non sono indeterminate

$$\frac{\pm\infty}{0^+} \qquad e \qquad \frac{\pm\infty}{0^-}.$$

8.5.3 Forme esponenziali

Consideriamo, ancora, $A \subset \mathbf{R}$, limiti per $x \to x_0$ punto di accumulazione per A; questa volta due funzioni $a, b : A \to \mathbf{R}$, con la condizione aggiuntiva $b(x) > 0$. Vogliamo studiare limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} b(x)^{a(x)}$$

Anzitutto si effettua una trascrizione

$$b(x)^{a(x)} = \exp\left(a(x) \log b(x)\right)$$

quindi si è ricondotti a studiare

$$\lim_{x \to x_0} a(x) \log b(x).$$

Una volta calcolato

$$\lim_{x\to x_0} a(x)\log b(x) = t_0$$

applicando la () avremo

$$\lim_{x\to x_0} b(x)^{a(x)} = \lim_{x\to x_0} \exp\left(a(x)\log b(x)\right) = \lim_{t\to t_0} \exp t.$$

Questa è da considerarsi la procedura da applicare ogni volta, per evitare inutili sforzi mnemonici, a rischio di errore.

Il limite () si presenta come un prodotto (che include a sua volta una funzione composta). Evidentemente può presentarsi la forma indeterminata dei prodotti $0 \cdot \pm\infty$. Questa situazione si presenta in tre casi

- quando
  $$a(x) \to 0 \quad \text{e} \quad \log b(x) \to -\infty,$$
  che corrisponde a
  $$a(x) \to 0 \quad \text{e} \quad b(x) \to 0^+,$$
  in breve 0^0;
- quando
  $$a(x) \to 0 \quad \text{e} \quad \log b(x) \to +\infty,$$
  che corrisponde a
  $$a(x) \to 0 \quad \text{e} \quad b(x) \to +\infty,$$
  in breve $(+\infty)^0$;
- quando
  $$a(x) \to \pm\infty \quad \text{e} \quad \log b(x) \to 0,$$
  che corrisponde a
  $$a(x) \to \pm\infty \quad \text{e} \quad b(x) \to 1,$$
  in breve $1^{\pm\infty}$.

Tutte le altre situazioni sono determinate.

Osservazione 8.64 *A suo tempo abbiamo posto, per definizione/convenzione* $0^0 = 1$ *e abbiamo precisato che era una scelta in qualche modo non naturale, che non tutti i testi condividono. Ora abbiamo evidenza di quello che avevamo anticipato e comprendiamo il perché di tutte quelle cautele:* nello studio dei limiti *la forma* 0^0 *è e rimane una forma indeterminata.*

8.5.4 Esercizi di calcolo dei limiti

I teoremi sui limiti diventano immediatamente teoremi sulle funzioni continue: la somma, il prodotto, la composta di funzioni continue sono funzioni continue.

Dunque, poiché le funzioni presenti negli esercizi sono tutte continue, gli esercizi riguardano punti di accumulazione non appartenenti al dominio.