**Esercizio 2.5**

Si consideri il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^k c^{2n} \mid n,k \geq 1\}$$

Determinare una grammatica $G$ tale che $L = L(G)$ e dimostrare per induzione tale uguaglianza.

$$G = (X, V, S, P)$$
$$X = \{a,b,c\} \qquad V = \{S, B\}$$
$$P = \left\{ S \to \overset{(1)}{aScc} \mid \overset{(2)}{aBcc},\; B \to \overset{(3)}{bB} \mid \overset{(4)}{b} \right\}$$

Si intende dimostrare che $L = L(G)$.

Possiamo ricondurre questa dimostrazione alla dimostrazione del seguente asserto:

$$S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \iff w \in I$$

ove:

$$I = \{a^n S c^{2n} \mid n \geq 1\} \cup \{a^n B c^{2n} \mid n \geq 1\} \cup$$
$$\cup \{a^n b^k B c^{2n} \mid n,k \geq 1\} \cup \{a^n b^k c^{2n} \mid n,k \geq 1\}$$

$\Rightarrow$) Procediamo per induzione sulla lunghezza della derivazione da $S$ in $G$. Sia $w$ una forma di frase derivabile da $S$ in $G$ e denoto con $t$ la lunghezza della derivazione:

$$S \underset{G}{\overset{t}{\Rightarrow}} w$$

Passo base

$t = 1$

Le possibili derivazioni da $S$ di lunghezza 1 sono:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aScc \quad \text{ed} \quad aScc \in I \quad (n=1)$$
$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} aBcc \quad \text{ed} \quad aBcc \in I \quad (n=1)$$

Passo induttivo

Dimostriamo che, per ogni $t > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$"S \underset{G}{\overset{t}{\Rightarrow}} w \;\Rightarrow\; w \in I",$$

allora anche l'enunciato:

$$"S \underset{G}{\overset{t+1}{\Rightarrow}} w \;\Rightarrow\; w \in I"$$

risulta vero.

Consideriamo una generica forma di frase derivabile da $S$ in $G$ in $t$+1 passi e denotiamo tale forma di frase con $w$.

Per definizione di derivazione in $t$+1 passi, esiste una sequenza di forme di frase $w_1, w_2, \dots, w_{t+2}$, con $w_i \in (X \cup V)^+$, $i = 1, 2, \dots, t+2$, $w_1 = S$, $w_{t+2} = w$ tali che:

$$w_1 = \underbrace{S \Rightarrow w_2 \Rightarrow w_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_{t+1} \Rightarrow w_{t+2}}_{t+1 \text{ passi}} = w$$

Inoltre, per ipotesi di induzione, $w_{t+1} \in I$ . Dunque, $w_{t+1}$ è in una delle seguenti forme:

$$w_{t+1} = \begin{cases} a^n S c^{2n} \\ a^n B c^{2n} \\ a^n b^k B c^{2n} \\ a^n b^k c^{2n} \end{cases} \qquad k,n \geq 1$$

Analizziamo l'ultimo (il $t$+1-esimo) passo di derivazione:

$$S \overset{t}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_{t+1}$$

Se $w_{t+1} = a^n S c^{2n}$, si hanno due possibili forme per $w_{t+2}$:

$$S \overset{t}{\Rightarrow} a^n S c^{2n} \underset{(1)}{\Rightarrow} a^{n+1} S c^{2n+2} = w_{t+2} \quad \text{e} \quad w_{t+2} \in I$$
$$S \overset{t}{\Rightarrow} a^n S c^{2n} \underset{(2)}{\Rightarrow} a^{n+1} B c^{2n+2} = w_{t+2} \quad \text{e} \quad w_{t+2} \in I$$

Se $w_{t+1} = a^n B c^{2n}$, si hanno due possibili forme per $w_{t+2}$:

$$S \overset{t}{\Rightarrow} a^n B c^{2n} \underset{(3)}{\Rightarrow} a^n b B c^{2n} = w_{t+2} \quad \text{e} \quad w_{t+2} \in I$$
$$S \overset{t}{\Rightarrow} a^n B c^{2n} \underset{(4)}{\Rightarrow} a^n b c^{2n} = w_{t+2} \quad \text{e} \quad w_{t+2} \in I$$

Se $w_{t+1} = a^n b^k B c^{2n}$, si hanno due possibili forme per $w_{t+2}$:

$$S \overset{t}{\Rightarrow} a^n b^k B c^{2n} \underset{(3)}{\Rightarrow} a^n b^{k+1} B c^{2n} = w_{t+2} \quad \text{e} \quad w_{t+2} \in I$$
$$S \overset{t}{\Rightarrow} a^n b^k B c^{2n} \underset{(4)}{\Rightarrow} a^n b^{k+1} c^{2n} = w_{t+2} \quad \text{e} \quad w_{t+2} \in I$$

Se $w_{t+1} = a^n b^k c^{2n}$, si ha:

$$S \overset{t}{\Rightarrow} a^n b^k c^{2n}$$

e non ci sono ulteriori passi di derivazione possibili (non esistono derivazioni di lunghezza $t$+1 la cui $t$+1-esima forma di frase sia del tipo $w_{t+1} = a^n b^k c^{2n}$).

Risulta così dimostrato l'asserto.

$\Leftarrow$) Dimostriamo la seguente implicazione:

$$\left.\begin{array}{l} w \in I \\ I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \\ I_1 = \{a^n S c^{2n} \mid n \geq 1\} \\ I_2 = \{a^n B c^{2n} \mid n \geq 1\} \\ I_3 = \{a^n b^k B c^{2n} \mid k,n \geq 1\} \\ I_4 = \{a^n b^k c^{2n} \mid k,n \geq 1\} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$$

Sia $w \in I_1 = \{a^n S c^{2n} \mid n \geq 1\}$.

Procediamo per induzione su $n$.

$n=1 \qquad w = aScc$

e la derivazione cercata è:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aScc$$

Supponiamo vera:

$$w' = a^{n-1}Sc^{2(n-1)} \Rightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w'$$

e dimostriamo che $w = a^n Sc^{2n}$ è derivabile da *S* in *G*.

Per ipotesi di induzione:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^{n-1}Sc^{2(n-1)}$$

Dunque si ha:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^{n-1}Sc^{2(n-1)} \underset{(1)}{\Rightarrow} a^{n-1}\, a\, S\, cc\, c^{2(n-1)} = a^n Sc^{2n}$$

Sia $w \in I_2 = \{a^n Bc^{2n} \mid n \geq 1\}$.

Procediamo *per induzione su n*.

$n = 1 \qquad w = aBcc$

e la derivazione cercata è:

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} aBcc$$

Sia $w = a^n Bc^{2n}$. Dal risultato precedente sappiamo che ( $w' \in I_1 \Rightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} w'$ ) con $w' = a^{n-1}Sc^{2(n-1)}$; si ha:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^{n-1}Sc^{2(n-1)}$$

Dunque $w = a^n Bc^{2n}$ è derivabile da *S* in *G* attraverso la seguente derivazione:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^{n-1}Sc^{2(n-1)} \underset{(2)}{\Rightarrow} a^{n-1}\, a\, B\, cc\, c^{2(n-1)} = a^n Bc^{2n}$$

Sia $w \in I_3 = \{a^n b^k Bc^{2n} \mid k, n \geq 1\}$.

Fissiamo un generico *k* e dimostriamo per induzione su *n* che $w = a^n b^k Bc^{2n}$ è derivabile da *S* in *G*.

$n = 1 \qquad w = ab^k Bcc$

e la derivazione cercata è:

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} aBcc \overset{k}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} ab^k Bcc$$

Sia $w = a^n b^k Bc^{2n}$. Per ipotesi di induzione:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^{n-1} b^k c^{2(n-1)}$$

Dunque $w = a^n b^k Bc^{2n}$ è derivabile da *S* in *G* attraverso la seguente derivazione:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^n Bc^{2n} \overset{k}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} a^n b^k Bc^{2n}$$

in cui abbiamo utilizzato il risultato precedente ( $w' \in I_2 \Rightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} w'$ con $w' = a^n Bc^{2n}$ ).

Fissiamo ora un generico *n* e dimostriamo per induzione su *k* che $w = a^n b^k Bc^{2n}$ è derivabile da *S* in *G*.

$k = 1$ $\qquad w = a^n b^k B c^{2n}$ e la derivazione cercata è:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^n B c^{2n} \underset{(3)}{\Rightarrow} a^n b B c^{2n}$$

Sia $w = a^n b^k B c^{2n}$. Per ipotesi di induzione, si ha:

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} a^n b^{k-1} B c^{2n}$$

Pertanto, $w = a^n b^k B c^{2n}$ è derivabile da $S$ in $G$ e la derivazione è:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^n b^{k-1} B c^{2n} \underset{(3)}{\Rightarrow} a^n b^k B c^{2n}$$

Sia $w \in I_4 = \{a^n b^k c^{2n} \mid k, n \geq 1\}$.

Fissiamo arbitrariamente il valore di $k$ e dimostriamo per induzione su $n$ che $w$ è derivabile da $S$ in $G$.

$n = 1$ $\qquad w = ab^k B c^2$

e la derivazione cercata è:

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} aBcc \overset{k-1}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} ab^{k-1} Bcc \underset{(4)}{\Rightarrow} ab^k cc$$

Sia $w = ab^k B c^2$. Per ipotesi di induzione:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^{n-1} b^k c^{2(n-1)}$$

Dunque $w = a^n b^k c^{2n}$ è derivabile da $S$ in $G$ attraverso la seguente derivazione:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^n b^{k-1} B c^{2n} \underset{(4)}{\Rightarrow} a^n b^k c^{2n}$$

in cui abbiamo utilizzato il risultato precedente ( $w' \in I_3 \;\Rightarrow\; S \overset{*}{\Rightarrow} w'$ con $w' = a^n b^{k-1} B c^{2n}$ ).

Fissiamo ora un generico $n$ e dimostriamo per induzione su $k$ che $w = a^n b^k c^{2n}$ è derivabile da $S$ in $G$.

$k = 1$ $\qquad w = a^n b c^{2n}$ e la derivazione cercata è:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^n B c^{2n} \underset{(4)}{\Rightarrow} a^n b c^{2n}$$

in cui abbiamo utilizzato il risultato $w' \in I_2 \;\Rightarrow\; S \overset{*}{\Rightarrow} w'$ con $w' = a^n B c^{2n}$.

Sia $w = a^n b^k c^{2n}$. Abbiamo già dimostrato che una forma di frase $a^n b^k B c^{2n}$ è derivabile da $S$ in $G$ per ogni valore di $n$ e di $k$. Dunque anche $a^n b^{k-1} B c^{2n}$ è derivabile.

Ma allora anche $w = a^n b^k c^{2n}$ è derivabile e la sua derivazione è:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a^n b^{k-1} B c^{2n} \underset{(4)}{\Rightarrow} a^n b^k c^{2n}$$

Risulta così completata la dimostrazione dell'asserto:

$$w \in I \;\Rightarrow\; S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$$

e dunque vale il risultato:

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \;\Leftrightarrow\; w \in I$$

per ogni forma di frase $w \in (X \cup V)^*$.

Poiché $L(G)$ è per definizione costituito di tutte e sole le *frasi* ( $w \in X^*$ ) derivabili da $S$ in $G$, si ha, come caso particolare, che:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w \iff w \in \{a^n b^k c^{2n} \mid n,k \geq 1\} = L.$$