1=1 4/03 F 1.1

a.a. 2007/08

Laurea triennale in Informatica

Analisi matematica (corso A)

L'insieme dei numeri reali

Avvertenza

Questi sono appunti "informali" delle lezioni, che vengono resi disponibili per comodità degli studenti. Parte del materiale presentato è tratto dai libri di testo consigliati, la cui consultazione è vivamente incoraggiata.

L'insieme dei numeri razionali

Assumiamo che a tutti sia noto l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Esso contiene gli insiemi dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

e dei numeri interi (relativi)

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}.$$

L'insieme $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato, ossia in $\mathbb{Q}$ sono soddisfatti

- gli assiomi relativi alle operazioni;
- gli assiomi relativi all'ordinamento.

Assiomi relativi alle operazioni

In $\mathbb{Q}$ sono definite le operazioni di addizione $(+)$ e moltiplicazione $(\cdot)$ con le seguenti proprietà:

Proprietà commutativa: $a+b=b+a, \quad a\cdot b=b\cdot a$

Proprietà associativa:

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

Proprietà distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Esistenza degli elementi neutri: esistono in $\mathbb{Q}$ due numeri distinti 0 e 1 tali che

$$a+0=a, \quad a\cdot 1=a$$

Esistenza degli inversi: per ogni numero razionale a esiste un unico numero razionale, che si denota con $-a$ e si chiama opposto di a, tale che

$$a+(-a)=0;$$

per ogni numero razionale $a\neq 0$ esiste un unico numero razionale, che si denota con a^{-1} e si chiama reciproco di a, tale che

$$a\cdot a^{-1}=1$$

Tramite gli inversi si definiscono le operazioni inverse.

La sottrazione si definisce per ogni a, b, ponendo

$$a - b := a + (-b).$$

La divisione si definisce per ogni a e per ogni $b \neq 0$, ponendo

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}.$$

Conseguenze degli assiomi relativi alle operazioni

A partire da tali assiomi si possono dedurre in modo rigoroso le usuali regole di calcolo. Alcuni esempi:

$$a+b=a+c \quad \Longrightarrow \quad b=c$$ (regole di semplificazione)

$$a \cdot b = a \cdot c, \quad a \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad b=c$$

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a=0 \quad \text{oppure} \quad b=0$$ (regola di annullamento del prodotto)

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b), \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$ (regole dei segni)

Per la dimostrazione di queste e altre proprietà rimandiamo a
Complementi: Regole di calcolo (sulla pagina web)

Assiomi relativi all'ordinamento

È definita in $\mathbb{Q}$ una relazione d'ordine totale $\leq$, detta relazione di minore o uguale, con le seguenti proprietà:

Compatibilità rispetto all'addizione:

per ogni a, b, c: $\quad a \leq b \implies a + c \leq b + c$

Compatibilità rispetto alla moltiplicazione:

per ogni a, b, c: $\quad a \leq b, \quad 0 \leq c \implies a \cdot c \leq b \cdot c$

Ricordiamo che una relazione d'ordine soddisfa le proprietà

- riflessiva: $a \leq a$;
- transitiva: $a \leq b,\ b \leq c \implies a \leq c$;
- antisimmetrica: $a \leq b,\ b \leq a \implies a = b$.

Una relazione d'ordine è totale se per ogni a, b si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$.

Esempio: confrontare $\frac{7}{8}$ e $\frac{19}{22}$. Esempio di relazione d'ordine non totale?

A partire da $\leq$ si definisce la relazione $\geq$ (maggiore o uguale), ponendo

$$a \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad b \leq a$$

Si definiscono anche $<$ (minore) e $>$ (maggiore):

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a \leq b, \;\; a \neq b$$

$$a > b \quad \Longleftrightarrow \quad a \geq b, \;\; a \neq b$$

Se $a \geq 0 \;\; [a \leq 0]$, diciamo che a è positivo [negativo];
se $a > 0 \;\; [a < 0]$, diciamo che a è strettamente positivo [strettamente negativo].

Osservazione
Combinando gli assiomi relativi alle operazioni con quelli relativi all'ordinamento si ottiene, per esempio, la seguente equivalenza:

$$a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \geq 0 .$$

Per ulteriori proprietà e regole di calcolo rimandiamo nuovamente a Complementi: Regole di calcolo (sulla pagina web)

*

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{Q}$

Sia data una retta r. Fissiamo su r due punti distinti O (origine) e U (punto unità); essi individuano:

- un verso di percorrenza positivo sulla retta, quello che porta da O a U;
- una unità di misura, cioè la lunghezza $\overline{OU}$ del segmento OU.

La retta r prende il nome di retta orientata.

A ogni numero razionale associamo un unico punto sulla retta orientata.

Procedimento...

Lacunosità di $\mathbb{Q}$

La corrispondenza introdotta non è biunivoca, in quanto esistono punti sulla retta che non corrispondono ad alcun numero razionale.

Esempio?

Proposizione (Irrazionalità di $\sqrt{2}$)
Non esiste alcun numero razionale x tale che $x^2 = 2$.

Dimostrazione...

Obiettivo:

definire un insieme che contiene $\mathbb{Q}$ e che è in corrispondenza biunivoca con la retta orientata.

Sono possibili diversi approcci...

Rappresentazione decimale

Un numero decimale è un'espressione della forma

$$\pm c_0 \, . \, c_1 c_2 c_3 \ldots \qquad (*)$$

dove c_0 è un intero naturale e $c_1, c_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

Un numero decimale si dice finito se nella sua rappresentazione decimale le cifre $c_1, c_2, \ldots$ diverse da 0 sono in numero finito.
In tal caso, $(*)$ si interpreta come somma finita:

$$\pm\left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k}\right)$$

In caso contrario, il numero decimale si dice infinito.
(Per interpretare correttamente $(*)$ è necessaria la nozione di serie numerica convergente, che tratteremo in seguito.)

Se esiste un blocco di cifre che si ripete, il numero decimale si dice periodico.

Osservazioni

Possiamo ottenere la rappresentazione decimale di un numero razionale eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore.

È facile riconoscere che il numero decimale corrispondente a un numero razionale è necessariamente finito oppure infinito periodico. Perché?

Vale anche il viceversa: a ogni numero decimale finito oppure infinito periodico corrisponde un numero razionale.

(Decimale finito: immediato; infinito periodico: lo vedremo in seguito)

Un numero decimale infinito con periodo 9 si identifica con un numero decimale finito. Per esempio: $4.\bar{9} = 5, \; 4.35\bar{9} = 4.36$.

La rappresentazione decimale permette di decidere immediatamente quale tra due numeri decimali distinti è maggiore (ordinamento lessicografico).

Esempio

Confrontare $\frac{7}{8}$ e $\frac{19}{22}$ utilizzando la rappresentazione decimale.

Numeri irrazionali

I numeri decimali infiniti non periodici sono detti numeri irrazionali.

Osservazione

Sia $x = c_0 \,.\, c_1 c_2 c_3 \ldots$ un numero irrazionale e siano

$$x' = c_0 \,.\, c_1 c_2 \ldots c_k, \qquad x'' = c_0 \,.\, c_1 c_2 \ldots c_k + \frac{1}{10^k}$$

- x' e x'' sono numeri razionali Perché?
- $x' < x < x''$
- $x - x' < 10^{-k}, \;\; x'' - x < 10^{-k}$

x' e x'' sono, rispettivamente, approssimazioni per difetto e per eccesso di x con un errore inferiore a 10^{-k}.

Nota: x' e x'' sono diversi da x.
Per esempio, la scrittura $\sqrt{2} = 1.41$ non è corretta. Perché?

L'insieme dei numeri reali

L'unione dell'insieme dei numeri razionali e dell'insieme dei numeri irrazionali costituisce l'insieme dei numeri reali e si denota con $\mathbb{R}$.

Tale insieme contiene strettamente l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Teorema (Proprietà di densità)
Se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, esistono un numero razionale x e un numero irrazionale y tali che

$$a < x < b, \qquad a < y < b.$$

Dimostrazione. . .

Corollario
Tra due numeri reali distinti sono compresi infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.

Assioma di completezza e retta reale

Assioma di completezza
L'insieme $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con la retta orientata r.

Descrizione...

In virtù dell'assioma di completezza, possiamo identificare ogni numero reale x con il punto P a esso corrispondente sulla retta orientata r e parlare di retta reale.

L'ordinamento lessicografico definisce una relazione di ordine totale in $\mathbb{R}$, che possiamo interpretare graficamente:

se $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $x \leq y$ se e solo se il punto corrispondente a x sulla retta orientata precede o coincide con il punto corrispondente a y.

1-3... 6/03 F

Valore assoluto e distanza

Per ogni numero reale x si chiama valore assoluto (o modulo) di x il numero reale denotato con $|x|$ e definito come

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

È utile interpretare $|x|$ come la distanza tra x e 0 sulla retta reale. Analogamente, $|x - y|$ è la distanza tra x e y sulla retta reale.

Proprietà del valore assoluto

O = origine è ha valore zero

1. $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \iff x = 0; \quad |x| > 0 \iff x \neq 0$
3. $|-x| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. $|x| = r \ (r > 0) \iff x = -r$ oppure $x = r$
5. $|x| < r \ (r > 0) \iff -r < x < r$
6. $|x| > r \ (r > 0) \iff x < -r$ oppure $x > r$

(continua)

7. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

8. $|x/y| = |x|/|y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$

9. $-|x| \leq x \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

10. $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare)

11. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$ $\Rightarrow$ DA DIMOSTRARE

$\boxed{10}$ $x = 7$
$y = -5$

$|7 + -5| \leq |7| + |-5|$

$2 \leq 12$

Intervalli di $\mathbb{R}$

Intervalli limitati (corrispondono ai segmenti). Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$:

$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$	intervallo chiuso
(a, b)	$:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$	intervallo aperto
$[a, b)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}$	int. chiuso a sinistra, aperto a destra
$(a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}$	int. aperto a sinistra, chiuso a destra

Intervalli illimitati (corrispondono alle semirette). Sia $a \in \mathbb{R}$:

$[a, +\infty)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq a\}$	interv. chiuso illimitato superiormente
$(a, +\infty)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > a\}$	interv. aperto illimitato superiormente
$(-\infty, a]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq a\}$	interv. chiuso illimitato inferiormente
$(-\infty, a)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\}$	interv. aperto illimitato inferiormente

Note

Alcuni autori scrivono $]a, b[$ invece di (a, b), e analogamente negli altri casi.

Casi particolari:

$$[a, a] = \{a\}; \qquad (a, a) = [a, a) = (a, a] = \emptyset$$

$$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty), \ \mathbb{R}_- := (-\infty, 0], \ \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Esempio

Rappresentare gli intervalli $[-1, 2)$ e $(1, +\infty)$ e determinare

$$[-1, 2) \cup (1, +\infty), \qquad [-1, 2) \cap (1, +\infty), \qquad [-1, 2) - (1, +\infty)$$

$[-1, 2) \cup (1, +\infty)$

Osservazione

Ciascuno degli insiemi definiti a pagina 17 ha la proprietà che comunque si scelgano x e y in esso, tutti i numeri compresi tra x e y vi appartengono.

Questa è una proprietà caratteristica degli intervalli.

Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono intervalli. Per esempio:

- l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è un intervallo;
- l'insieme $\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ non è un intervallo.

Esercizio

Stabilire se ciascuno dei seguenti insiemi è un intervallo:

$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 7\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$

$A \cup B, \quad A \cap B, \quad B - A, \quad \mathbb{R} - A$

1-4 6/03 F 1.4

Maggioranti e minoranti di un insieme

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto.
Il numero reale M si dice un maggiorante per A se

$$x \leq M \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Il numero reale m si dice un minorante per A se

$$x \geq m \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Esempio. Per ciascuno dei seguenti insiemi, stabilire se esso ammette maggioranti e/o minoranti:

$$(0, +\infty) \qquad (-\infty, 5] \qquad [-2, 5) \qquad \mathbb{R} \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

Osservazione

Non è detto che un insieme ammetta maggioranti o minoranti;
se ne ammette, allora ne ammette infiniti.

Insiemi limitati e illimitati

L'insieme A si dice

- limitato superiormente se ammette maggioranti;
- illimitato superiormente se è privo di maggioranti;
- limitato inferiormente se ammette minoranti;
- illimitato inferiormente se è privo di minoranti;
- limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Esempio. Per ciascuno dei seguenti insiemi, stabilire se esso è limitato superiormente e/o inferiormente:

$$(0,+\infty) \qquad (-\infty,5] \qquad [-2,5) \qquad \mathbb{R} \qquad \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\dots\right\}$$

Osservazione. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) A è limitato

(b) $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq x \leq M \quad \forall x \in A$

Massimo di un insieme

Sia A un insieme non vuoto. Possono verificarsi le tre seguenti situazioni:

(1) A non ha maggioranti — per esempio: $(0, +\infty)$

(2) A ha (infiniti) maggioranti, nessuno dei quali appartiene ad A — per esempio: $(0, 5)$

(3) A ha (infiniti) maggioranti, uno dei quali appartiene ad A — per esempio: $(0, 5]$

Osservazione

Nel caso (3) esiste esattamente un maggiorante di A che appartiene ad A.
Perché?

Se esiste, l'unico maggiorante di A che appartiene ad A si chiama massimo dell'insieme A e si denota con $\max A$. In simboli:

$$\overline{x} = \max A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \overline{x} \in A \\ x \leq \overline{x} \quad \text{per ogni } x \in A. \end{cases}$$

Ricapitolando:

- non è detto che esista il massimo di un insieme;
- se esiste, il massimo è unico;
- se esiste, il massimo di un insieme è l'unico maggiorante dell'insieme che appartiene all'insieme.

Esempio

Stabilire se ciascuno dei seguenti insiemi ammette massimo.
In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, determinare il massimo.

$$(0, +\infty) \qquad (-\infty, 5] \qquad [-2, 5) \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

Minimo di un insieme

Sia A un insieme non vuoto. Possono verificarsi le tre seguenti situazioni:

(1) A non ha minoranti per esempio: $(-\infty, 2]$

(2) A ha (infiniti) minoranti, nessuno dei quali appartiene ad A
per esempio: $(1, 5)$

(3) A ha (infiniti) minoranti, uno dei quali appartiene ad A
per esempio: $[1, 5)$

Osservazione

Nel caso (3) esiste esattamente un minorante di A che appartiene ad A.
Verificare per esercizio

Se esiste, l'unico minorante di A che appartiene ad A si chiama minimo dell'insieme A e si denota con $\min A$. In simboli:

$$\underline{x} = \min A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \underline{x} \in A \\ x \geq \underline{x} \quad \text{per ogni } x \in A. \end{cases}$$

Ricapitolando:

- non è detto che esista il minimo di un insieme;
- se esiste, il minimo è unico;
- se esiste, il minimo di un insieme è l'unico minorante dell'insieme che appartiene all'insieme.

Esempio

Stabilire se ciascuno dei seguenti insiemi ammette minimo.
In caso negativo, spiegare perché; in caso affermativo, determinare il minimo.

$$(-\infty, 5] \qquad (0, +\infty) \qquad [-2, 5) \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

Estremo superiore di un insieme

Teorema (Esistenza dell'estremo superiore)
Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente.
Allora: l'insieme dei maggioranti di A ammette minimo.

Tale minimo si chiama estremo superiore di A e si denota con $\sup A$.

Dimostrazione. . .

DIM 3

Osservazione

Dall'unicità del minimo (dell'insieme dei maggioranti) segue che l'estremo superiore di un insieme è unico.

LAMBDA

Esplicitiamo la definizione di estremo superiore: $\lambda = \sup A$ se

- λ è un maggiorante di A, ossia $x \leq \lambda$ per ogni $x \in A$;
- λ è il più piccolo dei maggioranti, ossia
  un qualsiasi numero più piccolo di λ *non* è un maggiorante di A, ossia per ogni $\lambda' < \lambda$ esiste $x \in A$ tale che $x > \lambda'$.

Osservazioni

(1) Il teorema della pagina precedente garantisce che ogni insieme non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore (in $\mathbb{R}$). Se conveniamo di porre

$$\sup A := \begin{cases} -\infty & \text{se } A \text{ è l'insieme vuoto} \\ +\infty & \text{se } A \text{ è illimitato superiormente,} \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ ampliata

possiamo affermare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ammette estremo superiore in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (retta reale ampliata).

(2) Il massimo di un insieme, se esiste, coincide con l'estremo superiore dell'insieme. Perché?

(3) Il teorema della pagina precedente è falso nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali: non è detto che un sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente di numeri razionali ammetta estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Esempio: $A = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x > 0, \; x^2 < 2\}$ $\Rightarrow$ ESERCIZI COMPLEMENTARI

1-5 $F\begin{pmatrix} \text{No} \\ NN & \text{TT}\end{pmatrix}$ 6/03 1.5

Estremo inferiore di un insieme

Teorema
Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente.
Allora: l'insieme dei minoranti di A ammette massimo.

Tale massimo si chiama estremo inferiore di A e si denota con $\inf A$.

Osservazione

Dall'unicità del massimo (dell'insieme dei minoranti) segue che l'estremo inferiore di un insieme è unico.

Esplicitiamo la definizione di estremo inferiore: $\lambda = \inf A$ se

- λ è un minorante di A, ossia $x \geq \lambda$ per ogni $x \in A$;
- λ è il più grande dei minoranti, ossia
  un qualsiasi numero più grande di λ *non* è un minorante di A, ossia
  per ogni $\lambda' > \lambda$ esiste $x \in A$ tale che $x < \lambda'$.

Osservazioni

(1) Il teorema della pagina precedente garantisce che ogni insieme non vuoto e limitato inferiormente ammette estremo inferiore (in $\mathbb{R}$). Se conveniamo di porre

$$\inf A := \begin{cases} +\infty & \text{se } A \text{ è l'insieme vuoto} \\ -\infty & \text{se } A \text{ è illimitato inferiormente,} \end{cases}$$

possiamo affermare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ammette estremo inferiore in $\overline{\mathbb{R}}$.

(2) Il minimo di un insieme, se esiste, coincide con l'estremo inferiore dell'insieme.

(3) Il teorema della pagina precedente è falso nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali: non è detto che un sottoinsieme non vuoto e limitato inferiormente di numeri razionali ammetta estremo inferiore in Q.

Esempio: $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 > 2\}$

Esempio

Determinare l'estremo superiore e inferiore di ciascuno dei seguenti insiemi, specificando se si tratta di massimo e minimo:

$$[1,3) \qquad [0,2] \qquad (0,\pi] \qquad (-\infty,2) \qquad [3,+\infty) \qquad \emptyset$$

$\Rightarrow$ NON HA NÈ MAX NÈ MIN
MA HA INF $(+\infty)$ E HA SUP $(-\infty$

Esercizio × CASA

Per ciascuno dei seguenti insiemi, stabilire se è un intervallo e se è limitato inferiormente e superiormente; calcolare estremo inferiore, estremo superiore e, se possibile, minimo e massimo.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 7\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x\}$
   $A \cup B, \quad A \cap B, \quad B - A, \quad \mathbb{R} - A$
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x < 9\}, \quad B = \{5, 7, 9, 11, 13, 33\}$
   $A \cup B, \quad A \cap B, \quad A - B$
3. $A = \left\{ \dfrac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ (-1)^n \dfrac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$

11/03 Non trascritto

Operazioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali

Le operazioni (addizione e moltiplicazione) nell'insieme $\mathbb{R}$ si possono definire a partire dalle operazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$, utilizzando il teorema sull'esistenza dell'estremo superiore.

Procedimento:

- si approssimano gli addendi x e y con numeri razionali;
- per ogni coppia di addendi approssimati si calcola la somma;
- si considera l'insieme di tutte le somme approssimate;
- l'estremo superiore di questo insieme è , per definizione, la somma di x e y.

Esempio

Definiamo la somma di $\pi = 3.14159265358979\ldots$ e

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309\ldots$$

approssimazioni razionali di π	approssimazioni razionali di $\sqrt{2}$	approssimazioni razionali di $\pi + \sqrt{2}$
3.1	1.4	4.5
3.14	1.41	4.55
3.141	1.414	4.555
3.1415	1.4142	4.5557
3.14159	1.41421	4.55580
3.141592	1.414213	4.555805
3.1415926	1.4142135	4.5558061
3.14159265	1.41421356	4.55580621
3.141592653	1.414213562	4.555806215
3.1415926535	1.4142135623	4.5558062158
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Consideriamo l'insieme

$$A := \{4.5,\ 4.55,\ 4.555,\ 4.5557,\ 4.55580,\ 4.555805,\ 4.5558061,\\ 4.55580621,\ 4.555806215,\ 4.5558062158,\ \ldots\}$$

Osserviamo che:

A è non vuoto

A è limitato superiormente $(3.2 + 1.5 = 4.7$ è un maggiorante$)$

Definiamo $\pi + \sqrt{2} := \sup A$.

In modo analogo si può definire il prodotto: basta sostituire nella terza colonna le somme dei numeri razionali che si trovano in corrispondenza nelle prime due con i loro prodotti.

Si può dimostrare che le proprietà relative alle operazioni e all'ordinamento già enunciate (pp. 3 e 6) continuano a sussistere sostituendo ovunque la locuzione "in $\mathbb{Q}$" con "in $\mathbb{R}$".

Pertanto, da un punto di vista algebrico, $\mathbb{R}$ ha le stesse proprietà di $\mathbb{Q}$, ossia è un campo ordinato.

La differenza tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sta nella proprietà di completezza: $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con la retta orientata, mentre $\mathbb{Q}$ non lo è .

1=1 4/03 F 1

a.a. 2007/08

Laurea triennale in Informatica

Analisi matematica (corso A)

L'insieme dei numeri reali

1=1 4/03 F

1

a.a. 2007/08

Laurea triennale in Informatica

Analisi matematica (corso A)

L'insieme dei numeri reali

F 11/03 2.1

a.a. 2007/08

Laurea triennale in Informatica

Analisi matematica (corso A)

Funzioni reali di variabile reale – Proprietà generali

Avvertenza

Questi sono appunti “informali” delle lezioni, che vengono resi disponibili per comodità degli studenti. Parte del materiale presentato è tratto dai libri di testo consigliati, la cui consultazione è vivamente incoraggiata.

Funzioni reali di variabile reale

Una funzione $f : A \to B$ si dice

- reale se $B \subseteq \mathbb{R}$;
- di variabile reale se $A \subseteq \mathbb{R}$.

Esempi:

1. la funzione che a ogni numero intero associa il suo doppio è reale di variabile reale;
2. la funzione che associa al peso (in grammi) di una lettera l'affrancatura (in centesimi di euro) necessaria alla spedizione è reale di variabile reale;
3. la funzione che a ogni città sulla terra, individuata in base alla sua latitudine e longitudine, associa l'altitudine è reale ma non di variabile reale (è di due variabili reali).

Nota: trattando funzioni reali, per semplicità assumeremo $B = \mathbb{R}$.

Dominio, immagine, controimmagine

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ricordiamo che:

- l'insieme A si chiama dominio di f, o anche insieme di definizione di f; si denota con $\mathrm{dom}(f)$, oppure con D_f;
- per $x \in A$, l'unico elemento di $\mathbb{R}$ che f associa a x si denota con $f(x)$; si chiama valore di f in x, o anche immagine di x tramite f;
- per $A' \subseteq A$, l'insieme

  $$f(A') := \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A' \text{ t.c. } y = f(x)\}$$

  si chiama immagine di A' tramite f.
- $f(A)$ si chiama immagine di f e si denota con $\mathrm{im}(f)$;
- per $B' \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme

  $$f^{-1}(B') := \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

  si chiama controimmagine (o immagine reciproca) di B' tramite f; per $y \in B$, si scrive $f^{-1}(y)$ in luogo di $f^{-1}(\{y\})$.

Esempio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 2x + 1$. Determiniamo:

$f(0) = 1$

$f(1.5) = 4$

$f(-2.34) = -3.68$

$f(\pi) = 2\pi + 1$

$f(\{-3, \sqrt{2}, 2.1\}) = \{-5, 2\sqrt{2}+1, 5.2\}$

$f([-2, 4.5)) = [-3, 10)$

$f^{-1}(3.6) = 1.3$

$f^{-1}([1, 8)) = [0, 3.5)$

Grafico di una funzione

Siano A e B insiemi qualsiasi e sia $f : A \to B$.
Il grafico di f è l'insieme

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x, y) \in A \times B \, : \, y = f(x)\} .$$

In particolare, se f è una funzione reale di variabile reale, il grafico di f è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Osservazione
L'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con il piano cartesiano (piano munito di un sistema di riferimento).

Procedimento...

Se f è una funzione reale di variabile reale, il suo grafico si identifica con un sottoinsieme (una "curva") del piano cartesiano, e quindi può essere disegnato.

Test delle rette verticali

Non tutte le curve sono grafici di funzione:

Test delle rette verticali
Una curva nel piano cartesiano è grafico di una funzione della variabile x se e solo se ogni retta parallela all'asse delle y interseca la curva al più una volta.

Esempi:

1. una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y è grafico di una funzione della variabile x;
2. una circonferenza non è grafico di una funzione della variabile x.

Prime informazioni deducibili da un grafico

Assegnato il grafico di una funzione $f = f(x)$,

- $\mathrm{dom}(f)$ è la proiezione del grafico sull'asse delle ascisse;
- $\mathrm{im}(f)$ è la proiezione del grafico sull'asse delle ordinate;
- per $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, il valore $f(x_0)$ è l'ordinata dell'unico punto del grafico di f che si trova sulla retta di equazione $x = x_0$;
- per $y_0 \in \mathrm{im}(f)$, la controimmagine $f^{-1}(y_0)$ è formata dalle ascisse dei punti del grafico di f che si trovano sulla retta di equazione $y = y_0$.

Esempio

Stabilire se la curva disegnata è il grafico di una funzione.
In caso affermativo, detta f la funzione in oggetto, determinare (approssimativamente)

$\mathrm{dom}(f)$ = [-2.5, 2]

$\mathrm{im}(f)$ = [-6, 10]

$f(0)$ = 2

$f(1)$ = 2.5

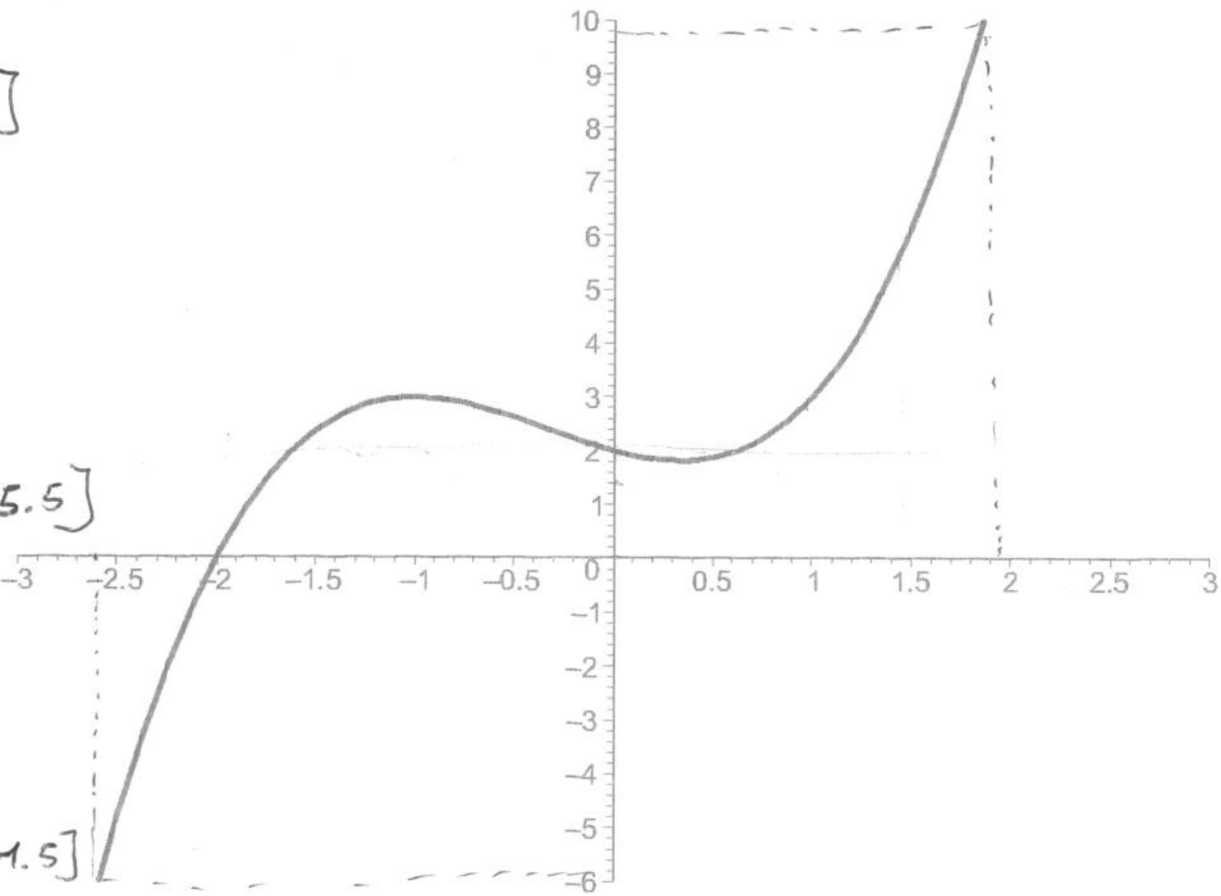
$f([-1, 1.5])$ = [3, 5.5]

$f^{-1}(0)$ = -2

$f^{-1}(2)$ = -1.5/0.5

$f^{-1}([-1, 4])$ = [-2, 1.5]

$f^{-1}([1.4, 2.2])$ = [1.5, 0.5]



12/03

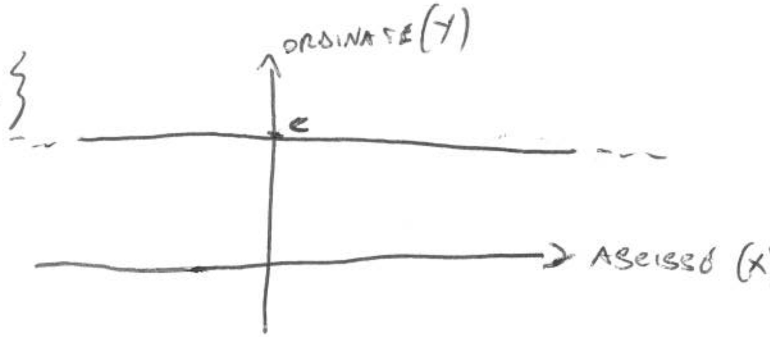
Esempi (da ricordare)

Funzione costante

Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Grafico? $\text{graf}(f) = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x) = c\}$

$\text{IMM}(f) = \{c\}$



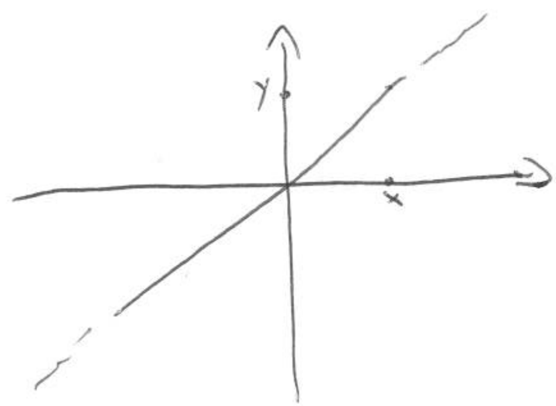
COSTANTE = RETTA PARALLELA ALL'ASSE DELLE ASCISSE

Funzione identica

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Grafico? $\text{graf}(f) = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y = x\}$

IDENTICA = BISETTRICE



$\text{IMM}(f) = \mathbb{R}$

NON HA MAX NÉ MIN
MA HA SUP, INF

Funzione valore assoluto

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

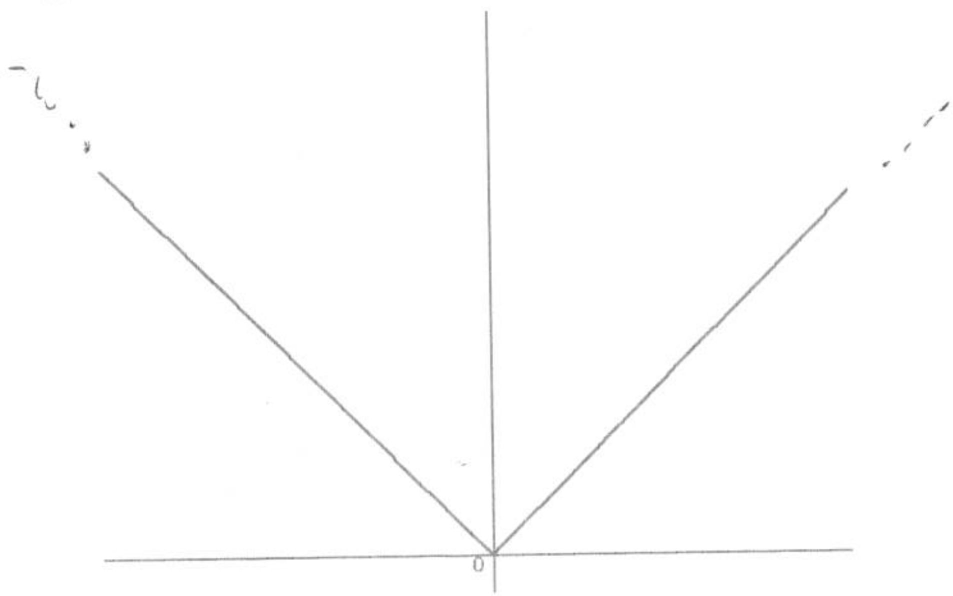
Notiamo esplicitamente che

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(funzione definita a tratti)}$$

Per disegnare il grafico di f basta osservare che

$y = x$ è l'equazione della bisettrice di primo e terzo quadrante,

$y = -x$ è l'equazione della bisettrice di secondo e quarto quadrante.



IM(f) = [0, +∞] = R

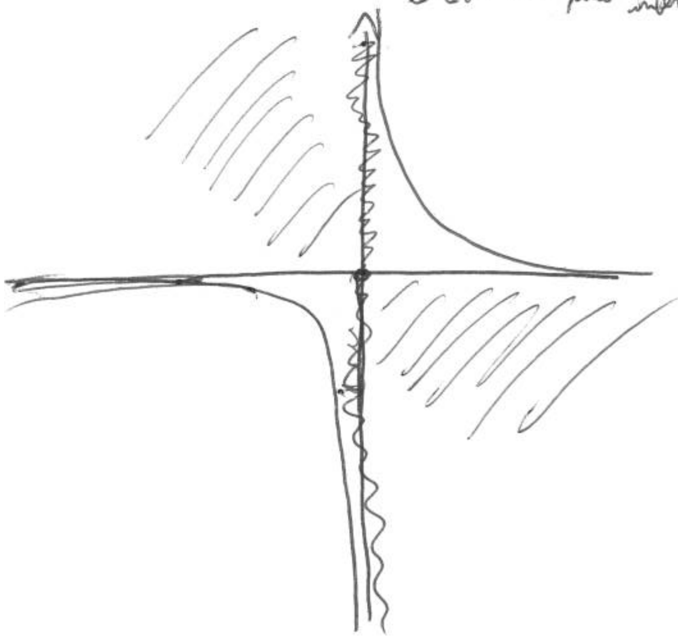
MIN f = 0 assunto in x

Funzione reciproca

Sia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \dfrac{1}{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^*$.

Grafico? $\mathrm{graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^*,\ y = \frac{1}{x}\}$ $\boxed{xy = 1}$

la retta non può intersecare l'asse delle ordinate xké la x non può assumere valore 0



$\Rightarrow$ ho sempre x e $\frac{1}{x}$ positivi o entrambi negativi

$\mathrm{imm}(f) = \mathbb{R}^*$

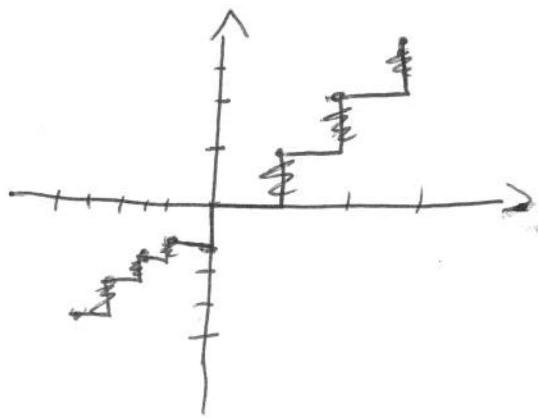
Funzione parte intera (inferiore) o floor

Per $x \in \mathbb{R}$, poniamo $\lfloor x \rfloor :=$ il più grande intero minore o uguale a x .

Esempi: $\lfloor 2.5 \rfloor = 2, \ \lfloor -2.5 \rfloor = -3, \ \lfloor 2 \rfloor = 2.$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \lfloor x \rfloor$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Grafico?

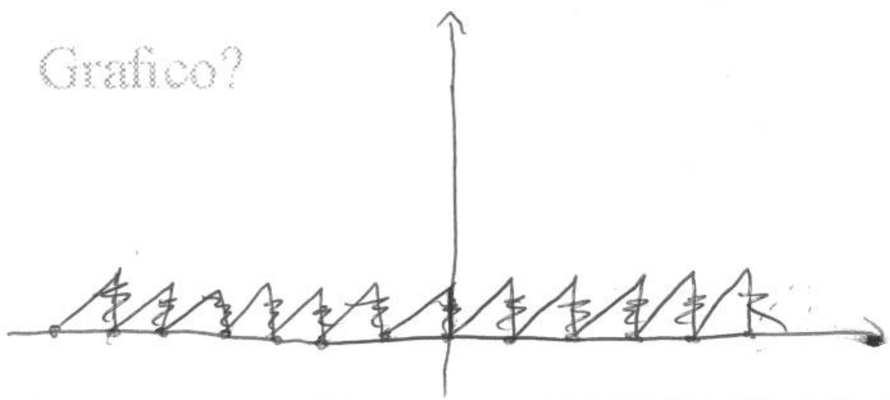


$\mathrm{IMM}(f) = \mathbb{Z}$

Funzione parte frazionaria o mantissa

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Grafico?



$\mathrm{IMM}(f) = [0, 1)$

$\mathrm{SUP}(f) = 1$
MA NO MAX

$\mathrm{MIN}\, f = 0 = \mathrm{INF}$
ASSUNTO IN $x \in \mathbb{Z}$

2-2 F. 12/03 2.2

Estremo superiore e inferiore, massimo e minimo di una funzione

Se f è una funzione reale, definita in A, la sua immagine $\mathrm{im}(f)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$; ha senso allora parlare di

$$\left.\begin{array}{l}\text{maggioranti, minoranti}\\ \text{estremo superiore, estremo inferiore}\\ \text{massimo e minimo}\end{array}\right\} \quad \text{di } \mathrm{im}(f).$$

Essi vengono detti, rispettivamente,

$$\left.\begin{array}{l}\text{maggioranti, minoranti}\\ \text{estremo superiore, estremo inferiore}\\ \text{massimo (globale o assoluto) e minimo (globale o assoluto)}\end{array}\right\} \quad \text{di } f.$$

In simboli:

$$\sup_A f := \sup(\mathrm{im}(f)) \qquad \inf_A f := \inf(\mathrm{im}(f))$$

$$\max_A f := \max(\mathrm{im}(f)) \qquad \min_A f := \min(\mathrm{im}(f))$$

Osservazioni

- Diciamo che una funzione è limitata (superiormente, inferiormente) se la sua immagine $\mathrm{im}(f)$ lo è.
  Come si interpreta graficamente la limitatezza?
- L'estremo superiore [inferiore] di una funzione esiste sempre in $\overline{\mathbb{R}}$; esso è finito se e solo se la funzione è limitata superiormente [inferiormente].
- Non è detto che una funzione ammetta massimo [minimo] globale. Sono equivalenti le affermazioni

  (a) f ammette massimo [minimo] globale

  (b) esiste $x_0 \in A$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in A$$
$$[f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in A]$$

Se un punto x_0 soddisfa la condizione in (b), è detto punto di massimo [minimo] globale di f in A.

Esempio

Stabilire se le funzioni

- costante SUP = INF = MAX = MIN = COSTANTE
- identica SUP = $+\infty$ INF = $-\infty$ $\nexists$ MAX, MIN
- valore assoluto SUP = $+\infty$ $\nexists$ MAX INF = 0 = MIN
- reciproca SUP = $+\infty$ INF = $-\infty$ $\nexists$ MAX, MIN
- parte intera SUP = $+\infty$ INF = $-\infty$ $\nexists$ MAX, MIN
- mantissa SUP = 1 INF = 0 $\nexists$ MAX MIN = 0

sono limitate superiormente e/o inferiormente, calcolarne estremo superiore e inferiore e, se possibile, massimo e minimo globali.

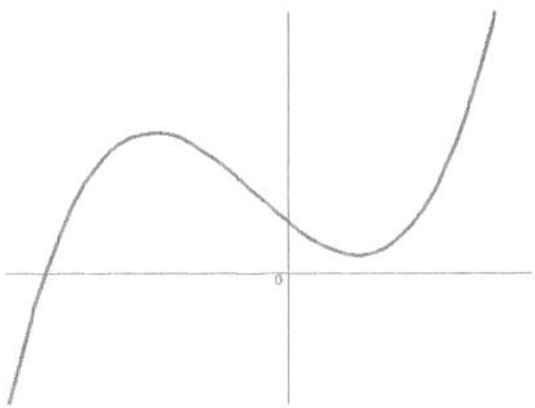
Test delle rette orizzontali

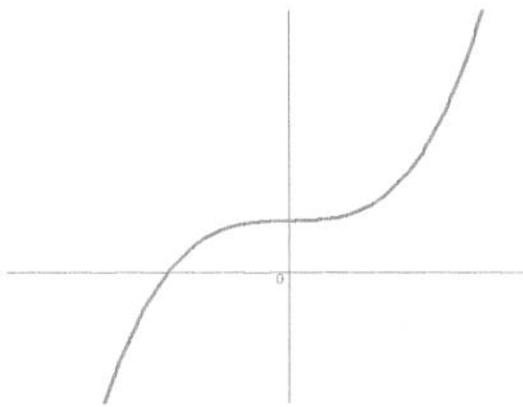
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Ricordiamo che f è ingettiva in A se e solo se per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha al più una soluzione in A.

Ciò si traduce immediatamente nel

Test delle rette orizzontali
Una funzione $f = f(x)$ reale di variabile reale è ingettiva se e solo se ogni retta parallela all'asse delle x interseca il grafico di f al più in un punto.

Esempio
Stabilire se le curve disegnate sono grafici di funzioni ingettive.





Esempio

Stabilire se le funzioni

- costante - PARI - NO INGETTIVA
- identica - DISPARI - INGETTIVA
- valore assoluto - PARI - NON INGETTIVA
- reciproca - DISPARI - INGETTIVA
- parte intera NEX - NON INGETTIVA
- mantissa NEX - NON INGETTIVA

sono ingettive.

Funzioni monotòne

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Si dice che f è crescente in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Si dice che f è strettamente crescente in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Si dice che f è decrescente in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Si dice che f è strettamente decrescente in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Una funzione (strettamente) crescente o decrescente si dice (strettamente) monotòna.

Interpretazione grafica della monotonia

- in un intervallo;
- in un insieme qualsiasi.

Esempio

Studiare la monotonia delle funzioni

costante NON MONOTONA

identica STRETTAMENTE CRESCENTE

valore assoluto NON MONOTONA MA DIVIDENDO IL SUO DOMINIO IN 2 SI HA < STRETTAMENTE DECRESCENTE (Parte neg) / " CRESCENTE (" pos)

reciproca STRETTAMENTE DECRESCENTE

parte intera NON MONOTONA

mantissa NON MONOTONA

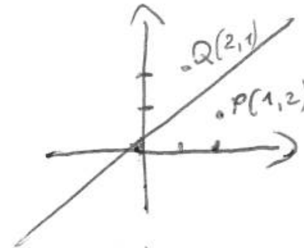
Monotonia e invertibilità

Proposizione

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona. Allora:

1. f è ingettiva in A;
2. la "ridotta" di f è bigettiva;
3. esiste la funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$;
4. se f è strettamente crescente (decrescente), anche f^{-1} è strettamente crescente (decrescente).

Verifica...



P(1,2) P simmetrico di Q
Q(2,1) alla 1° bisettrice

$(x,y) \in$ graf(f)
$x \in$ dom f $\quad y \in$ ...
$y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)$
$\Rightarrow (y,x) \in$ graf $(f^{-1}$

Osservazioni

Sia f una funzione reale di variabile reale e sia f^{-1} la sua inversa.

- Il dominio di f^{-1} coincide con l'immagine di f;
- l'immagine di f^{-1} coincide con il dominio di f;
- i grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$.

Esercizio (funzione affine)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

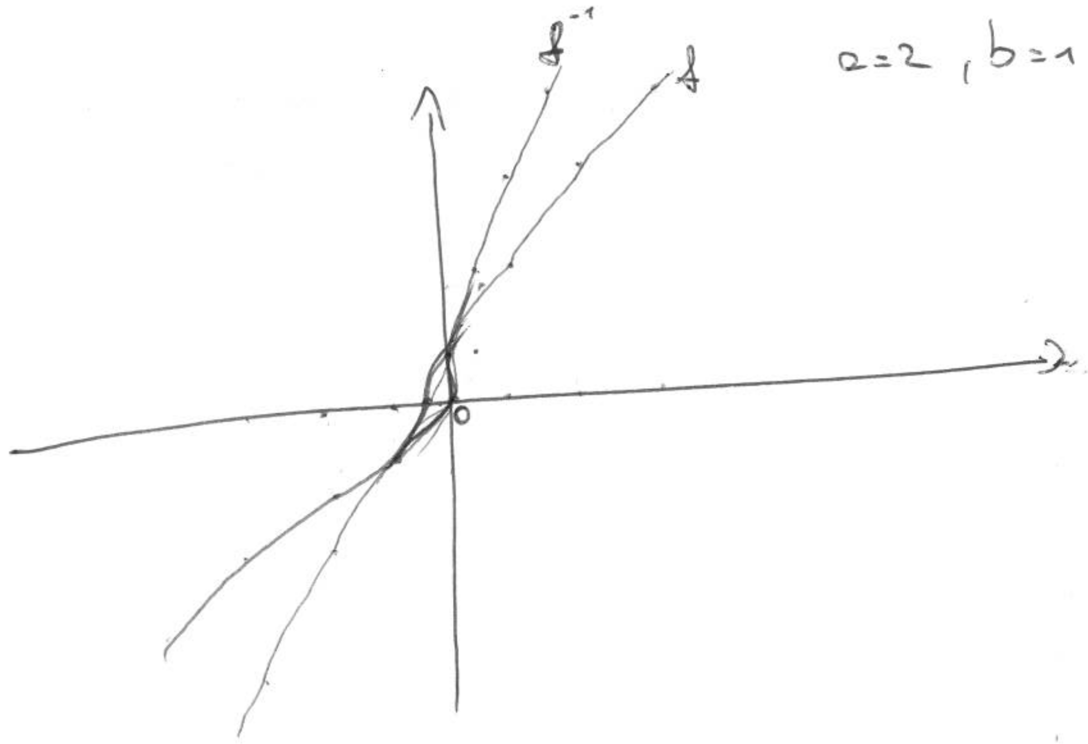
$$f(x) = ax + b \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

1. Stabilire per quali valori di a, b la funzione è bigettiva.
2. Nei casi possibili, determinare la funzione inversa f^{-1}.
3. Tracciare nello stesso piano cartesiano i grafici di f e di f^{-1} (per concretezza, fissare a e b a piacere).

① $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

② $f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$

$a = 2$, $b = 1$



Funzioni convesse e concave (formulazione geometrica)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

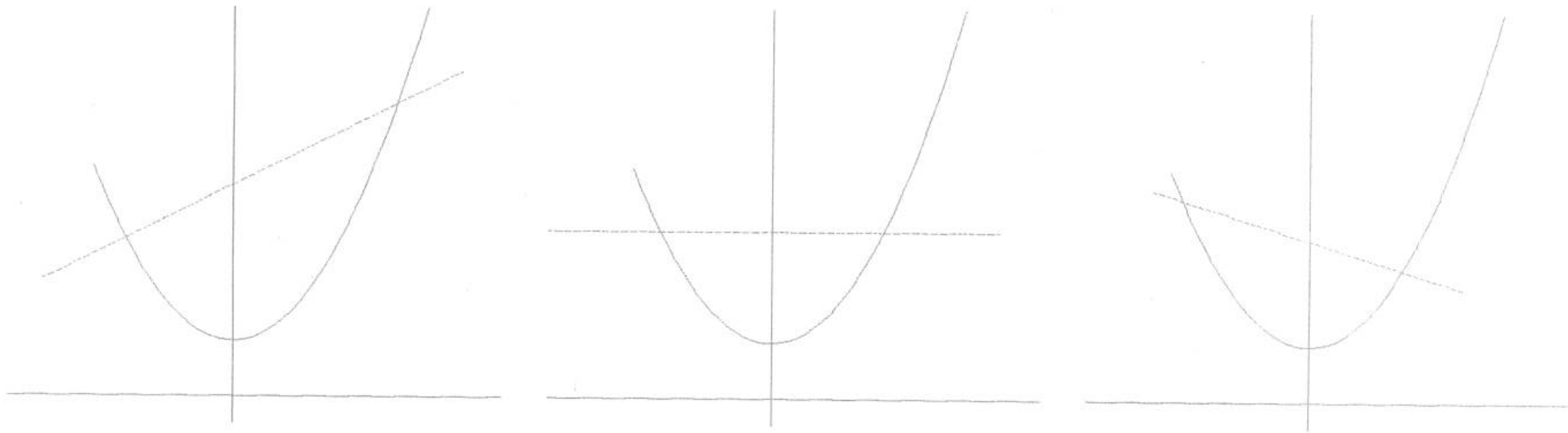
Si dice che f è convessa in A se comunque si scelgano due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge è situato interamente al di sopra della porzione di grafico delimitata dai due punti.

Se, con la ovvia eccezione degli estremi, i punti del segmento si trovano strettamente al di sopra dei corrispondenti punti sul grafico di f, si dice che f è strettamente convessa.

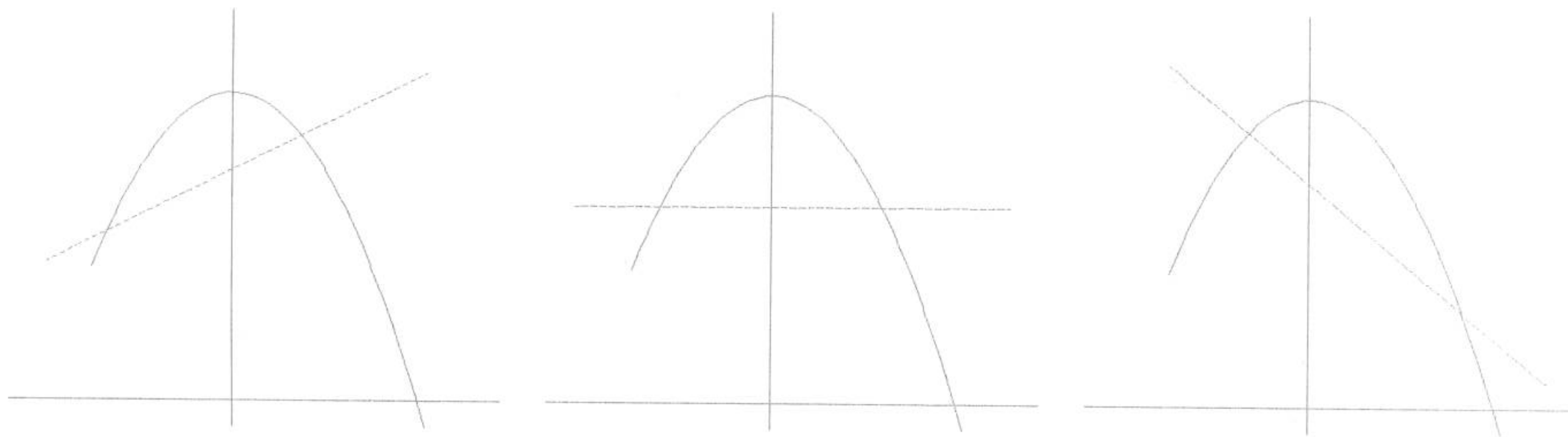
Si dice che f è concava in A se comunque si scelgano due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge è situato interamente al di sotto della porzione di grafico delimitata dai due punti.

Se, con la ovvia eccezione degli estremi, i punti del segmento si trovano strettamente al di sotto dei corrispondenti punti sul grafico di f, si dice che f è strettamente concava.

Funzione strettamente convessa



Funzione strettamente concava



Esempio

Studiare la convessità/concavità delle funzioni

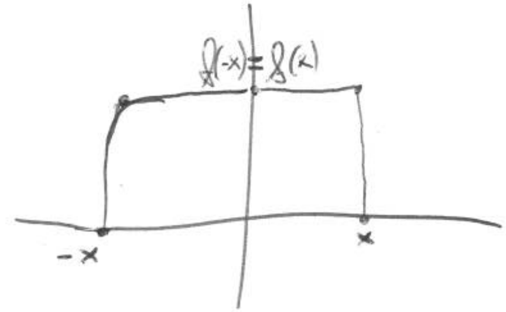
- costante NIENTE
- identica //
- valore assoluto //
- reciproca Per la parte positiva è convessa, per quella negativa concava
- parte intera NIENTE
- mantissa //

Problema

Formulare una definizione analitica di stretta convessità e utilizzarla per verificare che la funzione definita ponendo $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è strettamente convessa.

13/03

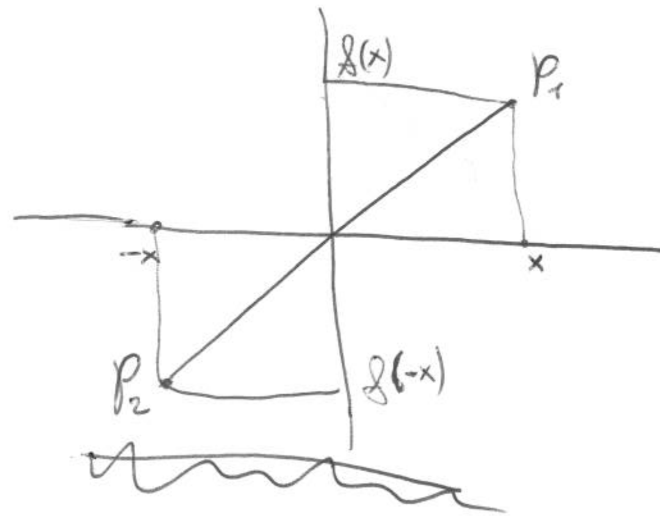
Funzioni simmetriche



Si dice che f è una funzione pari se

- $\mathrm{dom}(f)$ è simmetrico rispetto all'origine
- $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$

Osservazione: f è pari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



Si dice che f è una funzione dispari se

- $\mathrm{dom}(f)$ è simmetrico rispetto all'origine
- $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$

Osservazione: f è dispari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Esempio

Stabilire se le funzioni

- costante PARI
- identica DISPARI
- valore assoluto PARI
- reciproca DISPARI
- parte intera NON SIMMETRICA
- mantissa NON SIMMETRICA

sono simmetriche.

1 3-U

F

3

a.a. 2007/08

Laurea triennale in Informatica

Analisi matematica (corso A)

Funzioni reali di variabile reale – Operazioni e composizione

Avvertenza

Questi sono appunti "informali" delle lezioni, che vengono resi disponibili per comodità degli studenti. Parte del materiale presentato è tratto dai libri di testo consigliati, la cui consultazione è vivamente incoraggiata.

Operazioni con le funzioni

Date due funzioni reali f e g

- la somma di f e g è la funzione $f+g$ definita ponendo
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$
- la differenza di f e g è la funzione $f-g$ definita ponendo
$$(f-g)(x) := f(x) - g(x), \quad x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$
- il prodotto di f e g è la funzione $f \cdot g$ definita ponendo
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$$
- il rapporto di f e g è la funzione f/g definita ponendo
$$(f/g)(x) := f(x)/g(x),$$
$$x \in \mathrm{dom}(f) \cap \{x \in \mathrm{dom}(g) \mid g(x) \neq 0\}$$

Esempi

Scrivere la somma, differenza, prodotto, rapporto delle seguenti coppie di funzioni, specificandone il dominio:

1. $f(x) = x + 1 \qquad g(x) = |x|$

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

Funzione potenza a esponente naturale

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Definiamo la funzione $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$p_n(x) = x^n \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Osservazione

La funzione p_n è ottenuta come prodotto di funzioni, come si vede dalla seguente definizione ricorsiva, equivalente alla precedente:

$$\begin{cases} p_1(x) = x & \text{funzione identica} \\ p_n(x) = x\, p_{n-1}(x) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Proprietà della funzione potenza a esponente naturale

Se n è pari, la funzione p_n è

- pari (cioè ha grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate);
- strettamente crescente in $\mathbb{R}_+$ e strettamente decrescente in $\mathbb{R}_-$;
- strettamente convessa in $\mathbb{R}$.

Verifica nel caso "modello" $n = 2\ldots$

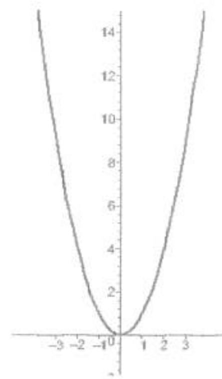
Se n è dispari, la funzione p_n è

- dispari (cioè ha grafico simmetrico rispetto all'origine);
- strettamente crescente in $\mathbb{R}$;
- strettamente convessa in $\mathbb{R}_+$ e strettamente concava in $\mathbb{R}_-$.

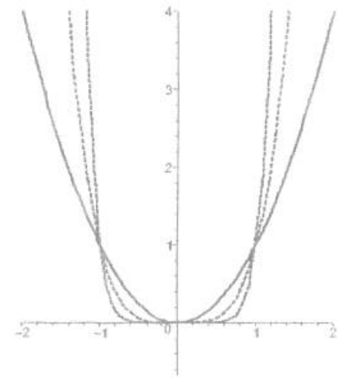
Verifica nel caso "modello" $n = 3\ldots$

Grafico della funzione potenza con esponente naturale pari

$p_2(x) = x^2$



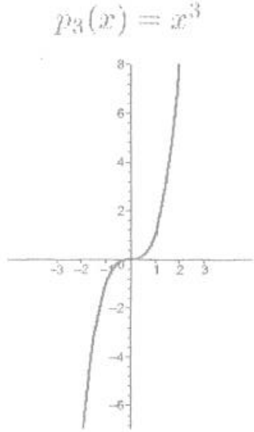
$p_n(x) = x^n \quad (n = 2, 4, 8)$



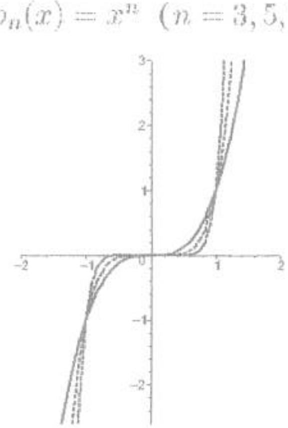
Il grafico suggerisce che l'immagine di p_n sia $\mathbb{R}_+$; ciò verrà dimostrato i
seguito.

Grafico della funzione potenza con esponente naturale dispari

$p_3(x) = x^3$



$p_n(x) = x^n \quad (n = 3, 5, 9)$



Il grafico suggerisce che l'immagine di p_n sia $\mathbb{R}$: ciò verrà dimostrato in seguito.

Funzioni polinomiali e funzioni razionali

Una funzione polinomiale è la combinazione lineare di funzioni potenza esponente naturale:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

È evidente che $\mathrm{dom}(P) = \mathbb{R}$. Perché?

Una funzione razionale è il rapporto di due funzioni polinomiali:

$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con P e Q funzioni polinomiali.

È evidente che $\mathrm{dom}(R) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Perché?

Composizione di funzioni

Siano f e g due funzioni (qualsiasi) e sia

$$A := \{x \in \mathrm{dom}(f) \;:\; f(x) \in \mathrm{dom}(g)\}.$$

Se A è non vuoto, definiamo la funzione composta di f e g, che denotiamo con $g \circ f$, ponendo

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Osservazioni

- In generale, $\mathrm{dom}(g \circ f) \subseteq \mathrm{dom}(f)$.
- L'uguaglianza $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ vale se l'immagine di f è contenuta nel dominio di g.

Esempi

Determinare (se possibile) $g \circ f$ e $f \circ g$, specificandone il dominio:

1. $f(x) = x + 1 \qquad g(x) = |x|$
2. $f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

Nota

Gli esempi mostrano che la composizione tra funzioni non commuta.

Problema 1 (simmetria / operazioni e composizione)

1. Siano f e g funzioni pari (nei propri domini).
   Cosa si può dire sulle funzioni $f+g$, $f-g$, $f\,g$, f/g, $f \circ g$?
2. Come sopra, supponendo che f e g siano dispari.
3. Come sopra, supponendo che f sia pari e g sia dispari.

Problema 2 (monotonia / composizione)

1. Siano f e g funzioni crescenti (nei propri domini).
   Cosa si può dire sulla funzione $f \circ g$?
2. Come sopra, supponendo che f e g siano decrescenti.
3. Come sopra, supponendo che f sia crescente e g sia decrescente.

Problema 3 (monotonia / operazioni)

Stabilire* se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. Se f è crescente (nel proprio dominio), la funzione opposta $-f$ è decrescente (nel proprio dominio).
2. Se f è crescente, la funzione reciproca $1/f$ è decrescente.
3. Se f è crescente e ha segno costante, la funzione reciproca $1/f$ è decrescente.
4. Se f e g sono crescenti, la funzione somma $f+g$ è crescente.
5. Se f e g sono crescenti, la funzione prodotto $f\,g$ è crescente.
6. Se f e g sono positive e crescenti, la funzione prodotto $f\,g$ è positiva e crescente.
7. Se f e g sono negative e crescenti, la funzione prodotto $f\,g$ è positiva e decrescente.

* Significa dimostrare l'affermazione, se vera; fornire un controesempio, se falsa.

1/04

Trasformazioni di grafici – Composizioni "notevoli"

Componendo con particolari funzioni, possiamo definire le nozioni di

- traslazione
- riscalamento (dilatazione e contrazione)
- riflessione

di una data funzione f.

Non è restrittivo supporre $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. Se così non fosse, potremmo sostituire a f la funzione

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathrm{dom}(f) \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathrm{dom}(f) \end{cases}$$

Traslazioni

Per $c \in \mathbb{R}^*$, definiamo la funzione traslazione

$$T_c(x) := x + c \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo le funzioni composte

$$g := T_c \circ f, \qquad h := f \circ T_c.$$

Esplicitando:

$$g(x) = f(x) + c, \qquad h(x) = f(x + c)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Qual è il legame tra il grafico di f e quelli di g e h?

* g(x)

** f(x)

-/03

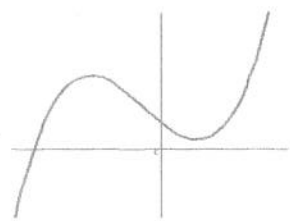
Trasformazioni di grafici – Passaggio al reciproco

Come si ottiene il grafico di $g := 1/f$ a partire da quello di f?

Occorre tener presente che:

- g è definita in tutti i punti in cui f è definita e diversa da 0 (in simboli: $\mathrm{dom}(g) = \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq 0\}$);
- g non assume mai il valore 0;
- g è positiva dove f è positiva, negativa dove f è negativa;
- se in un intervallo f ha segno costante ed è crescente [decrescente], nel medesimo intervallo g ha lo stesso segno di f ed è decrescente [crescente].

Esempio
La funzione f ha il grafico indicato a lato.
Tracciare approssimativamente il grafico di $1/f$.



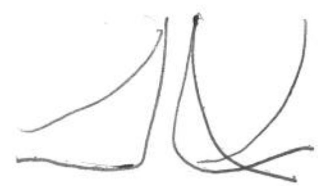
-/03

Funzione potenza con esponente intero negativo

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Per $x \neq 0$ poniamo

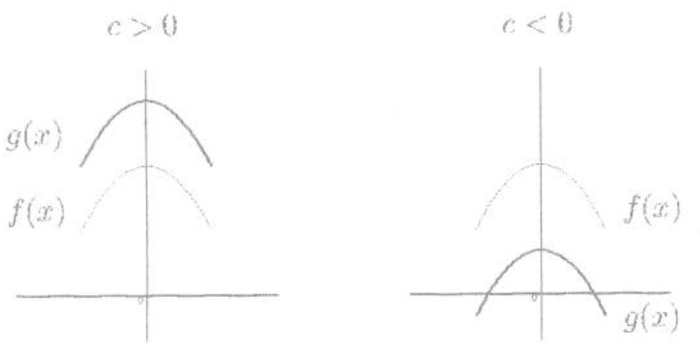
$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} \quad \left(= (x^n)^{-1}\right).$$

Grafico per n pari? Grafico per n dispari?



Il grafico di $g(x) = f(x) + c$ si ottiene traslando verticalmente il grafico di f di una quantità pari a $|c|$ verso

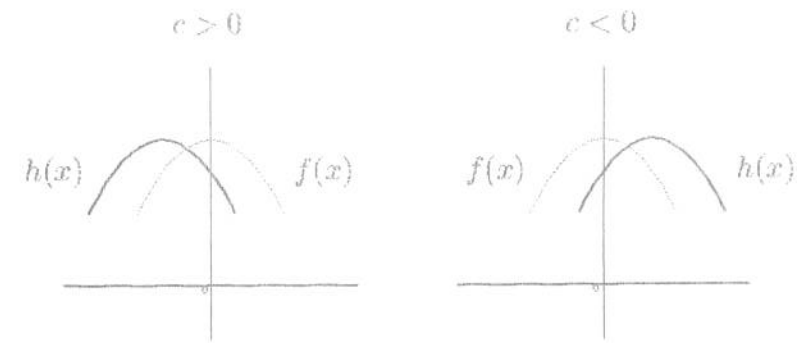
- l'alto se c è positivo;
- il basso se c è negativo.



Esempio. A partire dal grafico di $f(x) = x^2$, disegnare i grafici di $g_1(x) = x^2 + 1$, $g_2(x) = x^2 - 1$.
Disegnare poi i grafici delle rispettive funzioni reciproche.

Il grafico di $h(x) = f(x + c)$ si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di una quantità pari a $|c|$ verso

- sinistra se c è positivo;
- destra se c è negativo.

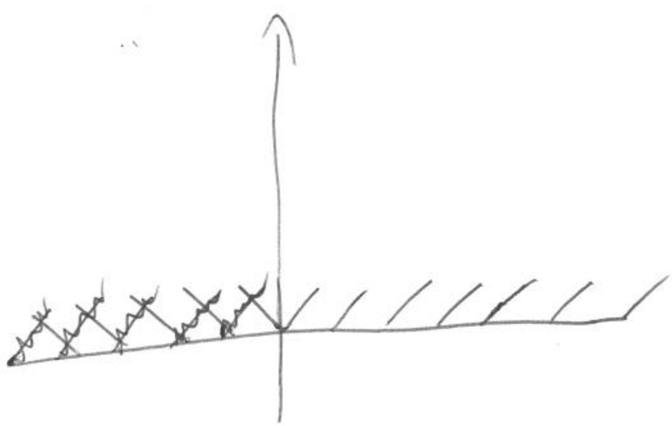


Esempio. A partire dal grafico di $f(x) = x^2$, disegnare i grafici di $h_1(x) = (x + 1)^2$, $h_2(x) = (x - 1)^2$.
Disegnare poi i grafici delle rispettive funzioni reciproche.

Problema

Sia f la funzione mantissa ($f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).
Siano $h_1(x) = f(x+1)$ e $h_2(x) = f(x-1)$.
Cosa si può dire dei grafici di h_1 e h_2, rispetto al grafico di f?
Generalizzare al caso di una generica funzione periodica.

graf (h_1) = graf (f) = graf (h_2)



Riscalamenti

Per $c > 0$, $c \neq 1$, definiamo la funzione riscalamento

$$S_c(x) := c\,x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo le funzioni composte

$$g := S_c \circ f, \quad h := f \circ S_c.$$

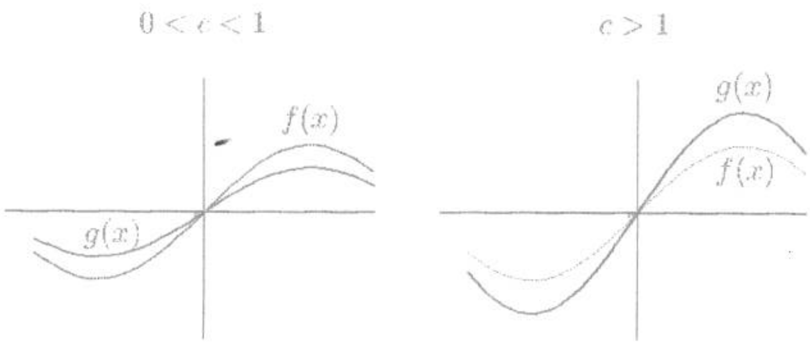
Esplicitando: $$g(x) = c\,f(x), \quad h(x) = f(c\,x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Qual è il legame tra il grafico di f e quelli di g e h?

Il grafico di $g(x) = c\,f(x)$ si ottiene da quello di f

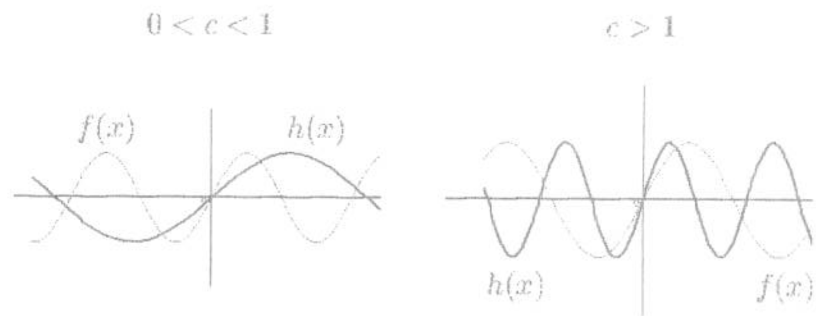
- comprimendolo verticalmente se $0 < c < 1$
- dilatandolo verticalmente se $c > 1$



Esempio. A partire dal grafico di $f(x) = x^2 - 1$, disegnare i grafici di $g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$ e di $g_2(x) = 3(x^2 - 1)$.

Il grafico di $h(x) = f(c\,x)$ si ottiene da quello di f

- dilatandolo orizzontalmente se $0 < c < 1$
- comprimendolo orizzontalmente se $c > 1$



Esempio. A partire dal grafico di $f(x) = x^2 - 1$, disegnare i grafici di $h_1(x) = \frac{x^2}{9} - 1$ e di $h_2(x) = 9x^2 - 1$.

Riflessioni rispetto agli assi

Definiamo la funzione

$$R(x) := -x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo le funzioni composte

$$g := R \circ f, \quad h := f \circ R.$$

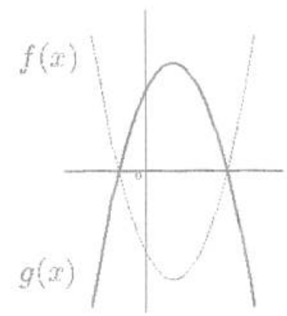
Esplicitando: $$g(x) = -f(x), \quad h(x) = f(-x)$$

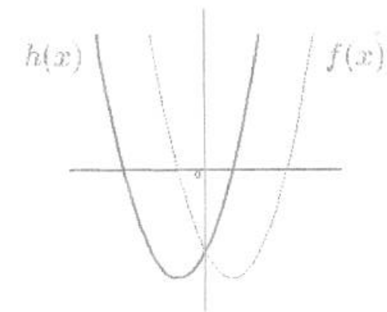
per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Qual è il legame tra il grafico di f e quelli di g e h?

Il grafico di $g(x) = -f(x)$ si ottiene da quello di f riflettendolo specularmente rispetto all'asse delle ascisse.

Il grafico di $h(x) = f(-x)$ si ottiene da quello di f riflettendolo specularmente rispetto all'asse delle ordinate.





Esempio. A partire dal grafico di $f(x) = x^3 + 1$, disegnare i grafici di $g(x) = -(x^3 + 1)$ e di $h(x) = -x^3 + 1$.

Problema

Esistono funzioni il cui grafico resta inalterato rispetto a una riflessione rispetto all'asse delle ordinate? E rispetto all'asse delle ascisse? Motivare le risposte.

TUTTE LE FUNZIONI PARI

NO NON ESISTONO
xké se no contraddirebbero
il test delle rette verticali

Composizione con il valore assoluto

Poniamo $$M(x) := |x| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo le funzioni composte
$$g := M \circ f, \quad h := f \circ M.$$

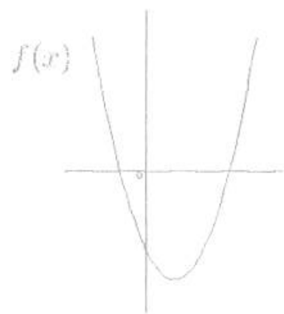
Esplicitando: $$g(x) = |f(x)|, \quad h(x) = f(|x|)$$

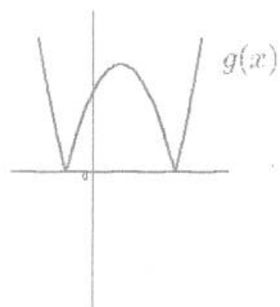
per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Qual è il legame tra il grafico di f e quelli di g e h?

Il grafico di $g(x) = |f(x)|$ si ottiene da quello di f

- lasciando inalterate le parti che si trovano al di sopra dell'asse delle ascisse
- riflettendo specularmente rispetto all'asse delle ascisse le parti che si trovano al di sotto di tale asse.

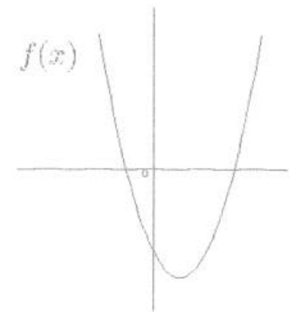


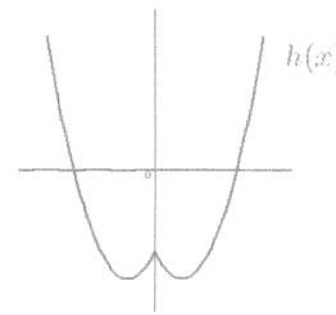


Esempio. A partire dal grafico di $f(x) = x^3 - 1$, disegnare il grafico di $g(x) = |x^3 - 1|$.

Il grafico di $h(x) = f(|x|)$ si ottiene da quello di f

- lasciando inalterate le parti che si trovano a destra dell'asse delle ordinate
- riflettendo specularmente rispetto all'asse delle ordinate le parti che si trovano a ~~destra~~ sinistra di tale asse.





Esempio. A partire dal grafico di $f(x) = x^3 - 1$, disegnare il grafico di $h(x) = |x|^3 - 1$.

CASA

Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni

Siano f e g due funzioni reali definite in un intervallo I.

- Risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$ significa determinare le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico di f e il grafico di g.
  Pertanto occorre:
  - tracciare i grafici di f e g
  - individuarne i punti di intersezione
  - proiettare tali punti sull'asse x
- Risolvere la disequazione $f(x) > g(x)$ significa determinare le ascisse in corrispondenza delle quali i punti sul grafico di f si trovano al di sopra dei punti sul grafico di g. Pertanto occorre:
  - tracciare i grafici di f e g
  - individuarne i punti di intersezione
  - individuare tutti i punti sul grafico di f che si trovano al di sopra del grafico di g
  - proiettare tali punti sull'asse x

Esempio: risolvere graficamente $x^2 = x + 3$, $x^2 > x + 3$, $x^2 < x + 3$.

ΔA

Esempi

Per ciascuna delle seguenti funzioni, disegnare un grafico approssimativo utilizzando i grafici delle funzioni elementari e le trasformazioni.
Risolvere con l'aiuto del grafico le disequazioni indicate.

(1) $f(x) = |3x^2 - 5x + 2|$ $\qquad \frac{1}{3} \leq f(x) < 3$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ $\qquad -1 < f(x) \leq 2$

ΔAA

— 4-U 2/04 F

4

a.a. 2007/08

Laurea triennale in Informatica (corso A)

Analisi matematica

Successioni numeriche

Avvertenza

Questi sono appunti "informali" delle lezioni, che vengono resi disponibili per comodità degli studenti. Parte del materiale presentato è tratto dai libri di testo consigliati, la cui consultazione è vivamente incoraggiata.

Successioni numeriche

Si chiama *successione numerica* ogni funzione reale definita in un insiem del tipo $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, con n_0 intero naturale.

Per esempio, la relazione $f(x) = x^2, \ x \in [1, +\infty)$, definisce una funzione; la relazione $f(x) = x^2, \ x \in \mathbb{N}$, definisce una successione.

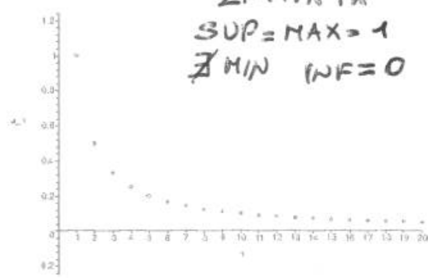
Parlando di successioni, solitamente denotiamo

- la variabile indipendente con n
- il valore che la successione assume in un intero n con il simbolo a_n (oppure $b_n, x_n, \dots$), chiamato termine n-esimo della successione
- l'immagine della successione con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Il grafico di una successione è costituito da infiniti punti isolati di coordinate (n, a_n), con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

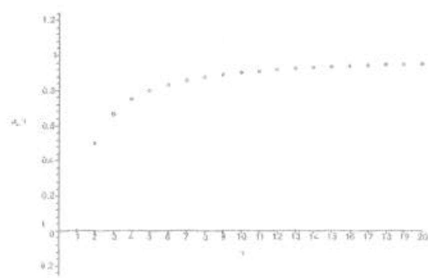
Esempi di successioni numeriche

(1) $a_n = \frac{1}{n}$



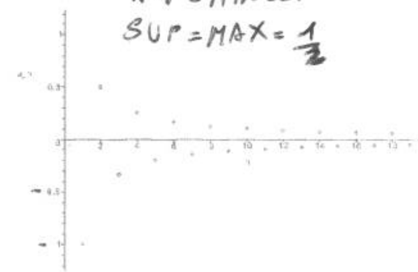
LIMITATA
SUP = MAX = 1
∄ MIN   INF = 0

(2) $a_n = \frac{n-1}{n}$



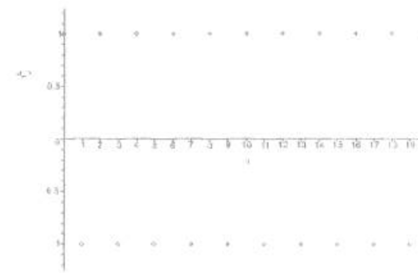
LIMITATA
SUP = 1   ∄ MAX
MIN = INF = 0

(3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$



LIMITATA
INF = MIN = -1
SUP = MAX = $\frac{1}{2}$

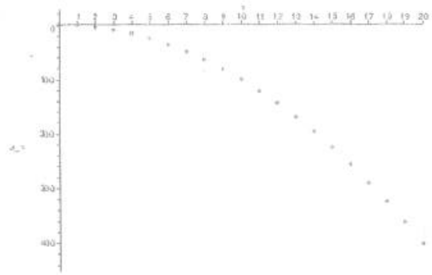
(4) $a_n = (-1)^n$



?

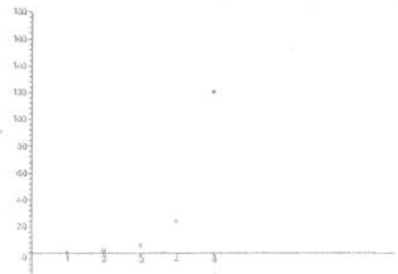
LIMITATA SUPERIORMENTE
SUP = MAX = -1
INF = -∞ ∄ MIN

(5) $a_n = -n^2$



(6) $a_n = n!$

LIMITATA INFERIORMENTE
INF = MIN = 1
SUP = +∞ ∄ MAX



Prolungamento di una successione

Diciamo che una funzione f è un prolungamento della successione a_n se f è definita nell'intervallo $[n_0, +\infty)$ e si ha

$$f(n) = a_n \quad \text{per ogni } n \geq n_0 .$$

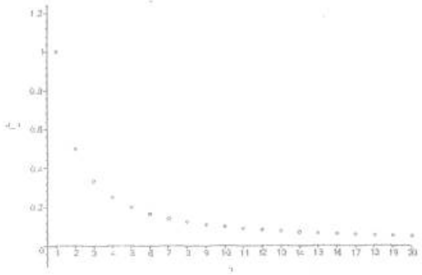
Esempi

1. La funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 1/x$ è un prolungamento della successione $a_n = 1/n$, ottenuto in modo "naturale", ossia sostituendo la variabile discreta n con la variabile continua x.

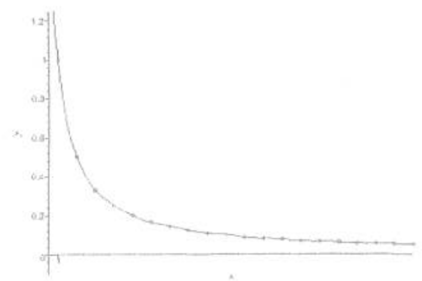
2. La successione $a_n = (-1)^n$ non ammette prolungamento "naturale". (Perché?)

Tuttavia essa ammette prolungamento; per esempio, la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \cos(\pi x)$.

Successione $a_n = 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$



Funzione $f(x) = 1/x$, con $x \in [1, +\infty)$



Successioni limitate

Dato che ogni successione è una funzione, ha senso parlare di successio

- limitate inferiormente
- limitate superiormente
- limitate

nonché di

- estremo inferiore ed estremo superiore
- minimo e massimo

di una successione.

Esercizio

Stabilire per ognuna delle successioni (1)–(6) se è limitata e determinar
estremo inferiore e superiore, precisando se sono minimo e massimo.

Successioni monotone

Rileggendo la definizione di funzione monotona nel caso di una successione otteniamo, per esempio, che una successione è crescente se per ogni m, n interi, con $m < n$, si ha $a_m \leq a_n$.

In realtà, per verificare se una successione è monotona basta confrontare tra loro termini consecutivi.

Precisamente, una successione $\{a_n\}$ è

- crescente se e solo se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n
- strettamente crescente se e solo se $a_n < a_{n+1}$ per ogni n
- decrescente se e solo se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni n
- strettamente decrescente se e solo se $a_n > a_{n+1}$ per ogni n

Esempi

Studiare la monotonia delle successioni

$$(1)\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad (3)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad (5)\quad a_n = -n^2$$

$$(2)\quad a_n = \frac{n-1}{n} \qquad (4)\quad a_n = (-1)^n \qquad (6)\quad a_n = n!$$

Osservazioni

Se la funzione prolungamento di una successione è monotona, anche la successione lo è. VALE IL VICEVERSA? NO

Si potrebbe erroneamente pensare che la presenza del termine "oscillante" $(-1)^n$ implichi mancanza di monotonia. Non è detto che sia così, come mostra, per esempio, la successione $a_n = n + (-1)^n/n$. Verificare

Per "farsi un'idea" dell'andamento di una successione è utile esplicitarne i primi termini; tuttavia, ciò non è sufficiente a stabilire che la successione sia monotona. Esempio: $a_n = 10^n/n!$ Vedi pagina seguente

n	$10^n/n!$	n	$10^n/n!$
1	10.00	11	2505.21
2	50.00	12	2087.68
3	166.67	13	1605.90
4	416.67	14	1147.07
5	833.33	15	764.72
6	1388.98	$\vdots$	$\vdots$
7	1984.13	20	41.10
8	2480.16	$\vdots$	$\vdots$
9	2755.73	25	0.64
10	2755.73	$\vdots$	$\vdots$

Nota: i valori di $a_n := 10^n/n!$ sono arrotondati alla seconda cifra decimale

Proprietà vere definitivamente

Una proprietà P_n è vera definitivamente se è vera per tutti gli n sufficientemente grandi, cioè se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che la proprietà P_n sia vera per ogni $n \geq \nu$.

Esempio

Stabilire* se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. I termini della successione $\{n-5\}$ sono definitivamente positivi.
2. I termini della successione $\{(-1)^n\}$ sono definitivamente positivi.
3. I termini della successione $\{n^2\}$ sono definitivamente minori di 2
4. La successione $\{n^4/4^n\}$ è definitivamente decrescente.

* Significa dimostrare l'affermazione, se vera; fornire un controesempio, se falsa.

03/04

Successioni infinitesime

Si dice che la successione $\{a_n\}$ è infinitesima se per ogni $\varepsilon > 0$ la disuguaglianza

$$|a_n| < \varepsilon$$

è vera definitivamente.

Osservazioni

La successione costante $\{a_n\}$ con $a_n \equiv 0$ è banalmente infinitesima.

La successione $\{a_n\}$ è infinitesima se e solo se la successione $\{|a_n|\}$ è infinitesima.

Ricordando il significato della locuzione "definitivamente", possiamo dire che la successione $\{a_n\}$ è infinitesima se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che la disuguaglianza

$$|a_n| < \varepsilon \qquad (*)$$

è vera per ogni $n \geq \nu$. Notiamo inoltre che $(*)$ è equivalente a

$$-\varepsilon < a_n < \varepsilon.$$

Strategia per l'utilizzo della definizione di successione infinitesima

Per verificare che la successione $\{a_n\}$ è infinitesima, occorre fissare un arbitrario $\varepsilon > 0$ e "manipolare" la disuguaglianza $|a_n| < \varepsilon$ per determinare un numero ν_ε (che in generale dipende da ε) tale che la disuguaglianza sia soddisfatta per $n \geq \nu_\varepsilon$.

Per verificare che la successione $\{a_n\}$ non è infinitesima, occorre determinare uno specifico $\varepsilon > 0$ per il quale si riescono a trovare interi n arbitrariamente grandi per i quali la disuguaglianza $|a_n| < \varepsilon$ non è soddisfatta.

Esempi

1. Verificare che la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è infinitesima.
   Valutare ν_ε per $\varepsilon = 1/2$, $\varepsilon = 1/10$, $\varepsilon = 1/100$.
2. Verificare che la successione $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ è infinitesima.
   Valutare ν_ε per $\varepsilon = 1/2$, $\varepsilon = 1/10$, $\varepsilon = 1/100$.
3. Verificare che la successione $\{(-1)^n\}$ non è infinitesima.

Interpretazione grafica

Denotiamo con S_ε la striscia orizzontale delimitata inferiormente dalla retta di equazione $y = -\varepsilon$ e superiormente dalla retta di equazione $y =$

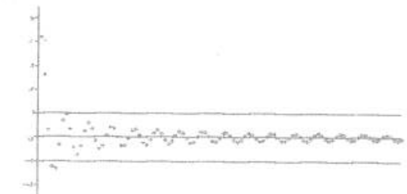
La relazione $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ significa che il punto (n, a_n) si trova nella striscia S_ε.

Pertanto:
la successione $\{a_n\}$ è infinitesima se e solo se, fissato un qualsiasi $\varepsilon >$ da un certo punto in poi i punti del grafico si trovano nella striscia S_ε.

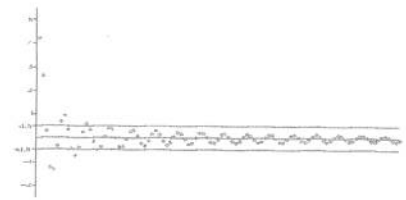
La frase "da un certo punto in poi" significa "per n maggiore o uguale un opportuno intero ν_ε".
In generale, più piccolo è ε e più grande è ν_ε.

Successione infinitesima

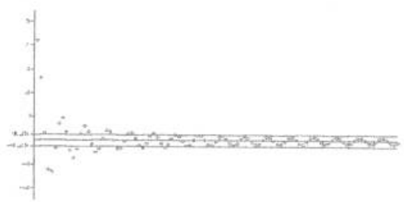
$\varepsilon = 1 \qquad \nu_\varepsilon = 6$



$\varepsilon = 0.5 \qquad \nu_\varepsilon = 18$

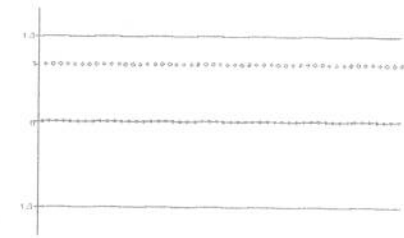


$\varepsilon = 0.25 \qquad \nu_\varepsilon = 56$

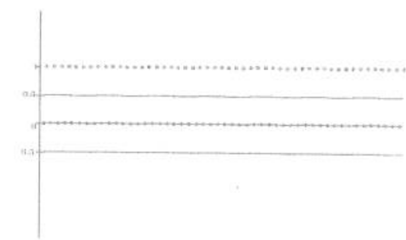


Successione non infinitesima

Per ε "grande" i punti si trovano tutti nella striscia …



… ma per ε "piccolo" non è vero che definitivamente i punti si trovano nella striscia!



Successioni infinitesime fondamentali

$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ $\quad p > 0$

$\{a^n\}$ $\quad |a| < 1$

$\{n^p a^n\}$ $\quad p \in \mathbb{R},\ |a| < 1$ $\qquad \left[\left\{\frac{n^p}{a^n}\right\} \quad p \in \mathbb{R},\ |a| > 1\right]$

$\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$\left\{\frac{n^p}{n!}\right\}$ $\quad p \in \mathbb{R}$

$\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$

Successioni convergenti

Si dice che la successione $\{a_n\}$ è convergente se esiste un numero reale a tale che la successione $\{a_n - a\}$ sia infinitesima.

In tal caso si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oppure $a_n \to a$ per $n \to \infty$.

Le seguenti locuzioni sono equivalenti:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \text{ converge ad } a \\ a_n \text{ tende ad } a \\ a \text{ è il limite di } a_n \end{array}\right\} \text{ per } n \text{ che tende a infinito.}$$

(Nota: si scrive $n \to \infty$ ma si intende $n \to +\infty$.)

Osservazioni

Una successione converge a 0 se e solo è infinitesima.

La successione costante $a_n \equiv a$ converge ad a.

Esempio

Verificare che la successione $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ converge a 1.

Interpretazione grafica

Osservazione
La successione $\{a_n\}$ converge ad a se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ la relazione

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

o, equivalentemente,

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad (*)$$

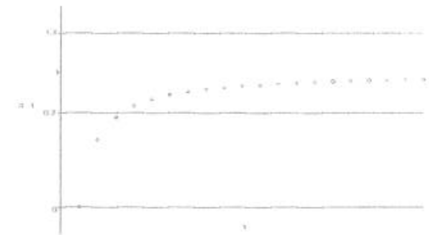
è vera definitivamente.

Da un punto di vista grafico, la relazione $(*)$ significa che il punto (n, a_n) si trova nella striscia $S_{a,\varepsilon}$ delimitata inferiormente dalla retta di equazione $y = a - \varepsilon$ e superiormente dalla retta di equazione $y = a + \varepsilon$.

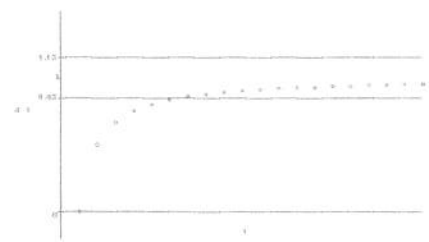
Pertanto, la successione $\{a_n\}$ converge ad a se e solo se, fissato $\varepsilon > 0$, da un certo punto in poi i punti del grafico si trovano nella striscia $S_{a,\varepsilon}$. Come già osservato, la frase "da un certo punto in poi" significa "per n maggiore o uguale di un opportuno intero ν_ε". In generale, più piccolo è ε e più grande è ν_ε.

Successione convergente

$\varepsilon = 0.3 \qquad \nu_\varepsilon = 4$



$\varepsilon = 0.15 \qquad \nu_\varepsilon = 8$



Osservazione

Se una successione converge ad a è corretto dire che a è il limite di a_n in virtù del seguente

Teorema (Unicità del limite)
Una successione non può convergere a più di un limite.

Dimostrazione "grafica" ...

Osservazione
Una successione convergente è limitata.
Il viceversa è falso, ossia esistono successioni limitate che non convergono. Esempio: $\{(-1)^n\}$

Successioni divergenti positivamente

Si dice che la successione $\{a_n\}$ diverge positivamente se per ogni $M > 0$ la relazione

$$a_n > M$$

è vera definitivamente.

In tal caso si scrive

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

o anche

$$a_n \to +\infty \quad \text{per } n \to \infty .$$

Le seguenti locuzioni sono equivalenti:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \text{ diverge positivamente} \\ a_n \text{ tende a più infinito} \\ \text{più infinito è il limite di } a_n \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{per } n \text{ che tende} \\ \text{a infinito.} \end{array}$$

Successioni divergenti negativamente

Si dice che la successione $\{a_n\}$ diverge negativamente se per ogni $M > 0$ la relazione

$$a_n < -M$$

è vera definitivamente.

In tal caso si scrive

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

o anche

$$a_n \to -\infty \qquad \text{per } n \to \infty .$$

Le seguenti locuzioni sono equivalenti:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \text{ diverge negativamente} \\ a_n \text{ tende a meno infinito} \\ \text{meno infinito è il limite di } a_n \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{per } n \text{ che tende} \\ \text{a infinito.} \end{array}$$

Interpretazione grafica

La relazione $a_n > M$ significa che il punto (n, a_n) si trova nel semipiano delimitato inferiormente dalla retta di equazione $y = M$.

Pertanto:
la successione $\{a_n\}$ diverge positivamente se e solo se, scelto a piacere $M > 0$, da un certo punto in poi i punti del grafico cadono al di sopra della retta $y = M$.

Analogamente:
la successione $\{a_n\}$ diverge negativamente se e solo se, scelto a piacere $M > 0$, da un certo punto in poi i punti del grafico cadono al di sotto dell retta $y = -M$.

La frase "da un certo punto in poi" significa "per n maggiore di un opportuno intero ν_M"; in generale, più grande è M e più grande è ν_M.

Osservazione
Una successione che diverge positivamente [negativamente] è illimitata superiormente [inferiormente].

Esempi

(1) Verificare che la successione $a_n = n^3$ diverge positivamente.
Valutare ν_M per $M = 10$, $M = 100$, $M = 1000$.
Interpretare graficamente quanto ottenuto.

(2) Verificare che la successione $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ non diverge positivamente.

Successioni regolari

Una successione si dice regolare se ammette limite in $\overline{\mathbb{R}}$.

In altre parole, una successione è regolare se ammette limite finito (nel qual caso è convergente) oppure infinito (nel qual caso è divergente

Una successione non regolare è anche detta indeterminata.

Esempio: $\{(-1)^n\}$

Teorema (Regolarità delle successioni monotone)

Ogni successione monotona è regolare. Precisamente:

(1) se la successione $\{a_n\}$ è crescente si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$;

(2) se la successione $\{a_n\}$ è decrescente si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$.

Dimostrazione di (1) ...

Corollario

Una successione monotona e limitata è convergente.

Una successione monotona e non limitata è divergente.

Osservazioni

1. La monotonia è una condizione sufficiente ma non necessaria affinché una successione sia regolare. Per esempio, la successione $a_n = (-1)^n/n$ non è monotona e tuttavia converge a 0.

2. Se una successione è definitivamente monotona, essa è regolare; non è detto però che il limite coincida con l'estremo superiore [inferiore] se la successione è definitivamente crescente [decrescente].

Progressione geometrica

Sia $q \in \mathbb{R}$; la successione $\{q^n\}$ è detta progressione geometrica di ragione q.

Essa è regolare se $q > -1$, non regolare se $q \leq -1$.

Precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \\ 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \end{cases}$$

Verifica...

Una successione definita per ricorrenza

Definiamo la successione $\{a_n\}$ ponendo

$$\begin{cases} a_1 & = & 2 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

Proviamo che

- $1 \le a_n \le 2$ per ogni n,
- $\{a_n\}$ è strettamente decrescente.

Per il Teorema RSM, $\{a_n\}$ converge a $a \in [1, 2]$; quanto vale a?

Una speciale successione monotona

Sia $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Si può dimostrare (non lo facciamo!) che

- $\{a_n\}$ è strettamente crescente;
- $\{a_n\}$ è limitata superiormente.

Per il Teorema RSM, $\{a_n\}$ è convergente; il suo limite è il numero di Nepero (o anche numero di Eulero)

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$