Esercizio 4.4

Dimostrare che il seguente linguaggio

$$L = \left\{ a^k b^r \mid k > 0,\ r > k^2 \right\}$$

non è libero.

Analizziamo le parole che costituiscono *L*:

$$L = \{ ab^2, ab^3, ab^4, \ldots \\ a^2b^5, a^2b^6, a^2b^7, \ldots \\ a^3b^{10}, a^3b^{11}, a^3b^{12}, \ldots \}$$

Supponiamo, per assurdo, che *L* sia libero da contesto.

Per il Pumping Lemma sui linguaggi liberi, esiste un numero naturale *p*, dipendente da *L*, tale che, se $z \in L,\ |z| > p$, allora:

$$z = uvwxy$$

(1) $|vwx| \le p$;

(2) $vx \ne \lambda$;

(3) $uv^iwx^iy \in L,\ \forall\ i \ge 0$.

Consideriamo la parola:

$$z = a^p b^{p^2+1}$$

$z \in L$ ed inoltre $|z| = p + p^2 + 1 > p$.

Per il Pumping Lemma, possiamo scrivere:

$$z = uvwxy.$$

Per la sottostringa *vwx* si hanno le seguenti possibilità:

(i) *vwx* è formata da sole *a*;

(ii) *vwx* è formata da sole *b*;

(iii) *vwx* è a cavallo tra *a* e *b*.

Nel caso (i), per la (1) e la (2) del Pumping Lemma, si ha:

$$0 < |vwx| \le p \qquad \text{e} \qquad 0 < |vx| \le p$$

Dunque *vwx* è formata da almeno una *a* ed al più *p a*. Consideriamo la parola:

$$uv^2wx^2y.$$

Tale parola ha almeno una ed al più *p a* in più di *z*. Dunque, uv^2wx^2y ha almeno $p+1$ *a* (ed al più $2p$ *a*), mentre il numero delle *b* non è mutato. Ossia, denotato con $\#(x)$ il numero di occorrenze del simbolo *x* nella parola uv^2wx^2y:

$$p + 1 \le \#(a) \le 2p \qquad \text{e} \qquad \#(b) = p^2 + 1$$

Ma questo vuol dire che:

$$\#(b) = p^2 + 1 < (p+1)^2 \le \#(a)^2 \le 4p^2$$

Dunque $r < k^2$ e $uv^2wx^2y \notin L$.

Nel caso (ii), *vwx* è formata da almeno una *b* ed al più *p b*. Consideriamo la parola:

$$uv^0wx^0y.$$

Tale parola ha almeno una ed al più *p b* in meno di *z*, in quanto per la (1) e la (2) del Pumping Lemma:

$$0 < |vwx| \leq p.$$

Dunque, uv^0wx^0y ha al più p^2 *b* (ed almeno $p^2 + 1 - p$ *b*), mentre il numero delle *a* non è cambiato. Quindi si ha che:

$$p^2 - p + 1 \leq \#(b) \leq p^2 \qquad \text{e} \qquad \#(a) = p$$

da cui:

$$\#(b) \leq \#(a)^2 = p^2.$$

Dunque si ha $r \leq k^2$ e $uv^0wx^0y \notin L$.

Nel caso (iii), *vwx* è formata sia da *a* sia da *b* e

$$0 < \#(a) + \#(b) \leq p$$

poiché per le (1) e (2) del Pumping Lemma:

$$0 < |vwx| \leq p$$

Se $v \neq \lambda$, allora *v* contiene solo *a* (altrimenti v^i, $i > 1$, conterrebbe delle *a* alternate a delle *b*). Analogamente, se $x \neq \lambda$ allora *x* contiene solo *b*.

Dunque, ci sono tre possibilità:

(iii.a) $v \neq \lambda$, $x = \lambda$;

(iii.b) $v = \lambda$, $x \neq \lambda$;

(iii.c) $v \neq \lambda$, $x \neq \lambda$.

Nel caso (iii.a), consideriamo la parola uv^2wx^2y. Come nel caso (i), tale parola ha almeno una *a* in più, rispetto a *z* (ed al più $p - 1$ *a* in più di *z*, poiché ci deve essere almeno una *b* in *vwx* e questa deve essere necessariamente in *w*).

Il numero delle *b* in uv^2wx^2y non è mutato. Si ha che:

$$p + 1 \leq \#(a) \leq p + p - 1 = 2p - 1 \qquad \text{e} \qquad \#(b) = p^2 + 1$$

e quindi poiché:

$$\#(b) = p^2 + 1 < (p+1)^2 \leq \#(a)^2$$

si ha che:

$$uv^2wx^2y \notin L.$$

Nel caso (iii.b), consideriamo la parola uv^0wx^0y. Come nel caso (ii), tale parola ha almeno una b in meno rispetto a z (ed al più $p-1$ b in meno di z, poiché ci deve essere almeno una a in vwx e questa deve essere necessariamente in w), mentre il numero delle a in uv^0wx^0y non cambia. Si ha che:

$$p^2+1-(p-1) \leq \#(b) \leq p^2 \qquad \text{e} \qquad \#(a)=p$$

e quindi poiché:

$$\#(b) \leq \#(a)^2 = p^2$$

si ha che:

$$uv^0wx^0y \notin L \; .$$

Nel caso (iii.c), consideriamo la parola uv^2wx^2y.

Poiché $v \neq \lambda$, v contiene almeno una a. Dunque v^2 contiene almeno due a e uv^2wx^2y contiene almeno $p+1$ a.

Ma:

$$\left|uv^2wx^2y\right| = |uvwxy| + |vx| = |z| + |vx| \leq |z| + |vwx| \leq p + p^2 + 1 + p = p^2 + 2p + 1 =$$
$$= (p+1)^2 < p+1+(p+1)^2+1$$

Dunque uv^2wx^2y ha almeno $p+1$ a, ma la sua lunghezza è strettamente minore della lunghezza della parola di L con almeno $p+1$ a e di lunghezza minima. Ne consegue che:

$$uv^2wx^2y \notin L \; .$$

In ciascuno dei casi (e sottocasi di) (i), (ii) e (iii) risulta violata la (3) del Pumping Lemma per i linguaggi liberi.

Assurdo.

L'assurdo deriva dall'aver assunto L libero da contesto. Dunque L non è un linguaggio libero.