Capitolo 101

Geometria analitica

101.1 Introduzione

101.1.1 Retta reale

Su una retta r fissiamo un punto O; dunque la retta r risulta suddivisa in due semirette.

Ora fissiamo sulla retta un secondo punto, distinto da O e denotato con U; indichiamo con r_+ (risp. r_-) la semiretta che contiene (risp. non contiene) U.

Ad ogni $P \in r$ associamo un numero $x_P \in \mathbf{R}$, detto *ascissa del punto* P:

$$P \in r \mapsto x_P \in \mathbf{R} \tag{101.1}$$

- se $P \in r_+$, il numero x_P è la lunghezza del segmento **OP** rispetto all'unità di misura data dal segmento **OU**;
- se $P \in r_-$, il numero x_P è l'opposto della lunghezza del segmento **OP** rispetto all'unità di misura data dal segmento **OU**.

Osserviamo che ai punti di r_+ si associano numeri positivi, mentre ai punti di r_- si associano numeri negativi. In particolare risulta che

$$\begin{aligned} x_O &= 0, \\ x_U &= 1. \end{aligned}$$

La funzione (101.1) nasconde molti problemi, affrontati sin dall'antichità, su cui torneremo in seguito. Per il momento ci limitiamo ad osservare che la procedura di misurazione sembra proprio suggerire la nozione di allineamento decimale.

La funzione (101.1) è una bigezione: non solo ad ogni punto corrisponde un numero, ma ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta.

Introdotta questa bigezione, numeri reali e punti della retta r si considerano perfettamente identificati e l'insieme $\mathbf{R}$ talvolta viene denominato *retta reale*.

Osservazione:

- $|x - y|$ rappresenta la distanza tra i punti x ed y;
- $|x| = |x - 0|$ rappresenta la distanza del punto x dall'origine.

101.1.2 Piano cartesiano

Abbiamo introdotto la bigezione tra l'insieme $\mathbf{R}$ e una retta. Consideriamo ora il prodotto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ossia l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Tale insieme può essere messo in bigezione con i punti del piano Π.

Sul piano Π fissiamo due rette perpendicolari, dette *assi cartesiani*, r_x ed r_y. Su ciascun asse fissiamo l'origine nel punto di intersezione, quindi fissiamo un verso ed un'unità di misura.

Ad ogni punto $P \in \Pi$ si associa una coppia di punti sugli assi, le proiezioni ortogonali $P_x \in r_x, P_y \in r_y$. Poichè ciascun asse è identificabile con l'insieme $\mathbf{R}$, possiamo considerare le funzioni composte:

$$\begin{aligned} P &\in \Pi \mapsto P_x \in r_x \mapsto x_P \in \mathbf{R} \\ P &\in \Pi \mapsto P_y \in r_y \mapsto y_P \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

I numeri reali x_P e y_P prendono rispettivamente il nome di *ascissa ed ordinata del punto P*; ascissa ed ordinata di P si dicono anche *coordinate del punto P*.

Esattamente come nel caso della retta, l'applicazione

$$P \in \Pi \mapsto (x_P, y_P) \in \mathbf{R}^2$$

è una bigezione.

Per *piano cartesiano* si intende il piano Π munito di un sistema di assi cartesiani, in modo che a ciascun punto si associ la coppia delle coordinate.

101.1.3 Metodi analitici per la geometria

L'uso delle coordinate in geometria si è andato via via affermando, dall'antichità fino a giungere a Fermat e Cartesio, nella prima metà del Seicento.

Dopo aver stabilito una corrispondenza tra punti e numeri, in quest'epoca si perfeziona una corrispondenza tra insiemi di punti ed equazioni. In sostanza ai tradizionali sottoinsiemi del piano (luoghi geometrici) $\mathcal{C} \subset \Pi$ si associa un'equazione (algebrica) $f(x, y) = 0$ in modo che risulti

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{C} &\implies f(x_P, y_P) = 0, \\ f(x, y) = 0 &\implies P_{(x,y)} \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Osservazione 101.1 *Ovviamente l'associazione tra luoghi geometrici ed equazioni non è univoca. Ad esempio è evidente che se*

$$g(x, y) = a\, f(x, y)$$

con $a \neq 0$, allora le equazioni

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

identificano lo stesso luogo geometrico.

È questa la "geometria analitica", una metodologia algebrica per risolvere problemi di geometria. Ad esempio se vogliamo determinare il numero di intersezioni tra due luoghi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, sarà sufficiente determinare le soluzioni del sistema costituito dalle due corrispondenti equazioni

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

101.1.4 Digressione storica e revisione concettuale

All'inizio si è detto che la definizione della funzione (101.1) nasconde molti problemi.

Anzitutto vi è un problema quasi invisibile, stiamo adottando una terminologia geometrica: punto, retta, segmento, piano... Apparentemente facciamo riferimento alla geometria euclidea. Euclide, infatti è il nome del matematico che, all'inizio del III secolo a.C., ha scritto un fondamentale trattato di geometria secondo un approccio assiomatico.

Per il momento diamo per acquisita la geometria e passiamo ad esaminare l'uso delle coordinate sulla retta. Questo problema sembra la principale motivazione per l'introduzione dei numeri reali.

Ricordiamo anzitutto una definizione. Assegnato un insieme di grandezze omogenee (ad esempio i segmenti), due di queste grandezze si dicono commensurabili se ammettono un sottomultiplo comune.

Se fissiamo una grandezza $\mathbf{u}$ come unità di misura ed $\mathbf{s}$ è commensurabile con $\mathbf{u}$, allora la misura di $\mathbf{s}$ si esprime tramite un numero razionale. Vogliamo sottolineare che in questo caso la misurazione è ricondotta ad un semplice conteggio: quante volte $\mathbf{u}$ (o un suo opportuno sottomultiplo) è contenuto in $\mathbf{s}$.

Una delle scoperte cruciali della scienza antica è che esistono segmenti incommensurabili, ossia non commensurabili tra loro.

Esempio 101.2 *Come conseguenza del Teorema di Pitagora e della Proposizione* **??** *si dimostra che la diagonale di un quadrato non è commensurabile con il lato del quadrato stesso.*

Questa scoperta determina, nella scienza antica, la prevalenza della geometria sull'algebra. Anche alcuni termini di uso corrente derivano da questa prevalenza: x^2 si legge "x al quadrato".

Dunque in assenza dei numeri reali la funzione (101.1) non sarebbe neanche ben definita.

Il 1872 è ufficialmente l'anno di nascita dei numeri reali, presentati esattamente nello stesso anno in tre diverse pubblicazioni indipendenti (ovviamente l'approccio era quello costruttivo). In realtà sembra che questa formalizzazione, ispirata dall'intuizione geometrica, intenda svincolarsi dall'intuizione geometrica stessa.

Sul fronte della geometria euclidea, intesa come scienza a sé, a partire dal Seicento si iniziano a notare alcune "imprecisioni" nell'opera di Euclide: concetti ed assiomi non esplicitamente enunciati. Si sono proposte varie assiomatizzazioni che colmassero queste lacune. Quella più celebre è dovuta ad Hilbert a cavallo tra Ottocento e Novecento, dopo che i numeri reali avevano fatto la loro comparsa nella letteratura scientifica. In questa sistemazione assiomatica (che è quella studiata tuttora nelle scuole medie superiori) si può dimostrare la corrispondenza tra numeri reali e punti di una retta.

Tuttavia Hilbert è andato un passo oltre, ha posto per la geometria (che continuiamo a chiamare euclidea) la domanda più naturale: esiste un modello in cui sono verificati gli assiomi? La risposta è fortunatamente affermativa.

Si definisce piano l'insieme $\mathbf{R}^2$, si definiscono punti i suoi elementi, ossia le coppie (x, y). Si definiscono rette i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ identificati da equazioni del tipo

$$ax + by + c = 0 \tag{101.2}$$

con $(a, b) \neq (0, 0)$. Si dimostra che, in questo modello, sono verificati tutti gli assiomi della geometria euclidea (così come risistemata dallo stesso Hilbert). Inoltre si dimostra che questo è l'*unico modello possibile* per la geometria euclidea.

Quindi, mentre prima sembrava che i metodi algebrici costituissero un supporto per la geometria, che rimaneva come una scienza a sé, oggi dobbiamo prendere atto che la geometria euclidea viene *sostituita* dalla geometria analitica. Ovviamente esistono anche altri tipi di geometria introdotte su base assiomatica, ad esempio le famose geometrie non euclidee, o le geometrie finite.

Pertanto, quando parliamo di interpretazione geometrica, apparentemente stiamo utilizzando il linguaggio della geometria euclidea per spiegare cosa sono i numeri reali. Piuttosto è vero che, tramite i numeri reali, possiamo "costruire" un ambiente in cui ritroviamo la geometria euclidea, così come l'abbiamo studiata.

In alcune sezioni del corso si continua a parlare di interpretazione geometrica solo in omaggio alla tradizione e per comodità/efficacia didattica. Nel proseguio dell'appendice, ci limitiamo a richiamare le nozioni di maggiore interesse rispetto al corso di Analisi matematica.

101.2 La retta

Chiamiamo piano il prodotto cartesiano $\mathbf{R}^2$, i suoi elementi si dicono punti.

Chiamiamo rette i sottoinsiemi del piano identificati da un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0 \tag{101.3}$$

con $(a, b) \neq (0, 0)$.

Diremo che una retta passa per un punto se il punto appartiene alla retta, ossia se le coordinate del punto soddisfano l'equazione della retta.

La retta di equazione $y = 0$ prende il nome di asse delle ascisse; la retta di equazione $x = 0$ prende il nome di asse delle ordinate.

Le rette aventi equazione di tipo $x = p$ si dicono verticali.

Le rette aventi equazione di tipo $y = q$ si dicono orizzontali.

Se una retta non è verticale, la sua equazione si può scrivere nella forma

$$y = mx + q$$

La costante m prende il nome di *coefficiente angolare*; la costante q prende il nome di *intercetta*, infatti rappresenta l'ordinata del punto in cui il grafico intercetta l'asse delle ordinate.

Per un punto P (di coordinate (x_P, y_P)) passano infinite rette. Possiamo identificare le equazioni di tali rette. Imponiamo il passaggio per P, ossia che (101.3) sia verificata da (x_P, y_P)

$$ax_P + by_P + c = 0.$$

Quindi sostituiamo

$$c = -ax_P - by_P$$

nella (101.3) e otteniamo

$$a\,(x - x_P) + b\,(y - y_P) = 0 \tag{101.4}$$

al variare di $(a,b) \neq (0,0)$.

Se escludiamo la retta verticale, l'equazione (101.4) può essere scritta nella forma

$$y = m(x - x_P) + y_P$$

al variare di $m \in \mathbf{R}$.

Se assegniamo un secondo punto Q (di coordinate (x_Q, y_Q)), la retta passante per P e Q è unica. Per ottenerne l'equazione, dovremo partire da (101.4), imporre il passaggio anche per Q e liberarci dai parametri a e b.

Abbiamo

$$a(x_Q - x_P) + b\,(y_Q - y_P) = 0,$$

quindi scegliamo

$$\begin{aligned} a &= (y_Q - y_P)\,, \\ b &= -(x_Q - x_P), \end{aligned}$$

e, sostituendo in (101.4) concludiamo

$$(y_Q - y_P)\,(x - x_P) - (x_Q - x_P)\,(y - y_P) = 0. \tag{101.5}$$

La retta r_{PQ} passante per i punti P e Q si può descrivere anche in forma parametrica: i punti di r_{PQ} hanno coordinate del tipo

$$\begin{cases} x = (1-t)\,x_P + t x_Q, \\ y = (1-t)\,y_P + t y_Q. \end{cases} \tag{101.6}$$

al variare di $t \in \mathbf{R}$.

Se nella (101.6) imponiamo $t \in [0,1]$, otteniamo la descrizione parametrica del segmento PQ.

Se i punti P e Q non sono allineati in verticale (cioè hanno ascissa diversa), l'equazione (101.5) si scrive nella forma

$$y = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_P) + y_P$$

Ricordiamo che due rette si dicono parallele se sono coincidenti oppure non hanno alcun punto in comune. La *condizione di parallelismo* si traduce in condizioni sui coefficienti dell'equazione (101.3).

Teorema 101.3 *Le rette r ed r' di rispettive equazioni*

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

sono parallele se e solo se

$$ab' = ba'.$$

Osservazione 101.4 *Nel caso di rette orizzontali o oblique abbiamo*

$$m = m'$$

101.2.1 Angoli e loro misura

Nell'ambito della geometria di parla di angoli e quindi può si introdurre la nozione di rette perpendicolari.

Nel modello che Hilbert propone, questo è un passaggio particolarmente delicato e noi non abbiamo i mezzi per trattarlo in questo ambito. Lasciamo non precisata la nozione di misura degli angoli e ci limitiamo ad enunciare il criterio di perpendicolarità per le rette.

Teorema 101.5 *Le rette r ed r' di rispettive equazioni*

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

sono perpendicolari se e solo se

$$aa' + bb' = 0.$$

Osservazione 101.6 *Nel caso di rette oblique abbiamo*

$$mm' = -1$$

101.3 Distanza tra due punti

Assegnati due punti P, Q si definisce distanza tra P e Q il numero reale

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

Tramite la distanza si definiscono nuovi insiemi di punti (luoghi geometrici)

- luogo dei punti equidistanti da due punti P e Q prefissati (asse del segmento PQ);
- luogo dei punti aventi distanza prefissata r da un punto P fisso (circonferenza).

Intersecando l'asse del segmento con il segmento stesso, si ottiene il *punto medio*, avente coordinate

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{2}\left(x_P + x_Q\right), \\ y_M = \frac{1}{2}\left(y_P + y_Q\right). \end{cases}$$

Osserviamo che tali coordinate sono ottenibili da (101.6) per $t = 1/2$.

101.3.1 Parabola

Utilizzando la nozione di retta perpendicolare si riesce anche a definire la distanza di un n punto P di coordinate (x_0, y_0) dalla retta r di equazione $ax+by+c = 0$. Si ottiene

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Allora ha senso definire un nuovo luogo geometrico, l'insieme dei punti equidistanti da un punto fisso (detto fuoco) e da una retta (detta direttrice).

La retta passante per il fuoco ed ortogonale alla direttrice prende il nome di *asse*, l'intersezione dell'asse con la parabola stessa prende il nome di *vertice*. Si può dimostrare che l'asse della parabola costituisce un asse di simmetria.

Il grafico della funzione
$$f_0(x) = x^2$$
è una parabola. Infatti se consideriamo il punto F_0 di coordinate $(0, 1/4)$ e la retta d_0 di equazione $y = -1/4$, è facile verificare che, un punto P appartiene al grafico di f_0 e solo se la distanza di P da F_0 è uguale alla distanza di P da d_0. L'asse è dato dall'asse delle ordinate $y = 0$ ed il vertice coincide con l'origine $(0, 0)$.

In generale, assegnata la funzione polinomiale
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
si può dimostrare che il corrispondente grafico è una parabola. Posto, come al solito,
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
il fuoco è dato dal punto F di coordinate
$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right),$$
la direttrice è la retta d di equazione
$$y = -\frac{1+\Delta}{4a}.$$
L'asse ed il vertice della parabola sono dati rispettivamente dalla retta di equazione
$$x = -\frac{b}{2a}$$
e dal punto di coordinate
$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$