I metodi formli dell'analisi sintattica: Linguaggi Liberi da Contesto & Proprietá di chiusura

9 maggio 2007

Grammatiche e Linguaggi Liberi da Contesto

- $G = (X, V, S, P)$ è una **grammatica libera da contesto** sse: $v \longrightarrow w \in P$ dove $v \in V$.
- Il linguaggio $L(G)$ si dice **linguaggio libero da contesto**.
- Il nome deriva dal fatto che un non terminale può essere sostituito indipendentemente dal contesto della forma di frase dove si trova.
- La sostituzione è sempre valida.
- Appartiene a questa categoria la maggior parte dei linguaggi di programmazione.

Chiusura rispetto alle Operazioni

Sia $\mathcal{L}$ una classe di linguaggi su X.

- **operazione unaria** $\triangle$:

$$\wp(X^*) \longrightarrow \wp(X^*)$$

$$L \mapsto \triangle(L)$$

$\mathcal{L}$ è **chiusa** rispetto a $\triangle$ sse

$$\forall L \in \mathcal{L} : \ \triangle(L) \in \mathcal{L}$$

- **operazione binaria** $\Box$:

$$\wp(X^*) \times \wp(X^*) \longrightarrow \wp(X^*)$$

$$(L_1, L_2) \mapsto \Box(L_1, L_2)$$

$\mathcal{L}$ è **chiusa** rispetto a $\Box$ sse

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L} : \ \Box(L_1, L_2) \in \mathcal{L}$$

Schema di dimostrazione.
Dati i linguaggi L_1 e L_2 generati da
$G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$
assumiamo che: $V_1 \cap V_2$ e $S \notin V_1 \cap V_2$

- considerare una operazione $\square$
- costruire G date G_1 e G_2;
- dimostrare che se G_1 e G_2 sono di tipo i allora anche G è di tipo i;
- dimostrare che $L(G) = \square(L_1, L_2)$ quindi $\mathcal{L}$ è chiusa rispetto all'operazione $\square$

Analogamente per le operazioni unarie:

- Considerata G costruire una grammatica G';
- Dimostrare che se G è di tipo i allora anche G' è di tipo i;
- dimostrare che $L(G') = \triangle(L(G))$ quindi $\mathcal{L}$ è chiusa rispetto all'operazione $\triangle$

Teorema di Chiusura rispetto all'Unione (caso $\mathcal{L}_2$)

La classe dei linguaggi $\mathcal{L}_2$, é chiusa rispetto all'unione.

Dimostrazione.

$$\mathcal{L}_2 \text{ è } \textbf{chiusa} \text{ rispetto a } \cup \Leftrightarrow \forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 : \ (L_1 \cup L_2) \in \mathcal{L}_2$$

Siano date $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$
grammatiche di tipo 2 (libere da contesto) tali che
$L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$
Sia $G = (X_3, V_3, S_3, P_3)$ ove: $S \notin V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
Definiamo $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ e le produzioni

$$P_3 = \{S_3 \longrightarrow S_1 | S_2\} \cup P_1 \cup P_2$$

G_3 é libera da contesto se G_1 e G_2 lo sono. Inoltre

$$L(G_3) = L_1 \cup L_2$$

$\mathcal{L}_2$ é chiusa rispetto all'unione

Teorema di Chiusura rispetto al Prodotto (Caso $\mathcal{L}_2$)

La classe dei linguaggi $\mathcal{L}_2$ é chiusa rispetto al prodotto.
Dimostrazione.

$$\mathcal{L}_2 \text{ è } \textbf{chiusa} \text{ rispetto a } \cdot \Leftrightarrow \forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 : \ (L_1 \cdot L_2) \in \mathcal{L}_2$$

Siano date $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ e $G_2 = (X, V_2, S_2, P_2)$ grammatiche di tipo 2 (libere da contesto) tali che $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$

costruiamo $G_4 = (X, V_4, S_4, P_4)$.

Sia $G = (X, V_4, S_4, P_4)$ con: $P_4 = \{S_4 \longrightarrow S_1 \cdot S_2\} \cup P_1 \cup P_2$
Se G_1, G_2 sono di tipo 2 anche G_4 è di tipo 2. Inoltre

$$L(G_4) = L_1 \cdot L_2$$

<u>$\mathcal{L}_2$ é chiusa rispetto al prodotto</u>

Teorema di Chiusura rispetto all'Iterazione (caso $\mathcal{L}_2$)

La classe dei linguaggi $\mathcal{L}_3$ é chiusa rispetto all'iterazione.

Dimostrazione.

$$\mathcal{L}_3 \text{ è } \textbf{chiusa} \text{ rispetto a } \cdot \Leftrightarrow \forall L_1 \in \mathcal{L}_3 : \ (L_1^*) \in \mathcal{L}_3$$

Sia data $G_1 = (X, V_1, S_1, P_1)$ grammatica di tipo 2 (libera da contesto) tali che $L_1 = L(G_1)$

Costruiamo G_5 sia $G = (X, V_1 \cup \{S\}, S, P)$ dove:

$$P = \{S \longrightarrow \lambda, S \longrightarrow S_1 S\} \cup P_1$$

Altri Teoremi di Chiusura

La classe dei linguaggi non contestuali $\mathcal{L}_2$
non è chiusa rispetto

1. al complemento
2. all'intersezione.

si considerino i linguaggi
$L_1 = \{a^n b^n c^m | n, m > 0\}$ e
$L_2 = \{a^n b^m c^m | n, m > 0\}$
la cui intersezione è

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$$

Operatore di Riflessione

- Data una parola $w = x_1 x_2 \cdots x_n$, con $x_i \in X \quad \forall i = 1, \ldots, n$ dicesi **stringa riflessa** (o *riflessione*) di w la stringa $w^R = x_n x_{n-1} \cdots x_1$
- Questo definisce un operazione unaria

$$(\cdot)^R : \; X^* \longrightarrow X^*$$

- Un **palindromo** è una parola $w \in X^*$ tale che: $w = w^R$

Teorema. Sia w una stringa su X.
Allora w è palindroma sse $\exists x \in X \cup \{\lambda\}$

$$w = \alpha x \alpha^R$$

Teorema. La classe dei linguaggi $\mathcal{L}_2$ è chiusa rispetto a riflessione.

Esercizi

(da risolvere tramite le proprietá di chiusura)

1. Dimostrare che $L = \{a^n b^n c^m \mid n, m > 0\}$ è libero
2. Dati $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ e $L_2 = \{a\}^* \cdot \{bb\}^*$, dimostrare che $L = L_1 \cap L_2$ è libero
3. Utilizzare la proprietà di chiusura di $\mathcal{L}_2$ rispetto a $\cup$ per dimostrare che i seguenti linguaggi sono liberi:
    1. $L = \{a^i b^j \mid i \neq j,\ \ i, j \geq 0\}$
    2. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$
    3. $L = \{a, b\}^* \setminus \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$

Esercizio 1. Dimostrare che $L = \{a^n b^n c^m \mid n, m > 0\}$ è libero e trovare una grammatica che lo generi

---

L può essere scritto come prodotto di linguaggi:
$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ è un linguaggio libero e
$L_2 = \{c^m \mid m > 0\} = \{c\}^+ = \{c\}^* \setminus \{\lambda\}$
linguaggio lineare (e quindi anche libero $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2$)
$L = L_1 \cdot L_2$ deve essere libero per la chiusura

- $G_1 = (X_1, V_1, S_1, P_1)$ con
  $X_1 = \{a, b\} \quad V_1 = \{S_1\} \quad P_1 = \{S_1 \longrightarrow aS_1 b,\ S_1 \longrightarrow ab\}$
- $G_2 = (X_2, V_2, S_2, P_2)$ con
  $X_2 = \{c\} \quad V_2 = \{S_2\} \quad P_2 = \{S_2 \longrightarrow cS_2,\ S_2 \longrightarrow c\}$

Quindi: $G = (X, V, S, P)$
$X = X_1 \cup X_2 = \{a, b, c\} \qquad V = V_1 \cap V_2 \cup \{S\} = \{S, S_1, S_2\}$

$$\begin{aligned} P = &\{S \longrightarrow S_1 S_2\} \cup P_1 \cup P_2 = \{S \longrightarrow S_1 S_2\} \cup \\ &\cup \{S_1 \longrightarrow aS_1 b,\ S_1 \longrightarrow ab\} \cup \{S_2 \longrightarrow cS_2,\ S_2 \longrightarrow c\} \end{aligned}$$