Esercizio 2.4

Dimostrare per induzione che il linguaggio L generato dalla seguente grammatica è vuoto:

$$G = (X, V, S, P)$$

$$X = \{a, b, c\} \qquad V = \{S, A, B\}$$

$$P = \left\{ S \to \overset{(1)}{aBS} \mid \overset{(2)}{bA},\ aB \to \overset{(3)}{Ac} \mid \overset{(4)}{a},\ bA \to \overset{(5)}{S} \mid \overset{(6)}{Ba} \right\}$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$L(G) = \varnothing$$

È sufficiente dimostrare che $L(G) \subset \varnothing$, in quanto l'inclusione opposta è una tautologia ($\varnothing \subset L(G)$ è vera per ogni G).

Dimostrare che $L(G) \subset \varnothing$ significa dimostrare che, in qualsiasi passo di una derivazione da S, la stringa ottenuta presenta almeno un simbolo nonterminale. Cioè:

$$w \in L(G) \Rightarrow w \in \varnothing$$

dove $\quad L(G) = \left\{ w \in X^* \ \middle|\ S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \right\}$

e $\quad \forall n,\ S \overset{n}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \ \Rightarrow\ w = \alpha N \beta,\ N \in V,\ \alpha, \beta \in (X \cup V)^*.$

Procediamo *per induzione sulla lunghezza di una derivazione* da S. Denotiamo con n la lunghezza di una derivazione da S.

<u>Passo base</u>

$n = 1$

$S \overset{n}{\underset{(1)}{\Rightarrow}} aBS$ e $S \overset{n}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} bA$ sono le uniche derivazioni possibili di lunghezza $n = 1$. Entrambe generano stringhe che presentano almeno un nonterminale.

<u>Passo induttivo</u>

Dimostriamo che, per ogni $n > 1$, se supponiamo che il seguente enunciato è vero:

$$\text{"se } S \overset{n-1}{\Rightarrow} w' \text{ allora } \exists\, N \in V : w' = yNz, \quad y, z \in (V \cup X)^* \text{"}$$

allora anche l'enunciato:

$$\text{"se } S \overset{n}{\Rightarrow} w \text{ allora } \exists\, N \in V : w = yNz, \quad y, z \in (V \cup X)^* \text{"}$$

risulta vero.

Consideriamo una qualunque derivazione in G costituita da n passi:

$$S \overset{n}{\Rightarrow} w$$

Per definizione (di derivabilità in n passi), esiste una sequenza di stringhe $w_1, w_2, ..., w_n$, con $w_n = w$, tale che w_1 deriva direttamente da S e, per ogni i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, w_{n+1} deriva direttamente da w_i.

Dunque:

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} w_{n-1} \Rightarrow w_n = w$$

Per ipotesi di induzione, ogni stringa derivabile da S in n–1 passi presenta un nonterminale.

Dunque, anche w_{n-1} presenta un nonterminale (o variabile).

Si hanno le seguenti possibilità:

- in w_{n-1} compare il nonterminale S:
  allora in w abbiamo ancora un nonterminale, in quanto le uniche due produzioni in cui S compare nella parte sinistra sono la (1) $S \to aBS$ e la (2) $S \to bA$.

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} w_{n-1} = ySz \underset{(1)}{\Rightarrow} w_n = w = yaBSz$$

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} w_{n-1} = ySz \underset{(2)}{\Rightarrow} w_n = w = ybAz$$

- in w_{n-1} compare il nonterminale A:
  allora se A è preceduto dal terminale b è possibile effettuare l'n-esimo passo della derivazione, altrimenti non esistono derivazioni di lunghezza n.
  Se $w_{n-1} = ybAz$, possiamo applicare le produzioni (5) e (6).

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} w_{n-1} = ybAz \underset{(5)}{\Rightarrow} w_n = w = ySz$$

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} w_{n-1} = ybAz \underset{(6)}{\Rightarrow} w_n = w = yBaz$$

  e in w abbiamo, in entrambi i casi, ancora un nonterminale.
- in w_{n-1} compare il nonterminale B:
  se B non è preceduto dal terminale a non è possibile effettuare l'n-esimo passo della derivazione.
  Se $w_{n-1} = yaBz$, possiamo applicare le produzioni (3) e (4).

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} w_{n-1} = yaBz \underset{(3)}{\Rightarrow} w_n = w = yAcz$$

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} w_{n-1} = yaBz \underset{(4)}{\Rightarrow} w_n = w = yaz$$

  Ora, se $y, z \in X^*$ allora $w \in X^*$ e dunque non possiamo provare la veridicità dell'enunciato.

  Infatti, esiste (almeno) una derivazione di una stringa di soli terminali:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aBS \underset{(4)}{\Rightarrow} aS \underset{(2)}{\Rightarrow} abA \underset{(6)}{\Rightarrow} aBa \underset{(4)}{\Rightarrow} aa$$

Dunque: $L(G) \neq \varnothing$.