**Esercizio 4.1**

1) Determinare la grammatica che genera il seguente linguaggio:

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$$

e dimostrare la correttezza di tale grammatica.

2) Di che tipo è la grammatica che genera *L*?

3) Applicare il Pumping Lemma per dimostrare che *L* non è libero.

1) $G = (X, V, S, P)$

$$X = \{a, b, c\} \qquad V = \{S, A, B, C\} \qquad P = \left\{ S \overset{(1)}{\rightarrow} aBC,\; S \overset{(2)}{\rightarrow} aSBC \right.$$

$$CB \overset{(3)}{\rightarrow} BC,$$

$$aB \overset{(4)}{\rightarrow} ab,\; bB \overset{(5)}{\rightarrow} bb,$$

$$\left. bC \overset{(6)}{\rightarrow} bc,\; cC \overset{(7)}{\rightarrow} cc \right\}$$

Vediamo come ricavare le produzioni di *G*.

Una derivazione della parola di lunghezza minima in *L*, *w* = *abc*, è la seguente:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aBC \underset{(4)}{\Rightarrow} abC \underset{(6)}{\Rightarrow} abc$$

Le derivazioni (sinistre) delle altre parole in *L* sono del tipo:

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} aSBC \underset{(2)}{\Rightarrow} aaSBCBC$$

La struttura della stringa *aaSBCBC* non è quella desiderata (che contraddistingue le parole di *L*).

È necessaria una produzione che effettui uno scambio di nonterminali:

$$CB \rightarrow BC$$ [1]

Grazie a questa regola di produzione si ha:

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} aSBC \underset{(1)}{\Rightarrow} aaBCBC \underset{(3)}{\Rightarrow} aaBBCC \underset{(4)}{\Rightarrow} aabBCC \underset{(5)}{\Rightarrow} aabbCC \underset{(6)}{\Rightarrow} aabbcC \underset{(7)}{\Rightarrow} aabbcc$$

Le derivazioni di parole più lunghe in *L* non hanno bisogno di ulteriori produzioni:

$$S \underset{(2)}{\Rightarrow} aSBC \overset{2}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} aaaSBCBCBC \underset{(1)}{\Rightarrow} aaaaBCBCBCBC \underset{(3)}{\Rightarrow} aaaaBBCCBCBC \underset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} aaaaBBCBCCBC \underset{(3)}{\Rightarrow} a^4B^3CCCBC \underset{(3)}{\Rightarrow} a^4B^3CCBCC \underset{(3)}{\Rightarrow} a^4B^4C^4 \underset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(4)}{\Rightarrow} a^4bB^3C^4 \underset{(5)}{\Rightarrow} a^4b^2B^2C^4 \overset{2}{\underset{(5)}{\Rightarrow}} a^4b^4C^4 \underset{(6)}{\Rightarrow} a^4b^4cC^3 \underset{(7)}{\Rightarrow} a^4b^4c^2C^2 \overset{2}{\underset{(7)}{\Rightarrow}} a^4b^4c^4$$

2) *G* è una grammatica monotona. Per il teorema di equivalenza delle grammatiche monotone e contestuali (Teorema 3.2), esiste una grammatica contestuale $G'$ equivalente a *G*.

---

[1] È una produzione monotona.

3) Supponiamo, per assurdo, che $L$ sia libero da contesto. Per il Pumping Lemma sui linguaggi liberi, esiste una costante $p$ tale che:

$$\forall z \;\; z \in L, \; |z| > p \;\; \Rightarrow \;\; z = uvwxy$$

ed inoltre valgono le seguenti:

(1) $|vwx| \le p$ ;

(2) $vx \ne \lambda$ ;

(3) $\forall i, \; i \ge 0 : uv^i wx^i y \in L$

Consideriamo una parola in $L$:

$$z = a^p b^p c^p \; .$$

Il Pumping Lemma può essere applicato a tale parola poiché $|z| = 3p > p$ e dunque $z$ può essere scritta nella forma $z = uvwxy$, in modo tale che:

$$|vwx| \le p$$

Poiché la stringa $vwx$ ha lunghezza al più uguale a $p$, si hanno le seguenti possibilità:

(i) $vwx$ è formata da sole $a$, cioè è del tipo $vwx = a^k$ , $0 < k \le p$ ;

(ii) $vwx$ è formata da sole $b$ , cioè è del tipo $vwx = b^k$ , $0 < k \le p$ ;

(iii) $vwx$ è formata da sole $c$ , cioè è del tipo $vwx = c^k$ , $0 < k \le p$ ;

(iv) $vwx$ è a cavallo tra $a$ e $b$ , cioè è del tipo $vwx = a^k b^r$ , $0 < k + r \le p$ e $k, r > 0$ ;

(v) $vwx$ è a cavallo tra $b$ e $c$ , cioè è del tipo $vwx = b^k c^r$ , $0 < k + r \le p$ e $k, r > 0$ .

È immediato osservare che $vwx$ non può essere formata da $a$, $b$ e $c$ (ossia non può essere contemporaneamente a cavallo tra $a$ e $b$ e tra $b$ e $c$), perché non è sufficientemente lunga.

Consideriamo la stringa (*pompata*):

$$uv^2wx^2y$$

per ognuno dei casi (i) - (v).

Per la (3) del Pumping Lemma sui linguaggi liberi, si dovrebbe avere:

$$uv^2wx^2y \in L$$

Ma nel caso:

(i) aggiungiamo almeno una $a$, ed al più $p$ $a$; $uv^2wx^2y = a^{p+t} b^p c^p$ , $0 < t \le p$ ;

(ii) aggiungiamo almeno una $b$, ed al più $p$ $b$; $uv^2wx^2y = a^p b^{p+t} c^p$ , $0 < t \le p$ ;

(iii) aggiungiamo almeno una $c$, ed al più $p$ $c$; $uv^2wx^2y = a^p b^p c^{p+t}$ , $0 < t \le p$ ;

(iv) per la (2) del Pumping Lemma, si hanno le seguenti possibilità:

(iv.a) $v \neq \lambda,\ x \neq \lambda$;

(iv.b) $v \neq \lambda,\ x = \lambda$;

(iv.c) $v = \lambda,\ x \neq \lambda$.

Osserviamo preliminarmente che, se $v \neq \lambda$, allora $v$ è costituita da sole $a$. Infatti, se $v$ fosse del tipo $v = a^k b^{r'}$, con $0 < r' \leq r$, si avrebbe $uv^2wx^2y = a^{p-k}a^k b^{r'} a^k b^{r'} b^s c^p \notin L$, con $p - r' \leq s \leq 2(r - r') + p - r$.

Analogamente, se $x \neq \lambda$, allora $x$ è costituita da sole $b$. Infatti, se $x$ fosse del tipo $x = a^{k'} b^r$, con $0 < k' \leq k$, si avrebbe $uv^2wx^2y = a^s a^{k'} b^r a^{k'} b^r b^{p-r} c^p \notin L$, con $p - k' \leq s \leq 2(k - k') + p - k$.

Per cui:

(iv.a) se $v \neq \lambda,\ x \neq \lambda$, per l'osservazione precedente $v = a^{k'}$, con $0 < k' \leq k$ e $x = b^{r'}$, $0 < r' \leq r$ e si ha che $uv^2wx^2y = a^{p+k'} b^{p+r'} c^p \notin L$, poiché $k',\ r' > 0$;

(iv.b) se $v \neq \lambda,\ x = \lambda$, si ha $v = a^{k'}$, con $0 < k' \leq k$ e $uv^2wx^2y = a^{p+k'} b^p c^p \notin L$, poiché $k' > 0$;

(iv.c) se $v = \lambda,\ x \neq \lambda$, si ha $x = b^{r'}$, con $0 < r' \leq r$ e $uv^2wx^2y = a^p b^{p+r'} c^p \notin L$, poiché $r' > 0$;

(v) Si lascia per esercizio.

In ciascuno dei casi (i) - (v) $uv^2wx^2y \notin L$.

Assurdo. Ne segue che $L$ non è un linguaggio libero da contesto, poiché è un linguaggio infinito per il quale non vale il Pumping Lemma.