Analisi Matematica - 10.5.2019 - prima parte

Wednesday, May 8, 2019 13:01

Studio della convergenza delle serie

Obiettivo: data $\{a_n\}$, stabilire il carattere della serie associata, senza calcolare esplicitamente S_n e, in caso di convergenza, senza calcolare S

Strumenti:

- Condizione necessaria
- Criteri di convergenza

Se $a_n \geq 0 \ \forall n$
- confronto
- confronto asintotico
- radice
- rapporto

Se a_n ha segno variabile
- LEIBNITZ
- Assoluta convergenza

- Condizione necessaria:

<u>Teorema</u>: Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $a_n \to 0$.

<u>Dim</u>:
$$S_n = S_{n-1} + a_n \quad \forall n > n_0$$

da cui
$$a_n = S_n - S_{n-1} \qquad (1)$$

$$\sum a_n \text{ convergente} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$$

S_{n-1} è una restrizione di S_n

Da (1)
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = S - S = 0$$

Utilizzo operativo: Devo studiare $\sum a_n$, provo a fare $\lim a_n$

Se $a_n \to 0$, la serie potrebbe convergere, ma non è detto.

Se $a_n \to a \neq 0$ o non esiste $\lim a_n$, allora la serie non converge (posso escludere il caso ① restano ②, ③, ④).

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+6n+5}{6n^2+7}}_{a_n}$$

- Calcolare S_n è impraticabile.
- $a_n \to \frac{1}{6} \Rightarrow$ La serie non converge (può divergere o essere irregolare)

Serie a termini positivi

Supp. che $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$ (o almeno definitivamente)

OSS: Se $a_n \leq 0$ definit, basta studiare
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-a_n)$$
e usare i teoremi algebrici

OSS: Se $a_n \geq 0$ def. allora $\{S_n\}$ risulta crescente:

$$\forall n \geq n_0 \quad S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n$$

Quindi

$\lim S_n \ \ \exists S \in \mathbb{R}$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} S \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ +\infty \end{cases}$$

Quindi i comp. possibili della serie sono solo due:

$$\sum a_n < +\infty \quad \text{o} \quad \sum a_n = +\infty$$

- Esempio precedente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+6n+5}{6n^2+7}}_{a_n} \qquad a_n \geq 0 \Rightarrow 2 \text{ casi possibili}$$

$a_n \to \frac{1}{6} \Rightarrow$ Non ho convergenza $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

Criterio del confronto:

__Teorema__: Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due succ. tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitiv. (2)

Allora valgono le seguenti implicazioni:

1. se $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$,
2. se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

__Dim__: Siano S_n^a e S_n^b le somme parziali delle due serie:

$$S_n^a = \overset{\leq b_0 \dots}{a_0} + \dots + \overset{\leq b_n}{a_n} \qquad S_n^b = b_0 + \dots + b_n$$

Si può supporre che (2) valga $\forall n \geq 0$ e quindi

$$S_n^a \leq S_n^b \quad \forall n \geq 0 \qquad (3)$$

1. $\sum a_n = +\infty \underset{\text{def di div.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to+\infty} S_n^a = +\infty \underset{\substack{\text{teo. succ.}\\ + (3)}}{\Longrightarrow}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n^b = +\infty \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sum b_n = +\infty$

La 2. segue da 1 e dal fatto che i comp. possibili sono solo 2:

1, $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$

$\text{non } B \Longleftrightarrow$ Non è vero che $\sum b_n = +\infty$

$\underset{\text{2 comp.}}{\Longleftrightarrow} \sum b_n < +\infty$

$\text{non } A \Longleftrightarrow \sum a_n < +\infty$

OSS: Altre implicazioni non ce ne sono:

$0 \le a_n \le b_n$

Se $\sum a_n < +\infty$, $\sum b_n$ può fare quello che vuole

Se $\sum b_n = +\infty$, $\sum a_n$ " " "

. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin^2 n}{2^n}}_{a_n}$

$a_n \ge 0 \qquad 0 \le a_n \overset{\sin^2 n \le 1}{\le} \overset{= b_n}{\frac{1}{2^n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < +\infty$ (serie geometrica, $|q|<1$)

La serie assegnata converge.

Criterio del confronto asintotico

Caso standard:

Teo: Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ succ. tali che

$a_n \geq 0$, $b_n > 0$ definit.

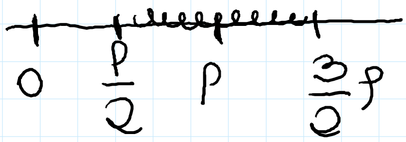
Se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0, +\infty)$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento (o entrambe convergono o entrambe divergono a $+\infty$).

Dim: (Def. di limite + crit. del confr.)

Se $\frac{a_n}{b_n} \to l \in (0, +\infty)$



Allora $\varepsilon = \frac{l}{2}$, per def. di lim

$$l - \frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l + \frac{l}{2} \qquad \text{definit.}$$

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2} l$$

Molt. per $b_n > 0 \Rightarrow$

$$0 < \frac{l}{2} b_n \underset{(1)}{\leq} a_n \underset{(2)}{\leq} \frac{3}{2} l \cdot b_n$$

Per il crit. del confronto:

Se $\sum b_n = +\infty \underset{\text{teo alg.}}{\Rightarrow} \sum \frac{l}{2} b_n = +\infty \underset{\text{confr + (1)}}{\Rightarrow}$

$\sum a_n = +\infty$

Se $\sum b_n < +\infty \underset{\text{teo alg}}{\Rightarrow} \sum \frac{3}{2} l b_n < +\infty \underset{\text{(2) + confr}}{\Rightarrow}$

$\sum a_n < +\infty$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} (3^n - 2^n)$

Confr. asintotico : $a_n = 3^n - 2^n$

$a_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$\frac{a_n}{\underbrace{3^n}_{= b_n}} \to 1 \in (0, +\infty) > 0$ $\qquad \sum 3^n = +\infty$

La serie diverge a $+\infty$.

Casi Limite:

<u>Teo</u>: $\{a_n\}, \{b_n\}$ come nel teo. precedente

(i) Se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ allora

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

(ii) Se $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$ allora

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

Dim:

(i): $\frac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1$ def $\underset{b_n > 0}{\Rightarrow} a_n \leq b_n$ def

$\Rightarrow$ Applico il criterio del confronto e ottengo la tesi.

(ii): $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1$ def.

$\Rightarrow a_n \geq b_n$ def $\Rightarrow b_n \leq a_n$ def

$\Rightarrow$ applico il crit. del confronto e ottengo la tesi.

Criterio della radice e criterio del rapporto

Teo: Sia $\{a_n\}$ t.c. $a_n \geq 0$ def. Se esiste
$$\sqrt[n]{a_n} \to \rho \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$
Allora

- $\rho > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$
- $\rho < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $\rho = 1$ non si sa (la serie può convergere o divergere a $+\infty$).

Teo: Sia $\{a_n\}$ una succ. t.c. $a_n > 0$ definit.
Se esiste il limite
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$
Allora valgono le stesse conclusioni del teo. precedente.

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$
$$a_n = \frac{1}{n^n} > 0$$
$$\sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(n^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \to 0 < 1$$
La serie converge, per il criterio della radice.

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$$
$$a_n = \frac{3^n}{n!} \qquad (a_n \to 0)$$
Applico il criterio del rapporto:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{3^{n}}3}{\underbrace{(n+1)!}_{= (n+1)\cancel{n!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$$
La serie converge.

Serie armoniche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (A)$$

$a = 1$ serie armonica

$a \neq 1$ serie armonica generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
$$\overset{\shortparallel}{n^{3/2}}$$

Teorema:

Se $a \leq 1$ allora (A) è divergente ($a +\infty$).

Se $a > 1$ allora (A) è convergente.

Dim:

$\boxed{a = 1}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Uso il confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$ (già visto)

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1 \quad n \to +\infty$$

poiché $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\frac{1}{n} \to 0$.

$\boxed{a < 1}$ $\forall n \geq 1 \quad n^a \leq n \Rightarrow$

$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^a}$

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n^a} = +\infty$$

(per il criterio del confronto)

$\boxed{a > 1}$

Dico che

$$\forall n \geq 1 \qquad S_n \leq 1 + \frac{1}{a-1}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{n^{a-1}}}_{>0}\right) \quad (1)$$

Vera la (1), poiché $\frac{1}{n^{a-1}} \in (0,1)$ $\quad a-1>0$

si ha

$\forall n \geq 1 \qquad S_n \leq 1 + \frac{1}{a-1}$

$\Rightarrow \{S_n\}$ è limitata superiormente, quindi poiché S_n è crescente, esiste $\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty .$$

• $$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+3n+5}{n^3+1}}_{a_n}$$

$a_n \to 0$, $a_n > 0$

$a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 1$

$\underset{\Downarrow}{\sum} \frac{1}{n} = +\infty \underset{\text{confr. asintotico}}{\Rightarrow}$ La serie diverge

Teo precedente

• $$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{n^2+1}{n^4+3}}_{a_n}$$

$0 < \frac{n^2+1}{n^4+3} \to 0 \Rightarrow \qquad 0 < \frac{n^2+1}{n^4+3} < \frac{\pi}{2}$ def.

$\Rightarrow a_n = \operatorname{sen} \frac{n^2+1}{n^4+3} > 0$

$a_n \sim \frac{n^2+1}{n^4+3}$ (poiché $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$)

$\sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$ (teo prec).

Per il crit. del confr. asintotico $\sum a_n$ converge.

Serie a termini di segno variabile

Assoluta convergenza

Def: Una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente

convergente se la serie
$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \text{ converge.} \qquad (A)$$

Esempi:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ è assolut. conv.:

$-1 \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{9} \quad ----$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k^2} \qquad |a_k| = \frac{1}{k^2} \qquad \sum \frac{1}{k^2} < +\infty$$
$$= \frac{|(-1)^k|}{|k^2|} = \frac{1}{k^2}$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ non è assolut. convergente

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k} \qquad |a_k| = \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

OSS: La serie $\sum |a_k|$ è a termini positivi, quindi si può studiare con i quattro criteri.

<u>Teorema</u> Le serie assolutamente convergenti sono convergenti cioè

$$\sum |a_k| \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_k \text{ convergente}$$
$\not\Leftarrow$ Non vale

- $$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{3k+k^5+1}}_{a_k}$$

$$|a_k| = \frac{k^2}{3k+k^5+1} \sim \frac{k^2}{k^5} = \frac{1}{k^3}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < +\infty$$

confr. asint.

$$\Rightarrow \sum |a_k| < +\infty \underset{\text{Teo}}{\Rightarrow} \text{La serie assegnata converge}$$

Criterio di LEIBNITZ

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n \qquad (L)$$

ove b_n è una successione di numeri positivi.

I termini di (L) sono alternativamente positivi e negativi.

Teorema: Supponiamo che

1. $b_n \geq 0$,
2. $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$, $\quad$ ($\{b_n\}$ decrescente)
3. $b_n \to 0$.

Allora la serie (L) converge.

oss: Se 1. e 2. non sono verificate, (L) può fare quello che vuole.
Se non vale 3., non vale la condizione necessaria.
La serie (L) di sicuro non converge (restano aperte altre 3 possibilità).

- $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$

  $b_n = \frac{1}{n}$, $\quad b_n \to 0$, $\quad b_n$ decrescente

  $\Rightarrow$ La serie converge (per il crit. di Leib)

oss: Questo è un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente.

ma non assolutamente convergente.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

- Studio del carattere di serie numeriche

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}}_{a_n}$$

$a_n \geq 0$, $\quad a_n \sim \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

- $a_n \to 0$
- Criterio del confr. asintotico + $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge $\quad \frac{4}{5}<1$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge

Si può applicare qui il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{4^n\left(\frac{2^n}{4^n}+1\right)}{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+1\right)}} = \frac{4}{5}\cdot\sqrt[n]{\underbrace{\frac{\frac{1}{2^n}+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}}_{b_n}}$$

$b_n \to 1$

$\sqrt[n]{b_n} \to 1$

$\sqrt[n]{a_n} \to \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow$ La serie converge

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \to 0 \ , \quad a_n > 0$$

Fattoriale $\to$ crit. del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overset{(n+1)n!}{(n+1)!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}}{(n+1)^{\cancel{n+1}\,n}} \cdot n^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

La serie converge

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} > 0 \qquad \text{A cosa tende } a_n ?$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1 \underset{\substack{\text{criterio radice} \\ \text{per le successioni}}}{\Rightarrow} a_n \to +\infty$$

La cond. necessaria non è verificata $\Rightarrow$
$\sum a_n$ non converge $\underset{a_n > 0}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ diverge a $+\infty$.

Altro modo: criterio della radice (per le serie)

$\sqrt[n]{a_n} \to e > 1 \Rightarrow$ La serie diverge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

$a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n} \to 0$, $a_n > 0 \ \forall n$

$a_n \sim \frac{1}{n}$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \frac{1}{n} \to 0$

$\sum \frac{1}{n} = +\infty \qquad \sum a_n = +\infty$

(Ho usato il confronto asintotico)

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)^2}}_{a_n}$$

$a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

Uso il confr. asintotico

$a_n \sim \frac{n \cdot n}{n \cdot n^2} = \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{1}{n} = +\infty$

La serie diverge

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_e n}{n^2}$$

$a_n = \frac{\log_e n}{n^2} \qquad a_n \to 0 , \ a_n \geq 0$

1° tentativo: Confr. asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$\frac{a_n}{b_n} = \log_e n \to +\infty$

È un caso limite:

$a_n \geq b_n$ def.

$b_n \leq a_n$ ma $\sum b_n < +\infty$

Non posso concludere nulla.

2º tentativo: confr. asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n} \to 0$$

Altro caso limite: $a_n \leq b_n$ def $\sum b_n = +\infty$

Non posso concludere nulla.

Tentativo buono: scelgo un esponente a tale che $1 < a < 2$ e faccio confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^a}$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \sum b_n < +\infty \quad \left(\frac{3}{2} > 1\right)$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n^{3/2} \underset{a<2}{=} \frac{\log n}{\underset{\underset{n^{1/2}}{\shortparallel}}{\sqrt{n}}} \to 0$$

Caso limite del confr. asintotico $\Rightarrow$

$\sum a_n$ converge

Flow chart per lo studio di una serie numerica

$\sum a_n$: