

Corso di Laurea in Informatica e Comunicazione digitale
Esame di Analisi Matematica

1. Data

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$$

- (a) se ne determini il dominio;
- (b) si determinino gli eventuali punti di intersezione tra il grafico di f e gli assi cartesiani, gli intervalli in cui f è positiva e gli intervalli in cui f è negativa;
- (c) si calcolino i limiti significativi di f e si determinino le equazioni degli asintoti di f ;
- (d) si studi la monotonia di f e si determinino eventuali punti di massimo e minimo relativo;
- (e) si studi la convessità e la concavità di f e si determinino eventuali punti di flesso;
- (f) si tracci un grafico approssimativo di f .

2. Si enunci il criterio del confronto per le serie numeriche e lo si applichi allo studio della convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + \sin^2 n}.$$

3. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{3x - 2}{x^2 - 4} dx.$$

4. Si enunci il teorema di Lagrange e, facoltativamente, lo si dimostri.

5. Si enunci la definizione di funzione continua in un punto e quella di funzione derivabile in un punto.

Se esiste (in caso contrario spiegare perché non esiste), fornire un'esempio di funzione che sia

- (a) continua in un punto ma non derivabile in quel punto;
- (b) derivabile in un punto ma non continua in quel punto;
- (c) derivabile una volta in un punto ma non due volte in quel punto.

6. Determinare

- (a) a quale proprietà si riferisce la seguente scrittura inerente ad una successione $\{a_n\}$:
“per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < \epsilon$ per ogni $n \geq N$;
- (b) usando il teorema degli zeri, se l'equazione $e^x + x = 0$ ammette soluzione;
- (c) in base alla definizione di integrale improprio se la funzione $f(x) = 1/x$ è integrabile in $[1, +\infty[$;
- (d) se la funzione $g(x) = 7^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è strettamente monotona;
- (e) la funzione $g(x)$ definita in (b) è invertibile.

Note

- Per ottenere punteggio pieno è necessario giustificare i passaggi e le affermazioni.
- Tempo a disposizione per lo svolgimento della prova: due ore e mezza.