Analisi Matematica - 3.5.2019 - prima parte

Thursday, May 2, 2019 16:26

SERIE NUMERICHE

Sia $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una successione.

Idea intuitiva: la serie di a_n che si indica con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$$

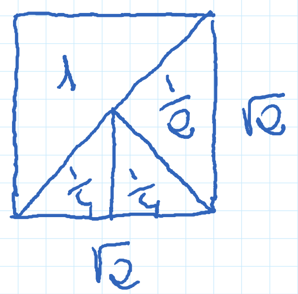
indica la somma degli infiniti termini della succ. a_n.

È sensato sommare infiniti numeri? Talvolta sì talvolta no:

$$S = 1+2+3+4+\dots+n+\dots$$

In questo caso sembra sensato porre $S=+\infty$.

L'area di un quadrato di lato $\sqrt{2}$ è 2.



Tale area può essere vista come la somma delle aree di infiniti triangoli:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

In questo caso sembra opportuno porre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

<u>Def</u>: si chiama successione delle somme parziali associata ad $\{a_n\}_{n\geq 0}$ la successione $\{S_n\}_{n\geq 0}$ definita da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

↳ sommatoria (somma di un numero finito di termini)

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_0 = a_0$
$S_1 = a_0 + a_1$
$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$
$\vdots$
$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

Si può quindi definire S_n in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \end{cases}$$

La forma chiusa si ottiene per induzione.

<u>Def</u>: si dice Serie e si indica con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (S)$$

il limite

$$\lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Essendo un limite ci sono le solite 4 possibilità:

1. Se $S_n \to S \in \mathbb{R}$ si dice che (S) è convergente.
2. Se $S_n \to +\infty$ si dice che (S) diverge a $+\infty$.
3. Se $S_n \to -\infty$ si dice che (S) diverge a $-\infty$.
4. Se S_n è irregolare si dice che (S) è irregolare.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Procedura:

Ho a_n -> costruisco S_n -> calcolo $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ->
descrivo il comportamento di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

"Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$"
significa stabilire se S_n ricade nel
caso (1) o (2) o (3) o (4).

Attenzione: il comportamento di S_n non di a_n!!

Esempio (banale) 1: $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$S_0 = 0 \qquad S_1 = 0 + 0 = 0 \ ---$

$S_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$S_n \to 0$ quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

Esempio (banale) 2: $a_n = 1 \quad n \geq 0$

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 + 1 = 2$

$\vdots$

$S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1} = n + 1$

$S_n \to +\infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

oss: Non è necessario che la succ. a_n parta da a_0.
Se ho $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ definisco

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \qquad n \geq n_0$$

e

$\{S_n\}_{n \geq n_0}$.

Quindi $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n$.

OSS: Date $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ tali che
$$a_n = b_n \quad \text{definitivamente}$$
allora le serie corrispondenti hanno lo stesso comportamento.

Nel caso ①, le somme finali possono essere diverse.

Idea della dim:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n = b_n \ \forall n \geq n_0$

$$S_n^a = a_0 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n \qquad n > n_0$$
$$S_n^b = b_0 + \dots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \dots + b_n$$

$$S_n^a - S_n^b = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k}_{\substack{\text{costante} \\ \text{(non dipende da } n)}} = C$$

$$S_n^a = S_n^b + C$$

Conseguenza: se in una serie cambio un numero finito di termini, la tipologia della serie non cambia.

Esempi (meno banali)

Serie geometrica: È del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad q\in\mathbb{R} \qquad (G)$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n$

$\hookrightarrow$ caso del quadrato

<u>Teorema</u>: La serie (G)

- converge se $|q|<1$ $(\Longleftrightarrow -1<q<1)$ e
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$
- diverge a $+\infty$ se $q\geq 1$,
- è irregolare se $q\leq -1$.

<u>Dim</u>: $q\in\mathbb{R}$ $\qquad S_n = 1+q+\dots+q^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{se } q\neq 1$$

$\downarrow$ dim. nella lezione sul princ. di ind.

se $|q|<1 \Rightarrow |q^{n+1}| = |q|^{n+1} \to 0 \Rightarrow q^{n+1}\to 0$

$$\Rightarrow S_n \to \frac{1}{1-q}$$

Se $q>1$ $\qquad S_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} \to \left[\dfrac{+\infty}{\underbrace{q-1}_{>0}}\right]$ $+\infty$

$$q^{n+1} = \underbrace{q}_{>0}\cdot \underbrace{q^n}_{+\infty} \to +\infty$$

Se $q=1$ $\qquad q^n = 1 \qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

$\downarrow$ vedi esempio lezione 2

Se $q=-1$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

Se $q = -1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

$$S_0 = (-1)^0 = 1$$
$$S_1 = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$
$$S_2 = 0 + (-1)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Caso 4 $\Rightarrow$ La serie è irregolare.

Se $q < -1$ $\quad \{S_n\}$ è irregolare

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$q < -1 \quad q = -|q| \quad q^{n+1} = (-1)^{n+1} |q|^{n+1}$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-3^n)$ irregolare

Serie telescopiche: se $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ è una successione, sono del tipo:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \underbrace{(b_{n+1} - b_n)}_{a_n} \qquad (T1)$$

oppure

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) \qquad (T2)$$

Calcolo la succ. delle somme parziali (nel caso (T1)).

$$S_{n_0} = b_{n_0+1} - b_{n_0}$$

$$S_{n_0} = b_{n_0+1} - b_{n_0}$$

$$S_{n_0+1} = (\cancel{b_{n_0+1}} - b_{n_0}) + (b_{n_0+2} - \cancel{b_{n_0+1}})$$
$$= b_{n_0+2} - b_{n_0}$$

$$S_{n_0+2} = (\cancel{b_{n_0+2}} - b_{n_0}) + (b_{n_0+3} - \cancel{b_{n_0+2}})$$
$$= b_{n_0+3} - b_{n_0}$$

Ipotizzo che $S_n = b_{n+1} - b_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$: Per induzione

Base : $n = n_0$ OK $S_{n_0} = b_{n_0+1} - b_{n_0}$

Passo induttivo : Hp. $S_n = b_{n+1} - b_{n_0}$

Th $S_{n+1} = b_{n+2} - b_{n_0}$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + (b_{n+2} - b_{n+1})$$
$$\underset{Hp}{=} \cancel{b_{n+1}} - b_{n_0} + b_{n+2} - \cancel{b_{n+1}}$$
$$= b_{n+2} - b_{n_0}$$

Dunque il carattere di (T1) dipende dal comp. di $\{b_n\}$:

$$S_n = b_{n+1} - b_{n_0}$$

Nel caso (T2) $S_n = b_{n_0} - b_{n+1}$ $\forall n \geq n_0$.

Esempi :

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (Serie di MENGOLI)

È telescopica : $\underset{\substack{\shortparallel \\ a_n}}{\dfrac{1}{n(n+1)}} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

di tipo (T2) $b_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$

Dunque $S_n = b_1 - b_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$

Quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

È telescopica

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log \frac{n+1}{n} = \underbrace{\log(n+1)}_{= b_{n+1}} - \underbrace{\log n}_{= b_n}$$

(di tipo (T1)).

$$S_n = b_{n+1} - b_1 = \log(n+1) - \underbrace{\log 1}_{=0} = \log(n+1)$$

$S_n \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

Teoremi algebrici

__Teo:__ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ Allora

1. $$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

tranne nel caso in cui a dx dell'= si ha $+\infty-\infty$ o $-\infty+\infty$ oppure quando una delle due serie a destra è irregolare,

2. Se $\lambda \neq 0$
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

<u>OSS</u>: Prodotto! Non vale una regola analoga

$$\sum a_n \cdot b_n \neq \sum a_n \cdot \sum b_n$$

Non vale nemmeno per le sommatorie:

$$a_1 b_1 + a_2 b_n \neq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 6$$

- $$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2^n} \right)}_{\text{converge}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}_{\text{conv.}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\text{conv.}}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{3^n}}_{\text{conv.}} + \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\text{diverge a } +\infty} \Big) = +\infty$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} (3^n + 2^n) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = [+\infty + \infty] = +\infty$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} (3^n - 2^n) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 3^n}_{+\infty} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n}_{-\infty} \quad [+\infty - \infty]$$

NON LO SO

Analisi Matematica - 3.5.2019 - terza parte

- $f(x) = \dfrac{x^2+3}{\sqrt{2-x}}$

$2-x>0 \quad x<2 \qquad \text{dom } f = (-\infty, 2)$

$f(0) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$f(x)=0 \iff x^2+3=0$ non ha sol.

$f(x)>0 \quad \begin{matrix} x^2+3>0 \\ \sqrt{2-x}>0 \end{matrix} \Rightarrow \quad f(x)>0 \quad \forall x \in (-\infty, 2)$

Limiti : $-\infty, 2$:

$x \to -\infty \qquad \dfrac{+\infty}{+\infty} \qquad f(x) \sim \dfrac{x^2}{\sqrt{-x}} = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^{1/2}} = (-x)^{3/2} \to +\infty$

$x \to 2 \qquad \dfrac{4^{>0}}{0^+} \qquad f(x) \to +\infty \qquad x=2$ as. vert.

$>0 \quad \sqrt{2-x}>0$

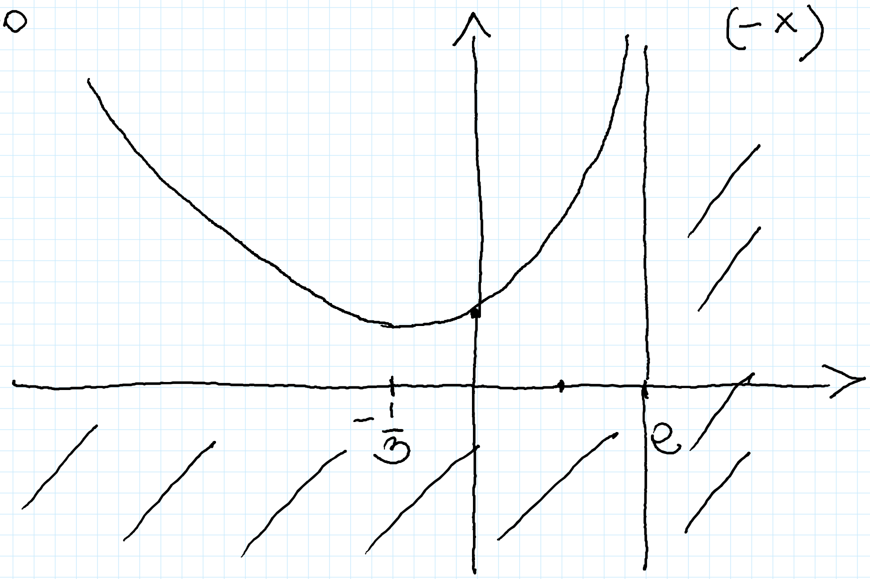
Asintoto obliquo a $-\infty$? $\quad \dfrac{f(x)}{x} \sim \dfrac{(-x)^{3/2}}{x}$

$= -\dfrac{(-x)^{3/2}}{(-x)} = -(-x)^{1/2}$

$\downarrow$

$+\infty$

NO



Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{2-x} - (x^2+3)\frac{1}{2\sqrt{2-x}}(-1)}{(2-x)}$$

$$= \frac{4x(2-x) + (x^2+3)}{2\sqrt{2-x}\,(2-x)}$$

$$= \frac{\qquad\qquad}{2\sqrt{2-x}\,(2-x)}$$

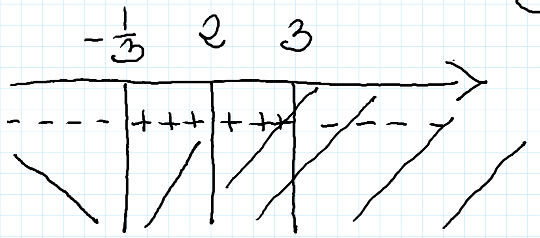
$$= \frac{8x-4x^2+x^2+3}{2(2-x)^{3/2}} = \frac{-3x^2+8x+3}{2(2-x)^{3/2}}$$

$f'(x) \geq 0 \iff -3x^2+8x+3 \geq 0$

$3x^2-8x-3 \leq 0 \qquad -\frac{1}{3} \leq x \leq 3$

$x = 3 \quad x = -\frac{1}{3}$

f' :



$x = -\frac{1}{3}$ p.to di minimo relativo

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(\overset{>0}{3x^2-16x+41})\sqrt{2-x}}{\underset{>0 \text{ in dom } f}{4(2-x)^3}} > 0 \qquad \Delta<0$$

$\Rightarrow f$ è convessa

- $f(x) = \sqrt[3]{x}\,\frac{x-2}{x+1}$

dom $f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\qquad x+1 \neq 0$, $x \neq -1$

$f(0) = 0 \qquad (0,0)$

$f(x) = 0 \iff \sqrt[3]{x} = 0 \quad \vee \quad x-2 = 0$

$x = 0 \qquad x = 2$

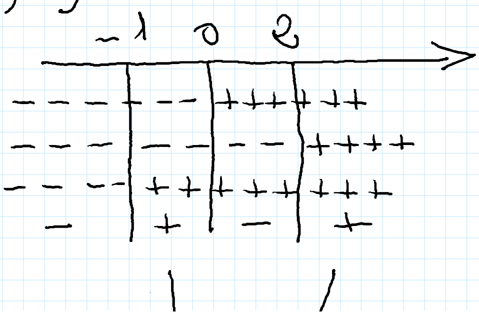
$(0,0) \qquad (2,0)$

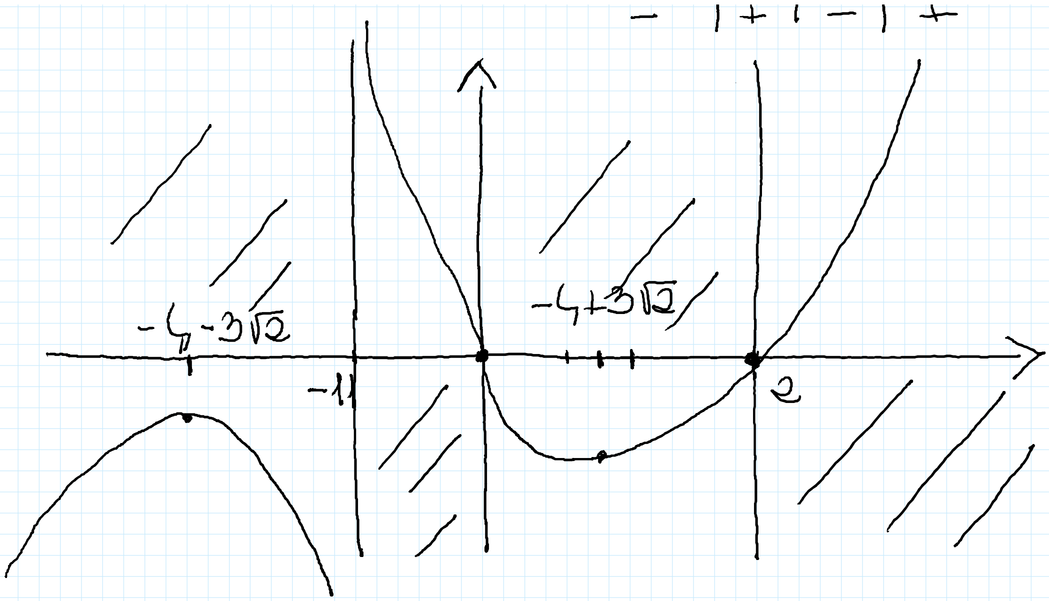
$f(x) > 0$

$\sqrt[3]{x} > 0 \quad x > 0$

$x-2 > 0 \quad x > 2$

$x+1 > 0 \quad x > -1$





Limiti : -1, $\pm\infty$

$x \to -1$ $\quad \sqrt[3]{x} \to -1 \quad f(x) \sim -\dfrac{x-2}{x+1} \qquad \dfrac{-3}{0^+}$

$x \to -1^+ \quad f(x) \to \left[\dfrac{+3}{0^+}\right] = +\infty$

$x \to -1^- \quad f(x) \to \left[\dfrac{+3}{0^-}\right] = -\infty$

$x \to +\infty \quad \sqrt[3]{x} \to +\infty, \quad \dfrac{x-2}{x+1} \to 1 \Rightarrow f(x) \to +\infty$ $\quad [+\infty \cdot 1]$

$x \to -\infty \quad \sqrt[3]{x} \to -\infty, \quad \dfrac{x-2}{x+1} \to 1 \Rightarrow f(x) \to -\infty$ $\quad [-\infty \cdot 1]$

$\dfrac{f(x)}{x} \sim \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x} \to 0 \quad x \to \pm\infty \Rightarrow$ NO asintoto obliquo

Derivata prima: $\forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$ $\qquad \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \frac{x-2}{x+1} + x^{\frac{1}{3}} \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{x^{2/3}} \frac{x-2}{x+1} + x^{1/3} \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x-2) + 9\, x^{1/3} x^{2/3}}{\dots} = \left[x^{1/3} \cdot x^{2/3} = x\right]$$

$$= \frac{(x+1)(x-2)+9x^{1/3}x^{2/3}}{3x^{2/3}(x+1)^2} = \left[x^{1/3}\cdot x^{2/3} = x\right]$$

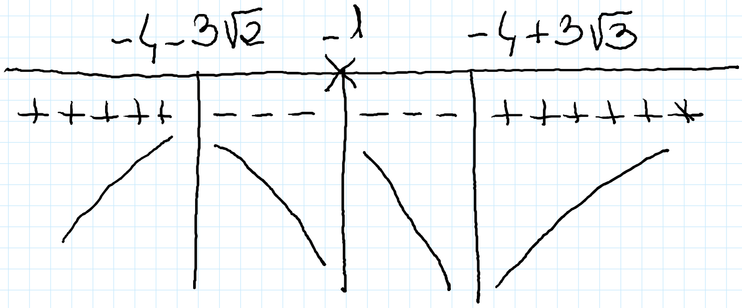
$$= \frac{x^2-2x+x-2+9x}{3x^{2/3}(x+1)^2} = \frac{x^2+8x-2}{3x^{2/3}(x+1)^2}$$

0 ✓ 0 ✓

$f'(x) \geq 0 \iff x^2+8x-2 \geq 0$

$x = -4 \pm 3\sqrt{2}$

$x \leq -4-3\sqrt{2} \quad x \geq -4+3\sqrt{2}$



$x = -4-3\sqrt{2}$ p.to di min. rel.

$x = -4+3\sqrt{2}$ " " max rel.

$x \to 0 \qquad f'(x) \sim -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{2/3}} \to -\infty$

$x=0$ p.to di flesso a tangente verticale