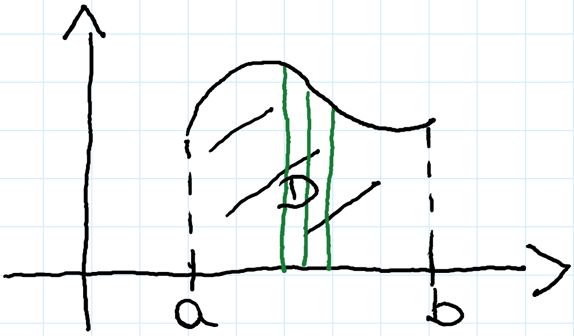
Analisi Matematica - 15.5.2019 - prima parte

Tuesday, May 14, 2019 17:39

Calcolo integrale

Problema: Definire e misurare l'area sottesa da un grafico in un intervallo $[a,b]$

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $f\geq 0$



$$D=\{(x,y)\,/\,a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$$

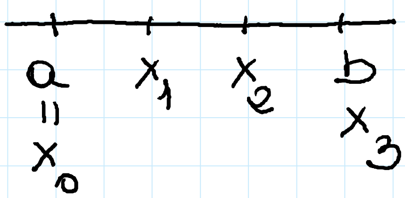
Area di D?

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata (non necessariamente positiva). Fisso $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

1) si suddivide $[a,b]$ in n intervalli di uguale ampiezza $\frac{b-a}{n}$, considerando $n+1$ punti

$$x_j=a+j\,\frac{b-a}{n}\quad\forall j=0,\dots,n$$

$n=3$



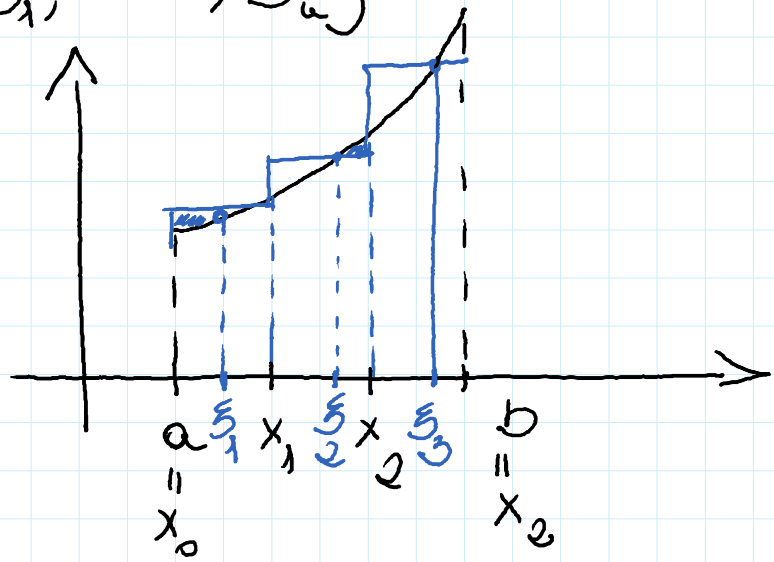
$x_0=a$,

$x_1=a+1\frac{(b-a)}{3}$, $\quad x_2=a+\frac{2}{3}(b-a)$, $\quad x_3=b$

$$\forall j=1,\dots,n\quad x_j-x_{j-1}=\frac{b-a}{n}$$

2) Si considera in ogni intervallo $[x_{j-1}, x_j]$ un punto arbitrario $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Sia

$T_n = \{\xi_1, ----, \xi_n\}$



3) Si considera la somma delle aree dei rettangoli di base $[x_{j-1}, x_j]$ e altezza $f(\xi_j)$.

$$S_n = S(n, T_n) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\text{base}} \underbrace{f(\xi_j)}_{\text{altezza}}$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ si chiama successione delle somme di Cauchy-Riemann.

4) Si considera

$$\lim_{n \to +\infty} S_n \qquad (1)$$

__Def:__ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Si dice che f è integrabile in $[a,b]$ se il limite (1)

- esiste,
- finito,
- è indipendente da ogni insieme T_n scelto al punto 2.

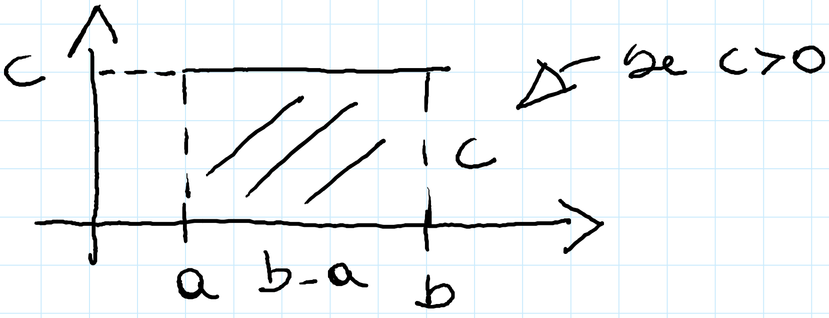
In tal caso si pone
$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{def}}{=} \lim_{n \to +\infty} S_n$$

$\Downarrow$

integrale tra a e b di f

Esempi:

- Ogni funzione costante $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, è integrabile e
$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$$



Calcolo la somme S_n:

Fisso $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Per qualunque scelta di
$$T_n = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$
si ha $\quad f(\xi_j) = c$

si ha $\quad f(\xi_j) = c$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f(\xi_j)}_{=c}$$

$$= \frac{b-a}{n} \, n c = c(b-a)$$

$\{S_n\}$ $\quad S_n = (b-a)c \quad \forall n \Rightarrow (S_n)$ è costante

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = c(b-a)$ ind. da T_n

$\hookrightarrow$ esiste finito

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a)$$

2. Una funzione non integrabile (funzione di DIRICHLET)

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \quad \text{razionale} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \quad \text{irrazionale} \end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

f non è integrabile: sia $n \geq 1$ $\quad S_n$

Scelgo $\quad T_n^1 = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ $\quad \xi_j$ razionali

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f(\xi_j)}_{=1} = \frac{1}{n} n = 1 \to 1$$

Scelgo $\quad T_n^2 = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ $\quad \xi_j$ irrazionali

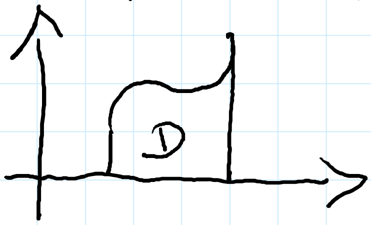
$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f(\xi_j)}_{0} = 0 \to 0$$

Il limite di S_n dipende dalla scelta delle immagini T_n, quindi f NON è integrabile.

OSSERVAZIONI

- Nella def. non è richiesto che $f \geq 0$.

Se $f \geq 0$, S_n si può interpretare come approssimazione mediante rettangoli della regione D



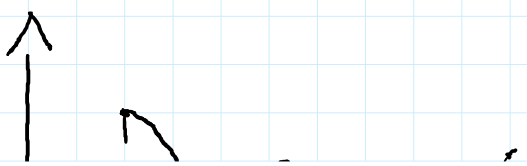
Quindi se f è integrabile e $f \geq 0$, si definisce

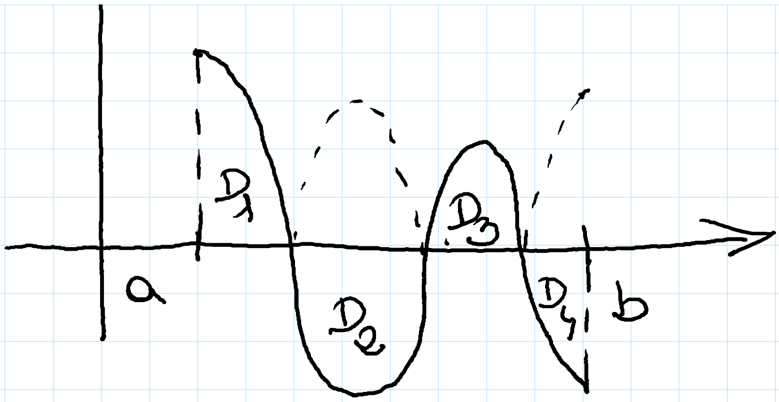
$$\text{Area}(D) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Se f cambia segno ed è integrabile, può accadere che

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$$

Si prova che $\int_a^b f(x)\,dx$ è una somma di aree prese con segno:





$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area}(D_1) - \text{Area}(D_2) + \text{Area}(D_3) - \text{Area}(D_4)$$

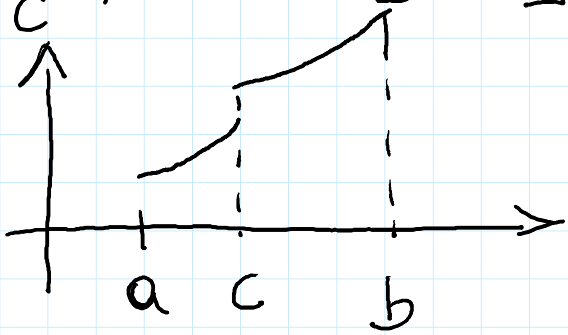
- Perché f deve essere limitata? Se f non fosse limitata potrei costruire una $S_n \to +\infty$ o $S_n \to -\infty$ e quindi f non sarebbe integrabile

Classi di funzioni integrabili

<u>Teorema</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

1. f continua in $[a,b] \Rightarrow f$ integrabile in $[a,b]$
(per Weierstrass, f è limitata)

2. f monotona e limitata in $[a,b] \Rightarrow f$ integrabile in $[a\ b]$

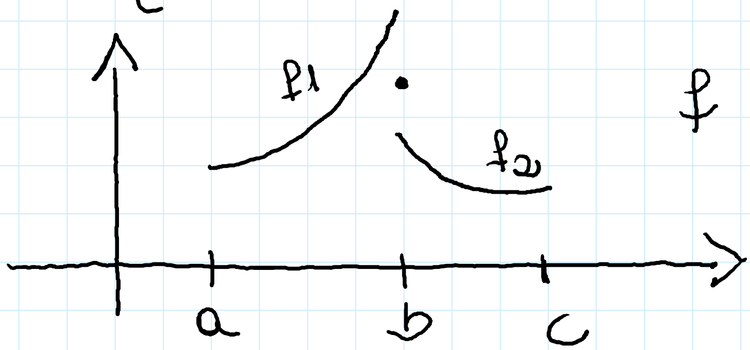


3. $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [b,c] \to \mathbb{R}$ integrabile
allora $f : [a,c] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in [a,b) \\ f_2(x) & x \in (b,c] \end{cases}$$

(f definita in qualunque modo in $x = b$)

risulta integrabile in $[a,c]$



- $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{n}{n^2+1}}_{a_n}$$

$a_n \not\to 0$ $\quad |a_n| = \frac{n}{n^2+1} \to 0$ potrebbe convergere

Ma a_n cambia segno, è a segno alterno

Provo con l'assoluta convergenza:

$$|a_n| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Non è ass. convergente

Potrebbe convergere, provo con il criterio di Leib.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \qquad b_n = \frac{n}{n^2+1}$$

$b_n \geq 0$, $b_n \to 0$,

$\{b_n\}$ è decrescente:

$$\forall n \geq 1 \quad b_{n+1} \leq b_n \qquad (?)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{n+1}{1+(n+1)^2} \leq \frac{n}{n^2+1} \qquad (?)$$

$$(n^2+1)(n+1) \leq n\,(\underbrace{1+(n+1)^2}_{n^2+2n+2}) \qquad ||$$

$$\cancel{n^3} + n^2 + n + 1 \leq \cancel{n^3} + 2n^2 + 2n$$

$$\underbrace{n^2+n}_{\substack{\vee| \\ 2}} - 1 \geq 0 \qquad \text{vero perché } n^2+n \geq 2 \ \ n \geq 1$$

Quindi per il crit. di Leib. $\sum a_n$ converge.
Altro modo di dim. che $\{b_n\}$ è decrescente:
$b_n = f(n)$ $\qquad f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \quad x \geq 1$
Se f è decrescente in $[1, +\infty)$ allora $\{b_n\}$ è decrescente
Poiché f è derivabile, calcolo $f'(x)$ e osservo che $f'(x) \leq 0$ in $[1, +\infty)$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

$a_n = \dfrac{\log n}{n} \geq 0 \qquad a_n \to 0$ potrebbe convergere

"$\log n$ peggiora la divergenza di $\sum \frac{1}{n}$"
Provo a dim che diverge.
- Confronto: vorrei che $\log n \geq 1$

$\Updownarrow$

$\log n \geq \log e$

$n \geq e = 2.7\ldots$

Se $n \geq 3$

$\dfrac{\log n}{n} \geq \dfrac{1}{n}$ e $\sum \dfrac{1}{n} = +\infty$

Quindi la serie diverge a $+\infty$
- Confronto asintotico: $b_n = \dfrac{1}{n} \qquad \sum \dfrac{1}{n} = +\infty$

$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\log n}{n} \cdot n = \log n \to +\infty$

Caso limite: $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\log n} \geq 1 \qquad \frac{\log n}{n} \geq 0$

$\sqrt[n]{n} = n^{1/n}$

$\Rightarrow a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n \geq 0$

Criterio della radice: (perchè ho l'esponente n)

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 1 - 1 = 0 < 1$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n + n}$

$a_n = \frac{2^n+1}{3^n+n} > 0$

$2^n + 1 = 2^n \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}\right) \sim 2^n$

$3^n + n = 3^n \left(1 + \underbrace{\frac{n}{3^n}}_{\to 0}\right) \sim 3^n$

$a_n \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}$ (serie geometrica)

quindi per il crit. del confronto asintotico la serie converge.

- $\displaystyle\sum_{n=1} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

- $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ $\quad |a_n| = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad \Rightarrow$

cond. nec.

quindi a_n non può convergere a 0 $\Rightarrow$

La serie non converge.

Restano 3 possibilità da esaminare: $+\infty$, $-\infty$, irregolare

$\frac{n+1}{n} \to 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n} - 1 \to 0$

Quindi provo a sottrarre $(-1)^n \cdot 1$

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} - (-1)^n + (-1)^n$$

$$= (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) + (-1)^n$$

$$= (-1)^n \frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1} + (-1)^n = -(-1)^n \frac{1}{n+1} + (-1)^n$$

$$a_n + \underbrace{(-1)^n \frac{1}{n+1}}_{b_n} = (-1)^n$$

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n+1} < +\infty \quad \text{(Leibnitz)}$$

$\sum a_n$ non so

$\sum b_n < +\infty$

$\sum (-1)^n$ irregolare

$\Rightarrow \sum a_n$ è irregolare

$a_n + b_n = (-1)^n$

Se fosse $\sum a_n = \pm\infty$, $\Rightarrow \sum (a_n + b_n) = \pm\infty$

$\Rightarrow \underbrace{\sum (-1)^n}_{\text{irregolare}} = \pm\infty$!!

Quindi per forza $\sum a_n$ è irregolare.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+3}{n+2}$

$a_n = \log \frac{n+3}{n+2} \to \log 1 = 0$

$\log \frac{n+3}{n+2} > \log 1 = 0$

$n+3 > n+2 \Rightarrow \frac{n+3}{n+2} > 1 \Rightarrow a_n > 0$

$\frac{n+3}{n+2} = 1 + b_n$ $\quad$ $\frac{n+3}{n+2} = \frac{n+2+1}{n+2} = 1 + \frac{1}{n+2}$

$b_n = \frac{n+3}{n+2} - 1 \to 0 = \frac{\cancel{n}+3-\cancel{n}-2}{n+2} = \frac{1}{n+2}$

$0 < a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}$ $\quad \sum \frac{1}{n} = +\infty$

Per il crit. del confr. asintotico, $\sum a_n = +\infty$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}_{a_n}$

Si tratta di una serie telescopica:

$a_n = b_n - b_{n+1}$ $\quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n$$
$$= (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \cancel{\dots} + (\cancel{b_n} - b_{n+1})$$
$$= 1 - b_{n+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 1$$

$\Rightarrow$ La serie $\sum a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.