Analisi Matematica - 20.3.2019 - prima parte

Tuesday, March 19, 2019 20:07

Criterio della radice

Criterio del rapporto

Rapporto $\to$ radice

A cosa servono: Devo fare il lim. di $\{a_n\}$.
Provo a fare il lim $\sqrt[n]{a_n}$ oppure di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se vengono $\neq 1$ allora so fare il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Applicazione: abbiamo visto che $a^n \to +\infty \quad a>1$

$n^b \to +\infty \quad b>0$

Cosa succede se faccio il lim. del rapporto?

$$\frac{a^n}{n^b} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \forall a>1 \ \forall b>0}$$

esponenziale batte potenza

Uso il criterio del rapporto per $b_n = \frac{a^n}{n^b}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)^b}\cdot\frac{n^b}{\cancel{a^n}} = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^b}_{\to 1} a \to a>1$$

$\Rightarrow b_n \to +\infty$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad \forall a>1}$$

fattoriale batte esponenziale

Applico il crit. del rapporto a $b_n = \frac{n!}{a^n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\overset{(n+1)\cancel{n!}}{(n+1)!}}{a^{\cancel{n+1}}}\cdot\frac{\cancel{a^n}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{a} \to +\infty > 1$$

$\Rightarrow b_n \to +\infty$.

$$\Rightarrow b_n \to +\infty .$$

In particolare $n! \to +\infty$

$$n! = \underbrace{\frac{n!}{a^n}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{a^n}_{\to +\infty} \to +\infty$$

Per esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{1000^n} = +\infty$$

• $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty}$$ n^n batte il $n!$

Applico il criterio del rapporto a $b_n = \frac{n^n}{n!}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$(n+1)^{n+1} = \cancel{(n+1)}(n+1)^n, \quad (n+1)! = \cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$$

$b_n \to +\infty$

Le potenze vincono su qualcosa? Sì su log

Si prova che

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \log_a n = +\infty \quad \forall a>1}$$

e che

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{\log_a n} = +\infty \quad \forall a>1, \forall b>0}$$

• $\lim \quad \log_2 n \quad - \lim \quad \frac{1}{\quad} = \left[\frac{1}{\quad}\right] = 0$

• $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 n}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{n^3}{\log_2 n}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$

Riassumendo, cons. le succ. (divergenti a $+\infty$)

$$\log_a n \quad n^a \quad a^n \quad n! \quad n^n.$$

Ognuna di esse è "più veloce" a divergere di quella scritta alla sua sinistra.

• $a_n = \frac{3^{n^2}}{n^n}$ Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Applico il criterio della radice ad a_n:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{3^{n^2}}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{3^n}{n} \to +\infty > 1$$

quindi $a_n \to +\infty$

• $a_n = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$

Pongo $b_n = n!$ e calcolo il lim. di $\frac{b_{n+1}}{b_n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \to +\infty$$

Per rapporto → radice anche

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$$

• $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

Applico rapp → radice a $b_n = n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$$

$$\frac{\;}{b_n} = \frac{\;}{n} \to 1$$

e quindi ottengo che $\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$.

LIMITI DI FUNZIONI

Vediamo come estendere la nozione di limite da successioni a funzioni.

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo

In quali punti c potrò calcolare $\lim_{x \to c} f(x)$?

Dipende da I.

Se $I = (a, b)$, può essere $c \in I$, $c = a$, $c = b$

Se $I = (-\infty, a)$ $\quad$ " $\quad$ $c \in I$, $c = a$, $c = -\infty$

Se $I = (a, +\infty)$ $\quad$ " $\quad$ $c \in I$, $c = a$, $c = +\infty$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ dom $f = (0, +\infty)$

Potrò calcolare: $\quad \lim_{x \to c} f(x) \quad \forall c > 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x$$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\quad$ NO!!

$\lim_{x \to -1} f(x)$ $\quad$ NO!!

<u>Def</u>: Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Sia $c \in I$ oppure uno degli estremi di I (eventualmente $+\infty$ o $-\infty$). Si dice che $f(x)$ tende ad ℓ per $x \to c$ e si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

se per ogni successione $\{x_n\}$ tale che

$$\left.\begin{array}{ll} \forall n & x_n \in I \\ & x_n \neq c \quad \text{def} \\ & x_n \to c \end{array}\right]$$

successioni TEST

si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell .$$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad x \in (0, +\infty)$

$x \to 0$

Una success. test è $x_n = \dfrac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n} \in (0,+\infty), \quad \frac{1}{n} \neq 0, \quad \frac{1}{n} \to 0$$

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

Questo non basta per dire che $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
Dovrei esaminare tutte le possibili succ. test.

OSS • Non è l'unica def. di lim. possibile

- Come per le succ, se il limite di una funzione esiste, è unico.

Analisi Matematica - 20.3.2019 - seconda parte

Tuesday, March 19, 2019 20:08

Per le funzioni si hanno più casi rispetto alle successioni.

$f : I \to \mathbb{R}$, sia c un punto in cui si può calcolare

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

Può accadere che

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & c = \pm\infty \quad e \quad \ell \in \mathbb{R} \\ 2) & c = \pm\infty \quad e \quad \ell = \pm\infty \end{array}\right] \text{simili alle successioni}$$

3) $c \in \mathbb{R}$ e $\ell = \pm\infty$

4) $c \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$

1) $c = \pm\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$ (limite finito all'infinito)

Esempio: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$\forall \{x_n\} : \left.\begin{cases} x_n \in \mathbb{R} \\ x_n \neq -\infty \text{ def.} \\ x_n \to -\infty \end{cases}\right\} \text{succ. test}$$

verificata da qualsiasi $\{x_n\}$

Devo provare che $e^{x_n} \to 0$

Devo verificare che $\forall \varepsilon > 0$: $|e^{x_n} - 0| \leq \varepsilon$ def.

$$|e^{x_n}| \leq \varepsilon \quad \text{"}$$

$$e^{x_n} \leq \varepsilon = e^{\log \varepsilon} \quad \text{"}$$

$$x_n \leq \log \varepsilon \quad \text{"}$$

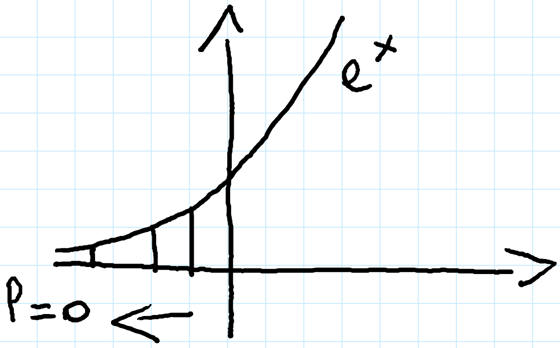
Ma l'ultima dis. risulta vera poiché $x_n \to -\infty$

Interpr. geometrica

Def: si dice che una funzione f ha un ASINTOTO orizzontale per $x \to +\infty$ (risp. per $x \to -\infty$) se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \right)$$



$y=0$ è un asintoto orizzontale per e^x per $x \to -\infty$

2) $c = \pm\infty$, $\ell = \pm\infty$ (limite infinito all'infinito)

Ex: $\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$

Succ. test: ogni $\{x_n\}$ t.c. $x_n > 0$
$(x_n \neq +\infty \text{ def})$
$x_n \to +\infty$

Fisso una $\{x_n\}$ succ. test e provo che
$$\log_{\frac{1}{2}} x_n \to -\infty .$$

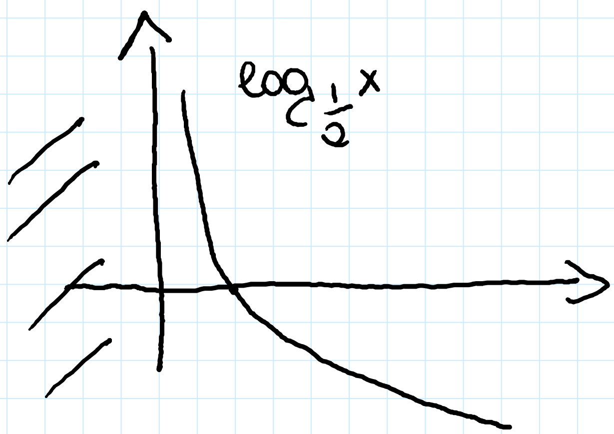
Devo verificare che $\forall M \in \mathbb{R}$

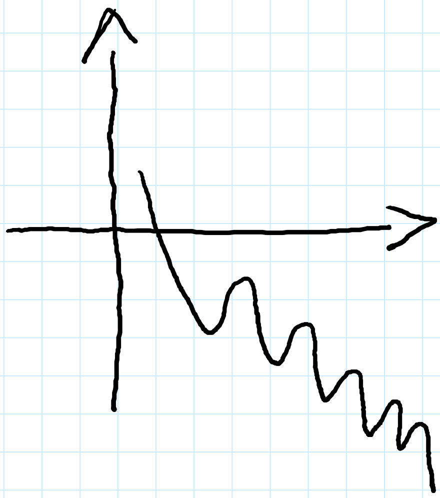
$\log_{\frac{1}{2}} x_n \leq M$ def. $\iff$

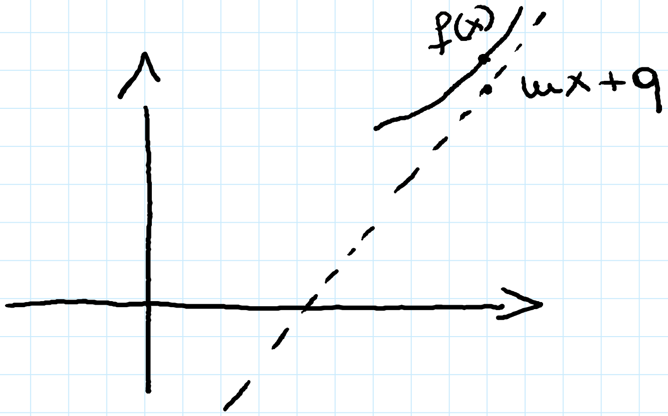
$\log_{\frac{1}{2}} x_n \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^M$ def. $\overset{\log_{\frac{1}{2}} \text{ decr.}}{\iff}$

$x_n \geq \frac{1}{2^M}$ def

L'ultima è vera poiché $x_n \to +\infty$.







Def: si dice che f ha un asintoto obliquo di eq. $y = mx + q$ ($m \neq 0$, $q \in \mathbb{R}$) per $x \to +\infty$ (risp. per $x \to -\infty$) se

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - q \right) = 0$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx - q \right) = 0 \right)$$

- EX : $f(x) = e^x + 2x + 1$ ha come asintoto obliquo per $x \to -\infty$ la retta $y = 2x + 1$

$$f(x) - 2x - 1 = e^x \longrightarrow 0 \quad x \to -\infty$$

Teorema f ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se e soltanto se

1) $\lim \dfrac{f(x)}{x} = m$ $\quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\exists$ dunque

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$

devono esistere ed essere tegli

In tal caso l'asintoto obliquo è

$$y = mx + q$$

Analogo criterio vale a $-\infty$.

3) $c \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$ (limite infinito al finito)

EX: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Succ. test: ogni $\{x_n\}$ t.c. $x_n \neq 0$ def. $x_n \to 0$

Fisso una $\{x_n\}$ e dimostro che $\frac{1}{x_n^2} \to +\infty$ cioè che

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{x_n^2} \geq M \text{ def.}$$

Se $M \leq 0$ $\quad \frac{1}{x_n^2} \geq 0 \geq M \quad \forall n$

Se $M > 0$ $\quad \frac{1}{x_n^2} \geq M$ def $\iff$

$$x_n^2 \leq \frac{1}{M} \text{ def } \iff$$

$$-\frac{1}{\sqrt{M}} \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ def}$$

$$|x_n - 0| \leq \frac{1}{}$$

$\sqrt{M}$

L'ultima è vera poiché $x_n \to 0$ (Appl. la def. di limite con $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{M}}$).

Analisi Matematica - 20.3.2019 - terza parte

Esercizi di riepilogo su lim. di successioni

Calcolare il $\lim_{n\to+\infty} a_n$

• $a_n = \sqrt[n]{\operatorname{sen} n + 3}$ $\qquad$ (già visto $\sqrt[n]{a} \to 1 \ \forall a>0$)

Osservo che $\qquad -1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1 \quad \forall n$

$$-1+3 \leq \operatorname{sen} n + 3 \leq 1+3$$

$$2 \leq \operatorname{sen} n + 3 \leq 4 \quad \overset{\sqrt[n]{\ }\ \text{cresc.}}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{2}} \leq \underset{\| \atop a_n}{\sqrt[n]{\operatorname{sen} n + 3}} \leq \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{4}}$$

Per il teo. di confronto, quindi $a_n \to 1$

In generale se $\{a_n\}$ verifica

$$0 \leq a \leq a_n \leq b \quad \text{definitivamente}$$

ove $a, b > 0$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

• $a_n = \sqrt[n]{n^2 - 2n + 3}$

$$a_n = \sqrt[n]{n^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} = \sqrt[n]{n^2}\ \sqrt[n]{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}$$

$$(n^2)^{\frac{1}{n}} = (n^{1/n})^2$$

$$= \underset{\downarrow \atop 1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \underset{\searrow \atop 1}{\sqrt[n]{\underbrace{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}}}$$

quindi è limitato

$1 \qquad \to 1$ quindi è limitata

$a_n \to 1 \cdot 1 = 1$

- $a_n = \sqrt[n]{n^9 + 7^n + \cos n!}$

Idea: sotto radice vince 7^n e $\sqrt[n]{7^n} = 7$

Mi aspetto che $a_n \to 7$

$$a_n = \sqrt[n]{7^n\left(\frac{n^9}{7^n} + 1 + \frac{\cos n!}{7^n}\right)} \qquad \sqrt[n]{7^n} = 7$$

$$= 7\sqrt[n]{1 + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{n^9}{7^n}} + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{\cos n!}{7^n}}} \qquad \frac{1}{\infty} = 0$$

$\cos n! \cdot \frac{1}{7^n} \to 0$

$\cos n!$ è limitato

e $\frac{1}{7^n} \to 0$

Quindi $\sqrt[n]{\underbrace{1 + \frac{n^9}{7^n} + \frac{\cos n!}{7^n}}_{\text{limitata}}} \to 1$

$a_n \to 7$

- $a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$

Applico il criterio del rapp.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overset{n+1}{(n \cancel{+1})!}}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{\cancel{n!}} = (n+1) \cdot \frac{2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cdots}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{\cdots}{\cancel{n!}} = (n+1) \cdots \frac{\cdots}{2^{n^2+2n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)}{2^{2n+1}} = \frac{n}{\underset{\overset{\parallel}{4^n}}{2^{2n}}} \; \frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{\to 1}}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{n}{4^n}}_{\to 0} \cdot \frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{\to 1}}{2} \to 0 < 1$$

Quindi anche $a_n \to 0$

- $a_n = 3^n - n! \qquad [+\infty - \infty]$

$$a_n = \underbrace{n!}_{+\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{0} - 1\Bigg) \to -\infty$$

- $a_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n} \qquad \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$a_n = \frac{2^n\left(\frac{n^3}{2^n}+1\right)}{3^n\left(\frac{n^2}{3^n}+1\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\overbrace{\frac{n^3}{2^n}}^{\to 0}+1}{\underbrace{\frac{n^2}{3^n}}_{\to 0}+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

1.

- $$a_n = \frac{2^n - \log n + n!}{n! + n^{10}}$$

$$a_n \sim \frac{n!}{n!} = 1$$

$$a_n = \frac{\cancel{n!}\left(\overset{\to 0}{\frac{2^n}{n!}} - \overset{\to 0}{\frac{\log n}{n!}} + 1\right)}{\cancel{n!}\left(1 + \underset{\to 0}{\frac{n^{10}}{n!}}\right)} \to 1$$

- $a_n = \sqrt[n]{4^n + n^4} \to 4$ (per esercizio).