Studio di funzione – Limiti

● Definizione di funzione continua in un punto x_0 e in un intervallo [a, b]

Data una funzione f(x), ed un punto x_0 appartenente ad dominio D della funzione,

La funzione f(x) si dice **continua** nel punto x_0 se:
$$\lim_{x \to x_0} [f(x)] = f(x_0)$$

Ovvero, se:
$$\lim_{x \to x_0^-} [f(x)] = \lim_{x \to x_0^+} [f(x)] = f(x_0)$$

Una funzione f(x) si dice **continua in un intervallo [a, b]** se è continua in tutti i punti dell'intervallo [a, b].

● Definizione di punto di discontinuità

Data una funzione f(x), ed un punto x_0 appartenente ad dominio D della funzione,
dati: $\lim_{x \to x_0^-} [f(x)]$; $\lim_{x \to x_0^+} [f(x)]$; $f(x_0)$

Se queste 3 valori NON sono uguali, allora il punto di accumulazione x_0 del dominio D, è un punto di **discontinuità** di f(x).

● Classificazione dei punti di discontinuità

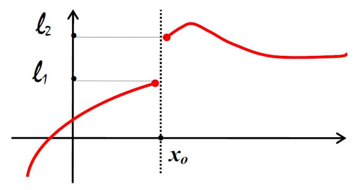
Il punto x_0 si dice:

Punto di discontinuità di 1° specie

Se i limiti sx e dx della funzione in x_0 sono <u>diversi</u> e <u>finiti</u>

$\ell_1 \neq \ell_2$; con ℓ_1, ℓ_2 finiti

$|\ell_2 - \ell_1|$ si dice "salto" della funzione

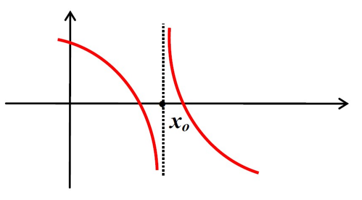


Punto di discontinuità di 2° specie

Se almeno 1 dei 2 limiti sx o dx in x_0:
- è uguale a $\pm\infty$

OPPURE
- non esiste

$\ell_1 = \pm\infty \quad \vee \quad \ell_2 = \pm\infty \quad \vee \quad \ell_1 = \emptyset \quad \vee \quad \ell_2 = \emptyset$

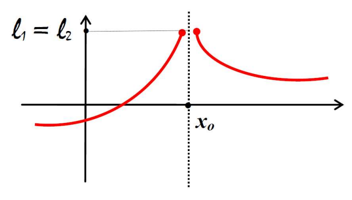


Punto di discontinuità di 3° specie (o "eliminabile")

Se i limiti sx e dx in x_0 sono uguali e finiti, ma:
- non esiste $f(x_0)$

OPPURE
- $f(x_0) \neq \ell$

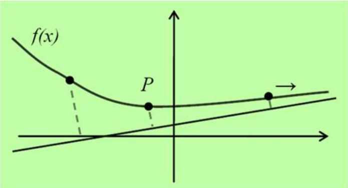
$\ell_1 = \ell_2 \neq f(x_0)$; con ℓ_1, ℓ_2 finiti



● Definizione formale di asintoto

Data una funzione f(x), ed un suo punto P,
si dice che la retta è **asintoto** di per la funzione f(x) se:
la distanza di P dalla retta tende a 0 quando P si allontana indefinitivamente lungo la funzione.

Questa definizione non esclude che in alcuni casi la funzione può intersecare l'asintoto.



● Passo 5) Ricerca degli asintoti

Asintoti verticali, di equazione: $x = x_0$

Dove si cercano:
- Nei punti di discontinuità della funzione
- Nell'estremo inferiore del dominio (se è finito E non appartiene al dominio)
- Nell'estremo superiore del dominio (se è finito E non appartiene al dominio)

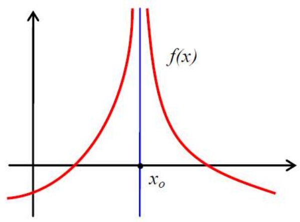
Come si cercano:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \ell = \pm\infty \to \text{l'asintoto esiste, con equazione } \mathrm{x} = \mathrm{x}_0 \\ \ell = n \text{ numero finito} \to \text{l'asintoto non esiste} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \ell = \pm\infty \to \text{l'asintoto esiste, con equazione } \mathrm{x} = \mathrm{x}_0 \\ \ell = n \text{ numero finito} \to \text{l'asintoto non esiste} \end{cases}$$

NB1: Per i punti di discontinuità, può capitare che l'asintoto sia $+\infty$ da un lato, e $-\infty$ dall'altro.

NB2: Per gli estremi, si studia il limite solo dal lato appartenente al dominio.
Ovvero, si studia ad esempio solo il limite destro dell'estremo inferiore.

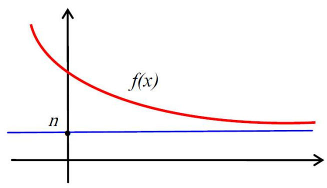


Asintoti orizzontali, di equazione: $y = n$

Dove si cercano:
- verso $+\infty$ (se il dominio lo consente)
- verso $-\infty$ (se il dominio lo consente)

Come si cercano:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \ell = n, \text{numero finito} \to \text{l'asintoto esiste, con equazione } \mathrm{y} = \mathrm{n} \\ \ell = \pm\infty \to \text{l'asintoto non esiste} \to \text{cerco l'asintoto obliquo} \\ \ell = N.E. \to l'\text{asintoto non esiste} \end{cases}$$



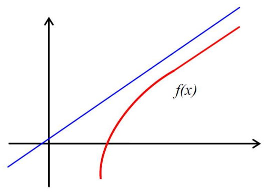
Asintoti obliqui, di equazione: $y = mx + q$

Dove si cercano:
- verso $+\infty$ (se il dominio lo consente, E non esiste già l'asintoto orizzontale)
- verso $-\infty$ (se il dominio lo consente, E non esiste già l'asintoto orizzontale)

Come si cercano:
Si calcolano la "m" e la "q" dell'equazione

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) \cdot \frac{1}{x} \right] = \begin{cases} \ell = \mathrm{n}, \text{numero finito}, \mathrm{n} \neq 0 \to \text{cerco q} \\ \ell = \pm\infty \to \text{l'asintoto non esiste} \\ \ell = 0 \to \text{l'asintoto non esiste} \end{cases}$$

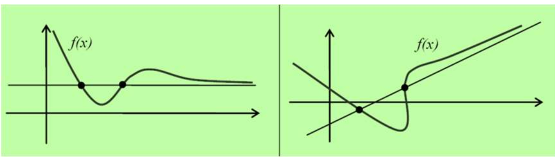
$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \begin{cases} \ell = q, \text{num. finito} \to \text{l'asintoto esiste, con eq. } \mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{q} \\ \ell = \pm\infty \to \text{l'asintoto non esiste} \end{cases}$$



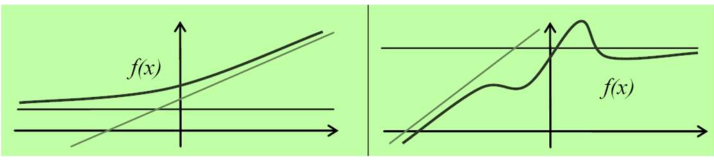
● Osservazioni ed esempi sulla ricerca di asintoti

Osservazioni ovvie sugli asintoti:

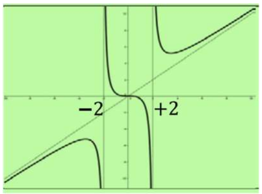
La funzione può intersecare in uno o più punti l'asintoto orizzontale. Lo stesso vale per l'asintoto obliquo.
Invece non può (ovviamente) intersecare l'asintoto verticale in più punti (sarebbe una corrispondenza, non una funzione).



La presenza di un asintoto orizzontale verso $+\infty$ esclude un asintoto obliquo verso $+\infty$. Lo stesso vale verso $-\infty$.
Ci sono funzioni che hanno un asintoto orizzontale in una direzione, e un asintoto obliquo nell'altra.

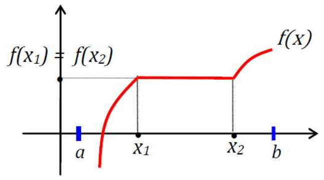
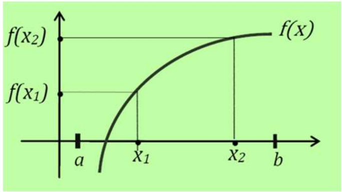
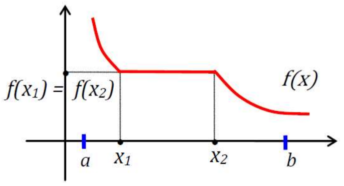
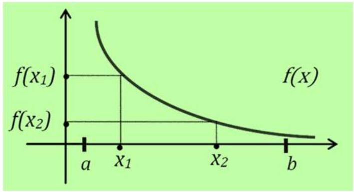


Esempio di ricerca di asintoti:

Data $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$	
Ricerca asintoti verticali	Il dominio è $D = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$. I punti di discontinuità sono $-2, +2$. 1) Controllo i limiti nei punti di discontinuità $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = [\dots] = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = [\dots] = +\infty \quad ; \quad \to \quad \text{asintoto: x} = -2$ $\left(\text{NB: } \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{(-2^-)^3}{(-2^-)^2-4} = \dfrac{(-2.0001)^3}{(-2.0001)^2-4} = \dfrac{-8.0001}{+4.0001-4} = \dfrac{-8.0001}{+0.0001} = -\infty\right)$ $\lim\limits_{x\to+2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = [\dots] = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = [\dots] = +\infty \quad ; \quad \to \quad \text{asintoto: x} = +2$ 2) Controllo i limiti verso gli estremi del dominio → non sono estremi finiti, quindi non effettuo il controllo
Ricerca asintoti orizzontali	Controllo se il dominio contiene $+\infty$ e $-\infty$. Controllo i limiti verso $+\infty$ e verso $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} = -\infty \quad \to \quad \text{non esiste asintoto}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} = +\infty \quad \to \quad \text{non esiste asintoto}$
Ricerca asintoti obliqui	Controllo se il dominio contiene $+\infty$ e $-\infty$. Controllo solo i lati per cui non c'è già un asintoto orizzontale (qui entrambi). $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2-4} \cdot \dfrac{1}{x}\right] = 1 \to cerco\ q\text{:} \ \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2-4} - (1) \cdot x\right] = 0 \to$ $\to m = 1, q = 0 \to$ l'asintoto sinistro ha equazione y = (1)x + 0 → y = x $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2-4} \cdot \dfrac{1}{x}\right] = 1 \to cerco\ q\text{:} \ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2-4} - (1) \cdot x\right] = 0 \to$ $\to m = 1, q = 0 \to$ l'asintoto destro ha equazione y = (1)x + 0 → y = x NB: in questo caso, le equazioni coincidono, ovvero c'è un unico asintoto obliquo che si estende verso $+\infty$ e $-\infty$.

Studio di funzione – Derivate

● Definizione di monotonia di una funzione

Una funzione si dice ____ in un intervallo chiuso [a, b] se:	
“Monotona crescente” $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ 	“Monotona strettamente crescente” $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 
“Monotona decrescente” $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ 	“Monotona strettamente decrescente” $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ 

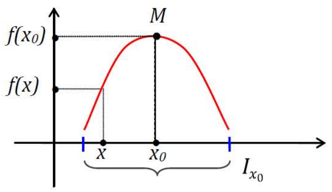
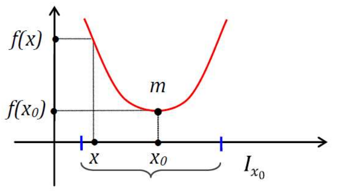
● Definizione di massimo relativo e minimo relativo

Considero un punto $P \in f(x)$, di coordinate $(x_P, f(x_P))$.

NB: Per controllare se un punto P è di massimo o minimo relativo NON si considera un intervallo [a, b].
Si guardano semplicemente i possibili intorni $I(x_P)$.

Se, comunque prendo l’intorno $I(x_P), \forall x \in I(x_P), f(x_P) \geq f(x)$, allora P è un massimo relativo.
Ovvero, se, comunque prendo l’intorno, P è il punto che si trova più in alto, allora P è un massimo relativo.

Lo stesso ragionamento vale per il minimo relativo.

Massimo relativo	Minimo relativo
	

NB: se P è un punto di massimo relativo, allora la funzione è concava verso l’alto in P. Lo stesso per il minimo relativo.

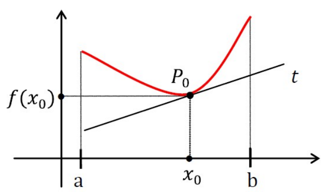
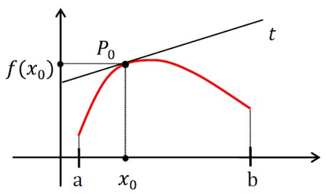
● Definizione di funzione concava in un intervallo [a, b]

Data $f(x)$, con dominio D, con [a, b] un intervallo incluso nel dominio.

Una funzione si dice concava verso l’alto in un intervallo [a, b] se,
per ogni x nell’intervallo [a, b], $f(x)$ si trova al di sopra della retta tangente nel punto P,
ovvero se: $\forall x \in [a,b], f(x) > f(x_P)$ (NB: “>”, non “≥”)

Lo stesso ragionamento vale per una funzione concava verso il basso in un intervallo [a, b].

Errore comune: “Ci sono mille possibili “tangenti” di $f(x)$ in P (rette che toccano $f(x)$ solo su P). Quale considero?”
Una retta tangente ad $f(x)$ in P **sfiora** $f(x)$ in un solo punto P. Una retta secante **interseca** $f(x)$ in un uno o più punti.
L’equazione della tangente ad $f(x)$ in P si ricava con l’interpretazione della derivata, sapendo che $m = f(x_p)$.

f(x) concava verso l’alto in [a, b]	f(x) concava verso il basso in [a, b]
	

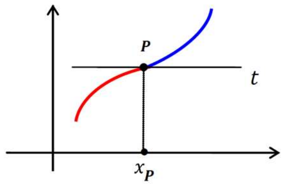
● Definizione di punto di flesso

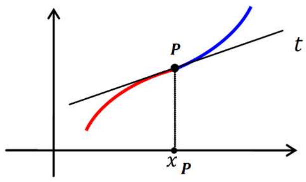
Data una funzione f(x) ed un punto $P \in f(x)$ di coordinate $(x_P, f(x_P))$.

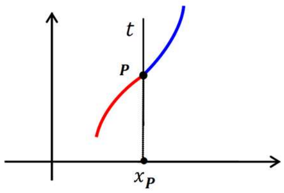
Un punto x_P si dice <u>punto di flesso</u> per una f(x) se la retta tangente ad f(x) nel punto P <u>attraversa</u> il grafico.
(Ovvero, se la retta tangente ricavata con l'interpretazione geometrica della derivata in realtà è secante)

Equivalentemente:
Un punto x_P si dice <u>punto di flesso</u> per una f(x) se la retta tangente ad f(x) nel punto P è di <u>separazione fra una concavità verso il basso e una verso l'alto (o viceversa)</u>.

Classificazione dei punti di flesso

Punto di flesso a tangente orizzontale 	Un punto x_0 si dice a tangente orizzontale per f(x) Se la retta tangente nel punto P attraversa il grafico, ed è parallela all'asse delle ascisse.

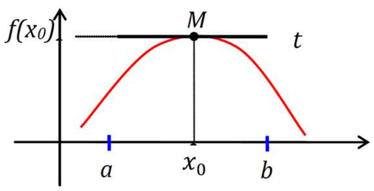
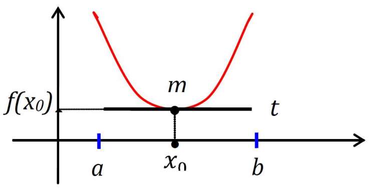
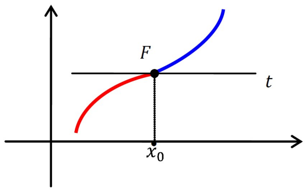
Punto di flesso a tangente NON orizzontale 	Un punto x_0 si dice a tangente verticale per f(x) Se la retta tangente nel punto P attraversa il grafico, e NON è parallela all'asse delle ascisse.

Caso particolare: Punto di flesso a tangente verticale 	Un punto x_0 si dice a tangente verticale per f(x) Se la retta tangente nel punto P attraversa il grafico, ed è parallela all'asse delle ordinate.

● Definizione di punto stazionario

Sia $y = f(x)$ una funzione di dominio D, con $[a, b] \in D$. Sia $x_0 \in [a, b]$.
x_0 è un <u>punto stazionario</u> di $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$.

Graficamente, se la derivata prima è m = 0, significa che x_0 ha una tangente orizzontale. Ci sono tre casi:

Massimo relativo	Minimo relativo	Flesso orizzontale
		
$f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) < 0$	$f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) > 0$	$f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) = 0$

NB: Interpretazione grafica della derivata seconda:
se $f''(x_0) < 0$, significa che tutti i punti intono al punto P_0 di ascissa x_0 sono più in basso di P_0.
Lo stesso ragionamento vale per $f''(x_0) > 0$.

● Passi 6-7) Studio di monotonia e flessi – Metodo 1 (Ponendo "> 0")

NB: Questo metodo (rispetto al metodo a seguire con "=0") è meno preciso.
Con questo metodo si possono individuare le zone in cui valgono certe proprietà (monotonia, concavità).
Ma non i valori precisi (punti di massimo/minimo, punti di flesso).

Questo metodo va bene quando non è esplicitamente richiesto un grafico preciso.

Per disegnare un grafico più preciso, dopo aver individuato le zone,
si possono calcolare a mano i valori di alcuni punti appartenenti alla funzione.

<u>NB: il prof Pisani accetta questo Metodo.</u>

● Passo 6) Studio di Monotonia; Ricerca di Massimi e Minimi relativi

1) Calcolo $f'(x)$

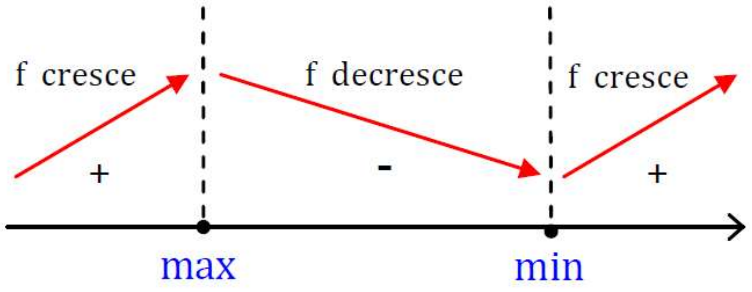
2) Pongo $f'(x) > 0$; Risolvo, e otterrò degli intervalli di valori $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \ldots$

3) Individuo le regioni di piano dove:

   3.1) Dove $f'(x_0) > 0$ → la funzione è monotona crescente

   3.2) Dove $f'(x_0) < 0$ → la funzione è monotona decrescente

4) Osservando i punti in cui f(x) cambia da crescente a decrescente (e viceversa),
   determino i vari punti x_P di massimo e minimo relativo
   NB: di questi punti vanno considerati solo quelli che appartengono al dominio D di f(x)



● Passo 7) Studio di concavità; Ricerca dei punti di flesso

<u>NB: il prof Pisani non richiede lo studio delle zone di concavità.</u>

1) Calcolo la derivata seconda $f''(x)$ $\quad$ $(Ricordiamo\colon\ f''(x) = D[D(f(x))]\ )$

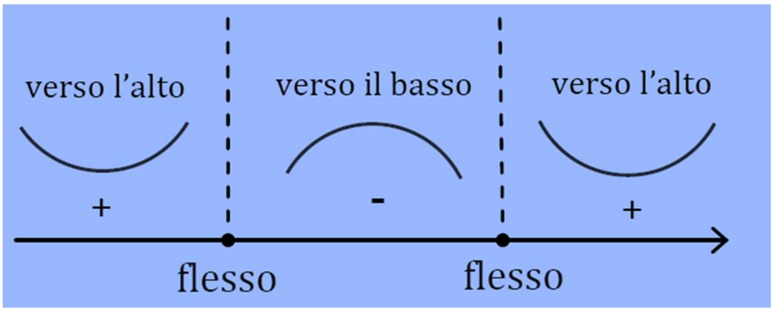
2) Pongo $f''(x) > 0$; Risolvo, e otterrò degli intervalli di valori $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \ldots$

3) Individuo le regioni di piano dove:

   3.1) Dove $f''(x_0) > 0$ → la funzione è concava verso l'alto

   3.2) Dove $f''(x_0) < 0$ → la funzione è concava verso il basso

4) Osservando il grafico della concavità, si possono individuare i punti di flesso in cui f(x) cambia concavità
   NB: di questi punti considero solo quelli che appartengono al dominio D di f(x)



● Passi 6-7) Studio di monotonia e flessi – Metodo 2 (Ponendo “= 0”)

NB: il prof Pisani non richiede lo studio preciso dei punti di massimo / minimo / flesso.

● Passo 6) Ricerca dei punti stazionari
(punti con $f'(x_0) = 0$: massimi relativi, minimi relativi, flessi orizzontali)

1) Calcolo $D\big(f(x)\big)$

2) Pongo $f'(x) = 0$; Risolvo, e otterrò dei valori x_0 , x_1 , x_2 , ...

3) Per ogni punto x_P, controllo se è un massimo relativo, un minimo relativo, o un punto di flesso orizzontale

3.1) Se: $f''(x_P) > 0 \rightarrow x_P$ è $massimo\ relativo$; $f''(x_P) < 0 \rightarrow x_P$ è $minimo\ relativo$; $f''(x_P) = 0 \rightarrow calcolo\ f'''(x_P)$

3.2) Se: $f'''(x_P) \neq 0 \rightarrow x_P$ è $flesso\ orizzontale$; $f'''(x_P) = 0 \rightarrow calcolo\ f^{(4)}(x_P)$

3.3) Si ripete ciclicamente il punto 3, aumentando il numero della derivata, fino a determinare cosa sia P.
Se: $f^{(4)}(x_P) > 0 \rightarrow x_P$ è $massimo\ relativo$; $f^{(4)}(x_P) < 0 \rightarrow min.rel.$; $f^{(4)}(x_P) = 0 \rightarrow f^{(5)}(x_P)$
Se: $f^{(5)}(x_P) \neq 0 \rightarrow x_P$ è $flesso\ orizzontale$; $f^{(5)}(x_P) = 0 \rightarrow calcolo\ f^{(6)}(x_P)$
Se: $f^{(6)}(x_P) > 0 \rightarrow x_P$ è $massimo\ relativo$; $f^{(6)}(x_P) < 0 \rightarrow min.rel.$; $f^{(6)}(x_P) = 0 \rightarrow f^{(7)}(x_P)$
Eccetera.

NB: Quindi, se $f''(x_0) = 0$, non è PER FORZA un punto flesso orizzontale.
x_0 potrebbe essere, ad esempio, un massimo relativo, in cui $f''(x_0) = 0$, ma $f^{IV}(x_0) < 0$

NB: Se trovo che, ad esempio, x_1 è un minimo relativo, ed x_2 è un massimo relativo,
allora f(x) è monotona crescente in $[x_1, x_2]$.

● Passo 7) Ricerca dei punti di flesso NON orizzontali
(punti con $f' \neq 0, f'' = 0$)

Definizione:
I punti di flesso a tangente NON orizzontale x_0 sono quei punti appartenenti al dominio di f(x),
che annullano la derivata seconda, ma NON annullano la derivata prima e la derivata terza.

Ovvero: x_0 è un punto di flesso a tangente NON orizzontale se $\begin{cases} f'(x_0) \neq 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$

Come si cercano:

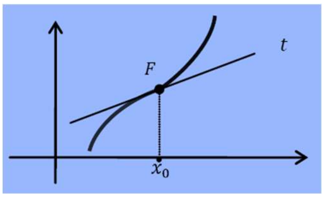
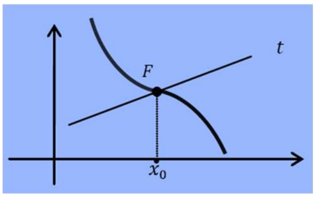
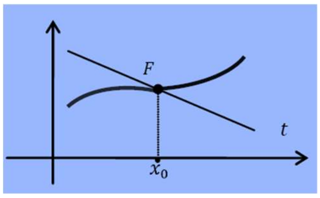
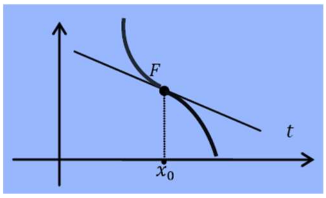
1) Calcolo la derivata seconda $f''(x)$ ($Ricordiamo$: $f''(x) = D\big[D\big(f(x)\big)\big]$)

2) Pongo $f''(x) = 0$; Risolvo, e otterrò dei valori x_1, x_2, x_3, ...

3) Per ognuno, controllo se $f'(x_P) \neq 0$

4) Per ognuno, controllo se $f'''(x_P) \neq 0$

Ci sono 4 casi:

Flesso ascendente	Flesso discendente	Flesso ascendente	Flesso discendente
			
$f'(x_0) > 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) > 0$	$f'(x_0) > 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) < 0$	$f'(x_0) < 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) > 0$	$f'(x_0) < 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) < 0$

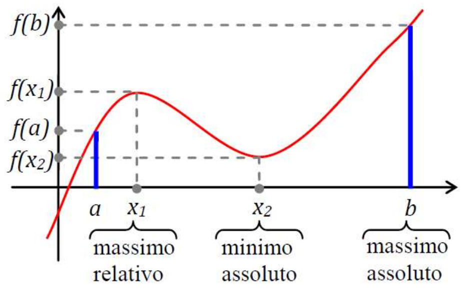
Spiegazione:
$f'(x_0)$, ricordiamo, indica la pendenza della retta tangente, quindi se $f'(x_0) > 0$, $m > 0$.
$f'''(x_0)$, invece, indica se il flesso è ascendente o discendente.
Quindi se $f'''(x_0) < 0$, allora i punti oltre P_0 sono più in basso.

● Definizione di massimo e minimo assoluto in un intorno [a, b]

Sia f(x) una funzione continua in un intervallo [a, b], $x_P \in [a, b]$.

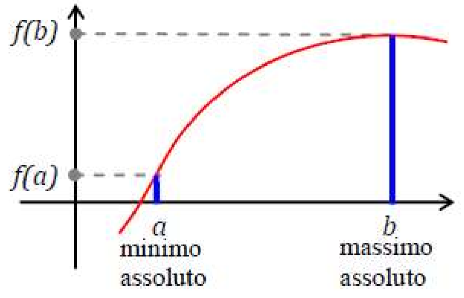
Un punto x_P si dice di massimo assoluto <u>in un intervallo [a, b]</u> se, $\forall x \in [a, b], f(x_P) \geq f(x)$.
Lo stesso ragionamento vale per il minimo assoluto.

NB: Massimo e minimo assoluto non si controllano per forza sull'intero dominio, ma anche su un sottoinsieme $[a, b] \in D$.



Esempio di differenza fra massimo/minimo relativo, e massimo/minimo assoluto:
- a non è niente in [a, b]
- x_1 è massimo relativo nell'intorno $I(x_1)$, ma non è il massimo assoluto nell'intervallo [a, b]
- x_2 è sia un minimo relativo nell'intorno $I(x_2)$, sia il minimo assoluto nell'intervallo [a, b]
- b è il massimo assoluto in [a, b], ma non è un punto di massimo relativo

NB: Se f(x) è monotona strettamente crescente in [a, b], allora a e b sono il minimo e il massimo assoluto in [a, b].



● Ricerca dei punti di massimo assoluto e minimo assoluto in un intervallo [a, b]

1) Si cercano i punti $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di massimo e minimo relativo di f(x), con uno dei metodi conosciuti
2) Dei punti x_P trovati, prendo solo quelli appartenenti ad [a, b]
3) Per ogni punto, calcolo $f(x_P)$, e lo confronto con $f(a)$ ed $f(b)$
4) Dopo aver controllato $f(a), f(b), f(x_P)$ per tutti gli x_P ,
   quello con l'ordinata più grande è il massimo in [a, b], quello con l'ordinata più piccola è il minimo in [a, b]

● Punti di non derivabilità di una funzione

Ricordiamo: f(x) non è derivabile in un punto x_0 se non è definito il limite del rapporto incrementale.

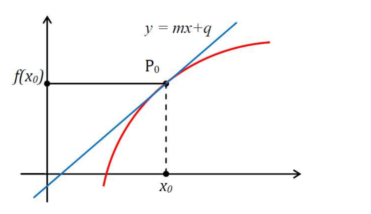
Consideriamo una funzione f(x) ed un punto x_0 appartenente al dominio D di f(x).

Se f(x) è derivabile in x_0 , allora f(x) è sicuramente anche continua in x_0.
Non è vero il contrario: f(x) potrebbe essere continua ma non derivabile in x_0.

<u>La derivabilità è condizione necessaria e sufficiente per la continuità.</u>
<u>La continuità è condizione necessaria ma non sufficiente per la derivabilità.</u>

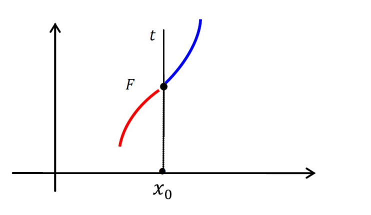
Circa la derivabilità in un punto x_0, ci possono essere 4 casi:

A) x_0 è derivabile



B) x_0 non è derivabile

B.1) x_0 è un punto di flesso a tangente verticale

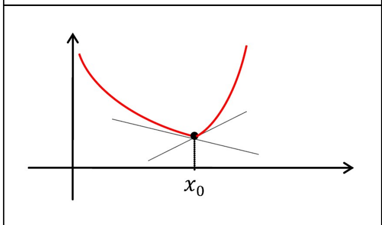


Se i limiti sx e dx della derivata prima sono entrambi $+\infty$ o entrambi $-\infty$.

Se: $\lim_{x\to x_0^-} f'^{(x)} = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0^+} f'^{(x)} = +\infty$

Oppure: $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0^+} f'^{(x)} = -\infty$

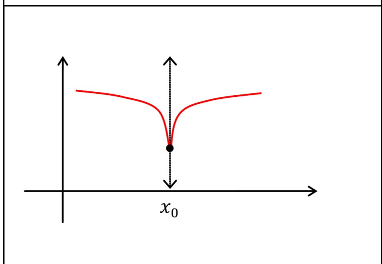
B.2) x_0 è un punto angoloso



Se i limiti sx e dx della derivata prima sono diversi, e almeno uno dei due è finito.

$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$; con ℓ_1 e/o ℓ_2 numero finito

B.3) x_0 è un punto cuspidale



Se i limiti sx e dx della derivata prima sono uguali uno a $+\infty$, l'altro a $-\infty$.

$\lim_{x\to x_0^-} f'^{(x)} = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0^+} f'^{(x)} = +\infty$
In tal caso x_0 ha la cuspide col vertice verso il basso (come qui in figura).

$\lim_{x\to x_0^-} f'^{(x)} = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0^+} f'^{(x)} = -\infty$
In tal caso x_0 ha la cuspide col vertice verso l'alto.

NB: I punti angolosi e cuspidali potrebbero essere punti di massimo o minimo relativi e/o assoluti in f(x),
ma non è possibile individuarli con il metodo classico (in quanto non vengono fuori come risultato della derivata).
Si può controllare se sono massimi o minimi guardando il grafico (disegnato facendo lo studio di monotonia e concavità).