Linguaggi e Grammatiche Liberi da Contesto

N.Fanizzi-V.Carofiglio

Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Bari

22 aprile 2016

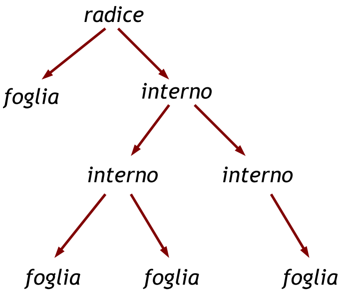
Grammatiche e Linguaggi Liberi da Contesto

- $G = (X, V, S, P)$ è una **grammatica libera da contesto** sse: $v \longrightarrow w \in P$ dove $v \in V$.
- Il linguaggio $L(G)$ si dice **linguaggio libero da contesto**.
- Il nome deriva dal fatto che un non terminale può essere sostituito indipendentemente dal contesto della forma di frase dove si trova.
- La sostituzione è sempre valida.
- Appartiene a questa categoria la maggior parte dei linguaggi di programmazione.

Alberi

Le derivazioni di una grammatica libera possono essere rappresentate graficamente da *alberi*

Albero: Grafo orientato, aciclico, connesso con al più un arco entrante per ogni nodo



La frontiera dell'albero è rappresentata dalle foglie lette da sinistra verso destra

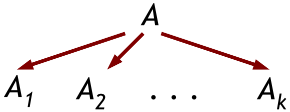
La lunghezza di un cammino dalla radice ad una foglia è data dal numero di non terminali incontrati

L'altezza dell'albero è data dalla lunghezza del cammino più lungo

Alberi di Derivazione

Data una grammatica libera $G = (X, V, S, P)$ e $w \in X^*$ tale che $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$ un albero di derivazione di w ha le seguenti proprietà:

1. radice $= S$
2. nodi interni $= V$
3. foglie $= X \cup \{\lambda\}$
4. se il nodo interno è A e $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sono i figli del nodo A allora $\exists A \longrightarrow A_1 A_2 \cdots A_k \in P$



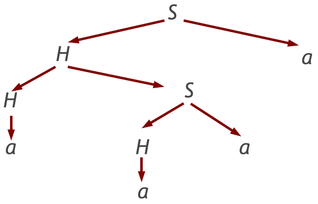
5. w si ottiene leggendo e concatenando le foglie da sinistra a destra

Osservazioni.

Un albero di derivazione non impone alcun ordine nell'applicazione delle produzioni in sequenza per ottenere una derivazione

- data una derivazione
  esiste uno ed un solo albero che la rappresenta
- dato un albero di derivazione
  esistono più derivazioni possibili
  a seconda dell'ordine scelto per l'applicazione delle produzioni

Esempio. Data una grammatica libera $G = (X, V, S, P)$ con $X = \{a\}$, $V = \{S, H\}$ e $P = \{S \xrightarrow{1} Ha, \quad H \xrightarrow{2} HS, \quad H \xrightarrow{3} a\}$
La stringa *aaaa* è in $L(G)$, come dimostra l'albero:



Da cui la stringa si ricava sia tramite:

$$S \Longrightarrow_1 Ha \Longrightarrow_2 HSa \Longrightarrow_3 aSa \Longrightarrow_1 aHaa \Longrightarrow_3 aaaa$$

sia con:

$$S \Longrightarrow_1 Ha \Longrightarrow_2 HSa \Longrightarrow_1 HHaa \Longrightarrow_3 Haaa \Longrightarrow_3 aaaa$$

Derivazioni Canoniche

Data una grammatica $G = (X, V, S, P)$ si dirà che la derivazione

$$S \Longrightarrow w_1 \Longrightarrow w_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow w_n = w$$

con $w_i = y_i A z_i$ e $w_{i+1} = y_i w_i z_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1$
è una **derivazione canonica destra**
(risp. **canonica sinistra**)
sse per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ risulta:

$$z_i \in X^* \qquad (\text{risp. } y_i \in X^*)$$

Esempio.
Considero la grammatica con produzioni:

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & 0B|1A \\ A & \longrightarrow & 0|0S|1AA \\ B & \longrightarrow & 1|1S|0BB \end{array} \right\}$$

Derivazione sinistra di 0011:

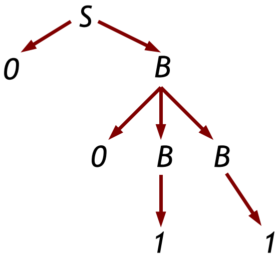
$$S \Longrightarrow 0B \Longrightarrow 00BB \Longrightarrow 001B \Longrightarrow 0011$$

Derivazione destra di 0011:

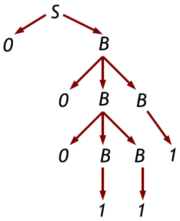
$$S \Longrightarrow 0B \Longrightarrow 00BB \Longrightarrow 00B1 \Longrightarrow 0011$$

Principio di sostituzione di sottoalberi

$\underline{S \stackrel{*}{\Longrightarrow} 0011}$



$\underline{S \stackrel{*}{\Longrightarrow} 000111}$



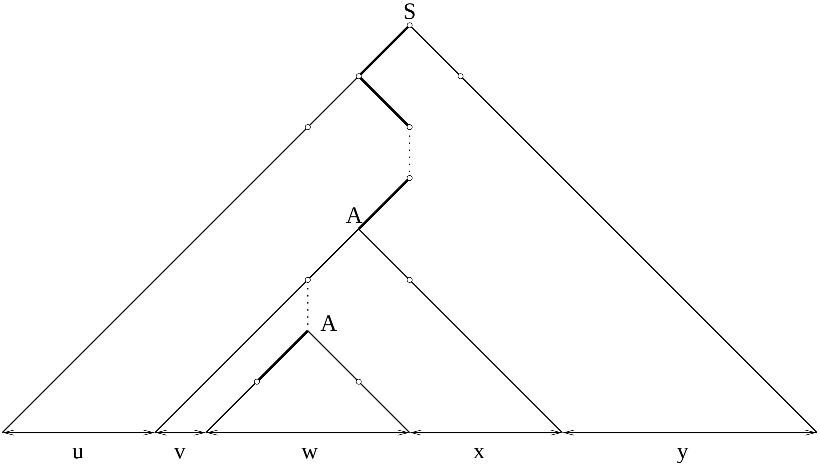
Iterando:

$$
\begin{array}{rl}
0011 & |w| = 4 \\
000111 & |w| = 6 \\
00001111 & |w| = 8 \\
\vdots & \vdots \\
00^n11^n & |w| = 2n+2
\end{array}
$$

Alberi di derivazione si possono sostituire con sottoalberi alberi di pari radice (non terminale)

- La lunghezza delle parole così ottenute cresce in maniera **costante** (lineare) quindi un linguaggio con parole che crescono in modo esponenziale non può essere libero
- Generalizzazione: supposto di incontrare almeno due volte un non terminale A nell'albero di derivazione di z.
  - il sottoalbero più basso con radice A genera w
  - quello più alto genera vwx
  - sostituendo l'albero più alto con il più basso si ottiene una derivazione valida della stringa uwy
  - invece, sostituendo quello più basso con quello più alto si ottiene una derivazione della stringa $uvvwxxy$ cioè uv^2wx^2y
  - iterando questa sostituzione si ottiene l'insieme

$$\{uv^nwx^ny \mid n \geq 0\}$$


S
A
A
u
v
w
x
y

Proposizione. Ogni linguaggio libero infinito deve contenere almeno un sottinsieme infinito di stringhe della forma

$$uv^n wx^n y \quad n \geq 0$$

Lemma. Data una grammatica $G = (X, V, S, P)$ libera, supponiamo che

$$m = \max\{|w| \in \mathbb{N} \mid A \longrightarrow w \in P\}$$

Sia T_w un albero di derivazione per una stringa w di $L(G)$. Se l'altezza di T_w è al più pari a $j \in \mathbb{N}$, allora $|w| \leq m^j$

Dim. Per induzione sull'altezza j:

(base) $j = 1 : |w| \leq m = m^1$

(passo) supponendo che il lemma valga per albero di altezza pari al più a j e la cui radice sia un non terminale,
si deve dimostrare la tesi per $j + 1$:
Sia $A \longrightarrow v$, dove $v = v_1 v_2 \cdots v_k, \quad |v| = k, \quad k \leq m$
la prod. che determina il livello più alto dell'albero
Ogni simbolo $v_i \in v, \ i = 1, \ldots, k$ può avere altezza al più uguale a j, essendo T_w in questo caso di altezza $j + 1$
Per ipotesi di induzione, questi alberi hanno al più m^j foglie.
Poiché $|v| = k \leq m$ la stringa w frontiera di T_w avrà lunghezza:

$$|w| \leq \overbrace{m^j + m^j + \cdots + m^j}^{k \text{ volte}} = |v| \cdot m^j = k \cdot m^j \leq m \cdot m^j = m^{j+1}$$

Pumping Lemma per linguaggi Liberi

Teorema uvwxy.
Sia L un linguaggio libero da contesto.
Esiste una costante p dipendente solo da L,
tale che se z è una parola di L di lunghezza maggiore di p ($|z| > p$),
allora z può essere scritta come $uvwxy$ in modo che:

1. $|vwx| \leq p$
2. al più uno tra v e x è la parola vuota ($vx \neq \lambda$)
3. $\forall i \in \mathbb{N}, i \geq 0 : \; uv^i wx^i y \in L$

Dim. Sia G una grammatica che genera L
$m = \max\{|v| | A \longrightarrow v \in P\}$ e $k = |V|$
Posto $p = m^{k+1}$, consideriamo $z \in L$ tale che $|z| > p$
Per il lemma: $|z| > p = m^{k+1}$ allora ogni albero di derivazione per z ha un'altezza maggiore di $k+1$, cioè esiste un cammino di lunghezza maggiore o uguale a $k+2$.
Ma $k = |V|$ quindi sul cammino ci sono almeno due NT ripetuti o un NT che compare 3 volte. Sia A l'NT ripetuto più in alto

Siccome A è l'NT ripetuto più in alto non vi sono altri NT ripetuti almeno due volte sotto la A più in alto, quindi il cammino dalla A superiore ad una foglia ha lunghezza al più $k+1$
Chiamiamo vwx la stringa derivata dal sottoalbero radicato nella A superiore, dove w è la sottostringa derivata dall'A inferiore

1. Dal Lemma risulta: $|vwx| \leq m^{k+1} = p$
2. Per assurdo se fosse $v = \lambda = x$ la sostituzione dell'albero radicato nell'A superiore con quello inferiore non provoca nessun cambiamento.
   Ma in tal caso esiste un cammino di lunghezza inferiore.
   Si ottiene un albero di derivazione di z di altezza al più pari a $k + 1$.
   Assurdo.
3. Applicando il principio di sostituzione a $z = uvwxy$ sostituiamo il sottoalbero radicato nell'A inferiore con quello dell'A superiore ottenendo: $uwy = uv^0wx^0y$
   Con la sostituzione inversa: uv^2wx^2y e ripetendo $i - 1$ volte: uv^iwx^iy

Osservazioni.

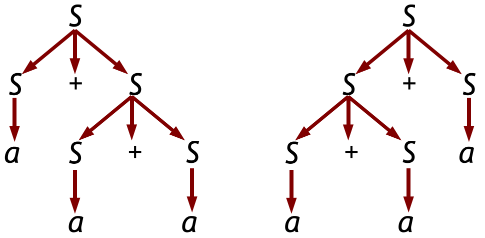
- Dato un linguaggio generato da una grammatica non libera non si può escludere che esista una grammatica libera che lo generi
- se un linguaggio infinito non rispetta il Pumping Lemma dei linguaggi liberi non potrà essere generato da una grammatica libera
- quindi questo teorema fornisce una condizione *necessaria* (ma non sufficiente) perché un linguaggio sia libero
- Si può utilizzare per dimostrare (per assurdo) che un linguaggio non sia libero

Ambiguità

Una grammatica G libera da contesto si dice **ambigua** sse esiste una stringa x in $L(G)$ che ha due alberi di derivazione differenti ovvero sse x ha due derivazioni sinistre (o destre)

Esempio. La grammatica libera $G = (X, V, S, P)$ con
$X = \{a, +\}$, $V = \{S\}$ e $P = \{S \longrightarrow S + S, \quad S \longrightarrow a\}$
è una grammatica ambigua.

Ad es. $w = a + a + a$ ottenibile con



Linguaggi Inerentemente Ambigui

Un linguaggio G si dice **inerentemente ambiguo** sse ogni grammatica che lo genera è ambigua

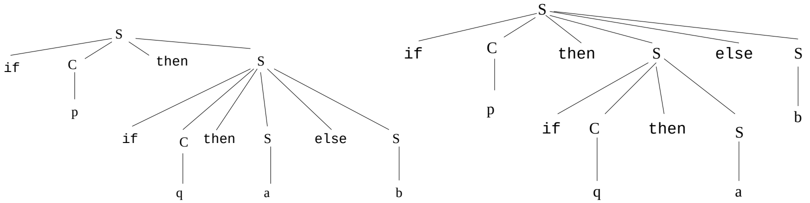
Esempio.

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0,\ (i = j) \vee (j = k)\}$$

Esempio. $G = (X, V, S, P)$
con $X = \{\mathtt{if}, \mathtt{then}, \mathtt{else}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{p}, \mathtt{q}\}$, $V = \{S, C\}$

$$P = \{ \quad S \longrightarrow \mathtt{if}\ C\ \mathtt{then}\ S\ \mathtt{else}\ S \ \mid\ \mathtt{if}\ C\ \mathtt{then}\ S \ \mid \mathtt{a} \mid\ \mathtt{b},$$
$$C \longrightarrow \mathtt{p} \ \mid\ \mathtt{q}\ \}$$

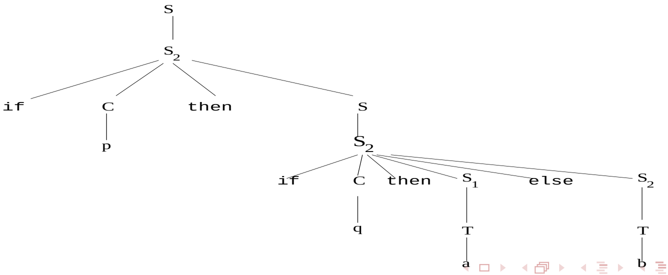
Si consideri $w = \mathtt{if\ p\ then\ if\ then\ a\ else\ b}$



Per ottenere $G' = (X, V', S, P')$ non ambigua usiamo la convenzione di associare ogni `else` alla `if` più vicina:

$V' = V \cup \{S_1, S_2, T\}$

$$P' = \left\{ \begin{array}{lll} S & \longrightarrow & S_1 \mid S_2 \\ S_1 & \longrightarrow & \texttt{if } C \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2 \mid T \\ S_2 & \longrightarrow & \texttt{if } C \texttt{ then } S \mid \texttt{if } C \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2 \mid T \\ C & \longrightarrow & p \mid q \\ T & \longrightarrow & \mathrm{a} \mid b \end{array} \right\}$$



Esercizi.

Dimostrare che i seguenti linguaggi non sono liberi da contesto:

- $L = \{a^t \mid t \text{ primo}\}$
- $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$
- $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$
- $L = \{a^i b^j \mid i = 2^j,\ \ i, j \geq 0\}$
- $L = \{a^k b^r \mid k > 0,\ \ r > k^2\}$

Esercizio 2. Dimostrare che $L = \{a^n b^n c^n | n > 0\}$ non è libero

Supponiamo che L sia libero.
Vale il *Pumping Lemma* per un certo $p \in \mathbb{N}$.
Si consideri $z = uvwxy = a^p b^p c^p \in L$ tale che $|z| = 3p > p$ ma $|vwx| \leq p$
Per vwx si hanno le seguenti possibilità.
In tutti questi casi si dimostra che $uv^2wx^2y \notin L$
quindi L non può essere libero.

- $vwx = a^k, \quad 0 < k \leq p$
  aggiungendo almeno a ed al più a^p si ottiene:

$$uv^2wx^2y = a^{p+k}b^pc^p$$

- $vwx = b^k, \quad 0 < k \leq p$ analogamente
- $vwx = c^k, \quad 0 < k \leq p$ analogamente

- $vwx = a^k b^r, \quad 0 < k + r \leq p$ per la 2. del Pumping Lemma:
  1. $v \neq \lambda, \ x \neq \lambda$:
     se $v \neq \lambda$ allora $v = a^{k'}$ perchè se fosse $v = a^k b^{r'}$ allora
     $$uv^2wx^2y = a^{p-k} a^k b^{r'} a^k b^{r'} b^s c^p \notin L$$
     con $p \leq s \leq 2(r - r') + p - r$
     Analogamente $x \neq \lambda$ implica che $x = b^{r'}$ per cui:
     $$uv^2wx^2y = a^{p+k'} b^{p+r'} c^p \notin L$$
     per $k', r' > 0$
  2. $v \neq \lambda, \ x = \lambda$
     per le considerazioni fatte: $v = a^{k'}, \ 0 < k' \leq k$ e
     $$uv^2wx^2y = a^{p+k'} b^p c^p \notin L$$
  3. $v = \lambda, \ x \neq \lambda$: analogamente
- $vwx = b^k c^r, \quad 0 < k + r \leq p \qquad$ caso analogo al precedente

Esercizio 3. Dimostrare che $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ non è libero

Consideriamo $L = \{\lambda, a, aaaa, a^9, a^{16}, \ldots\}$ e supponiamo che sia libero.
Vale il *Pumping Lemma* per un certo $p \in \mathbb{N}$.
Considero allora $z = uvwxy = a^{p^2} \in L$ tale che $|z| = p^2 > p$
Anche $uv^2wx^2y \in L$ (per la 3. del Lemma)
Ma si osservi l catena di maggiorazioni:
$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx| = |z| + |vx| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$ rissumendo: $|uv^2wx^2y| < (p+1)^2$
Inoltre $|uv^2wx^2y| = |z| + |vx| > |z| = p^2$
Perciò z ha una lunghezza compresa (non uguale) tra due quadrati successivi, ciò implica che $uv^2wx^2y \notin L$.
Assurdo, quindi L non è libero