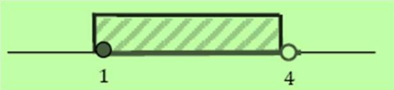
Topologia della retta

1) Definizioni di base

● Intervallo

L'insieme di tutti i valori compresi fra due estremi (finiti o infiniti).
Ognuno dei due estremi può essere incluso o escluso.

Esempio: In ℝ, l'insieme [1, 4) è un intervallo. Si può scrivere anche come [1, 4[, o come $1 \leq x < 4$.
In ℝ, l'insieme {1, 2, 3} NON è un intervallo, perché non contiene TUTTI i valori compresi fra 1 e 4.



● Minimo di un insieme A

L'elemento più piccolo appartenente all'insieme A. Formalmente: m è il minimo di A se $\begin{cases} m \in A \\ m \leq x, \ \forall x \in A \end{cases}$

Osserva che il minimo di A esiste solo se A è chiuso inferiormente.

Esempio:

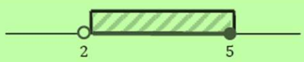
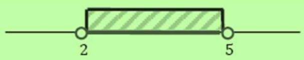
dato l'insieme [2, 5 [il minimo è 2	
dato l'insieme] 2, 5 [il minimo *non esiste*	

● Massimo di un insieme A

L'elemento più grande appartenente all'insieme A. Formalmente: M è il massimo di A se $\begin{cases} M \in A \\ M \geq x, \ \forall x \in A \end{cases}$

Osserva che il massimo di A esiste solo se A è chiuso superiormente.

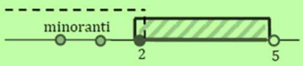
Esempio:

dato l'insieme] 2, 5] il massimo è 5	
dato l'insieme] 2, 5 [il massimo *non esiste*	

● Minorante di un insieme A

Qualsiasi elemento (appartenente o no ad A) minore o uguale di tutti gli elementi di A.
Ovviamente il minimo di A fa parte dei minoranti.

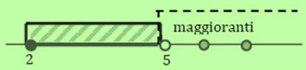
Osserva che l'insieme dei minoranti, se esiste, è sempre chiuso superiormente (dal minimo di A).

dato l'insieme [2, 5 [2, 1, 0 … sono minoranti	
dato l'insieme [2, 5 [l'insieme dei minoranti è l'intervallo] −∞ , 2]	
dato l'insieme] 2, 5 [l'insieme dei minoranti è sempre l'intervallo] −∞ , 2]	

● Maggiorante di un insieme A

Qualsiasi elemento (appartenente o no ad A) maggiore o uguale di tutti gli elementi di A.
Ovviamente il massimo di A fa parte dei maggioranti.

Osserva che l'insieme dei minoranti, se esiste, è sempre chiuso inferiormente (dal maggiore di A).

dato l'insieme [2, 5 [5, 6, 7… sono maggioranti	
dato l'insieme [2, 5 [l'insieme dei maggioranti è l'intervallo [5 , +∞ [	
dato l'insieme [2, 5] l'insieme dei maggioranti è sempre l'intervallo [5 , +∞ [	

● Estremo inferiore di un insieme A
Il più grande dei minoranti di A. Si indica con il simbolo **inf(A)**.
NON è necessariamente il minimo di A. Può anche NON appartenere ad A.

<u>Osserva che in un insieme come]−∞, 2], l'estremo inferiore è −∞.</u>

dato l'insieme $A =]\,2,5\,]$ l'estremo inferiore di A è **2** in simboli: $inf(A) = \mathbf{2}$ infatti l'insieme dei minoranti di A è $]-\infty\,,2\,]$ il cui massimo è **2**		
Osserva che se l'insieme non è limitato inferiormente, l'estremo inferiore è $-\infty$		
B= $]-\infty,5]$ $inf(B) = -\infty$	C = $]\,1,4\,]$ $inf(C) = \mathbf{1}$	D = $[\,1,4\,]$ $inf(D) = \mathbf{1}$

● Estremo superiore di un insieme A
Il più piccolo dei maggioranti di A. Si indica con il simbolo **sup(A)**.
NON è necessariamente il massimo di A. Può anche NON appartenere ad A.
<u>Osserva che in un insieme come [5, +∞[, l'estremo superiore è +∞.</u>

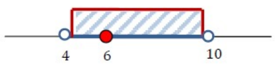
esempi		
dato l'insieme $A =]\,2,5\,[$ l'estremo superiore di A è **5** in simboli: $supf(A) = \mathbf{5}$ infatti l'insieme dei maggioranti di A è $[\,5\,,+\infty\,[$ il cui minimo è **5**		
Osserva che se l'insieme non è limitato superiormente, l'estremo superiore è $+\infty$		
$B =]\,3,+\infty\,[$ $sup(B) = +\infty$	$C =]\,3,7\,]$ $sup(C) = \mathbf{7}$	$D =]\,3,7\,[$ $sup(D) = \mathbf{7}$

---

2) Definizioni introduttive ai limiti

● Intorno completo di un punto x_0
Un qualsiasi intervallo <u>aperto</u> che contiene il punto x_0.

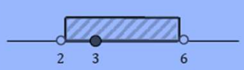
Esempio: Dato il punto $x_0 = 6$, l'intervallo]4, 10[è un intorno completo di 6.
Si possono prendere potenzialmente infiniti intorni completi (tranne se ad esempio il dominio è limitato).



● Intorno circolare di un punto x_0
Un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0, in cui x_0 dista equamente da ambi gli estremi.
Ovvero: $|x_0 - estremo_1| = |x_0 - estremo_2|$.

Esempio: Dato il punto $x_0 = 4$, l'intervallo]2, 6[è un intorno completo di 4.
Anche qui, si possono prendere potenzialmente infiniti intorni circolari.

● Punto di accumulazione x_0 dell'insieme A
x_0 è un punto di accumulazione di A se IN OGNI possibile intorno di x_0 vi è ALMENO un elemento x', con $x' \in A, x' \neq x_0$.
x_0 può anche non appartenere ad A (Esempio: inf(A) $= x_0$, con A intervallo aperto).

esempi		
x_0 appartiene ad A x_0 è di accumulazione per A	sia $x_0 = 3$ ed $A =]\,2\,,6\,[$ 3 appartiene ad A ed è di accumulazione	
x_0 *non* appartiene ad A x_0 è di accumulazione per A	sia $x_0 = 2$ ed $A =]\,2\,,6\,[$ 2 non appartiene ad A ed è di accumulazione	
x_0 *non* appartiene ad A x_0 non è di accumulazione per A	sia $x_0 = 1$ ed $A =]\,2\,,6\,[$ 1 non appartiene ad A e non è di accumulazione	
x_0 appartiene ad A x_0 non è di accumulazione per A	sia $x_0 = 1$ ed $A = \{1\} \cup]\,2\,,6\,[$ 1 appartiene ad A e non è di accumulazione