Prova scritta di Analisi Matematica del 16.4.2018

1. $f(x) = \log(x+1) - \operatorname{arctg} x$

(a) Dominio: $x+1>0$ ← perché sia ben def. $\log(x+1)$

$x > -1$

$\operatorname{dom} f = (-1, +\infty)$

(b) Limiti significativi: -1, $+\infty$

Per $x \to -1$ $\quad x+1 \to 0 \Rightarrow \log(x+1) \to -\infty$

$\operatorname{arctg} x \to \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$f(x) \to -\infty$

Per $x \to +\infty$ $\quad x+1 \to +\infty \Rightarrow \log(x+1) \to +\infty$

$\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$f(x) \to +\infty$

$x=-1$ è un asintoto verticale di f.

A $+\infty$ non c'è asintoto orizzontale, potrebbe esistere un asintoto obliquo. Per stabilirlo occorre calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log(x+1)}{x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \to 0$$

↳ x inf. di ordine sup. a $\log(x+1)$

→ $\operatorname{arctg} x$ è lim. $\frac{1}{x} \to 0$

$\Rightarrow$ Non esiste alcun asintoto obliquo a $+\infty$.

(c) $\forall x \in \operatorname{dom} f$

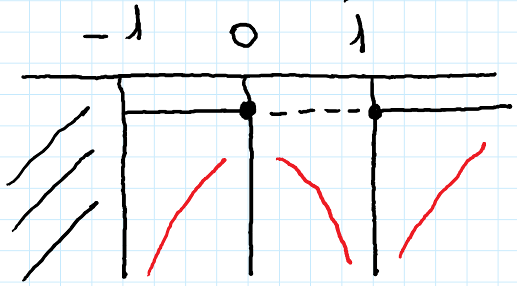
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x-1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}$$

↳ $>0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f$

$f'(x) \geqslant 0$ in dom f $\iff$

$x^2 - x \geqslant 0 \iff x \leq 0$ o $x \geqslant 1$



f è crescente in $(-1,0)$ e in $(1,+\infty)$;

f è decrescente in $(0,1)$

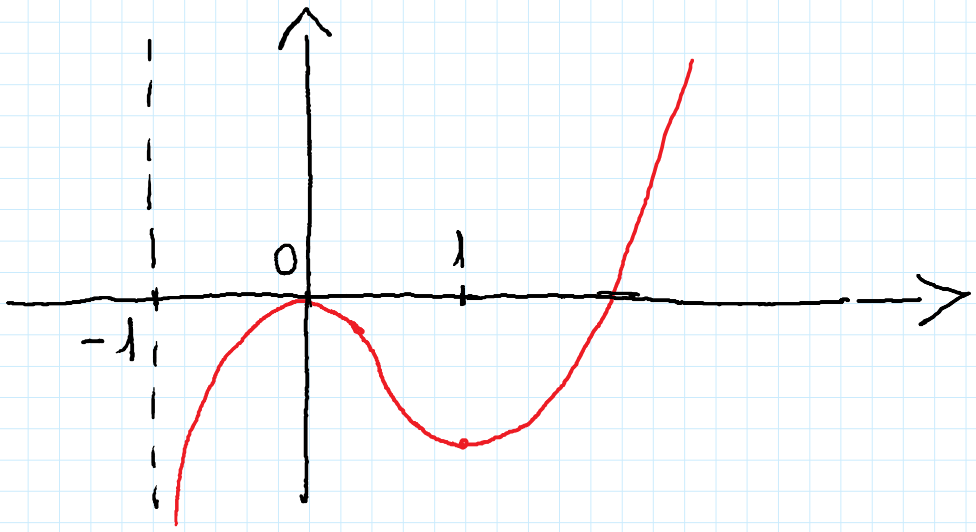
$x=0$ è un punto di massimo relativo di f e

$$f(0) = \log_e 1 - \operatorname{arctg} 0 = 0$$

$x = 1$ è un punto di minimo relativo di f e

$$f(1) = \log_e 2 - \operatorname{arctg} 1 = \log_e 2 - \frac{\pi}{4}$$

(d) Grafico di f :



(e) $\operatorname{Im} f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha :

1 sol. se $\lambda < f(1)$;

2 sol. se $\lambda = f(1)$

3 sol. se $f(1) < \lambda < f(0) = 0$;

2 sol. se $\lambda = f(0) = 0$;

1 sol. se $\lambda > f(0)=0$.

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \log(2+x)}{e^{1-\cos x}-1} = \ell$$

per $x \to 0$ $\quad \operatorname{sen} x \sim x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \sim x^2$

$\log(2+x) \sim \log 2$

$1-\cos x \to 0 \Rightarrow$

$e^{1-\cos x}-1 \sim 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

Quindi
$$\frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \log(2+x)}{e^{1-\cos x}-1} \sim \frac{x^2 \log 2}{\frac{1}{2}x^2} = 2\log 2 \Rightarrow$$

$\ell = 2\log 2$

3. $$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$$

Si tratta di un integrale improprio.
Occorre scomporre la funzione integranda.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2+ax+bx+b+cx^2}{x^2(x+1)}.$$

Quindi
$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-a=1 \\ a=-b=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

Allora

Allora

$$I = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \left(\frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[-\log|x| - \frac{1}{x} + \log|x+1| \right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[\log\left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} \right]_1^{\omega}$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left(\underbrace{\log\left| \frac{\omega+1}{\omega} \right|}_{\downarrow \ \log 1 = 0} - \underbrace{\frac{1}{\omega}}_{\downarrow \ 0} - \log 2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \log 2$$

4. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$ è una serie di potenze.

Posto $a_n = \frac{1}{n+1}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 .$$

Quindi la serie converge assolutamente se $x \in (-1, 1)$

Se $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

e non converge poiché $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

Se $x = -1$ la serie diventa

∞

Se $x=-1$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}$$

e converge per il criterio di Leibnitz, poiché la succ. $b_n = \frac{1}{n+1}$, $n \geq 0$ è positiva, decrescente e infinitesima.

Quindi, in conclusione, la serie converge se $x \in [-1, 1)$ e converge assolutamente se $x \in (-1, 1)$.