# Capitolo 4

# Potenze e radici

## 4.1 Funzioni potenza

Abbiamo definito le potenze ad esponente intero. Ora, fissato $n \in N$, $n \geq 1$, rimane immediatamente definita la funzione potenza $n$-sima

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto x^n \in \mathbf{R}. \tag{4.1}$$

Ricordiamo che per $n = 1$ abbiamo la funzione identica che già conosciamo.

In fase preliminare studiamo la funzione (4.1) nell'intervallo $[0, +\infty)$.

La prima proprietà è di facile dimostrazione (utilizzando il principio di induzione).

**Proposizione 4.1** *La funzione $f$ su $[0, +\infty)$ è strettamente crescente (quindi ingettiva).*

Sappiamo che $f(0) = 0$, quindi dalla Proposizione 4.1 consegue che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.

La seconda proprietà è tutt'altro che banale.

**Teorema 4.2 (esistenza della radice $n$-sima)** *Per ogni $b \geq 0$ esiste $x_0 \geq 0$ tale che*

$$x_0^n = b.$$

In forza dell'ingettività l'elemento $x_0$ previsto dal Teorema 4.2 è unico (e prende il nome tradizionale di *radice* $n$-sima *aritmetica* di $b$).

Dal punto di vista geometrico il Teorema 4.2 stabilisce che, per ogni retta orizzontale di equazione $y = b$, con $b \geq 0$, esiste un (unico) punto di intersezione con il grafico di $f(x)$. Infatti il punto $(x_0, b)$ appartiene sia alla retta $y = b$ (evidentemente), sia al grafico (in quanto $y = f(x_0)$).

Dal punto di vista grafico questo è un risultato di "continuità": poiché non deve presentare lacune, potremo disegnare il grafico di $f$ come una linea continua (nel senso tradizionale, cioè senza dover mai staccare la matita dal foglio o il gesso dalla lavagna).

**Osservazione 4.3** *Abbiamo visto che su $[0, +\infty)$ la funzione assume valori positivi ossia*

$$f([0, +\infty)) \subset [0, +\infty) \tag{4.2}$$

*Il Teorema 4.2 equivale a dire che*

$$[0,+\infty) \subset f([0,+\infty))$$

*e pertanto, tenuto conto di (4.2),*

$$f([0,+\infty)) = [0,+\infty).$$

*Dunque la funzione*

$$f : x \in [0,+\infty) \mapsto x^n \in [0,+\infty)$$

*è una bigezione.*

Sussiste infine la seguente proprietà.

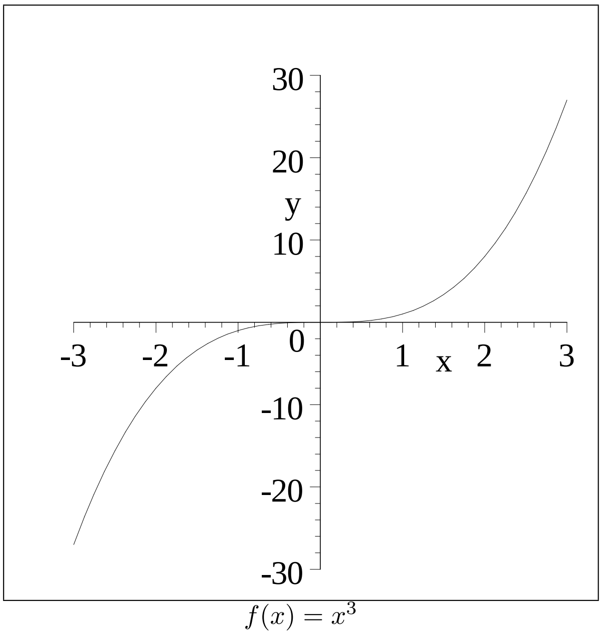
**Proposizione 4.4** *La funzione potenza, ristretta all'intervallo* $[0,+\infty)$*, è convessa.*

Per passare al grafico dobbiamo distinguere due casi.

### 4.1.1 $n$ dispari

Se $n$ è dispari, la funzione potenza è dispari e si realizza una bigezione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$.

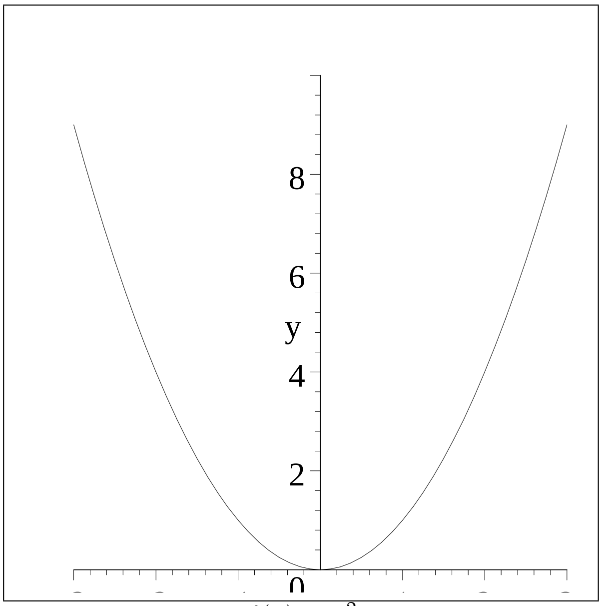
Abbiamo un grafico di questo tipo.




$f(x) = x^3$

### 4.1.2 $n$ pari

In questo caso abbiamo una funzione pari. Il grafico è di questo tipo




$f(x) = x^2$

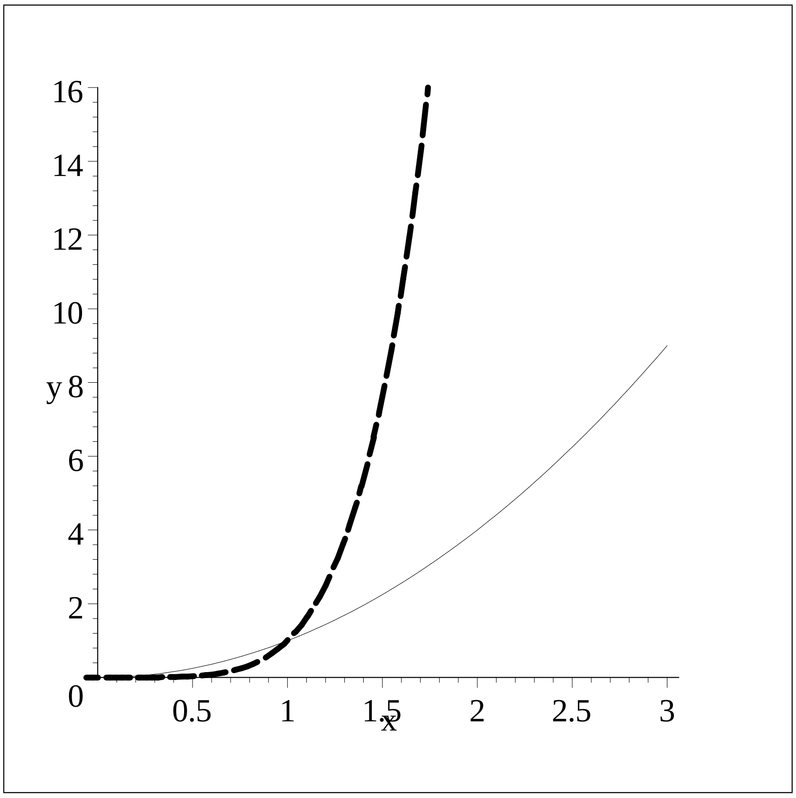
### 4.1.3 Confronto tra potenze diverse

Quale che sia $n \in \mathbf{N}$, pari o dispari, il grafico di $p_n(x) = x^n$ ristretto a $[0, +\infty)$ presenta le medesime proprietà qualitative:

- $p_n(0) = 0$, $p_n(1) = 1$;

- funzione crescente, convessa, non limitata superiormente.

E' interessante confrontare i grafici: osserviamo ad esempio i grafici di $x^2$ (linea continua sottile) e $x^5$ (linea spessa tratteggiata).




Dunque al crescere di $n$ si osserva:

- un maggiore schiacciamento del grafico in $[0, 1)$;
- una crescita più ripida in $(1, +\infty)$.

## 4.2 Radice $n$-sima

A livello elementare si dice che $\sqrt[n]{x}$ è un numero tale che, elevato alla potenza $n$-sima, ci restituisce il valore $x$. In base a questa definizione potremmo affermare (sbagliando!!!) che

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

Per noi la radice $n$-sima è una funzione.

Se la radice è definita come una funzione, immediatamente consegue che essa assume un unico valore; inoltre dovremo delimitare la scelta di $x$.

Come per la funzione potenza dobbiamo distinguere due casi.

### 4.2.1 $n$ dispari

La definizione è più semplice. La funzione potenza

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto x^n \in \mathbf{R}$$

è bigettiva, dunque la funzione radice $n$-sima è la funzione inversa della funzione potenza $n$-sima

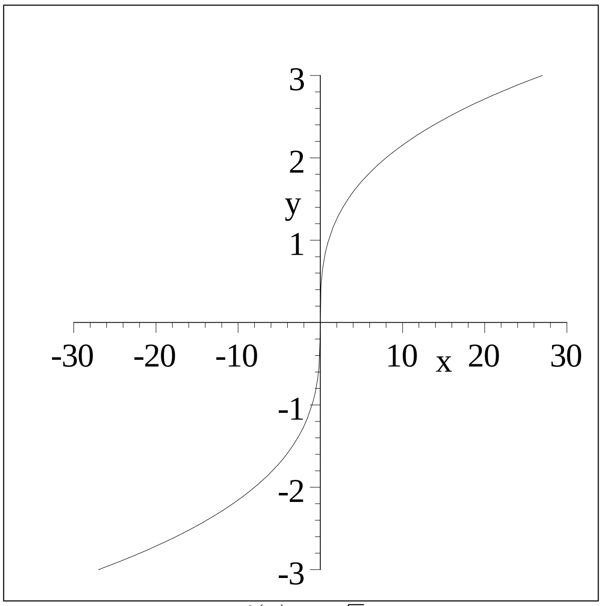
$$x \in \mathbf{R} \mapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbf{R}$$

Se proviamo a ricordare la definizione di funzione inversa, abbiamo, per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{x^n} = x$$

Osserviamo che la prima di queste formule è quella che dà origine alla definizione elementare di radice.

Al pari della funzione corrispondente funzione potenza, la radice ad esponente dispari è definita in $\mathbf{R}$ ed è strettamente monotona crescente, dispari.



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

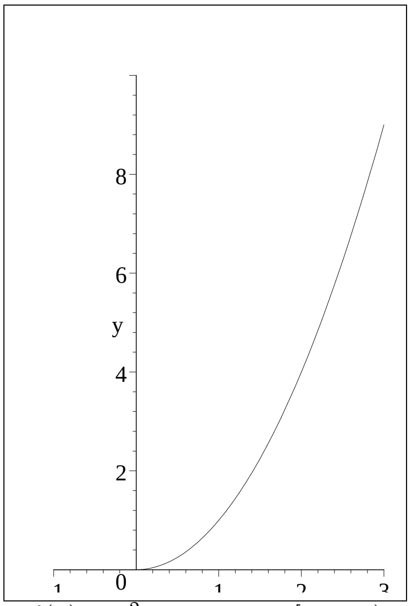
### 4.2.2 $n$ pari

In questo caso la funzione potenza è pari quindi non invertibile.

Tuttavia sappiamo che la funzione

$$f : x \in [0, +\infty) \mapsto x^n \in [0, +\infty)$$

è invertibile.




$f(x) = x^2$ ristretta a $[0, +\infty)$

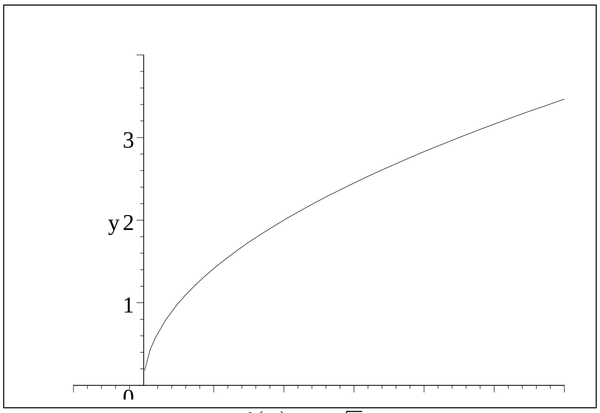
Possiamo definire la radice $n$-sima come inversa di questa funzione.

$$x \in [0, +\infty) \mapsto \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty)$$

Formalmente valgono le medesime proprietà viste sopra, a patto di assumere $x \in [0, +\infty)$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{x^n} = x.$$

Al pari della restrizione che vi ha dato origine, la funzione radice è strettamente monotona crescente.




$f(x) = \sqrt{x}$

### 4.2.3 Avvertenze sulle radici

Assumendo $n = 2$ ed $n = 3$ come prototipo dei numeri pari e dispari possiamo sintetizzare l'esistenze/non esistenza di radici come segue

| | |
|---|---|
| $\sqrt{4} = 2$ | $\sqrt[3]{8} = 2$ |
| $\sqrt{-4}$ non esiste | $\sqrt[3]{-8} = -2$ |

Dalle proprietà delle potenze ad esponente naturale si deducono alcune regole di commutazione/semplificazione, valide nel caso di radici con argomento positivo. Ad esempio

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{x^m} &= \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \\ \sqrt[nk]{x^{mk}} &= \sqrt[n]{x^m}\end{aligned}$$

Queste semplificazioni non sono valide in presenza di radici ad indice dispari con radicando negativo. Ad esempio

$$\sqrt[6]{x^2} \neq \sqrt[3]{x}$$

Per provarlo consideriamo $x = -8$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{(-8)^2} &= \sqrt[6]{64} = 2 \\ \sqrt[3]{-8} &= -2\end{aligned}$$

Restiamo in tema di semplificazioni. Nel caso di $n$ pari, abbiamo già osservato che, in base alla definizione, per ogni $x \geq 0$

$$\sqrt[n]{x^n} = x.$$

In realtà, il primo membro di tale uguaglianza ha senso per ogni $x \in \mathbf{R}$, in quanto $x^n \geq 0$. Sussiste allora la seguente relazione: per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|\,.$$

A puro titolo di riscontro osserviamo che

$$\begin{aligned}\sqrt{2^2} &= \sqrt{4} = 2 = |2| \\ \sqrt{(-2)^2} &= \sqrt{4} = 2 = |-2|\end{aligned}$$

## 4.3 Equazioni elementari

Il più semplice esempio di equazione elementare è dato

$$x^n = b \tag{4.3}$$

Si tratta evidentemente di particolari equazioni algebriche, talvolta denominate *binomie*. Con l'approccio analitico il grado $n$ non è rilevante, mentre abbiamo una sostanziale differenza tra $n$ pari ed $n$ dispari.

**Proposizione 4.5** *Se $n$ è dispari, per ogni $b \in \mathbf{R}$ l'equazione (4.3) ammette la soluzione unica $x = \sqrt[n]{b}$.*

Infatti abbiamo

$$x = \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{b}.$$

**Proposizione 4.6** *Se $n$ è pari, l'esistenza ed il numero di soluzioni di (4.3) dipende da $b \in \mathbf{R}$.*

*Se $b < 0$, l'equazione (4.3) non ammette alcuna soluzione.*
*Se $b = 0$, l'equazione (4.3) ammette come unica soluzione $x = 0$.*
*Se $b > 0$, l'equazione (4.3) ammette due soluzioni opposte $x = \pm\sqrt[n]{b}$.*

Infatti, se $b \geq 0$ abbiamo

$$|x| = \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{b}$$

da cui la tesi.

**Osservazione 4.7** *L'equazione (4.3) è la stessa di cui ci siamo occupati nel Teorema 4.2. Perché allora questa duplicazione di informazione?*

- *Nel Teorema 4.2 detto che una soluzione esiste per costruire dimostrare che la funzione potenza è invertibile e quindi definire la funzione radice.*
- *Nelle Proposizioni 4.5 e 4.6 abbiamo utilizzato formalmente la funzione radice.*

Analoga distinzione tra $n$ pari e dispari ritroviamo per l'equazione

$$\sqrt[n]{x} = b. \tag{4.4}$$

**Proposizione 4.8** *Se $n$ è dispari, per ogni $b \in \mathbf{R}$ l'equazione (4.4) ammette la soluzione unica $x = b^n$.*

**Proposizione 4.9** *Se $n$ è pari, l'esistenza ed il numero di soluzioni di (4.4) dipende da $b \in \mathbf{R}$.*
*Se $b < 0$, l'equazione (4.4) non ammette alcuna soluzione.*
*Se $b \geq 0$, l'equazione (4.4) ammette come unica soluzione $x = b^n$.*

### 4.3.1 Interpretazione grafica e disequazioni

Si tracciano i grafici della funzione $x^n$ (oppure $\sqrt[n]{x}$) e della funzione costante $b$ e si determinano le intersezioni.

Apparentemente non abbiamo usato alcun teorema, in realtà i teoremi sono “nascosti” nel grafico di $x^n$.

Allo stesso modo tramite il grafico si può “vedere” la risoluzione delle disequazioni. Anche in questo caso si tratta di un'utile scorciatoia rispetto alla risoluzione formale.