Analisi Matematica - 24.5.2019 - prima parte

Thursday, May 23, 2019 17:05

Integrali IMPROPRI o GENERALIZZATI

$\int_a^b f(x)\,dx$ è stato definito se

① $[a,b]$ è un intervallo limitato ($a \neq -\infty$ e $b \neq +\infty$)

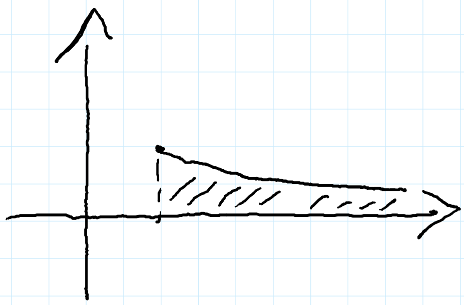
② la funzione f è limitata in $[a,b]$.

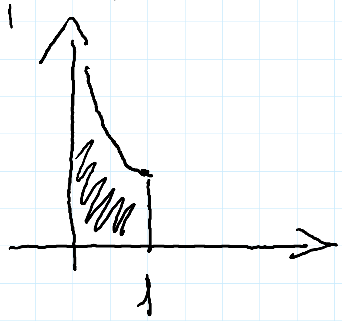
Se manca ① e/o ② l'integrale si dice **improprio**.

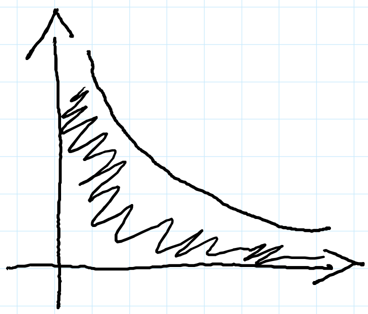
Esempi:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+x}\,dx$$

Manca ① | Manca ② | Mancano ① e ②





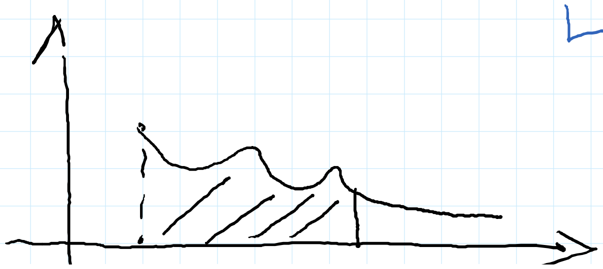


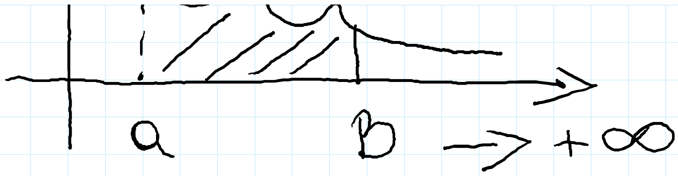
Esaminiamo prima il caso in cui manca una sola condizione tra ① e ②.

- Zona di integrazione non limitata (manca ①)

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua

Def: $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B \to +\infty} \underbrace{\int_a^B f(x)\,dx}_{\text{ha senso perché } f \text{ è continua}}$$

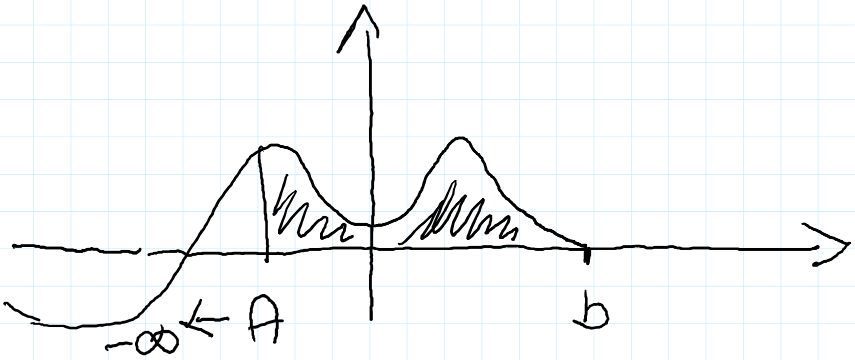




Sia $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ continua

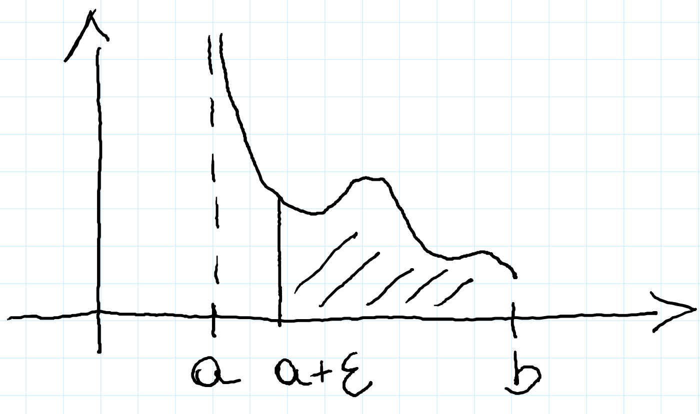
Def: $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b} f(x)\,dx$$

ha senso poiché f è continua



- Zona di integrazione limitata, ma f non limitata (Manca ②)

Sia $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, f continua, $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

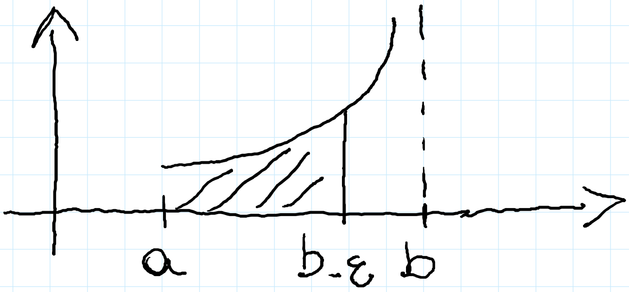


$\varepsilon\to 0$

Def: $$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\underbrace{\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}_{\text{ha senso poiché}}$$

f è continua

Se $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, f continua, $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$



$\varepsilon>0 \qquad \varepsilon\to 0$

Def:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \underbrace{\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}_{\text{ha senso}}$$

ha senso poiché f è continua

Operativamente: un integrale improprio è la composizione di un integrale definito + un limite. Come i tutti i limiti, ha 4 comportamenti possibili:

- → converge ad $l\in\mathbb{R}$
- → diverge a $+\infty$
- → diverge a $-\infty$
- → è indeterminato

Esempi:

- $$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-2x}\,dx$$

$$= \lim_{B\to+\infty} -\frac{1}{2}\int_0^B \underbrace{(-2)}_{\varphi'} e^{-2x\to\varphi(x)}\,dx$$

$$= \lim_{B\to+\infty} -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^B = \lim_{B\to+\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-2B}-1\right)$$

$$\lim_{B\to+\infty} \ldots \qquad \lim_{B\to+\infty} \ldots$$

$$= -\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$$

- $$\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\log_e|x|\Big]_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big(\log_e 2 - \underbrace{\log_e \varepsilon}_{-\infty}\Big)$$

$$= [\log_e 2 + \infty] = +\infty$$

- $$\int_3^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{B\to+\infty}\int_3^B \cos x\,dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\Big[\operatorname{sen} x\Big]_3^B = \lim_{B\to+\infty}\Big(\underbrace{\operatorname{sen} B}_{\text{non esiste}} - \operatorname{sen} 3\Big)$$

INDETERMINATO

- $$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-2}^{-\varepsilon} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=x^{-2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_{-2}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big(+\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\Big)$$

$$\Big[+\infty-\frac{1}{2}\Big] = +\infty$$

Casi classici: Sia $a>0$ fissato

1. $$\boxed{\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^b}\,dx = \begin{cases}\text{converge se } b>1\\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } b\le 1\end{cases}}$$

$$\boxed{2.\ \int_0^a \frac{1}{x^b}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{ diverge a } +\infty \text{ se } b \geq 1 \\ \searrow \text{ converge se } b < 1 \end{cases}}$$

Il caso $b = 1$ va sempre male, gli altri si scambiano.

<u>Dim</u>: 1. $b \neq 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B x^{-b}\,dx \overset{b\neq 1}{=}$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{x^{-b+1}}{-b+1}\right]_a^B$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \frac{1}{1-b}\left(B^{1-b} - a^{1-b}\right)$$

$B^{1-b} \to +\infty$ se $1-b>0$, $b<1$

$B^{1-b} \to 0$ se $1-b<0$, $b>1$

Quindi:

Se $b<1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = +\infty$

se $b>1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = -\frac{1}{1-b}\,a^{1-b} < +\infty$

Se $b = 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B \frac{1}{x}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \Big[\log|x|\Big]_a^B$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left(\log B - \log a\right) = +\infty$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\Big(\underbrace{\log B}_{\to +\infty} - \log a\Big) = +\infty$$

Cosa si fa se f non soddisfa né (1) né (2)?

- Si spezza l'integrale in un numero sufficiente di integrali con un solo problema.
- Si studiano i singoli pezzi e si traggono le conclusioni, usando le operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$.

• $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx}_{= +\infty} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{= \ell\in\mathbb{R}} = +\infty$$

• $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$\Rightarrow$ primitive non esprimibili tramite funz. elem.

Vediamo se converge, senza calcolarlo.

Analisi Matematica - 24.5.2019 - seconda parte

Criteri di convergenza per gli integrali impropri

Si può stabilire se un integrale improprio converge o no senza calcolarlo.

Notazione: $\int_E f(x)\,dx$ improprio in cui non vale una sola tra (1) e (2)

$E = (-\infty, b]$ $\quad x_0 = -\infty$

$E = [a, +\infty)$ $\quad x_0 = +\infty$

$E = [a, b)$ $\quad x_0 = b$

$E = (a, b]$ $\quad x_0 = a$

· x_0 è il punto in cui l'integrale ha un problema

Criterio del confronto: Se f e g sono funzioni def in E tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E, \text{ "vicino" ad } x_0$$

Allora

$$\int_E g(x)\,dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x)\,dx < +\infty$$

$$\int_E f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x)\,dx = +\infty$$

(Nessun altra implicazione è valida)

Criterio del confronto asintotico: Se f, g sono

funzioni def. in E tali che
$f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ "vicino" ad x_0.

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0, +\infty)$

allora gli integrali impropri si comportano nello stesso modo

$$\int_E f(x)dx < +\infty \iff \int_E g(x)dx < +\infty$$
$$\| \quad +\infty \iff \quad \| \quad = +\infty$$

Criterio dell'assoluta convergenza: $f: E \to \mathbb{R}$

$$\int_E |f(x)|dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x)dx < +\infty.$$

- $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge: $E = [1, +\infty)$

Uso il criterio del confronto

$$x \geq 1 \iff 1 \leq x \Rightarrow 0 \leq \underset{f}{e^{-x^2}} \leq \underset{g}{x \cdot e^{-x^2}}$$

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{B \to +\infty} -\frac{1}{2}\int_1^B -2x e^{-x^2} dx =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_1^B = \lim_{B \to +\infty} -\frac{1}{2}\left(\underset{\downarrow \, 0}{e^{-B^2}} - e^{-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-e^{-1}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} < +\infty$$

Quindi anche $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$

• $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x+1}\,dx$

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+x+1} > 0$ in $[1,+\infty)$

$f(x) \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$ $\quad x \to +\infty$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} \to 1 \quad x \to +\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$ poichè $b = 2 > 1$

Per il crit del confr. asintotico l'int. assegnato converge.

• $\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ $\quad x_0 = 0$

$0 < f(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{(\underbrace{x^{2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}}_{\to 0}+1)}$

$\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \to 1$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx < +\infty$

Quindi l'integrale assegnato è convergente.

$\int^1$

$$\bullet \quad I = \int_0^1 \frac{1+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad x_0 = 1$$

Prima di calcolarlo det. se converge o diverge.

$$0 < f(x) = \frac{1+3x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{4}{\sqrt{1-x}\,\underbrace{\sqrt{1+x}}_{\to\sqrt{2}}} \sim \frac{4}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\,\underbrace{\frac{1}{(1-x)^{1/2}}}_{g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{4}{\sqrt{2}}. \qquad x \to 1$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} -1\int_0^{1-\varepsilon} -1(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+} -\left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0^+} -2\left(\underset{\downarrow\,0}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right)$$

$$= 2 < +\infty$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx < +\infty$$

Calcolo direttamente I

$$I = \lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$\int \frac{1+3x}{\qquad}\,dx = \int \frac{dx}{\qquad} + 3\int \frac{x}{\qquad}\,dx$$

$$\int \frac{1+3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \arcsin x + \frac{3}{-2}\int \underbrace{-2x}_{\varphi_1}\,(\underbrace{1-x^2}_{\varphi})^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \arcsin x - \frac{3}{2}\,\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \arcsin x - 3\sqrt{1-x^2} + C$$

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\arcsin x - 3\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\underbrace{\arcsin(1-\varepsilon)}_{\downarrow\ \arcsin 1} - 3\underbrace{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}}_{\downarrow\ 0} + 3\right)$$

$$= \arcsin 1 + 3 = \frac{\pi}{2} + 3$$

Analisi Matematica - 24.5.2019 - terza parte

Integrazione di funzioni razionali fratte

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx \qquad P \text{ e } Q \text{ polinomi di grado } n \text{ e } m, \quad n < m$$

- Caso generale $m > 2$

  - 1: scomporre Q_m in fattori di primo e secondo grado irriducibili
  - 2: scomporre $\frac{P_n}{Q_m}$ in somma di frazioni più semplici i cui denominatori sono i fattori del denom.

- $$I = \int \frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$$

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1} = (*)$$

- Tutte le frazioni hanno al num. un generico polin. di grado inf. di 1 rispetto al proprio den.

- Det. tutte le costanti incognite

$$(*) = \frac{ax^2 + a + bx^2 + cx + 2bx + 2c}{(x+2)(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b = 2 \\ 2b+c = 3 \\ a+2c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2-b \\ c = 3-2b \\ 2-b+6-4b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ // \\ -5b = -9 \end{cases}$$

$$\Big|\; a = 2 - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} a = 2 - \frac{9}{5} = \frac{1}{5} \\ c = 3 - \frac{18}{5} = -\frac{3}{5} \\ b = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{5} \frac{1}{x+2} + \frac{\frac{9}{5}x - \frac{3}{5}}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{9}{5} \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{3}{5} \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{5} \log |x+2| + \frac{9}{10} \log (x^2+1) - \frac{3}{5} \operatorname{arctg} x + c$$

- $$I = \int \frac{x^2 - 3x}{(x-1)^2 (x+1)} dx$$

$$\frac{x^2 - 3x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{ax+b}{\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1}} + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2 + ax + bx + b + cx^2 - 2cx + c}{(x-1)^2 (x+1)}$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + b - 2c = -3 \\ b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - c \\ 1 - c - c - 2c = -3 \\ b = -c \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ -4c = -4 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$I = -\int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= - \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + \log |x+1| + c$$

$$= \frac{1}{x-1} + \log|x+1| + c$$

- $$I = \int \frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}\,dx \qquad x^4+x^2 = x^2(x^2+1)$$

$$\frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} =$$

$$= \frac{ax^3+ax+bx^2+b+cx^3+dx^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 1-a = 1-1 = 0 \\ d = -b = 1 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$I = \int\left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=x^{-2}}\,dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \log|x| + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + c$$

Non tratteremo integrali in cui al den. figurano termini di secondo grado irriducibili elevati a potenze > 1

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^3}$$

- $$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(e^x+1)} = \int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^x \cdot e^x\,(e^x+1)}$$

$$\int_0 \quad e^x(e^x+1) \qquad\qquad \int_0 \quad \underbrace{e^x \cdot e^x}_{e^{2x}} (e^x+1)$$

$$\left[\begin{array}{lll} \varphi(x)=e^x & & \\ \varphi'(x)=e^x & \varphi(0)=1 & \varphi(1)=e \end{array}\right]$$

$$= \int_1^e \frac{dx}{x^2(x+1)} \qquad\qquad f(t)=\frac{1}{t^2(t+1)}$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+ax+bx+b+cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-a=1 \\ a=-b=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$I = \int_1^e \left(\frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{\overset{x^{-2}}{x^2}} + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[-\log_e|x| - \frac{1}{x} + \log_e|x+1|\right]_1^e$$

$$= -\log_e e - \frac{1}{e} + \log_e(e+1) + 1 - \log_e 2$$

- $$I = \int \frac{\log_e^2 x}{x(\log_e^2 x+1)} dx \underset{\substack{\varphi(x)=\log_e x \\ \varphi'(x)=\frac{1}{x}}}{=} \left[\int \frac{t^2}{t^2+1} dt\right]_{t=\log_e x}$$

$$\int \frac{t^2}{t^2+1} dt =$$

$$\left[\frac{t^2}{t^2+1} = \frac{t^2+1-1}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}\right]$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = t - \operatorname{arctg}_e t + c$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = t - \operatorname{arctg} t + c$$

$$I = \left[t - \operatorname{arctg} t + c \right]_{t = \log x}$$

$$= \log x - \operatorname{arctg} \log x + c$$