# Analisi Matematica - 27.2.2019 - prima parte



Insiemi numerici: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Rappresentazione decimale dei numeri razionali

$q \in \mathbb{Q}$ si può rappr. in forma decimale:

$$\frac{3}{4} = 0.75 \qquad \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{3} = 0.3333 \ldots = 0.\overline{3}$$

Da frazione a decimale: algoritmo della divisione:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0,75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline 10 & 0.333\ldots \end{array}$$

Da decimale a frazione:

$$3.123 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

$$2.1\overline{2} = \frac{212 - 21}{90} \qquad 0.\overline{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ogni $q \in \mathbb{Q}$ si può rappr. tramite un numero decimale di tipo

1. limitato
   → dopo la virgola, un numero finito di cifre $\neq 0$
2. illimitato, periodico, proprio

dopo la virgola infinite cifre $\neq 0$

le cifre $\neq 0$ si ripetono in modo periodico

il periodo è $\neq$ da 9

OSS: Un decimale che ha periodo 9 è una rappresentazione alternativa di un decimale di tipo limitato.

$$0.\overline{9} = 1 \qquad 0.5\overline{9} = 0.6 \qquad 1.34\overline{9} = 1.35$$

<u>Def</u>: Si chiama insieme dei numeri reali ($\mathbb{R}$) l'insieme dei numeri che scritti in forma decimale hanno una qualsiasi successione di cifre diverse da 0, eventualmente infinita e non periodica.

Per esempio

$0.10110111 0 \dots$

$\sqrt{2} = 1.41 \dots$

$\pi = 3.14 \dots$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

↳ inclusione stretta

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ insieme dei numeri irrazionali

Quindi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad (\subset \mathbb{C})$$

$x^2 = -1$ non ha sol. in $\mathbb{R}$

Proprietà di $\mathbb{R}$: → algebriche, dell'ordinamento } valgono anche in $\mathbb{Q}$; di completezza } solo in $\mathbb{R}$

Proprietà algebriche: su $\mathbb{R}$ esistono due operazioni $+$ (somma) e $\cdot$ (moltiplicazione) tali che $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

S1) $a + b = b + a$ commutativa

S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$ associativa

S1) $a+b=b+a$ commutativa

S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$ associativa

si scrive $a+b+c$

S3) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in \mathbb{R}$ $0+a = a = 0+a$

(elem. neutro)

S4) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists !\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+(-b)=0$

$b$ si indica con $-a$ (opposto di $a$)

(esist. opposto)

P1) $a \cdot b = b \cdot a$

P2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P3) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $1 \cdot a = a = a \cdot 1$

P4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 1$

$b$ si indica con $\frac{1}{a}$ (reciproco o inverso di $a$)

D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributiva)

(S1)-(S3), (P1)-(P3), D : valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

S4) vale in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

P4) vale in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Proprietà dell'ordinamento:

È def. in $\mathbb{R}$ una relazione di totale ordine $\leq$ :

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

O1) $a \leq a$ riflessiva

O2) $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$ antisimm.

O3) $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$ transitiva

OT) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$ o $b \leq a$ totale ordine

Notazione: $a \geq b \overset{def}{\iff} b \leq a$

$$a < b \iff a \leq b,\ a \neq b$$

$$a > b \iff a \geq b,\ a \neq b$$

Ordine e operazioni: $\forall a, b \in \mathbb{R}$

OS) $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

OP) $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R}, c \geq 0$

Da OS) e OP) segue che

OP') $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R} \ c \leq 0$

Anche le prop. di ordinamento valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4}$$

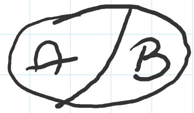
$$4 < 6 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

# Analisi Matematica - 27.2.2019 - seconda parte

Wednesday, February 27, 2019 12:49

La differenza tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ è data dall'assioma di completezza.

Def: $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A$ e $B$ sono una SEZIONE di $\mathbb{R}$ se




1. $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$
   ($A$ e $B$ sono una partizione di $\mathbb{R}$)
2. $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ $\quad a < b$.

Una sezione di $\mathbb{R}$ si denota con $\{A, B\}$.

EX: $\quad A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 1\}$

$\quad\quad B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 1\}$

$\{A, B\}$ è una sezione di $\mathbb{R}$

**Proprietà di completezza (o di continuità) (AC)**

$\forall$ sezione $\{A, B\}$ di $\mathbb{R}$ esiste un unico numero reale $s$ (detto elemento separatore) tale

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad a \leq s \leq b.$$

oss: $s \in A$ oppure $s \in B$ (ma non ad entrambi).

Nell'esempio precedente $\quad s = 1$, $\quad s \in B$

$A' = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 1\} \quad B' = \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$

$\{A', B'\}$ sezione di $\mathbb{R}$

$1$ elem. separatore $\quad 1 \in A'$

<u>Teorema</u> Esiste un (unico) insieme che verifica le proprietà:

le proprietà:

- (S1)-(S4), (P1)-(P4), (D)
- (O1)-(O3), (OT), (OS), (OP)
- (AC) ← completezza

Tale insieme si denota con $\mathbb{R}$.

OSS: La proprietà (AC) non vale in $\mathbb{Q}$. Per esempio

$A = \{x \in \mathbb{Q} / x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \quad x^2 \leq 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 > 2\}$

- A e B sono una sezione di $\mathbb{Q}$.
- Non esiste $c \in \mathbb{Q}$ elemento separatore di A e B. (da provare)

Idea della dim: si prova che se c esistesse allora $c^2 = 2$. Quindi c non può stare in $\mathbb{Q}$ per quanto visto prec.

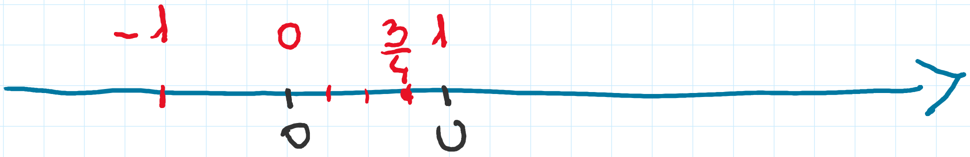
Se si considerano gli stessi insiemi in $\mathbb{R}$, per (AC) esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ elem. sep. di A e B

Tale c è sol. di $x^2 = 2$ $\quad c = \sqrt{2}$
↳ def.

Dunque AC) garantisce che $\mathbb{R}$ non sia "lacunoso".

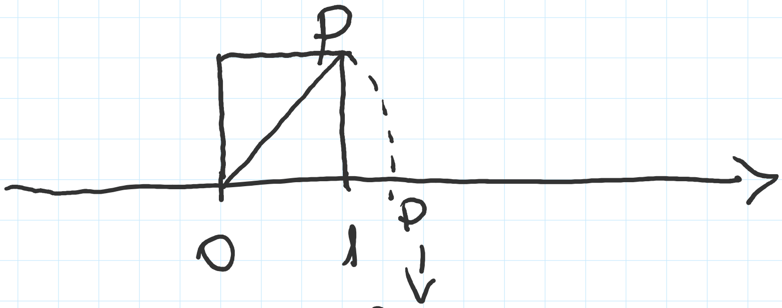
Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ si può identificare con una retta orientata r della geom. euclidea.



- Prendo una retta $r$
- fisso $O$ origine e $U$ unità
- verso positivo di percorrenza: quello secondo cui $O$ precede $U$
- Su $r$ si rappresentano i numeri
- Usando (AC) si prova che $r$ e $\mathbb{R}$ sono in corrispondenza biunivoca:

ad ogni $P \in r$ corrisponde un unico $x \in \mathbb{R}$ e, viceversa, ad ogni $x \in \mathbb{R}$ corrisponde $P \in r$.
Esistono invece punti di $r$ a cui non corrisponde alcun elemento di $\mathbb{Q}$




A $P'$ non corr. el. di $\mathbb{Q}$

In conclusione $r$ ed $\mathbb{R}$ si identificano e si parla di "retta reale".

**Intervalli**

Sono particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che corrispondono su $r$ a segmenti e semirette.

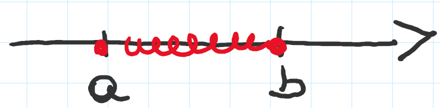
Intervalli limitati (segmenti):

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

Def:

intervallo chiuso

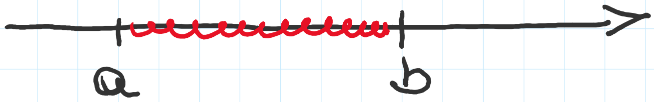
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ->




$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

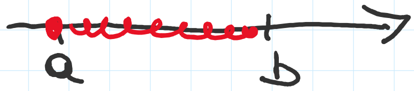

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

int. aperto

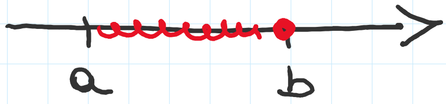



semi aperti

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$




$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



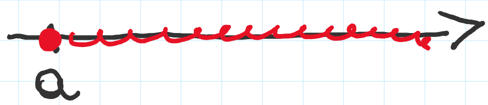

Invece che $(a,b)$ si può trovare $]a,b[$.

Intervalli illimitati (semirette)

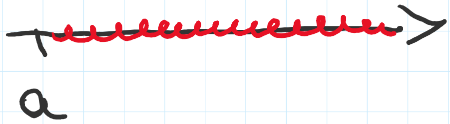
Sia $a \in \mathbb{R}$

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

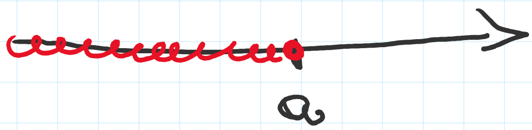
simbolo di infinito



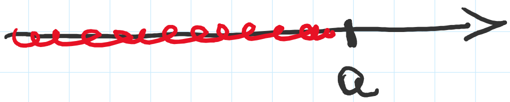

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



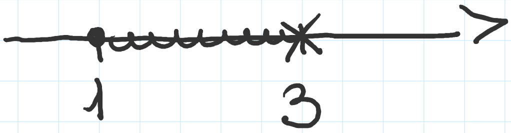

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$




$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$




$[1,3)$

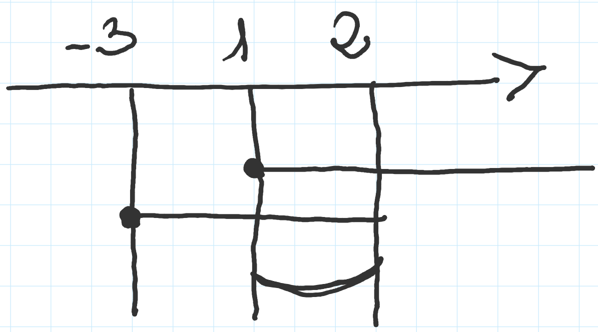



$[1,+\infty) \cap [-3,2)$ :

$\parallel$

$[1,2)$

$[1,+\infty)$
$[-3,2)$



Proprietà dei numeri (che derivano dalle proprietà algebriche e di ordinamento)

Legge di annullamento del prodotto:

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ o } b = 0$

$(x-3)(x-1) = 0 \iff x-3=0 \text{ oppure } x-1=0$

$x = 3 \qquad x = 1$

Opposti e reciproci: $\forall a \in \mathbb{R}$

$-(-a) = a$

$a \neq 0 \qquad \dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a \qquad a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

$(a^{-1})^{-1} = a$

Eq di primo grado: det. $x \in \mathbb{R}$ tali che

$ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$ax + b = 0 \iff ax \underbrace{+b-b}_{0} = -b \iff ax = -b$

$\iff \underbrace{\frac{1}{a} a}_{1} \cdot x = -b \cdot \frac{1}{a} \iff x = -\frac{b}{a}$

Ins. delle sol. $\{-\frac{b}{a}\}$

$3x + 7 = 0$

$3x = -7$

$x = -\frac{7}{3}$

Regole dei segni

$a, b \in \mathbb{R}$

Regole dei segni

$a, b \in \mathbb{R}$

$0 \leq a,\ 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab$

$0 \leq a,\ b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$

$a \leq 0,\ b \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

Conseguenza importante:

$a^2 = a \cdot a$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a^2 \geq 0$

$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$