Prova scritta di Analisi Matematica del 7.7.2017

1) $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{x}}$

a) Occorre porre $x > 0$ (poiché sotto radice quadrata e al denominatore). Quindi
dom $f = (0, +\infty)$
$0 \notin$ dom f $\Rightarrow$ non ha senso calcolare $f(0)$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$ nessuna soluzione
$\hookrightarrow \Delta = 1 - 8 < 0$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in$ dom f

b) Limiti significativi: $0, +\infty$
se $x \to 0$ $\quad x^2 + x + 2 \to 2$
$\sqrt{x} \to 0$ e $\sqrt{x} \geq 0$
quindi $f(x) \to +\infty$
se $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} \to +\infty$

Potrebbe esserci un asintoto obliquo a $+\infty$ ma
$\dfrac{f(x)}{x} \sim \dfrac{x^{3/2}}{x} = x^{\frac{1}{2}} \to +\infty$
quindi f non ammette alcun as. obliquo.

c) $\forall x \in$ dom f

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x} - (x^2+x+2)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2x(2x+1) - x^2 - x - 2}{2x\sqrt{x}}$$

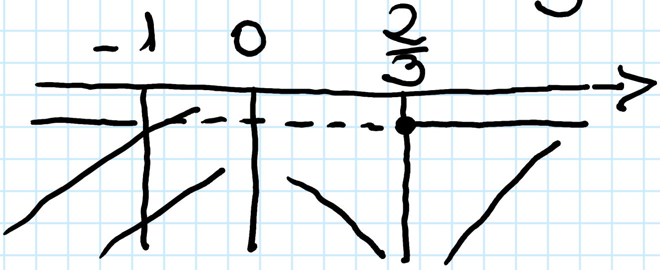
$$= \frac{4x^2+2x-x^2-x-2}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2+x-2}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x) \geq 0 \iff 3x^2+x-2 \geq 0$

$\hookrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1\pm5}{6} \begin{cases} -1 \\ \frac{4}{6}=\frac{2}{3} \end{cases}$

$\iff x \leq -1$ oppure $x \geq \frac{2}{3}$

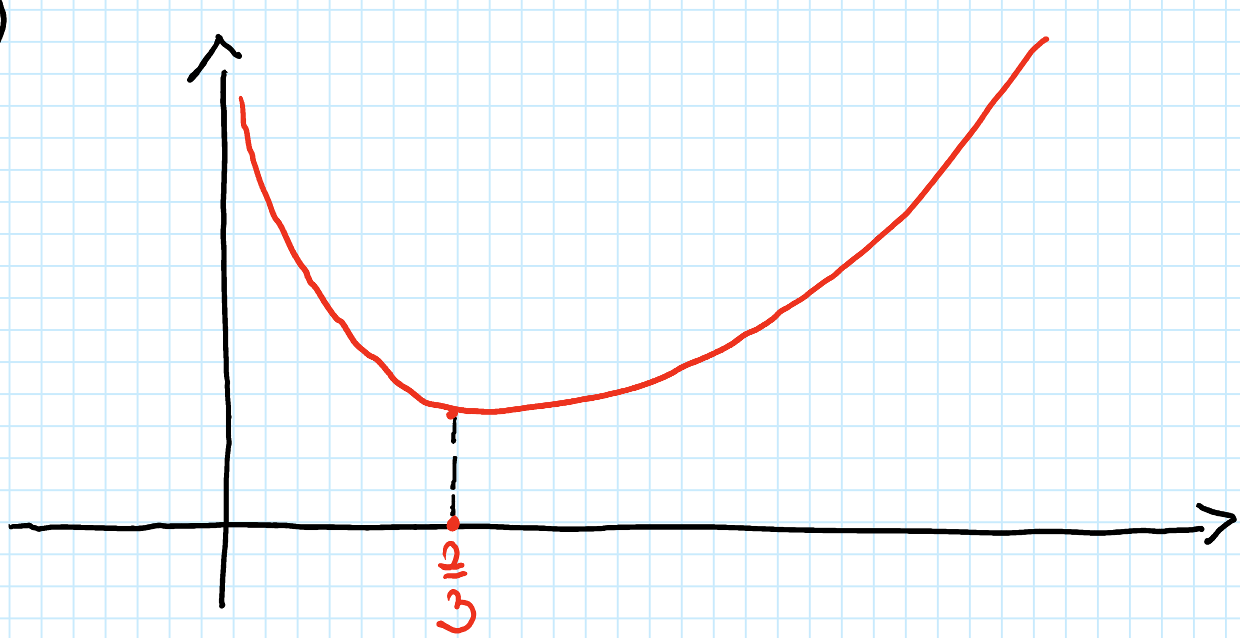
in $(0,+\infty)$:



f è decrescente in $\left(0,\frac{2}{3}\right)$, crescente in $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

$x=\frac{2}{3}$ è p.to di minimo relativo.

e)



f) Dal grafico di f si deduce che:

$$\operatorname{Im} f = \left[f\left(\tfrac{2}{3}\right), +\infty\right)$$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha:

0 soluzioni se $\lambda < f(\frac{2}{3})$,

1 soluzione se $\lambda = f(\frac{2}{3})$,

2 soluzioni se $\lambda > f(\frac{2}{3})$.

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \log(1+\frac{1}{x})}{2x^2+2} = \frac{1}{2}$$

Infatti per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow \log(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 \log(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{x^3}{x}$$

$$2x^2+2 \sim 2x^2.$$

Quindi

$$\frac{x^3 \log(1+\frac{1}{x})}{2x^2+2} \sim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

3) $$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 1} dx$$

$\cos x = D \operatorname{sen} x$ $\qquad$ $\operatorname{sen} 0 = 0$ $\quad$ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si può applicare l'integrazione per sostituzione:

$$I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t^2 - 1}$$

Questo è l'integrale di una funzione razionale fratta che va riscritta come:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-1}.$$

Quindi

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{at - a + bt + b}{t^2-1}.$$

da cui

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-a \\ -2a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Quindi

$$I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\log_e|t+1| + \frac{1}{2}\log_e|t-1|\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) + \frac{1}{2}\log_e\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2/n}-1}{\sqrt{n}}$$

Non è una serie a termini positivi, occorre studiare la convergenza assoluta cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2/n}-1}{\sqrt{n}}.$$

$n \to +\infty \quad e^{2/n}-1 \sim \frac{2}{n} \quad \Rightarrow$

$$\frac{e^{2/n}-1}{\sqrt{n}} \sim \frac{2}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{3/2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ è convergente (serie armonica generalizzata) quindi la serie assegnata converge assolutamente (e dunque converge).