Analisi Matematica - 25.6.2018

1. $$f(x) = \log \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$$

(a) $$\left.\begin{array}{l} x+1 \neq 0 \quad x \neq -1 \\ \dfrac{\overbrace{x^2+1}^{>0}}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} > 0 \end{array}\right\}$$ condizioni affinché f sia ben definita

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(0) = \log 1 = 0 \qquad (0,0) \in \operatorname{Graf} f$$

$$f(x) \geq 0 \iff \log \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \geq 0 \iff \frac{x^2+1}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} \geq 1$$

$$\iff x^2+1 \geq (x+1)^2$$

$$\iff \cancel{x^2}+\cancel{1} \geq \cancel{x^2}+2x+\cancel{1}$$

$$\iff 2x \leq 0 \iff x \leq 0$$

$f(x) \geq 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0]$

$f(x) < 0$ se $x \in (0, +\infty)$

(b) Limiti significativi: $-1, \pm\infty$

se $x \to -1$ $$\frac{x^2+1}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} \to +\infty \quad \left(\frac{2}{0}\right)$$

$$f(x) \to +\infty$$

$x = -1$ è un asintoto verticale di f.

Se $x \to \pm\infty$ $$\frac{x^2+1}{(x+1)^2} \sim \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow f(x) \to \log 1 = 0$$

$y=0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(c) $\forall x \in \operatorname{dom} f$

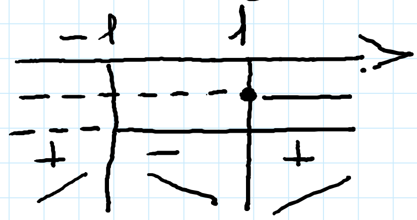
$$f'(x) = \frac{\cancel{(x+1)^2}}{x^2+1} \cdot \frac{2x(x+1)^2 - (x^2+1)2(x+1)}{(x+1)^{\cancel{4}\,2}}$$

$$= \frac{2\cancel{(x+1)}\left(x(x+1) - x^2 - 1\right)}{(x^2+1)(x+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{2\left(\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} - 1\right)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{2(x-1)}{\underset{0<}{(x^2+1)}(x+1)}$$

$f'(x) \geq 0$: $\quad x - 1 \geq 0 \quad x \geq 1$

$\quad x + 1 > 0 \quad x > -1$

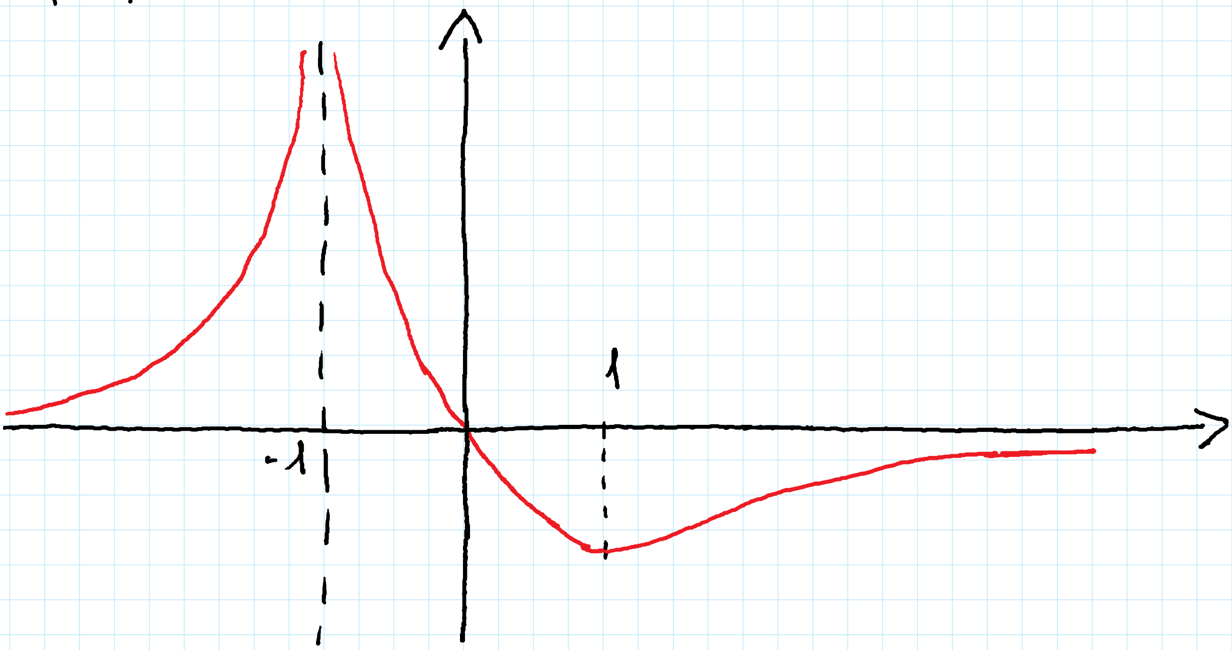


f è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$

f è decrescente in $(-1, 1)$

$x = 1$ è p.to di minimo relativo, $f(1) = \log_e \frac{1}{2} = -\log_e 2$

(d) Grafico di f:



(e) $\text{Im} f = [-\log_e 2, +\infty)$

L'eq. $f(x) = \lambda$ ha

0 soluzioni se $\lambda < -\log_e 2$;

1 soluzione se $\lambda = -\log_e 2$;

2 soluzioni se $-\log_e 2 < \lambda < 0$;

1 soluzione se $\lambda = 0$;

2 soluzioni se $\lambda > 0$.

2 soluzioni se $\lambda > 0$.

2. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{x+1} = \ell$

per $x \to -\infty$ $\quad x^2 - 1 \sim x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \sim \sqrt{x^2} = -x$

$\sqrt{x^2-1} - x \sim -x - x = -2x \neq 0$

$x + 1 \sim x$

Quindi $\ell = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x} = -2$.

3. $I = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^{2x} + 4e^x + 3} \, dx$

$e^{2x} + 4e^x + 3 = (e^x)^2 + 4e^x + 3$, $\quad De^x = e^x$

Per sostituzione: $\quad e^0 = 1 \quad e^1 = e$

$I = \int_1^e \frac{2}{x^2 + 4x + 3} \, dx$

Si ha $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1 \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$

Quindi

$$\frac{2}{x^2+4x+3} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+1}$$
$$= \frac{ax + a + bx + 3b}{(x+3)(x+1)}$$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a \\ a - 3a = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a \\ -2a = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$I = \int_1^e \left(-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \Big[-\log_c |x+3| + \log_c |x+1| \Big]_1^e$$

$$= \left[\log_c \left| \frac{x+1}{x+3} \right| \right]_1^e = \log_c \frac{e+1}{e+3} - \log_c \frac{1}{2} .$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{n/3}}$$

Si tratta di una serie a termini positivi. Conviene usare il criterio della radice. Sia $a_n = \frac{3^n}{n^{n/3}}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{n^{1/3}} \longrightarrow 0 < 1 \quad \text{per } n \to +\infty .$$

La serie dunque converge.