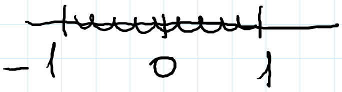
SERIE DI POTENZE

Serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{converge} \iff x \in (-1,1)$$

L'insieme di convergenza è un intervallo centrato in $x_0 = 0$.



È un caso particolare di serie di potenze.

Def: Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad x \in \mathbb{R}. \quad (SP)$$

ove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Esempi:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad a_n = 1, \quad x_0 = 0$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n \qquad a_n = \frac{n}{2^n} \quad x_0 = 0$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-1)^n \qquad a_n = \frac{1}{n^2} \quad x_0 = 1$

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere di (SP) può cambiare.

Problema: det per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie (SP) converge.

Denoterò con I l'insieme di convergenza

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ converge} \right\}$$

Per esempio per la serie geometrica $I = (-1,1)$.

Anche nel caso generale, I è un intervallo centrato in x_0.

$(x_0 - R,\ x_0 + R)$

<u>Teorema</u>: Assegnata una (SP), supponiamo che esista

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$(\rho \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\})$ e poniamo

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{se } \rho \in (0,+\infty) \\ +\infty & \text{se } \rho = 0 \\ 0 & \text{se } \rho = +\infty . \end{cases}$$

Allora

1) se $R \in (0,+\infty)$
   - (SP) converge assolutamente se $|x - x_0| < R$
     $-R < x - x_0 < R$
     $x_0 - R < x < x_0 + R$
     $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$
   - (SP) non converge se $|x - x_0| > R$
     $x < x_0 - R$ oppure $x > x_0 + R$

   (se $x = x_0 \pm R$ non si può dire nulla)

2) se $R = +\infty$
   (SP) converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$,

3) se $R = 0$
   (SP) converge se e solo se $x = x_0$.

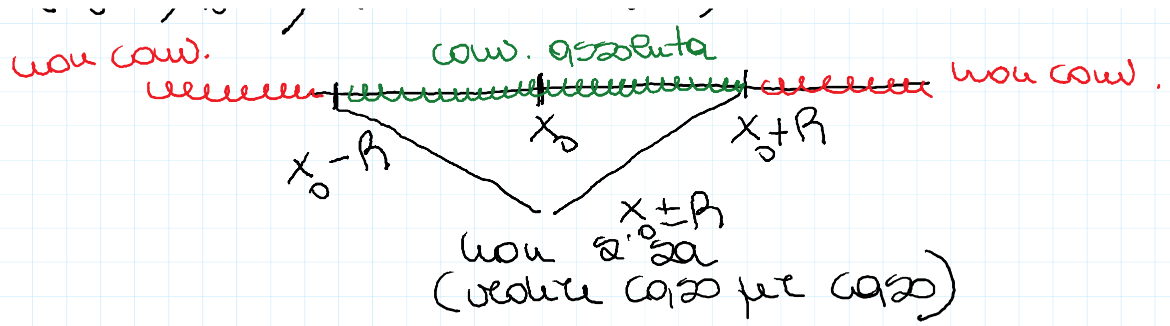
<u>OSS</u>: R si chiama raggio di convergenza.

Insieme di convergenza:

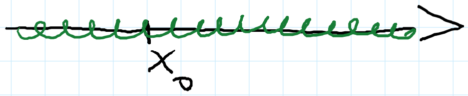
Nel caso 1):

$$(x_0 - R,\ x_0 + R) \subseteq I \subseteq [x_0 - R,\ x_0 + R]$$

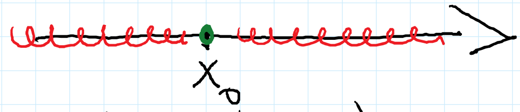
non conv. conv. assoluta non conv.



Nel caso 2) $I=\mathbb{R}$



Nel caso 3) $I=\{x_0\}$



Se $x=x_0$ (SP) converge poiché diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{(x-x_0)^k}_{\substack{1 \text{ se } k=0\\ 0 \text{ se } k>0}} = a_0 + a_1\cdot 0 + \dots + a_k\cdot 0 + \dots = a_0$$

Esiste un altro modo di calcolare il raggio di conv. di (SP).

<u>Teorema</u>: Data una (SP), supponiamo che esista il limite

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

($\ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$). Allora valgono le stesse conclusioni del teorema precedente.

Esempi:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$a_k = 1$, $\quad x_0 = 0$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{1} = 1 \to 1 \qquad R = 1$

La serie

- conv. ass. se $x \in (-1,1)$.

- non conv. se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- $x = -1$, $x = 1$

  $x = -1$ $\quad \sum (-1)^n$ irregolare

  $x = 1$ $\quad \sum (1)^n$ diverge a $+\infty$

$I = (-1, 1)$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-1)^n$ $\qquad x_0 = 1$, $a_n = n!$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{\substack{\downarrow \\ a_n > 0}}{=} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty$$

$R = 0$

$I = \{1\}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-n} x^n$ $\qquad x_0 = 0$ $\quad a_n = n^{-n}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^{-n}} = \left((n)^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{-1} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$R = +\infty$

$I = \mathbb{R}$ e la serie converge assolutamente se $x \in I$.

Serie di Taylor

Data $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile infinite volte in $x_0 \in (a,b)$, si può considerare la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{a_n} (x-x_0)^n . \qquad (ST)$$

Def: La serie (ST), se ben definita, si chiama serie di Taylor di f centrata in x_0.

OSS: La somma parziale n-esima di (ST) è il polinomio di Taylor di centro x_0 e grado n.

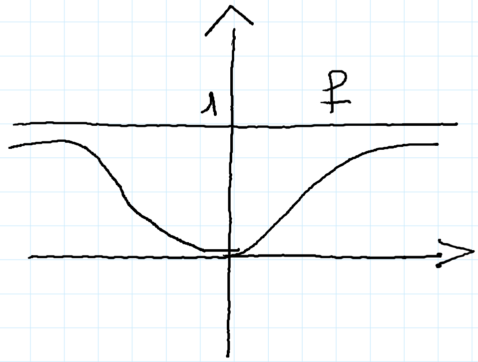
<u>Def</u>: Se esiste un intorno I di x_0 tale che
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \forall x \in I$$
si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor in x_0.

OSS: Tutte le funzioni elementari sono sviluppabili in serie di Taylor ($x_0=0$).

Per esempio: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ma esistono funzioni non sviluppabili in serie di Taylor.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$x_0 = 0$

f è continua in $x_0=0$; $\quad x \to 0, \ \frac{1}{x^2} \to +\infty \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \to -\infty$
$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} D\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}} D(-x^{-2})$
$$= e^{-\frac{1}{x^2}}\, 2 \cdot x^{-3} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{1/x^2}} \to 0$$

$f'(0) = 0$

Si prova che $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$

La serie di Taylor di f di centro $x_0 = 0$ è
quindi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k = 0$$

La serie di Taylor di f converge a $f(x)$ se e solo se $x = 0$ $\Rightarrow$ f non è svil. in serie di Taylor.

Analisi Matematica - 13.5.2019 - seconda parte

Sunday, May 12, 2019 18:51

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^3 \log n}}_{a_n}$$

$a_n > 0$? sì perché se $n \geq 2$ $n^3 > 0$, $\log n \geq \log 2$

$$n \geq 2 \quad \log n \geq \log 2 \Rightarrow n^3 \log n \geq n^3 \log 2 \Rightarrow$$

$$0 < \frac{1}{n^3 \log n} \leq \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{\log 2}$$

$$\sum \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{n^3} < +\infty$$ serie arm. generl. + teor. alg.

Per il criterio del confronto, la serie converge.

Oppure: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^a}$ $a > 1$ in modo che $\sum b_n < +\infty$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^3 \log n}}{\frac{1}{n^a}} = \frac{n^a}{n^3 \log n} \longrightarrow 0 \quad \text{se } a \leq 3$$

Scelgo $1 < a \leq 3$ Per esempio $a = 2$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n \log n} \longrightarrow 0$$

Per il crit. del confr. asintotico (caso limite) la serie converge. $\sum \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{= b_n} < +\infty$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

$3^{\ldots}$

$a_n = \frac{1}{3^{\sqrt{n}}} > 0 \qquad a_n \to 0$

Punto a dim. che converge

1° tentativo: $\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{3^n}$ se fosse vera ----

$\Updownarrow$

ma, non lo è:

$3^n \leq 3^{\sqrt{n}} \iff n \leq \sqrt{n} \iff \sqrt{n} \leq 1$ FALSO!

Il confronto non funziona

2° tentativo: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

So che $\sum b_n < +\infty$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \cdot n^2 = \frac{n^2}{3^{\sqrt{n}}} = \frac{(\sqrt{n})^4}{3^{\sqrt{n}}} \to 0$

$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \qquad n^2 = (\sqrt{n})^2 (\sqrt{n})^2$

Quindi $\sum a_n$ converge.

Tentativo 3: radice

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{3^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \to \frac{1}{3^0} = 1$

Non funziona

Tentativo 4: rapporto

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3^{\sqrt{n+1}}} \cdot 3^{\sqrt{n}} = \frac{1}{3^{\underbrace{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}_{\to 0}}} \to \frac{1}{3^0} = 1$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \left[\frac{1}{+\infty}\right] 0$

$\downarrow$

molt num e den.

moltipl. num e den.
per $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

Non funziona

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n-1}$$

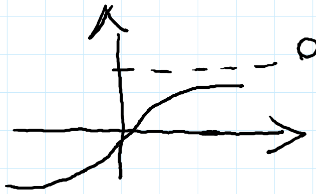
$$a_n = \frac{3^n}{4^n-1} > 0 \quad \Leftarrow \quad 4^n \geq 4 \quad \forall n \geq 1$$

$$a_n \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n = b_n \qquad \frac{a_n}{b_n} \to 1$$

$\sum b_n < +\infty$ (serie geometrica con $|q|<1$)

Per il crit. del confr. asintotico, $\sum a_n < +\infty$.

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2n^3+1}$$



$$a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{2n^3+1} > 0$$

$\operatorname{arctg} n \sim \frac{\pi}{2}$ (non a n!!!)
$2n^3+1 \sim 2n^3$

$$a_n \sim \frac{\pi/2}{2n^3} \qquad \sum \frac{\pi}{4}\frac{1}{n^3} < +\infty$$ (serie arm. gen. + teor. algebrici)

Quindi, per il crit. del confr. asintotico, $\sum a_n$ conv.

∞

• $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\underbrace{(2n^3+1)}_{a_n}}$$

a_n non è ≥ 0 : $0<n<\pi$ $\operatorname{sen} n>0$

$\pi<n<2\pi$ $\operatorname{sen} n<0$

e così via ...

Non è una serie a segno alterno.

Rimane l'assoluta convergenza

$$|a_n| = \frac{|\operatorname{sen} n|}{|2n^3+1|} = \frac{|\operatorname{sen} n|}{2n^3+1} \leq \frac{1}{2n^3+1} \sim \frac{1}{2n^3}$$

$$\sum \frac{1}{2n^3} < +\infty \underset{\substack{\text{conf.}+\\ \text{conf. as}}}{\Longrightarrow} \sum \frac{|\operatorname{sen} n|}{2n^3+1} \text{ conv.}$$

$\Rightarrow$ La serie assegnata converge assolutamente quindi converge.