INTERSEZIONE CON GLI ASSI

INTERSEZIONE CON L'ASSE x (ASCISSE)

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \xrightarrow{\text{sostituisco}} f(x) = 0$$

INTERSEZIONE CON L'ASSE y (ORDINATE)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \xrightarrow{\text{sostituisco}} y = f(0)$$

N.b. SULL'ASSE DELLE x CI POSSONO ESSERE ZERO, UNA, O PIÙ INTERSEZIONI.

SULL'ASSE DELLE y CI POSSONO ESSERE ZERO O AL MASSIMO UNA INTERSEZIONE.

Es.

$$\frac{\ln(x+1)}{-2-\ln(x+1)}$$

ASSE x PONGO $f(x) = 0$

$$\frac{\ln(x+1)}{-2-\ln(x+1)} = 0$$

(possiamo non calcolare il denominatore/già fatto nel dominio)

$$\ln(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

intersezione dell'asse delle x in $x = 0$

ASSE y PONGO $x = 0$ cioè $f(0)$

$$f(0) = \frac{\ln(0+1)}{-2-\ln(0+1)} = 0$$

dovrei risolvere ma è superfluo perché so che $f(x)$ interseca l'asse x in $x=0$ quindi anche l'asse y in $y=0$. Visto che l'asse y ci può essere al massimo 1 intersezione l'ho già trovata

- PARITÀ E DISPARITÀ

DATA LA FUNZIONE $y = f(x)$ CALCOLA

$$f(-x)$$

Se $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ FUNZIONE PARI

Se $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ FUNZIONE DISPARI

ALTRIMENTI $\Rightarrow$ FUNZIONE NÉ PARI NÉ DISPARI

Es.

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{-2-\ln(x+1)}$$

$$f(-x) = \frac{\ln((-x)+1)}{-2-\ln((-x)+1)} = \frac{\ln(1-x)}{-2-\ln(1-x)}$$

NÉ PARI NÉ DISPARI

SEGNO DELLA FUNZIONE

PER CONOSCERE IL SEGNO DELLA FUNZIONE BASTA FARE

$$f(x) > 0$$

PRENDENDO IN CONSIDERAZIONE SOLO I RISULTATI ALL'INTERNO DEL DOMINIO

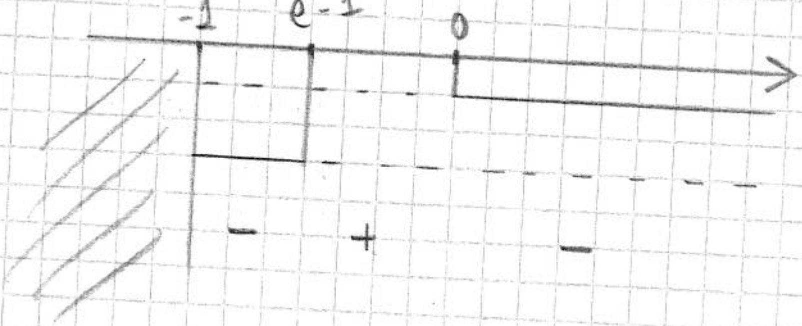
Es.

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{-2-\ln(x+1)}$$

$f(x)>0$
$$\frac{\ln(x+1)}{-2-\ln(x+1)} > 0$$

$N \geq 0 \quad \ln(x+1) \geq 0 \qquad x \geq 0$

$D > 0 \quad -2-\ln(x+1) > 0 \qquad x < e^{-2}-1$



$y = f(x)$ POSITIVA IN $e^{-2}-1 < x < 0$

$y = f(x)$ NEGATIVA IN $-1 < x < e^{-2}-1 \vee x > 0$

Es.

$$y = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x^2 + 2x}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x \neq 0 \Rightarrow x(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \; ; \; x \neq -2 \\ x^3 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 1 \quad \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq 1 \}$$

Es

$$y = \left| \frac{\log_3 (x^2 + 9)}{e^x (2 \sin x - 1)} \right|$$

$$e^x (2 \sin x - 1) \neq 0 \Rightarrow 2 \sin x - 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x \neq \frac{5}{6} + 2k\pi \end{matrix}$$

$$x^2 + 9 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

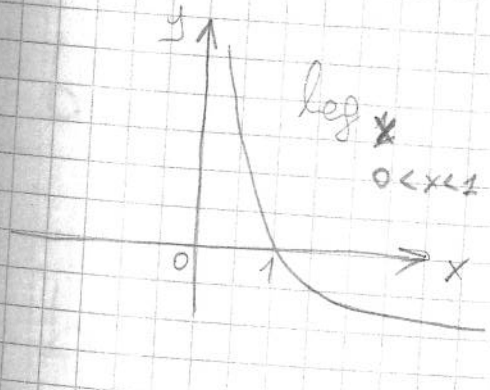
$$D = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \}$$

Es.

$$y = \log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x) \cdot e^{\sin(2x)}$$

$$x > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$



$$D = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; 0 < x < 1 \}$$

POTENZE

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ $\qquad a^0 = 1 \quad a \neq 0$ $\qquad -2^2 = 4$

$-2^3 = -8$

$a^1 = a$

$8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

$2^{5/3} = \sqrt[3]{2^5}$

$2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3}$

con base negativa devo avere l'esponente della radice dispari

$(-2)^{2/3} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$

$(-2)^{5/3} = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-2^5} = -\sqrt[3]{2^5}$

$a^{\sqrt{2}}$ $\qquad \{a, a^{1,4}, a^{1,41}, a^{\dots} \dots\}$ $\qquad$ se $a > 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{2^{\sqrt{2}}}{1}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$ $\qquad$ se $0 < a < 1$

$2^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$ $\qquad$ se $a > 0$

$a^{c+d} = a^c \cdot a^d$

$a^{c-d} = a^c / a^d$

$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

$(a/b)^c = a^c / b^c$

LOGARITMO

$$\boxed{Log_a x = y}$$

y è l'esponente di a cioè a^y che dà come risultato x cioè $a^y = x$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$Log_a x = \frac{Log_b x}{Log_b a}$$

$$Log_a b = \frac{1}{Log_b a}$$

$$Log_{\frac{1}{a}} b = -Log_a b$$

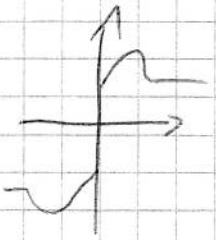
$$Log_{\frac{1}{a}} (\sqrt[n]{b}) = -\frac{1}{n} Log_a b$$

FUNZIONE PARI

$$f(-x) = f(x)$$

FUNZIONE DISPARI

$$f(-x) = -f(x)$$



$f+g$	f pari	f dispari
g pari	PARI	NÈ PARI NÈ DISPARI
g dispari	NÈ PARI NÈ DISPARI	DISPARI

$f \cdot g$	f PARI	f DISPARI
g pari	PARI	DISPARI
g dispari	DISPARI	PARI

$f \circ g$	f PARI	f DISPARI
g pari	PARI	PARI
g dispari	PARI	DISPARI

Es di riepilogo Es 6

a $f(x) = \log(x^2+x+2)$

$x^2+x+2 > 0$ $\quad$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

ESERCIZIARIO ~~[illegible]~~ PROP

Es. 1.1 – 1.15

vero
F vero
V
F V
1.05 V
F
V
F
V F
1.10 F V
V
V
F
E

1.28 – 1.41

1.28 a V F
b F ~~[illegible]~~
c V
d F
e V
f F
g F
h F V
i V
l V

1.29 $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$ $\quad \{a \geq 0$

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ $\quad \{\forall a \in \mathbb{R}$

$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ $\quad \{a \in \mathbb{R}^*$

$a^{\frac{1}{3}} =$ $\quad \{a \in \mathbb{R}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^a =$ $\quad \{a \in \mathbb{R}$

$-2^a =$ $\quad \{a \in \mathbb{Q}$ $\quad a = \frac{m}{n}$ con m pari oppure con m e n dispari

$a^{\pi} =$ $\quad \{a \geq 0$

a^{-2} $\quad \{a \neq 0$

$\log_{\frac{1}{2}} a =$ $\quad \{0 < a$

$\log_a 3 =$ $\quad \{a > 0 \quad a \neq 1$

1.30 a F
b V
c F
d F

1.31 a V F
b V
c V
d V F
e V

1.41 a V F
b F V
c V
d F
e F
f F
g F V
h V

1.32 a $[3, +\infty)$
b $(2, x]$ ~~$\cup [x, \pi]$~~
c $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$
d $[-3, 3]$
e $[0, 1] \cup (2, +\infty)$

1.33 $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2 \text{ o } x > 3\}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ o } 1 < x < 2\}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ o } x > 1\}$

~~Es. altro esercizi (FILE 5 / PAG 66) Es. da 2.33~~

1 ~~Esempi~~ Es ALTRO ES. (PAG 67 / FILE 39)

1) $h = \dfrac{x^2 - 5x}{4 - x}$

$4 - x \neq 0$ $\quad x \neq 4$

$x^2 - 5x > 0$

$x > 5$???
$x < 0$

2) $\sqrt{1 - \log_3(x+3)}$

$x + 3 > 0$ $\quad x > -3$

$1 - \log_3(x+3) > 0$ $\quad \log_3(x+3) < 1$

$3^{(x+3)} > 1$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

IL CONCETTO

IL CONCETTO DI FUNZIONE NASCE PER DESCRIVERE MATEMATICAMENTE GRANDEZZE VARIABILI.
DEVE ESISTERE UNA RELAZIONE TRA 2 GRANDEZZE O MEGLIO LA DIPENDENZA DI UNA GRANDEZZA DA UN'ALTRA.

ESEMPIO
LO SPAZIO PERCORSO DA UN OGGETTO PESANTE LASCIATO CADERE DA UNA CERTA ALTEZZA VARIA NEL TEMPO SECONDO LA LEGGE

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot \underline{g} \cdot t^2$$

$\underline{g}$ = ACC. GRAV / 9,81

AD UN NUMERO REALE (INGRESSO O VARIABILE INDIPENDENTE) VIENE ASSOCIATO UNIVOCAMENTE UN ALTRO NUMERO REALE (USCITA O VARIABILE DIPENDENTE).

IN GENERALE GLI INGRESSI AMMISSIBILI SONO SOGGETTI A RESTRIZIONI. NELL'ESEMPIO PRECEDENTE SI DEVE imporre $t \geq 0$.

DEFINIZIONE
SIANO A E B INSIEMI NON VUOTI. UNA FUNZIONE f DI DOMINIO A a valori in B (O DI CODOMINIO B) È UNA CORRISPONDENZA UNIVOCA DA A IN B, OVVERO UNA LEGGE CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO

DI A UNO ED UNO SOLO ELEMENTO DI B.

$$f: A \to B \qquad x \to f(x)$$

$$f: x \in A \to f(x) \in B$$

IL SIMBOLO $f(x)$ INDICA IL VALORE DELLA FUNZIONE IN X.

L'IMMAGINE DI F È L'INSIEME DELLE POSSIBILI "USCITE"

$$\mathrm{Im}\, f = f(A) = \{ y \in B \mid \exists x \in A \ \ y = f(x) \} \subseteq B$$

IL GRAFICO DI F È L'INSIEME

$$\mathrm{Gra}\, f = \{ (x, f(x)) \in A \times B \mid x \in A \} \subseteq A \times B$$

IL CODOMINIO PUÒ ESSERE PIÙ GRANDE L'IMMAGINE DI F, PUÒ ACCADERE CHE : $\mathrm{Im}\, f \subsetneq B$

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Sia $f: A \to B$

- Se $B \subseteq \mathbb{R}$ f si dice REALE, se $A \subseteq \mathbb{R}$ f si dice DI VARIABILE REALE
- Ogni funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ si chiama SUCCESSIONE
- IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE REALE E' UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^2$.

FUNZIONI LIMITATE

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- LA f SI DICE LIMITATA SUPERIORMENTE SE ESISTE $M \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in D$$

- LA f SI DICE LIMITATA INFERIORMENTE SE ESISTE $m \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in D.$$

- LA f SI DICE LIMITATA IN D SE È LIMITATA SIA SUPERIORMENTE E CHE INFERIORMENTE.

LA f È LIMITATA SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) SE $\mathrm{Im} f = f(D)$ È UN INSIEME LIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) DI $\mathbb{R}$.

- GEOMETRICAMENTE: f è limitata superiormente (INFERIORMENTE) SE $\mathrm{Graf}\, f$ È CONTENUTO IN UN SEMIPIANO INFERIORE (SUPERIORE) DELIMITATO DA UNA RETTA PARALLELA ALL'ASSE DELLE ASCISSE.
- f È LIMITATA SE $\mathrm{Graf}\, f$ È CONTENUTO IN UNA STRISCIA ORIZZONTALE DEL PIANO CARTESIANO.

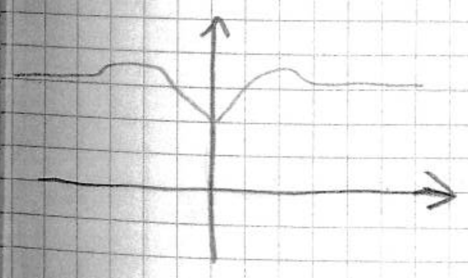
FUNZIONI SIMMETRICHE

UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE f DEFINITA IN UN DOMINIO SIMMETRICO (TIPICAMENTE UN INTERVALLO DEL TIPO $(-a, a)$) SI DICE

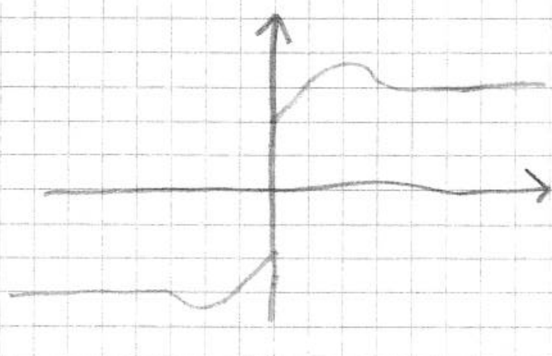
PARI SE $\forall x \in \mathrm{Dom} f \quad f(-x) = f(x)$

DISPARI SE $\forall x \in \mathrm{Dom} f \quad f(-x) = -f(x)$

PARI SIMM Y

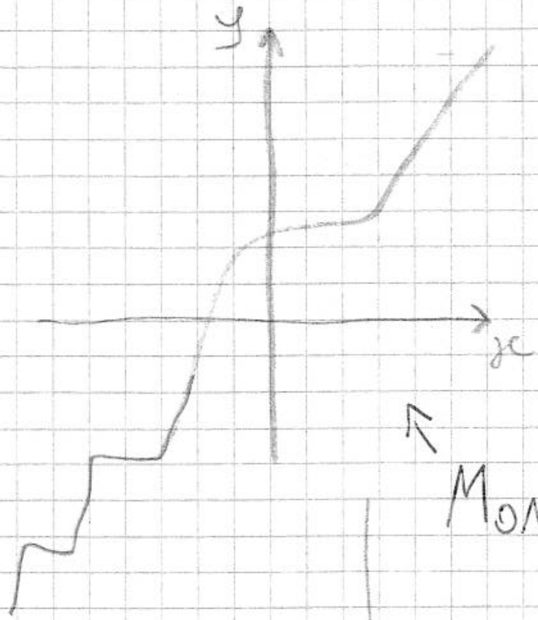


DISPARI SIMM ORIGINE



Funzioni Monotone

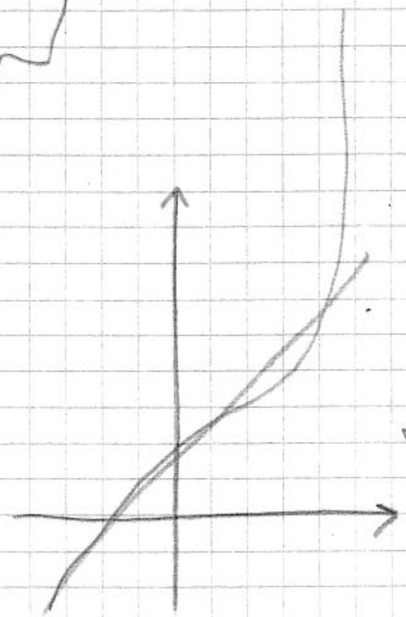
Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$\forall x_1, x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

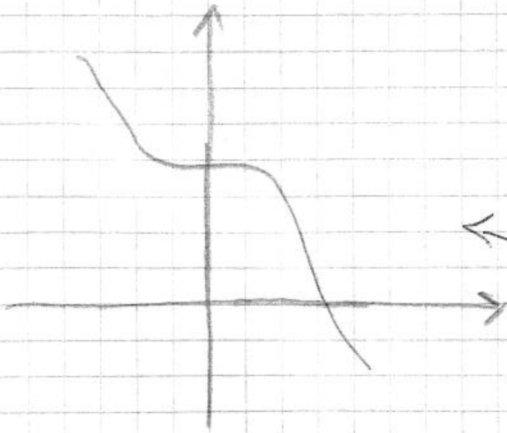
Monotona Crescente



$\forall x_1, x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

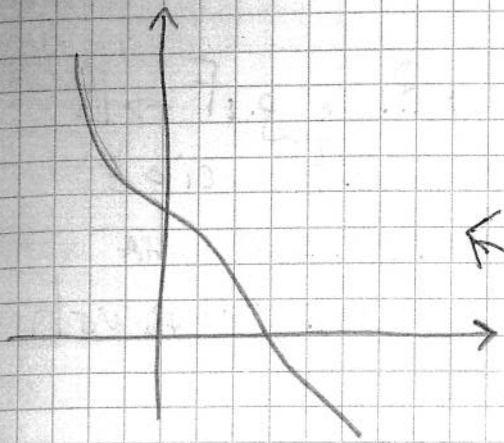
Strettamente crescente



$\forall x_1, x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Monotona Decrescente



$$\forall x_1, x_2 \in D$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

STRETTAMENTE DECRESCENTE

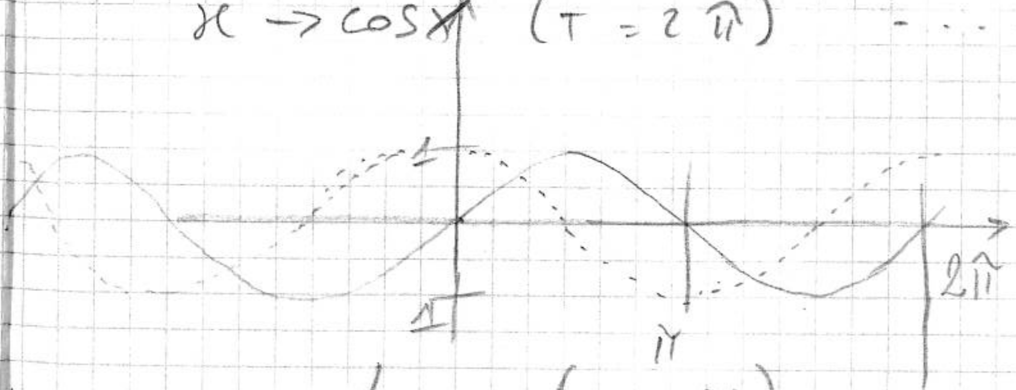
FUNZIONI PERIODICHE

SIA $T > 0$. UNA FUNZIONE $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE T-PERIODICA O PERIODICA DI PERIODO T SE

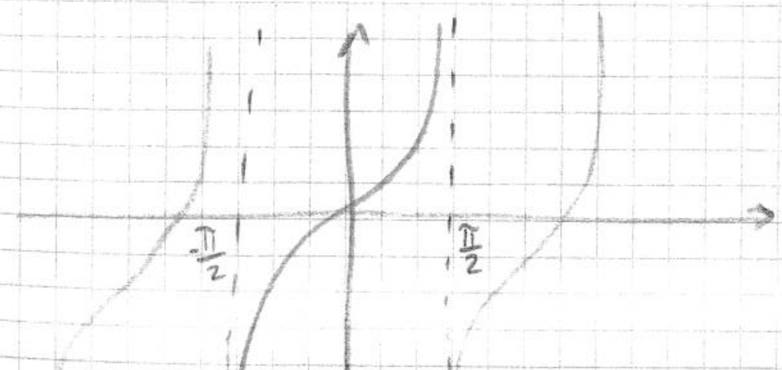
$$\forall x \in D \qquad f(x+T) = f(x)$$

ES. $x \to \sin x \quad (T = 2\pi)$ ———

$x \to \cos x \quad (T = 2\pi)$ - - - -



$$x \to tg\, x \quad (T = \pi)$$



FUNZIONI COMPOSTE

SIANO E, F INSIEMI E SIANO $f: E \to \mathbb{R}$ e $g: F \to \mathbb{R}$ DUE FUNZIONI TALI CHE $Im(f) = f(E) \subseteq F$ CIOE' PER OGNI $x \in E$ $f(x) \in F$. SI DEFINISCE LA FUNZIONE COMPOSTA DI f E g COME UNA FUNZIONE h DENOTATA CON $h = g \circ f : E \to \mathbb{R}$
DEFINITA DA

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in E$$

NON E' COMMUTATIVA $\quad f \circ g \neq g \circ f$

E' ASSOCIATIVA $\quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

FUNZIONI INVERTIBILI E FUNZIONI INVERSE

UNA FUNZIONE $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE INVERTIBILE SE PER OGNI $y \in \mathrm{Im} f = f(D)$ ESISTE UN SOLO $x \in D$ TALE CHE $f(x) = y$

Se f è invertibile, f realizza una corrispondenza biunivoca tra D e $f(D)$.

UNA FUNZIONE $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è INVERTIBILE SE VALE UNA DELLE SEGUENTI CONDIZIONI EQUIVALENTI:

- $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- $\forall y \in f(D) \quad \exists! \, x \in D$ tale che $f(x) = y$

ESISTE 1 SOLO

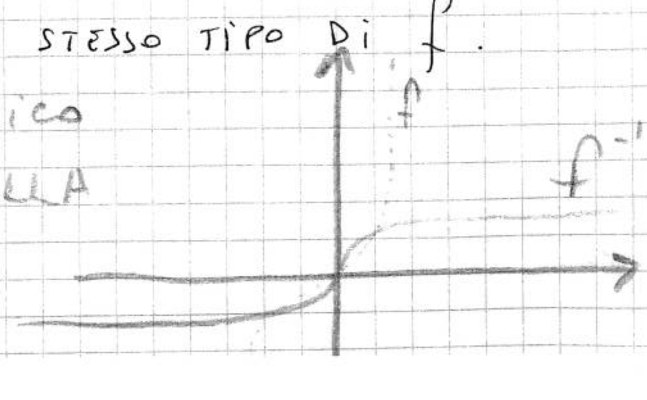
CLASSI DI FUNZIONI SICURAMENTE NON INVERTIBILI:
FUNZIONI PERIODICHE, FUNZIONI PARI

CLASSI DI FUNZIONI SICURAMENTE INVERTIBILI:
FUNZIONI STRETTAMENTE MONOTONE.

TEOREMA

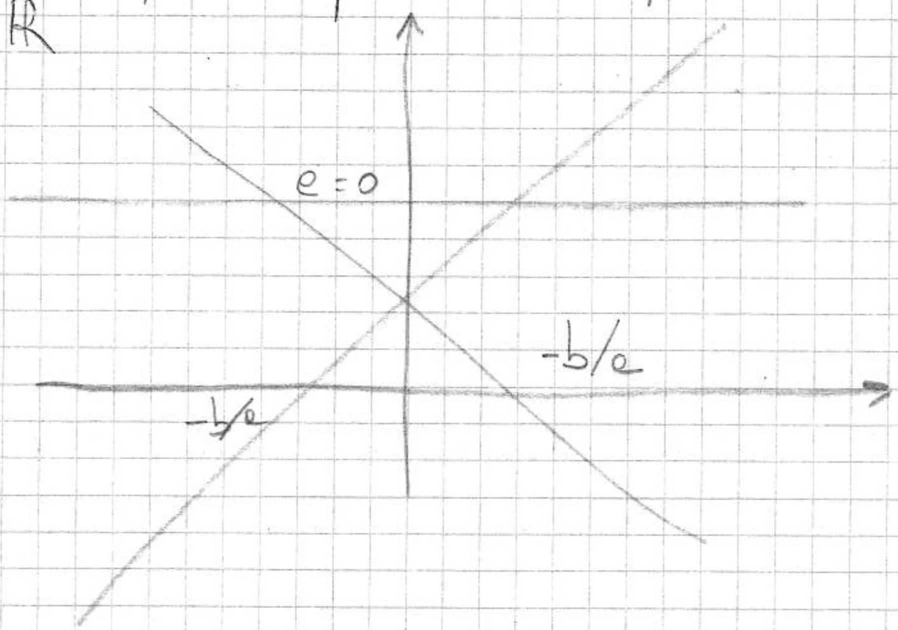
UNA FUNZIONE $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ STRETTAMENTE MONOTONA IN D è INVERTIBILE IN D. INOLTRE L'INVERSA f^{-1} è STRETTAMENTE MONOTONA DELLO STESSO TIPO DI f.

IL GRAFICO DI f^{-1} è il simmetrico del GRAFICO DI f RISPETTO ALLA RETTA $y = x$



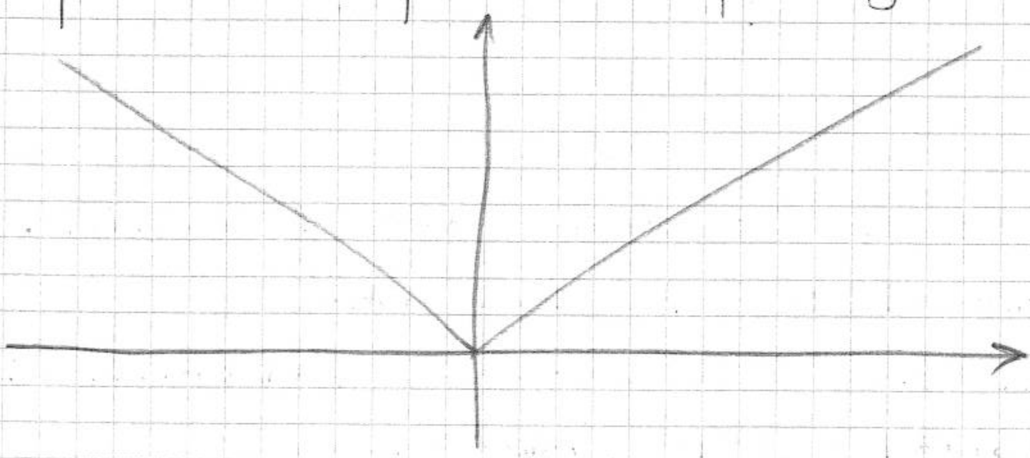
Funzioni Lineari

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$



Funzione Valore Assoluto

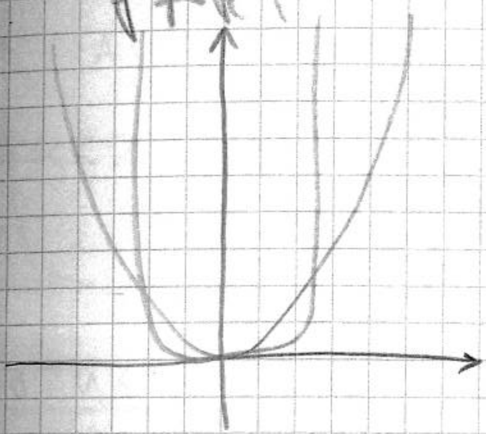
Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$



FUNZIONE POTENZA CON ESPONENTE NATURALE

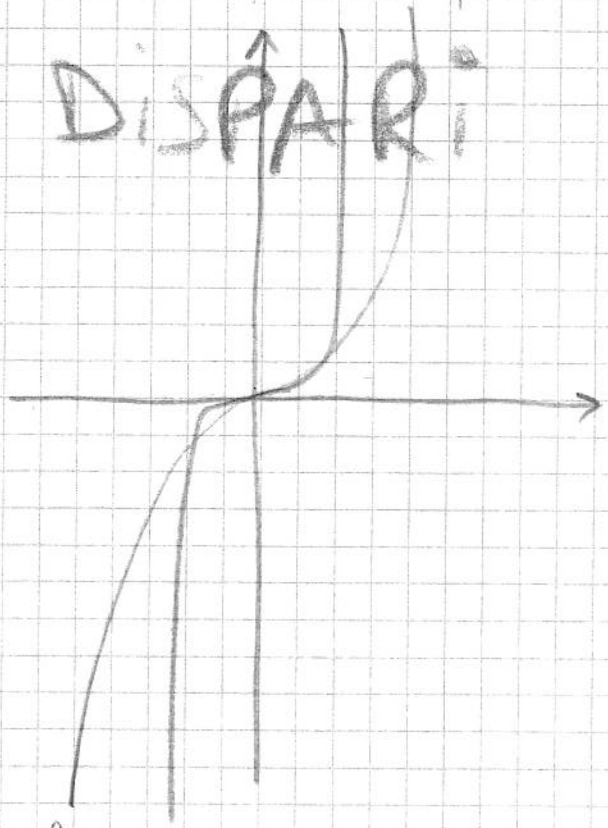
Sia $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita $f(x) = x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

PARI



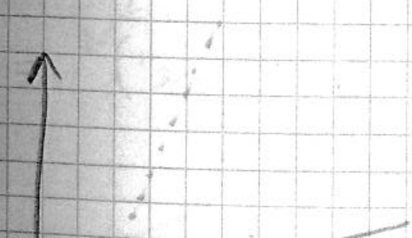
$f(x) = x^n$ $n = 2, 4$

DISPARI



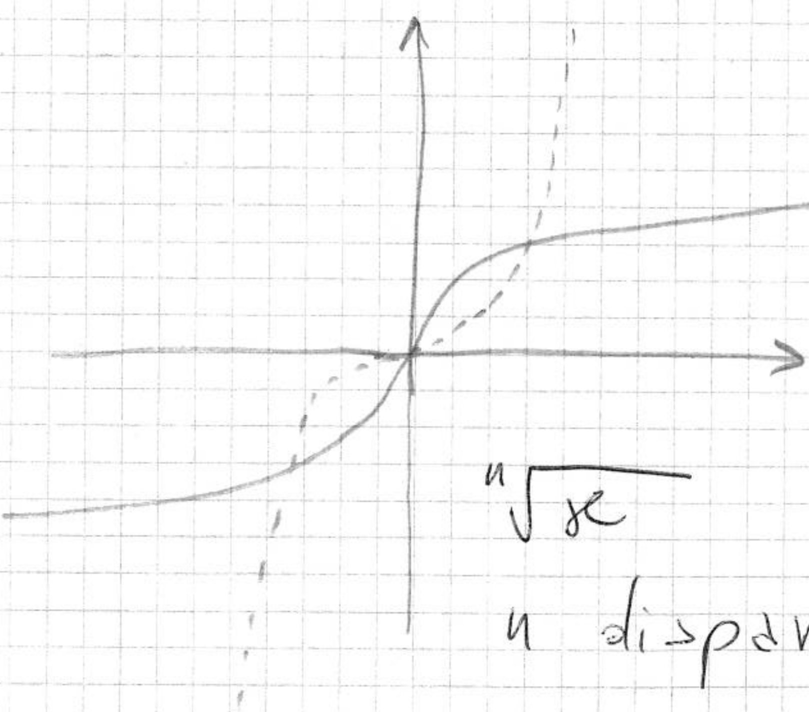
$f(x) = x^n$ $n = 3, 5$

INVERSA *



$\sqrt[n]{x}$

n pari



$\sqrt[n]{x}$

n dispari

* INVERTIBILITÀ DELLA FUNZIONE POTENZA

Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è pari, la restrizione di x^n ad $[0, +\infty)$ è strettamente crescente, quindi è INVERTIBILE. LA SUA inversa è la funzione

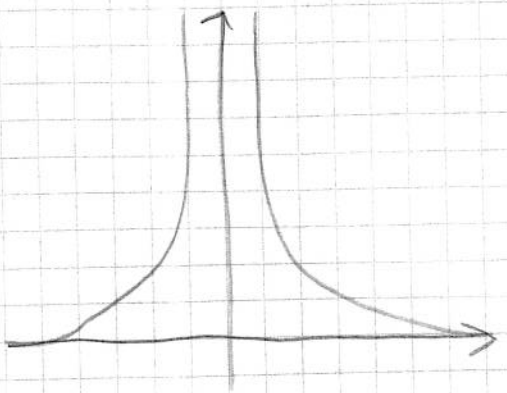
$$x \in [0, +\infty) \to \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, x^n è STRETTAMENTE crescente, quindi è invertibile. LA SUA inversa è la funzione

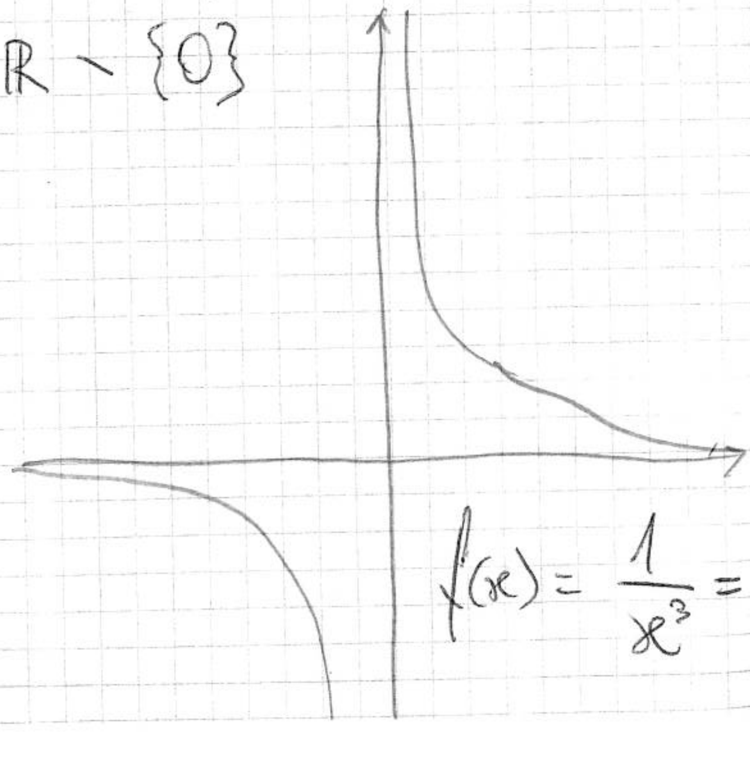
$$x \in \mathbb{R} \to \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

FUNZIONE potenza con esponente INTERO NEGATIVO

Sia n un intero naturale, $n \geq 1$. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^{-n} = (x^n)^{-1} = \frac{1}{x^n}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



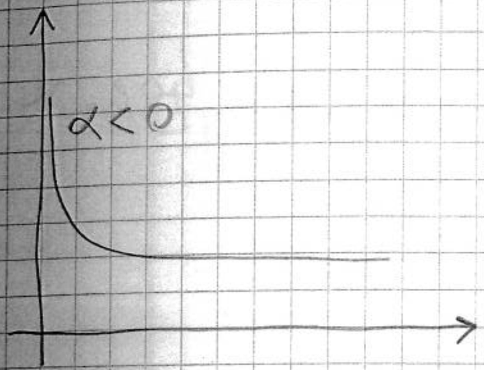
$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

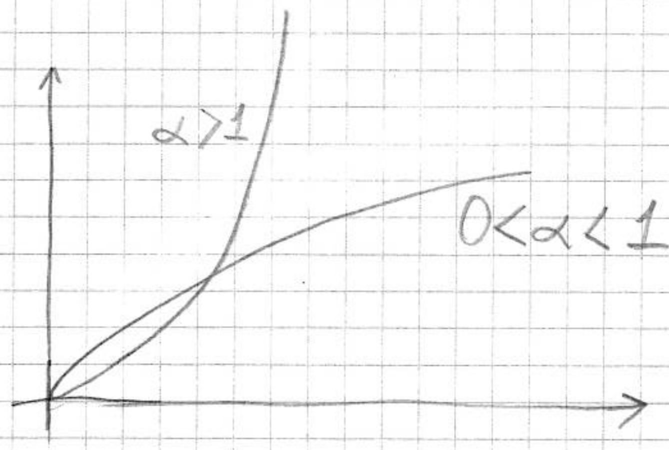


$$f(x) = \frac{1}{x^3} =$$

FUNZIONE POTENZA CON ESPONENTE REALE

Sia $\alpha \in \mathbb{R}^*$, si consideri la funzione $f(x) = x^\alpha$ definita per $x \in (0, +\infty)$ se $\alpha < 0$ e per $x \in [0, +\infty)$ se $\alpha > 0$

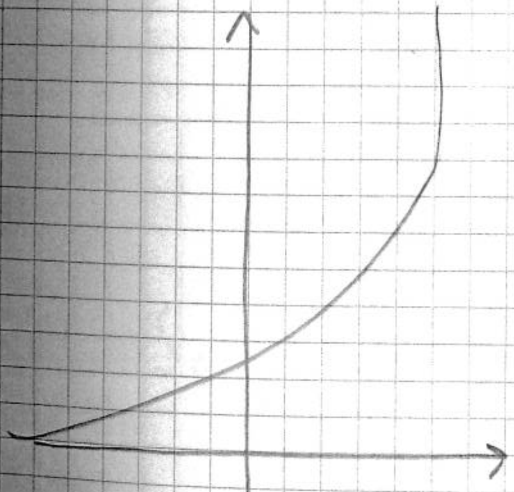


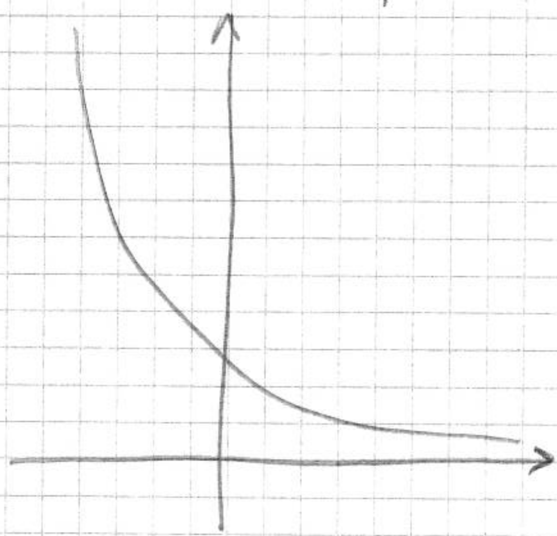


x^α, $\alpha \leq 0$ $\qquad$ x^α, $\alpha > 0$

FUNZIONE ESPONENZIALE

Dato $a \in]0, +\infty)$, $a \neq 1$, la funzione $x \in \mathbb{R} \to a^x \in \mathbb{R}$ si chiama funzione esponenziale



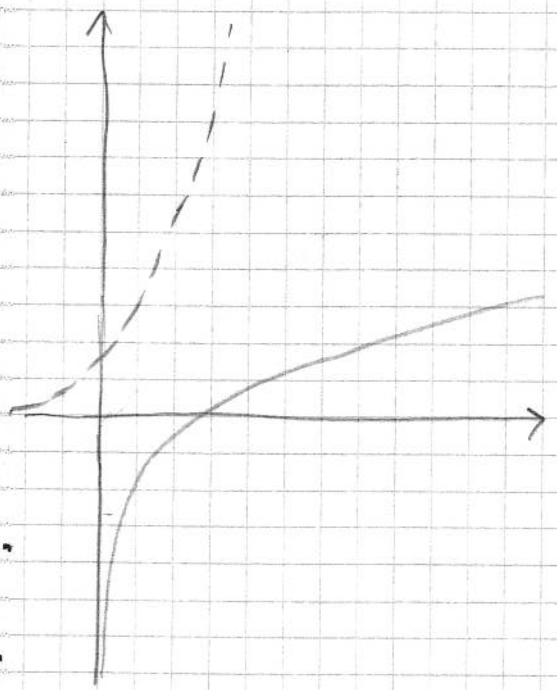


$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

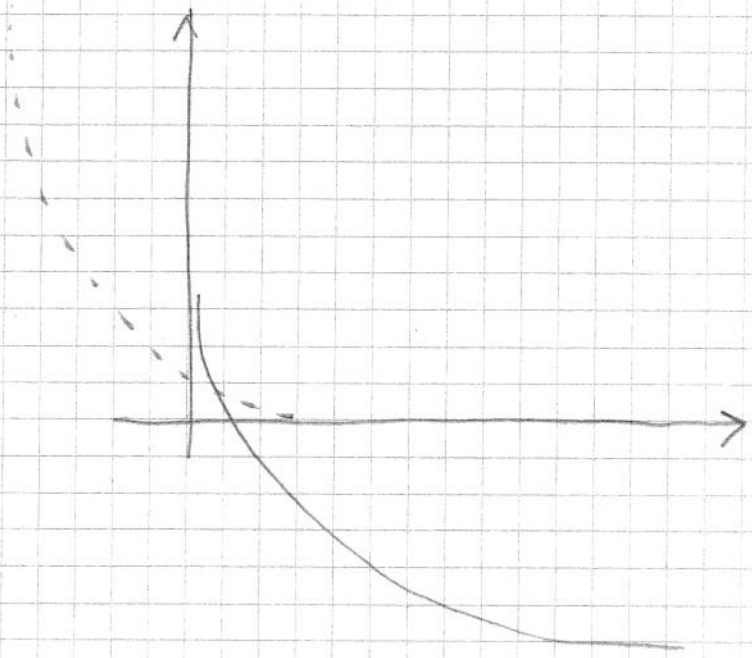
$= \boxed{x^{-3}}$

Funzione Logaritmo

La funzione esponenziale è invertibile (poiché è strettamente monotona). La sua inversa è la funzione Logaritmo in base a, $\log_a$.
Si ha $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Si scrive $\log_a x$ invece di $\log_a(x)$



$a > 1$



$0 < a < 1$

Operazioni sui Grafici

Dato il grafico di una funzione $f(x)$

$g_1(x) = f(x+a)$ Traslazione orizzontale di a unità

$g_2(x) = f(x) + a$ Traslazione verticale di a unità

$g_3(x) = K \cdot f(x)$ Moltiplicando per K tutte le ordinate

Polinomi Quadratici

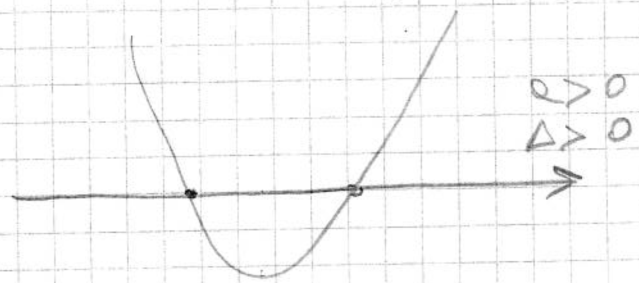
Si consideri il polinomio quadratico

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \leftarrow \text{discriminante}$$

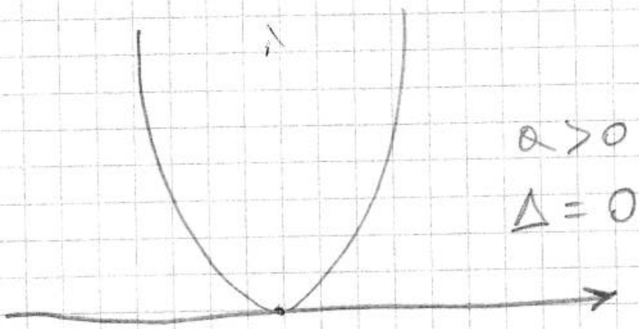
Se $\Delta > 0$ f ammette 2 zeri ($x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = 0$)

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

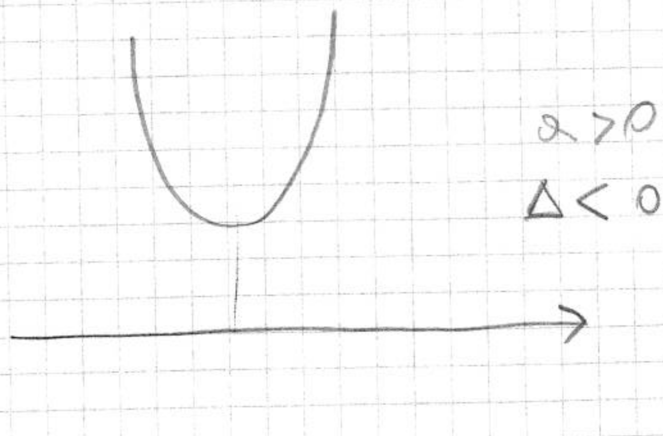


Se $\Delta = 0$ f ammette 1 solo zero uguale a

$$-\frac{b}{2a}$$

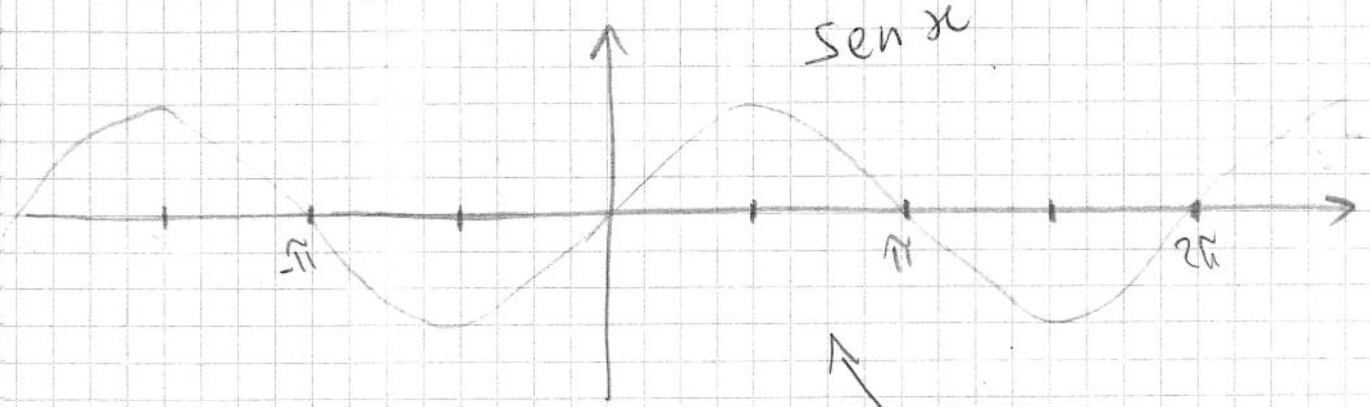


Se $\Delta < 0$ f non ammette zeri



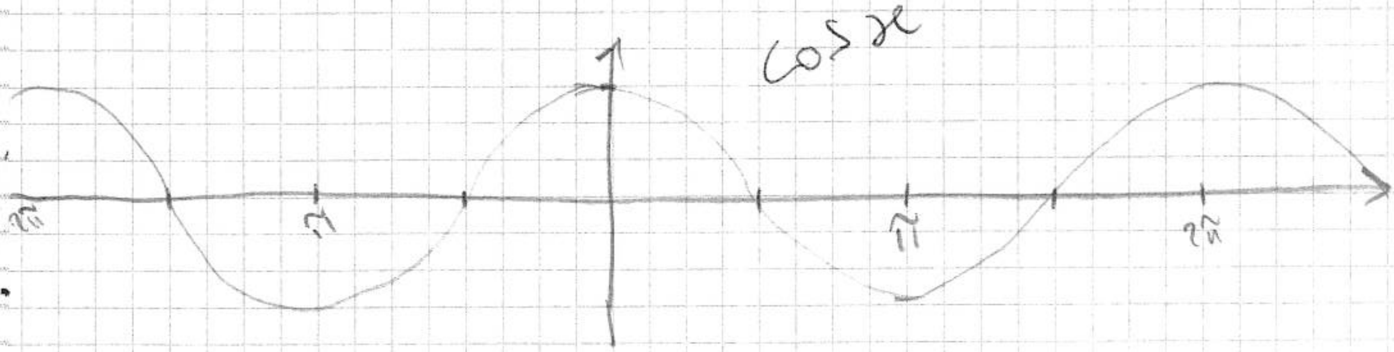
Seno e Coseno

$x \in \mathbb{R} \to \operatorname{sen} x$



2π-periodiche

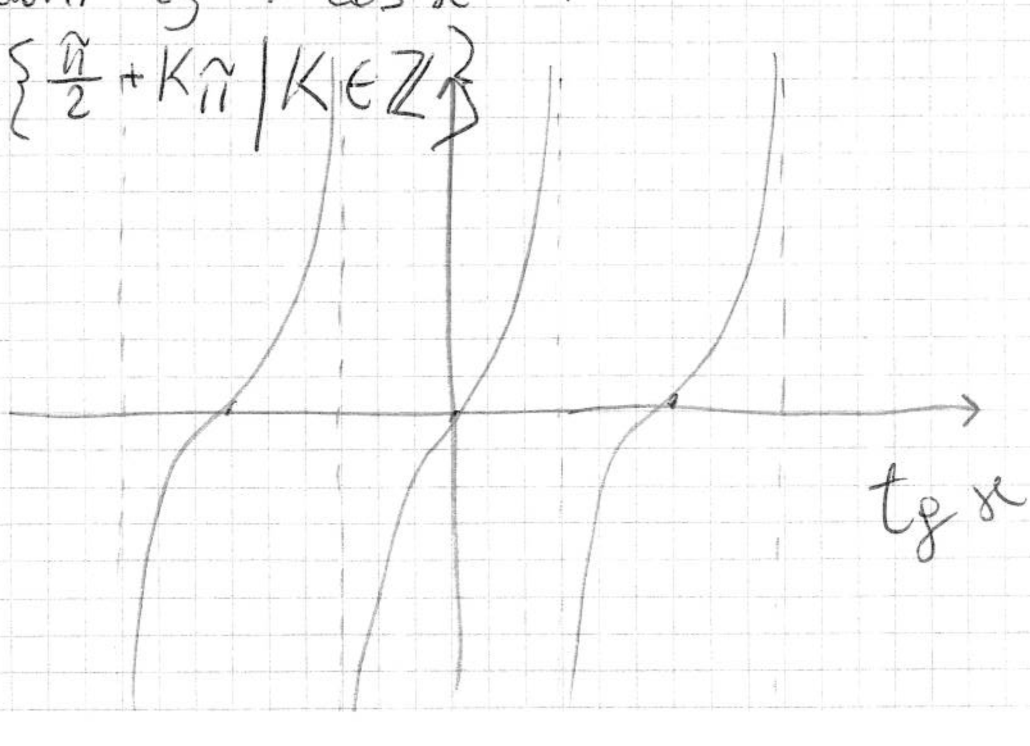
$x \in \mathbb{R} \to \cos x$



Tangente

$tg : x \in \operatorname{dom} tg \to \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \in \mathbb{R}$

$\operatorname{dom} tg = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + K\pi \mid K \in \mathbb{Z} \right\}$

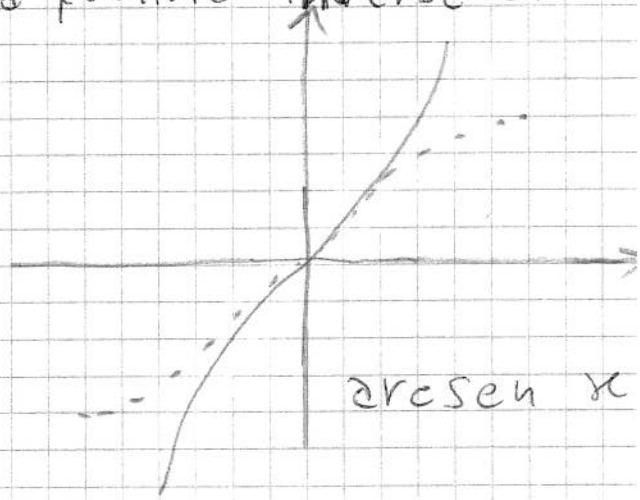


Le funzioni trigonometriche, essendo periodiche, non sono invertibili.
Le loro RESTRIZIONI AD opportuni intervalli sono strettamente cresenti o STRETTAMENTE decrescenti quindi invertibili

ARCOSENO

$sen : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente ed ha come immagine $[-1,1]$. La sua funzione inversa si chiama FUNZIONE ARCOSENO

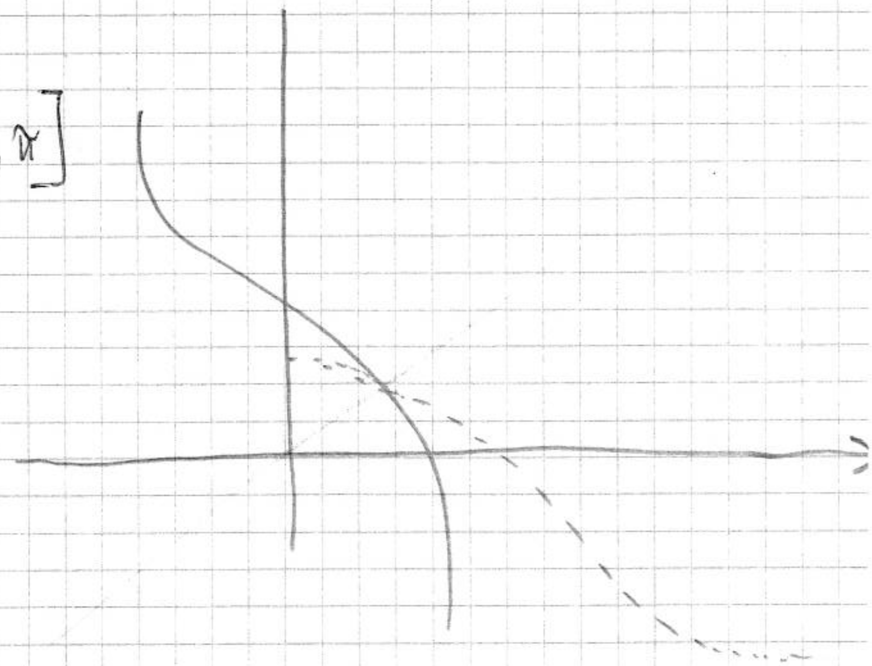
$arcsen : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



ARCOCOSENO

$cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ è STRETTAMENTE DECRESCENTE ED HA COME IMMAGINE $[-1,1]$. LA SUA FUNZIONE INVERSA È LA FUNZIONE arcoseno

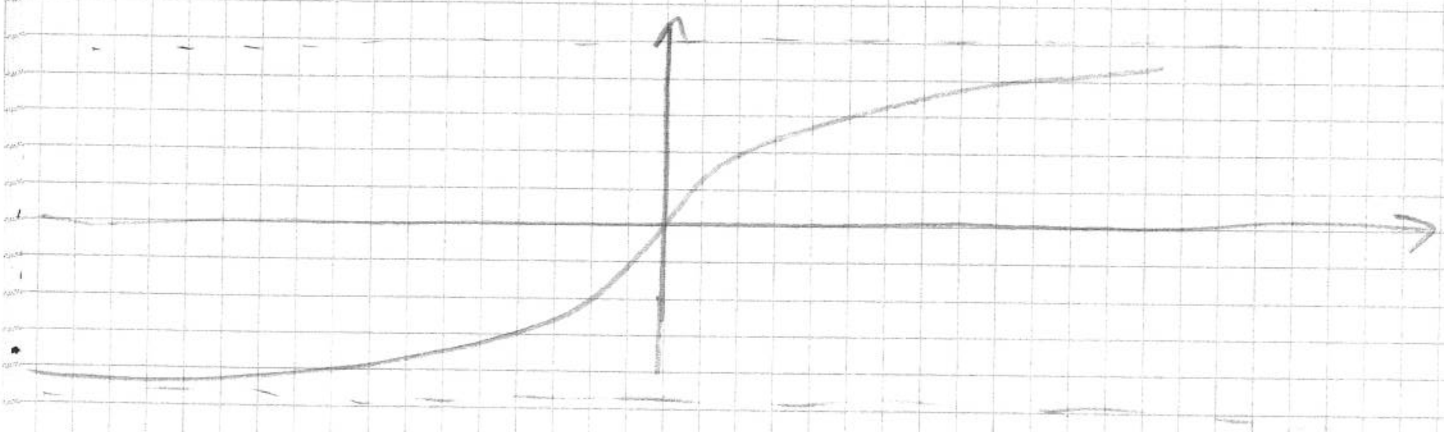
$arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$



ARCOTANGENTE

$tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente ed ha come immagine $\mathbb{R}$. La sua funzione inversa è la funzione arcotangente

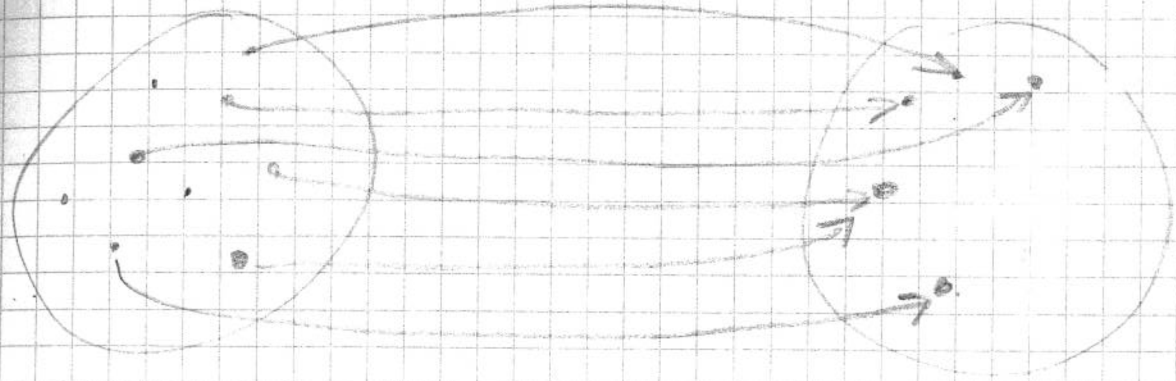
$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $\operatorname{arctg} x$



SURIETTIVA

LA FUNZIONE È SURIETTIVA SE L'IMMAGINE DI f COINCIDE CON IL DOMINIO. (PIÙ VARIABILI POSSONO PUNTARE SULLO STESSO ELEMENTO DEL CODOMINIO)

$f: A \longrightarrow B$

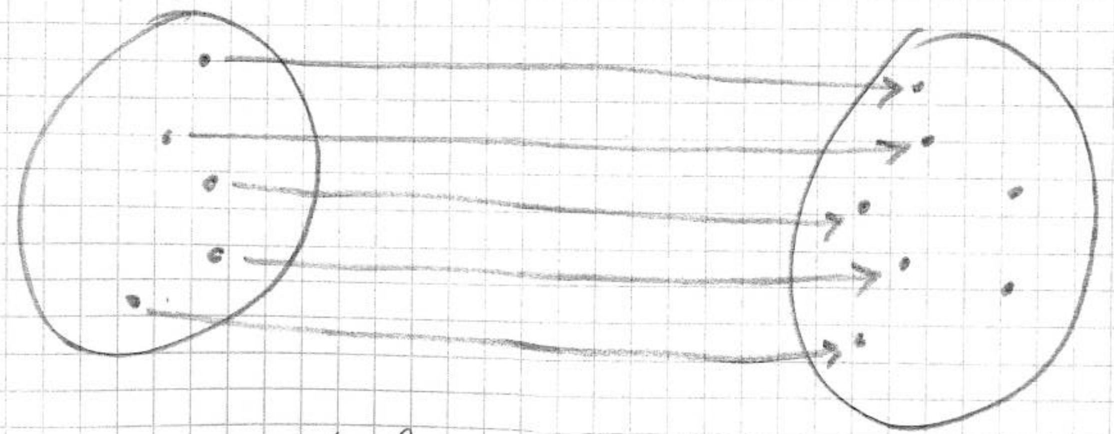


INIETTIVA

UNA FUNZIONE SI DICE INIETTIVA SE ELEMENTI DISTINTI DEL DOMINIO HANNO IMMAGINI DISTINTE

$\forall e_1 e_2 \in A$ tali che $f(e_1) = f(e_2) \Rightarrow e_1 = e_2$

$f: A \longrightarrow B$

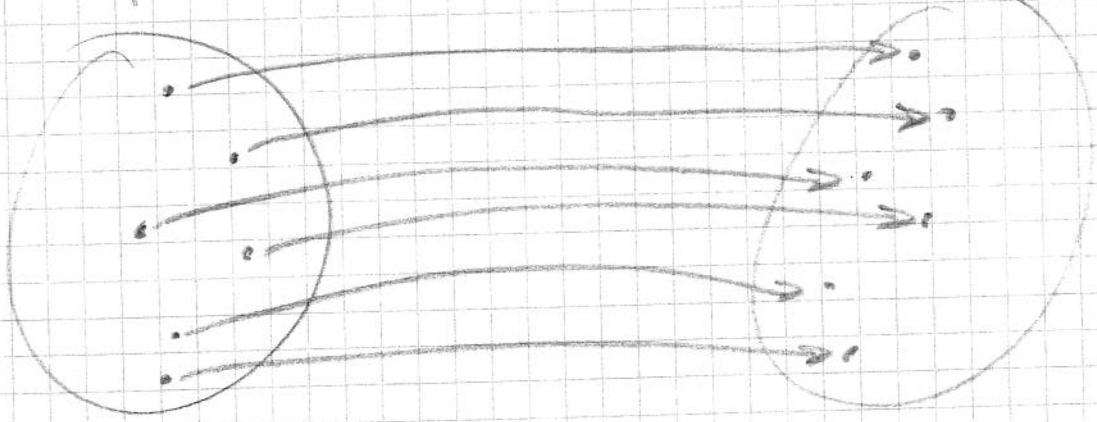


Le immagini di f sono distinte, cioè non ci sono due elementi di A che puntano sullo stesso elemento di B. PERÒ NON TUTTI GLI ELEMENTI DI B SONO RAGGIUNTI DA UNA FRECCIA.

BIUNIVOCA O BIETTIVA

SE UNA FUNZIONE È SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA SI DICE BIUNIVOCA

$f: A \longrightarrow B$

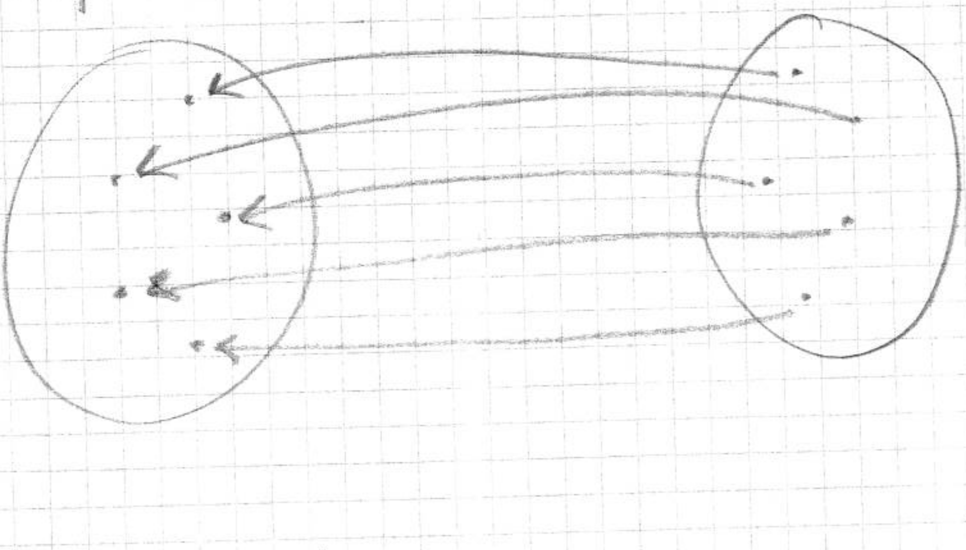


UNA FUNZIONE BIUNIVOCA È INVERTIBILE !

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

ANCORA BIUNIVOCA

$f^{-1} : B \longrightarrow A$



INTERSEZIONE CON GLI ASSI

Con l'asse delle x $\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \Longrightarrow f(x) = 0$

Con l'asse delle y $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \Longrightarrow y = f(0)$

STUDIO DEL SEGNO

$f(x) \geq 0$

INVALSI

PRODOTTI NOTEVOLI

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a-b-c)(a-b+c) = [(a-b)^2-c^2] = [a^2-2ab+b^2-c^2]$

SCOMPOSIZIONI

$ax+bx+cx = x\cdot(a+b+c)$

$ax+bx+ay+by = x\cdot(a+b)+y\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(x+y)$

$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)\cdot(a^2 \mp ab + b^2)$

$x^2+sx+p = (x+a)\cdot(x+b)$ $\quad s = a+b$

$p = a\cdot b$

POTENZE

- $a^0 = 1$ con $a \neq 0$

$-2^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$

$-2^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ es. $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$

+ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

+ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ es. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$

+ $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

+ $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$

+ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Es.

$2^5 \cdot 2^3 = 2^8$

$3^7 \cdot 3^5 = 3^{12}$

$5^2 \cdot \frac{1}{5} = 5^2 \cdot 5^{-1} = 5$

$2^7 \cdot 2^{-5} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{14-10+1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$

$\frac{2^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^3} \cdot 2^0 = 2^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot 2^0 = \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^0}^{\text{si può evitare}} = \frac{1}{6} = 6^{-1}$

$\frac{3^2}{(3^3)^2} \frac{(3^2)^3}{3^5} \cdot 3^3 = \frac{3^2}{3^5} \cdot 3^3 = 3^{-3} \cdot 3^3 = 3^0 = \underline{1}$

$9^0 \cdot 3^0 \cdot 121^0 + 2^0 = 2$

$\sqrt{24 \cdot 3} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{\sqrt[3]{5}} \cdot (5^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{5}} \cdot 5 = \sqrt{5^{\frac{1}{3}}} \cdot 5 = (5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 5^{\frac{1}{6}} \cdot 5 = 5^{\frac{7}{6}}$

RADICALI

$\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$

PARI

$\sqrt{-64}$ <u>non esiste</u> mentre $\sqrt[3]{-64} = -4$ ESISTE (ok)

NEGATIVO — DISPARI — NEGATIVO

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad n, m \in \mathbb{N}$

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

es

- $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$
- $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$
- $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{8}$

+ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

+ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ con $b \neq 0$

+ $\sqrt[n \cdot s]{a^{m \cdot s}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \forall a \geq 0$

+ riduzione di due radicali allo stesso indice

$\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ con $n \neq m$

Es $\xleftarrow{mcm}$

$\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$ $\rightarrow$ $\sqrt[12]{\ldots}$, $\sqrt[12]{\ldots}$

$\sqrt[12]{8^{12:3=4}}$ $\sqrt[12]{16^{12:4=3}}$ $\rightarrow$ $\underline{\sqrt[12]{8^4}}$ $\underline{\sqrt[12]{16^3}}$

+ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$ es $\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

+ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ con $m, n \in \mathbb{N}$ es $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[12]{3}$

RAZIONALIZZAZIONE

+ $\dfrac{Q}{\sqrt{a}} = \dfrac{Q}{\sqrt{a}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \dfrac{Q \cdot \sqrt{a}}{a}$

+ $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$ $\dfrac{Q}{\sqrt[n]{a^m}}$

$$\frac{Q}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{Q}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{Q\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} = \frac{Q\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

es

$$\frac{51}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{51}{\sqrt[5]{7^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{51\sqrt[5]{7^2}}{7}$$

+ $\dfrac{Q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{Q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{Q\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$ Es $\rightarrow$

$\dfrac{Q}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{Q}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{Q\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$

Es $\rightarrow$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{5-7} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$$

$$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{13}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = \sqrt{13}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2^2})}{2+3}$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{6}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{5-2}$$

RADICALI DOPPI

$$\pm\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Es

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}} = \sqrt{\frac{4+3}{2}} + \sqrt{\frac{4-3}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Es

$$4\cdot\sqrt{2} = \sqrt{4^2\cdot 2} = \sqrt{32}$$

$$\sqrt{9-4\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{9-\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{81-32}}{2}} - \sqrt{\frac{9-\sqrt{81-32}}{2}} = \sqrt{\frac{9+7}{2}} - \sqrt{\frac{9-7}{2}}$$

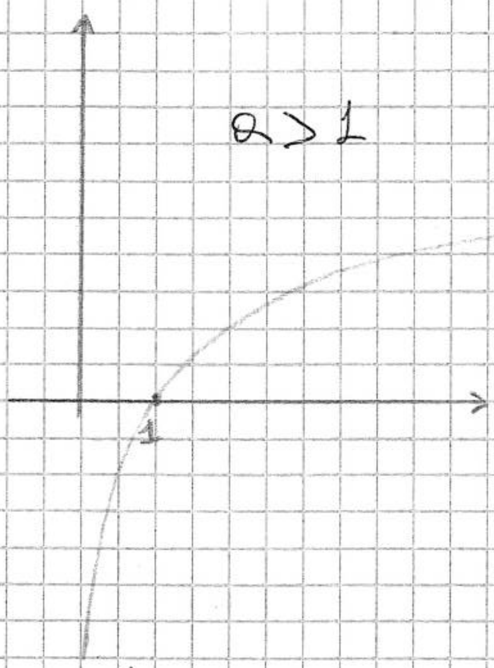
$$= \sqrt{8} - 1$$

LOGARITMO

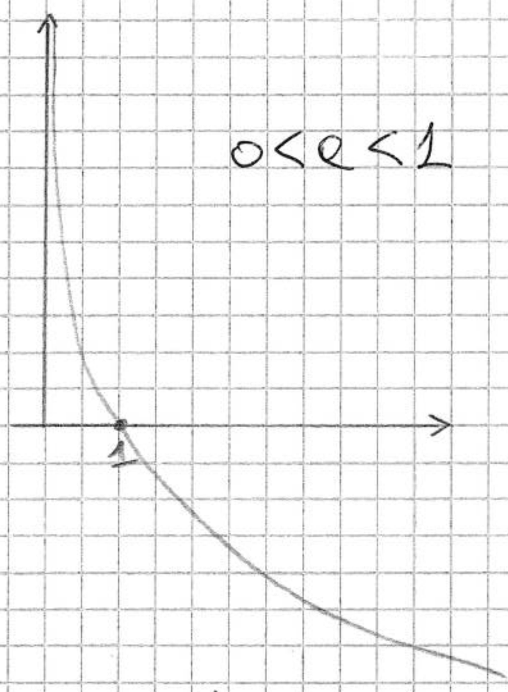
Siano a e b due numeri reali, entrambi positivi e con $a \neq 1$. Definiamo $\log_a b$ come quel numero reale c che realizza l'uguaglianza

$$a^c = b$$

Es. $\log_a a^l = l$



$\log_3 x$



$\log_{\frac{1}{2}} x$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a (b^c) = c \log_a b$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

CAMBIAMENTO DI BASE

$$\log_a(b) = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Es. $\log x = 2$

$$e^{\log x} = e^2$$

$$x = e^2$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{\frac{1}{a}}(b) = -\log_a b$$

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt[n]{b}) = -\frac{1}{n}\log_a(b)$$

$\log_a +\infty = +\infty$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a 0 = 1$ ← se $a > 1$

$\log_a 0^+ = -\infty$

$\log_a 0^- = +\infty$

$\log_a +\infty = -\infty$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a 0 = +\infty$ ← se $0 < a < 1$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

$\log_a (f(x)) \gtrless 0$ ← ZERO

metodo risolutivo es >

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \log_a(f(x)) > \log_a 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \geq 1 \end{cases}$$

$a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leq 1 \end{cases}$$

$0 < a < 1$

es →

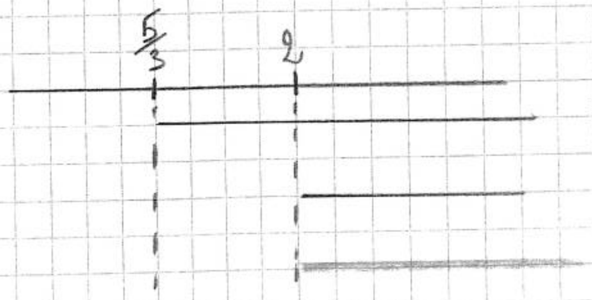
Es $\log_2(3x-5) > 0$ $\qquad a > 1$

$$\begin{cases} 3x-5>0 \\ \log_2(3x-5) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-5>0 \\ \log_2(3x-5) > \log_2(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-5>0 \\ 3x-5>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x > 2 \end{cases}$$



$x > 2$

Es $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < 0$ $\qquad 0 < a < 1$

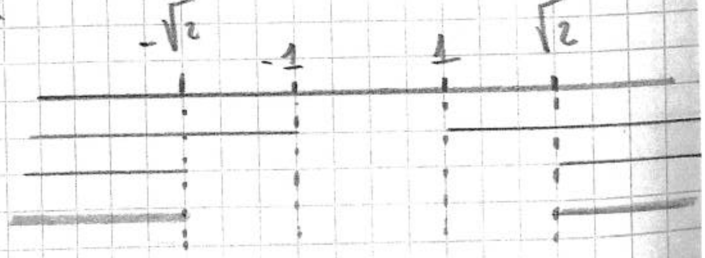
$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < \log_{\frac{1}{2}}(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1 > 1 \end{cases}$$

HO CAMBIATO PERCHÈ $0<a<1$

$$\begin{cases} x<-1 \lor x>1 \\ x<-\sqrt{2} \lor x>\sqrt{2} \end{cases}$$



$x < -\sqrt{2} \lor x > \sqrt{2}$

$\log_e(f(x)) \gtrless b \leftarrow b \in \mathbb{R}$

metodo risolutivo es>

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \log_e(f(x)) > b \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \log_e(f(x)) > b \cdot 1 \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \log_e(f(x)) > b \cdot \log_e(a) \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \log_e(f(x)) > \log_e(a^b) \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^b \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases}$

$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

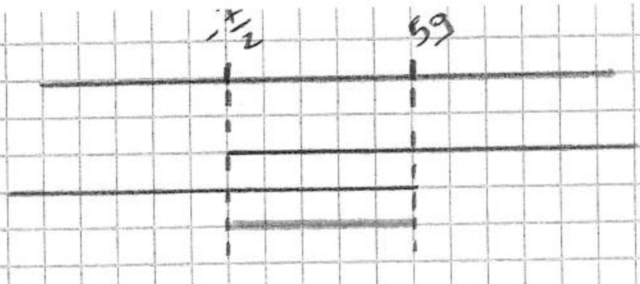
Es $\log_5(2x+7) < 3$ $\qquad$ $a > 1$

$\begin{cases} 2x+7 > 0 \\ \log_5(2x+7) < 3\log_5(5) \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+7 > 0 \\ \log_5(2x+7) < \log_5(5^3) \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+7 > 0 \\ 2x+7 < 5^3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x > -\frac{7}{2} \\ x < 59 \end{cases}$$



$$-\frac{7}{2} < x < 59$$

Es $\log_{\frac{2}{5}}(9x-7) < 2$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} 9x-7 > 0 \\ \log_{\frac{2}{5}}(9x-7) < 2 \end{cases}$$

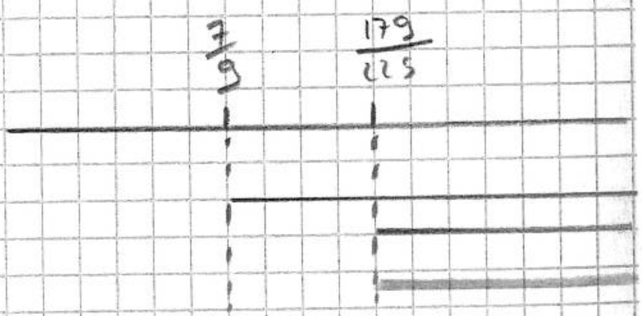
$$\begin{cases} 9x-7 > 0 \\ \log_{\frac{2}{5}}(9x-7) < 2\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x-7 > 0 \\ \log_{\frac{2}{5}}(9x-7) < \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \end{cases}$$

CAMBIO!
$0 < a < 1$

$$\begin{cases} 9x-7 > 0 \\ 9x-7 > \left(\frac{2}{5}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{7}{9} \\ x > \frac{179}{225} \end{cases}$$



$$x > \frac{179}{225}$$

$$\mathrm{Log}_a(f(x)) \gtrless \mathrm{Log}_b(g(x))$$

metodo risolutivo es >

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \mathrm{Log}_e(f(x)) > \mathrm{Log}\, b(g(x)) \end{cases}$$

CAMBIAMENTO DI BASE

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \mathrm{Log}_e(f(x)) > \dfrac{\mathrm{Log}_e(g(x))}{\mathrm{Log}_e(b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \mathrm{Log}_e(f(x)) > \mathrm{Log}_e(g(x))^{\frac{1}{\mathrm{Log}_e(b)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > (g(x))^{\frac{1}{\mathrm{Log}_e(b)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^{\frac{1}{\mathrm{Log}_e(b)}} \end{cases}$$

$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

Es $\mathrm{Log}_2(x-3) > \mathrm{Log}_4(5x-1)$ $\qquad a > 1$

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ 5x-1 > 0 \\ \mathrm{Log}_2(x-3) > \mathrm{Log}_4(5x-1) \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{Log}_2(5x-1)}{\mathrm{Log}_2(4)}$$

$$\frac{\mathrm{Log}_2(5x-1)}{\mathrm{Log}_2(2^2)}$$

$$\frac{\mathrm{Log}_2(5x-1)}{2}$$

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 5x-1>0 \\ \log_2(x-3) > \dfrac{\log_2(5x-1)}{2} \end{cases}$$

$\cdot 2$ entrambi i membi

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 5x-1>0 \\ 2\log_2(x-3) > \log_2(5x-1) \end{cases}$$

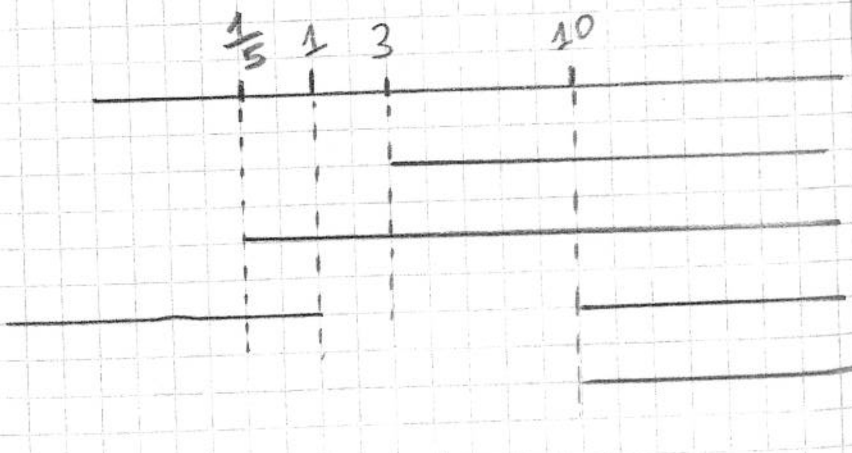
$$\begin{cases} x-3>0 \\ 5x-1>0 \\ \log_2(x-3)^2 > \log_2(5x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 5x-1>0 \\ (x-3)^2 > (5x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3 \\ x>\frac{1}{5} \\ x^2-6x+9>5x-1 \end{cases}$$

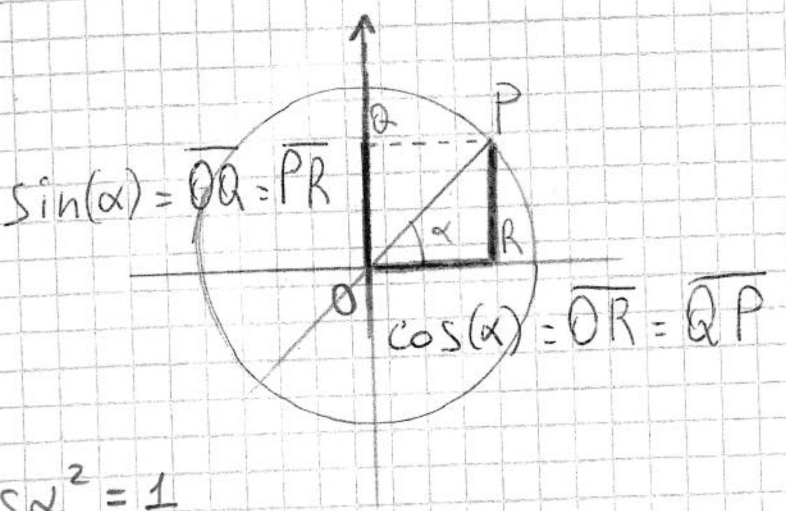
$$\begin{cases} x>3 \\ x>\frac{1}{5} \\ x^2-11x+10>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3 \\ x>\frac{1}{5} \\ x<1 \lor x>10 \end{cases}$$



$x>10$

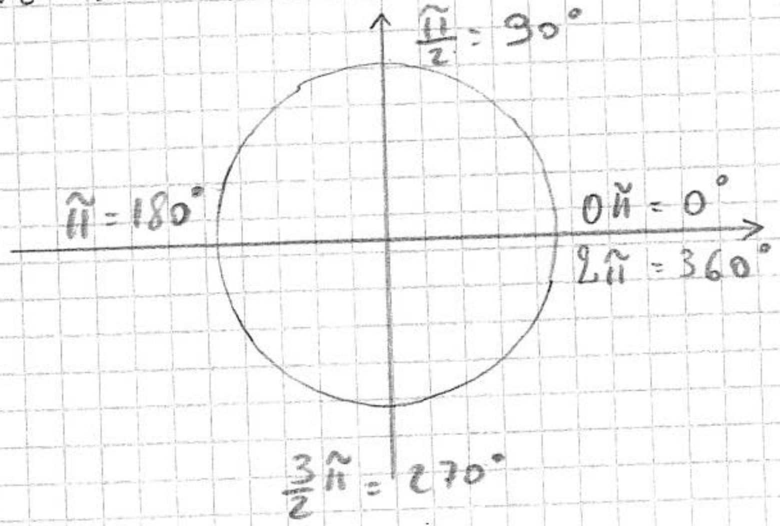
SENO E COSENO



$\sin^2\alpha + \cos\alpha^2 = 1$

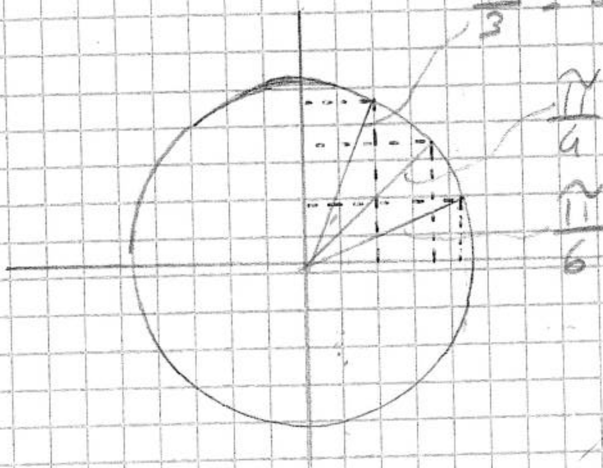
IL SENO DELL'ANGOLO È LA MISURA DELLA PROIEZIONE SULL'ASSE Y DEL PUNTO INTERCETTATO DALL'ANGOLO SULLA CIRCONFERENZA.

IL COSENO DELL'ANGOLO È LA MISURA DELLA PROIEZIONE DI QUELLO STESSO PUNTO SULL'ASSE X.



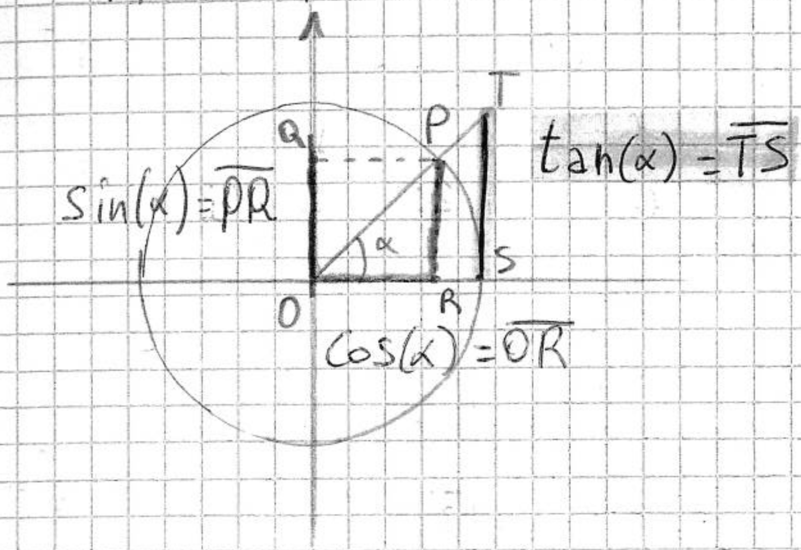
Angolo α	Seno	Coseno
0	$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
π	$\sin(\pi) = 0$	$\cos(\pi) = -1$
$\frac{3}{2}\pi$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

altri angoli importanti



Angolo α	Seno	Coseno
$\frac{\pi}{6}$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

TANGENTE



LA TANGENTE DI UN ANGOLO α E' L'ORDINATA DEL PUNTO DATO DALL'INTERSEZIONE DELLA SEMIRETTA RAPPRESENTANTE IL LATO LIBERO DELL'ANGOLO, E LA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA NEL PUNTO (1,0).
IN SOSTANZA LA TANGENTE E' L'ORDINATA DEL PUNTO T

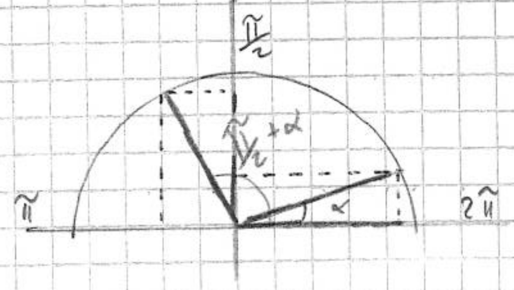
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot an(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

α in gradi	x α in radianti	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\mathrm{cotag}\,\alpha$
$0°$	0	0	1	0	$+\infty$
$30°$	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$60°$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$90°$	$\pi/2$	1	0	$+\infty$	0
$180°$	π	0	-1	0	$+\infty$
$270°$	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$-\infty$	0
$360°$	2π	0	1	0	$+\infty$

Archi Associati

$$\frac{\pi}{2}+\alpha$$

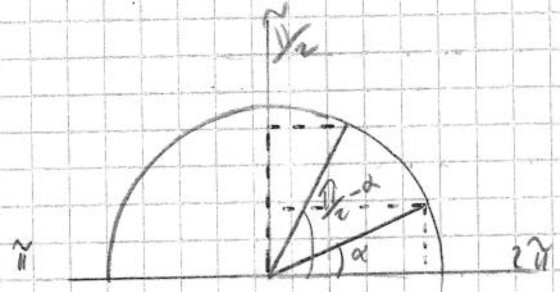


$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\pi/2+\alpha\right)}{\cos\left(\pi/2+\alpha\right)}$$

$$\frac{\pi}{2}-\alpha$$

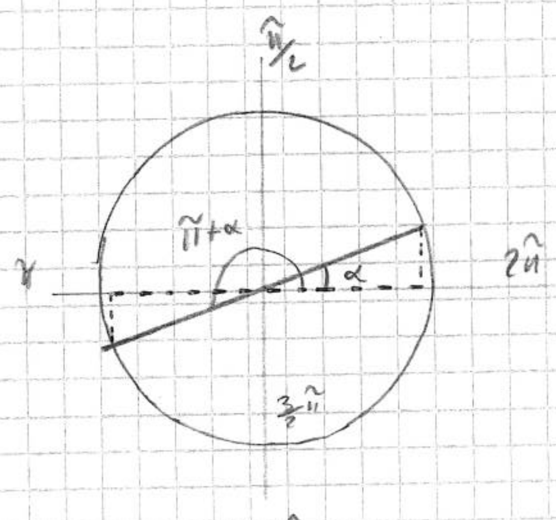


$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\pi/2-\alpha\right)}{\cos\left(\pi/2-\alpha\right)}$$

$$\pi+\alpha$$

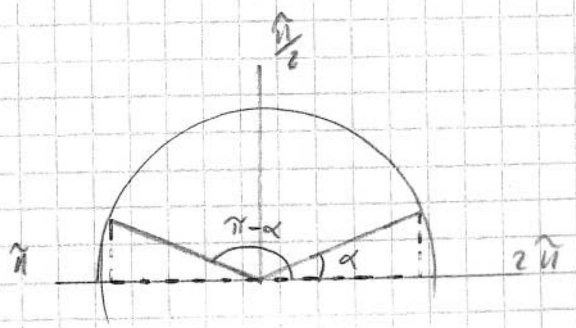


$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)$$

$$\tan(\pi+\alpha)=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$$

$$\pi-\alpha$$



$$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$

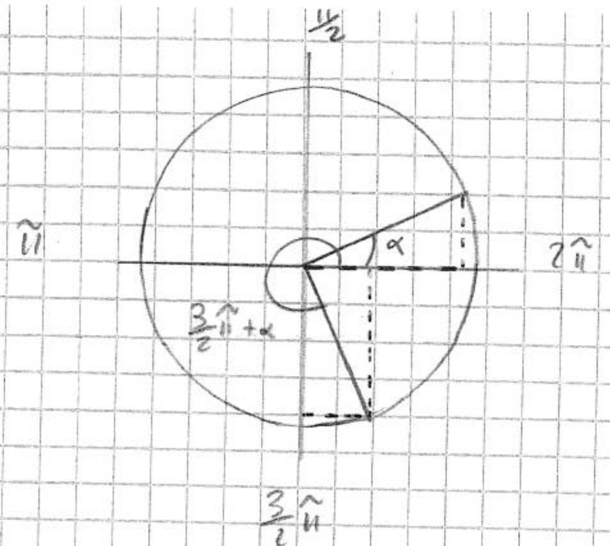
$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}$$

$\frac{3}{2}\pi + \alpha$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos(\alpha)$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin(\alpha)$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}$

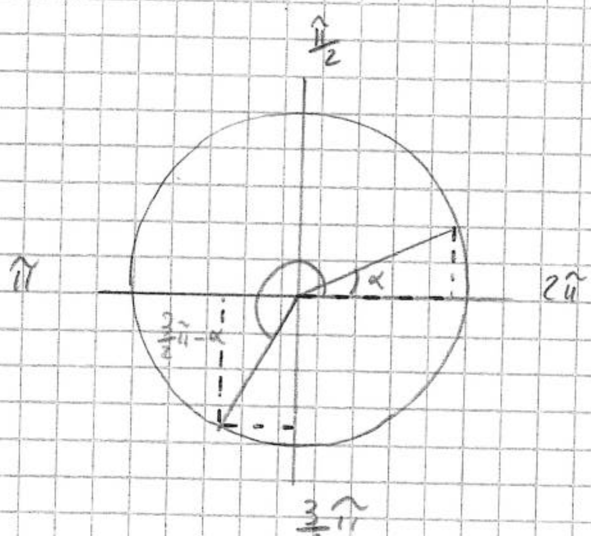


$\frac{3}{2}\pi - \alpha$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin(\alpha)$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}$

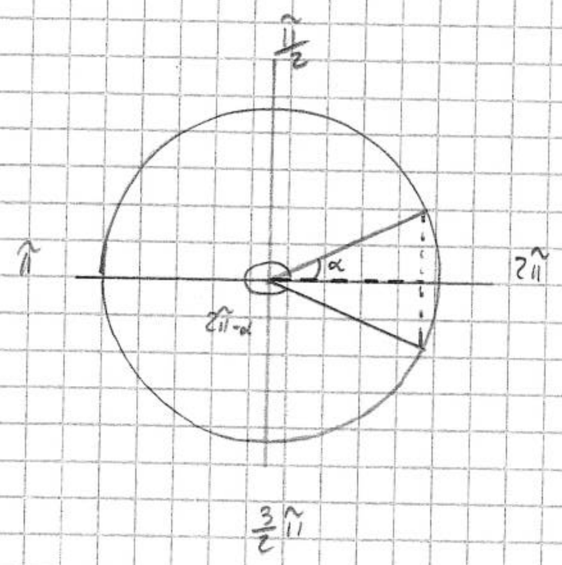


$2\pi - \alpha = -\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$



FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Es. calcolare

$$\sin(15°) = \sin(45° - 30°) =$$

$$= \sin(45°) \cdot \cos(30°) - \sin(30°) \cdot \cos(45°) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

SOLUZIONE ALTERNATIVA

$$\sin(15°) = \sin(60° - 45°) =$$

$$= \sin(60°) \cdot \cos(45°) - \sin(45°) \cdot \cos(60°) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$2\cos^2\alpha - 1 \qquad 1 - 2\sin^2\alpha$$

FORMULE DI BISEZIONE

SI RICAVANO DALLA FORMULA DI DUPLICAZIONE DEL COSENO SOSTITUENDO $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

FORMULE DI WERNER (PRODOTTO → SOMMA)

SI RICAVANO SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO LE FORMULE DI ADDIZIONE

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

FORMULE DI POSTAFERESI (SOMMA → PRODOTTO)

SI RICAVANO DA QUELLE DI WERNER CON QUALCHE SOSTITUZIONE.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

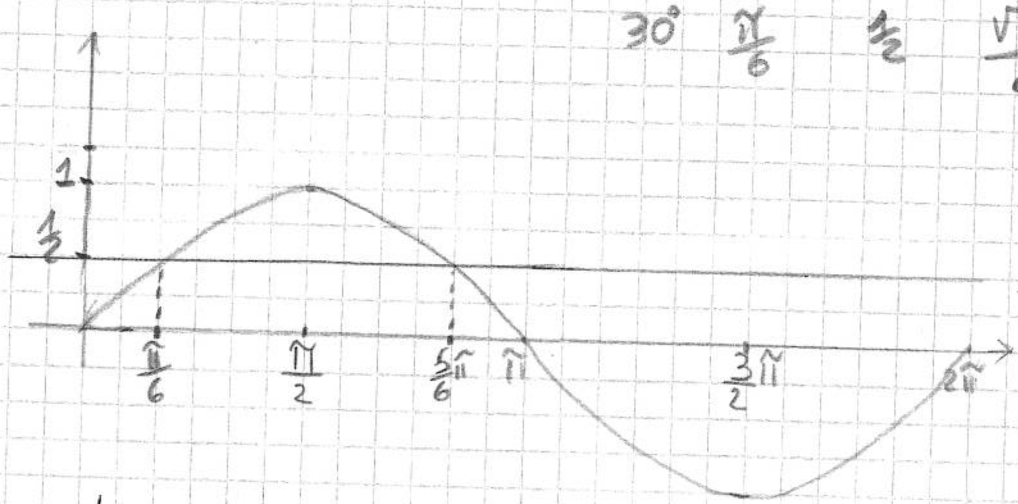
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

65. $\sin x = \frac{1}{2}$

RICORDA ANGOLI NOTEVOLI

°	x	sin	cos
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

RICORDA ARCHI ASS.

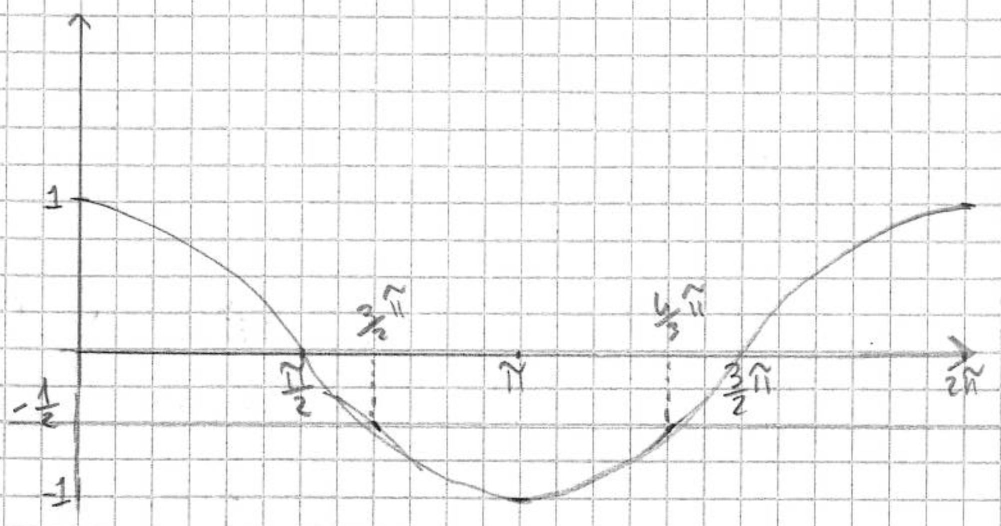
$\pi - \alpha$

$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Es.

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$



RICORDA ANG. NOT.

	x	sin	cos
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

ma noi vogliamo $-\frac{1}{2}$ quindi

RICORDA ARC. ASS. (QUANDO HO IL NEGATIVO DEL COS)

$\pi + \alpha$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi + \pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

trovato $x = \frac{4}{3}\pi$

$$\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

RICORDA ARC. ASS (QUANDO HO LO STESSO COS)

$2\pi - \alpha$ $\qquad 2\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{6\pi - 4\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2K\pi \quad \cup \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2K\pi$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE RICONDUCIBILI A ELEMENTARI

Es.

$$\sin \underbrace{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

α	$\sin$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$

$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin \frac{5}{6}\pi = \sin \frac{\pi}{6}$

$$\alpha = \frac{5}{6}\pi + 2K\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$$

$$\alpha = \frac{5}{6}\pi + 2K\pi \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi + 2K\pi \Rightarrow x = \frac{13}{12}\pi + 2K\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2K\pi \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2K\pi \Rightarrow x = \frac{5}{12}\pi + 2K\pi$$

Es.

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2} \qquad x - \frac{\pi}{4} = \alpha$$

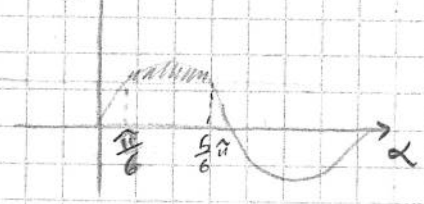
$$\sin(\alpha) \geq \frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{6}$

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - 1\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$\alpha \geq \frac{\pi}{6}$

$\alpha \leq \frac{5}{6}\pi$



$$\alpha \geq \frac{\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{6} \Rightarrow x \geq \frac{3\pi + 2\pi}{12} \Rightarrow x \geq \frac{5}{12}\pi$$

$$\alpha \leq \frac{5}{6}\pi \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{6}\pi \Rightarrow x \leq \frac{3\pi + 10\pi}{12} \Rightarrow x \leq \frac{13}{12}\pi$$

$$\frac{5}{12}\pi + 2K\pi \leq x \leq \frac{13}{12}\pi + 2K\pi$$

Es.

$$\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 3x = \alpha$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

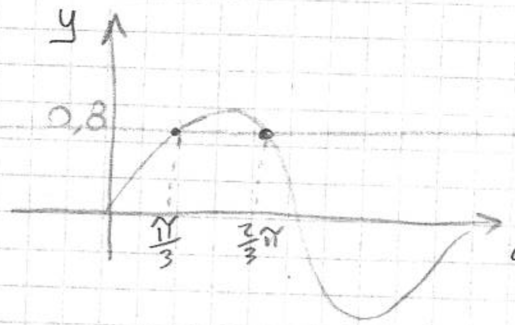
	x	$\sin$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\pi - \alpha$

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi$$



$$\alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow 3x = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow x = \frac{2}{9}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}K\pi \qquad x = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}K\pi$$

FATTORI MOLTIPLICATIVI DAVANTI ALLA X CAMBIANO LA PERIODICITÀ DELLE SOLUZIONI

Es.

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \underset{\text{RACCOLGO}}{\Longrightarrow} \sin x\,(2\sin x - 1) = 0$$

APPLICO LA LEGGE DELL'ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$$\sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad . \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x = k\pi \;\cup\; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\cup\; x = \frac{5}{6} + 2k\pi$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE DI 2° GRADO

Es.

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \underset{\text{PONGO } \sin x = t}{\Longrightarrow} 2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t = -1 \longrightarrow \sin x = -1 \longrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$t = -\frac{1}{2} \longrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \longrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

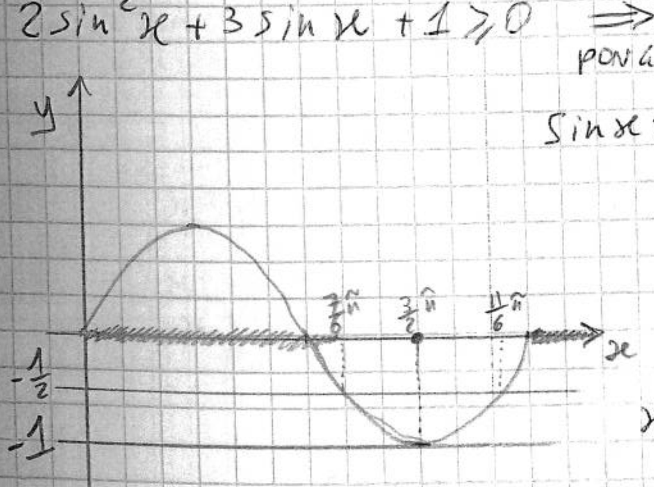
$$x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

Es.

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 \geq 0 \underset{\text{PONGO } \sin x = t}{\Longrightarrow} 2t^2 + 3t + 1 \geq 0$$

esterni

$$t \leq -1 \qquad t \geq -\frac{1}{2}$$



$$x \in \mathbb{R} \;/\; \begin{cases} 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \\ x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ \frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Es. (EQUAZIONI OMOGENEE DI 2° GRADO IN SIN E COS)

$$\sin^2 x - (1+\sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

DIVIDO A DX E SX PER $\cos^2 x$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - (1+\sqrt{3}) \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + \sqrt{3} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$tg^2 x - (1+\sqrt{3}) \, tg x + \sqrt{3} = 0$$

pongo $tg x = t$

$$t^2 - (1+\sqrt{3}) t + \sqrt{3} = 0 \quad \begin{cases} t = \sqrt{3} \\ t = 1 \end{cases}$$

$$t = \sqrt{3} \Rightarrow tg x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + K\pi$$

$$t = 1 \Rightarrow tg x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + K\pi$$

EQUAZIONI RICONDUCIBILI A OMOGENEE

SI TRATTA DI EQUAZIONIONI NON OMOGENEE CHE POSSONO ESSERE TRASFORMATE IN OMOGENEE GRAZIE A UN ARTIFICIO SI MOLTIPLICA IL TERMINE NOTO PER L'UNITÀ TRIGONOMETRICA $(1 = \cos^2 x + sen^2 x)$.

$$\cos^2 x - sen^2 x = 2 \Rightarrow \cos^2 x - sen^2 x = 2\cos^2 x + 2 sen^2 x$$

PROCEDO COME PRIMA DIVIDENDO TUTTO PER $\cos^2 x$

$$\cancel{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} - \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} = \cancel{\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}} + \frac{2 sen^2 x}{\cos^2 x}$$

$$- tg^2 x = 2 + 2 tg^2 x$$

$$-3 tg^2 x = 2 \Rightarrow tg^2 x = -\frac{2}{3}$$

PONGO $tg x = t$ ecc...

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE LINEARI

Es.

$\sin x + \cos x = 1$

con le formule parametriche pongo $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x + \cos x = 1$

SOSTITUISCO

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

disequaz. fratta il denominatore è SICURAMENTE $\neq 0$ perché $1 \neq 0$ e $t^2 \neq 0$ sempre

$$\frac{2t+1-t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{1+t^2}$$

$$2t+1-t^2 = 1+t^2$$

$$2t - 2t^2 = 0 \underset{\text{RACCOLGO}}{\Longrightarrow} 2t(1-t) = 0$$

ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$2t = 0 \rightarrow t = \frac{0}{2} \rightarrow t = 0$

$(1-t) = 0 \rightarrow -t = -1 \rightarrow t = 1$

$$t = 0 \rightarrow tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = 0 + k\pi \rightarrow x = 2k\pi$$

$$t = 1 \rightarrow tg\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

dis

$f(\operatorname{sen} x) < h$ esterni

$f(\operatorname{sen} x) = h$ esclusivi punti

$f(\operatorname{sen} x) > h$ interni

Es. Metodo dell'angolo aggiunto

$\sin x + \cos x = 1$ $\quad * \frac{\sqrt{2}}{2}$ LO CAPISCO AD OCCHIO

$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

FORMULA DI ADDIZIONE DEL SENO

$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \longrightarrow x = 2k\pi$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Es. METODO ALTERNATIVO FARE SISTEMA

$\sin x + \cos x = 1$

$\begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 1 - \cos x \\ (1-\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 1 - \cos x \\ \cancel{1} + \cos^2 x - 2\cos x + \cos^2 x = \cancel{1} \end{cases}$

SOSTITUISCO

$\begin{cases} \sin x = 1 - \cos x \\ 2\cos x(\cos x - 1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 2k\pi$

DISEQUAZIONI FRATTE

$$\frac{x^2-10x+24}{2x^2-7x-15}>0$$

studio il segno del NUMERATORE e DENOMINATORE $N(x)>0$

$D(x)>0$

NUMERATORE

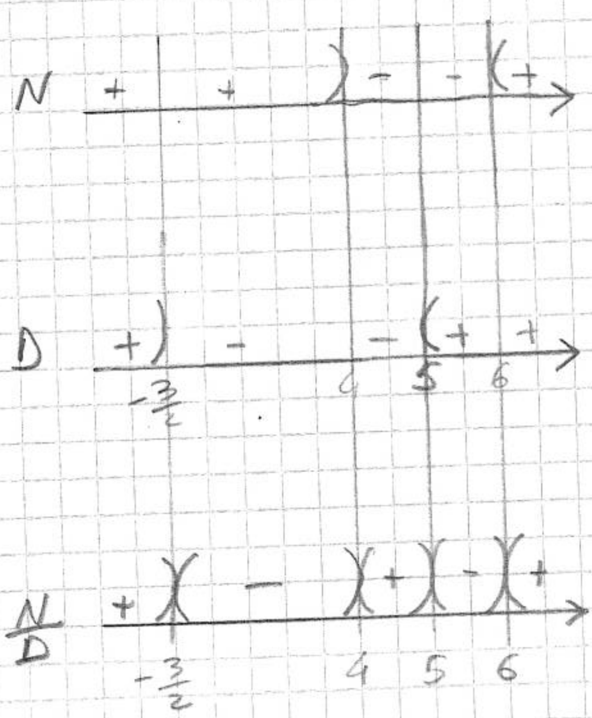
$x^2-10x+24>0 \Rightarrow x>6$

$x<4$

DENOMINATORE

$2x^2-7x-15>0 \Rightarrow x<-\frac{3}{2}$

$x>5$



) oppure)(= estremi non compresi

$$x<-\frac{3}{2} \vee 4<x<5 \vee x>6$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

IN GENERALE $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Es. $|x - 5| = 3x - 1$

STUDIAMO IL SEGNO DELL'ESPRESSIONE ALL'INTERNO DEL VALORE ASSOLUTO

$x - 5 \geq 0$ per $x \geq 5$

quindi $|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$

pertanto abbiamo risolvere

$x - 5 = 3x - 1$ quando $x \geq 5$

$-x + 5 = 3x - 1$ quando $x < 5$

1° SISTEMA

$\begin{cases} x \geq 5 \\ x - 5 = 3x - 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 5 \\ -2x = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 5 \\ x = -2 \end{cases}$

NON HA SOLUZIONE

2° SISTEMA

$\begin{cases} x < 5 \\ -x + 5 = 3x - 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 5 \\ -4x = -6 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 5 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

ha soluzione $\frac{3}{2}$

SI FA L'UNIONE DELLE SOLUZIONI DEI 2 SISTEMI E LA SOL È

$x = \frac{3}{2}$

Es. $|10x^2+7x+1| > 6x+4$

$10x^2+7x+1 \geq 0$ per $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq -\frac{1}{5}$

quindi

$$|10x^2+7x+1| = \begin{cases} 10x^2+7x+1 & \text{se } x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq -\frac{1}{5} \\ -10x^2-7x-1 & \text{se } -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{5} \end{cases}$$

1° SISTEMA

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq -\frac{1}{5} \\ 10x^2+7x+1 > 6x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq -\frac{1}{5} \\ 10x^2+x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq -\frac{1}{5} \\ x < -\frac{3}{5} \vee x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

2° SISTEMA

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{5} \\ -10x^2-7x-1 > 6x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{5} \\ 10x^2+13x+5 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{5} \\ \nexists\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x < -\frac{3}{5} \vee x > \frac{1}{2}$$

casi particolari

$|A(x)| < K$ con $K > 0$

$-K < A(x) < K$

$|A(x)| > K$ con $K > 0$

$A(x) < -K$

$A(x) > K$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$

la disequazione $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ e' equivalente al sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^2 \end{cases}$$

Es.

$$\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 15 < x^2 + 1 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \ \vee \ x \geq 3 \\ x > 1 \\ 4x < 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq 3 \\ x > 1 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$3 \leq x < 4$$

disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$

le soluzioni della disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ e' l'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Es.

$$\sqrt{x-1} > x-3$$

1° SISTEMA

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 > (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-7x+10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 2 < x < 5 \end{cases}$$

$$3 \leq x < 5$$

2° SISTEMA

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$1 \leq x < 3$$

$$1 \leq x < 5$$

$$\int_{-b}^{a} (a-x)\,dx + \int_{a}^{b} (x-a)\,dx =$$

$$= \left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_{-b}^{a} + \left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_{a}^{b} =$$

$$= a^2 - \cancel{\frac{a^2}{2}} + \cancel{ab} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \cancel{ab} - \cancel{\frac{a^2}{2}} + \cancel{a^2} = a^2 + b^2$$

Es

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\,dx =$$

$y = e^x$

$dy = e^x\,dx$

$$= \int \frac{dy}{y^2 - 3y + 2} \; * $$

$y^2 - 3y + 2 = (y-2)\cdot(y-1)$

$$\frac{1}{y^2 - 3y + 2} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y - A - 2B}{(y-2)\cdot(y-1)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$* = \int \frac{1}{y-2}\,dy - \int \frac{1}{y-1}\,dy = \ln|y-2| - \ln|y-1| + c =$$

$$= \ln|e^x - 2| - \ln|e^x - 1| + c$$

LIMITI

algebra dei Limiti

$$\lim_{x \to \text{qualcosa}} f(x) \pm g(x) \quad \text{è equivalente} \quad \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

$$\lim_{x \to \text{qualcosa}} f(x) \cdot g(x) \quad \text{è equivalente} \quad \lim_{x \to \text{qualco.}} f(x) \cdot \lim_{x \to \text{qualcosa}} g(x)$$

$$\lim_{x \to \text{qualcosa}} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{è equivalente} \quad \frac{\lim_{x \to \text{qua}} f(x)}{\lim_{x \to \text{qua.}} g(x)}$$

$$\lim_{x \to \text{qualcosa}} \text{costante} \cdot f(x) \quad \text{è equivalente} \quad \text{cost} \cdot \lim_{x \to \text{qualcosa}} f(x)$$

$$\lim_{x \to \text{qualcosa}} \left[f(x)\right]^{g(x)} \quad \text{è equivalente} \quad \left[\lim_{x \to \text{qualcosa}} f(x)\right]^{\lim_{x \to \text{qua}} g(x)}$$

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Es.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + 4 tg x}{x\cos x + 2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

analisi preliminare sostituendo alla x lo 0

SEMPLIFICO — LIM NOT — LIM NOT

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[2\cdot\frac{\sin x}{x} + 4\cdot\frac{tg x}{x}\right]}{x\left[\cos x + 2\cdot\frac{\sin x}{x}\right]} =$$

USO UN ARTIFICIO RACCOGLIENDO LA x. ORA HO 3 LIMITI NOTEVOLI E IL COS È NOTO

SEMPLIFICO — VALE 1 — LIM NOT

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 1}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$$

SCALA DI CONFRONTO

$$\log_a << x^b << c^x << x^x \qquad \forall a>1, b>0, c>$$

Es.

VALORE NOTO

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{\cos x - \cos^2 x}{2x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{\cos x}{2} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

LIM NOT

HO RACCOLTO IL COS X AL NUM E FATTORIZZO TUTTO

LIMITI DI FUNZIONI CONTINUE

BASTA SOSTITUIRE CIÒ CHE TENDE LA X NELLA X NEL LIMITE.

Es

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} + \cos x}{x^2 + 1} = \frac{e^{\sin 0} + \cos 0}{0^2 + 1} = \frac{e^0 + 1}{1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Es

$$\lim_{x \to 2} x^2 - 2x + 1 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$$

SE SOSTITUENDO ARRIVO A UNA FORMA INDETERMINATA O ANCHE DETTO FORME DI INDECISIONE. TIPO:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad 1^\infty \quad \infty - \infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$

SIGNIFICA CHE LA FUNZIONE NON È CONTINUA QUINDI CALCOLERÒ IL LIMITE DESTRO E IL LIMITE SINIST

Es.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \text{NON ESISTE PERCHÉ I RISULTATI SONO DIVERSI}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

LIMITI DI FUNZIONI RAZIONALI $x \to x_0$

CASO 1 QUANDO PROVO A SOSTITUIRE x_0 NON SI ANNULLANO NÈ IL NUMERATORE NÈ IL DENOMINATORE (FUNZ. CONTINUA IN x_0)

Es. $$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

CASO 2 QUANDO PROVO A SOSTITUIRE x_0 SI ANNULLA IL NUMERATORE MA NON IL DENOMINATORE CIOE' DA' ZERO (FUNZIONE CONTINUA IN x_0)

Es. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{1^2-1}{1+3} = \frac{0}{3} = 0$$

CASO 1 E CASO 2 SE NON SI ANNULLA IL DENOMINATORE BASTA SOSTITUIRE x_0 CON x

CASO 3 QUANDO PROVO A SOSTITUIRE x_0 SI ANNULLA IL DENOMINATORE MA NON IL NUMERATORE

Es. $$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{2-x} = \left[\frac{3}{0}\right]$$ CALCOLO LIM DESTRO E LIM SINISTRO

dest $$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \left[\frac{+3}{0^-}\right] = -\infty$$

sinist $$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \left[\frac{+3}{0^+}\right] = +\infty$$

QUESTO LIMITE NON ESISTE PERCHE LIM. DESTRO E LIM SINISTRO SONO DIVERSI

ES.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{(2-x)^2} = +\infty$$ PERCHE' LIM DESTR E LIM SINISTRA TUTTI E 2 $+\infty$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

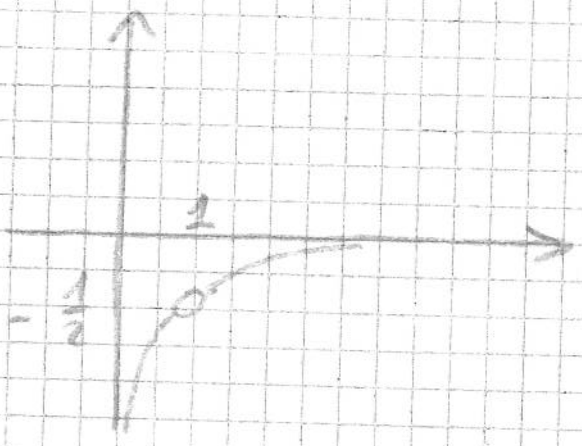
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

CASO 4 QUANDO PROVO A SOSTITUIRE x_0 SI ANNULLANO SIA IL NUMERATORE CHE IL DENOMIN.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

SCOMPONGO SEMPLIFICO

IN $x = 1$ LA FUNZIONE NON E' CONTINUA



LIMITI DI FUNZIONI POLINOMIALI PER $x \to \infty$

Es.

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 5x^2 + 1 = [\infty - \infty] = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

RACCOLGO TERMINE + GRANDE

LIMITI DI FUNZIONI RAZIONALI $x \to \infty$

Es

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x - 3}{2x^2 + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left(1 - \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)}{2\cancel{x^2}\left(1 + \frac{5}{2x^2}\right)} = +\infty$$

N.b $\frac{N x^3}{D x^2} = +\infty$

Es

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x}{5x^6 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}{5x^{\cancel{6}}\left(1 - \frac{1}{5x^6}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$-\infty$

Nb. $\frac{N x^3}{D x^6} = 0$

PERCHÉ LA POTENZA È DISPARI, PRESERVA IL SEGNO

Es. N.b $\frac{N x^2}{D x^2} = n$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

STRATEGIA

1) RACCOLGO IL TERMINE DI GRADO MAX. IL N. E IL D.

2) SEMPLIFICARE

3) GUARDARE A COSA TENDONO I TERMINI SOPRA

LIMITI CON ESPONENZIALI E LOGARITMI

SCALA DI CONFRONTO

$$\log_a x \ll x^b \ll c^x \ll x^x \quad \forall a>1,\ b>0,\ c>1$$

Es.

$$\lim_{x\to+\infty} x^6 - 6^x = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{6^x}\left[\overset{0}{\frac{x^6}{6^x}} - 1\right] = +\infty \cdot -1 = -\infty$$

RACCOLGO TERM + GRANDE

Es.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x^2}{3x - \ln x} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{e^x}\left(1 - \overset{0}{\frac{x^2}{e^x}}\right)}{3x\left(1 - \underset{0}{\frac{\ln x}{3x}}\right)} = \frac{+\infty \cdot 1}{3} = +\infty$$

Es.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\log_2 x - 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty - \infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}}{2x\left(\frac{\log_2 x}{2x} - 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{|x|}\sqrt{\left(1 + \overset{0}{\frac{3}{x^2}}\right)}}{2\cancel{x}\left(\underset{0}{\frac{\log_2 x}{2x}} - 1\right)} = \frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{2}$$

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE

$f(x)$ ELEVATA A $g(x) \longrightarrow$ $\boxed{[f(x)]^{\cdots} = e^{\cdots}}$

Es

$$\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{3}{e^x}\right) = 1$$

① A COSA TENDE $\frac{3}{e^x}$ quando $x \to$ A $+\infty$?
TENDE A 0!

② A COSA TENDE IL COSENO QUANDO L'ARGOMENTO È 0?
TENDE A 1

Es.

$$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{x^2+1}{2x^2-x}}$$

CHIAMO $y = \frac{x^2+1}{2x^2-x}$ NE CALCOLO IL LIMITE

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{2x^2-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{2x}\right)} = \frac{1}{2}$$

DUNQUE $y \to \frac{1}{2}$ QUANDO $x \to \infty$

RISCRIVO IL Lim

$$\lim_{y \to \frac{1}{2}} e^y = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Es.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(7^x + \ln x)}{5x^2+1}$$

SONO CERTO CHE

$$-1 \leq \sin(7^x + \ln x) \leq 1$$

QUINDI

$$\frac{-1}{5x^2+1} \leq \frac{\sin(7^2+\ln x)}{5x^2+1} \leq \frac{1}{5x^2+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{5x^2+1} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{5x^2+1} = 0$$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, VISTO CHE I DUE LIMITI ESTERNI SONO UGUALI, VALE ANCHE PER IL NOSTRO LIMITE

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(7^x + \ln x)}{5x^2+1} = 0$$

ARTIFIZIO PER PORTAR AL N. UN PRODOTTO NOTEVOLE

Es.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{3x - 12} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{3(x-4)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x-4}}{3\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{12}$$

ALTRI ESEMPI DI LIMITI

ARTIFICIO

Es

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(3x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{tg(3x)}{x} \cdot \frac{3}{3} = 3 \lim \frac{tg(3x)}{3x} =$$

CHIAMO $3x = y$ E SO CHE SE $x \to 0$ ANCHE $y \to 0$

$$= 3 \lim_{y \to 0} \frac{tg(y)}{y} = 3 \cdot 1 = 3$$

1 LIM NOTEVOLE

Es

$$\lim_{x \to 0} \frac{Ln(1+\sqrt{2}x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{Ln(1+\sqrt{2}x)}{x} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2} \lim_{x \to 0} \frac{Ln(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x} = \sqrt{2} \lim_{y \to 0} \frac{Ln(1+y)}{y} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

Es.

$$\lim_{x \to 0} \frac{Ln(1+\sin x)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

CHIAMO $y = \sin x$
SE $x \to 0$ ANCHE $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{Ln(1+y)}{y} = 1$$

LIMITE NOTEVOLE

Es.

ARTIFICIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}}_{\substack{L.N \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\substack{L.N. \\ 1}} = 1$$

Es

ARTIFICIO

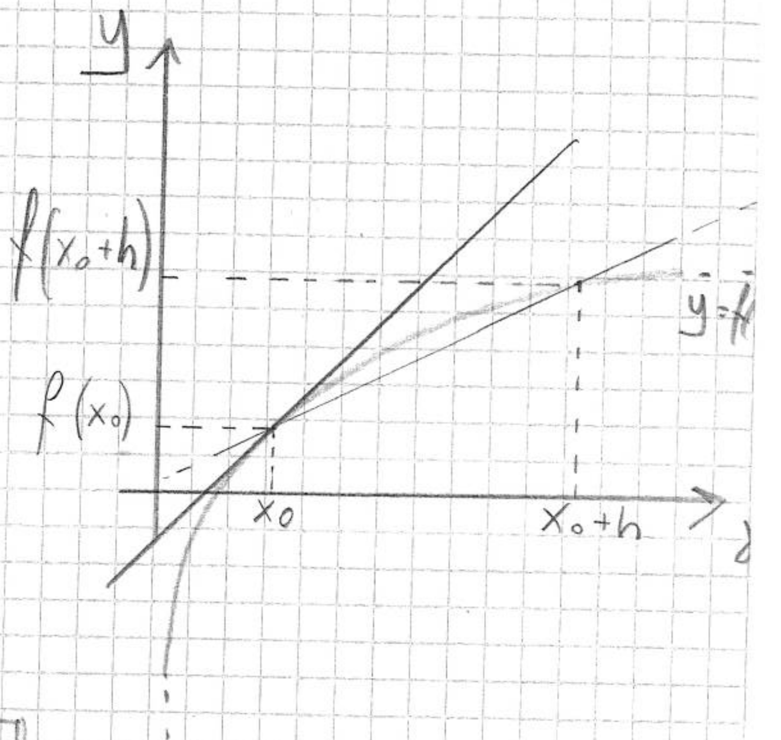
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos\sqrt{x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^x -1+1 - \cos\sqrt{x}}{x} =$$

L. NOT. 1

$\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\right] = \frac{3}{2}$$

DERIVATA



coefficente angolare della retta tangente

rapporto incrementale

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

SE QUESTO LIMITE ESISTE ED È FINITO LA FUNZIONE $y = f(x)$ SI DICE DERIVABILE NEL PUNTO DI ASCISSA x_0 E IL VALORE CHE IL LIMITE ASSUME PRENDE IL NOME DI DERIVATA DI f IN x_0

$$f'(x_0)$$

SE $f(x)$ È DERIVABILE IN OGNI $x_0 \in A$ LA FUNZIONE SI DICE DERIVABILE IN A. SI PUÒ ALLORA INTRODURRE UNA FUNZIONE CHE AD OGNI $x_0 \in A$ FA CORRISPONDERE $f'(x_0)$

FUNZIONE DERIVATA PRIMA $x_0 \to f'(x_0)$

$$y = f'(x_0)$$

DERIVATA DI FUNZIONI ELEMENTALI

FUNZIONI COSTANTI

$f(x) = K$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(x+h)}^{K} - \overbrace{f(x)}^{K}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{K-K}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$f'(x) = 0$

FUN. POTENZA x^2 diventa $2x$ x^n diventa nx^{n-1}

x^3 diventa $3x^2$

$f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

$f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

h vale 0

PER RADICI

$$f(x) = \sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2(x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

SENO $f'(x) = \cos x$

RICORDA

$f(x) = \sin x$ $\qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$

RACCOLGO $\sin x$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \,(\cos h - 1) + \sin h \cdot \cos x}{h} =$$ divido la frazione

VALE 0 $\qquad$ LN. 1

$$= \lim_{h\to 0} \left[\sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x$$

COSENO $f'(x) = -\sin x$

PER LA STESSA REGOLA APPLICATA AL COSENO PERÒ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ E POI SVOLGENDO I CALCOLI LA DERIVATA DELLA FUNZIONE COSENO È LA FUNZIONE -SENO

$$f'(x) = -\sin(x)$$

VALORE ASSOLUTO

$f(x) = |x| \qquad f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$

ESPONENZIALE

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$ $\quad \boxed{f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$ PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{1 \text{ Lim. NOT}} = e^x$$

LOGARITMO

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \boxed{f(x) = \log_a(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$$ PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\text{LIM NOT } 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

DERIVATA DELLA SOMMA

$f(x) = p(x) + q(x)$ ALLORA $f'(x) = p'(x) + q'(x)$

Es $f(x) = x + e^x \quad f'(x) = 1 + e^x$

Es $f(x) = x^{2013} + \sin x \quad f'(x) = 2013x^{2012} + \cos x$

DERIVATA DEL PRODOTTO

$f(x) = p(x) \cdot q(x) \qquad f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$

Es. $f(x) = x^2 \cdot \sin x \quad f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

Es. $f(x) = e^x \cdot \cos x \quad f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot (-\sin x)$

DERIVATA DEL RECIPROCO

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Es. $\left[\frac{1}{\cos x}\right]' = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Es $\left[\frac{1}{\ln x}\right]' = \frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$

DERIVATA DEL QUOZIENTE

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad f'(x) = \frac{p'(x) \cdot q(x) - p(x) \cdot q'(x)}{[q(x)]^2}$$

Es. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

REGOLA DELLA GONIOMETRIA VALE 1

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{[\cos x]^2} = \frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{[\cos x]^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \operatorname{cotg}(x) \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Es. $y = \sin(x^2)$ $\qquad f(x) = \sin x \quad g(x) = x^2$

$$y' = \underbrace{\cos(x^2)}_{f'(gx)} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}$$

Es $y = \ln(\sin x)$ $\qquad f(x) = \ln(x) \quad g(x) = \sin(x)$

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot g\, x$$

Es. $y = e^{x^{2013}}$ $\qquad f(x) = e^x \quad g(x) = x^{2013}$

$$y' = e^{x^{2013}} \cdot 2013x^{2012}$$

Es $y = \sin(x \cdot tg\, x)$ $\qquad f(x) = \sin x \quad g(x) = x \cdot tg\, x$

$$y' = \cos(x \cdot tg\, x) \cdot \left[1 \cdot tg\, x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right] =$$

$$= \cos(x \cdot tg\, x) \cdot \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{\cos^2 x}$$

$$\left[f(g(p(x)))\right]' = f'(g(p(x))) \cdot g'(p(x)) \cdot p'(x)$$

Es. $y = \sin(e^{x^2})$ $\qquad y' = \cos(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

DERIVATA DI $[f(x)]^{g(x)}$ $\quad e^{g(x)\cdot \ln(f(x))}$

Es. $y = x^x$ $\quad \cancel{[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}}$ NO

α = COSTANTE

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln x}$$ SI

$$[x^x]' = [e^{x\ln x}]' = e^{x\ln x}\cdot\left[\ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right] = e^{x\ln x}[\ln x + 1]$$

FUNZIONE COMPOSTA

$$= x^x[\ln x + 1] \Rightarrow y' = x^x[\ln x + 1]$$

POSSO SCRIVERE x^x PERCHE' $x^x = e^{x\ln x}$

PRODOTTO DI FUNZIONI

Es. $y = (\sin x)^{\cos x} = e^{\ln(\sin x)^{\cos x}} = e^{\cos x\cdot \ln(\sin x)}$ FUNZ. COMPOSTA

FUNZIONE COMPOSTA

$$y' = e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\cdot\left[-\sin x\ln(\sin x) + \cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right] =$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\cdot[-\sin x\ln(\sin x) + \cos x\cdot\mathrm{cotg}\,x]$$

Es $y = e^{\sqrt[3]{x}\cdot\sin x}$

$$y' = e^{\sqrt[3]{x}\cdot\sin x}\left[\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sin x + x^{\frac{1}{3}}\cdot\cos x\right] = e^{\sqrt[3]{x}\cdot\sin x}\cdot\frac{\sin x + 3x\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Es. $y = \sin\left(\frac{e^x}{3x^2}\right)$

$$y' = \cos\left(\frac{e^x}{3x^2}\right)\cdot\frac{e^x\cdot 3x^2 - e^x\cdot 6x}{9x^4} = \cos\left(\frac{e^x}{3x^2}\right)\cdot\frac{e^x(x-2)}{3x^3}$$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

QUANDO UNA FUNZIONE È DERIVABILE IN UN PUNTO?

diciamo che $y = f(x)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in un punto $x_0 \in Dom(f)$ se

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = c < +\infty$$

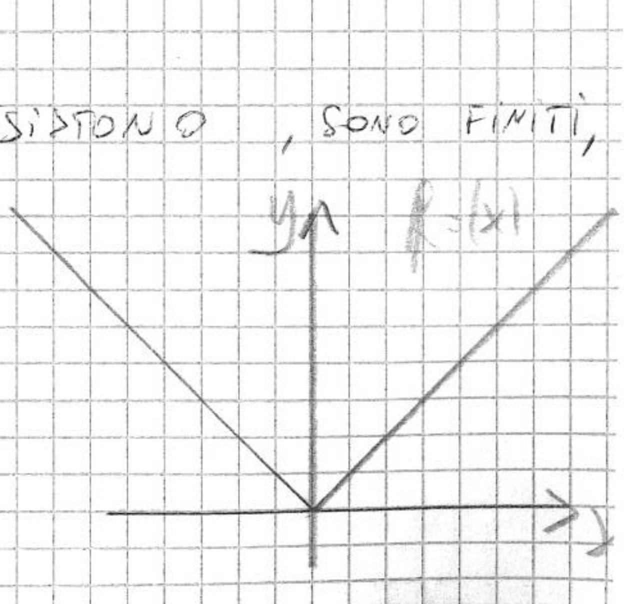
cioè quando:
- LA FUNZIONE È CONTINUA IN QUEL PUNTO
- ESISTONO I LIMITI DESTRO E SINISTRO DEL RAPPORTO INCREMENTALE
- I LIMITI SONO FINITI E SONO UGUALI.

Se non sussiste una di queste condizioni, ma la funzione è continua, siamo di fronte a un punto non derivab. come: PUNTO ANGOLOSO, CUSPIDE, FLESSO A TANGENTE VERTICALE

PUNTO ANGOLOSO

I LIMITI DESTRO E SINISTRO ESISTONO, SONO FINITI, MA SONO DIVERSI

ES VALORE ASSOLUTO



$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

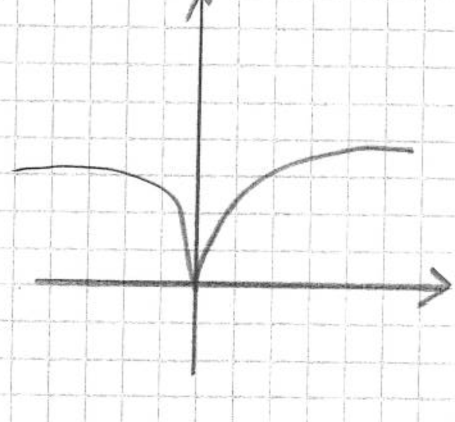
CUSPIDE

I LIMITI ESISTONO, SONO INFINITI E DI SEGNO OPPOSTO (TIPICI SONO LE f CON $\sqrt{\ }$ di indice pari)

Es

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = -\infty$$



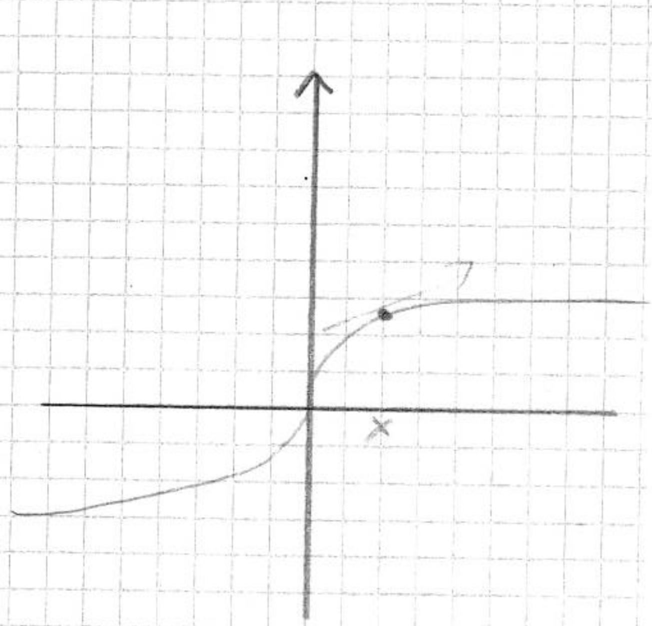
invece con $-\infty$ poi $+\infty$

FLESSO A TANGENTE VERTICALE

I LIMITI ESISTONO, SONO INFINITI E DELLO STESSO SEGNO

Es. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(TIPICI SONO LE f CON $\sqrt{\ }$ di indice dispari)



PUNTI MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE
(PUNTI ESTREMANTI)

massimo ASSOLUTO

SIA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, con dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$.
DICIAMO che x_0 e' un punto di massimo assoluto per f
e che $f(x_0)$ e' massimo per f, se

$$\forall x \in Dom(f) \text{ risulta che } f(x) \leq f(x_0)$$

minimo ASSOLUTO

SIA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, con dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$.
DICIAMO CHE x_0 e' un punto di minimo assoluto per f
e che $f(x_0)$ e' minimo assoluto per f, se

$$\forall x \in Dom(f) \text{ risulta che } f(x) \geq f(x_0)$$

massimo relativo

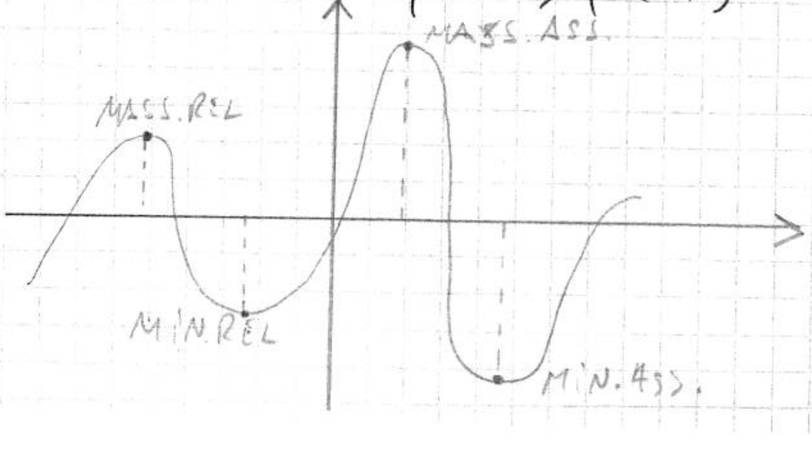
sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, con dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$. DICIAMO
che x_0 e' un punto di massimo relativo per f, se
esiste un intorno $B(x_0, \delta)$ (intorno di raggio δ
e centro x_0) tale che

$$\forall x \in B \text{ risulta che } f(x) \leq f(x_0)$$

minimo relativo

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, con dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$. DICIAMO che
x_0 e' un punto di minimo relativo per f, se esiste un
intorno $B(x_0, \delta)$ (intorno di raggio δ e centro x_0) tale che

$$\forall x \in B \text{ risulta che } f(x) \geq f(x_0)$$



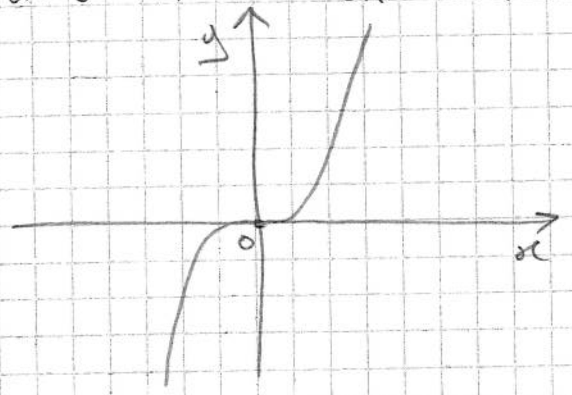
COME DETERMINARE I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

• IN SINTESI IL TEOREMA DI FERMAT CI DICE CHE L'ANNULLAMENTO DELLA DERIVATA PRIMA DI f IN UN PUNTO x_0 DEL DOMINIO DI f È CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ x_0 SIA UN PUNTO DI MASSIMO O MINIMO RELATIVO (QUINDI EQUIVALENTEMENTE ANCHE ASSOLUTO) PER LA FUNZIONE.

PER CALCOLARE I PUNTI CANDIDATI AD ESSERE MASSIMI O MINIMI PER LA FUNZIONE DOBBIAMO:

- CALCOLARE LA DERIVATA PRIMA $y = f'(x)$
- RISOLVERE L'EQUAZIONE $f'(x) = 0$

MA NON BASTA PERCHÉ POTREMMO TROVARE DEI PUNTI CHE RISPETTANO QUESTI CRITERI MA NON SONO PUNTI ESTREMANTI COME NELLA $f(x)$, $y = x^5$, CON DERIVATA $y' = 5x^4$ L'EQUAZIONE $5x^4 = 0$ DA CUI LA SOLUZIONE $x = 0$ CHE PERÒ NON È NÉ MAX NÉ MIN



PRESUMO SIA UN FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE.

PER CAPIRE SE CI SONO PUNTI DI MASSIMO O MINIMO RELATIVO DOBBIAMO STUDIARE IL SEGNO DELLA DERIVATA. INDICHIAMO CON x_0 UN PUNTO DEL DOMINIO SU CUI LA DERIVATA PRIMA SI ANNULLA E STUDIAMO IL SEGNO DELLA DERIVATA SUGLI INTERVALLI $[a, x_0)$ e $(x_0, b]$ Se

$$f'(x_0) < 0 \quad \forall x \in (a, x_0)$$
$$f'(x_0) = 0$$
$$f'(x_0) > 0 \quad \forall x \in (x_0, b)$$

ALLORA x_0 È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO PER $y = f$

$$\text{Se } \begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in (a, x_0) \\ f'(x) = 0 & \\ f'(x) < 0 & \forall x \in (x_0, b) \end{cases}$$

ALLORA x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO PER $y = f(x)$

N.b nello studio del segno della derivata sappiamo anche che se la $f'(x) > 0$ la f è crescente e se $f'(x) < 0$ la f è decresce

COME DISTINGUERE TRA MASSIMI E MINIMI RELATIVI O ASSOLUTI

IN CASO DI DOMINIO DI F CHIUSO E LIMITATO È SUFFICIENTE SOSTITUIRE NELL'ESPRESSIONE $y = f(x)$ I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO RELATIVI TROVATI E CONFRONTARLI, RICORDANDO DI CONFRONTARLI ANCHE CON GLI ESTREMI DEL DOMINIO, ANCHE SE QUEST'ULTIMI NON HANNO UNA DERIVATA NULLA.

IN CASO DI DOMINIO DI F ILLIMITATO O DISCONTINUO BISOGNA CONFRONTARE TRA LORO I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO RELATIVI COME PRIMA, MA IN ~~[illegible]~~ PIÙ BISOGNA CONSIDERARE L'ANDAMENTO GLOBALE DELLA FUNZIONE.

SE LA FUNZIONE DIVERGE A $+\infty$ NELL'INTORNO DI UN PUNTO (ASINTOTO VERTICALE) OPPURE DIVERGE A $+\infty$ NELL'INTORNO DI UN ESTREMO, NON CI POTRÀ ESSERE MASSIMO ASSOLUTO!! OVVIAMENTE!!

(DISCORSO ANALOGO PER $-\infty$ E MINIMI ASSOLUTI)

DERIVATA SECONDA CONVESSITÀ E PUNTI DI FLESSO

PER CALCOLARE LA DERIVATA SECONDA BASTA CALCOLARE LA DERIVATA DELLA DERIVATA. ORA DIAMO UNO SGUARDO AL DOMINIO $Dom(f'')$, PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE GLI INTERVALLI CHE APPARTENGONO ALL'INTERSEZIONE

$$Dom(f) \cap Dom(f') \cap Dom(f'')$$

Per la ricerca dei punti di flesso dobbiamo risolvere

$$f''(x) = 0$$

ORA PER CAPIRE LA CONCAVITÀ BISOGNA RISOLVERE

$$f''(x) \geq 0$$

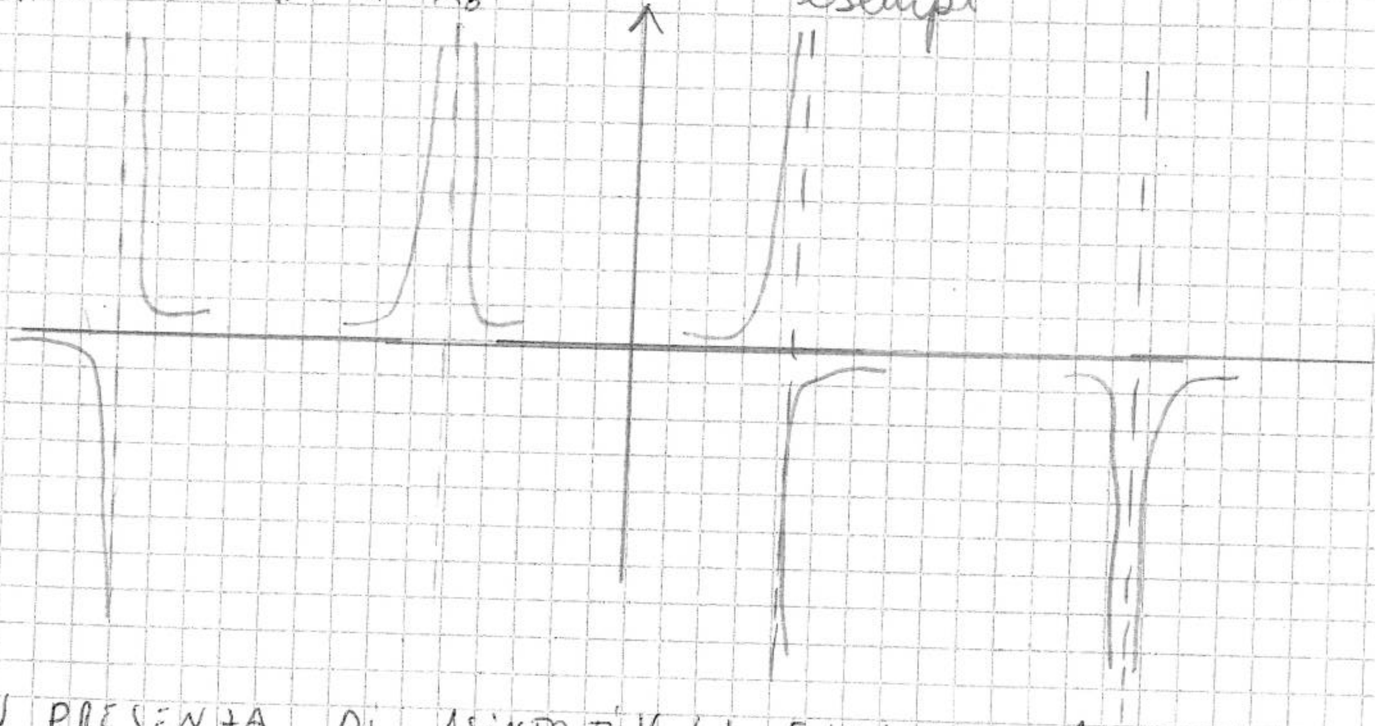
dove la derivata seconda è positiva, la funzione $y = f(x)$ è convessa $\overset{+}{\cup}$, mentre dove è negativa la funzione è Concava $\overset{-}{\cap}$

DISEGNARE IL GRAFICO

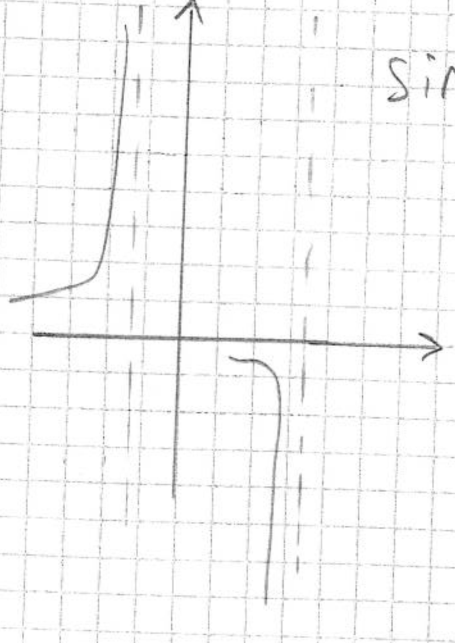
- Disegnare gli assi cartesiani e le intersezioni con gli ass[illegible]
- Guardando le informazioni desunte sul segno della funzione, cancella le zone sotto gli intervalli dell'asse delle x in cui la funzione deve essere positiva. Analogamente, cancella le zone sopra gli intervalli dell'asse x in cui la funzione deve essere negativa.
- traccia gli eventuali asintoti e segna, in maniera approssimativa il comportamento della funzione in corrispondenza degli assi
- Segna i punti di massimo e minimo che hai trovato.
- Segna punti di flesso, cuspidi, punti angolosi se ci sono
- Tenendo presente gli intervalli in cui la funzione deve crescere o decrescere e gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa, DISEGNA IL GRAFICO

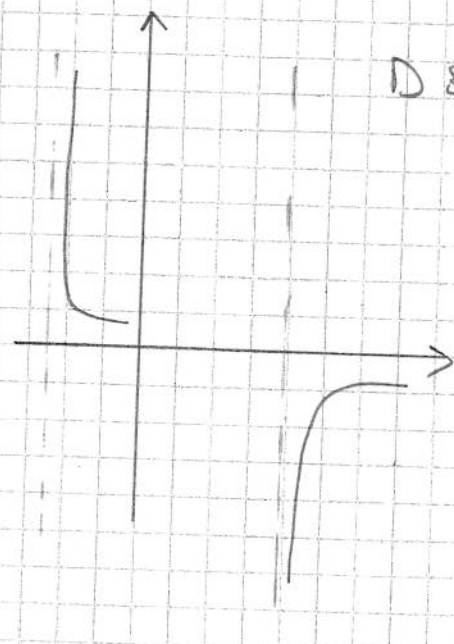
ASINTOTO VERTICALE

UN ASINTOTO VERTICALE È UNA RETTA AD ASCISSA COSTANTE, DUNQUE PARALLELA ALL'ASSE DELLE y E DALLA FORMA $X = X_0$ esempi



IN PRESENZA DI ASINTOTI V. LA FUNZIONE A DESTRA E SINISTRA diverge a + o - INFINITO.
CASI PARTICOLARI SONO GLI ASINTOTI VERTICALI SINISTRI O DESTRI IN CUI UN SOLO LIMITE diverge a + o - INFINTO





GLI ASINTOTI VERTICALI SI TROVANO IN CORRISPONDEN[ZA]
DI PUNTI DI DISCONTINUITA' DEL DOMINIO.

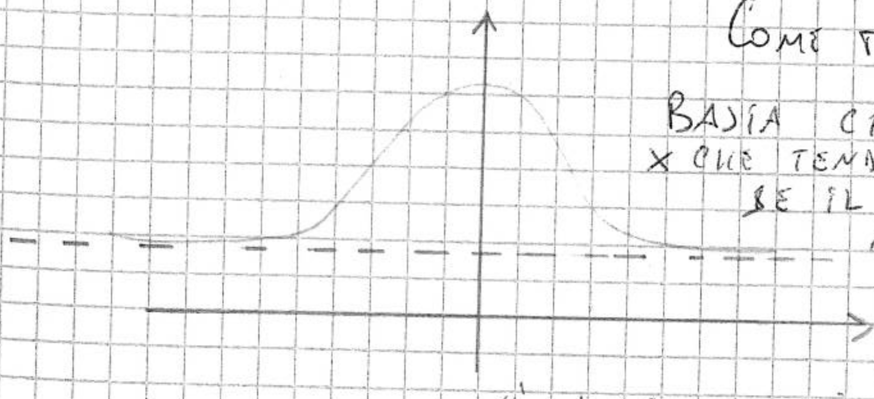
COME TROVARE UN ASINTOTO VERTICALE

- CALCOLARE IL DOMINIO DELLA FUNZIONE
- I VALORI CHE VENGONO ESCLUSI DEVONO ESSERE CONTROLLATI (ES $Dom = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty)$ da controllare a e b) DOBBIAMO ANCHE CONTROLLARE I VALORI CHE LIMITANO IL DOMINIO (ES $Dom = (c, +\infty)$ oppure $Dom (-\infty, d)$ da controllare c e d)
- ORA CALCOLIAMO I LIMITI IN PROSSIMITA' di TALI VALORI, SIA DESTRO CHE SINISTRO O SOLO UNO DEI DUE A SECONDA DEI CASI.

Se IL RISULTATO ~~per~~ ANCHE DI UN SOLO LIMITE TENDE a + o - INFINITO ALLORA SI HA UN ASINTOTO VERTICALE.

ASINTOTO ORIZZONTALE

UN ASINTOTO ORIZZONTALE VIENE INDIVIDUATO DA UN'EQUAZIONE AD ORDINATA COSTANTE, OSSIA UN EQUAZION[E] DALLA FORMA $y = y_0$ dove y_0 E' UN NUMERO REALE FINITO.
UN ASINTOTO ORIZZ. APPROSSIMA L'ANDAMENTO DI UNA FUNZIONE AL TENDERE DI X a + o - INFINITO.



COME TROVARE ASINTOTO ORIZ[Z.]

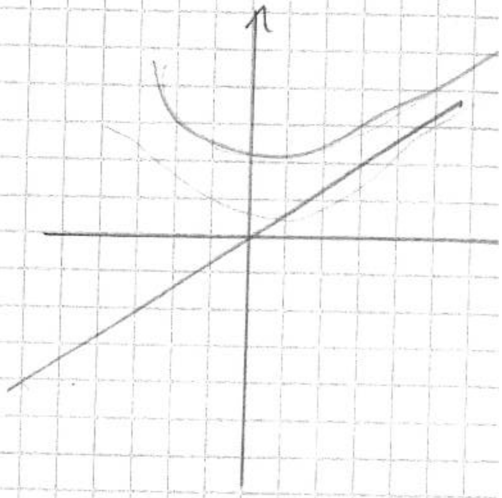
BASTA CALCOLARE I LIMITI PER X CHE TENDE A + o - INFINITO SE IL RISULTATO E' UN NUMERO REALE FINITO ALLORA ABBIAMO ASI[NTOTO] ORIZZ. SE IL RISULTA[TO] E' $\pm\infty$ NON SI HA ASINTOTO ORIZZ.

ASINTOTO OBLIQUO

SI DICE CHE LA RETTA $y = mx + q$ È UN ASINTOTO OBLIQUO DI $f(x)$ PER $x \to +\infty$ SE

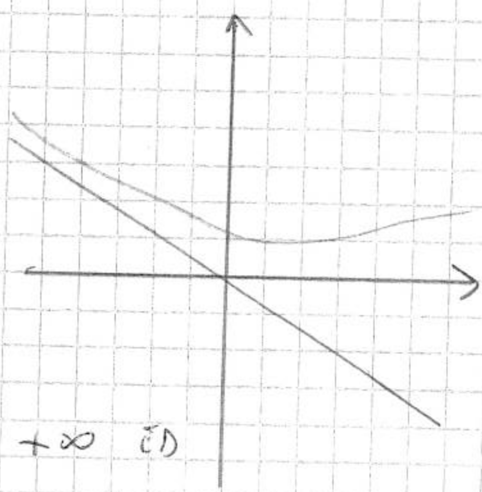
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

ASINTOTO OBLIQUO DESTRO



$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO



UNA FUNZIONE PUÒ AVERE AL MASSIMO DUE ASINTOTI OBLIQUI DIVERSI, UNO A $+\infty$ ED UNO A $+\infty$, E LA STESSA RETTA PUÒ ESSERE CONTEMPORANEAMENTE ASINTOTO OBLIQUO DESTRO E SINISTRO

COME TROVARE UN ASINTOTO OBLIQUO

- PROVO A CALCOLARE IL $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ SE IL RISULTATO È UN NUMERO REALE DIVERSO DA ZERO, QUESTO SARÀ LA MIA m
- ORA CALCOLO IL $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$ SE IL RISULTATO È UN NUMERO REALE ~~Q~~QUESTO SARÀ LA MIA q QUINDI HO

$y = mx + q$ ← ASINTOTO OBLIQUO

CALCOLO DEI LIMITI MEDIANTE STIME ASINTOTI[CHE] E LIMITI NOTEVOLI

CALCOLO DEI LIMITI FACENDO USO OLTRE CHE DELL[E] TECNICHE DI BASE, DEI SEGUENTI STRUMENTI:

- STIME ASINTOTICHE SIMBOLO ASINTOTICO $\sim$
- LIMITI NOTEVOLI

DATE 2 FUNZIONI f_1, f_2 DEFINITE ALMENO IN UN INTORNO di $x_0 \in \mathbb{R}^*$ diciamo che

$$f_1(x) \sim f_2(x) \quad \text{per } x \to x_0$$

si legge $f_1(x)$ asintotica a $f_2(x)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$$

$f(x) \sim 0$ non ha senso poiché equivale a $\frac{f(x)}{0} \to 1$

PROPRIETÀ UGUALE LIMITE

Se $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$

ALLORA LE 2 FUNZIONI HANNO LO STESSO LIMITE per $x \to x_0$

PROPRIETÀ RIFLESSIVA

Se $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$ allora anche
$f_2(x) \sim f_1(x)$ per $x \to x_0$

PROPRIETÀ TRANSITIVA

Se $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$ e $f_2(x) \sim f_3(x)$ per $x \to x_0$
allora $f_1(x) \sim f_3(x)$ per $x \to x_0$

PROPRIETÀ FUNZIONE ASINTOTICA A UNA COSTANTE

Se $f(x) \to c \iff f(x) \sim c$

$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

I LIMITI NOTEVOLI SI POSSONO RIFORMARE IN STIME ASINTOTICHE

PER $x \to 0$

$$\sin x \sim x$$
$$\arcsin x \sim x$$
$$\operatorname{tg} x \sim x$$
$$\operatorname{arctg} x \sim x$$
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$
$$e^x - 1 \sim x$$
$$a^x - 1 \sim x \operatorname{Log} a$$
$$\operatorname{Log}(1+x) \sim x$$
$$\operatorname{Log}_a(1+x) \sim \frac{x}{\operatorname{Log} a}$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\text{con } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0)$$

Se $\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$ e inoltre la funzione $\varepsilon(x)$ è definitivamente diversa da 0 per $x \to x_0$ allora per $x \to x_0$

$$\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$
$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$$
$$\operatorname{Log}(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

e così via per gli altri limiti notevoli

ASINTOTICO IN PRODOTTI E QUOZIENTI

Se $f_1(x) \sim f_2(x)$ e $g_1(x) \sim g_2(x)$ per $x \to x_0$

ALLORA $f_1(x) \cdot g_1(x) \sim f_2(x) \cdot g_2(x)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

Es

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(2x)}{\sin^2(3x)} \qquad \text{FORMA } \frac{0}{0}$$

per $x \to 0$ $\quad x \sin(2x) \sim x \cdot 2x$

per $x \to 0$ $\quad \sin^2(3x) \sim (3x)^2$

Allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(2x)}{\sin^2(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot 2\cancel{x}}{(3\cancel{x})^2} = \frac{2}{9}$$

Es

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{\sin x \cos x}{x^2} \qquad \text{FORMA } \frac{0}{0}$$

per $x \to 0^\pm$ $\quad \sin x \cdot \cos x \sim \underset{\text{LIM NOT.}}{x} \cdot \underset{\text{REGOLA TRIG.}}{1}$

per $x \to 0^\pm$ $\quad x^2 \sim x^2$

Allora

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{\sin x \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{\cancel{x} \cdot 1}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

Es

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) \cos\left(\frac{3}{x}\right)$$ FORMA $0 \cdot \infty$

Se $x \to \pm\infty$ $\frac{2}{x} \to 0$ quindi posso applicare la stima asintotica dove $\sin x \sim x$ nel mio caso $\sin\left(\frac{2}{x}\right) \sim \frac{2}{x}$

invece il $\cos\left(\frac{3}{x}\right) \to 1$ perché $\frac{3}{x} \to 0$ quando $x \to \pm\infty$

per $x \to \pm\infty$ $x \sin\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{3}{x}\right) \sim x \cdot \frac{2}{x} \cdot 1$

Allora

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{3}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \cancel{x} \cdot \frac{2}{\cancel{x}} \cdot 1 = 2$$

STIME ASINTOTICHE E PARTE PRINCIPALE DI UNA SOMMA

LA PARTE PRINCIPALE DI UNA FUNZIONE $f(x)$ per $x \to x_0$ È LA PIÙ SEMPLICE FUNZIONE ASINTOTICA a $f(x)$ per $x \to x_0$. GENERALMENTE LA PARTE PRINCIPALE DI UNA SOMMA DI TERMINI È DATA DA UN SOLO TERMINE CHE EVENTUALMENTE È IL PRODOTTO, MA NON LA SOMMA DI PIÙ ESPRESSIONI

Es

per $x \to 0$ $\sin x + 2 \sim 2$

perché il $\sin x + 2 \to 2$ perciò $\sin x + 2 \sim 2$

Es

per $x \to \pm\infty$ $(2x^3 + 2x^2 - x) \sim 2x^3$

perché

$$(2x^3 + 2x^2 - x) = 2x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) \sim 2x^3$$

quando $x \to \pm\infty$

Es

per $x \to 0$ $\quad (2x^3+2x^2-x) \sim -x$

perché $\quad (2x^3+2x^2-x) = -x(1-2x^2-2x) \sim -x$

$\quad\quad 0 \quad\quad 0$ quando $x \to 0$

Es

per $x \to +\infty$ $\quad (5x^3+2^x+3\log^4 x) \sim 2^x$

perché

$$(5x^3+2^x+3\log^4 x) = 2^x\left(1+\frac{5x^3}{2^x}+\frac{3\log^4 x}{2^x}\right) \sim 2^x$$

$\quad\quad 0 \quad\quad 0$ quando $x \to +\infty$

METODO DI RISOLUZIONE

- RACCOLGO IL TERMINE "PIÙ GRANDE" CIOÈ LA PARTE PRINCIPALE DEL POLINOMIO
- SE LA $x \to \pm\infty$ LA PARTE "PIÙ GRANDE" È LA POTENZA DI ESPONENTE MAGGIORE O IL TERMINE PIÙ GRANDE NELLA SCALA DI CONFRONTO
- SE LA $x \to 0$ LA PARTE "PIÙ GRANDE" È LA POTENZA DI ESPONENTE MINORE O IL TERMINE PIÙ PICCOLO NELLA SCALA DI CONFRONTO

ALTRI ESEMPI

Es

per $x \to 0^+$ $\quad \sqrt{x}+\sqrt{x+x^2} \sim 2\sqrt{x}$

per $x \to 0^+$ $\quad x+x^2 \sim x \Rightarrow \sqrt{x+x^2} \sim \sqrt{x}$ quindi i 2 addendi hanno lo stesso ordine di grandezza

perché $\quad \sqrt{x}+\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+x}\right) \sim 2\sqrt{x}$

$\quad\quad 0$ quando $x \to 0^+$

Es

per $x \to +\infty$ $\quad 2x + 3\sqrt{x^2+x} \sim 5x$

per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt{x^2+x} \sim \sqrt{x^2} = x$

$$2x + 3\sqrt{x^2+x} = x\left(2 + 3\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \sim 5x$$

0 quando $x \to \infty$

Es

per $x \to -\infty$ $\quad 2x + 3\sqrt{x^2+x} \sim -x$

per $x \to -\infty$ $\quad \sqrt{x^2+x} \sim \sqrt{x^2} = -x$

$$2x + 3\sqrt{x^2+x} = x\left(2 - 3\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = -x$$

0 quando $x \to -\infty$

Es $\quad x \to 0^+$ $\quad \sqrt{x} - \sqrt{x+x^2} \sim -\frac{1}{2}x^{3/2}$

RAGIONANDO COME PRIMA AVREI

per $x \to 0^+$ $\quad \sqrt{x+x^2} \sim \sqrt{x}$ $\quad$ quindi

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{1-x}\right) = \sqrt{x} \cdot 0 = 0$$

0 quando $x \to 0$

CIOE' $\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} \sim 0$ $\quad$ MA QUESTO NON E' POSSIBIL

QUINDI USO UNA STIMA ASI. TRATTO DA UN LIMITE NOT.

$$\left(1 - \sqrt{1+x}\right) \sim \frac{1}{2}x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{1+x}\right) \sim \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^{3/2}$$

QUESTO E' UN CASO PARTICOLARE DI CANCELLAZIONE DELLE PARTI PRINCIPALI

Esempi con Logaritmi

Se $x \to x_0$ e $f(x) \to 0^+$

oppure $f(x) \to +\infty$

$$f(x) \sim g(x)$$

ALLORA

$$\operatorname{Log}(f(x)) \sim \operatorname{Log}(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

Se $x \to x_0$ e $f(x) \to 1$

$$\operatorname{Log}(f(x)) \sim f(x) - 1 \quad \text{per } x \to x_0$$

Es

$\log_2(x+3)$ per $x \to +\infty$

$$\operatorname{Log}_2(x+3) = \operatorname{Log}_2\left(x \cdot \left(1+\frac{3}{x}\right)\right) = \operatorname{Log}_2 x + \operatorname{Log}_2\left(1+\frac{3}{x}\right) \sim \operatorname{Log}_2 x$$

$$\operatorname{Log}_2(x+3) \sim \operatorname{Log}_2 x$$

Es

per $x \to \infty$ $\quad (x^3+2x^2)\cdot\operatorname{Log}_2(x+3)$

$(x^3+2x^2) \sim x^3$

$\operatorname{Log}_2(x+3) \sim \operatorname{Log}_2 x$

$$(x^3+2x^2)\cdot\operatorname{Log}_2(x+3) \sim x^3 \operatorname{Log}_2 x$$

ESPONENZIALI

per $x \to +\infty$ $\quad e^{x^2+x+1/x} \sim e^{x^2+x}$

perché

$e^{x^2+x+1/x} = e^{x^2} + e^{x} + e^{1/x} \sim e^{x^2} + e^{x} = e^{x^2 \cdot x}$

0 quando $x \to +\infty$

LIMITE ES. de L'Hôpital

$f(x) = \lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = l$

$f(x) \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x^2+1} - x^2$

se faccio la stima asintotica, viene

x^2

quindi avrò

$f(x) \approx \lim_{x \to \infty} (x^2 - x^2) = \lim_{x \to \infty} x^2(1-1) = \infty \cdot 0$ INDETERMINA

QUINDI

devo usare De l'Hôpital

$p(x) = x\sqrt{x^2+1}$

$q(x) = x^2$

$l = \lim_{x \to \infty} \dfrac{p'(x)}{q'(x)}$

Calcoliamo $f'(x)$.
si usa la regola della derivata del prodotto

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1} + x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2(x^2+1)+x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$g'(x) = 2x$$

Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\frac{2(x^2+1)+x}{2\sqrt{x^2+1}}}^{A}}{\underbrace{2x}_{B}} = \left\{ \frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B} = \right.$$

$$= \left\{ \underbrace{\frac{2(x^2+1)+x}{2\sqrt{x^2+1}}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{1}{2x}}_{B} = \left\{ \frac{2(x^2+1)+x}{2\sqrt{x^2+1} \cdot 2x} \right.\right.$$

TA! $\lim_{x \to +\infty} \frac{2(x^2+1)+x}{2\sqrt{x^2+1} \cdot 2x}$ → facciamo la stima (numeratore) → facciamo la stima (denominatore)

quindi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

12/07/12

$$f''(x) = \frac{2x(x^4+9x^2+16)-(4x^3+18x)(x^2-4)}{(x^4+9x^2+16)^2} =$$

$$---- = \frac{2x(-x^4+8x^2+52)}{(x^4+9x^2+16)^2} \quad \begin{matrix} N \\ D \end{matrix}$$

Il D è sempre > 0

Devo studiare il segno del numeratore

$$\underbrace{2x}_{f_1(x)}\underbrace{(-x^4+8x^2+52)}_{f_2(x)}$$

f_1	f_2	
+	+	✓
−	−	✓
+	−	
−	+	

} Numeratore > 0

2x lo posso mettere da parte e studio

$$(-x^4+8x^2+52) = -t^2+8t+52$$

SERIE NUMERICA

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI PER ESEMPIO $a_1 = 10$, $a_2 = 5$, $a_3 = 2,5$, $a_4 = 1,25$, ... LA SERIE NUMERICA SARÀ LA LORO SOMMA CIOÈ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$ E SI SCRIVERÀ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$n=1$ ← questo è il numero di partenza può variare da 0 a ....

e si LEGGE serie o SOMMA per n da 1 a ∞ di a_n

CALCOLARE, CIOÈ IDENTIFICARE UN NUMERO FINITO, PER UN NUMERO INFINITO DI ADDENDI È DI PER SÉ UN PARADOSSO QUINDI INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI.

PARTENDO dalla successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ INDICHIAMO LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI CON $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ CIOÈ:

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$...

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

LA SERIE NUMERICA COINVOLGE 2 SUCCESSIONI:

- LA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ dei termini della serie
- LA SUCCESSIONE $\{S_n\}$ DELLE SOMME PARZIALI

CONVERGENZA DELLA SERIE NUMERICA

DATA UNA SUCCESSIONE DI TERMINI REALI $\{a_n\}_n$ E COSTITUITA LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI $\{S_n\}_n$ ABBIAMO

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- SE IL RISULTATO DEL LIMITE È UN NUMERO REALE FINITO L. LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ È CONVERGENTE E LA SUA SOMMA VALE L.
- SE IL RISULTATO DEL LIMITE È $+\infty$ LA SERIE È DIVERGENTE POSITIVAMENTE
- SE IL RISULTATO DEL LIMITE È $-\infty$ LA SERIE È DIVERGENTE NEGATIVAMENTE
- SE IL RISULTATO NON ESISTE LA SERIE SI DIRÀ IRREGOLARE O INDETERMINATA.

SERIE NUMERICHE A SEGNO COSTANTE

DATA UNA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ SI DICE A SEGNO COSTANTE SE PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ I TERMINI DELLA SUCCESSIONE $\{a_n\}_n$ HANNO TUTTI LO STESSO SEGNO.

- SE $\forall\, n \in \mathbb{N}$ I TERMINI DELLA SUCCESSIONE a_n SONO >0 CIOÈ $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$
ALLORA AVREMO UNA SERIE A TERMINI POSITIVI
- SE $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n < 0$ AVREMO UNA SERIE A TERMINI NEGATIVI

SERIE A TERMINI POSITIVI O NEGATIVI HANNO TERMINI POSITIVI O NEGATIVI $\forall n$. SE I TERMINI SONO POSITIVI O NEGATIVI DA UN CERTO PUNTO IN POI (ES K) SI PARLERÀ DI

SERIE DEFINITIVAMENTE POSITIVE $\forall a_n,\ n \geq K,\ a_n \geq 0$
SERIE DEFINITIVAMENTE NEGATIVE $\forall a_n,\ n \geq K,\ a_n \leq 0$

UNA SERIE DI SEGNO COSTANTE NON PUÒ ESSERE IRREGOLARE

- UNA SERIE A TERMINI POSITIVI (O DEFINITIVAMENTE POSITIVI) O CONVERGE O DIVERGE POSITIVAMENTE
- UNA SERIE A TERMINI NEGATIVI (O DEF. NEGATIVI) O CONVERGE O DIVERGE NEGATIVAMENTE

CAPIRE SE UNA SERIE È A TERMINI DI SEGNO COSTANTE

- STUDIO DEL SEGNO TRAMITE LE DISEQUAZIONI

SI PONE $a_n \geq 0$ SI TROVANO GLI INTERVALLI DOVE $\{a_n\}_n$ È POSITIVA O NEGATIVA, QUINDI SI DEDUCE SE LA SERIE È POSITIVA, NEGATIVA, ECC.

- STUDIO DEL SEGNO TRAMITE LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI ELEMENTARI.

Es $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n-1}$$

posto $a_n = \frac{n^2+3}{n-1}$ poniamo $a_n \geq 0$

$$\frac{n^2+3}{n-1} \geq 0$$

$n^2+3 \geq 0$ SEMPRE

$n-1 > 0 \quad n > 1$

LA SERIE È DEFINITIVAMENTE POSITIVA $\forall n, n>1$

Es $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+\log(n)}{n^2+1} \qquad \frac{\sqrt{n}+\log(n)}{n^2+1} \geq 0$$

denominatore è una somma di quadrati quindi sempre positivo
RADICE E LOG (CON N CHE VARIA DA 1 a $+\infty$) SONO SEMPRE POSITIVI.

LA NOSTRA SERIE È A TERMINI POSITIVI.

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNATO

UNA SERIE SI DICE A TERMINI DI SEGNO ALTERNATO SE È DEL TIPO

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

OVE $\{a_n\}$ È UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI TALI CHE $a_n \geq 0$ PER OGNI n

SERIE GEOMETRICA

$q \in \mathbb{R}$ si dice SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE q

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

LA SUA CONVERGENZA SARÀ:

- SE IL MODULO DI q è minore di 1, cioè $-1 < q < 1$ LA SERIE CONVERGE!
  LA SOMMA SARÀ $\dfrac{1}{1-q}$

- SE q è minore o uguale a -1 cioè $q \leq -1$ LA SERIE È IRREGOLARE!

- SE $q \geq 1$ LA SERIE DIVERGE POSITIVAMENTE!

SOMMA PARZIALE DI UNA SERIE GEOMETRICA

SIA UNA SERIE GEOMETRICA CONVERGENTE

$$\sum_{n=0}^{K} q^n = \frac{1 - q^{K+1}}{1-q}$$

possiamo calcolare i primi K numeri della serie.

Es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \qquad q = -\frac{2}{3} = -0,\overline{6}$$

termine escluso

$$q^0 = \left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

$$\frac{1}{1-q} - 1 = \frac{3}{5} - 1 = -\frac{2}{5}$$

La serie converge e la somma è $-\frac{2}{5}$

Es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

prodotto per 1 sca

VISTO CHE

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$$

ALLORA

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

La serie converge e ha somma è 1

Es

$$\sum_{n=20}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\sum_{n=20}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{19}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{19}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1-\frac{1}{5^{20}}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{20}}\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{4\cdot 5^{19}}$$

$$\sum_{n=20}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{5}{4}-\left[\frac{5}{4}-\frac{1}{4\cdot 5^{19}}\right]=\frac{1}{4\cdot 5^{19}}$$

SERIE TELESCOPICA

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+k}) \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=m}^{\infty}(a_{n+k}-a_n)$$

Se $\lim_{n\to+\infty}(a_n)$ ESISTE ED È FINITO LA SERIE CONVERGE E LA SUA SOMMA È:

$$a_1+a_2+\ldots+a_k$$

Es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$

$a_n=\frac{1}{n^2}$

$a_{n+k}=\frac{1}{(n+2)^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=0$$

$K=2$ $\qquad a_1=\frac{1}{1^2} \qquad a_2=\frac{1}{2^2}$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

La serie data è una serie telescopica e converge a $\frac{5}{4}$

SOMMA PARZIALE N-ESIMA

SOMMA PARZIALE FINO A N della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$

$$S_n=b_N-b_{n+1}$$

Serie di Mengoli

La serie di Mengoli è un caso particolare di serie telescopica cioè:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \text{ equivalente a } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Il limite sarà:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \text{La } K \text{ sarà } 1$$

La sua convergenza ~~sarà~~ a 1 cioè 1

Serie Armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

È una serie a termini positivi e diverge positivamente

Serie Armonica Generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Converge se $\alpha > 1$
- Diverge positivamente se $\alpha \leq 1$

Serie Armonica a Segni Alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

- Converge se $0 < \alpha \leq 1$
- Converge assolutamente se $\alpha > 1$

Es $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5}$$

dato che $n^{-5} = \frac{1}{n^5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \qquad \alpha = 5 \qquad 5 > 1$$

è una serie armonica generalizzata e converge

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA

LA CONDIZIONE NECESSARIA, AFFINCHÈ LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$ CONVERGA È CHE LA SUCCESSIONE DEL TERMINE GENERALE $\{a_n\}_n$ SIA INFINITESIMA CIOÈ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

- SE IL LIMITE È $\neq 0$ LA SERIE NON CONVERGE PUÒ DIVERGERE O ESSERE IRREGOLARE.

- SE IL LIMITE È $= 0$ LA SERIE PUÒ CONVERGERE DIVERGERE O ESSERE IRREGOLARE

• SE ABBIAMO UNA SERIE A TERMINI POSITIVI O DEFINITIVAMENTE POSITIVI E IL LIMITE $\neq 0$ ALLORA DIVERGE POSITIVAMENTE

• SE ABBIAMO UNA SERIE A TERMINI NEGATIVI O DEFINITIVAMENTE NEGATIVI E IL LIMITE $\neq 0$ ALLORA DIVERGE NEGATIVAMENTE.

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi o definitivamente positivi

MINORANTE ($\sum a_n$) MAGGIORANTE ($\sum b_n$)

Se $a_n \leq b_n$ vale definitivamente
cioè da un certo punto in poi

Allora

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge (sottinteso positivamente) allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Se abbiamo delle serie a termini negativi possiamo ricondurla a una serie a termini pos raccogliendo il meno davanti alla sommatoria

Es.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n^2}{3n}$$

SERIE DEFINITIVAMENTE NEGATIVA

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n^2}{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n^2-1)}{3n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n}$$

Es.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+3}$$

CONDIZIONE NECESSARIA OK

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+5n+3} = 0$$

$$\frac{1}{n^2+5n+3} > 0 \quad \text{E' A TERMINI POSITIVI}$$

$$n^2+5n+3 > n^2 \quad \text{ALLORA} \quad \frac{1}{n^2+5n+3} < \frac{1}{n^2}$$

ponendo

$$a_n = \frac{1}{n^2+5n+3} \qquad b_n = \frac{1}{n^2} \qquad n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n$$

dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ E' CONVERGENTE

PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO LA SERIE DI PARTENZA CONVERGE.

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

SIANO $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positi

con $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sia uguale a L

- SE $L \in (0, +\infty)$ ALLORA le 2 SERIE hanno lo STESSO CARATTERE
- SE $L = 0$ e SE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGE ALLORA la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE
- SE $L = +\infty$ e SE la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGE ALLORA la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE

IN SINTESI

Se 2 SUCCESSIONI $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di numeri reali positivi sono asintotiche cioè

$$a_n \sim b_n$$

ALLORA LE CORRISPONDENTI SERIE $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere

Es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n^4+3n^3-6n+2}$$

La serie è a termini positivi e la condizione di necessaria della convergenza è soddisfatta

$$a_n = \frac{n^2+5}{n^4+3n^2-6n+2}$$

STUDIO L'ASINTOTICITA'

$n^2+5 \sim n^2$ per $n \to \infty$

$n^4+3n^2-6n+2 \sim n^4$ per $n \to \infty$

quindi

$$\frac{n^2+5}{n^4+3n^2-6n+2} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty$$

dato che

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è una serie armonica generalizzata e converge.

dato il criterio del rapporto asintotico anche la serie di partenza converge

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum a_n$ serie a termini positivi

Se esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{(n+1)}}{a_n} = L$$

ALLORA

- Se $L < 1$ la serie converge
- Se $L > 1$ la serie diverge
- Se $L = 1$ nulla si può concludere e si passa ad altri sistemi

Es. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{3^n} \right)$ è una serie a termini positivi il 3^n ci suggerisce di usare il crit. del rapporto

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}} = \frac{n^2+2n+2}{3 \cdot 3^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^2+2n+2}{3 \cdot 3^n}}{\frac{n^2+1}{3^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+2n+2}{3 \cdot \cancel{3^n}} \cdot \frac{\cancel{3^n}\ 1}{n^2+1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+2n+2}{3n^2+3} = \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} < 1$$

per il criterio del rapporto la serie converge

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum a_n$ serie a termini positivi

Se esiste il Limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

ALLORA

- Se $L < 1$ la serie converge
- Se $L > 1$ la serie diverge
- Se $L = 1$ nulla si può concludere

Es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^n}{(2n+1)^n} \right)$ serie a termini positivi

$$a_n = \frac{n^n}{(2n+1)^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left[\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} \right] = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < 1$ per il criterio della radice la serie converge

SERIE DEI MODULI

SI DICE SERIE DEI MODULI ASSOCIATA ALLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

CIOE' METTERE IL VALORE ASSOLUTO AI TERMINI DELLA SERIE DA STUDIARE. UNA SERIE DEI MODULI E' SEMPRE UNA SERIE A TERMINI POSITIVI, (CHE POTRA' SOLO CONVERGERE O DIVERGERE POSITIVAMENTE) E COME TALE VA STUDIATA

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

UNA SERIE $\sum a_n$ SI DICE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE LA SERIE DEI MODULI $\sum |a_n|$ AD ESSA ASSOCIATA E' CONVERGENTE

- SE UNA SERIE A TERMINI POSITIVI CONVERGE ASSOLUTAMENTE ALLORA CONVERGE
- SE UNA SERIE CONVERGE NON E' DETTO CHE CONVERGA ASSOLUTAMENTE

- SE LA SERIE DEI MODULI CONVERGE ALLORA LA SERIE DI PARTENZA CONVERGE ASSOLUTAMENTE

- SE LA SERIE DEI MODULI DIVERGE ALLORA LA SERIE DI PARTENZA NON CONVERGERA' ASSOLUTAMEN ESSA POTRA' DIVERGERE O CONVERGERE E IN TAL CASO SI DIRA' CHE CONVERGE SEMPLICEMENTE

RICAPITOLANDO

- SE UNA SERIE È A TERMINI POSITIVI, SE CONVERGE ESSA CONVERGERÀ ASSOLUTAMENTE

- SE UNA SERIE È A SEGNO VARIABILE SI COSTRUIRÀ LA SERIE DEI MODULI

  - SE LA SERIE DEI MODULI CONVERGE SI AVRÀ UNA CONVERGENZA ASSOLUTA DELLA SERIE ASSOCIATA
  - SE LA SERIE DEI MODULI NON CONVERGE POSSIAMO DIRE SOLO CHE LA SERIE ASSOCIATA NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE E STUDIEREMO LA SERIE ASSOCIATA PER CAPIRE SE DIVERGE O CONVERGE SEMPLICEMENTE

CRITERIO DI LEIBNIZ

Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Se $\{a_n\}$ è UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI TALI CHE:

- $a_n \geq 0$ per ogni n
- Se $\{a_n\}$ è decrescente cioè $a_{n+1} \leq a_n$
- Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Allora la serie è convergente

Es

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$$

posto $a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$ serie a segni alterni $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 2$

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n-1}{n^2+n}\right) = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{n}{n^2+3n+2} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{n}{n^2+3n+2} \leq \frac{n-1}{n(n+1)}$$

$$\frac{n^2-(n-1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} \leq 0$$

$$\frac{-n+2}{n(n+1)(n+2)} \leq 0$$

denominatore sempre positivo da 2 a $+\infty$

$$n \leq 2$$

poiché la nostra serie parte da 2 la successione è decrescente

Il criterio di Leibniz ci permette di concludere che la serie data converge.

INTEGRALI

FUNZIONE INTEGRATA

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ = AREA (CON SEGNO) DELLA REGIONE DI PIANO COMPRESA TRA IL GRAFICO DI $f(x)$, L'ASSE X E LE RETTE VERTICALI $x = a$ e $x = b$

PER CALCOLARE $\int_a^b f(x)\,dx$ DEVO:

- TROVARE UNA FUNZIONE CHE, NELL'INTERVALLO $[a,b]$ ABBIA $f(x)$ COME DERIVATA (OVVERO LA PRIMITIVA DI f)
- UNA VOLTA TROVATA, LA CALCOLO NEGLI ESTREMI DELLA ZONA DI INTEGRAZIONE (CIOE' $F(a)$ e $F(b)$)
- SOTTRAGGO I 2 VALORI $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Es.

$$\int_0^5 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_0^5 = (5)^3 - (0)^3 = 125$$

- PER AMMETTERE PRIMITIVE LA FUNZIONE $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CIOE' E' CONTINUA NELL'INTERVALLO $[a,b]$

- LA PRIMITIVA NON È MAI UNICA (POSSIAMO AGGIUNGERE QUALSIASI COSTANTE)
  $F(x) + c$
- $\int f(x)\,dx$ ⟵ INTEGRALE INDEFINITO

Primitive Elementari

$f(x)$	$F(x)$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
e^x	e^x	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\forall n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	

Es.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos 0\right) = 0 + 1 = 1$$

Es.

$$\int_1^2 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Proprietà

- $\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$
- $\int K f(x) \, dx = K \int f(x) \, dx$

Es.

$$\int (3x + \cos x)\, dx = \int 3x\, dx + \int \cos x\, dx =$$
$$= 3\int x\, dx + \int \cos dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + \sin x + c$$

PROPRIETÀ

- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$
- $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

PRIMITIVE DI DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

SIA $F(x)$ UNA PRIMITIVA DI $f(x)$ E SIA $g(x)$ UNA FUNZIONE DERIVABILE E TALE CHE SIA POSSIBILE COSTRUIRE LA FUNZIONE COMPOSTA $F(g(x))$. IN QUESTO CASO

$$\left[F(g(x))\right]' = f(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$$

Es.

$$\int 3x^2 \cdot \sin(x^3)\, dx = -\cos(x^3) + c$$

Es.

$$\int e^{\sin x} \cos x\, dx = e^{\sin x} + c$$

Es.

$$\int x\,(x^2-1)^{2014}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^{2014}\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{(x^2-1)^{2015}}{2015} + c =$$
$$= \frac{(x^2-1)^{2015}}{4030} + c$$

PRIMITIVE ELEMENTARI

P. ELEMENTARI GENERA

$\int \cos x \, dx = \sin x + c \longrightarrow \int f'(x) \cos[f(x)] \, dx = \sin$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \longrightarrow \int f'(x) \sin[f(x)] \, dx = -\cos$

$\int e^x \, dx = e^x + c \longrightarrow \int f'(x) e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} +$

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; (n \neq -1) \longrightarrow \int f'(x) [f(x)]^n \, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c$

Es.

$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$

$(x)] + c$

$f(x)] + c$

$+ c \quad (n \neq -1)$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Es

$$\int \underbrace{x}_{f}\, \underbrace{\cos x}_{g'}\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx =$$

$f = x \quad f' = 1$

$g' = \cos x \quad g = \mathrm{se}$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

Es

$$\int \underbrace{x}_{f}\, \underbrace{e^x}_{g'}\, dx = x \cdot e^x - \int e^x\, dx =$$

$f(x) = x \quad f' = 1$

$g' = e^x \quad g = e^x$

$$= x e^x - e^x + c$$

Es

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\, \underbrace{e^x}_{g'}\, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\, dx =$$

$f = x^2 \quad f' = 2x$

$g' = e^x \quad g = e^x$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x\, dx =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) + c$$

Es

$$\int (x^4 + 3x^2 - 6)\, e^x\, dx = \int x^4 e^x\, dx + \int 3x^2 e^x\, dx + \int (-6)\, e^x\, dx$$

$$= \underbrace{\int x^4 e^x\, dx}_{\text{PER PARTI}} + 3 \underbrace{\int x^2 e^x\, dx}_{\text{PER PARTI}} - 6 \int e^x\, dx$$

Es

$$\int \underbrace{x}_{g'} \underbrace{\ln x}_{f} \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{2} dx =$$

$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$

$g' = x \quad g = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c =$$

$$= \frac{x^2}{4} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c$$

Giochetto moltiplicare per 1

Es

$$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{\ln x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} \, dx =$$

$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$

$g' = 1 \quad g = x$

$$= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \, dx =$$

$$= \ln x \cdot x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

Es

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int \underbrace{\operatorname{artg} x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} \, dx =$$

$f = \operatorname{artg} x \quad f' = \frac{1}{1+x^2}$

$g' = 1 \quad g = x$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \, dx =$$

$$= \operatorname{artg} x \cdot x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{artg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c$$

Es INTEGRALI CICLICI

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x - \int (-\sin x) \sin x \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

Quindi

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot (\sin x \cdot \cos x + x) + C$$

Es

$$\int \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'} \, dx =$$

$f = e^x$ $f' = e^x$

$g' = \sin x$ $g = -\cos x$

$$= e^x \cdot (-\cos x) - \int \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{g'} \, dx =$$

$f = e^x$ $f' = e^x$

$g' = -\cos x$ $g = -\sin x$

$$= (-\cos x) \cdot e^x - \left[-\sin x \cdot e^x - \int (-\sin x \cdot e^x) \, dx \right] =$$

$$= -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx + \int e^x \sin \, dx = -\cos x \, e^x + \sin x \cdot e^x$$

$$\cancel{2} \int e^x \sin x \, dx = e^x \cdot (\sin x - \cos x) \cdot \frac{1}{2} + C$$

Integrazione per Sostituzione

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$$

Es

$$\int \sin(e^x) e^x \, dx = \int \sin y \, dy =$$

$$= -\cos y + C =$$

$$= -\cos(e^x) + C$$

$y = e^x$

$dy = e^x \, dx$

derivata

Sostituzione
- $y = g(x)$
- $dy = g'(x)\, dx$
- estremi
  - $a \to g(a)$
  - $b \to g(b)$

Es

$$\int \cos x \cdot \sin(\sin x)\, dx =$$

$$= \int \sin y \, dy = -\cos y + c = -\cos(\sin x) + c$$

$y = \sin x$

$dy = \cos x \, dx$

Es

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\, dx = \int \frac{1}{1+y^2}\, dy =$$

$$= \operatorname{arctg} y + c =$$

$$= \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

Es

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx =$$

$y = x^2$

$dy = 2x\,dx$

$0 \longrightarrow g(0) \Rightarrow 0^2 =$

$\sqrt{\pi} \rightarrow \pi$

$$= \int_0^{\pi} \cos y\ \frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin y\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sin\pi - \sin 0\right) = 0$$

Es

$$\cancel{\int\frac{1}{x}}\ \int \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx = \int \frac{1}{\ln x+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

chiamo

$y = \ln +1$

$dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$= \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c =$$

$$= \ln|\ln x+1| + c$$

Es

$$\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\,dx =$$

$y = \sin x$

$dy = \cos x$

$$= \int dy\cdot y^4(1-y^2) = \int y^4 - y^6\,dy =$$

$$= \int y^4\,dy - \int y^6\,dy = \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + $$

Es

$$\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{y^2-1}{1+y}\,2y\,dy =$$

$$y=\sqrt{x} \rightarrow x = y$$
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$
$$dx = 2y$$

$$= \int \frac{\cancel{(y+1)}\cdot(y-1)}{\cancel{y+1}} \cdot 2y\,dy =$$

$$= \int 2y^2\,dy - \int 2y\,dy =$$

$$= \frac{2}{3}y^3 - y^2 + c =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - x + c$$

Es

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int 2\,dy\,(y^2+1) =$$

$$y = \sqrt{x-1} \longrightarrow y^2 = x-1 \rightarrow x = y^2+1$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$= 2\int y^2\,dy + 2\int dy = \frac{2}{3}y^3 + 2y + C =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + 2\left(\sqrt{x-1}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x-1}\left[\frac{x-1}{3} + 1\right] + C =$$

$$= 2\sqrt{x-1} \cdot \frac{x+2}{3} + C$$

Integrazione di Funzioni Razionali

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi

($Q(x) \neq$ polinomio nullo)

Se $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Es $$\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x^4+1| + c$$

Se $$\int \frac{K}{ax+b}\,dx = \frac{K}{a}\ln|ax+b| + c$$

Es $$\int \frac{3}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + c$$

Sapendo che

$\frac{1}{[f(x)]^2} = [f(x)]^{-2}$ e che $\int f'(x)[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

Es

$$\int \frac{5}{(2x-1)^2}\,dx = \frac{5}{2}\int 2(2x-1)^{-2}\,dx = \frac{5}{2}\frac{(2x-1)^{-1}}{-1} + c =$$

$$= -\frac{5}{4x-2} + c$$

FUNZIONI TIPO $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ con $\underbrace{b^2-4ac}_{\Delta} < 0$

ATTRAVERSO VARI ARTIFIZI BISOGNA RICONDURSI A

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg}[f(x)] + c$$

oppure

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Es

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + c$$

Es

$$\int \frac{18x+3}{9x^2+6x+2}\,dx = \int \frac{18x+6}{9x^2+6x+2} - \int \frac{3}{9x^2+6x+2} =$$

$$= \ln|9x^2+6x+2| + c - \int \frac{3}{1+(3x+1)^2} =$$

$$= \ln|9x^2+6x+2| - \operatorname{arctg}(3x+1) + c$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

LEZIONE 9

$$y = \frac{n(x)}{d(x)}$$

METODO DI RISOLUZIONE

(1) SE IL GRADO DEL N È $\leq$ del D
SI FA LA DIVISIONE TRA N e D
SE IL $D > N$ SALTO IL PASSAGGIO

(2) Cioè che resta bisogna FATTORIZZARE IL DENOMINATORE. Cioè SCOMPORLO IN PRODOTTO DI FATTORI DI 1° GRADO O 2° GRADO NON SCOMPONIBILI

(3) DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRAZIONI SEMPLICI

(4) INTEGRARE I PEZZETTINI

Es.

$$\int \frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - x - 2}\, dx$$

$$\frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{1}{x^2 - x - 2}$$

(1) DIVISIONE

$X \cdot x^2 - x - 2$ CAMBIANDO DI SEGNO →

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -3x & -1 & x^2 - x - 2 \\
\hline
-x^3 + x^2 & +2x & & x + 1 \\
// \quad +x^2 & -x & -1 & \uparrow x^3 : x^2 \quad \uparrow x^2 : x^2 \\
-x^2 & +x & +2 & \\
\hline
// & // & 1 &
\end{array}$$

(2) $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$

(3) $$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)\cdot(x+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x+A-2B}{(x-2)\cdot(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ -B-2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1/3 \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x+1)}$$

(4) $$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int\left[x+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)}\right]dx =$$

$$= \int x\,dx + \int dx + \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{x} + x + \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + c$$

E_5

$$\int \frac{1}{x^2-1}$$

(2) $x^2-1 = (x+1)\cdot(x-1)$

(3) $$\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x-A+B}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ +B+B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

(4)

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Es 5

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$$

(2) $x^3+x = x(x^2+1)$

(3) $$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+A+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

(4) $$\int\frac{1}{x^3+x}\,dx = \int\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c$$

Es

$$\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$$

(2) $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$

(3) $\cancel{\frac{x+1}{x^3-2x^2+x}}$

$$= \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

visto che e' un cubo si fa cosi'

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (C-2A-B)x + A}{x(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2A-B=1 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

(4)

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| + 2\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + C$$

ALTRO ES

③ $\frac{1}{x(x-3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$

ES

$$\int\left(2 - \frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx = \int 2\,dx - \int \frac{x}{2}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx =$$

$$= 2\int dx - \frac{1}{2}\int x\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 2x - \frac{1}{4}x^2 - 2\ln|x| + c$$

ES

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g'}\,dx =$$

$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$

$g' = \frac{1}{x^2} \quad g = -\frac{1}{x}$

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$$

ES

$$\int_{-b}^{b} |x-e|\,dx$$

con $0 < e < b$

$$|x-e| = \begin{cases} x-e & x \geq \\ e-x & x < \end{cases}$$

$-b \quad 0 \quad e \quad b$