1 Конформная симметрия многомерных пространств

Определение 1.1. Конформное преобразование — обратимое преобразование координат, сохраняющее метрический тензор с точностью до растяжений.

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{1}$$

Рассмотрим преобразования метрического тензора в случае инфинитизимальных преобразований:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \tag{2}$$

Подставляя в формулу (1) получаем (при $d = 1$ ε - любая, при $d = 2$ - Коши-Риман):

$$\partial_\mu \varepsilon^\nu + \partial_\nu \varepsilon^\mu = f(x) g_{\mu\nu} \tag{3}$$

Где $f(x)$ считаем, взяв след обоих частей (3):

$$f(x) = \frac{2}{d}\partial_\mu \varepsilon^\mu \tag{4}$$

Далее везде полагаем $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Дифференцируя (3), получаем:

$$2\partial_\mu \partial_\nu \varepsilon_\rho + \partial_\nu \varepsilon^\mu = \eta_{\mu\rho}\partial_\nu f \tag{5}$$

Сворачивая с $\eta^{\mu\nu}$ получаем:

$$2\partial^2 \varepsilon_\mu = (2-d)\partial_\mu f \tag{6}$$

Дифференцируя и используя (3):

$$(2-d)\partial_\mu \partial_\nu f = \eta^{\mu\nu}\partial^2 f \tag{7}$$

Сворачивая с $\eta^{\mu\nu}$:

$$(d-1)\partial^2 f = 0 \tag{8}$$

Рассмотри случай $d > 2$. Из (7) получаем: $\partial_\mu \partial_\nu f = 0$. Значит, используя (6):

$$f = A + B_\mu x^\mu \tag{9}$$

$$\varepsilon^\mu = a_m u + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu} \tag{10}$$

(3) и (4) дают уравнения на $b_{\mu\nu}$:

$$b_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} \quad m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \tag{11}$$

(5) на $c_{\mu\rho\nu}$:

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\rho\nu} b_\nu + \eta_{\mu\nu} b_\rho - \eta_{\rho\nu} b_\mu \quad b_\mu = \frac{1}{d} c^\nu_{\nu\mu} \tag{12}$$

Тогда x_μ инфинитизимально преобразуется как:

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x\cdot b)x^\mu - b^\mu x^2 \tag{13}$$

Интегрируя, а также пользуясь выражением для ε^μ получаем:

	эл-т группы	генератор
трансляции	$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$	$P_{\mu} = -i\partial_{\mu}$
растяжения	$x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$	$D = -ix^{\mu}\partial_{\mu}$
повороты	$x'^{\mu} = M^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$	$L_{\mu\nu} = i(x^{\mu}\partial_{\nu} - x^{\nu}\partial_{\mu})$
спец. конф. преобр.	$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu}x^2}{1-2(b\cdot x)+b^2x^2}$	$K_{\mu} = -i(x^{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - x^2\partial_{\mu})$

Переобозначая:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \quad J_{-1,0} = D \quad J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_{\mu} - K_{\mu}) \quad J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_{\mu} + K_{\mu}) \tag{14}$$

Получим коммутационные соотношения, доказывающие изоморфизм конформной группы размерности d и $SO(d+1,1)$:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta ab J_{bc} + \eta bc J_{ad} - \eta ac J_{bd} - \eta bd J_{ac}) \tag{15}$$

Замети

2 Конформная симметрия в двух измерениях

В двух измерениях уравнение (3) принимает вид:

$$\partial_0 \varepsilon_0 = \partial_1 \varepsilon_1 \quad \partial_0 \varepsilon_1 = -\partial_1 \varepsilon_0 \tag{16}$$

Что соответствует условиям Коши - Римана для функции $\varepsilon(x)$. Перейдя в комплексные координаты , можно заметить, что все инфинитизимальные преобразования задаются некоторой голоморфной функцией $f(z)$:

$$z' = z + f(z) \tag{17}$$

3 Алгебра Витта и ее центральное расширение алгебра Вирасоро.

Пусть в общем случае $f(z)$ - мероморфная функция, имеющая полюса за пределами некоторого открытого множества, тогда в окресности нуля она раскладывается в ряд Лорана.

$$z' = z + \varepsilon(z) = z + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n(-z^{n+1}) \tag{18}$$

Данное инфинитизимальное преобразование определяет генераторы некоторой алгебры Ли:

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z \tag{19}$$

Их количество бесконечно, а коммутационные соотношения следующие:

$$[l_m, l_n] = (m-n) l_{m+n} \tag{20}$$

Определение 3.1. Алгебру Ли с бесконечным числом элементов, удовлетворяющих данным комутационным соотношениям называют алгеброй Витта.

Рассмотрим центральное расширение построенной алгебры. Дополним ее некоторой комплексной константой c, коммутирующей со всеми элементами, но влияющую на коммутационные соотношения.

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + cp(n,m) \tag{21}$$

Так как коммутатор обязан быть антисимметричным и удовлетворять тождеству Якоби, получим ограничение на функцию $p(n,m)$:

$$p(n,m) = \frac{1}{12}(n+1)n(n-1)\delta_{m,-n} \tag{22}$$

Использована нормировка $p(2,-2) = \frac{1}{2}$.

Определение 3.2. Алгебра Вирасоро - центральное расширение алгебры Витта с коммутационными соотношениями:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n} \tag{23}$$

4 Структура группы Мёбиуса $SL(2, R)$.

Очевидно, что группа Мебиуса всех дробно линейных преобразований комплексной плоскости изоморфна группе $SL(2,R)/\{\pm 1\}$. По теореме о жордановой нормальной форме любую матрицу 2×2 можно представить в одном из следующих видов:

$$1. \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad z' = z + \frac{1}{\lambda} \tag{24}$$

- параболическое преобразование

$$1. \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad z' = cz \tag{25}$$

- эллиптическое в случае $|c| = 1$ - гиперболическое в случае $c \in \mathbb{R}$ и $c > 0$. Других преобразований в группе Мебиуса нет.