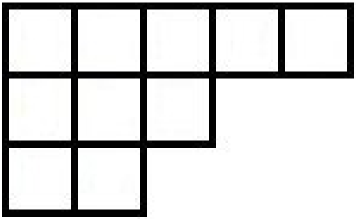
Anti-Dyson limit shape

докладчики: Садреев Амир, Сенчуков Лев, Суспицын Константин
руководитель: Никита Некрасов

Диаграммы Юнга



$$10 = 5 + 3 + 2$$

Число разбиений для заданного числа n:

$$p \propto e^{c\sqrt{n}} \tag{1}$$

$$\mathrm{p}(5) = 7 \quad \mathrm{p}(20) = 627 \quad \mathrm{p}(100) \approx 190 \cdot 10^6$$

Случаная диаграмма Юнга

Простейший случай

Можно ввести вероятностную меру на множестве диаграмм Юнга
Рассмотри простейший случай:

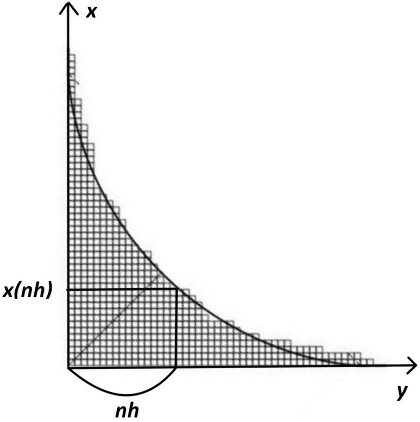
$$\mu_\lambda = q^{|\lambda|} \tag{2}$$

Для такой меры можно вычислить статсумму:

$$\mathcal{Z} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \tag{3}$$

Предельная форма

Введем переменные x и y, а таже параметр h такой, что $q = e^{-h}$



В пределе $h \to 0$ Возникает предельная форма $x(y)$.

$$e^{-x} + e^{-y} = 1 \tag{4}$$

Такая кривая, что

$$\langle (x - x(y))^2 \rangle = h^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell e^{-\ell y}}{1 - e^{-\ell h}} \to 0 \tag{5}$$

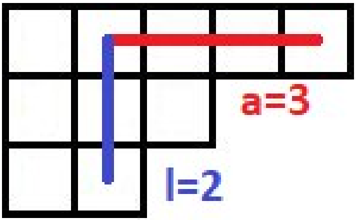
Случайная диаграмма Юнга

Модифицированная мера

В некоторых теориях возникает другое выражение для μ_λ:

$$\mu_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} q \frac{((\ell+1)\varepsilon_1 - a\varepsilon_2 + \varepsilon_3)(-\ell\varepsilon_1 + (a+1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{((\ell+1)\varepsilon_1 - a\varepsilon_2)(-\ell\varepsilon_1 + (a+1)\varepsilon_2)} \qquad (6)$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{C}$$



Предельные случаи

Можно также рассмотреть различные предельные случаи данной меры:

1) Мера Планшереля

$$\mathrm{q} \to 0, \quad \varepsilon_3 \to \infty, \quad q\varepsilon_3^2 = \Lambda^2$$

$$\mu_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{-\Lambda^2}{((\ell+1)\varepsilon_1 - a\varepsilon_2)(-\ell\varepsilon_1 + (a+1)\varepsilon_2)} \tag{7}$$

2) Равномерная мера

$$\varepsilon_3 \to 0$$

$$\mu_\lambda = q^{|\lambda|} \tag{8}$$

Y наблюдаемая

Введем наблюдаемые:

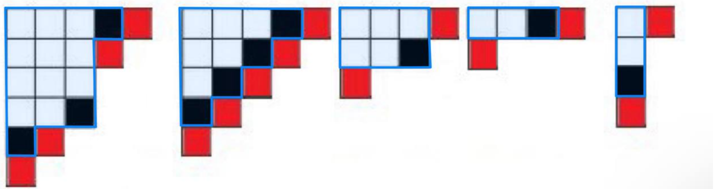
$$c_{ij} = \varepsilon_1(i-1) - \varepsilon_2(j-1) \tag{9}$$

$$C(x) = \prod_{(i,j)\in\lambda} (x - c_{ij}) \tag{10}$$

$$Y(x)|_\lambda = x\frac{C(x-\varepsilon_1)C(x-\varepsilon_2)}{C(x)C(x-\varepsilon_1-\varepsilon_2)} \tag{11}$$

$Y(x)$ можно переписать в ином виде

$$Y(x)|_\lambda = \frac{\prod_{\square\in\partial_+\lambda}(x-c_\square)}{\prod_{\blacksquare\in\partial_-\lambda}(x-c_\blacksquare)} \tag{12}$$



qq - характер

Рассмотрим коррелятор $\langle Y(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{\Lambda^2}{Y(x)} \rangle$ с мерой

$\mu_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{\Lambda^2}{((\ell+1)\varepsilon_1 - a\varepsilon_2)(-\ell\varepsilon_1+(a+1)\varepsilon_2)}$. Оказывается, такой коррелятор

не имеет полюсов.

$$Y(x) = x + O(1), x \to \infty \tag{13}$$

$$\langle Y(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{\Lambda^2}{Y(x)} \rangle = (x+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\mathcal{Z} \tag{14}$$

Отсюда получаем уравнения Швингера-Дайсона:

$$0 = \varepsilon_1\varepsilon_2 \langle |\lambda| \rangle + \Lambda \langle 1 \rangle \tag{15}$$

$$0 = \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{\Lambda}{2} \frac{d}{d\Lambda}\mathcal{Z} + \Lambda^2 \mathcal{Z} \quad \mathcal{Z} = e^{-\frac{\Lambda^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \tag{16}$$

Предельная форма

$$y(x) = \langle\langle Y(x) \rangle\rangle \tag{17}$$

В пределе

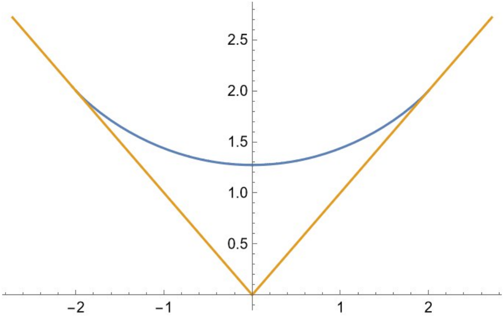
$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0 \tag{18}$$

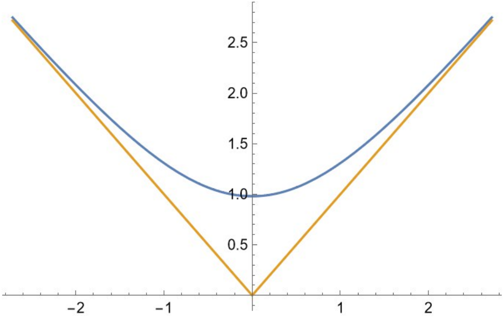
$$y + \frac{\Lambda^2}{y} = x \quad y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4\Lambda^2}) \tag{19}$$

Предельная форма может быть найдена из уравнения

$$y(x) = exp(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t) log(x-t)dt) \tag{20}$$

$$f''(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{4\Lambda^2 - x^2}} \tag{21}$$


2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
−2
−1
1
2


2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
−2
−1
1
2

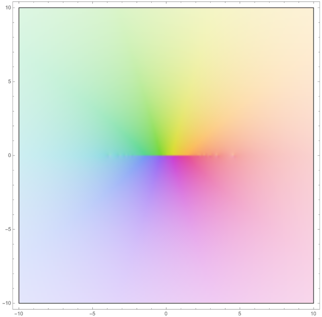
Y(x) для равномерной меры

случай $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

$$f(t) = \sqrt{2} log(2cosh(\frac{t}{\sqrt{2}})) \tag{22}$$

$$y(x) = exp(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t) log(x - \sqrt{2} t\varepsilon_1)) \tag{23}$$

$$y(x) = \frac{i\pi\varepsilon_1}{2} exp(\frac{i\pi}{2\varepsilon_1}x - \frac{i}{\pi}\psi(\frac{1}{2} + \frac{x}{2i\pi\varepsilon_1}) - \gamma(\frac{i}{\pi} + 1) - \frac{2i}{\pi} log(2)) \tag{24}$$



Что еще можно сделать?

1) Рассмотрение в случае меры более общего вида ($\varepsilon_1 \neq -\varepsilon_2$, произвольный ε_3)
2) Исследование физических приложений (четырехмерные суперсимметричные калибровочные теории, теория струн)