1 Элементы теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$

Определение 1.1. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ — это алгебра Ли матриц 2×2 с нулевым следом.

Алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ можно задать стандартными образующими e, f, h со следующими коммутационными соотношениями:

$$[e, f] = h \quad [h, e] = 2e \quad [h, f] = -2f \tag{1}$$

Пусть (V, ρ) — конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, то есть V — конечномерное векторное пространство, а $\rho(g)$ — линейные операторы, действующие на нём, $g \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Пусть $v \in V$ — собственный вектор оператора $\rho(h)$ с собственным значением μ. Из коммутационных соотношений получается, что вектор $\rho(e)v$ — собственный для $\rho(h)$ с собственным значением $\mu + 2$, а вектор $\rho(f)v$ — собственный для $\rho(h)$ с собственным значением $\mu - 2$.

Так как ввиду конечномерности данная цепочка должна обрываться, существует собственный для $\rho(h)$ вектор $v \in V$ такой, что $\rho(e)v = 0$. Такие вектора называются особыми. Пусть v_λ — особый вектор. Можно построить цепочку собственных векторов для $\rho(h)$, последовательно действуя на v_λ оператором $\rho(f)$, а точнее рассмотреть подпространство V_λ, натянутое на вектора вида $\rho(f)^k v_\lambda$. V_λ является подпредставлением в V и конечномерно тогда и только тогда, когда $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Таким образом, всякое неприводимое представление изоморфно V_n для некоторого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Так как $dim V_n = n+1$, то неприводимое представление данной размерности единственно с точностью до изоморфизма.

2 Представления алгебры Вирасоро, модули Верма и их характеры

Алгебра Вирасоро задается коммутационными соотношениями:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}. \tag{2}$$

Построим ее представление по аналогии с тем, как было построено представление алгебры $su(2)$ в квантовой механике (так же будем использовать бра и кет обозначения).
Так как ни одна пара генераторов не коммутирует, перейдем в базис одного из них - L_0. Обозначим за $|h\rangle$ состояние со старшим весом с собственным значением h. Так как:

$$[L_0, L_m] = -mL_m \quad m > 0 \tag{3}$$

Точно так же как и в алгебре $su(2)$, L_m - понижающий оператор, а L_{-m} - повышающий. Мы должны принять:

$$L_n |h\rangle = 0 \quad n > 0, \tag{4}$$

что соответствует физическому смыслу L_n как операторов, действующих на примарные поля, если положить:

$$|h\rangle = \Phi_h(0) |0\rangle \quad \langle h| = \langle 0| \Phi(\infty), \tag{5}$$

где $|0\rangle$ - состояние вакуума.
Рассмотрим оператор $L_{-\mathbf{k}} = L_{-k_1}...L_{-k_n}$: Так как L_{-m} - повышающий оператор, $L_{-\mathbf{k}} |h\rangle$ - собственный вектор оператора L_0. Все остальные базисные вектора данного пространства получаются действием $L_{-\mathbf{k}} |h\rangle$ (применением повышающего оператора всеми возможными

способами)

Определение Модуль Верма $V_{h,c}$ - представление алгебры Вирасоро, заданное следующими соотношениями $\{L_{-\mathbf{k}}\left|h\right\rangle : 1 \geq k_1 \geq k_2 \geq ..., L_n\left|h\right\rangle = 0 \quad n > 0, L_0\left|h\right\rangle = h\left|h\right\rangle\}$ Построенное таким образом представление распадается на прямую сумму конечномерных подпространств $V_{h,N}$:

$$V_{h,N} = span\{L_{-\mathbf{k}}\left|h\right\rangle : k_1 + ... + k_n = N\} \tag{6}$$

Данные подпространства являются собственными для L_0:

$$L_0 L_{-\mathbf{k}}\left|h\right\rangle = (h+N)L_{-\mathbf{k}}\left|h\right\rangle \tag{7}$$

В качестве примера можно привести таблицу нескольких первых состояний N:

0	$\left\|h\right\rangle$
1	$L_{-1}\left\|h\right\rangle$
2	$L_{-2}\left\|h\right\rangle$, $L_{-1}^2\left\|h\right\rangle$
3	$L_{-3}\left\|h\right\rangle$, $L_{-1}L_{-2}\left\|h\right\rangle$, $L_{-1}^3\left\|h\right\rangle$

Введем функцию характера модуля Верма:

$$\chi(t) = Tr(t^{L_0 - \frac{c}{24}})|_{V_h} = \sum_{N=0}^{\infty} Tr(t^{L_0 - \frac{c}{24}})|_{V_{h,N}} = \sum_{n=0}^{\infty} dim(n+h) q^{n+h-\frac{c}{24}} \tag{8}$$

Таким образом, фуеция характера - производящая функция размерности каждого подпространства. Так как $dimV_{h,N} = p(N)$, то, пользуясь следующими тождествами для функции Эйлера:

$$\frac{1}{\varphi(t)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n, \tag{9}$$

получаем:

$$\chi(t) = \frac{t^{h-\frac{c}{24}}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-t^k)} \tag{10}$$

3 Вырожденные представления

В зависимости от значений h, c в построенном модуле Верма могут находиться вектора с нулевой или отрицательной нормой, в случае унитарной теории они должны быть удалены из представления. Для их нахождения приравняем к нулю определитель Каца - определитель матрицы со следующими матричными элементами:

$$\left\langle h\right| \prod_i L_{k_i} \prod_j L_{-m_j}\left|h\right\rangle \quad \sum_i k_i = \sum_j k_j = N \tag{11}$$

Существует общая формула:

$$detM_N = \alpha_N \prod_{p,q \leq N, p,q>0} (h - h_{p,q}(c))^{P(N-pq)} \tag{12}$$

$$h_{p,q}(m) = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)} \quad m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25-c}{1-c}}$$

Если при каком-то значении n вектор $\left|h+n\right\rangle$ оказался равным нулю, то существует $P(N-n)$ нулевых состояний.