V. Geometrie și mecanică cerească

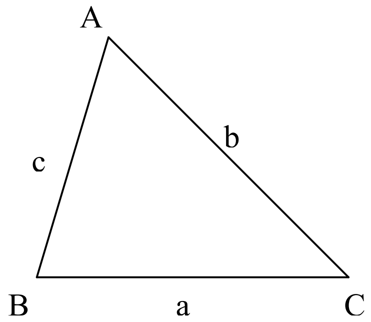
V.1. Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor

Vom recapitula câteva noțiuni învățate la geometrie în clasa a IX-a, bazate pe teoria produsului scalar a doi vectori și în capitolul III.

Teoremă: Fie triunghiul ABC în care notăm $a = BC, b = AC$ şi $c = AB$. Atunci sunt adevărate egalităţile: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.



Corolar (cosinusul unui unghi): În orice triunghi ABC avem

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ şi } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Caracterizarea unui unghi în triunghi

Fie triunghiul ABC. Avem

A este unghi ascuţit $\Leftrightarrow A < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

A este unghi drept $\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

A este unghi obtuz $\Leftrightarrow A > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

Teorema sinusurilor: În orice triunghi ABC avem: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, unde R reprezintă raza cercului circumscris.

Rezolvarea triunghiurilor oarecare

A rezolva un triunghi oarecare înseamnă a afla toate elementele triunghiului atunci când se cunosc trei elemente dintre care unul este lungimea unei laturi.

Fie triunghiul ABC cu elementele: laturile $a = BC, b = AC, c = AB$ şi unghiurile $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Cazul 1. Se dau două laturi şi unghiul dintre ele. De exemplu: b, c, A. Avem

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Din $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin A}{a}$ sau $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Din $A + B + C = \pi \Rightarrow C = \pi - (A + B)$

Cazul 2. Se dau două unghiuri şi latura comună. De exemplu: a, B, C.

Avem: Din $A + B + C = \pi \Rightarrow A = \pi - (B + C)$. Din $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ se obţin laturile

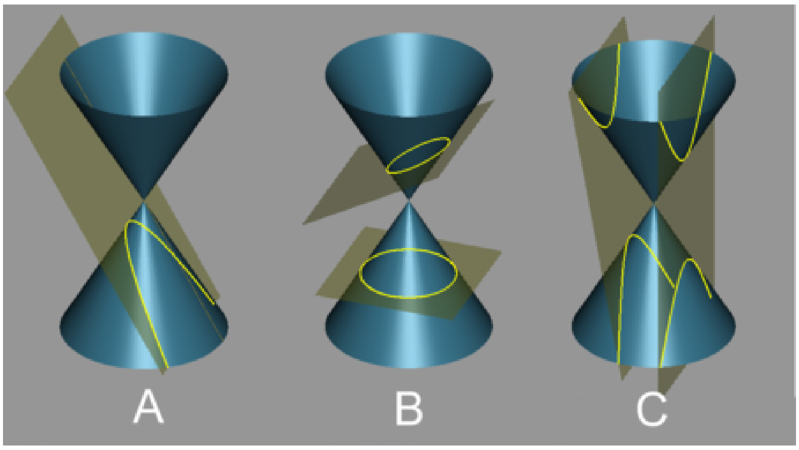
$b = \frac{a\sin B}{\sin A}$ şi $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$.

Cazul 3. Se dau cele trei laturi a, b, c. Se determină unghiurile folosind

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ şi $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c}{2ab}$.

V.2. Conice

În matematică, o conică este curba care se obţine prin intersectarea unui plan cu un con (mai exact este vorba de suprafaţa unui con drept, circular). Forma acestei curbe poate să difere destul de mult în funcţie de poziţia planului faţă de axa conului, deci este vorba de fapt despre o familie de curbe, numite în mod obişnuit „conice”.

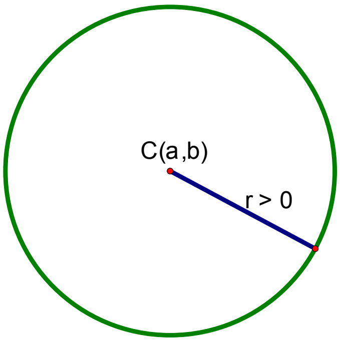


Conice

Cercul este locul geometric al punctelor din plan situate la aceiaşi distanţă de un punct fix (numit centrul cercului). Acest cerc se notează $\mathcal{C}(C(a,b),r)$

Daca xOy este un reper ortogonal în planul euclidian, în care centrul cercului este punctul $C(a,b)$ şi cercul are raza r, atunci ecuaţia cercului este:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{V.1.}$$



Cercul

Exteriorul cercului $\mathcal{C}$ $(C(a,b),r)$ reprezintă mulţimea punctelor $P(x,y)$ cu proprietatea
$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$.

Interiorul cercului $\mathcal{C}(C(a,b),r)$ reprezintă mulţimea punctelor $P(x,y)$ cu proprietatea
$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$.

Dacă în ecuaţia (V.1.) notăm $-a=A,\ -b=B,\ a^2+b^2-r^2=C$, atunci se obţine:

$$x^2+y^2+2Ax+2Bx+C=0, \tag{V.2.}$$

numită ecuaţia generală a cercului.

Teoremă : Dacă $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ sunt trei puncte necoliniare, atunci ecuaţia cercului determinat de aceste trei puncte este:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_A{}^2+y_A{}^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B{}^2+y_B{}^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C{}^2+y_C{}^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(V.3.)}$$

Teoremă: Patru puncte $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ sunt conciclice dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_A{}^2+y_A{}^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B{}^2+y_B{}^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C{}^2+y_C{}^2 & x_C & y_C & 1 \\ x_D{}^2+y_D{}^2 & x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(V.4.)}$$

Puterea punctului faţă de cerc

Definiţie: Se numeşte *puterea punctului M în raport cu cercul* $\mathcal{C}(C(a,b), r)$ numărul $\rho_C(M) = d^2 - r^2$, unde d reprezintă distanţa de la punctul M la centrul cercului.

Teoremă: Puterea punctului $M(x_0, y_0)$ în raport cu cercul $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ este numărul

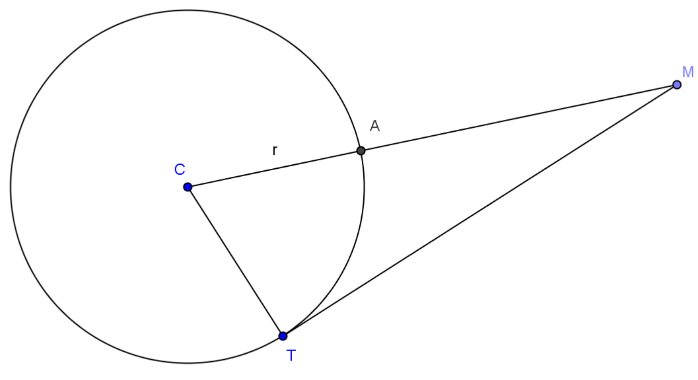
$$\rho_C(M) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2. \qquad \text{(V.5.)}$$

Definiţie: Se numeşte *axa radicală* a două cercuri, locul geometric al punctelor care au aceiaşi putere faţă de cele două cercuri.

Teoremă: Axa radicală a două cercuri este o dreaptă perpendiculară pe dreapta centrelor celor două cercuri.

Teoremă: Ecuaţia tangentei la cerc într-un punct $T(x_0, y_0) \in \mathcal{C}(C(a,b), r)$ este ecuaţia dedublată:

$$(x-a)(x_0 - a) + (y-b)(y_0 - b) = r^2. \qquad \text{(V.6.)}$$



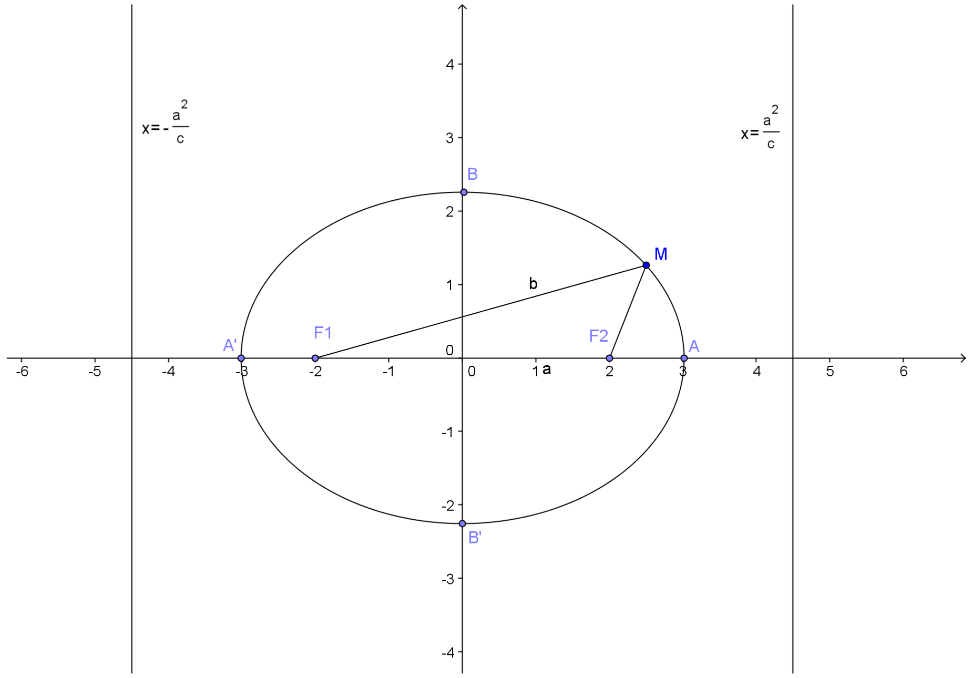
Tangenta la cerc. Puterea unui punct exterior

Elipsa este locul geometric al punctelor din planul euclidian a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe distincte F_1 şi F_2, numite focare este constantă.

Daca xOy este un reper ortogonal în planul euclidian E_2, $a \in \mathbb{R}$ şi punctele $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, atunci mulţimea punctelor $M(x,y) \in E_2$ cu proprietatea $MF_1 + MF_2 = 2a$ este caracterizată algebric de ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad \text{(V.7.)}$$

numită ecuația elipsei.



Elipsa

Elementele elipsei

Pentru elipsă avem următoarele noţiuni uzuale:

- F_1 şi F_2 se numesc *focarele* elipsei, iar $F_1F_2 = 2c$ *distanţa focală*
- a *-semiaxa mare,* iar b - *semiaxa mică*
- $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$, $B'(0,-b)$ – *vârfurile elipsei*
- Dreptele $x = \pm\frac{a^2}{c}$ - *drepte directoare* ale elipsei
- $e = \frac{c}{a} < 1$ - *excentricitatea elipsei*

Axele Ox, Oy ale reperului cartezian sunt axe de simetrie ale elipsei, originea reperului este centrul elipsei . Din acest motiv reperul ortonormat $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ se numeşte *canonic* iar ecuaţia (V.7.) se numeşte *redusă* .

Elipsa (V.7.) reprezintă locul geometric al punctelor $M(x,y)$ care satisfac una din relaţiile:

$$\frac{MF_1}{\delta(M,d_1)} = e \quad \text{sau} \quad \frac{MF_2}{\delta(M,d_2)} = e.$$

Elipsa de semiaxe a, respectiv b poate fi caracterizată parametric de ecuaţiile:

$$x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi, \varphi \in [0, 2\pi].$$

Teoremă: Perpendiculara pe tangenta într-un punct oarecare al elipsei este bisectoare a unghiului razelor focale în acest punct (proprietatea optică a elipsei).

Din punct de vedere algebric, elipsa este o curbă definită în coordonate carteziene de următoarea ecuaţie:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

cu condiţiile $B^2 < 4AC$, toţi coeficienţii sunt reali şi există mai mult de o singură pereche (x, y) care să satisfacă ecuaţia.

Proiecţia unui cerc de rază r pe un plan înclinat este o elipsă cu semiaxa mare egală cu raza cercului şi cu semiaxa mică egală cu $b = r\cos\alpha$, unde α este unghiul dintre cerc şi plan.

Un cerc de rază r ce se deplasează în planul său rectiliniu şi uniform cu viteza v, se transformă într-o elipsă de semiaxă mare r şi semiaxă mică $b = r\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = a\cos\alpha$, unde α poate fi interpretat ca fiind unghiul cu care se roteşte reperul minkowskian al cercului datorită deplasării cu viteze relativiste.

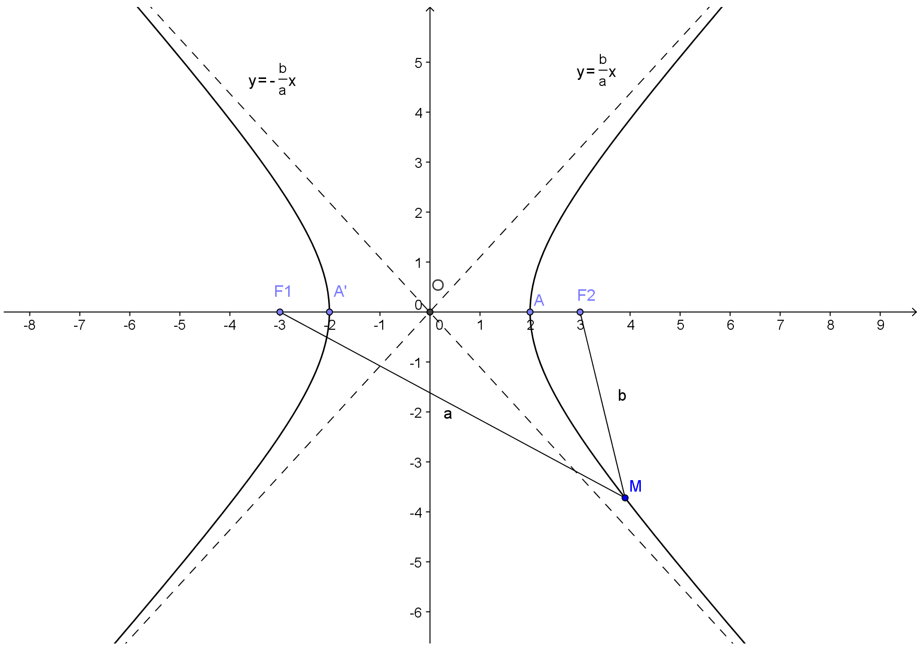
Ecuatia tangentei la elipsa E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ in punctul $M_0(x_0, y_0) \in E$ este ecuația dedublată $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$. (V.8.)

Hiperbola este locul geometric al punctelor din planul euclidian E_2 pentru care valoarea absolută diferenţei distanţelor la două puncte fixe distincte F_1 şi F_2 numite focare este constantă .

Daca xOy este un reper ortogonal în planul euclidian E_2 , $a \in \mathbb{R}$ şi punctele $F_1(-c,0), F_2(c,0)$, atunci mulţimea punctelor $M(x,y) \in E_2$ cu proprietatea $|MF_1 - MF_2| = 2a$ este caracterizată algebric de ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \ , \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(V.9.)}$$

numită ecuaţia hiperbolei.



Hiperbola

Elementele hiperbolei

- $F_1(-c,0), \quad F_2(c,0)$ – *focarele* hiperbolei
- $A'(-a,0), \quad A(a,0)$ – *vârfurile* hiperbolei
- a, b - semiaxele hiperbolei
- dreptele $y = \pm\frac{b}{a}x$ - *asimptotele* hiperbolei care reprezintă geometric diagonalele dreptunghiului cu laturile de lungimi $2a$ şi respectiv $2b$, cu centrul în O şi laturile patralele cu axele de simetrie.
- dreptele $x = \pm\frac{a^2}{c}$ - *directoarele* hiperbolei
- $e = \frac{c}{a} > 1$ - *excentricitatea* hiperbolei

Axele Ox , Oy ale reperului $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sunt axe de simetrie ale hiperbolei, iar originea reperului este centru de simetrie al hiperbolei, deci ecuaţia (V.9.) reprezintă ecuaţia redusă a hiperbolei .

Hiperbola caracterizată de ecuaţia (V.9.) reprezintă şi locul geometric al punctelor $M(x, y) \in E_2$ care satisfac una din relaţiile :

$$\frac{MF_1}{\delta(M, d_1)} = e \quad \text{sau} \quad \frac{MF_2}{\delta(M, d_2)} = e,$$

unde dreptele d_1 şi d_2 sunt directoarele hiperbolei.
Ecuaţiile parametrice ale hiperebolei sunt date de : $x = \pm a\, cht, \quad y = b\, sht, \quad t \in \mathbb{R}$.
Teoremă : Tangenta la hiperbolă într-un punct al ei, este bisectoarea unghiului razelor focale (proprietatea optică a hiperbolei).

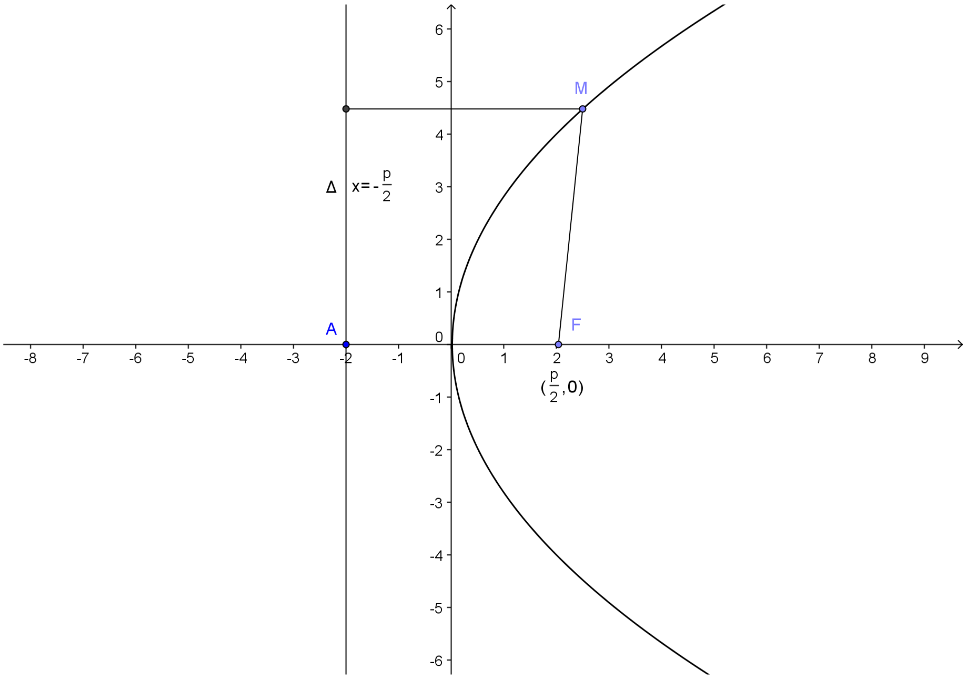
Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix F (focar) şi o dreaptă fixă Δ (directoare) .

Daca xOy este un reper ortogonal în planul euclidian E_2, $p \in \mathbb{R}_+$, punctul $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ şi dreapta (Δ): $x = -\frac{p}{2}$, atunci mulţimea punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea $\delta(M, F) = \delta(m, \Delta)$ se numeşte parabolă.

Parabola este caracterizată algebric de ecuaţia:

$$y = 2px, \quad p > 0, \qquad \text{(V.9.)}$$

numită ecuaţia parabolei.



Parabola

Elementele parabolei

Se definesc următoarele noţiuni asociate unei parabole :

- $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – *focarul* parabolei, iar cantitatea $\frac{p}{2}$ - *distanţa focală*
- O(0,0) - *vârful* parablei
- Ox - *axa transversală* a parabolei, *axa de simertie*
- Oy - *axa tangentă* la parabolă
- dreapta Δ de ecuaţie $x = -\frac{p}{2}$, este *directoarea parabolei*

Este clar că excentricitatea parabolei este $e = 1$.

Ecuaţia tangentei la parabolă într-un punct M_0 este $yy_0 = p(x + x_0)$