

III. Trigonometrie aplicată. Sfera cerească

- III.1. Sfera cerească. Constelații
- III.2. Elemente de trigonometrie.
- III.3. Numere complexe. Coordonate polare.
- III.4. Trigonometrie sferică
- III.5. Coordonate cerești
- III.6. Relații între coordonate

III.1. Sfera cerească. Constelații

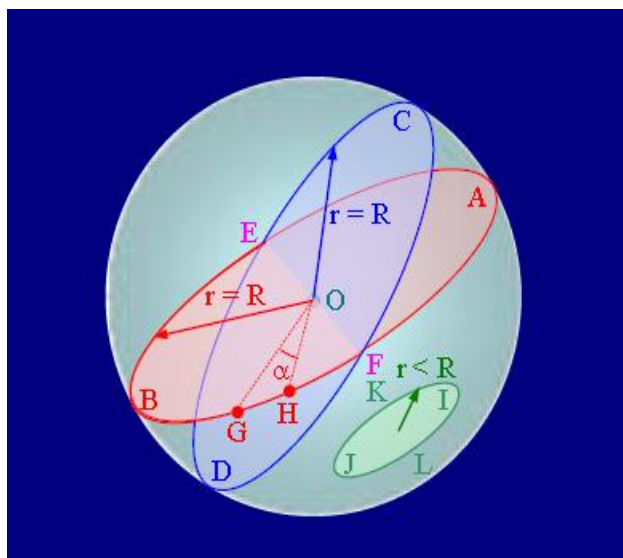
Suprafața sferică imaginară cu centrul în punctul în care se găsește un observator terestru, de rază arbitrară și pe care sunt proiectați aștrii se numește **sferă cerească**

Sfera cerească este o sferă de rază nedefinită ("foarte mare"), având centrul în punctul în care se găsește observatorul. Semidreapta de la observator spre un obiect ceresc intersectează sfera cerească într-un punct care constituie "poziția aparentă" a corpului ceresc (pe sfera cerească). Poziția aparentă a unui obiect este descrisă cu ajutorul unui sistem de coordonate sferice construit pe sfera cerească.

Fiecare observator terestru are propria sa sferă cerească cu centrul în locul unde se găsește el și cu raza egală cel puțin cu distanța de la el până la cel mai îndepărtat astru. Deoarece dimensiunile Pământului sunt mult mai mici decât distanțele de la diferitele puncte ale lui până la cele mai îndepărtate corpuri cerești, un astru este văzut din diferitele puncte ale suprafeței terestre în direcții paralele. De aceea, observatorii situați în puncte diferite ale suprafeței terestre pot fi considerați localizați în centrul acesteia.

Sfera cerească are următoarele **proprietăți**:

1. Un plan care trece prin centru divizează sfera în două emisfere egale și taie suprafața ei după un cerc mare ($AEBFA$ sau $CEDFC$), având centrul în centrul sferei (O) și raza egală cu raza sferei ($r = R$).
2. Două cercuri mari ($AEBFA$ și $CEDFC$) se intersectează întotdeauna după un diametru al sferei (EOF).
3. Prin două puncte (G și H) ale suprafeței sferei, nediametral opuse, trece un singur cerc mare ($AEBGHFA$), al treilea punct al planului său fiind centrul sferei (O).
4. Prin două puncte (E și F) diametral opuse ale sferei pot să treacă un număr infinit de cercuri mari ($AEBFA$ și $CEDFC$).
5. Planele care nu trec prin centrul sferei taie suprafața ei după cercuri mici ($IKJLI$), ale căror raze sunt mai mici decât raza sferei ($r < R$).



Proprietăți ale sferei cerești

Observatorul care se găsește în centrul sferei cerești poate măsura numai unghiurile dintre direcții. Un unghi la centru este determinat de arcul subîntins de laturile sale pe cercul mare corespunzător.

Elementele sferei cerești

Punctul situat exact deasupra observatorului (intersecția verticalei locului cu sfera cerească) se numește **zenit**. Punctul de pe sferă diametral opus zenitului, situat exact sub observator, se numește **nadir**. Planul ce trece prin observator și este perpendicular pe verticala observatorului intersectează sfera cerească după un cerc mare; acesta se numește **orizontul observatorului**.

Dreapta ce trece prin observator paralelă la axa Pământului se numește **axa lumii**. Axa lumii intersectează sfera cerească în două puncte numite **poli cerești**: polul nord ceresc și polul sud ceresc. Cercul mare definit ca intersecția dintre planul paralel cu ecuatorul terestru și sfera cerească se numește **ecuator ceresc**.

Cu excepția cazului unui observator aflat la unul din polii Pământului, există exact un cerc mare ce trece prin polii cerești, prin zenit și prin nadir. Acest cerc este **cercul meridian** al observatorului. Semicercul delimitat de poli și conținând zenitul este numit **meridianul superior**, iar semicercul delimitat de polii cerești și conținând nadirul este numit **meridianul inferior**.

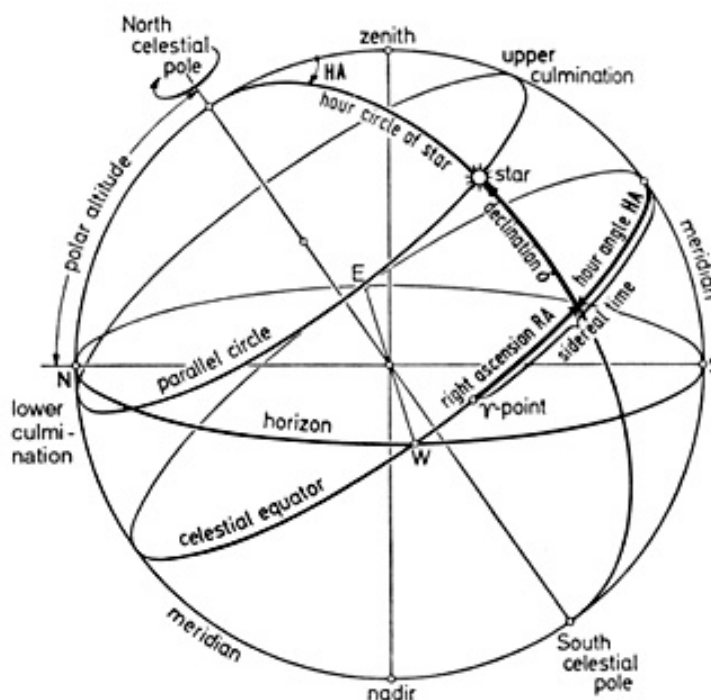
Punctele de intersecție ale cercului meridian cu orizontul se numesc **punctul nord** și **punctul sud**. Punctele situate pe cercul orizontului pe direcție perpendiculară pe direcția nord-sud se numesc **punctul est** și **punctul vest**.

Planul ce trece prin observator și este paralel cu planul orbitei Pământului taie sfera cerească după un cerc mare numit **ecliptică**. Ecliptica taie ecuatorul ceresc în două puncte diametral opuse, numite **puncte echinoxiale**: **punctul vernal** și **punctul autumnal**.

Față de un observator terestru, orice stea îndepărtată se deplasează pe un cerc paralel cu ecuatorul ceresc. O rotire completă se petrece în exact o zi siderală. Momentul în care steaua traversează meridianul superior se numește **culminația superioară** sau **trecerea la meridian** a steii. Momentul traversării meridianului inferior se numește **culminația inferioară**.

O stea în mișcarea sa diurnă aparentă descrie un cerc paralel cu ecuatorul, numit paralel ceresc. Acesta taie meridianul locului în două puncte: unul la sud de pol = culminație superioară și unul la nord de pol = culminație inferioară a steii. Intersecțiile cu orizontul ale paralelului sunt două puncte: răsărit și apus. Stelele care descriu cercuri întregi deasupra orizontului (fără răsărit și apus) se numesc stele circumpolare.

Soarele se deplasează, față de sfera cerească, de-a lungul eclipticii, efectuând o tură completă în timp de un an. Echinoxurile sunt definite ca momentele în care Soarele traversează ecuatorul ceresc. Față de un observator terestru, Soarele descrie o traiectorie complicată, semănând cu două elici de sens contrar, lipite cap la cap.



Constelații

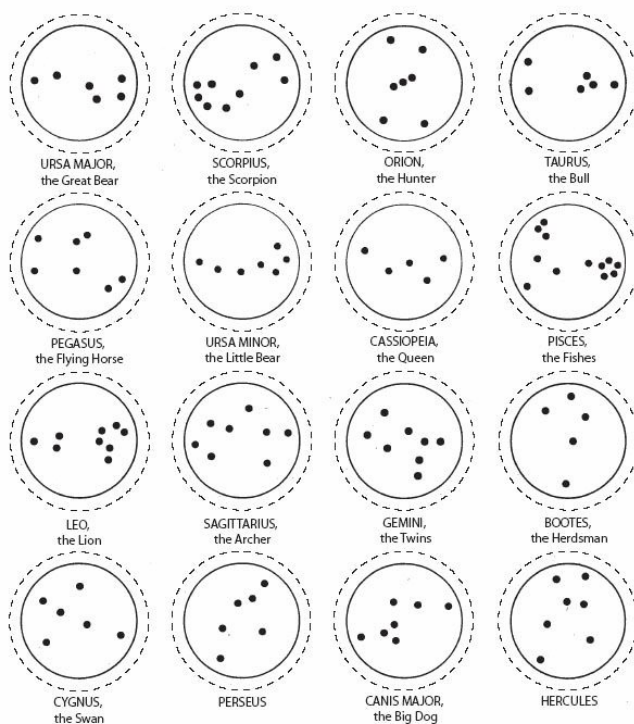
Din timpurile stravechi, oamenii au observat forme imaginare formate din grupuri de stele, pe cerul nopții. Folosind linii, ei au unit stelele în aceste grupuri, spre a forma figuri numite constelații. Fiecare constelație reprezintă o creatura sau un obiect și o parte din ele au nume luate de la figuri mitologice. De pe Terra stelele ce formează o constelație par apropiate una de cealaltă, dar de fapt se afla la diferite distanțe de noi. Totul depinde de diametrul și luminozitatea stelei.

O constelație este una dintre cele 88 de zone în care este împărțită bolta sau sfera cerească, uneori făcându-se referire doar la o grupare aparentă de stele, care, unite printr-o linie imaginară, se aseamănă cu un anumit obiect, animal, zeu etc. 70 dintre aceste constelații se văd și din țara noastră. Pentru majoritatea constelațiilor vizibile din emisfera nordică a Pământului, denumirile există deja din antichitate. Pentru cele din emisfera sudică, denumirile provin de la navigatori și astronomi din epoca Marilor descoperiri geografice, și de aceea aceste constelații poartă denumiri ca de exemplu Microscopul, Mașina Pneumatică etc.

Printre primele civilizații care au construit constelații amintim Babilonienii, Indienii, Grecii, Romani, Chinezii și Amerindienii. Aceste civilizații locuiau în emisfera nordică și de aceea ei au construit numai constelațiile vizibile din această parte a plantetei noastre. Astronomul greco-egiptean ce a trăit în al doilea secol, Ptolemeu, a catalogat mai mult de 1000 de stele și a notat 48 de constelații în lucrarea sa *Almagesta*. Aceste 48 de constelații sunt numite constelațiile antice și se folosesc și acum.

La începutul secolului XVI navigatorii europeni au început să exploreze emisfera sudică, și au observat pe cer stele necunoscute. Așa au apărut constelațiile emisferei sudice ce au nume mai tehnice. La începutul secolului XVII, astronomul Johann Bayer a numit 12 constelații sudice; compatriotul său Jakob Bartsch a numit alte trei constelații. Johannes Hevelius a numit în șapte constelații în 1687. În urma unei călătorii în Africa de Sud, Nicolas-Louis de Lacaille a numit încă 14 constelații și a catalogat 10.000 de stele. Aceste noi constelații sunt cunoscute sub numele de constelații moderne.

Înainte de anul 1922 orice astronom putea să denumească o parte dintre constelații sau chiar constelații întregi. Din cauza aceasta s-au creat multe confuzii. Pentru a elimina orice problemă, Uniunea Astronomică Internațională, formată din astronomi din toată lumea, a decis să stabilească un număr fix de constelații cu granițe precis delimitate. Astfel s-au stabilit 88 de constelații. Aceste 88 de constelații au numele în latină, o limbă universală.



Listă cu cele 88 constelații

Denumire	Traducere	Prescurtare	Originea
Andromeda	Andromeda	And	Ptolemeu
Antlia	Masina Pneumatica	Ant	1763, Lacaille
Apus	Pasarea Paradisului	Aps	1603, Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Aquarius	Varsatorul	Aqr	Ptolemeu
Aquila	Vulturul	Aql	Ptolemeu
Ara	Altarul	Ara	Ptolemeu
Aries	Berbecul	Ari	Ptolemeu
Auriga	Vizitiul	Aur	Ptolemeu
Bootes	Boarul	Boo	Ptolemeu
Caelum	Dalta	Cae	1763, Lacaille
Camelopardalis	Girafa	Cam	1624, Bartsch
Cancer	Racul	Cnc	Ptolemeu
Canes Venatici	Cainii de vanatoare	CVn	1690, Firmamentum Sobiescianum, Hevelius
Canis Major	Cainele mare	Cma	Ptolemeu
Canis Minor	Cainele mic	Cmi	Ptolemeu
Capricornus	Capricornul	Cap	Ptolemeu
Carina	Carena	Car	1763, Lacaille, rupta din fosta Argo Navis
Cassiopeia	Cassiopeia	Cas	Ptolemeu
Centaurus	Centaurul	Cen	Ptolemeu
Cepheus	Cefeu	Cep	Ptolemeu
Cetus	Balena	Cet	Ptolemeu
Chameleon	Cameleonul	Cha	1603, Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Circinus	Compasul	Cir	1763, Lacaille
Columba	Porumbelul	Col	1679, Royer, o parte din fostul Canis Major
Coma Berenices	Parul Berenicei	Com	1603, Uranometria, o parte din fostul Leo
Corona Australis	Coroana Australs	CrA	Ptolemeu
Corona Borealis	Coroana Boreals	CrB	Ptolemeu
Corvus	Corbul	Crv	Ptolemeu
Crater	Cupa	Crt	Ptolemeu
Crux	Crucea Sudului	Cru	1603, Uranometria, rupta din fosta Centaurus
Cygnus	Lebada	Cyg	Ptolemeu
Delphinus	Delfinul	Del	Ptolemeu
Dorado	Pestele de Aur	Dor	1603, Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Draco	Dragonul	Dra	Ptolemeu
Equulus	Calul Mic	Equ	Ptolemeu
Eridanus	Eridanul	Eri	Ptolemeu
Fornax	Cuptorul	For	1763, Lacaille
Gemini	Gemenii	Gem	Ptolemeu
Grus	Cocorul	Gru	1603, Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Hercules	Hercule	Her	Ptolemeu
Horologium	Orologiul	Hor	1763, Lacaille

Hydra	Hidra	Hya	Ptolemeu
Hydrus	Hidra Australa	Hya	1603, Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Indus	Indianul	Ind	1603, Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Lacerta	Sopârla	Lac	1690, Firmamentum Sobiescianum, Hevelius
Leo	Leul	Leo	Ptolemeu
Leo Minor	Leul Mic	LMi	1690, Firmamentum Sobiescianum, Hevelius
Lepus	Iepurele	Lep	Ptolemeu
Libra	Balanta	Lib	Ptolemeu
Lupus	Lupul	Lup	Ptolemeu
Lynx	Linxul	Lyn	1690, Firmamentum Sobiescianum, Hevelius
Lyra	Lira	Lyr	Ptolemeu
Mensa	Platoul	Men	1763, Lacaille
Microscopium	Microscopul	Mic	1763, Lacaille
Monoceros	Licornul	Mon	1624, Bartsch
Musca	Musca	Mus	1603, Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Norma	Echerul	Nor	1763, Lacaille
Octans	Octantul	Oct	1763, Lacaille
Ophiucus	Ofiucus	Oph	Ptolemeu
Triangulum	Triunghiul	Tri	Ptolemeu
Triangulum Australe	Triunghiul Austral	TrA	1603 Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Tucana	Tucanul	Tuc	1603 Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Ursa Major	Ursa Mare	UMa	Ptolemeu
Ursa Minor	Ursa Mica	UMi	Ptolemeu
Vela	Velele	Vel	1763, Lacaille, rupta din Argo Navis
Virgo	Fecioara	Vir	Ptolemeu
Volans	Pestele Zburator	Vol	1603, Uranometria, creata de Keyser si de Houtman
Vulpecula	Vulpea	Vul	1690, Firmamentum Sobiescianum, Hevelius

Observații

1. Constelația Hydra este cea mai mare constelație dintre cele 88 pe cerul înstelat.
2. Crucea Sudului este cea mai mica constelație de pe cerul nocturn. Aceasta constelație apare pe drapelurile țărilor: Brazilia, Noua Zeelanda, Australia și Samoa de Vest.
3. Constelația Pegasului este în poziție răsturnată în emisfera nordica, deși în emisfera sudică, primăvara, ea se observă în poziție normală.
4. Cele 13 constelații zodiacale sunt intersectate de planul Sistemului Solar. Văzute de pe Pământ, Luna și toate planetele din Sistemul Solar, exceptând Pluton și Eris, trec prin ele.

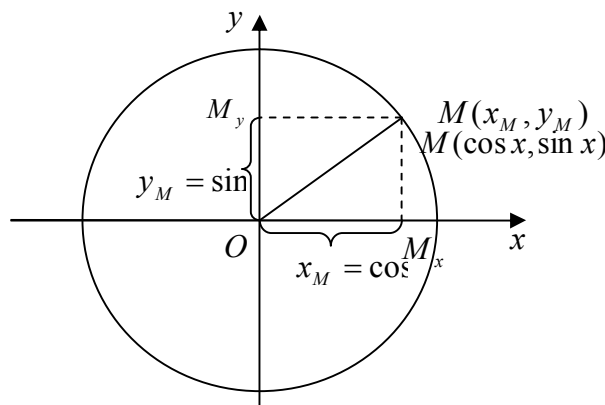
III.2. Elemente de trigonometrie

Din punct de vedere matematic, în măsura în care nu suntem interesați de distanțele reale până la aștri, vom opera doar cu direcțiile pe care aceștia se găsesc față de observator. În acest caz, putem construi o sferă de rază arbitrară și putem echivala în mod trivial "direcțiile" din spațiul tridimensional cu "punctele" acestei sfere. Astfel, formalismul calculelor ce trebuiesc efectuate pentru determinările astronomice se simplifică de la geometria tridimensională carteziană la o geometrie bidimensională sferică.

În cadrul acestei geometrii, "dreptele" sunt înlocuite de cercurile mari de pe suprafața sferei. Pentru calculele astronomice este importantă problema rezolvării triunghiurilor sferice. Pentru aceasta, vor fi demonstrate formulele fundamentale ale trigonometriei sferice, formulele lui Gauss, acesta fiind principalul rezultat al acestei lecții. Aceste formule corespund într-o anumită măsură relațiilor trigonometrice ce determină triunghiurile plane cum sunt teorema sinusurilor sau teorema cosinusului.

Funcțiile trigonometrice sinus și cosinus

Fie cercul trigonometric și $M(x_M, y_M)$ un punct pe cercul trigonometric.



Cercul trigonometric. Sinus și cosinus

În $\triangle OM_xM$ dreptunghic avem:

$$\sin M_x \hat{O}M = \frac{MM_x}{OM} = y_M$$

$$\cos M_x \hat{O}M = \frac{OM_x}{OM} = x_M$$

Notăm $m(M_x \hat{O}M) = t$, deci am obținut $\sin t = y_M$ și $\cos t = x_M$ și $M(\cos t, \sin t)$.

Definiții: 1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin care unui unghi cu măsura t îi corespunde numărul real y_M se numește funcția sinus.

Notăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \sin t$.

2. Funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin care unui unghi cu măsura t îi corespunde numărul real x_M se numește funcția cosinus.

Notăm $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \cos t$.

Proprietăți:

1. Funcțiile sinus și cosinus au domeniul $[-1,1]$, adică $\forall t \in \mathbb{R}$ avem: $-1 \leq \sin t \leq 1$ și $-1 \leq \cos t \leq 1$.
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ avem $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, adică $MM_x^2 + OM_x^2 = OM^2$.
3. Funcția sinus este impară: $\sin(-t) = -\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$.
Funcția cosinus este pară: $\cos(-t) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}$.
4. Funcțiile sinus și cosinus sunt periodice cu perioada $T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $T_p = 2\pi$ se numește perioadă principală.
 $\sin(t + 2k\pi) = \sin t, \forall t \in \mathbb{R}$,
 $\cos(t + 2k\pi) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}$
5. Semnul funcțiilor sinus și cosinus este dat în tabelul:

	Cadran I	Cadran II	Cadran III	Cadran IV
$\sin t$	+	+	--	--
$\cos t$	+	--	--	+

Formule trigonometrice utile

$$\text{Oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \text{ avem } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1)$$

Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{ și} \quad (2)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad (3)$$

Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (4)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (5)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \quad (6)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad (7)$$

Fie x, y astfel încât expresiile următoare au sens. Atunci

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg}(x - y) = \frac{-\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y} \quad (11)$$

Formule trigonometrice pentru unghi dublu:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (12)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (13)$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad (14)$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad (16)$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} \quad (17)$$

Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem

$$|\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \quad (18)$$

Fie x, y astfel încât expresiile următoare au sens. Atunci

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad (20)$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad (22)$$

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \quad (19)$$

Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (23)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \quad (24)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (25)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2} \quad (26)$$

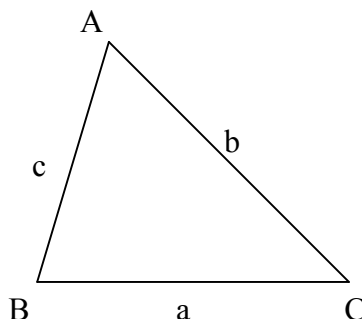
Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor

Teoremă: Fie triunghiul ABC în care notăm $a = BC, b = AC$ și $c = AB$. Atunci sunt adevărate

egalitățile: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$



Demonstrație:

În triunghiul ABC avem $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Se ridică această relație la pătrat și avem:
 $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$ sau $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Corolar (cosinusul unui unghi): În orice triunghi ABC avem
 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ și $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Caracterizarea unui unghi în triunghi

Fie triunghiul ABC . Avem

$$A \text{ este unghi ascuțit} \Leftrightarrow A < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A \text{ este unghi drept} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$A \text{ este unghi obtuz} \Leftrightarrow A > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Teoremă: În orice triunghi ABC avem:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Teoremă (formula medianei): În orice triunghi ABC lungimea medianei din A are expresia

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}. \text{ Similar, avem } m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \text{ și } m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

Teorema sinusurilor: În orice triunghi ABC avem: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, unde R reprezintă raza cercului circumscris.

Formule pentru aria triunghiului

Fie triunghiul ABC în care notăm h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor triunghiului duse din A, B și respectiv C ; cu S notăm aria triunghiului; p – perimetrul; r – raza cercului înscris și R raza cercului circumscris. Avem $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$.

$$S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{Heron})$$

$$S = r \cdot p$$

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

III.3. Numere complexe

Pe mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ se definesc operațiile

adunare: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ asociativă, comutativă, cu elementul neutru $(0, 0)$ și elemente simetrice pentru (a, b) opusele $(-a, -b)$ și

înmulțire: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$ asociativă, comutativă, cu elementul neutru $(1, 0)$

și elementele simetrice pentru $(a, b) \neq (0, 0)$ inversele $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$, iar înmulțirea este distributivă față de adunare.

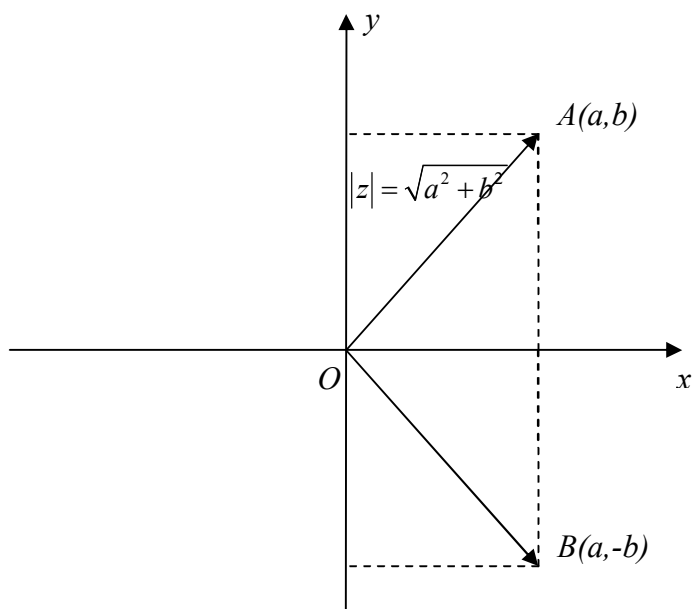
Mulțimea definită mai sus cu operațiile introduse se numește mulțimea numerelor complexe și se notează cu \mathbb{C} .

Elementele acestei mulțimi se numesc numere complexe și se scriu sub formă algebrică astfel: $z = a + bi \in \mathbb{C}$, unde $a = \operatorname{Re}(z)$ se numește parte reală a lui z , $b = \operatorname{Im}(z)$ se numește coeficient al părții imaginare, iar i cu proprietatea $i^2 = -1$ se numește unitate imaginară.

Pentru $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se definește conjugatul $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$ și modulul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Fiecărui număr complex $z = a + bi$ îi corespunde un punct din planul complex xOy notat $A(a, b)$, numit imagine geometrică a lui z și fiecărui punct din planul complex xOy notat $A(a, b)$ îi corespunde un număr complex $z = a + bi$ numit afix. Punctul $A(a, b)$ este localizat în planul complex prin coordonatele carteziane a – abscisă și b – ordonată sau prin vectorul de poziție $\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Conjugatul numărului complex $z = a + bi \in \mathbb{C}$ are ca imagine geometrică punctul din planul complex $B(a, -b)$, care este simetricul față de axa Ox a punctului $A(a, b)$.

Modulul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ reprezintă lungimea vectorului $\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

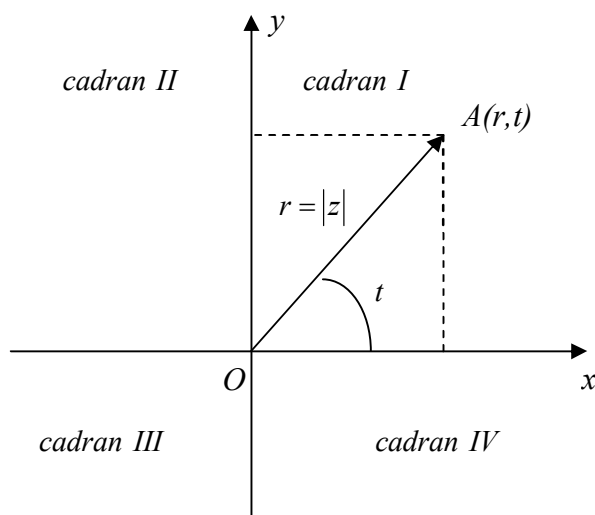


Planul complex. Coordonate carteziane

Punctul $A(a, b)$ mai poate fi localizat în planul complex prin intermediul coordonatelor polare r și t , numite rază polară, respectiv argument polar.

Numărul complex scris sub forma algebrică $z = a + bi$ se mai poate scrie $z = r(\cos t + i \sin t)$, numită forma trigonometrică, unde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ este raza polară, lungimea vectorului

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}, \text{ iar } t = \arg(z) = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, \text{ cadran I} \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}, \text{ cadran II sau III} \\ 2\pi + \arctg \frac{b}{a}, \text{ cadran IV} \end{cases} \text{ este argument polar.}$$



Planul complex. Coordonate polare

Operații cu numere complexe sub formă trigonometrică

Fie numerele complexe sub formă trigonometrică $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$ și $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$.

Avem : Înmulțirea: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)]$;

Puterea: $z^n = [r(\cos t + i \sin t)]^n = r^n (\cos nt + i \sin nt)$;

Împărțirea: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)]$;

Rădăcinile de ordinul n ale lui $z = r(\cos t + i \sin t)$:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right), k = \overline{0, n-1}.$$

Exemplu: Să se rezolve ecuația binomă: $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$.

Se scrie numărul complex $z = -1 + i\sqrt{3}$ sub forma trigonometrică $z = r(\cos t + i \sin t)$, unde

$$r = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \text{ iar argumentul polar este}$$

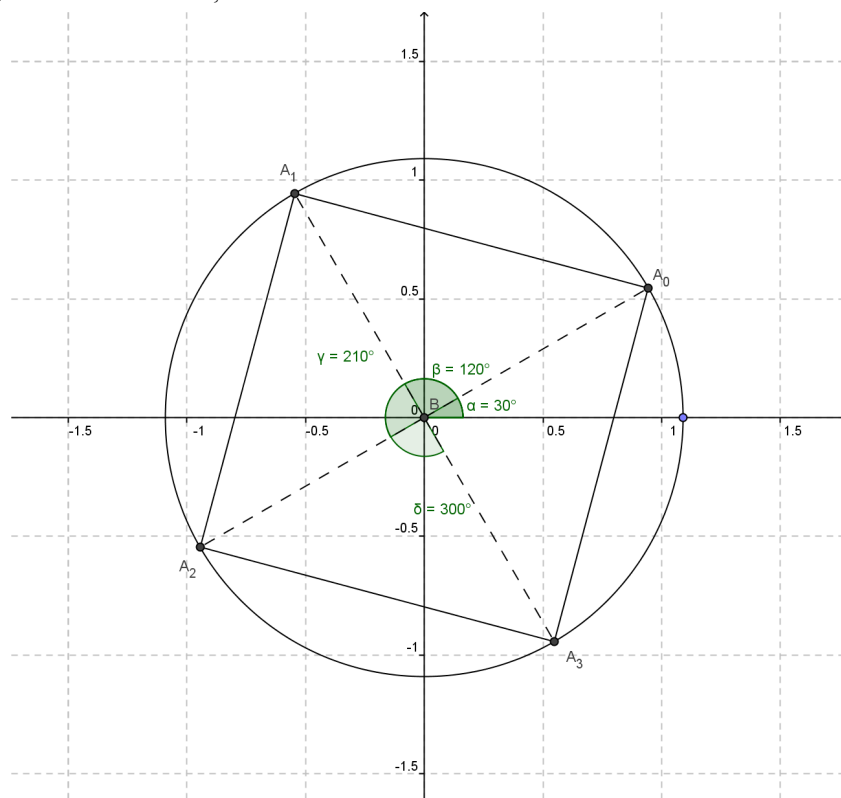
$$t = \pi + \arctg(-\sqrt{3}) = \pi - \arctg \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}. \text{ Deci } z = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Se determină rădăcinile de ordinul 4 ale acestui număr, adică

$$z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right); \quad z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right); \quad z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

Reprezentarea geometrică a soluțiilor este

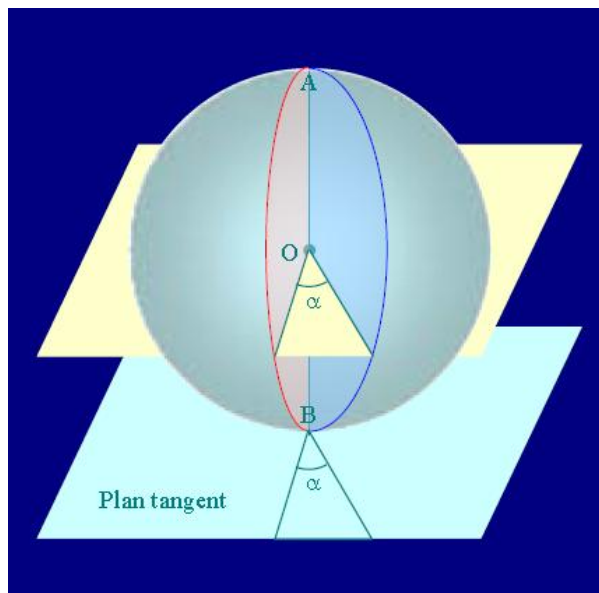


Reprezentarea geometrică a soluțiilor ecuației binome

Punctele A_0, A_1, A_2 și A_3 reprezintă imaginile geometrice ale soluțiilor ecuației binome $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$.

III.4. Trigonometria sferică

Se pune problema determinării coordonatelor unui astru într-un sistem de coordonate dacă se cunosc coordonatele lui într-un alt sistem de coordonate. Pentru rezolvarea acestei probleme, sunt necesare unele cunoștințe de trigonometrie sferică. Fie o suprafață sferică și două puncte A, B pe această suprafață, diametral opuse. Orice plan perpendicular pe diametrul AB al sferei taie planele a două cercuri mari care trec prin A și B după câte o dreaptă care reprezintă câte o latură a unghiului α format de cele două plane. Tangentele într-un pol la ambele cercuri mari sunt perpendiculare pe diametrul AB și deci formează același unghi α . Unghiul α este unghiul dintre cele două cercuri mari

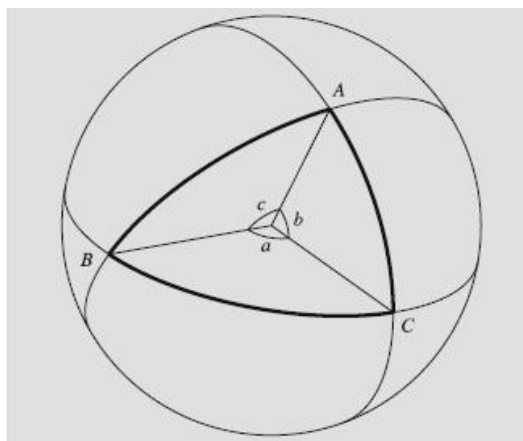


Unghi dintre două cercuri mari

Două cercuri mari împart suprafața sferei în patru biunghiuri sau fusuri sferice. Fiecare din acestea are două laturi egale, de mărime $s = \pi$. Aria acestor fusuri este determinată de raza R a sferei și de unghiul α dintre cercurile mari. Pentru $\alpha = \pi/2$, aria unui fus sferic este un sfert din aria sferei, adică În cazul unui unghi α oarecare, aria unui fus sferic se obține cu ajutorul regulii de trei simplă: $S = 2R^2\alpha$.

Se numește **triunghi sferic** figura de pe suprafața unei sfere mărginită de trei arce de cerc mare care trec fiecare prin două din trei puncte ce nu sunt, două câte două, diametral opuse și nici, toate trei, situate pe același cerc mare.

Cele trei puncte prin care trec arcele de cerc mare se numesc **vârfurile** triunghiului sferic. Laturile triunghiului sferic ABC sunt arcele de cercuri mari $a = BC$, $b = CA$ și $c = AB$. Unghiurile dintre laturi se numesc **unghiurile** triunghiului sferic. Unghiurile dintre laturi se numesc **unghiurile** triunghiului sferic. Triunghiul sferic care are toate laturile și toate unghiurile mai mici decât π se numește **triunghi eulerian**.



Triunghi sferic

Unghiul poliedru cu trei fețe obținut prin unirea centrului unei sfere cu vârfurile unui triunghi de pe suprafața sferei se numește **unghiul triedru** corespunzător triunghiului sferic.

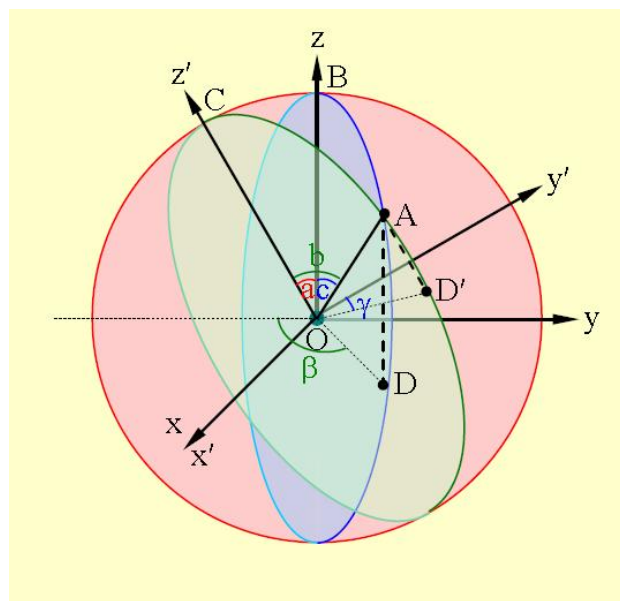
Unghiul triedru corespunzător unui triunghi sferic are următoarele **proprietăți**:

1. Fiecare unghi plan se măsoară cu latura corespunzătoare a triunghiului sferic.
2. Fiecare unghi diedru este egal cu unghiul corespunzător al triunghiului sferic.

Formulele lui Gauss

Rezolvarea triunghiului sferic implică relațiile dintre laturile și unghiurile acestuia. Pentru deducerea lor, se consideră un triunghi sferic ABC , de laturi a, b, c și de unghiuri α, β, γ pe suprafața unei sfere cu centrul O și de rază unitate, raportat la două sisteme de coordonate carteziene cu originea comună O :

- sistemul $Oxyz$, având axa Oz în direcția OB , axa Oy , perpendiculară pe axa Oz , în semiplanul cercului BC , delimitat de axa Oz , care nu cuprinde punctul C , și axa Ox , perpendiculară pe planul yOz , în semispațiul, delimitat de planul yOz , care cuprinde punctul A ;
- sistemul $Ox'y'z'$, având axa Oz' în direcția OC , axa Oy' , perpendiculară pe axa Oz' , în planul cercului BC astfel ca $\angle yOy' = \angle zOz'$ și axa Ox' , perpendiculară pe planul $y'Oz'$, confundată cu axa Ox .



Rezolvarea triunghiului sferic

Fie D și D' proiecțiile vârfului A al triunghiului sferic ABC respectiv pe planele xOy și $x'Oy'$. Coordonatele punctului A în cele două sisteme de coordonate sunt:

$$x = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \sin c = \sin \beta \sin c, \quad (1) \quad x' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \sin b = \sin \gamma \sin b, \quad (4)$$

$$y = \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \sin c = -\cos \beta \sin c, \quad (2) \quad y' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \sin b = \cos \gamma \sin b, \quad (5)$$

$$x = \cos c, \quad (3) \quad z = \cos c, \quad (6)$$

Trecerea de la sistemul $Oxyz$ la sistemul $Ox'y'z'$ se face printr-o rotație cu unghiul $-a$ în jurul axei Ox . Relațiile între coordonatele punctului A în cele două sisteme de coordonate sunt:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos a + z \sin a, \\ z' &= -y \sin a + z \cos a. \end{aligned}$$

Folosind formulele (1)-(6) se obține:

$$\sin \gamma \sin b = \sin \beta \sin c ,$$

$$\cos \gamma \sin b = -\cos \beta \sin c + \cos c \sin a ,$$

$$\cos b = \cos \beta \sin c \sin a + \cos c \cos a .$$

Prin permutări circulare ale simbolurilor, găsim încă două grupuri de formule asemănătoare. Toate aceste formule sunt cunoscute sub numele de formulele lui Gauss.

Diferitele formule ale lui Gauss au denumiri speciale. Formulele de tipul celei de pe prima linie se numesc formulele sinusurilor, formulele similare cu cea de pe linia a doua poartă numele de formulele a cinci elemente, iar formulele de forma celei de pe ultima linie sunt cunoscute sub numele de formulele cosinusurilor.

Formulele sinusurilor sunt:

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha ,$$

$$\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta ,$$

$$\sin c \sin \alpha = \sin a \sin \gamma .$$

Altfel formulele sinusurilor se mai scriu $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} .$

Formulele cosinusurilor laturilor sunt:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha ,$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta ,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma .$$

Formulele cosinusurilor unghiurilor sunt:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a ,$$

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b ,$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c .$$

Formulele a cinci elemente

Formulele a cinci elemente stabilesc relații între cinci din cele șase elemente (trei laturi și trei unghiuri) ale unui triunghi sferic. Ele sunt de două tipuri.

Formulele de primul tip exprimă relații între cele trei laturi și două unghiuri. Acestea au fost obținute anterior:

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$$

$$\sin b \cos \gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta$$

$$\sin c \cos \alpha = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma$$

Formulele de tipul al doilea constituie relații între cele trei unghiuri și două laturi. Ele pot fi deduse aplicând formulele anterioare triunghiului sferic. Calculele sunt similare cu cele de la formulele cosinusurilor. După efectuarea lor, se obține:

$$\sin \alpha \cos b = \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \cos a$$

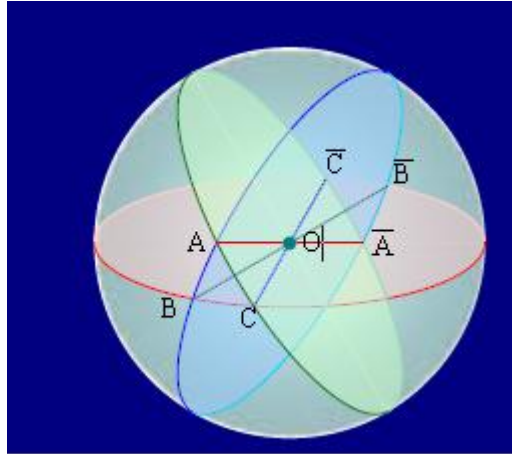
$$\sin \beta \cos c = \cos \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha \cos b$$

$$\sin \gamma \cos a = \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos c .$$

Aria triunghiului sferic

Să determinăm aria unui triunghi sferic ABC , de laturi a, b, c și de unghiuri α, β, γ , definit pe suprafața unei sfere de centru O și de rază R .

Observăm că triunghiul sferic ABC și un triunghi sferic care are o latură comună cu el formează un fus sferic. Aria unui astfel de fus sferic este dată de formula $S = 2R^2\alpha$.



Aria triunghiului sferic

Triunghiurile sferice ABC și $\bar{A}BC$ alcătuiesc un fus sferic de unghi α având aria $S_{ABC} + S_{\bar{A}BC} = 2R^2\alpha$.

Triunghiurile sferice ABC și $A\bar{B}C$ alcătuiesc un fus sferic de unghi β având aria $S_{ABC} + S_{A\bar{B}C} = 2R^2\beta$.

Triunghiurile sferice ABC și $AB\bar{C}$ alcătuiesc un fus sferic de unghi γ având aria $S_{ABC} + S_{AB\bar{C}} = 2R^2\gamma$.

Aria totală a celor trei fusuri sferice este: $3S_{ABC} + S_{\bar{A}BC} + S_{A\bar{B}C} + S_{AB\bar{C}} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma)$.

Datorită simetriei față de centrul sferei, avem $S_{ABC} + S_{\bar{A}BC} + S_{A\bar{B}C} + S_{AB\bar{C}} = 2R^2\pi$, aria unei emisfere.

Deci $2S_{ABC} + 2R^2\pi = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma)$. Se obține $S_{ABC} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, adică $S_{ABC} = 2R^2\varepsilon$.

Teorema: Aria unui triunghi definit pe o sferă este egală cu produsul dintre pătratul razei sferei și excesul sferic al lui.

III.5. Coordonate cerești

Coordonatele astronomice orizontale

sunt coordonate astronomice având la bază planul orizontal al observatorului.

Coordonatele orizontale sunt **înălțimea deasupra orizontului (h)** și **azimutul (A)**.

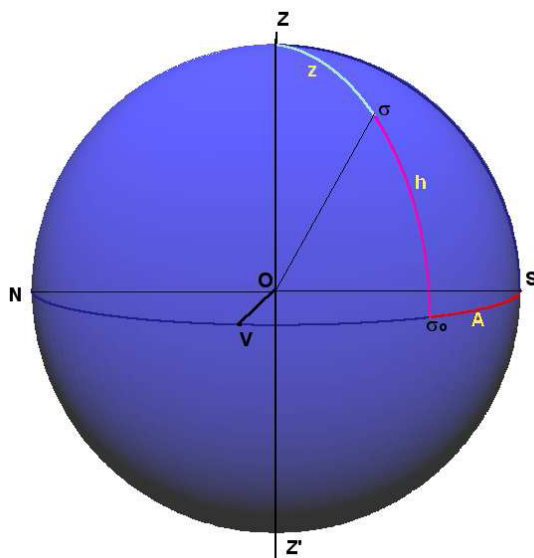
Uneori, în locul înălțimii deasupra orizontului se utilizează **distanța zenitală (z)**.

Înălțimea deasupra orizontului, pentru un punct de pe sfera cerească, este unghiul dintre direcția de la observator spre acel punct și planul orizontal al observatorului. Unghiul este luat cu semnul plus pentru puncte aflate deasupra planului orizontului, și cu semnul minus pentru puncte aflate sub planul orizontului.

Zenitul are înălțimea deasupra orizontului egală cu 90° , iar nadirul are înălțimea -90° .

Distanța zenitală a unui punct este unghiul dintre direcția către punctul respectiv și direcția verticală în sus a observatorului (zenitul observatorului). Distanța zenitală ia valori între 0° (zenit) și 180° (nadir). Distanța zenitală este 90° minus înălțimea deasupra orizontului.

Azimutul unui punct este unghiul dintre proiecția direcției spre punct pe planul orizontului și direcția spre sud. Azimutul este măsurat de la sud spre vest (în sens orar) de la 0° la 360° .



Coordonatele astronomice orizontale

Coordonatele astronomice ecuatoriale

sunt coordonate astronomice având la bază planul ecuatorului terestru.

Coordonatele ecuatoriale sunt **ascensia dreaptă (α)** și **declinația (δ)**. În loc de ascensia dreaptă se poate utiliza **unghiul orar (H)**. Perechea de coordonate rezultate, formată din unghiul orar și declinație, reprezintă **coordonelele orare**.

Declinația unui punct de pe sfera cerească este unghiul dintre direcția de la observator spre acel punct și planul paralel la planul ecuatorului prin punctul în care se află observatorul. Declinația este considerată cu semnul plus dacă punctul este la nord de planul ecuatorului și cu semnul minus dacă se află la sud.

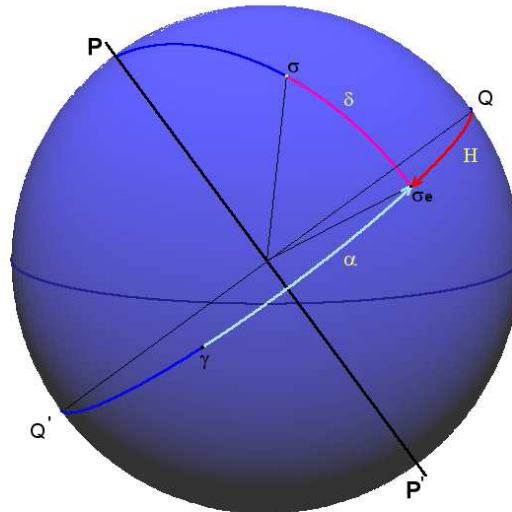
Unghiul orar al unui punct este unghiul format de: semiplanul delimitat de paralela la axa Pământului prin observator și conținând zenitul observatorului și semiplanul delimitat de paralela la axa Pământului prin observator și conținând punctul dat.

Unghiul orar este măsurat de la meridianul superior către vest, luând valori între 0° și 360° . Unghiul orar este specificat adesea în unități de timp, 360° corespunzând la 24 de ore.

Ascensia dreaptă a unui punct este unghiul format de semiplanul delimitat de paralela la axa Pământului prin observator și conținând punctul vernal semiplanul delimitat de paralela la axa Pământului prin observator și conținând punctul dat. Ascensia dreaptă se măsoară de la punctul vernal către est, de la 0° la 360° .

Suma dintre unghiul orar al unui punct și ascensia dreaptă a acelui punct este egală cu unghiul orar al punctului vernal. Unghiul orar al punctului vernal este numit timpul sideral al observatorului.

Neglijând paralaxa (insesizabilă pentru stele cu excepția celor mai apropiate dintre ele), precesia și mișcarea proprie a stelei, ascensia dreaptă și declinația unei stele rămâne fixă în timp. Din cauza precesiei, este necesar să se precizeze la ce moment s-a făcut determinarea coordonatelor.



Coordonatele astronomice ecuatoriale

Coordonate absolute

sunt raportate la axe sau plane fundamentale ale sferei ceresti, independente de locul de observatie. Se folosesc trei sisteme de coordonate absolute:

1) coordonate astronomice ecuatoriale

ascensia dreapta - unghiul dintre cercul orar al punctului vernal si cel al astrului, masurat in ore si fractiuni de ora

declinatia - unghiul făcut de direcția spre astru cu planul ecuatorial ceresc, pozitivă spre polul nord și negativă spre polul sud

2) *coordonate astronomice ecliptice*

sunt coordonate astronomice având la bază planul orbitei Pământului (ecliptica).

Coordonatele ecliptice sunt longitudinea și latitudinea (ecliptice).

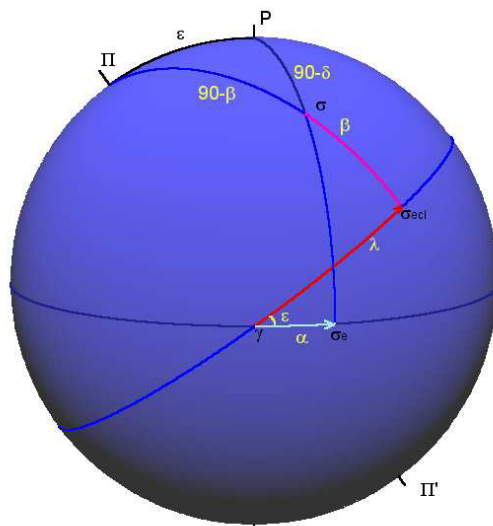
longitudinea ecliptică - unghiul dintre meridianul ecliptic al punctului vernal și meridianul ecliptic al astrului

latitudinea ecliptică - unghiul făcut de direcția spre astru cu planul eclipticii

Latitudinea unui punct de pe sfera cerească este unghiul dintre direcția de la observator spre acel punct și planul paralel la planul orbitei Pământului prin punctul în care se află observatorul. Latitudinea este considerată cu semnul plus dacă punctul este la nord de planul eclipticii și cu semnul minus dacă se află la sud.

Longitudinea unui punct este unghiul format de proiecțiile pe planul eclipticii ale direcțiilor de la observator spre punctul vernal și spre punctul considerat. Longitudinea se măsoară de la punctul vernal spre est, de la 0° la 360° , similar cu ascensia dreaptă.

Longitudinea Soarelui crește în timpul deplasării sale anuale de-a lungul eclipticii.



Coordonate astronomice ecliptice

3) coordonate astronomice galactice - longitudinea si latitudinea galactică

Acest sistem de coordonate astronomice este folosit in astronomia stelara si are drept plan fundamental planul de simetrie al galaxiei. Drept origine a longitudinilor galactice a fost aleasa initial directia spre nodul ascendent al planului galactic - adică ecuatorul ceresc; aceasta origine a fost admisă drept origine pâna în 1959, când a fost înlocuită cu direcția spre centrul galaxiei.

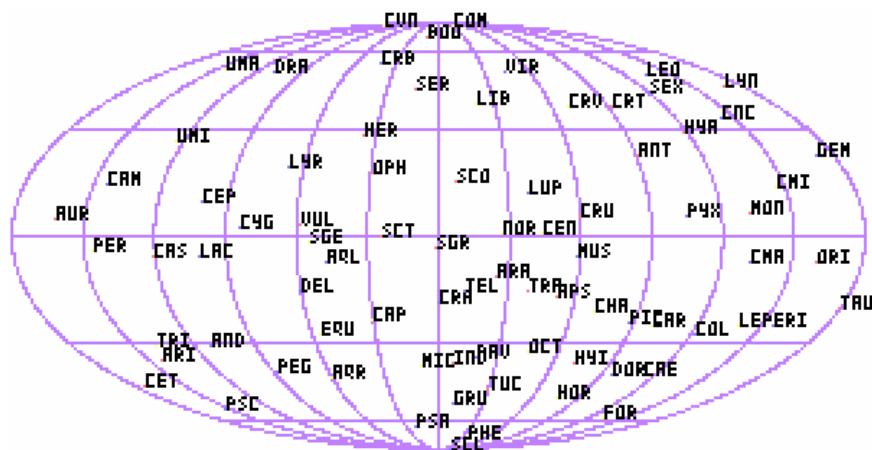
Coordonatele astronomice ecliptice

Coordonatele ecliptice sunt longitudinea și latitudinea (ecliptice).

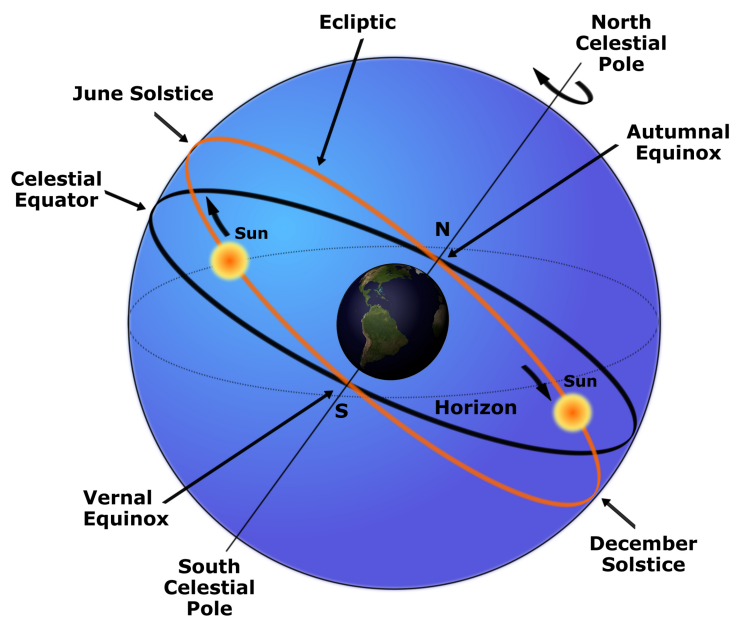
Latitudinea unui punct de pe sfera cerească este unghiul dintre direcția de la observator spre acel punct și planul paralel la planul orbitei Pământului prin punctul în care se află observatorul. Latitudinea este considerată cu semnul plus dacă punctul este la nord de planul eclipticii și cu semnul minus dacă se află la sud.

Longitudinea unui punct este unghiul format de proiecțiile pe planul eclipticii ale direcțiilor de la observator spre punctul vernal și spre punctul considerat. Longitudinea se măsoară de la punctul vernal spre est, de la 0° la 360°, similar cu ascensia dreaptă.

Longitudinea Soarelui crește în timpul deplasării sale anuale de-a lungul eclipticii.



Această hartă stelară cu cerul întreg este desenată în coordonate ceresti galactice, astfel linia orizontală care trece prin centrul hărții reprezintă planul galaxiei noastre iar centrul hărții reprezintă direcția în care se afla centrul galaxiei noastre pe cer, aproape de direcția în care este steaua luminoasă gamma Sgr înspre constelația sagetator. În timp ce steaua gamma Sgr este la numai 96 ani lumină distanță, centrul galaxiei noastre este la vreo 30000 ani lumină distanță, iar galaxia noastră are un diametru de cca 100.000 ani lumină.



Coordonate astronomice

III. 5. Relații între coordonate

Vom folosi următoarele notații pe sfera cerească:

PP' = axa lumii, ZN = verticala locului, EE' = ecuatorul, HH' = orizontul, $PZP'N$ = meridianul locului.

Se numește *latitudine geografică a locului* unghiul format de ZN cu planul ecuatorului și se notează cu φ . Acest unghi se măsoară de la ecuator spre poli, de la 0° la 90° cu semnul + în emisfera nordică și de la 0° la 90° cu semnul - în emisfera sudică.

Dacă S_1 este poziția steii S în momentul culminației superioare, atunci avem:

unghiul $\widehat{EOS_1} = \delta_1$ este declinația steii

unghiul $\widehat{S'OZ} = z_m$ este distanța zenitală în meridian

unghiul $\widehat{EOZ} = \varphi$ este latitudinea geografică.

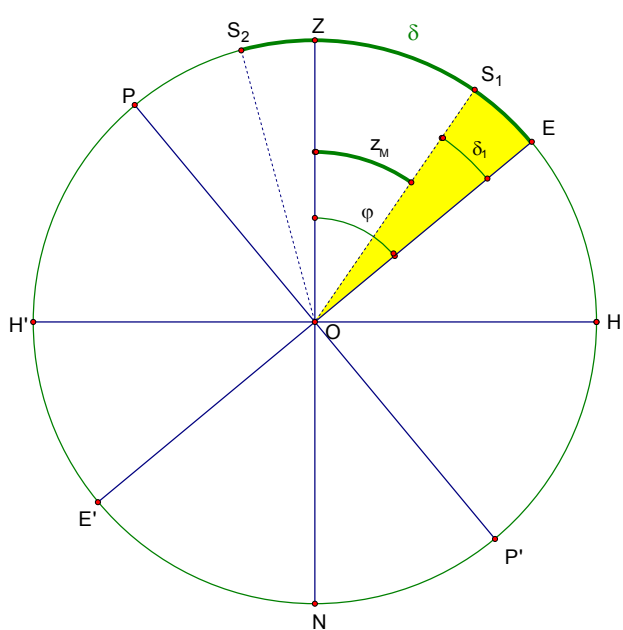
Pentru S_1 se obține $\varphi = \delta_1 + z_m$.

Pentru culminația steii la nord de zenit, în S_2 avem $\varphi = \delta_1 - z_m$.

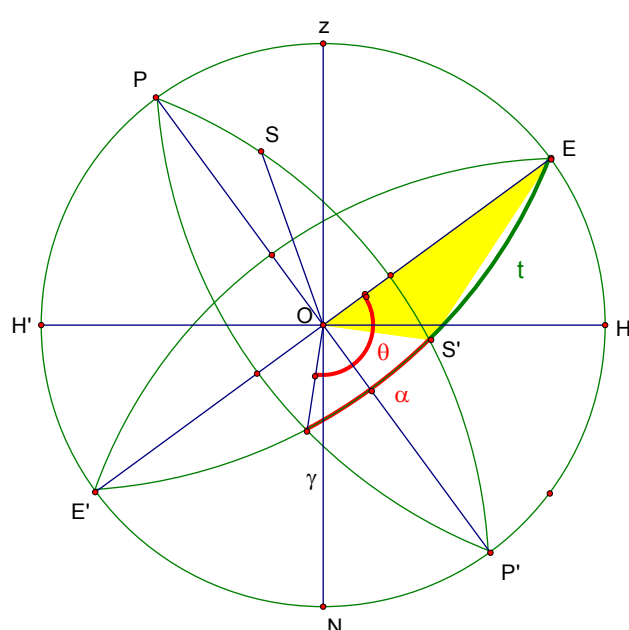
Distanța zenitală în meridian z_m se determină folosind declinația steii (din catalog) și astfel se află latitudinea geografică φ . Apoi folosind formula se află declinația steii.

Vom nota $\widehat{EO\gamma} = \mathcal{G}$ = timpul sideral, $\widehat{EOS'} = t$ = unghi orar al steii, $\widehat{S'O\gamma} = \alpha$ = ascensia steii. Atunci avem $\mathcal{G} = \alpha + t$.

În momentul culminației steii avem $\widehat{EOS'} = t = 0$, de unde $\mathcal{G} = \alpha$. Pentru ascensia unei stele cunoscute (α din catalog) se determină timpul sideral \mathcal{G} . Știind timpul sideral \mathcal{G} se determină ascensia unei stele oarecare.



Relația $\varphi = \delta \pm z_m$



Relația $\mathcal{G} = \alpha + t$

Exerciții

1. Să se calculeze: a) $\sin\left(-\frac{73\pi}{4}\right)$; b) $\cos\left(-\frac{112\pi}{3}\right)$.

2. Să se calculeze $\sin(a+b)$ și $\sin(a-b)$, dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $\sin b = -\frac{5}{13}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Să se demonstreze formulele trigonometrice:

a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

d) $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$;

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

e) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

c) $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$;

f) $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$.

3. Să se demonstreze că în orice triunghi avem:

a) $ab \cos C + ac \cos B + bc \cos A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$;

b) $\frac{bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C}{a \sin A + b \sin B + c \sin C} = R$.

4. Fie $z = \frac{1+i}{2+i} + \frac{3-i}{1+4i} \in \mathbb{C}$. Să se determine $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$.

5. Să se arate că $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ au loc relațiile:

a) $|z_1 \overline{z_2} + 1|^2 + |z_2 - z_1|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$; b) $|1 + z_1 z_2|^2 \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$.

6. Să se simplifice fracția $F = \frac{X^2 + 1}{X^2 - iX + 2}$.

7. Să se rezolve și să se interpreteze geometric ecuațiile:

a) $z^3 + 1 - i\sqrt{3} = 0$,

b) $z^4 + 5i = 0$.

8. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\cos x + i \sin x) \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) \cdot \dots \cdot (\cos nx + i \sin nx) = 1$.

9. Să se arate că într-un triunghi sferic echilateral există relația $\cos a = \frac{\cos A}{1 - \cos A}$.

Indicație: Din ipoteză avem $a = b = c$. Prima formulă a lui Gauss devine $\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos A$. De aici se obține $\cos a (1 - \cos a) = (1 - \cos^2 a) \cos A$, adică $\cos a = (1 + \cos a) \cos A$, deci $\cos a (1 - \cos A) = \cos A$, de unde relația cerută.

10. Să se determine aria triunghiului sferic echilateral care are unghiurile de 75° .

Indicație: Din ipoteză avem: $A = B = C = 75^\circ = \frac{5\pi}{12}$. Excesul sferic este

$$\varepsilon = A + B + C - \pi = 3 \cdot \frac{5\pi}{12} - \pi = \frac{\pi}{4}. \text{ Folosind formula pentru arie se obține } S_{ABC} = \varepsilon R^2 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

11. Știind că aria unui triunghi sferic dreptunghic isoscel este o treime din aria unui cerc mare al sferei, să se calculeze unghiurile triunghiului.

Indicație: Din ipoteză avem: $A = \frac{\pi}{2}$, $B = C$. Atunci aria triunghiului sferic este

$$S_{ABC} = R^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2B - \pi \right) = R^2 \left(2B - \frac{\pi}{2} \right). \text{ Această arie este egală cu } \frac{\pi R^2}{3}, \text{ deci } R^2 \left(2B - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi R^2}{3}. \text{ Se}$$

obține $B = \frac{5\pi}{12}$ sau $B = C = 75^\circ$.

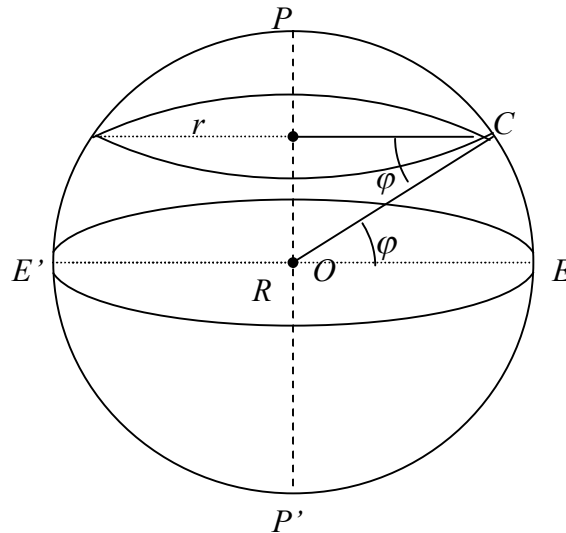
12. Să presupunem că Pământul este sferic. Să se calculeze în metri, lungimea unui arc cu măsura de $2^{\circ}41'24''$, măsurat pe paralela de 45° .

Indicație: Notăm cu R raza Pământului și cu r raza paralelei la latitudinea $\varphi = 45^{\circ}$.

Din figură vom avea $r = R \cos \varphi$. Lungimea arcului de n° pe paralela de latitudine φ este dat de

$$l = 2\pi R \cos \varphi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}, \text{ deci } l = 40000000 \cos \varphi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}.$$

$$\text{În acest caz avem } n^{\circ} = 2^{\circ}41'24'' = 9684'' \text{ și deci } l = \frac{40000000 \cdot \cos 45^{\circ} \cdot 9684}{360 \cdot 60 \cdot 60} = 195,350m.$$



13. Care este ora siderală la care steua α din constelația Lyra atinge înălțimea de 30° deasupra orizontului de latitudine $\varphi = 45^{\circ}$. Coordonatele stelei sunt: $\alpha = 18^h36^m56^s$, $\delta = 38^{\circ}47'01''$. Se dau $\cos 38^{\circ}47'01'' \approx 0,7795$ și $\cos 84^{\circ}50' \approx 0,1028$.

Indicație: Avem $z = 90^{\circ} - h$, și pentru că $h = 30^{\circ}$, rezultă că $z = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$.

Din formula trigonometrică

$$\cos z = \cos(90 - \delta) \cos(90 - \varphi) + \sin(90 - \delta) \sin(90 - \varphi) \cos H \text{ și}$$

$$\cos H = 0,1028, \text{ unde } H = 84^{\circ}50' \text{ este unghiul orar al stelei.}$$

Avem că Timpul sideral = ascensiune dreaptă \pm unghiul orar,

$$\text{deci } t = \alpha \pm H \Rightarrow t_1 = 0^h9^m36^s \text{ și } t_2 = 13^h4^m16^s.$$

14. Un observator din Giurgiu măsoară pentru steua Arcturus distanța zenitală meridiană $z_m = 24^{\circ}29'$.

Din Anuarul Observatorului din București află că declinația acestei stele este de $19^{\circ}24'$. Care este latitudinea geografică a locului de observație?

Indicație: Se folosește relația $\varphi = \delta + z_m = 19^{\circ}24' + 24^{\circ}29' = 43^{\circ}53'$.