$360°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়। তখন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাথে এমন কোণ সংযুক্ত থাকে যাকে $90° \pm \theta$, বা $180° \pm \theta$, বা $360° - \theta$ আকারে প্রকাশ করে অনুচ্ছেদ 7.1.9 এর নিয়মানুযায়ী অনুপাতটিকে θ (ধনাত্মক এবং সূক্ষ্মকোণ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ । $\sin(3825°) = \sin(360° \times 10 + 225°) = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর ঃ $\cos 18° + \cos 162° + \cos 234° + \cos 1386°$.

সমাধান ঃ $\cos 18° + \cos 162° + \cos 234° + \cos 1386°$

$$= \cos 18° + \cos(180° - 18°) + \cos(270° - 36°) + \cos(360° \times 4 - 54°)$$
$$= \cos 18° - \cos 18° - \sin 36° + \cos 54°$$
$$= -\sin 36° + \cos(90° - 36°) = -\sin 36° + \sin 36° = 0 \cdot$$

উদাহরণ 2. যদি $x = r\sin(\theta + 45°)$ এবং $y = r\sin(\theta - 45°)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = r^2$.

সমাধান ঃ আমরা পাই $x^2 + y^2 = r^2\sin^2(\theta + 45°) + r^2\sin^2(\theta - 45°)$

$$= r^2\{\sin^2(90° + \theta - 45°) + \sin^2(\theta - 45°)\}$$
$$= r^2\{\cos^2(\theta - 45°) + \sin^2(\theta - 45°)\} = r^2.$$

উদাহরণ 3. মান নির্ণয় কর ঃ $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

সমাধান ঃ $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

$$= \cos^2\frac{\pi}{12} + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{12} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \left\{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 + \cos^2\frac{\pi}{12}$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} + \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\left\{\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right\} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2\left\{\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}\right\} + 1 = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর ঃ $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$.

সমাধান ঃ নির্ণেয় মান $= \cot 9° \cot 27° \cot 45° \cot 63° \cot 81°$ [$\because \pi = 180°$]

$$= \cot 9° \cot 27° .1. \cot(90° - 27°) \cot(90° - 9°)$$
$$= \cot 9° \cot 27° \tan 27° \tan 9° = 1 .$$ [$\because \cot 9° \tan 9° = 1$ ইত্যাদি]

উদাহরণ 5. যদি $\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \frac{3}{10}.$$ [য. '১২]

সমাধান ঃ আমরা পাই, $\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$

[$\because \frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$, অর্থাৎ কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং এ চতুর্ভাগে সাইন এবং কোসেকেন্ট ছাড়া অন্যান্য অনুপাত ঋণাত্মক]

অতএব, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{5/13}{-12/13} = -\dfrac{5}{12}$.

এখন $\dfrac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \dfrac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta} = \dfrac{-\frac{5}{12} - \frac{13}{12}}{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}} = \dfrac{-\frac{18}{12}}{-\frac{25}{5}} = \dfrac{3}{10}$.

প্রশ্নমালা 7.1

1. মান নির্ণয় কর ঃ
(i) $\sin 675°$, (ii) $\tan 1305°$, (iii) $\sec 510°$, (iv) $\operatorname{cosec} 765°$, (v) $\cot 3750°$, (vi) $\sin(-1395°)$, (vii) $\sec(-2580°)$, (viii) $\cot(-1530°)$, (ix) $\tan(-1590°)$.

2. মান নির্ণয় কর ঃ $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{49\pi}{6}\right)$ এবং $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{19\pi}{3}\right)$.

3. মান নির্ণয় কর ঃ
(i) $\cos 198° + \sin 432° + \tan 168° + \tan 12°$;
(ii) $\cos 420° \sin(-300°) - \sin 870° \cos 570°$;
(iii) $\sin 780° \cos 390° - \sin 330° \cos(-300°)$;
(iv) $\tan\frac{17\pi}{4} \cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + \sec\left(-\frac{34\pi}{3}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

6. মান নির্ণয় কর ঃ
(i) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$;
(ii) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$; [কু. '১৬; ব. '১০; য. '১১]
(iii) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$; [ঢা. '১৩]
(iv) $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$.
(v) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$. [য. '০৬]

7. যদি n এর মান যে কোন পূর্ণ সংখ্যা হয় , তবে দেখাও যে, $\cos\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{4}\right)$ এর মান সব সময় $\frac{1}{\sqrt{2}}$ হয়।

8. যদি $\alpha = \frac{11\pi}{4}$ হয়, তবে $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - 2\tan\alpha - \sec^2\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

9. (i) যদি $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ এবং $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ হয়, তবে $\tan\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। [কু. '১৬]
(ii) যদি $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হয়, তবে $\dfrac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান কত?
(iii) $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে, $\sin(-\theta) + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর। [য. ২০১৯]
(iv) $\tan\theta = \frac{b}{a}$ হলে, $\dfrac{a\cos\theta + b\sin\theta}{a\cos\theta - b\sin\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। [ব. ২০১৯]

10. **প্রমাণ কর :**

(i) $\cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + \dots \dots \dots + \cos^2 80° = 4$,

(ii) $\sin^2 15° + \sin^2 20° + \sin^2 25° + \dots \dots \dots + \sin^2 75° = \frac{13}{2}$.

(iii) $\sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + \dots \dots \dots + \sin^2 177° = 15$.

11. **প্রমাণ কর :** $\sin\theta + \sin(\pi + \theta) + \sin(2\pi + \theta) + \dots \dots \dots + \sin(n\pi + \theta)$ $= \sin\theta$, বা 0; যখন n যথাক্রমে জোড় ও বিজোড় সংখ্যা ।

12. যদি $ABCD$ চতুর্ভুজের কোণগুলি যথাক্রমে A, B, C, D হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $\cos\frac{1}{2}(A + C) + \cos\frac{1}{2}(B + D) = 0$; **(ii)** $\sin(A + B + C) + \sin(A + B + C + 2D) = 0$

13. (i) যদি $\theta = \frac{\pi}{20}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot\theta . \cot 3\theta . \cot 5\theta . \cot 7\theta \dots \dots \cot 19\theta = -1$.

[বুয়েট '১১-'১২]

(ii) যদি $\theta = \frac{\pi}{36}$ হয়, তবে $\sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta + \dots\dots\dots + \sin^2 15\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

[বুয়েট '১৩-'১৪]

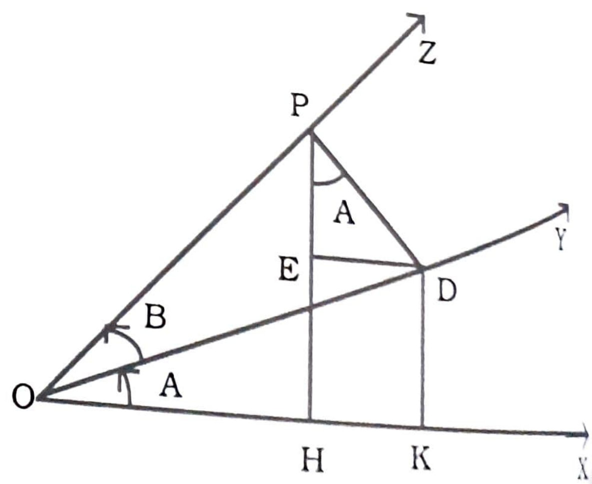
7.2. যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (*Trigonometrical ratios of compound angle*)

যৌগিক কোণ (*compound angle*) ঃ দুই বা ততোধিক কোণের বীজগণিতীয় যোগফলকে যৌগিক কোণ বলা হয় । যেমন ঃ $A + B, A - B, A + B - C, A - B - C$ ইত্যাদি যৌগিক কোণ।

7.2.1. সূত্র ঃ A এবং B কোণদ্বয় ধনাত্মক ও সূক্ষ্ম এবং $(A + B) < 90°$ হলে,

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ এবং $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান, OX থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতক্রমে ঘুরে $\angle XOY = A$ কোণ উৎপন্ন করে এবং ঐ একই রশ্মি আরও অধিক দূর একই দিকে অগ্রসর হয়ে $\angle YOZ = B$ কোণ উৎপন্ন করল। তাহলে, $\angle XOZ = A + B$.



এখন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান, OZ এর উপর একটি বিন্দু P থেকে OX এবং OY এর উপর যথাক্রমে PH এবং PD লম্বদ্বয় আঁকি। আবার D বিন্দু থেকে OX এবং PH এর উপর যথাক্রমে DK এবং DE লম্বদ্বয় আঁকি। তাহলে, স্পষ্টতঃ

$\angle DPE = 90° - \angle PDE = \angle EDO = \angle A$.

এখন POH সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই

$$\sin(A + B) = \frac{PH}{OP} = \frac{EH + PE}{OP} = \frac{DK + PE}{OP} = \frac{DK}{OP} + \frac{PE}{OP} = \frac{DK}{OD} \cdot \frac{OD}{OP} + \frac{PE}{PD} \cdot \frac{PD}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos\angle DPE . \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$\therefore$ **$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.**

পুনরায় $$\cos(A + B) = \frac{OH}{OP} = \frac{OK - HK}{OP} = \frac{OK - DE}{OP}$$

$$= \frac{OK}{OP} - \frac{DE}{OP} = \frac{OK}{OD} \cdot \frac{OD}{OP} - \frac{DE}{PD} \cdot \frac{PD}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin\angle DPE . \sin B = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$\therefore$ **$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.**