CCCC

SSSS

Seminar 1

Mulțimi. Probleme de numărare

1. $A_1 = \{69, 169, 269\}$

$A_2 = \{1, 7, 9\}$

$A_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 17\}$

$A_4 = \{1, 3, 5, 7\}$

$A_5 = \{14, 21, 28\}$

$A_2 \cap A_4 = \{1, 7\}$

$A_1 \setminus A_4$

$A \subseteq B \iff$ orice x din A se găsește în B

!! $A = B \iff A \subseteq B$ și $B \subseteq A$!!

2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{a+1}{2a+1}, a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\}$

$B = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Dem. că $A = B$

Sol: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$

Fie $y \in A$. Atunci $\exists\, a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ a.î. $y = \frac{a+1}{2a+1}$

Vrem să dem. că $y \neq \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a+1}{2a+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a+2 = 2a+1 \Rightarrow 1 = 0$ (F) deci $y \neq \frac{1}{2}$

Prin urmare $y \in B$

Fie $y \in B$. Atunci $y \neq \frac{1}{2}$.

$y = \frac{a+1}{2a+1} \Leftrightarrow 2ay + y = a+1 \Leftrightarrow a(2y-1) = 1-y \Leftrightarrow a = \frac{1-y}{2y-1}$

$a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1-y}{2y-1} \Rightarrow 1-2y = 2-2y \Leftrightarrow 1 = 0$ (F)

deci $a = \frac{1-y}{2y-1} \neq -\frac{1}{2}$

Putem alege $a = \frac{1-y}{2y-1} \neq -\frac{1}{2}$ și y se scrie sub forma $y = \frac{a+1}{2a+1}$

deci $y \in A$

Din dubla incluziune ($A \subseteq B$ și $B \subseteq A$) $\Rightarrow A = B$

3. Dem. că $(3\mathbb{N}+2) \cap (5\mathbb{N}+1) = 15\mathbb{N}+11$

$3\mathbb{N}+2 = \{n \mid n = 3K+2, K \in \mathbb{N}\}$

$5\mathbb{N}+2 = \{n \mid n = 5K+2, K \in \mathbb{N}\}$

Fie $x \in (3\mathbb{N}+2) \cap (5\mathbb{N}+1)$

$x = 3K_1 + 2$

$x = 5K_2 + 1$, $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$

$3K_1 + 2 = 5K_2 + 1$

$3K_1 = 5K_2 - 1 \Rightarrow 3 \mid (5K_2 - 1) \Rightarrow K_2 = 3l + 2,\ l \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5(3l+2) + 1 = 15l + 11 \Rightarrow x \in 15\mathbb{N}+11$

Fie $x \in (15\mathbb{N}+11) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 15K + 11,\ K \in \mathbb{N}$

$15K + 11 = 3(5K+3) + 2 \in 3\mathbb{N}+2$

$15K + 11 = 5(3K+2) + 1 \in 5\mathbb{N}+1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (3\mathbb{N}+2) \cap (5\mathbb{N}+1)$

1/4 **Bibliografie:**

- C. Băețica, S. Dăscălescu, C. Boboc, G. Mincu, prob. de algebră
- ed. uni. buc

4. Dem. că: i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Sol: i) „$\subseteq$" Fie $x \in A \cup (B \cap C)$.

Caz 1: $x \in A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{array}\right| \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Caz 2: $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ și $x \in C$

$\left.\begin{array}{l} x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \\ x \in C \Rightarrow x \in A \cup C \end{array}\right| \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

„$\supseteq$" Fie $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Caz 1: $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

Caz 2: $x \notin A \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

ii) „$\subseteq$" Fie $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ și $x \in B \cup C \left\langle \begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right.$

Caz 1: $x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Caz 2: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

„$\supseteq$" Fie $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

~~Caz 1: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$~~

~~Caz 2: $x \in A \cap C$~~

Caz 1: $x \in A \cap B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A \\ \text{și} \\ x \in B \Rightarrow x \in B \cup C \end{array}\right| \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

Caz 2: $x \in A \cap C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A \\ \text{și} \\ x \in C \Rightarrow x \in B \cup C \end{array}\right| \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

5. O închisoare cu n celule are câte o cheie diferită pt. fiecare celulă. Un vizitator inteligent spune că din 21 de încercări va deschide toate ușile. Det. n

Sol: ~~$n+n-1+n-2+\dots+n-n=$~~

$$n+(n-1)+(n-2)+\dots+1=21$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=21 \,|\cdot 2 \Rightarrow n(n+1)=42 \Rightarrow \underline{n=6}$$

Indicatorul lui Euler:

$$\varphi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*,\ \varphi_{(n)}=\begin{cases}1, & n=1\\ \text{nr. de nr. naturale nenule mai mici strict decât } n \text{ prime cu } n, & n\geq 2\end{cases}$$

$\varphi(180)=48$

$\varphi(30)=8$

$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}$ - descompunerea în fac. primi

$$\varphi_{(n)}=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)(\dots)\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

$$\varphi_{(30)}=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$=30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=8$$

$$\varphi_{(180)}=180\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=180\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=48$$

$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ și $B\subseteq A$

$x\in A\Rightarrow\dots\Rightarrow x\in B$

$x\in B\Rightarrow\dots\Rightarrow x\in A$

Obs! În cazuri foarte rare, dacă exercițiul este simplu, putem dem. direct că $A=B$

$x\in A\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow x\in B$

ex: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A$ și $(x \in B$ sau $x \in C) \iff (x \in A$ și $x \in B)$ sau

sau $(x \in A$ și $x \in C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

CCCC <u>Seminar săpt. 3</u>

SSSS

1. Det. toate mulțimile A și B cu urmt. propr.:

- $A \setminus B = \{1, 3\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A \cap B \nsubseteq \{3, 4, 5\}$

<u>Sol.</u>: $A \setminus B = \{1, 3\}$ obținem că $\{1, 3\} \subseteq A$ și $1 \notin B$ și $3 \notin B$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \nsubseteq \{3, 4, 5\} \\ A \setminus B = \{1, 3\}, 1 \notin B \end{array}\right| \Rightarrow A \cap B = \{2\} \Rightarrow 2 \in A \text{ și } 2 \in B$$

~~Cazul 1) A = {1, 2, 3}~~

~~B ⊇ {2}~~

Cazul 1) $4 \in B$, $4 \notin A$, $5 \in B$, $5 \notin A$

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 4, 5\}$

Cazul 2) $4 \in B$, $4 \in A$, $5 \in B$, $5 \notin A$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{2, 4, 5\}$

Cazul 3) $5 \in A$, $5 \in B$, $4 \in B$, $4 \notin A$

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ $B = \{2, 4, 5\}$

Cazul 4) $4 \in B$, $4 \in A$, $5 \in B$, $5 \in A$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 4, 5\}$

$B = \{2, 4, 5\}$ la toate cazurile

2. Câte submulțimi are o mulțime cu n elemente?

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

~~$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n =$~~

$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad : \quad \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^n$

fie 0 sau 1, 0 sau 1, ..., 0 sau 1

3. Dem. urmt.

a) $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$

b) $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

Sol: a) „$\subseteq$"

Fie $x \in C_E(A \cup B)$ ~~$\Leftrightarrow x \in E \setminus (A \cup B)$~~

$\Rightarrow x \in E$ și $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ și $x \notin B$

$\left.\begin{matrix} x \in E \\ x \notin A \end{matrix}\right\} x \in C_E(A)$

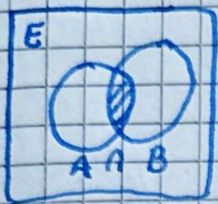
$\left.\begin{matrix} x \in E \\ x \notin B \end{matrix}\right\} x \in C_E(B)$

$\Rightarrow x \in C_E(A) \cap C_E(B)$

„$\supseteq$" $x \in C_E(A) \cap C_E(B) \Rightarrow x \in C_E(A)$ și $x \in C_E(B)$

$x \in C_E(A) \Rightarrow x \in E$ și $x \notin A$
$x \in C_E(B) \Rightarrow x \in E$ și $x \notin B$
$\Rightarrow x \in E$ și $x \notin A \cup B \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in C_E(A \cup B)$

b) „$\subseteq$": $x \in C_E(A \cap B) \Rightarrow x \in E$ și $x \notin A \cap B \Rightarrow$ $\Rightarrow$ pt. fiecare caz.



$\Rightarrow x \in E$ și ($x \notin A$ sau $x \notin B$)

Caz. 1) $x \in E$ și $x \notin A \Rightarrow x \in C_E(A)$
2) $x \in E$ și $x \notin B \Rightarrow x \in C_E(B)$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in C_E(A) \cup C_E(B)$

„$\supseteq$": $x \in C_E(A) \cup C_E(B) \Rightarrow$ $x \in C_E(A)$ sau $x \in C_E(B)$

Caz. 1) $x \in C_E(A) \Rightarrow x \in E$ și $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in C_E(A \cap B)$

2) $x \in C_E(B) \Rightarrow$ —"—

Din dublă incluziune $\Rightarrow C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

4. Dem. că $2^n \geq n^2$, $\forall n \geq 4$

Sol: Prin inducție:

$P(n): 2^n \geq n^2$, $n \geq 4$

$P(4): 2^4 \geq 4^2 \Leftrightarrow 16 \geq 16$ (A)

Presupunem că $P(k)$ adevărată

$P(k): 2^k \geq k^2$, $k \geq 4$

$2^k \geq k^2 \quad | \cdot 2$

$2^{k+1} \geq 2k^2$

$2k^2 \geq (k+1)^2 \Leftrightarrow 2k^2 \geq k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow k^2 \geq 2k + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 1 \geq 0$ (A)

$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$2^{k+1} \geq 2k^2 \geq (k+1)^2 \Rightarrow 2^{k+1} \geq (k+1)^2 \Rightarrow P(k+1)$ este adev.

Conform metodei ind. mat. $2^n \geq n^2$, $\forall n \geq 4$

5\. Dem. că $P_{(n)} = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$

Principiul includerii și excluderii (PIE)

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Sol.:

Evident $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \Rightarrow P_{(2)}$ adevărată

Presupunem $P(k)$ adevărată

$P_{(k)} = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| \ldots$ -//- , $k \geq 2$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|\underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}_{C} \cup \underbrace{A_{k+1}}_{D}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right| =$$

$$= \underbrace{\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right|}_{P(k)} + |A_{k+1}| - \underbrace{\left|\bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{(A_i \cap A_{k+1})}_{B_i}\right|}_{P(k)}$$

6\. În urma unui chestionar adresat la 100 de copii, avem urmt. info:
- 68 joacă fotbal
- 40 joacă handbal
- 13 joacă volei
- 11 joacă fotbal și handbal
- 8 j. handbal și volei
- 9 j. fotbal și volei

Câți copii practică toate cele trei sporturi?

A_1 = mult. copiilor care joacă fotbal , $|A_1| = 68$

A_2 = -//- handbal , $|A_2| = 40$

A_3 = -//- volei , $|A_3| = 13$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = ?$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| =$

$= |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 100 - 68 - 40 - 13 + 11 + 8 + 9 = 7$

CCCC Seminar săpt. 4
SSSS

Din Seminarul 1:

$U_c(17^{103}) = ?$ → privim modulo 10

Teorema lui Euler:

Dacă $(a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

$17^{103} \equiv \ldots \equiv \ldots \equiv \ldots \equiv \ldots \pmod{10}$

$17^{103} \equiv 7^{103}$

$7^{\varphi(10)} = 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$17^{103} \equiv 7^{103} \overset{\text{Euler}}{\equiv} 7^3 \equiv \underline{3} \pmod{10}$

Def: O funcție este un triplet (A, B, f) unde A este o mulțime num. domeniu, B -||- codomeniu, iar f este o „lege" care asociază oricărui elem din A un unic elem. din B

$f: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}$, $f(\hat{x}) = x$ nu este funcție $f(\hat{0}) = 0$
$= 4$
$= 8$
$\vdots$

Def: Fie $f: A \to B$ o funcție. Spunem că f este injectivă dacă:

$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Caracterizare: f injectivă dacă:

$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

f inversabilă $\Leftrightarrow$ f bij.

f nu este inj. $\Leftrightarrow$

$\exists x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$

Def: Fie $f: A \to B$ o funcție. Spunem că f este surjectivă dacă:

$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad f(x) = y$

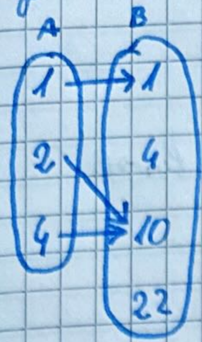
Caract: $Im(f) = B$

f nu e surj. $\Leftrightarrow$

$\exists y \in B \quad \forall x \in A \quad f(x) \neq y$

Injectivă intuitiv: „duce elem. diferite în elem. diferite" || ∩ G_f în cel mult 1 pct.

Surj. intuitiv: „umple codomeniul" || ∩ G_f în cel puțin 1 pct.



- nici inj. și nici surj.

1. Fie $f: A \to A$ cu A finită. Dem. că urmt. afirmații sunt echivalente:

i) f este inj. $\qquad A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $|A| = n$

ii) f este surj.

iii) f este bijectivă

Sol.: „i) => ii)" f injectivă

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |Im(f)| = n \\ Im(f) \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow Im(f) = A \Rightarrow f \text{ este surjectivă}$$

„ii) => iii)" f este surjectivă

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow Im(f) = A \\ \Rightarrow |Im(f)| = n \Rightarrow f \text{ este inj.} \end{array}\right) \Rightarrow f \text{ bijectivă}$$

„iii) => i)" evident

2. Fie A, B mulțimi finite. Det. nr. de funcții de la A la B

Sol.: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$

$f(a_1) \to m$ posibilități

$f(a_2) \to$ -||-

⋮

$f(a_n) \to$ -||-

$\Rightarrow m^n$ funcții, unde $m^n = |B|^{|A|}$

3. Fie A, B mulțimi finite. Det. nr. de funcții injective $f: A \to B$

Sol.: $A = \{a_1, \dots a_n\}$

$B = \{b_1, \dots b_m\}$

Dacă $n > m$ nu există nicio funcție inj. $f: A \to B$

Dacă $n \leq m$:

$f(a_1) \to m$ posib.

$f(a_2) \to m-1$ posib.

$\vdots$

$f(a_n) \to m-n+1$ posib.

$$(m-n+1)\dots(m-1)m = \frac{m!}{(m-n)!} = A_m^n$$

4. Fie -//-. Det. -//- bijective

Sol.: $A = \{a_1, \dots a_n\}$

$B = \{b_1, \dots b_m\}$

Dacă $n \neq m$ nu există -//-

Dacă $m = n$:

$f(a_1) \to m$ pos.

$f(a_2) \to m-1$ pos.

$\vdots$

$f(a_m) \to 1$ pos.

$$m(m-1)\dots 1 = m! = A_m^m$$

5. Fie -//-. Det. -//- surj.

Sol.: A = -//-

B = -//-

Dacă $m > n$ nu există -//-

Dacă $m \leq n$ există $m^n - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} C_m^k (m-k)^n$ funcții surj.

Se numără funcțiile care nu sunt surj.

6. Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_{(x)} = \{x\sqrt{2}\}$. Verificați dacă f este injectivă

Sol.: Fie $x, y \in \mathbb{N}$ a.î. $f_{(x)} = f_{(y)}$

$f_{(x)} = f_{(y)} \Rightarrow \{x\sqrt{2}\} = \{y\sqrt{2}\} \Rightarrow$

$x\sqrt{2} - [x\sqrt{2}] = y\sqrt{2} - [y\sqrt{2}] \Rightarrow$

$x\sqrt{2} - y\sqrt{2} = [x\sqrt{2}] - [y\sqrt{2}] \Rightarrow$

$$\underbrace{(x-y)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{2} = \underbrace{[x\sqrt{2}] - [y\sqrt{2}]}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ este inj

"$\mathbb{Z} \cdot \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{Q}} \neq \mathbb{Z}$" decât atunci când "$\mathbb{Z} \cdot \sqrt{2}$" $= 0$

7. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{(x)} = x^2$.

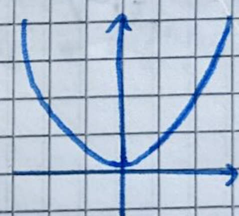
a) Verificați dacă f inj.

b) Verificați dacă f surj.

c) Verificați dacă f bij.

d) Det. inversa lui f, dacă există

Sol.: a) $f_{(-3)} = f_{(3)} = 9 \Rightarrow f$ nu este inj.

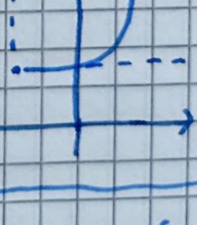


b) $f_{(x)} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

deci, de exemplu, $f_{(x)} \neq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$-1 \in$ codom$_f$ $\Big| \Rightarrow f$ nu e surj.

c) evident ; d) evident, f nu e bij $\Rightarrow f$ nu e inversabilă

8. Fie $f: \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \to \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$, $f_{(x)} = x^2 + x + 1$



a) -//- b) -//- c) -//- d) -//-

Sol.: a) Fie $x, y \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ a.î. $f_{(x)} = f_{(y)}$

$f_{(x)} = f_{(y)} \Rightarrow x^2 + x + 1 = y^2 + y + 1 \Rightarrow$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$x + \frac{1}{2} = \pm\left(y + \frac{1}{2}\right)$
$x + \frac{1}{2} \geq 0$ $\Big| \Rightarrow x + \frac{1}{2} = y + \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = y \Rightarrow f$ inj.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

forma canonică

b) Căutăm un $x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ a.î. $f_{(x)} = y$

$f_{(x)} = y \Leftrightarrow$

$x^2 + x + 1 = y \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = y \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = y - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow x+\frac{1}{2} = \pm\sqrt{y-\frac{3}{4}} \\ x + \frac{1}{2} \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \sqrt{y - \frac{3}{4}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + \sqrt{y-\frac{3}{4}}$$

$f\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}\right) = \text{calcule} = y \Rightarrow f$ surj.

c) evident

d) $g : \left[\frac{3}{4}, \infty\right) \to \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$, $g_{(x)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$

Din <u>def</u>: Fie $f : A \to B$ o funcție. Spunem că f inversabilă dacă $\exists\, g : B \to A$ o funcție a.î. $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f = 1_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$g \circ f = g(f_{(x)})$

$f \circ g = 1_{\left[\frac{3}{4}, \infty\right)}$ $\quad g \circ f = 1_{\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)}$ $\quad$ TEMĂ

CCCC
SSSS

Seminar săpt. 5

Mulțimi numărabile. Relații de echivalență

Mulțimi
- finite, de forma $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — $\emptyset$
- infinite
  - numărabile
  - nenumărabile

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, [a, b], (a, b), [a, b), (a, b], \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \dots$

Numărabile: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Nenumărabile: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, [a, b], (a, b), [a, b), (a, b], \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1. Fie $B = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A\text{-inversabilă}\}$

$f: B \to \mathbb{R}^*$, $f(A) = \det(A)$

a) Verificați dacă f-inj.

b) —— // —— f-surj.

c) —— // —— f-inj.

d) Det. inversa lui f dacă există.

e) Este B numărabilă? Justificați

Sol: a) $f(I_2) = f\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ nu este inj.

b) $\forall y \in \mathbb{R}^*$ $\exists A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$ a.î. $f(A) = y \Rightarrow f$ este surj.

c) f nu este inj. $\Rightarrow f$ nu este inversabilă

d) Propoziție: $\exists f: A \to B$ inj. $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$ surj.

Obs! $f: A \to B$ este inj. $\Rightarrow |A| \leq |B|$

$f: B \to \mathbb{R}$, f nu este inj., f surj. $\Rightarrow \exists g: \mathbb{R}^* \to B$ inj. $\Rightarrow \text{card}(\mathbb{R}^*) \leq |B|$

nu este numărabilă

$\Rightarrow$ nu este numărabilă

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție. Spunem că $m \in \mathbb{R}$ este punct de maxim local strict al lui f dacă $\exists$ un interval (a, b), $a < b$ astfel încât $f(x) < f(m)$, $\forall x \in (a, b) \setminus \{m\}$

a) Fie M mulțimea punctelor de maxim local strict ale lui f

b) Dem că M este cel mult numărabilă (finită sau numărabilă)

Sol.: $m \in M \to p_m < \underset{\in \mathbb{R}}{m} < q_m$, cu p_m și $q_m \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$

Definim $g: M \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$g(m) = (p_m, q_m)$

Fie $m, n \in M$ a.î. $g(m) = g(n)$

$g(m)=g(n) \Rightarrow (p_m, q_m)=(p_n, q_n) \Rightarrow \begin{cases} p_m=p_n \overset{not.}{\equiv} p \\ q_m=q_n \overset{not.}{\equiv} q \end{cases}$

Afirmație:

i) $f(x) < f(m), \forall x \in (p,q) \setminus \{m\}$

ii) $f(x) < f(n), \forall x \in (p,q) \setminus \{n\}$

Presupunem prin absurd că $m \neq n$:

$\left.\begin{array}{l} \text{i) } f(n) < f(m) \\ \text{ii) } f(m) < f(n) \end{array}\right\}$ Contradicție; rămâne deci că $m=n$

$\hookrightarrow g$ - inj. $(g: M \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$

$|M| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|$

numărabilă $\Rightarrow M$ este cel mult num.

3. Pe $\mathbb{R}^*$ definim relația „ρ" prin $x \rho y \Leftrightarrow xy > 0$

Verificați dacă ρ este relație de echiv.

Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Atunci $x \cdot x > 0 \Leftrightarrow x \rho x \Rightarrow$ „ρ" este reflexivă

Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ a.î. $x \rho y$

$x \rho y \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow yx > 0 \Rightarrow y \rho x \Rightarrow$ „ρ" este simetrică

Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ a.î. $x \rho y$ și $y \rho z$

$\left.\begin{array}{l} x \rho y \Rightarrow xy > 0 \\ y \rho z \Rightarrow yz > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xy^2z > 0 \Rightarrow x \rho z \Rightarrow$ „ρ" este tranzitivă

R.S.T $\Rightarrow$ „ρ" - rel. de echiv.

4. Pe $\mathbb{Z}$ definim rel. „$\sim$" prin $x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 3$

a) Verif. dacă „$\sim$" este rel. de echiv.

b) Det. clasele de echiv. modulo „$\sim$"

c) Det. mult. factor $\mathbb{Z}/\sim$

d) Verif. dacă $s=\{-2, 0, 19, 32\}$ este SCIR (sis. complet și indep. de repr.)

a) $x \equiv y \pmod 3 \iff 3 \mid x-y$

Fie $x \in \mathbb{Z}$, $3 \mid x-x \Rightarrow x \sim x \Rightarrow$ „$\sim$" este reflexivă

$x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \sim y \Rightarrow 3 \mid x-y \Rightarrow 3 \mid (x-y)(-1) = 3 \mid y-x \Rightarrow y \sim x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ „$\sim$" simetrică

Fie $x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim y$ și $y \sim z$

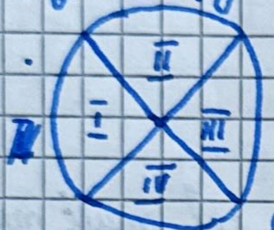
$x \sim y \Rightarrow 3 \mid x-y$

$y \sim z \Rightarrow 3 \mid y-z$

$\Rightarrow 3 \mid (x-y)+(y-z) \Rightarrow 3 \mid x+z \Rightarrow x \sim z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ „$\sim$" este tranzitivă

b) $\hat{x} = \{ y \in A \mid y \sim x \}$ clasă de echivalență



– împărțire pe categorii disjuncte, pe baza unor criterii

ex: $\hat{0} = \{ y \in A \mid 3 \mid y-0 \} = 3\mathbb{Z}$

$\hat{3} = \{ y \in A \mid 3 \mid y-3 \} = 3\mathbb{Z}$

$\hat{1} = 3\mathbb{Z}+1$

$\hat{2} = 3\mathbb{Z}+2$

c) $\mathbb{Z}/_{\sim}$ – mulțimea factor = mulțime de mulțimi

$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{ 3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2 \}$

d) $-2 \sim 19 \Rightarrow$ s nu este SCIR

Pentru o rel. de echiv. pe A notată „$\sim$", spunem că s este sistem complet și independent de reprezentanți (SCIR) dacă s conține câte un singur elem. din fiecare clasă de echiv.

SCIR are atâtea elem. câte are și clasa de echiv.

5. Fie P mulț. punctelor din plan

Fie O un punct fixat

Pe P definim rel. „~" prin $A \sim B \iff OA = OB$

Verif. dacă „~" este r.e. pe P

Sol.: Dacă $\exists A \in P$ $OA = OA$

Fie $A, B \in P$ a.î. $A \sim B$, $A \sim B \Rightarrow OA = OB \Rightarrow OB = OA \Rightarrow B \sim A$

Fie $A, B, C \in P$:

$$\left.\begin{array}{l} A \sim B \Rightarrow OA = OB \\ B \sim C \Rightarrow OB = OC \end{array}\right| \Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow OA = OC \Rightarrow A \sim C$$

6. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $\omega = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$

a) Este ω rel. pe A?

b) Verif. dacă „ω" este r.e. pe A

a) O rel. pe o mulț. este o submulțime a prod. cartezian $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ „ω" este rel pe A $\iff \omega \subseteq A \times A$ ✓

b) Nu, deoarece nu respectă rel. de tranzitivitate

CCC / SSS

Seminar săpt. 6

Relații de echivalență. Monoizi. Grupuri

1. Pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definim relația „$\sim$" prin $(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$

Verificați dacă „$\sim$" este r. e.

Sol.: ~~$(a,b)\sim(a,b)$ $(a+b=a+b) \Rightarrow$ „$\sim$"~~

~~Fie $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$~~

Fie $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$a+b=a+b \Rightarrow (a,b)\sim(a,b) \Rightarrow$ „$\sim$" reflexivă (1)

Fie $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ a. î. $(a,b)\sim(c,d)$

$(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow c+b=a+d \Rightarrow (c,d)\sim(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ „$\sim$" simetrică (2)

Fie $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ a. î.:

$$\left.\begin{cases}(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow a-b=c-d\\ (c,d)\sim(e,f) \Rightarrow c+f=d+e \Rightarrow c-d=e-f\end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a-b=e-f \Rightarrow a+f=e+b \Rightarrow (a,b)\sim(e,f) \Rightarrow$ „$\sim$" tranzitivă (3)

Din (1), (2), (3) și din enunț („$\sim$" relație) $\Rightarrow$ „$\sim$" rel. echiv.

2. Fie A o mulțime nevidă. Definim $\Delta_A=\{(a,a) \mid a\in A\}$

a) Dem. că Δ_A este relație ~~de~~ pe A

b) Verificați dacă ΔA este r. e. pe A

Sol.: a) Δ_A este submulțime a lui $A\times A \Rightarrow \Delta_A$ rel. pe A

b) Fie ~~$(a,a)\in A\times A$~~ $a\in A$ atunci $(a,a)\in\Delta_A \Rightarrow \Delta_A$ reflexivă

Simetrică: ✓

Tranzitivă: ✓

3. Pe $\mathbb{R}^*$ definim relația „$\sim$" prin $x\sim y \Leftrightarrow xy>0$

a) Dem. că „$\sim$" r. e.

b) Clasele de echivalență

c) Mulțimea factor

d) Dați 2 exemple de sisteme de reprezentanți (SCIR)

b) $\hat{a} = \{ b \in \mathbb{R}^* \mid b \sim a \}$

ex: $\widehat{-2} = (-\infty, 0)$

$\widehat{-1} = (-\infty, 0)$

$\hat{1} = (0, +\infty)$

$\hat{2} = (0, +\infty)$

Sunt 2 clase de echiv.: $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$

c) $\mathbb{R}^*/_\sim = \{(-\infty, 0), (0, +\infty)\}$ - conține toate clasele de echiv !!

$= \{\widehat{-1}, \hat{1}\}$

d) SCIR = conține câte un singur elem. din fiecare clasă !!

$S_1 = \{-1, 1\}$

$S_2 = \{-2, 7\}$

$S_3 = \{-4, 592\}$

$S_4 = \{-5, 12\}$

4. Pe $\mathbb{R}$ definim relația „ρ" prin:

$x \rho y \iff x - y \in \mathbb{Z}$

a) Dem. că „ρ" este r. e.

b) clasele de echiv.

c) mulțimea factor

d) dați 2 ex. de SCIR

Sol.: $x \rho y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff \{x\} = \{y\}$

b) $\hat{x} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \rho x \}$

$\widehat{-1} = \mathbb{Z}$

$\hat{0} = \mathbb{Z}$

$\widehat{0,2} = \{ x + 0,2 \mid x \in \mathbb{Z} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \{x\} = 0,2 \} = \dots -0,8, 0,2, 1,2, \dots$

$\hat{1} = \mathbb{Z}$

O infinitate de clase de echiv.

Deci putem spune doar că sunt de forma:

$\cancel{\hat{x} = \{x \in R \mid \{x\}}$

$\hat{x} = \{ y \in R \mid \{y\} = \{x\} \}$

c) $R/_{\rho} = \{ \hat{x} \mid x \in R \}$

d) $S_1 = [0,1)$ $- \{x\} \in [0,1)$ pt. $\forall x \in R$

$S_2 = [1,2)$

$S_3 = [7,8)$

$S_4 = [-2,-1)$

5. Pe R definim relația „$\sim$" prin $x \sim y \Leftrightarrow x - 2y \in \mathbb{Z}$

Verificați dacă „$\sim$" este r.e.

Sol: ~~reflexivă~~

Luam $x = 0,4$:

$x \sim x \Leftrightarrow 0,4 - 0,8 = -0,4 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ „$\sim$" nu e reflexivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ „$\sim$" nu e r.e.

Legi de compoziție

Fie „$\circ$": $M \times M \to M$ o lege de comp. și fie $(A, \circ)$

Semigrup	Monoid	Grup
Asociativă	Asociativă	Asociativă
	Elem. neutru	Elem. neutru
		Elem. simetrizabile

Def: Fie A o mulț. nevidă, „$*$" o lege de comp. pe A ~~[illegible]~~

Spunem că „$*$" admite elem. neutru dacă $\exists e \in A$ a.î.

$\forall x \in A \quad x * e = e * x = x$ $\boxed{\text{Prop.: elem. neutru este unic, dacă există}}$

Spunem că nu admite -ll- dacă $\forall e \in A \quad \exists x \in A$ a.î.

$x * e \neq e * x$ sau $x * e \neq x$

Def: Fie $(A, *)$ un monoid cu elem. neutru e. Spunem că x este simetrizabil (inversabil) dacă

$$\exists x' \in A \quad x * x' = x' * x = e$$

Prop: Simetricul este unic, dacă există

6. Fie A o mulțime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Câte legi de comp. pot fi definite pe A?

Sol: $\underset{n^2 \text{ elem.}}{\underbrace{*: A \times A}} \to \underset{n \text{ elem.}}{A}$ „*" sunt funcții

Putem defini $|A|^{|A \times A|} = n^{n^2}$ legi de comp. pe A

7. ~~Câte~~ Fie A –//–, $n \in \mathbb{N}^*$. Câte legi de comp. comutative pot fi definite pe A?

Sol: A da o lege de comp. comutativă pe A este echivalent cu a da o funcție $f: \{(x_i, x_j) \mid 1 \le i \le j \le n\} \to A$

$$|\underbrace{\{-//-\}}_{M}| = \frac{n(n+1)}{2}$$

Putem defini $|A|^{|M|} = n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ legi de comp. com. pe A

8. Fie $(S, *)$ un semigrup cu prop. că S este finită. Dem. că $\exists n > m \ge 1 \quad \forall x \in S \quad x^n = x^m$

Sol: Fie $(f_n)_{n \ge 0}$ cu $f_n(x) = x^n, \forall x \in S, \forall n \ge 1$

$f_n: S \to S$

Cum S este finită există $n > m \ge 1$ a.î. $f_n = f_m$, deci $\exists n > m \ge 1 \quad f_n = f_m$ adică $\exists n > m \ge 1 \quad \forall x \in S, x^n = x^m$

9. Fie $*: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x * y = x + 1$

Verificați dacă „*" admite elem. neutru

Pp. că $\exists e$ = elem neutru $\Leftrightarrow x * e = e * x = x$

$x + 1 = e + 1 = x$

$\forall e \in \mathbb{N} \ \exists x \in \mathbb{N}$ a.î. $x * e \ne e * x$ sau $x * e \ne x$

Fie $e \in \mathbb{N}$, luam $x = e-1$

$e * (e-1) \neq (e-1) * e \neq e-1$

$e * (e-1) = e+1$

$(e-1) * e = e-1+1 = e$

$e+1 \neq e \Rightarrow \nexists$ elem. neutru

CCC | Seminar săpt. 7

SSS | Legi de comp. Monoizi. Grupuri

1. Verificați dacă urmt. legi de comp. pe $\mathbb{N}$ sunt asoc., respectiv comutative, respectiv dacă admit elem. neutru

a) $x * y = x + 1$, NU NU NU

b) $x * y = xy + 1$, NU DA NU

c) $x * y = 0$, DA DA NU

d) $x * y = \max(x, y)$, DA DA DA

a) $x * (y * z) = x + 1$

$(x * y) * z = (x+1) * z = x + 2$ NU, NU, NU

c) $x * (y * z) = x * (0) = 0$

$(x * y) * z = 0 * z = 0$

$x * e = 0 \ , \forall x, e$

d) $\max(x, y)$ - com.

$\max(x, \max(y, z))$ - asoc. $\Leftrightarrow \max(x, y, z)$

$\max(x, e) = x \Rightarrow e = 0$, deoarece $x \in \mathbb{N}$

2. Fie A o mulțime cu n elem. Câte legi cu elem. neutru pot fi definite pe A?

Sol.: O lege de comp. cu elem. neutru este o funcție $f: A\times A \to A$, cu $f(x,e)=f(e,x)=x$, $\forall x\in A$. A da o astfel de funcție f este echivalent cu a da o funcție $g:\{(x,y) \mid x,y\in A\setminus\{e\}\}\to A$

$|\{(x,y)\mid x,y\in A\setminus\{e\}\}| = (n-1)^2$

Deci avem $n^{(n-1)^2}$

3. Fie $n\geq 2$ și $(G,\circ)$ un grup cu proprietatea că $x^n=e$ pt. orice $x\in G$, unde e este elem. neutru al grupului $(G,\circ)$ și

$x^k = \underbrace{x\circ x\circ \ldots \circ x}_{\text{de } k \text{ ori}}$, $k\in\mathbb{N}^*$

a) Arătați că dacă $x\in G$ atunci simetricul lui x este x^{n-1}

b) $n=2 \Rightarrow (G,\circ)$ este comutativ

c) Fie $f:\mathbb{Q}\to G$ cu $f(x+y)=f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}$ (f este morfism de grupuri). Dem. că $f(x)=e$, $\forall x\in\mathbb{Q}$

a) $\exists x'$ a.î. $\forall x\in G$ $x\circ x' = x'\circ x = e$

$x^n = e \Rightarrow x\circ x^{n-1} = x^{n-1}\circ x = e = x^n \Rightarrow x' = x^{n-1}$

b)

$\cancel{x\circ y \stackrel{?}{=} y\circ x}$ Fie $x,y\in G \Rightarrow x\circ y\in G$

$(x\circ y)^2 = e \Rightarrow x\circ y\circ x\circ y = e$

$x\circ x\circ y\circ x\circ y\circ y = x\circ e\circ y$

$\underbrace{x^2}_{e}\circ y\circ x\circ \underbrace{y^2}_{=e} = x\circ y$

$y\circ x = x\circ y$

c) $f(x+y) = f(x)\circ f(y)$

$f:\mathbb{Q}\to G$

$f(x+(-x)) = f(x)\circ f(-x)$

$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\circ f\left(\frac{x}{2}\right)$

3) $f(x) = f\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\right) = f\left(\frac{x}{3}\right) \circ f\left(\frac{2x}{3}\right) = f\left(\frac{x}{3}\right) \circ f\left(\frac{x}{3}\right) \circ f\left(\frac{x}{3}\right) = f^3\left(\frac{x}{3}\right)$

$$f(x) = \Big(\underbrace{f\left(\tfrac{x}{n}\right)}_{\in G}\Big)^n = e$$

4. Fie $G=[0,1)$. Pe G, definim legea de comp. „$*$" prin $x*y=\{x+y\}$. Verificați dacă $(G,*)$ este grup.

$\{x\} = x - [x]$

Sol.: - v. asociativ.:

$$x*(y*z) = x*\{y+z\} = \{x+\{y+z\}\}$$

$$(x*y)*z = \{x+y\}*z = \{\{x+y\}+z\}$$

$$\{x+\{y+z\}\} = \{x+y+z-\underbrace{[y+z]}_{\in \mathbb{Z}}\} = x+y+z-[y+z]-[x+y+z-[y+z]]$$

$$= x+y+z-\cancel{[y+z]}-[x+y+z]+\cancel{[y+z]}$$

$$= x+y+z-[x+y+z] = \{x+y+z\}$$

$$\{\{x+y\}+z\} = -//- = \{x+y+z\}$$

$$\Rightarrow x*(y*z) = (x*y)*z = \{x+y+z\} \Rightarrow \text{„}*\text{" asoc.}$$

- v. com.:

$$x*y = \cancel{y*x} = \{x+y\} = \{y+x\} = y*x$$

- v. elem. neutru:

$$x*e = x \iff \{x+e\} = x, \quad x\in[0,1) \Rightarrow \{x\} = x \Rightarrow e = 0$$

- v. elem. sim.:

$$x*x' = e \iff \{x+x'\} = 0 \iff x+x' = 1, \ \forall x\in(0,1)$$

$$x' = 1-x, \ \forall x\in(0,1)$$

Pentru $x=0$, $x'=0$ deoarece $x\neq 1$

$$x' = \begin{cases} 1-x, & x\in(0,1) \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

5. Fie ~~G~~ $(G,\cdot)$ un grup și $x \in G$. Dem. că dacă $\text{ord}(x) = n < \infty$ și $k \in \mathbb{N}^*$ atunci $x^k = e \Leftrightarrow n \mid k$

Sol: „$\Rightarrow$" $x^k = e \Rightarrow k \geq n$

Fie $k = c q + r$, $r \in (0, n-1)$

$$x^{cn+r} = e \Rightarrow (x^n)^c \cdot x^r = e \Big| \Rightarrow$$
$$r < n$$

„$\Leftarrow$" $n \mid k \Rightarrow k = nq$, $q \in \mathbb{N}$

$$x^k = (x^n)^q = e^q = e$$

6. Determinați subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$

Sol.: Fie H un subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$. Atunci $H = \{0\}$ sau $H \neq \{0\}$

Dacă $H \neq \{0\}$, ~~...~~ implică $H = n\mathbb{Z}$, unde n = cel mai mic natural din H

„$\subseteq$": Fie $h \in H$. Conform. teor. împ. cu rest $h = nq + r$ cu q și $r \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq r < n$. Rezultă că $r = h - nq$, deci $r \in H$, ceea ce conduce la $r = 0$. Prin urmare, $h \in n\mathbb{Z}$

„$\supseteq$": Fie $h \in n\mathbb{Z}$. Atunci $h = nq$, $q \in \mathbb{Z}$, adică $h = \underbrace{n + \ldots + n}_{\text{de } q \text{ ori}}$

sau $h = \underbrace{(-n) + (-n) + \ldots (-n)}_{\text{de } -q \text{ ori}}$

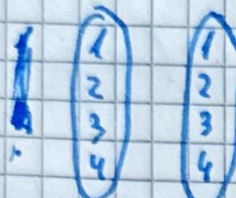
$\Rightarrow h \in H$

Reciproc, $(n\mathbb{Z}, +)$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

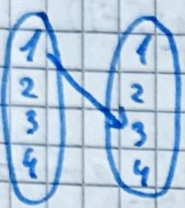
CCCC
SSSS

Seminar săpt. 8

din săpt 7 → 1. Câte legi de comp. cu elem. neutru pot fi definite pe $A=\{a_1, \dots, a_n\}$?



4^4



4^3

Numărăm, mai întâi, câte legi de comp. cu $e=a_1$ pot fi:

$f: A\times A \to A$

$f(x,e)=f(e,x)=x, \ \forall x\in A$

$g: \underbrace{(A\setminus\{e\})\times(A\setminus\{e\})}_{M} \to A$

$|M|=(n-1)^2$

răspuns: $n^{(n-1)^2}$

Deci pt $e=a, \ \forall a\in A: n\cdot n^{(n-1)^2}=n^{(n-1)^2+1}$

2. Dați exemplu de un monoid care nu este grup:

Sol.: $(\mathbb{N},+)$

3. Dați ex. de un semigrup care nu este monoid:

Sol.: $(\mathbb{N}^*,+)$

4. Fie grupul $(\mathbb{Z},+)$ și $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=2x$. Este f izomorfism de grupuri?

Sol: Fie $x,y\in\mathbb{Z}$

$f(x+y) = 2(x+y) = 2x+2y = f(x) + f(y) \Rightarrow f$ morfism

f nu este surjectivă $\Rightarrow f$ nu e bij. $\Rightarrow f$ nu e izomorfism

5. Sunt izomorfe grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $((0,\infty), \cdot)$? Justificați.

Sol.: $f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$

$f(x) = 2^x$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$?

$f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f$ morfism

f bijectivă $\Rightarrow f$ izomorfism $\Rightarrow$ Răspunsul este da

---

$S_2 = \{e, (1\ 2)\}$

$S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

---

6. Sunt izomorfe $(S_3, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_6, +)$?

Sol.: $(1\ 2)(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$(1\ 2\ 3)(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (S_3, \cdot)$ nu este comutativ $\Rightarrow$

$(\mathbb{Z}_6, +)$ este comutativ

$\Rightarrow$ cele două nu sunt izomorfe

$(S_3, \cdot) \not\cong (\mathbb{Z}_6, +)$

7. Sunt izomorfe grupurile $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ și $(\mathbb{Z}_4, +)$?

grupul lui Klein

Sol.:

ord(x) = cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$ pt. care $x^n = e$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\hat{0},\hat{0}), (\hat{0},\hat{1}), (\hat{1},\hat{0}), (\hat{1},\hat{1})\}$, $x^2 = e$, $\forall x \in \mathbb{Z}_2$

ord=1 ord=2

$$\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$$

$$\begin{array}{cccc} \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{ord } 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}$$

Cum ordinul maxim din $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ nu coincide cu ord. maxim din $(\mathbb{Z}_4, +)$ $\Rightarrow$ nu sunt izomorfe

8. Det. toate morfismele de grupuri de la $(\mathbb{Q}, +)$ la $(\mathbb{Z}, +)$

<u>Sol.</u>: $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$f(na) = n f(a) \quad \forall a \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3}\right) = 3 f\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$f(x) = f\left(\underbrace{\frac{x}{n} + \ldots \frac{x}{n}}_{n \text{ ori}}\right) = n f\left(\frac{x}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow f(x) \vdots n \quad \forall x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$(G, \cdot), (H, \cdot)$ 2 grupuri

Pe $G \times H$ definim înmulțirea:

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$$

Pt. $(G, \cdot), (H, +)$:

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 + h_2)$$

9. Fie G și H 2 grupuri și $x = (g, h) \in G \times H$ cu proprietatea că ord(g) și ord(h) sunt finite. Dem. că ord$(x) = [\text{ord}(g), \text{ord}(h)]$

<u>Sol.</u>: $(g, h)^n = e \quad \Leftrightarrow$

$$(g, h)^n = (e_G, e_H)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g^n = e_G \\ h^n = e_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ord}(g) \mid n \\ \text{ord}(h) \mid n \end{cases}$$

Cel mai mic n cu această proprietate este $[\text{ord}(g), \text{ord}(h)]$

10. Det. elementele de ordinul 8 din $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$, dacă există

11. — " — 4 din $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$, — " —

Teorema lui Lagrange:

$H \leq G$ și $|G| < \infty$ atunci $|G| = |H| \cdot [G : H]$

Corolar:

$|G| < \infty$, $\text{ord}(x) \mid |G|$, $\forall x$

10. Sol.: $\cancel{8 \mid 60}$ deci nu există

11. Sol.: $4 \mid 180$ deci există, și sunt:

$\text{ord}((g, h)) = 4 \Leftrightarrow [\underbrace{\text{ord}(g)}_{\in D_{12}}, \underbrace{\text{ord}(h)}_{\in D_{15}}] = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ord}(g) = 4 \Rightarrow \text{elementele } \hat{3} \text{ și } \hat{9} \\ \text{ord}(h) = 1 \Rightarrow \text{singurul elem. cu ord} = 1 \text{ este } e \end{cases}$$

$(\_, \bar{0})$

Deci rez. este $\{(\hat{3}, \bar{0}), (\hat{9}, \bar{0})\}$

CCCC Seminar săpt. 9
SSSS Legi de comp., monoizi, grupuri

1. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de comp. „$*$" def. prin $x * y = 25xy + 5x + 5y + m$ unde $m \in \mathbb{R}$. Care sunt val. param. m pt. care $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu "$*$"?

Sol: $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}\}$, $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}\}$

$$x * y = (5x+1)(5y+1) + (m-1)$$

Fie $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}\}$

$$x * y = \underbrace{(5x+1)(5y+1)}_{\neq 0} + (m-1) \Rightarrow m - 1 = -\frac{1}{5} \Rightarrow m = \frac{4}{5}$$

2. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

a) Scrieți σ ca produs de cicli disj.

b) Scrieți σ ca prod. de transp.

c) Det. $sgn(\sigma)$

d) $ord(\sigma)$

e) $\sigma^{-1} = ?$

f) $\sigma^{2017} = ?$

g) Rez. în S_{10}: $\tau^2 = \sigma$

h) Există permutări de ordin 35 în S_{10}? Justificați

a) $\sigma = (1\ 2\ 9)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(4\ 7)$

b) $\sigma = (1\ 2)(2\ 9)(3\ 5)(5\ 10)\ldots$

c) $sgn(\sigma) = (-1)^{\#\text{de transp.}}$

d) $ord(\sigma) = cmmmc[ord(1\ 2\ 9), ord(3\ 5\ 10\ 8\ 6), ord(4\ 7)] = 30$

e) $\sigma^{-1} \cdot \sigma = id$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ = apoi se sortează

f) $\sigma^{2017} = \sigma^{30\cdot 67+7} = (\overset{id}{\overset{\parallel}{\sigma^{30}}})^{67} \cdot \sigma^{7} = \sigma^{7} = ((1\,2\,9)(3\,5\,10\,8\,6)(4\,7))^{7} =$

$= (1\,2\,9)^{7}(3\,5\,10\,8\,6)^{7}(4\,7)^{7} = (1\,2\,9)(3\,5\,10\,8\,6)^{2}(4\,7) =$

$= (1\,2\,9)(3\,10\,6\,5\,8)(4\,7)$

g) $\tau^{2} = \sigma \iff \tau\tau = \sigma \iff sgn(\tau)sgn(\tau) = -1 \iff [sgn(\tau)]^{2} = -1$ nu are sol.

h) $35 = [ord(\tau_1), ord(\tau_2), \dots, ord(\tau_k)]$

$ord(\tau_1) + ord(\tau_2) + \dots + ord(\tau_k) = 10$

unde $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ sunt cicli disj. din descomp. lui τ

$35 = 5\cdot 7$, dar $5+7 > 10$ deci nu este posibil

Pp. prin absurd că $\exists\, \sigma \in S_{10}$, cu $ord(\sigma) = 35$

$\sigma = \pi_1, \dots, \pi_n$

$l_1 = ord(\pi_1), l_2 = \dots\ l_n = ord(\pi_n)$

$ord(\sigma) = 35 \Rightarrow [l_1, \dots, l_n] = 35 \Rightarrow l_1 + l_2 + \dots + l_n \geq 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \geq 12$ ⨳

$(1\,2\,3)^{2} = (1\,3\,2)$

$(1\,2\,3\,4\,5)^{2} = (1\,3\,5\,2\,4)$

~~$(1\,2\,3\,4\,5\,6)^{2} = ($~~

$(1\,2\,3\,4)^{2} = (1\,3)(2\,4)$

$(1\,2\,3\,4\,5\,6) = (1\,3\,5)(2\,4\,6)$

~~$\pi \in S_n$~~

Fie π un ciclu de lungime l în S_n

π^{k} → rămâne un ciclu de lungime l dacă $k \nmid l$

→ este produs de $\frac{l}{k}$ cicli disjuncți de lung. $\frac{l}{k}$ dacă $k \mid l$

3. Rezolvați în S_7 ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Sol</u>: $\sigma^2 = (1\ 2)(4\ 7)(3)(5)(6)$

$\sigma^2 = (1\ 4\ 2\ 7)^2(3)(5)(6)$

$\sigma_1 = (1\ 4\ 2\ 7)(3)(5)(6)$

$\sigma_2 = (1\ 4\ 2\ 7)(3\ 5)(6)$

$\sigma_3 = (1\ 4\ 2\ 7)(3)(5\ 6)$

$\sigma_4 = (1\ 4\ 2\ 7)(3\ 6)(5)$

$\sigma_5 = (4\ 1\ 7\ 2)(3)(5)(6)$

$\vdots$

4. Rezolvați în S_{12} ecuația:

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 2 & 6 & 7 & 3 & 10 & 1 & 5 & 9 & 8 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Sol</u>: $\sigma^3 = (1\ 12\ 4\ 7)(2)(3\ 6\ 10\ 8\ 5)(9)(11)$

$= (1\ 12\ 4\ 7)(3\ 6\ 10\ 8\ 5)(2)(9)(11)$

$\sigma_1 = (1\ 7\ 4\ 12)(3\ 10\ 5\ 6\ 8)(2)(9)(11)$

$\sigma_2 = (1\ 7\ 4\ 12)(3\ 10\ 5\ 6\ 8)(2\ 9\ 11)$

$\sigma_3 = (1\ 7\ 4\ 12)(3\ 10\ 5\ 6\ 8)(2\ 11\ 9)$

CCC Seminar săpt. 11
SSS

Grupuri

1. Sunt izomorfe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ și $(\mathbb{Z}_4, +)$?

Sol: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\underbrace{(\hat{0},\hat{0})}_{e}, \underbrace{(\hat{0},\hat{1})}_{a}, \underbrace{(\hat{1},\hat{0})}_{b}, \underbrace{(\hat{1},\hat{1})}_{c}\}$

$\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$

$\left.\begin{array}{l} ord(a)=2 \\ ord(b)=2 \\ ord(c)=2 \\ ord(e)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ În $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ nu există elemente de ordinul 4

$\mathbb{Z}_4 \rightsquigarrow \hat{1} \to ord(\hat{1}) = 4$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ nu este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +) \not\cong (\mathbb{Z}_4, +)$

2. a) Sunt izomorfe $(\mathbb{R}, +)$ și $((0,\infty), \cdot)$?

b) Sunt izomorfe $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$?

Sol: a) Da, $f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = 2^x$

- morfism de grupuri
- bij. ✓

$f(x+y) \overset{?}{=} f(x) \cdot f(y)$

$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$ (A) $\Rightarrow f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

b) **Def**: Fie $(G, *)$ un grup. Spunem că G este grup divizibil dacă orice ecuație de forma $\underset{x*x*\dots}{\overset{\parallel}{x^n}} = a$, cu $a \in G$ are soluție

$(\mathbb{R}, +)$ este divizibil

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ nu este divizibil

↳ $x^2 = -1$ nu are soluții în $\mathbb{R}^*$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, +) \not\cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$

Exemple de argumente pt. ca două grupuri să nu fie izomorfe:

„$\Leftarrow$" nu funcționează, trb. găsită funcția

1) Comutativ / necomutativ
2) Ordinele elementelor (dacă unul are 3 elem. de ord. 4 și celălalt are doar 2 elem.)
3) Grup divizibil / grup nedivizibil

3. Sunt izomorfe grupurile $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$?

Sol: $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ nu este divizibil

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este divizibil

$\Rightarrow$ NU sunt

4. **Teorema lui Lagrange**:

Fie G este grup finit. Atunci $|G| = [G : H] \cdot |H|$, unde $H \leq G$

$\Rightarrow |H| \mid |G|$

indicele lui H în G

Corolarul teoremei lui Lagrange

Fie G un grup finit. Atunci $\operatorname{ord}(x) \mid |G|$

4. a) Dem. că orice grup de ordinul 2 este izomorf cu $\mathbb{Z}_2$

b) Dem. că orice grup de ord. 3 este izomorf cu $\mathbb{Z}_3$

c) Dem. că orice grup de ord. 4 este izomorf cu $\mathbb{Z}_4$ sau $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

<u>Prop.</u>: Orice grup ciclic este izomorf cu $\mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z}_n$, pentru un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

<u>Sol</u>: a) $G_1 = \{e, a\} \xRightarrow{C.T.L} ord(a) = 2 \Rightarrow$

<u>Prop.</u>: Există x cu $ord(x) = ord(G) \Rightarrow G$ este ciclic

$$ord(G) = |G|$$

$\Rightarrow G_1$ este ciclic $\Rightarrow G_1 \simeq \mathbb{Z}_2$

b) $G_2 = \{e, a, b\} \xRightarrow{C.T.L} ord(a) = 3 \Rightarrow G_2$ este ciclic $\Rightarrow G_2 \simeq \mathbb{Z}_3$

c) $G_3 = \{e, a, b, c\}$

- există elem. de ord. $4 \Rightarrow G_3 \simeq \mathbb{Z}_4$
- dacă nu există elem. de ord. $4 \Rightarrow x^2 = e, \forall x \in G_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow G_3 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (grupul lui Klein)

5. Care sunt valorile parametrilor $m, n \in \mathbb{Z}$ pt. care funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = mx + n$ este izomorfism de grupuri

f morfism: $f(x+y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow m(x+y) + \cancel{n} = mx + \cancel{n} + my + n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{m(x+y)} = \cancel{m(x+y)} + n \Leftrightarrow n = 0$

$f(x) = mx$

f izomorfism $\Rightarrow f$ bij.

$f(x) = mx$, $m \neq 0 \Rightarrow f$ strict monotonă $\Rightarrow f$ inj.

f - surj. $\Rightarrow m = \pm 1$

5. $(G,\cdot)$ un grup

$H \leq G \iff (H,\cdot)$ este grup și $H \subset G$

$\iff xy^{-1} \in H,\ \forall x,y \in H$

$H \trianglelefteq G \iff ghg^{-1} \in H,\ \forall g \in G,\ \forall h \in H$

6. Este $(\mathbb{R},+)$ subgrup normal al lui $(\mathbb{C},+)$?

<u>Sol</u>: $(\mathbb{C},+)$ grup comutativ $\Rightarrow$ orice subgrup al său este normal

$H \trianglelefteq G \iff ghg^{-1} \in H,\ \forall g \in G,\ \forall h \in H \iff xH = Hx,\ \forall x \in G$

$x \equiv_s y \pmod H \overset{def}{\iff} xy^{-1} \in H \rightarrow$ clasele sunt de forma xH, cu $x \in G$

$x \equiv_d y \pmod H \overset{def}{\iff} x^{-1}y \in H \rightarrow$ clasele sunt -‖- Hx, cu $x \in G$

$G/H \rightarrow H \trianglelefteq G$

$\rightarrow x \equiv y \pmod H \iff xy^{-1} \in H$

$G/H = G/_{\equiv \pmod H}$

7. Este A_n subgrup normal al lui S_n?

Exemple remarcabile de subgp. normale

<u>Teoremă</u>: G, $H \leq G$

1) G comutativ $\Rightarrow$ orice subgp. al său este normal

2) H este subgrup de indice $2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$

<u>Sol</u>: $\left.\begin{array}{l} |A_n| = \frac{n!}{2} \\ |S_n| = n! \end{array}\right\} \Rightarrow A_n$ este subgp. de indice 2 al lui $S_n \Rightarrow$

$\Rightarrow H \trianglelefteq G$

8. Dem. că $(\mathbb{C}/_{\mathbb{R}}, +)$ este izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$

!! Avem voie să scriem $G/_H$ doar dacă H este normal în G !!

Sol.: T.F.I.

Teorema fundam. de izom. de grp.

Fie G_1, G_2 două grupuri și $f: G_1 \to G_2$ un morfism

Atunci $G_1/_{\ker(f)} \simeq Im(f)$

Corolar:

$G_1/_{\ker(f)} \simeq G_2$, dacă f surjectiv

Fie $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f_{(x)} = Im(x)$

f este morfism: $Im(x+y) = Im(x) + Im(y)$

f este surj. ✓

$\ker(f) = \mathbb{R}$

$\xRightarrow{T.F.I.G} \mathbb{C}/_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$

9. Det. subgrupurile lui A_3. Care dintre acestea sunt normale?

Sol.: $A_3 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

Subgrupurile lui A_3 sunt $\{e\}$ și A_3

grupul trivial

A_3 comutativ $\Rightarrow$ toate sunt normale

Exemple de subgp. normale

$G \to \{e\}, G$

10. Det. subgrupurile lui S_3. Care -ll- normale?

Sol.: $\underbrace{\{e\}}$, $\{\underset{H_1}{e}, \underset{h_1}{(1,2)}\}$, $\{\underset{H_2}{e}, \underset{h_2}{(1,3)}\}$, $\{\underset{H_3}{e}, \underset{h_3}{(2,3)}\}$, $\underbrace{A_3, S_3}$ = automat normale

$\{e, (1\ 2)\}$ $\quad (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) \notin H_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow H \ntrianglelefteq S_3$

$H_2 : \{e, (1\,3)\}$ $\quad (1\,2)(1\,3)(1\,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3) \notin H_2 \Rightarrow H_2 \ntrianglelefteq S_3$

$(2\,3)(1\,3)(2\,3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2) \notin H_2$

$H_3 = \{e, (2,3)\}$ $\quad (1\,2)(2\,3)(1\,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3) \notin H_3 \Rightarrow H_2 \ntrianglelefteq S_3$

CCC Seminar săpt. 14
SSS Inele, ideale, inele factor

Def.: Fie A un inel comutativ, ~~...~~ și $I \subseteq A$. Spunem că I este ideal a lui A dacă: 1) $x - y \in I$, $\forall x, y \in I$
2) $ax \in I$, $\forall a \in A$, $\forall x \in I$

1. $\mathbb{Z}[i]/_{(1+i)} \simeq \mathbb{Z}_2$ ← FOARTE PROBABIL LA EXAMEN

Sol.: Aplicăm TFI
Fie $f: \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2$, $f(a+bi) = \widehat{a+b}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid \dots\}$
$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid \dots\}$

I f este morfism de inele
II f este surj.
III $\ker(f) = (1+i)$

I) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
$f(1) = 1$

$f(a+bi+c+di) = \widehat{a+b+c+d}$

$f(a+bi) + f(c+di) = \widehat{a+b} + \widehat{c+d} = \widehat{a+b+c+d}$

$f((a+bi)(c+di)) = f(ac+adi+cbi-bd) = \widehat{ac+ad+cb-bd} = \widehat{(a+b)(c+d)}$ $= \widehat{ac+ad+cb+bd}$

$f(a+bi) \cdot f(c+di) = \widehat{a+b} \cdot \widehat{c+d} = \widehat{(a+b)(c+d)}$

$f(1) = \hat{1}$
$f(1+0i) = \widehat{1+0} = \hat{1}$

II) $f_{(1+0i)} = \widehat{1+0} = \hat{1}$

$f_{(0+0i)} = \widehat{0+0} = \hat{0}$ $\Rightarrow f$ surjectivă

$\{\hat{0}, \hat{1}\} \in \mathbb{Z}_2$

III) $\ker(f) \overset{?}{=} (1+i)$

idealul unui elem = {multiplii lui} cu elem. din inel

$(1+i) = \{(1+i)(a+bi) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$\ker(f) = \{x \mid f_{(x)} = \hat{0}\}$

„$\subseteq$" Fie $a+bi \in \ker(f) \Rightarrow f(a+bi) = \hat{0} \Leftrightarrow \widehat{a+b} = \hat{0} \Rightarrow a+b$ nr. par

$\Rightarrow a$ și b au aceași paritate

$$\frac{a+bi}{1+i} = \frac{(a+bi)(1-i)}{1+1} = \frac{a-ai+bi+b}{2} = \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{(b-a)}{2}}_{\in\mathbb{Z}} \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$$

$\Rightarrow a+bi \in (1+i)$

„$\supseteq$" Fie $x \in (1+i) \Rightarrow x = (1+i)y$, $y \in \mathbb{Z}[i]$

$$f_{(x)} = f_{((1+i)y)} = f_{(1+i)} f_{(y)} = \hat{0} f(y) = \hat{0}$$

Din I, II și III, folosind t. fundamentală de izomorfism pe inele $\Rightarrow \mathbb{Z}[i]/_{(1+i)} \simeq \mathbb{Z}_2$

LCR

1. <u>Lema chineză a resturilor – versiune:</u>

Date $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ mai mari sau egale ca 2 a.î.:

$(n_i, n_j) = 1, \forall i \neq j$

și $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ atunci sistemul:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{n_r} \end{cases}$$

are soluție unică modulo $n_1 \cdot \ldots \cdot n_r$

Algoritm de rezolvare a sistemului:

1) Considerăm $N = n_1 \cdot \ldots \cdot n_r$, $N_i = \dfrac{N}{n_i}, i \in \overline{1,r}$

2) Determinăm $x_1, \dots, x_r$ a.î. $N_i x_i \equiv 1 \pmod{n_i}, i \in \overline{1,r}$

3) Soluția unică este $x = a_1 N_1 x_1 + \ldots + a_r N_r x_r \pmod{N}$

2. Det. cel mai mic nr natural care împărțit la 5 dă restul 3, împărțit la 7 dă restul 2 și împărțit la 9 dă restul 8

!IMPORTANT PT EXAMEN!

<u>Sol.:</u> Fie n cel mai mic nr nat. –11–

Atunci $\begin{cases} n \equiv 3\ (5) \\ n \equiv 2\ (7) \\ n \equiv 8\ (9) \end{cases}$

Observăm că $\boxed{(5,7) = (5,9) = (7,9) = 1}$ deci putem aplica LCR

$N = 5 \cdot 7 \cdot 9$

$N_1 = \dfrac{N}{5} = 7 \cdot 9$

$N_2 = \dfrac{N}{7} = 5 \cdot 9$

$N_3 = \dfrac{N}{9} = 5 \cdot 7$

se învârtă toate

$N_1 x_1 \equiv 1\ (n_1) \iff 63 x_1 \equiv 1\ (5) \iff 3x_1 \equiv 1 (5) \iff x_1 \equiv 2\ (5)$

$N_2 x_2 \equiv 1\ (n_2) \iff 45 x_2 \equiv 1\ (7) \iff 3x_2 \equiv 1 (7) \iff x_2 \equiv 5\ (7)$

$N_3 x_3 \equiv 1\ (n_3) \iff 35 x_3 \equiv 1\ (9) \iff -x_3 \equiv 1 (9) \iff x_3 \equiv 8\ (9)$

Soluția unică este $n = 3\cdot 63\cdot 2 + 2\cdot 45\cdot 5 + 8\cdot 35\cdot 8$

$= 3068 \pmod{315}$

$\Rightarrow \boxed{n = 233}$

3. Câte soluții are sistemul

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 6 \\ x \equiv 0 \pmod 4 \end{cases} ?$$

4. Câte soluții are sistemul

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases} ?$$

3. Sol: $(6,4) \neq 1$ nu putem aplica LCR

$x \equiv 4 \pmod 6$

$x \in \{4, 16, 40, 160, \dots\}$

Acest sistem are o ∞ de sol.

4. Sol: $x \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow x$ impar; $x \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow x$ par $\not\!\!\!\lambda_o$ $\Big|$ $\Rightarrow$ sis. nu are sol.

5. Dem. că $\mathbb{Q}[X]/_{(x-3)} \simeq \mathbb{Q}$

Sol: $f: \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$, $f(P) = P(3)$

I) $f(P+Q) = (P+Q)(3) = P(3) + Q(3) = f(P) + f(Q)$

$f(P\cdot Q) = (PQ)(3) = P(3)\,Q(3) = f(P)\,f(Q)$

$f(1) = 1$

II) $\forall y \in \mathbb{Q}, \exists P = y$ a. î. $f(P) = y \Rightarrow f$ surj.

III) $\ker(f) \overset{?}{=} (x-3)$

„$\subseteq$": Fie $P \in \ker(f) \Rightarrow f(P) = 0 \Rightarrow P(3) = 0 \Rightarrow 3$ răd. $\xRightarrow{\text{Bezout}} P = (x-3)Q \Rightarrow$
$\Rightarrow P \in (x-3)$

„$\supseteq$": Fie $P \in (x-3) \Rightarrow P = (x-3)Q \Rightarrow f(P) = P(3) = 0Q = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P \in \ker(f)$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

Din I, II și III $\xRightarrow{\text{T.F.I.I}} \mathbb{Q}[X]/_{(x-3)} \cong \mathbb{Q}$

TFI pe grupuri
TFII (pe inele)
LCR

6. Dem. că $\mathbb{Q}[X]/_{(x^2-2)} \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Sol.: Aplicăm TFII

Fie $f: \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $f(P) = P(\sqrt{2})$

I) ✓

II) Fie $y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \Rightarrow y = a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$

Luam $P = a + bX$

Atunci $f(P) = a + b\sqrt{2} = y \Rightarrow f$ surj.

III) „$\subseteq$" T.Î.R: $P = (x^2-2)Q + R$, $R = aX + b$

7. $\mathbb{Q}[X]/_{(x^2-1)} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Sol.: x^2-1 reductibil în $\mathbb{Q}[X]$

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$(x+1, x-1) = 1 \Rightarrow$ Putem aplica LCR

$$\mathbb{Q}[X]/_{((x+1)(x-1))} \simeq \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\wr\wr}{\mathbb{Q}[X]/_{(x+1)}}} \times \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\wr\wr}{\mathbb{Q}[X]/_{(x-1)}}}$$