razvan.sfetcu@fmi.unibuc.ro
[redacted]

-Curs 1-

Șiruri de numere reale

Def

Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulțime numărabilă
$\hookrightarrow (\exists) g: A \to \mathbb{N}$, bijectivă)

O func. $f: A \to \mathbb{R}$ se numește (s.n.) șir de nr. reale

Notații

1) $f(n) \overset{not}{=} x_n$ $(\forall) n \in A$

2) ținând cont de notația 1) și de def. precedentă, obținem șirul de nr. reale $(x_n)_{n \in A}$

Obs

1) Atunci când A se subînțelege, vom scrie doar $(x_n)_n$

2) În general $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$, cazuri în care vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sau $(x_n)_{n \geq 0}$ sau $(x_n)_n$)

Def

Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}$

1) Spunem că $(x_n)_n$ este convergent dacă $(\exists) l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$

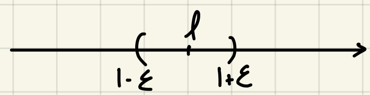
2) Spunem că $(x_n)_n$ este divergent dacă nu e convergent (nu are limită, sau limita lui este $\pm\infty$)

Monotonia:

1) crescător : $x_n \leq x_{n+1}$
2) descrescător : $x_n \geq x_{n+1}$
3) strict cresc. : $x_n < x_{n+1}$
4) strict desc. : $x_n > x_{n+1}$
5) monoton: cresc. sau desc.
6) strict monoton: strict cresc. sau strict desc.
7) mărginit dacă $a \leq x_n \leq b$ sau $(\exists)$ $M > 0$ a.î. $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$ avem $|x_n| < M$

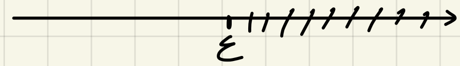
Def

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita l și scriem că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$ dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon \iff x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$



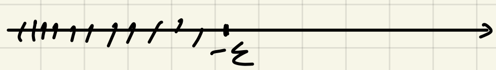
Def

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$
Spunem că $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n > \varepsilon$



Def

Spunem că $(x_n)_n$ are lim. $+\infty$ și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} = -\infty$ dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n < -\varepsilon$



Criteriul lui Weierstrass

Orice șir de nr. reale monoton și mărginit este convergent

Obs

Reciproca teoremei precedente este falsă

Exc

Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$
a) Arătați că x_n nu e monoton
b) că $(x_n)_n$ e conv.

Sol: a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{aligned} x_{2k} &= \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k} \\ x_{2k+1} &= -\frac{1}{2k+1} \\ x_{2k+2} &= \frac{1}{2k+2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{șirul nu este monoton}$$

$x_{2k} > x_{2k+1}$ și $x_{2k+1} < x_{2k+2} \Rightarrow$

b) Avem $x_n = a_n \cdot b_n$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, unde $a_n = \frac{1}{n}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $b_n = (-1)^n$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \\ &|b_n| = |(-1)^n| = 1 < 2, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b_n = \text{mărginit} \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n b_n) = 0 \Rightarrow x_n = \text{convergent}$ $\square$

(„0 · mărg." = 0)

Prop

Orice șir de nr. reale convergent este mărginit.

Prop (Operații cu șiruri convergente)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $a, x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci:

1) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$
2) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot x_y) = x \cdot y$
3) $\lim_{n\to\infty}(a x_n) = ax$
4) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

Prop

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$:

1) $(\lim_{n\to\infty} x_n = 0) \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0)$
2) $(\lim_{n\to\infty} x_n = x) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|)$
3) Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ și $(y_n)_n$ e mărginit, atunci $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$ („$0 \cdot$ mărginit $= 0$")

Criteriul cleștelui

Fie $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $(\exists)\ n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop. că $(\forall) n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n \leq z_n$

Presupunem că $(\exists)\ l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = l$, atunci și $\lim_{n\to\infty} y_n = l$

Exc

Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$
Arătați că nu e convergent

Sol

Arătam că $(x_n)_n$ nu e șir Cauchy

$(x_n)_n$ e șir Cauchy $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

$(x_n)_n$ nu e șir Cauchy $\Leftrightarrow (\exists)\ \varepsilon_0 > 0, (\forall)\ k \in \mathbb{N}$, $(\exists)\ m_k, n_k \in \mathbb{N}^*$, $m_k \geq k$, $n_k \geq k$, $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*, m > n$

$$x_m - x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{m}\cdot(m-n)$$

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}(2n-n) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$
Fie $k \in \mathbb{N}$
Alegem $m_k = 2(k+1)$, $n_k = k+1$

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = \frac{1}{n_k+1} + \dots + \frac{1}{2n_k} \geq \frac{1}{2n_k}(2n_k - n_k) = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

Deci x_n nu este șir Cauchy $\Rightarrow$ nu e convergent

Temă:

Fie $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

Det. $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și dacă $(\exists)$ limită

$x_{2n} = 1 + \frac{2n}{4n+1} \to 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_{2n+1} = 0 - \frac{2n+1}{4n+2} = -\frac{1}{2}$

$\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (\nexists) \lim_{n\to\infty} x_n$

Șiruri Cauchy

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_n$ e șir Cauchy dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

Terminologie

Șirurile Cauchy se mai numesc și șiruri fundamentale.

Teoremă

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Urm. afir. sunt echiv.:

1) $(x_n)_n$ e convergent
2) $(x_n)_n$ e șir Cauchy

Lema lui Cesaro

Orice șir de nr. reale mărginit admite măcar un subșir convergent

Limitele extreme ale unui șir de nr. reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$
Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Spunem că x e punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă $(\exists)\ (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ (subșir) a.î. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Notație: $L((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ e punct limită al lui $(x_n)_n\}$

Prop

$(\exists)$ un cel mai mare punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$ și un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$

Def

1) Cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_n$ se numește limita superioară a sa și se notează $\limsup_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$
2) Cel mai mic se numește limita inferioară și se notează $\liminf_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$

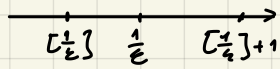
Prop

1) $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$
2) $(x_n)_n$ are lim. $\Leftrightarrow \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$

1. Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.
Arătați, folosind definiția, că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Sol: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \overset{def}{\iff} (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon,\ |x_n - 0| < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$
Căutăm n_ε a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$



$|x_n - 0| < \varepsilon \iff |\frac{1}{n}| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

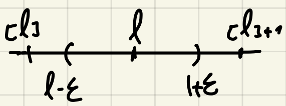
Alegem $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$
$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$
$n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$
$(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

2. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$
Arătați că $l \in \mathbb{Z}$

Sol: P.R.A. că $l \notin \mathbb{Z}$
Știm: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \iff (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon,\ |x_n - l| < \varepsilon$

$|x_n - l| < \varepsilon \iff x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$



Alegem $\varepsilon > 0$ a.î. $[l] < l - \varepsilon$ și $l + \varepsilon < [l] + 1$
Un astfel de ε există deoarece $l - [l] > 0$ și $[l] + 1 - l > 0$
Deci $\varepsilon \in (0, \min\{l - [l], [l] + 1 - l\})$
Avem: 1) $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$
2) $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon), (\forall)\ n \geq n_\varepsilon$
3) $x_n \in \mathbb{Z}, (\forall)\ n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ contradicție
Prin urmare $l \in \mathbb{Z}$

Criteriul raportului pt. șiruri cu termeni strict pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset (0,\infty)$ a.î. $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} l \in [0,\infty] \overset{def}{=} [0,\infty) \cup \{\infty\}$

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$
3) Dacă $l=1$, atunci criteriul nu decide

3. Fie $a>0$

Det. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a^n$

Aplicăm criteriul raportului pt. șiruri cu term. strict poz.

Sol: Fie $x_n = n\cdot a^n$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{n a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an+a}{n} = a$$

1) Dacă $a<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a^n = 0$
2) Dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a^n = +\infty$
3) Dacă $a=1$, atunci crit. nu decide

Fie $a=1$

$x_n = n\cdot 1^n = n$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

Am obținut:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot a_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a\in(0;1) \\ +\infty, & \text{dacă } a\in[1;+\infty) \end{cases}$$

Criteriul radicalului pt. șiruri cu term. poz.

Fie $(x_n)_n \subset [0;+\infty)$ a.î. $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} l \in [0;\infty]$

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$
3) Dacă $l=1$, crit. nu decide

4. Fie $a,b\in(0;+\infty)$. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} (a\cdot n^2+5n+8$

Aplicăm crit. ...

1)

2)

3) $a=b \Rightarrow x_n = \left(\frac{an^2+5n+8}{an^2+3n+2}\right)^n$

$x_n = \left(1+\frac{2n+6}{an^2+3n+2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\left(1+\frac{2n+6}{an^2+3n+2}\right)^{\frac{an^2+3n+2}{2n+6}}\right)^{\frac{2n+6}{an^2+3n+2}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n+6}{an^2+3n+2}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n^2+6n}{an^2+3n+2}} = e^{\frac{2}{a}} = \sqrt[a]{e^2}$$

Prop

$\left\{\begin{array}{l}\text{Fie } (x_n)_n \subset (0,\infty) \text{ a.î. } (\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} l \in [0,\infty] \\ \text{Atunci } (\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l\end{array}\right.$

5. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Sol: Fie $x_n = n$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

6. Det. $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și precizați dacă $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$

Sol: $x_{2k} = \frac{1+(-1)^{2k}}{2} + (-1)^{2k} \cdot \frac{2k}{2(2k)+1} = 1 + \frac{2k}{4k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$

$x_{2k+1} = \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2} + (-1)^{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{4k+3} = 0 - \frac{2k+1}{4k+3} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{1}{2}$

$\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$

Deci $L((x_n)_n) = \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

$\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$

$\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow (\nexists) \lim\limits_{n\to\infty} = x_n$

b) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$

Sol: $x_{4k} = 1 - 2 + 3 = 2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 2$

$x_{4k+1} = 1 + 2 - 3 = 0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$x_{4k+2} = 1 - 2 - 3 = -4 \xrightarrow[k\to\infty]{} -4$

$x_{4k+3} = 1 + 2 + 3 = 6 \xrightarrow[k\to\infty]{} 6$

$L((x_n)_n) = \{-4, 0, 2, 6\}$

$\mathbb{N} = 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N}+1) \cup (4\mathbb{N}+2) \cup (4\mathbb{N}+3)$

$\underline{\lim}\, x_n = -4$

$\overline{\lim}\, x_n = 6$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow (\nexists) \lim\limits_{n\to\infty} = x_n$

-Curs 2-

Serii de numere reale

Def

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$, $(\forall) n \geq p$

Perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ se numește serie de numere reale

Notație

În contextul def. precedente, notăm

$\sum_{n=p}^{\infty} x_n \overset{not}{=} ((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$

$\| not$

$\sum_{n\geq p} x_n \overset{not}{=} \sum_n x_n$

Obs

În general $p=0$ sau $p=1$, cazuri pe care le vom considera în definiții, teoreme, etc.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, o serie de nr. reale ($s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$)

Def

1) elementele șirului $(x_n)_n$ se numesc termenii seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$
2) elementele șirului $(s_n)_n$ se numesc sumele parțiale ale seriei
3) dacă $(\exists) \lim_{n\to\infty} s_n \overset{not}{=} \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, acest α se numește suma seriei și vom serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$
4) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e convergentă dacă $(s_n)_n$ e convergent
5) Spunem că e divergentă dacă $(s_n)_n$ e divergent

Prop $\longrightarrow$	Corolar (criteriul suficient de divergență)
Dacă $\sum_n x_n$ e conv., atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$	Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci $\sum_n x_n$ e divergentă

Obs

Folosind doar afirmația „$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$", nu putem decide dacă $\sum_n x_n$ e div. sau conv.

Exc.

Det. sumele seriilor de mai jos și precizați dacă sunt conv. sau div.:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$

($0^0 = 1$ prin convenție)

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$p=1$

$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \in \mathbb{R}$

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ seria e conv.

b) $x_n = q^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$p=0$

$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$s_n = \begin{cases} n+1, & q=1 \\ 1\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, & q \neq 1 \end{cases}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Dacă $q=1$, atunci $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, deci $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, i.e $\sum_{n=0}^{\infty} q^n =$ div.

Obs

În aplicații, putem folosi (fără justificare), convergențele urm. serii de nr. reale:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ — conv.; $q \in (-1,1)$; div.; $q \in \mathbb{R} \setminus (-1;1)$

(seria geometrică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ — conv; $\alpha > 1$; div.; $\alpha \leq 1$

(seria armonică generalizată)

Obs

q și α din obs. precedentă sunt nr. reale care <u>nu</u> depind de n

Prop

Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$, 2 serii de nr. reale și $a \in \mathbb{R}^*$

1) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt conv., atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ e conv.
   În plus, $\sum_n (x_n \pm y_n) = \left(\sum_n x_n\right) \pm \left(\sum_n y_n\right)$
2) Dacă $\sum_n x_n$ e conv. (resp. div), atunci $\sum_n (a x_n)$ e conv. (resp. div.)
   În plus, $\sum_n (a x_n) = a\left(\sum_n x_n\right)$
3) Dacă $\sum_n x_n$ e conv. și $\sum_n y_n$ e div., atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ e div.
4) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt div., atunci $\sum_n (x_n \pm y_n)$ poate fi sau conv. sau div.

Fie $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0, & q \in (-1;1) \\ +\infty, & q > 1 \\ (\nexists), & q \leq -1 \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & q \in (-1,1) \\ \infty, & q > 1 \\ (\nexists), & q \leq -1 \end{cases}$

Dacă $q \in (-1;1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n =$ conv.

Dacă $q \geq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n =$ div.

Dacă $q \leq -1$, $\nexists \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n =$ div

Criterii de convergență pt. serii cu termeni pozitivi

1. Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} l$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.
b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.
c) Dacă $l = 1$, atunci criteriul nu decide

2. Fie seria $\sum_n x_n$ $x_n \geq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} l$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.
b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.
c) Dacă $l = 1$, atunci criteriul nu decide

3. ## Criteriul Raabe-Duhamel

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$, a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{not}{=} l$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n x_n$ e div.
b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n x_n$ e conv.
c) Dacă $l = 1$, atunci criteriul nu decide

4. ## Criteriul condensării

Dacă $(x_n)_n \subset [0;\infty)$ este un șir desc., atunci seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n x_{2^n}$ au aceeași convergență

5. ## Criteriul de comparație cu inegalități

Fie seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, a.î. $(\exists)\ n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop. că $(\forall)\ n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n$

1) Dacă $\sum_n y_n$ e conv., atunci și $\sum_n x_n$ e conv.
2) Dacă $\sum_n x_n$ e div, atunci și $\sum_n y_n$ e div

6. ## Criteriul de comparație cu limită

Fie seriile $\sum x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$, $y_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not}{=} l \in [0, +\infty]$

1) Dacă $l \in (0;\infty)$, atunci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$
i.e. au aceeași convergență (natură)

2) Dacă $l = 0$ și $\sum_n y_n$ e conv. $\Rightarrow \sum_n x_n$ e conv.

3) Dacă $l = \infty$ și $\sum_n y_n$ e div. $\Rightarrow \sum_n x_n$ e div.

Criteriul lui Cauchy pt. serii de nr. reale

Fie $\sum_n x_n$, o serie de nr. reale.
Sunt echivalente:

1) $\sum_n x_n$ e conv.
2) $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, $(\forall)\ m \in \mathbb{N}^*$ avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}| < \varepsilon$

Criterii de conv. pt. serii cu term. oarecare

Def

Fie $\sum x_n$ o serie de nr. reale. Spunem că $\sum_n x_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum_n |x_n|$ e conv.

Prop

Orice serie de nr. reale absolut convergentă, este convergentă.

Obs

Reciproca propoziției precedente nu e adevărată

1. ## Criteriile Abel-Dirichlet

I. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.:

i) $(x_n)_n$ este desc. și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
ii) $(\exists)\ M > 0$ a.î. $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, avem $|y_0 + y_1 + \dots + y_n| \leq M$

$\Rightarrow$ Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ e conv.

II. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.:

i) $(x_n)_n$ este monoton și mărg.
ii) $\sum_n y_n$ e conv.

$\Rightarrow$ Atunci $\sum_n x_n \cdot y_n$ e conv.

2. ## Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_n \subset [0;\infty)$ a.î. x_n e desc și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Atunci $\sum_n (-1)^n x_n$ e conv.

Exc.

Fie $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

a) Arătați că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv.

b) Arătați că $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e div.

Sol:

a) Fie $x_n = \frac{1}{n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

x_n este desc. și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$a_n = (-1)^n x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Conform crit. lui Leibniz avem că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ = div. (serie armonică generalizată cu $\alpha = 1$)

Exc. Studiați conv. seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot 3n} \cdot \frac{1}{2^n}$

Sol

$x_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n+3)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)} \cdot 2^n = \frac{3n(3n+1)}{(3n+3)(3n-2)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \overset{\text{crit. rap.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e conv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$

Sol:

Fie $x_n = \frac{1}{2^n + 3^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{1}{2^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ conv. (serie geom. cu $q = \frac{1}{2}$)

Conform criteriului de comp. cu inegalități, avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e conv.

c) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$

Sol: $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = 1\cdot 1 = 1 \in (0; +\infty)$

Conf. Crit. Comp. cu lim.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ = div. (serie armonică generalizată cu $\alpha = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ = div.

1. Det $\underline{\lim} x_n$ și $\overline{\lim} x_n$, precizând dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

a) $x_n = (1+\frac{1}{n})^n \sin\frac{n\pi}{3}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Sol

$$x_{6k} = (1+\frac{1}{6k})^{6k} \sin\frac{6k\pi}{3} = (1+\frac{1}{6k})^{6k} \sin(2k\pi) = e \cdot 0 = 0 \xrightarrow[k\to\infty]{} \boxed{0}$$

$$x_{6k+1} = (1+\frac{1}{6k+1})^{6k+1} \sin\frac{6k\pi+\pi}{3} =$$

$$= \dots \sin(2k\pi + \frac{\pi}{3}) = e \cdot \sin\frac{\pi}{3} = e \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}e}{2}$$

$$x_{6k+2} = (1+\frac{6}{6k+2})^{6k+2} \sin\frac{2\pi}{3} = e \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}}{2} e$$

$$x_{6k+3} = \dots \sin\pi = 0 \to 0$$

$$x_{6k+4} = \dots \sin\frac{4\pi}{3} = \dots \sin(\frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}) = \sin(2\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e$$

$$x_{6k+5} = \dots \sin\frac{5\pi}{3} = \dots \sin(\frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = e \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e$$

$$\boxed{\mathbb{N}^* = 6\mathbb{N}^* \cup (6\mathbb{N}+1) \cup \dots \cup (6\mathbb{N}+5)}$$

$\underline{\lim} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2} e$

$\overline{\lim} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} e$

$L((x_n)_n) = \{0, \frac{\sqrt{3}}{2} e, -\frac{\sqrt{3}}{2} e\}$

$\underline{\lim} x_n \neq \overline{\lim} x_n \Rightarrow (\nexists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ □

b) $x_n = \frac{n \cos\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Sol: $-1 \leq \cos\frac{n\pi}{2} \leq 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{n}{n^2+1} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

$\searrow \downarrow \swarrow$

0

2. Det. suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ și prec. dacă e conv

Sol:

$x_n = \frac{n}{(n+1)!}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{1!} + \cancel{\frac{1}{2!}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n!}} - \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} - \dots - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 1$, seria este conv.

3. Studiați convergența/natura seriilor:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n, a>0$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n\sqrt{n}}, a>0$

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

a) **Sol:** $x_n = \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ = conv. (serie arm. gen., $\alpha = \frac{3}{2}$) $\square$

b) **Sol:**

$x_n = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^n$

Aplic. crit. rad.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{2} \to \frac{a}{2}$

Avem.:

1) Dacă $\frac{a}{2} < 1$, $a \in (0;2)$, $\Rightarrow$ ser. e conv.
2) Dacă $\frac{a}{2} > 1$, seria e div.
3) Dacă $a=2$, crit. nu decide

Fie $a=2$

$x_n = \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}$, care $\overset{\text{dem. că}}{}$ are $\lim \neq 0 \Rightarrow$ seria e div.

c) **Sol:**

$x_n = \frac{a^n}{n\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n\sqrt{n}}} = a$

→ 1 (vezi sem. 1)

Conf. crit. rad.:

1) Dacă $a<1$ (i.e. $a \in (0;1)$), seria e conv.
2) Dacă $a>1$ (i.e. $a \in (1;+\infty)$), seria e div.
3) Dacă $a=1$, crit. nu decide

Fie $a=1$

$x_n = \frac{1^n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$ seria e div. conform. crit. suf. div.

d) **Sol:** $x_n = \frac{1}{n\ln n}, (\forall) n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$(x_n)_n$ desc. și poz.

Conf. crit. condensării.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n} \ln 2^n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{n}$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ - div.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{n}$ = div.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} x_n$ = div.

e) **Sol:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (6n+1)}{8 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (5n+3)} \cdot x^n, x>0$

Aplic. crit. rap.:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{13} \cdot \ldots \cdot (6n+7)}{\cancel{8} \cdot \cancel{13} \cdot \ldots \cdot (5n+8)} \cdot \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{13} \cdot \ldots \cdot \cancel{(5n+3)} \cdot x^{n+1}}{\cancel{7} \cdot \cancel{13} \cdot \ldots \cdot \cancel{(6n+1)} x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6n+7}{5n+8} \cdot x = \frac{6}{5} \cdot x$

1) Dacă $\frac{6}{5}x < 1$ (i.e. $x \in (0, \frac{5}{6})$) $\Rightarrow$ seria e conv.
2) Dacă $\frac{6}{5}x > 1$ (i.e. $x \in (\frac{5}{6}, 0)$) $\Rightarrow$ seria e div.
3) Dacă $x = \frac{5}{6}$, crit. nu decide

Fie $x = \frac{5}{6}$

$x_n = \frac{7 \cdot \ldots \cdot (6n+1)}{8 \cdot \ldots \cdot (5n+3)} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Aplicăm. crit. Raabe-Duhamel

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{5n+8}{6n+7} \cdot \frac{6}{5} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{30n+48}{30n+35} - \frac{30n+35}{30n+35}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{13}{30n+35} = \frac{13}{30} < 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ = div.

-Curs 3-

Topologie

Def
Fie $X \neq \emptyset$. O mulțime $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie pe X dacă:
1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2) $(\forall) D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$
3) $(\forall)\underbrace{(D_i)_{i\in I}}_{\{D_i \mid i\in I\}} \subset \mathcal{T}$ avem $\bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$

Def
Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X.
Perechea $(X, \mathcal{T})$ s.n. spațiu topologic.

Ex:
1) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.
Perechea $(X, \mathcal{T})$ e sp. top.
2) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.
Perechea $(X, \mathcal{T})$ e sp. top.
3) Fie $X = \mathbb{R}$ și $\mathcal{T} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$
Perechea $(X, \mathcal{T})$ e sp. top.

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top.

Def
Fie $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x (sau că converge către x) în raport cu top. $\mathcal{T}$

și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\mathcal{T}}{=} x$ (sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}} x$) dacă
$(\forall)\ V \in \mathcal{V}_x$, $(\exists)\ n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_V$, avem $x_n \in V$

Obs
Sintagma „în raport cu top. $\mathcal{T}$" = „în spațiul topologic $(X, \mathcal{T})$"

Obs
Fie sp. top. $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
$(\forall)\ x \in X$, $\mathcal{V}_x = \{X\}$

Fie $(x_n)_n \subset X$. Considerăm $x, y \in X$, $x \neq y$.
Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$

Deci, într-un sp. top., limita unui șir nu este neapărat unică!

Def
Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top.
1) O mulțime $D \subset X$ s.n. mulțime deschisă dacă $D \in \mathcal{T}$
2) O mulțime $F \subset X$ s.n. mulțime închisă dacă $X \setminus F \overset{def}{=} CF \in \mathcal{T}$
3) Fie $x \in X$. O mulțime $V \subset X$ s.n. vecinătate a lui x dacă $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D \subset V$

Notație: pt. orice $x \in X$, notăm $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid V$ vecinătate a lui $x\}$

Def
Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top. O mulțime $K \subset X$ s.n. mulțime compactă dacă $(\forall)(D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ a.î. $K \subset \bigcup_{i\in I} D_i$, $(\exists)\ J \subset I$, J finită, cu prop. că avem incluziunea $K \subset \bigcup_{j\in J} D_j$
(„Din orice acoperire deschisă a lui K se poate extrage o acoperire deschisă și finită a lui K")

Analiza topologică a unei mulțimi

Def
Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top., $A \subset X$ și $x_0 \in X$. Spunem că x_0 este:
1) punct interior al lui A, dacă $A \in \mathcal{V}_{x_0}$
(i.e. $(\exists)\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $x_0 \in D \subset A$)
2) punct aderent (de aderență) al lui A, dacă $(\forall)\ V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap A \neq \emptyset$
3) punct de acumulare al lui A, dacă $(\forall)\ V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$
4) punct frontieră a lui A dacă este punct aderent și nu este punct interior a lui A
5) punct izolat dacă nu este punct aderent sau de acumulare

Notații
1) $\mathring{A} = \{x \in X \mid x$ punct interior a lui $A\}$
(interiorul lui A)
2) $\bar{A} = \{x \in X \mid x$ punct aderent a lui $A\}$
(închiderea/aderența lui A)
3) $A' = \{x \in X \mid x$ punct de acum. a lui $A\}$
(mulțimea derivată a lui A)
4) $Fr(A) = \partial A = \{x \in X \mid x$ punct frontieră a lui $A\}$
(frontiera lui A)
5) $Izo(A) = \dot{A} = \{x \in X \mid x$ pct. izolat a lui $A\}$

Def
Fie $(X, \mathcal{T})$ sp. top. Spunem că $(X, \mathcal{T})$ este sp. top. separat (sau Hausdorff) dacă $(\forall)\ x, y \in X$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_x$, $(\exists)\ W \in \mathcal{V}_y$ a.î. $V \cap W = \emptyset$

Prop
Într-un sp. top. separat, limita oricărui șir este unică

Def

Fie $X \neq \emptyset$. O func. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ se numește **metrică (sau distanță)** pe X dacă:

1) $d(x,y) \geq 0$, $(\forall) x,y \in X$
2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$, $(\forall) x,y \in X$
3) $d(x,y) = d(y,x)$, $(\forall) x,y \in X$
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $(\forall)$ $x,y,z \in X$
(inegalitatea triunghiului)

Def

Fie $X \neq \emptyset$ și $d: X \times X \to \mathbb{R}$ o metrică pe X.
Perechea (X,d) s.n. **spațiu metric**.

Ex: 1) $d(x,y) = \begin{cases} 0 ; x = y \\ 1 ; x \neq y \end{cases}$

2) $X = \mathbb{R}$ și $d(x,y) = |x-y|$
(X,d) e sp. metric

3) $X = \mathbb{R}^n$ și $d_1: X \times X \to \mathbb{R}$,
$d_1(x,y) = |x_1-y_1| + \ldots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

4) $X = \mathbb{R}^n$ și $d_2: X \times X \to \mathbb{R}$,
$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
(distanța euclidiană)

5) Fie $X = \mathbb{R}^n$ și $d_\infty: X \times X \to \mathbb{R}$,
$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = \overline{1,n}\}$

Def

Fie (X,d) un sp. metric, $x \in X$ și $r > 0$
1) $B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$
(bila deschisă)

2) $B[x,r] = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$
(bila închisă)
$= \overline{B}(x,r)$

T

Fie (X,d) un sp. metric și $\mathcal{T}_d = \{A \subset X \mid (\forall) x \in A, (\exists) r > 0 \text{ a.î. } B(x,r) \subset A\} \cup \{\emptyset\}$
perechea $(X, \mathcal{T}_d)$ e sp. top.

Dem:

1) $\underline{\emptyset \in \mathcal{T}_d \qquad X \in \mathcal{T}_d}$

Fie $x \in X$
Fie $r > 0$, avem $B(x,r) \subset X$
$\Rightarrow X \in \mathcal{T}_d$

2) $\underline{\text{Fie } D_1 \text{ și } D_2 \in \mathcal{T}_d \qquad D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d}$

Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset \Rightarrow D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{T}_d$
P.P. că $D_1, D_2 \neq \emptyset$
Dacă $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{T}_d$
P.P. că $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$
Fie $x \in D_1 \cap D_2$
Avem $x \in D_1$ și $x \in D_2$
$D_1 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow (\exists) r_1 > 0$ a.î. $B(x,r_1) \subset D_1$
$D_2 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow (\exists) r_2 > 0$ a.î. $B(x,r_2) \subset D_2$
Alegem $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$
Avem $B(x,r) \subset B(x,r_1) \subset B(x,r_2) \subset D_1 \cap D_2$

3) $\underline{\text{Fie } (D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d \qquad \bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d}$

Dacă $\bigcup_{i \in I} D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$
P.P. că $\bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$
$(\Rightarrow (\exists)\, i_0 \in I \text{ a.î. } D_{i_0} \neq \emptyset)$
Fie $x \in \bigcup_{i \in I} D_i$. Deci $(\exists)\, j_0 \in I$ a.î. $x \in D_{j_0}$
$D_{j_0} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow (\exists) r > 0$ a.î. $B(x,r) \subset D_{j_0}$
Avem $B(x,r) \subset D_{j_0} \subset \bigcup_{i \in I} D_i$

Din 1), 2), 3) $\Rightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ e sp. top.

Def

Topologia $\mathcal{T}_d$ se numește **topologia indusă de metrica d**

Obs

Dându-se un spațiu metric (X,d), putem construi sp. top. $(X, \mathcal{T}_d)$.
Ca atare, are sens să vb. despre mulțimi deschise, închise, vecinătăți, mulțimi compacte, etc. într-un sp. metric. (referindu-ne la topologia indusă de acea metrică)

Obs

Fie (X,d) un sp. metric.
Sp. top. $(X, \mathcal{T}_d)$ este separat (Hausdorff)

Obs

Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X,d)".

Def

Fie (X,d) un sp. metric, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$.
Spunem că $(x_n)_n$ are limita x în raport cu metrica d (sau că $(x_n)_n$ conv. către x în rap. cu d) și scriem $\lim_{n \to \infty} x_n \overset{d}{=} x$ sau $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} x$ dacă
$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$ (i.e. $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_n, x) < \varepsilon$)

Obs

În orice sp. metric, limita oricărui șir este unică.

Studiați conv. seriei:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n, x>0$, unde $\sigma(n)$ = nr. div. lui n

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+n}{3^n+n^3}$

a) $1 \le \sigma(n) \le n \;/\cdot x^n$

$x^n \le \sigma(n)x^n \le nx^n$

$x \le \sqrt[n]{\sigma(n)x^n} \le (\sqrt[n]{n})x$

$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$
x

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+n}{3^n+n^3}$

$x_n = \frac{a^n+n}{3^n+n^3}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$x_n = \frac{a^n}{3^n+n^3} + \frac{n}{3^n+n^3}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $a_n = \frac{a^n}{3^n+n^3}$ și $b_n = \frac{n}{3^n+n^3}$

$b_n < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_n \frac{1}{n^2}$ e conv (serie arm. gen. cu $\alpha = 2$)

Cf. crit. comp. cu ineg., avem că $\sum_n b_n$ e conv.

Deci $\sum_n x_n \sim \sum_n a_n$

Considerăm $c_n = \frac{a^n}{3^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Calc. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{\cancel{a^n}}{3^n+n^3} \cdot \frac{3^n}{\cancel{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}(1+\frac{n^3}{3^n})} = 1 \in (0,\infty)$

Conf. crit. de comp. cu lim că $\sum_n a_n \sim \sum_n c_n$

$\sum_n c_n = \sum_n \frac{a^n}{3^n} = \sum_n \left(\frac{a}{3}\right)^n$ conv. dacă $a \in (0,3)$; div. dacă $a \in [3,\infty)$ (serie geom. cu $q = \frac{a}{3}$)

Pt. a dem. că $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$ putem folosi crit rap. pt. șiruri cu term. strict poz.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} x^n, x>0$

$x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} x^n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}} \cdot \frac{n\sqrt{n+1}}{x^n} = \frac{x \cdot n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}} = \frac{x \cdot n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Conf. crit. rap. avem:

1) Dacă $x<1$, at. seria e conv.
2) Dacă $x>1$, at. seria e div.
3) Dacă $x=1$, crit. nu decide

Fie $x=1$, $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n}\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 \in (0;+\infty)$

Conf. crit. de comp. cu lim.

$\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$

$\sum_n y_n = \sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ = conv. (serie arm. gen., $\alpha = \frac{3}{2}$)

$\Rightarrow \sum_n x_n$ = conv.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{(\cos\frac{1}{n})(\cos\frac{1}{n+1})}$

$x_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{(\cos\frac{1}{n})(\cos\frac{1}{n+1})} = \frac{\sin(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})}{(\cos\frac{1}{n})(\cos\frac{1}{n+1})} = \frac{\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1}\cdot\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}} - \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n+1}} = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = tg1 - \cancel{tg\frac{1}{2}} + \cancel{tg\frac{1}{2}} - \cancel{tg\frac{1}{3}} + \ldots + \cancel{tg}\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1} = tg1 - tg\frac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = tg1 \in \mathbb{N}^*$ deci $\sum\limits_n x_n$ = conv. □

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}}$

Arătăm că $x_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, avem $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \in (0; \frac{\pi}{2})$, deci $x_n > 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

Considerăm $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\underbrace{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \in (0; +\infty)$

Conf. crit. comp. cu lim.

$\Rightarrow \sum\limits_n x_n \sim \sum\limits_n y_n$

$\sum\limits_n y_n = \sum\limits_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ = div. (serie arm. gen. cu $\alpha = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow \sum\limits_n x_n$ = div.

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\lambda}, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$

Folosim crit. Abel-Dirichlet (I)

Fie $x_n = \frac{1}{n^\lambda}$ şi $y_n = \cos(nx), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

x_n = desc. şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (1)

$(\exists) M > 0$ a.î. $(\forall) n \in \mathbb{N}^*, |y_1 + \ldots + y_n| \leq M$

M nu poate depinde de n, dar poate depinde de x

Fie $z = \cos x + i\sin x$

$z^2 = \cos 2x + i\sin 2x$ (form lui Moivre)

$\ldots$

$z^n = \cos nx + i\sin nx$

„+"

$y_1 + \ldots + y_n = \cos x + \ldots + \cos nx = Re(z + z^2 + \ldots + z^n)$

P.p. că $z \neq 1$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$z + z^2 + \ldots + z^n = z \cdot \frac{z^n - 1}{z-1} = \frac{z^{n+1} - z}{z-1} = \frac{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - \cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x - 1} = \frac{\cos(n+1)x - \cos x + i(\sin(n+1)x - \sin x)}{\cos x - 1 + i\sin x} =$

$= \frac{-\cancel{2}\sin\frac{n+2}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x + i\cdot\cancel{2}\sin\frac{n}{2}x\cdot\cos\frac{n+2}{2}x}{\cancel{1} - \cancel{2}\sin^2\frac{x}{2} + \cancel{1} + i\cdot\cancel{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{-i}{} \frac{\sin\frac{n+2}{x} + i\cos\frac{n+2}{x}}{\sin\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{n+2}{2}x + i\sin\frac{n+2}{2}x}{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}} =$

$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2})^{\cancel{n+2}\, n+1}}{\cancel{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot (\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2})^{n+1} =$

$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot (\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x)$

$y_1 + \ldots + y_n = Re(z + z^2 + \ldots + z^n) = \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{n+1}{2}x$

Deci $|y_1 + \ldots + y_n| = \frac{|\sin\frac{n}{2}\cdot x|}{|\sin\frac{x}{2}|} \cdot |\cos\frac{n+1}{2}x| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$, Alegem $M = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

Avem, pt. $(\forall) n \in \mathbb{N}^*, |y_1 + \ldots + y_n| \leq M$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ Cf. crit. Abel-Dirichlet (I) că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n \in$ conv.

$\cos x = \cos(2\cdot\frac{x}{2}) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

$\sin x = \sin 2\cdot\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Nu uităm că am tratat doar cazul $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Fie $x\in\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ → conv. dacă $\alpha\in(1,\infty)$; → div. dacă $\alpha\in(0,1]$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos\frac{1}{n})\cos n}{n}$

-Curs 4-

Prop. ale interiorului unei mulțimi

Fie $(X,\mathcal{T})$ un sp. top., $A\subset X$ și $B\subset X$

1. $\mathring{A}\subset A$

Justificare

Fie $x\in\mathring{A}$. Atunci $A\in\mathcal{V}_x$

Deci $(\exists)\ D\in\mathcal{T}$ a.î. $x\in D\subset A$.

Deci $x\in A$, adică $\mathring{A}\subset A$

2. $\mathring{A}=\bigcup_{\substack{D\in\mathcal{T}\\ D\subset A}} D$

J „$\subset$" (dublă incluziune)

Fie $x\in\mathring{A}$. Atunci $A\in\mathcal{V}_x$

Deci $(\exists)\ D\in\mathcal{T}$ a.î. $x\in D\subset A$.

Așadar $x\in\bigcup_{\substack{D\in\mathcal{T}\\ D\subset A}} D$, i.e. $\mathring{A}\subset\bigcup_{\substack{D\in\mathcal{T}\\ D\subset A}} D$ (1)

„$\supset$"

Fie $x\in\bigcup_{\substack{D\in\mathcal{T}\\ D\subset A}} D$. Deci $(\exists)\ D_1\in\mathcal{T}, D_1\subset A$ a.î. $x\in D_1$.

Avem că $(\exists)\ D_1\in\mathcal{T}$ a.î. $x\in D_1\subset A$,

așadar $A\in\mathcal{V}_x$, adică $x\in\mathring{A}$,

i.e. $\bigcup_{\substack{D\in\mathcal{T}\\ D\subset A}} D\supset\mathring{A}$ (2)

(1) + (2) ⇒ $\mathring{A}=\bigcup_{\substack{D\in\mathcal{T}\\ D\subset A}} D$

3. $\mathring{A}\in\mathcal{T}$ (interiorul este mult. deschisă)

J $\mathring{A}=\bigcup_{\substack{D\in\mathcal{T}\\ D\subset A}} D \Rightarrow \mathring{A}\in\mathcal{T}$

Obs

Din prop. 2 și 3, rezultă că $\mathring{A}$ este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulțime deschisă inclusă în A

4. A deschisă ⇔ $A=\mathring{A}$

„$\Leftarrow$"

J $\left.\begin{array}{l}\mathring{A}\text{ deschisă } (\mathring{A}\in\mathcal{T})\\ A=\mathring{A}\end{array}\right\}\Rightarrow A$ = deschisă

„$\Rightarrow$"

$\left.\begin{array}{l}A\text{ deschisă}\\ A\subset A\\ \mathring{A}\text{ este cea mai mare mult. deschisă incl în } A\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}A\subset\mathring{A}\\ \mathring{A}\subset A\end{array}\right\}\Rightarrow A=\mathring{A}$

5. Dacă $A\subset B$, atunci $\mathring{A}\subset\mathring{B}$

J

6. a) $\mathring{A}\cap\mathring{B}=\overset{\circ}{\overline{A\cap B}}$

b) $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subset\overset{\circ}{\overline{A\cup B}}$

J

Obs

Incluziunea de la 6.b) poate fi strictă

Prop

Fie (X,d) un sp. metric, $A\subset X$ și $x_0\in X$

1. $x_0\in\mathring{A}$ ⇔ $(\exists)\ r>0$ a.î. $B(x_0,r)\subset A$
2. $x_0\in\bar{A}$ ⇔ $(\forall)\ r>0$, avem $B(x_0,r)\cap A\neq\emptyset$
3. $x_0\in A'$ ⇔ $(\forall)\ r>0$, avem $B(x_0,r)\cap(A\setminus\{x_0\})\neq\emptyset$
4. $x_0\in Fr(A)=\partial A$ ⇔ $x_0\in\bar{A}\setminus\mathring{A}$
5. $x_0\in Izo(A)={}'A$ ⇔ $x_0\in\bar{A}\setminus A'$

Prop. ale aderenței unei mulțimi

Fie $(X,\mathcal{T})$ un sp. top., $A\subset X$ și $B\subset X$

1. $A\subset\bar{A}$

J Fie $x\in A$.

Fie $V\in\mathcal{V}_x$

Avem $x\in V$ și $x\in A$. Deci $V\cap A\neq\emptyset$,

i.e. $x\in\bar{A}$, i.e. $A\subset\bar{A}$ □

2. $\bar{A}=\bigcap_{\substack{F\text{ închisă}\\ F\supset A}} F$

„$\subset$"

J Fie $x\in\bar{A}$. Arătăm că $x\in\bigcap_{\substack{F\text{ înc.}\\ F\supset A}} F$

P.R.A. că $x\notin\bigcap_{\substack{F\text{ înc.}\\ F\supset A}} F$

Deci $(\exists)(\exists)\ F_1$ închisă, $F_1\supset A$, a.î. $x\notin F_1$

⇒ $x\in CF_1 \overset{def}{=} X\setminus F_1$

$\left.\begin{array}{l}F_1\text{ înc.}\Rightarrow CF_1\in\mathcal{T}\text{ (deschisă)}\\ x\in CF_1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}CF_1\in\mathcal{V}_x\\ x\in\bar{A}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cap CF_1\neq\emptyset$

Contradicție cu $F_1\supset A$. Prin urmare $x\in\bigcap F$ i.e. $\bar{A}\subset\bigcap F$

„$\supset$"

Fie $x\in\bigcap_{\substack{F\text{ înc.}\\ F\supset A}} F$. Arătăm că $x\in\bar{A}$

P.R.A. că $x\notin\bar{A}\Rightarrow(\exists)\ V_1\in\mathcal{V}_x$ a.î. $A\cap V_1=\emptyset$

$V_1\in\mathcal{V}_x\Rightarrow(\exists)\ D_1\in\mathcal{T}$ a.î. $x\in D_1\subset V_1$

$V_1\cap A=\emptyset\Rightarrow D_1\cap A=\emptyset\Rightarrow A\subset CD_1=X\setminus D_1$

$\left.\begin{array}{l}D_1\in\mathcal{T}\Rightarrow CD_1\text{ închisă}\\ CD_1\supset A\\ x\in\bigcap_{\substack{F\text{-înc.}\\ F\supset A}} F\end{array}\right\}\Rightarrow x\in CD_1$ dar $x\in D_1$ - contradicție

$\Rightarrow\bigcap F\subset\bar{A}$

$\Rightarrow\bar{A}=\bigcap F$

Obs

Din 2 și 3, rezultă că $\bar{A}$ este cea mai mică mult. închisă ce include pe A

3. $\bar{A}$ închisă

J $\bar{A}=\bigcap_{\substack{F\text{ înc.}\\ F\supset A}} F \Rightarrow C\bar{A}=C\Big(\bigcap F\Big)=\bigcup_{\substack{F\text{ înc.}\\ F\supset A}} CF\in\mathcal{T}\Rightarrow\bar{A}$ închisă

4. A închisă ⇔ $A=\bar{A}$

„$\Leftarrow$"

J $\left.\begin{array}{l}\bar{A}\text{ închisă}\\ A=\bar{A}\end{array}\right\}\Rightarrow A$ închisă

„$\Rightarrow$"

$\left.\begin{array}{l}A\text{ închisă}\\ A\subset A\\ \bar{A}\text{ - cea mai mică mult. închisă ce îl conține pe } A\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}A\subset\bar{A}\\ \bar{A}\subset A\end{array}\right\}\Rightarrow A=\bar{A}$

5. Dacă $A\subset B$, atunci $\bar{A}\subset\bar{B}$

J

6. a) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

b) $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$

J

Obs

Incl. de la 6.b) poate fi strictă

Prop

Fie un sp. top. și $A \subset X$. Atunci:

1) $C\bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{CA}}$
2) $C\overset{\circ}{A} = \overline{CA}$

Prop ale mulțimii punctelor de acumulare

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top. și $A \subset X$

1) $A' \subset \bar{A}$

Fie $x \in A' \Rightarrow (\forall) V \in \mathcal{V}_x$, $V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$
$\Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow x \in \bar{A}$, i.e. $A' \subset \bar{A}$ □

2) $\bar{A} = A \cup A'$

„⊃"

$\left.\begin{matrix} A \subset \bar{A} \\ A' \subset \bar{A} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cup A' \subset \bar{A}$ (1)

„⊂"

Fie $x \in \bar{A} \Rightarrow (\forall) V \in \mathcal{V}_x$, $V \cap A \neq \emptyset$

P.R.A. că $x \notin A \cup A'$. Deci $x \notin A$ și $x \notin A'$

$x \notin A' \Rightarrow (\exists) V_1 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $V_1 \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$

$\left.\begin{matrix} x \in \bar{A} \\ V_1 \in \mathcal{V}_x \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_1 \cap A \neq \emptyset$, $V_1 \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \Big| \Rightarrow V_1 \cap A = \{x\}$, contradicție cu $x \notin A$

Așadar $x \in A \cup A'$, i.e. $\bar{A} \subset A \cup A'$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \bar{A} = A \cup A'$ □

Prop

Fie (X, d) un sp. metric, $A \subset X$ și $x \in X$

1) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\exists)(x_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$
2) $x \in A' \Leftrightarrow (\exists)(x_n)_n \subset A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$

Obs

$(\mathbb{R}, d)$ e sp. metric unde $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

Considerăm sp. metric $(\mathbb{R}, d)$, $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$

1) $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x,y) < r\} =$
$= \{y \in \mathbb{R} \mid y \in (x-r; x+r)\}$

2) $B[x,r] = \overline{B(x,r)} = [x-r; x+r]$

Obs

În sp. metric $(\mathbb{R}, d)$:

1) Intervalele de forma $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ și (a,b) sunt mulț. deschise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$
2) Intervalele de forma $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ și $[a,b]$ sunt mulț. închise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

Exc

Faceți analiza topologică a mulț. $A \subset \mathbb{R}$, unde:
(i.e. det. $\overset{\circ}{A}$, $\bar{A}$, A', $Fr(A)$ și $Izo(A)$)

a) $A = \mathbb{Q}$

Sol:

1) $\overset{\circ}{A} = ?$

$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow (\exists) r > 0$ a.î. $\underset{(x-r,\, x+r)}{\underset{\shortparallel}{B(x,r)}} \subset \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\shortparallel}{A}}$

Avem $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, deoarece între orice 2 nr. reale, există o inf. de nr. raționale și iraționale.

2) $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall) r > 0$, avem $\underset{(x-r,\, x+r)}{B(x,r)} \cap \underset{\mathbb{Q}}{A} \neq \emptyset$

$\bar{A} \subset \mathbb{R}$

Arătăm că $\mathbb{R} \subset \bar{A}$

Fie $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$

Avem $(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, deoarece între orice 2 nr. reale, există o inf. de nr. raționale și iraționale.

Prin urmare, $x \in \bar{A}$, adică $\mathbb{R} \subset \bar{A}$

Așadar $\bar{A} = \mathbb{R}$

3) $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow (\forall) r > 0$, $(x-r, x+r) \cap \{\mathbb{Q} \setminus \{x\}\} \neq \emptyset$

$A' \subset \mathbb{R}$

Arătăm că $\mathbb{R} \subset A'$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $r > 0$. Avem $(x-r, x+r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ deoarece între orice 2 nr. reale, există o inf. de nr. raționale și iraționale.

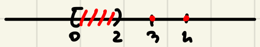
Prin urmare, $x \in A'$, adică $\mathbb{R} \subset A'$. Așadar $A' = \mathbb{R}$

4) $Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

5) $Izo(A) = {}^{\backprime}A = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ □

b) $A=[0,2)\cup\{3,4\}$

Sol:



1) $\mathring{A}=?$

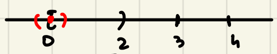
$x\in\mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0$ a.î. $(x-r,x+r)\subset A$

$$\left.\begin{aligned}&\mathring{A}\subset A=[0,2)\cup\{3,4\}\\&(0,2) \text{ - mult. deschisă incl. în } A\end{aligned}\right\}\Rightarrow (0,2)\subset\mathring{A}$$

Avem $(0,2)\subset\mathring{A}\subset[0,2)\cup\{3,4\}$

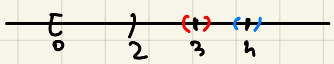
Studiem dacă $0\in\mathring{A}$, $3\in\mathring{A}$, $4\in\mathring{A}$

$0\in\mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0$ a.î. $\underbrace{(0-r,0+r)}_{(-r,r)}\subset A$



Deci $0\notin\mathring{A}$

$3\in\mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0$ a.î. $(3-r,3+r)\subset A$



Deci $3\notin\mathring{A}$

Analog $4\notin\mathring{A}$

4) $Fr(A)=\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A}=\{0,2,3,4\}$

5) $Izo(A)={}'A=\bar{A}\setminus A'=\{3,4\}$ □

2) $\bar{A}=?$

$x\in\bar{A}\Leftrightarrow(\forall)\, r>0$, avem $(x-r,x+r)\cap A\neq\emptyset$

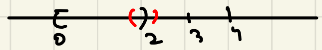
$\underset{[0,2)\cup\{3,4\}}{\overset{}{A}}\subset A'$ $\quad[0,2]\cup\{3,4\}$ - mult. închisă ce conține A

$\Rightarrow \bar{A}\subset[0,2]\cup\{3,4\}$

Deci $[0,2)\cup\{3,4\}\subset\bar{A}\subset[0,2]\cup\{3,4\}$

Studiem dacă $2\in\bar{A}$

$2\in\bar{A}\Leftrightarrow(\forall)\, r>0$, avem $(2-r,2+r)\cap A\neq\{0\}$



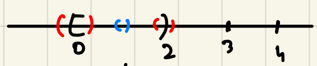
Deci $2\in\bar{A}$

3) $A'=?$

$x\in A'\Leftrightarrow(\forall)\, r>0$, avem $(x-r,x+r)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$

$A'\subset\bar{A}=[0,2]\cup\{3,4\}$

Fie $x\in[0,2]$



Deci $x\in A'$, i.e. $x\in[0,2]$

$3\in A'\Leftrightarrow(\forall)\, r>0$, avem $(3-r,3+r)\cap(A\setminus\{3\})\neq\emptyset$

Deci $3\notin A'$

Analog $4\notin A'$

Așadar $A'=[0,2]$

1. Stud. conv. seriilor

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos\frac{1}{n})\cos n}{n}$

Sol

Vom aplica crit. Abel-Dirichlet (II)

Fie $x_n=\cos\frac{1}{n}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$y_n=\frac{\cos n}{n}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$-1\le x_n\le 1$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(x_n)_n$ - mărg.

$$\left.\begin{aligned}&\underset{(0,\frac{\pi}{2})}{\underset{\cap}{x}}\longmapsto\underset{(0,1)}{\underset{\cap}{\cos x}} \text{ este desc.}\\&\tfrac{1}{n}\in(0,\tfrac{\pi}{2}),\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*\\&(\tfrac{1}{n})_n \text{ - desc.}\end{aligned}\right\}\Rightarrow (x_n)_n \text{ - cresc.}$$

Deci $(x_n)_n$ - monoton și mărg., $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ (1)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ - conv. (vezi alt. ex din sem. 3) (2)

Din (1) și (2) avem că $\sum_n x_n\cdot y_n$ - conv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$

Sol

$x_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}, (\forall) n\in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

$z_n = \frac{1}{n}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

Vom folosi criteriul lui Leibniz pt. $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ - conv. (crit. lui Leibniz)

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - div. (serie arm. gen., $\alpha = 1$)

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ = div. $\square$

2. a) Arăt. că $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

b) Stud. conv. seriei $\sum_n (1-\cos\frac{1}{n})x^n, x>0$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = [\frac{0}{0}] \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\frac{x}{1}} = \frac{1}{2}$

3. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$

a) Arăt. că d_1 e metrică pe $\mathbb{R}^n$

1) $d_1(x,y) \geq 0, (\forall)\, x,y \in\mathbb{R}^n$ (evident, fiind sumă de module)

2) $d_1(x,y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \iff (\forall)\, i\in\overline{1,n}$, avem $|x_i-y_i| = 0 \iff$

$\iff (\forall)\, i\in\overline{1,n}$, avem $x_i = y_i \iff$

$\iff x = y$

3) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x), (\forall)\, x,y\in\mathbb{R}^n$

4) Fie $x,y,z\in\mathbb{R}^n$

Arătăm că $d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z)$

$d_1(x,z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n} |\underbrace{x_i - y_i} + \underbrace{y_i - z_i}| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i-y_i| + |y_i - z_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = d_1(x,y) + d_1(y,z)$

Așadar d_1 este metrică pe $\mathbb{R}^n$

b) Fie $(x^k)_k \subset \mathbb{R}^n$, $x^k=(x_1^k,\dots,x_n^k)$, $(\forall)k\in\mathbb{N}$ și $x\in\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\dots,x_n)$

Arătați că $\lim_{k\to\infty} x^k \overset{d_1}{=} x \iff \lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i, (\forall) i=\overline{1,n}$

Sol: "$\Rightarrow$"

$\lim_{k\to\infty} x^k \overset{d_1}{=} x \Rightarrow \lim_{k\to\infty} d_1(x^k,x)=0$

$\Rightarrow (\forall)\varepsilon>0, (\exists)k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)k\ge k_\varepsilon$, avem $d_1(x^k,x)<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\varepsilon>0,(\exists)k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)k\ge k_\varepsilon$, avem $\sum_{i=1}^n |x_1^k - x_1|<\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\varepsilon>0,(\exists)k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)k\ge k_\varepsilon,(\forall)i\in\overline{1,n}$, avem $|x_i^k-x_i|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i, (\forall)i\in\overline{1,n}$

"$\Leftarrow$"

$\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i \Rightarrow \lim_{k\to\infty} (x_i^k - x_i)=0, (\forall) i\in\overline{1,n}\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |x_i^k - x_i|=0, (\forall)i\in\overline{1,n}\Rightarrow \sum_{i=1}^n(\lim_{k\to\infty}|x_i^k-x_i|)=0\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n|x_i^k-x_i|=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} d_1(x^k,x)=0\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^k \overset{d_1}{=} x$

$\left(\frac{2}{n},\frac{2n+1}{n+2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{d_1}(0,2)$

Ineg. Cauchy-Buniakowski-Schwarz (CBS)

Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$. Atunci

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

4. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $d_2\overset{not}{=}d: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$

Arăt. că d_2 e metrică pe $\mathbb{R}^n$

Sol

1) $d(x,y)\ge 0$ (evident, fiind radical), $(\forall)x,y\in\mathbb{R}^n$

2) $d(x,y)=0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}=0\iff\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2=0\iff$

$\Rightarrow (\forall)i\in\overline{1,n}$, avem $(x_i-y_i)^2=0 \iff (\forall) i\in\overline{1,n}$, avem $x_i=y_i$

$\iff x=y$

3) $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)^2}=d(y,x)$

4) Fie $x,y,z\in\mathbb{R}^n$

Arătăm că $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

$d(x,z)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-z_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i+y_i-z_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n((x_i-y_i)^2+2(x_i-y_i)(y_i-z_i)+(y_i-z_i)^2)}=$

$=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2+2\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)(y_i-z_i)+\sum_{i=1}^n(y_i-z_i)^2}\underset{C.B.S.}{\le}\sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}_{a^2}+\underbrace{\sum_{i=1}^n(y_i-z_i)^2}_{b^2}+2\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}}_{a}\cdot\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i-z_i)^2}}_{b}}=\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i-z_i)^2}\right)^2}$

$=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i-z_i)^2}=d_2(x,y)+d_2(y,z)$

Deci d_2 e metrică pe $\mathbb{R}^n$

5. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $d_1, d_2\overset{not}{=}d$.

Arătați că $(\exists)a,b,c\in(0,\infty)$ a.î. $a d_1(x,y)\le d(x,y)\le b d_1(x,y), (\forall)x,y\in\mathbb{R}^n$

Sol

$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|\cdot 1 \underset{C.B.S.}{\le}\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2}=$

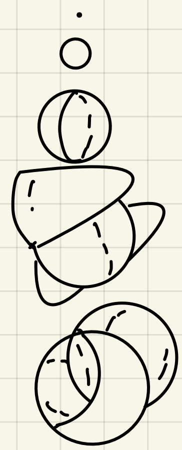
$=\sqrt{n}\,d(x,y), (\forall)x,y\in\mathbb{R}^n$

Alegem $a=\frac{1}{\sqrt n}$

$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2}\le\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|\right)^2}=$

$=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|=d_1$

Alegem $b=1$ □



-Curs 5-

Fie $n \in \mathbb{N}^*$
sp. metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$
$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

Obs
Dacă $n = 1$, atunci $d_2(x,y) = |x-y|$

Def
d_2 s.n distanța euclidiană a lui $\mathbb{R}^n$

Notație
Atunci când nu este pericol de confuzie, notăm $d \overset{not}{=} d_2$

Def
Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Spunem că A e mărg. dacă $(\exists)\, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ a.î. $A \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Prop
Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Mulțimea A este mărg. $\Leftrightarrow (\forall)\, x \in \mathbb{R}^n, (\exists)\, r > 0$ a.î. $A \subset B(x,r)$

Teorema Heine-Borel
În sp. metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$, o mult. $K \subset \mathbb{R}^n$ e compactă $\Leftrightarrow$ este închisă și mărginită.

Exc
Studiați dacă mult. K de mai jos sunt compacte în sp. met. $(\mathbb{R}, d)$

a) $K = \mathbb{N}$

Sol
K nu e mărg. $\Rightarrow$ nu e compactă

b) $K = (0;1)$

Sol
$\overline{K} = [0;1] \neq K \Rightarrow K$ nu e închisă $\Rightarrow$ nu e compactă
(închiderea)

c) $K = [0,1] \cup \{2\}$

Sol
$K \subset [0,2] \Rightarrow K$ = mărg.
$\overline{K} = K \Rightarrow K$ = închisă
$\Rightarrow K$ = compactă

Prop
Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ sp. metric, $\emptyset \neq A \subset X, a \in A$, $l \in Y$ și $f : A \to Y$. Sunt echiv:

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
2) $\forall (x_n)_n \subset A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{d_1}{=} a$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} l$

Obs
Pe $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se introduce distanța $\overline{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $\overline{d}(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, unde φ este func. bij. def. pe $\overline{\mathbb{R}}$ cu valori în $[-1,1]$ prin $\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \end{cases}$

Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ este sp. metric (și sp. top. Hausdorff / separat)
$(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\overline{d}})$

Limite de funcții

Fie $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ sp. top., $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, $l \in Y$ și $f : A \to Y$
Spunem că f are lim. l în a și scriem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dacă $(\forall)\, W \in \mathcal{V}_l, (\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $(\forall)\, x \in V \cap A, x \neq a$, avem $f(x) \in W$

Obs
În general, limita unei func. într-un punct nu este unică.

Obs
Dacă sp. top. $(Y, \mathcal{T}_2)$ e separat (Hausdorff), atunci $l \in Y$ e unic

Prop
Fie $(X, \mathcal{T})$ sp. top., $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A'$, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ și $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ și $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$. Atunci:

1) $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = l_1 + l_2$
2) $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l_1 l_2$
3) $\lim\limits_{x \to a} |f|(x) = \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l_1|$
4) $\lim\limits_{x \to a} (-f)(x) = \lim\limits_{x \to a} (-f(x)) = -l_1$
5) $l_1 = +\infty$ și $l_2 > -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$
6) $l_1 = -\infty$ și $l_2 < \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = -\infty$
7) $l_1 = +\infty$ și $l_2 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
8) $l_1 = +\infty$ și $l_2 < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$
9) $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $V \subset A$ și $f(x) \neq 0, (\forall)\, x \in V$ și $l_1 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{l_1}$
10) $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $V \subset A$ și $f(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in V$ și $l_1 \in \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (\frac{1}{f})(x) = 0$

Funcții continue

Fie $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$ sp. top., $a\in X$ și $f:X\to Y$.

f e cont. în a dacă $(\forall)\, W\in\mathcal{V}_{f(a)}$, avem $f^{-1}(W)\in\mathcal{V}_a$

Def

În contextul def. precedente spunem că f e cont. (pe X) dacă f e cont. în orice $x\in X$

Limite remarcabile

1–4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin/tg/\arcsin/arctg\, x}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $a\in(0;\infty)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r$, $r\in\mathbb{R}$

Obs

Fie $(X,\mathcal{T})$ sp. top., $\emptyset\neq A\subset X$ și $\mathcal{T}_A=\{D\cap A \mid D\in\mathcal{T}\}$.
$(A,\mathcal{T}_A)$ e sp. top.
↳ topologia indusă de A

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$ sp. top., $\emptyset\neq A\subset X$, $a\in A$ și $f:A\to Y$.
Sunt echiv:

1) f - cont. în a
2) $(\forall)\, W\in\mathcal{V}_{f(a)}$, $(\exists)\, V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(V\cap A)\subset W$

Ex

Fie $(X,\mathcal{T}_1)$ și $(Y,\mathcal{T}_2)$ sp. top. Fie $y_0\in Y$

1) Func. identitate $1_X: X\to X$ este cont.
2) Func. const. $f:X\to Y$, $f(x)=y_0$ e cont.

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2),(Z,\mathcal{T}_3)$ sp. top.,
$a\in X$, $f:X\to Y$, cont. în a și $g:Y\to Z$ cont. în $f(a)$.
Atunci $g\circ f: X\to Z$ e cont. în a

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1)$ un sp top., $\emptyset\neq A\subset X$, $a\in A$, $(Y,\mathcal{T}_2)$ un sp top.,
$f:X\to Y$

1) f - cont. în a, atunci $f|_A: A\to Y$ e cont. în a
2) Dacă $A\in\mathcal{V}_a$ și $f|_A: A\to Y$ e cont. în a, atunci $f:X\to Y$ e cont. în a

Obs

1) Fie $(X,\mathcal{T})$ - sp. top., $a\in X$ și $f:X\to\mathbb{R}$.
Atunci f - cont. în a $\iff$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\, V_\varepsilon\in\mathcal{V}_a$,
a.î. $(\forall)\, x\in V_\varepsilon$, avem $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

2) Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice, $a\in X$ și $f:X\to Y$.
Atunci f e cont. în a $\iff$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î.
$(\forall)\, x\in X$ cu prop. că $d_1(x,a)<\delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x),f(a))<\varepsilon$
(i.e. $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\, x\in X$ cu prop. că $x\in B(a,\delta_\varepsilon)$, avem $f(x)\in B(f(a),\varepsilon)$)

3) Fie $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}$, $a\in A$ și $f:A\to\mathbb{R}$. Atunci f e cont. în a $\iff$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\, x\in A$ cu prop. că $|x-a|<\delta_\varepsilon$, avem $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

4) Fie $\emptyset\neq A\subset\overline{\mathbb{R}}$ a.î. $+\infty\in A$ și $f:A\to\mathbb{R}$.
Atunci f e cont. în $+\infty$ $\iff$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$,
a.î. $(\forall)\, x\in A$ cu prop. că $x>\delta_\varepsilon$, avem $|f(x)-f(+\infty)|<\varepsilon$

5) Fie $\emptyset\neq A\subset\overline{\mathbb{R}}$ a.î. $+\infty\in A$ și $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$ a.î. $f(+\infty)=+\infty$
Atunci f e cont. în $+\infty$ $\iff$ $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\, x\in A$ cu prop. că $x>\delta_\varepsilon$ avem $f(x)>\varepsilon$

Prop

Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice $a\in X$ şi $f:X\to Y$. Sunt echivalente:

1) f cont. în a

2) $(\forall)(x_n)_n\subset X$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d_1}{=} a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} f(a)$

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$ sp. top., $\emptyset\neq A\subset X$, $a\in A\cap A'$ şi $f:A\to Y$. Sunt echiv:

1) f - cont. în a

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1),(Y,\mathcal{T}_2)$ - sp. top. şi $f:X\to Y$. Sunt echiv:

1) f continuă

2) $(\forall)D\subset Y$, o deschisă, avem că $f^{-1}(D)\subset X$ e deschisă
$(D\in\mathcal{T}_2)$ $(f^{-1}(D)\in\mathcal{T}_1)$

3) $(\forall)F\subset Y$, o închisă, avem că $f^{-1}(F)\subset X$ e închisă

4) $(\forall)B\subset Y$, avem $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$

5) $(\forall)A\subset X$, avem $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

Prop

Fie $(X,\mathcal{T})$ un sp. top., $a\in X$ şi $f,g:X\to\mathbb{R}$, două func. cont. în a. Atunci $f+g$, $f\cdot g$ şi $|f|$ sunt cont. în a

Dacă, în plus, $(\exists)V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(x)\neq 0$, $(\forall)x\in V$, atunci $\frac{1}{f}:V\to\mathbb{R}$ e cont. în a

Prop

Fie $(X,\mathcal{T}_1)$ un sp. top., $\emptyset\neq K\subset X$ o mult. compactă, $(Y,\mathcal{T}_2)$, şi fie $f:X\to Y$ o func. cont. Atunci $f(K)$ e mult. compactă

Teoremă

Fie $(X,\mathcal{T})$ un sp. top., $\emptyset\neq K\subset X$, o mult. compactă şi $f:K\to\mathbb{R}$ cont. Atunci $(\exists)$ $x_*,x^*\in K$ a.î.
$f(x_*)=\min\{f(x)\mid x\in K\}$,
$f(x^*)=\max\{f(x)\mid x\in K\}$

Funcţii uniform continue

Def

Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice şi $f:X\to Y$.
Spunem că f e uniform cont. (u.c.) dacă $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\,x,a\in X$ cu prop. că $d_1(x,a)<\delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x),f(a))<\varepsilon$

Prop

Orice func. uniform continuă este func. continuă

Obs

Reciproca prop. precedente este falsă

Prop

Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$, sp. met. a.î. X - mult. compactă (ne referim la topologia $\mathcal{T}_{d_1}$) şi $f:X\to Y$ o func. cont. Atunci f e u.c.

Prop

Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice, şi $f:X\to Y$. Sunt echiv.:

1) f - u.c.

2) $(\forall)(x_n)_n\subset X$, $(\forall)(y_n)_n\subset X$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n,y_n)=0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f(x_n),f(y_n))=0$.

Def

Fie (X,d) un sp. met. şi $(x_n)_n\subset X$.
Spunem că $(x_n)_n$ e şir Cauchy în raport cu metrica d dacă $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\,m,n\in\mathbb{N}$, $m\geq n_\varepsilon$, $n\geq n_\varepsilon$ avem $d(x_m,x_n)<\varepsilon$

Obs

Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înloc. cu sintagma „în sp. metric (X,d)".

Prop

Fie $(X,d_1),(Y,d_2)$ sp. metrice, $(x_n)_n\subset X$, şir Cauchy în rap. cu metrica d_1 şi $f:X\to Y$ o func. u.c. Atunci $(f(x_n)_n)_n\subset Y$ e şir Cauchy în rap. cu d_2

Prop

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $f:(a;b]\to\mathbb{R}$ (resp. $f:[a;b)$ sau $f:(a;b)$).
Sunt echiv:

1) f e u.c.

2) $(\exists)\,\tilde{f}:[a;b]\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}$ - cont. a.î. $\tilde{f}|_{(a,b]}=f$

$\longrightarrow$ Fie $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}$ şi $f:A\to\mathbb{R}$. Sunt echiv.

1) f. u.c.

2) $(\forall)(x_n)_n\subset A$ şi $(y_n)_n\subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$

Prop

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat (i.e. $I \neq \emptyset$ și I nu se reduce la un singur el.)
și $f: I \to \mathbb{R}$, o func. derivabilă, cu derivabila mărg.
Atunci f e u.c.

Prop

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ și $f: A \to \mathbb{R}$. Sunt echiv.

1) f e u.c.
2) $(\exists) a \in \mathring{A}$ a.î. f e u.c. pe $A \cap (-\infty, a]$ și f e u.c. pe $A \cap [a, \infty)$ e u.c.

Seminar 5

1. Faceți analiza topologică a mult.

a) $A = (0,1) \cup \{2\} \subset (\mathbb{R}, d)$

$\mathring{A} = ?$

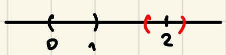
$x \in \mathring{A} \iff (\exists) r > 0$ a.î. $\underset{(x-r,\, x+r)}{\underset{\shortparallel}{B(x,r)}} \subset A = (0,1) \cup \{2\}$

$\left.\begin{array}{l} \mathring{A} \subset A \\ (0,1) \subset A \\ \hookrightarrow \text{deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow (0,1) \subset \mathring{A}$

Avem $(0,1) \subset \mathring{A} \subset (0,1) \cup \{2\}$

Stud. dacă $\{2\} \subset \mathring{A}$

$2 \in \mathring{A} \iff (\exists) r > 0$ a.î. $(2-r, 2+r) \subset (0,1) \cup \{2\}$



Deci $2 \notin \mathring{A}$

$\mathring{A} = (0,1)$

$\bar{A} = ?$

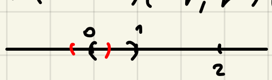
$x \in \bar{A} \iff (\forall) r > 0$, $\underset{(x-r,\, x+r)}{\underset{\shortparallel}{B(x,r)}} \cap \underset{(0,1) \cup \{2\}}{\underset{\shortparallel}{A}} \neq \emptyset$

$\left.\begin{array}{l} A \subset \bar{A} \\ A \subset [0,1] \cup \{2\} \\ [0,1] \cup \{2\} - \text{închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} \subset [0,1] \cup \{2\}$

Deci $(0,1) \cup \{2\} \subset \bar{A} \subset [0,1] \cup \{2\}$

Stud. dacă $0, 1 \in \bar{A}$

$0 \in \bar{A} \iff (\forall) r > 0, (-r, r) \cap (0,1) \cup \{2\} \neq \emptyset$



Deci $0 \in \bar{A}$

Analog $1 \in \bar{A}$

Deci $\bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$

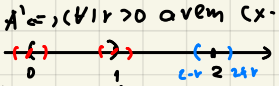
$A' = ?$

$x \in A' \iff (\forall) r > 0$ avem $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$A' \subset \bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$

Fie $x \in [0,1]$

$x \in A' \iff (\forall) r > 0$ avem $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$



Deci $[0,1] \subset A'$

$2 \in A' \iff (\forall) r > 0$ avem $(2-r, 2+r) \cap (A \setminus \{2\}) \neq \emptyset$

Deci $2 \notin A'$ Așadar $A' = [0,1]$

$Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0, 1, 2\}$ $Izo(A) = {}'A = \bar{A} \setminus A' = \{2\}$

$A = \mathbb{N} \subset (\mathbb{R}, d)$

b) 1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \iff (\exists) r > 0$, a.î. $(x-r, x+r) \subset \underset{\mathbb{N}}{\overset{\shortparallel}{A}}$

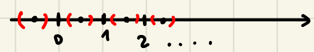
Deci $\mathring{A} = \emptyset$

2) $A' = ?$

$x \in A' \iff (\forall) r > 0$ avem $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

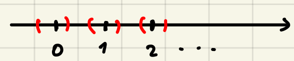
$x \in A' \iff (\forall) r > 0$ avem $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$



Deci $x \notin A'$

Fie $x \in \mathbb{N}$

$x \in A' \iff (\forall) r > 0$, $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$



Deci $x \notin A'$

Așadar $A' = \emptyset$

3) $\bar{A} = A \cup A' = \mathbb{N}$

4) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{N}$

5) $Izo(A) = \bar{A} \setminus A' = \mathbb{N}$

c) $A=\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}^*\} \subset (\mathbb{R}, d)$

1) $\mathring{A}=?$

$A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$

$x\in\mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0, (x-r,x+r)\subset A$

Deoarece orice interval de forma $(x-r,x+r)$ conține o inf de nr. iraționale și raționale, avem că

$\mathring{A}=\emptyset$

2) $\bar{A}=?$

$x\in\bar{A} \Leftrightarrow (\exists)(x_k)_k\subset A$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$

orice șir de el. din A poate avea drept limită un element al lui a (constant de la un rang încolo) sau 0

Deci $\bar{A} = A\cup\{0\}$

3) $A'=?$

$x\in A' \Leftrightarrow (\exists)(x_k)_k \subset A\setminus\{x\}$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$

Conf celor discutate la pasul precedent, avem că $A'=\{0\}$

4) $Fr(A)=\bar{A}\setminus\mathring{A} = A\cup\{0\}$

5) $Izo(A)=\bar{A}\setminus A' = A$

Obs

$(\mathbb{R}^2,d_2)$ este sp. metric, unde

$d_2:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

Obs

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ și $r>0$

1) $B((x,y),r)=\{(z,t)\in\mathbb{R}^2 \mid d_2((x,y),(z,t))<r\}$

$=\{(z,t)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2}<r\}=$

$=\{(z,t)\in\mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2+(t-y)^2<r\}=$

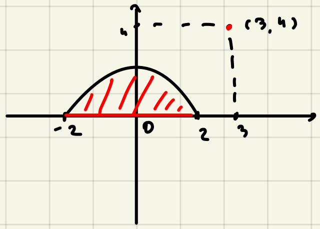
= discul deschis de centru (x,y) și rază r

2) $B[(x,y),r]=\bar{B}((x,y),r)=$

$=\{(z,t)\in\mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2+(t-y)^2\le r^2\}$

= discul închis de centru (x,y) și rază r

3. Faceți analiza top. a mult. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y\ge 0\}\cup\{(3,4)\}\subset(\mathbb{R}^2,d)$



1) $\mathring{A}=?$

$(x,y)\in\mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\, r>0$ a.î. $B((x,y),r)\subset A$

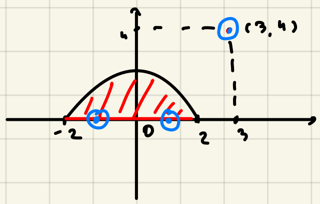
$\mathring{A}\subset A$

$\left.\begin{array}{l}\{(x,y) \mid x^2+y^2<4, y>0\}\subset A \\ \text{—||— deschisă}\end{array}\right\} \Rightarrow \{(x,y) \mid x^2+y^2<4, y>0\}\subset\mathring{A}$

Avem $\{(x,y) \mid x^2+y^2<4, y>0\}\subset\mathring{A}\subset A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y\ge0\}\cup\{3,4\}$

Stud. dacă $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(-2;2), y=0\}\cup\{(3,4)\}\subset\mathring{A}$

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ a.î. $x\in(-2;2), y=0$



Deci $(x,y)\notin\mathring{A}$

Deci $(3,4)\notin\mathring{A}$

Așadar $\mathring{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y>0\}$

2) $\bar{A}=?$

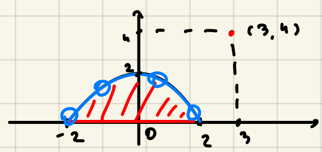
$(x,y)\in\bar{A} \Leftrightarrow (\forall)\, r>0, B((x,y),r)\cap A\neq\emptyset$

$A\subset\bar{A}$

$\left.\begin{array}{l}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le4, y\ge0\}\cup\{(3,4)\}\supset A \\ \text{—||— închisă}\end{array}\right\} \Rightarrow \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le4, y\ge0\}\cup\{(3,4)\}\supset\bar{A}$

Așadar $A\subset\bar{A}\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le4, y\ge0\}\cup\{(3,4)\}$

Stud. dacă $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4, y\ge0\}\subset\bar{A}$



Deci $(x,y)\subset\bar{A}$

Așadar

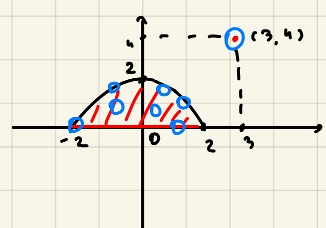
$\bar{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le4, y\ge0\}\cup\{(3,4)\}$

3) $A'=?$

$(x,y)\in A' \Leftrightarrow (\forall)\, r>0, B((x,y),r)\cap(A\setminus\{(x,y)\})\neq\emptyset$

$A'\subset\bar{A}$

Fie $(x,y)\in\bar{A}$



Deci $(3,4)\notin A'$

Așadar $A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y\ge0\}$

4) $Fr(A)=\bar{A}\setminus\mathring{A}=$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4, y\ge0\}\cup\{(3,4)\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(-2,2), y=0\}$

5) $Izo(A)=\bar{A}\setminus A'=\{(3,4)\}$ □

Curs 6

Func. derivabile

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to \mathbb{R}$

Spunem că func:

1) are derivată în a dacă (∃) în $\overline{\mathbb{R}}$ limita $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
2) este derivabilă în a dacă există și este finită limita de la 1)

Notație

În contextul def. precedente, dacă f are derivată în a, notăm $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $B \subset A$ a.î. f derivabilă pe B (i.e. f deriv. în orice punct din B).

Definim func $f': B \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ și o numim derivata lui B

Teoremă

Orice func. der. într-un punct este cont. în acel punct (Reciproca nu e adv.)

Prop

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $f, g: A \to \mathbb{R}$, 2 func. der. în a. Atunci:

1) $f+g$ e deriv. în a, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2) αf e deriv. în a, $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
3) $f \cdot g$ e deriv în a, $(f \cdot g)' = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$
4) Dacă $g(a) \neq 0$ (=> (∃) $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $g(x) \neq 0$, (∀) $x \in V \cap A$) atunci $\frac{f}{g}$ e deriv în a, $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}$

Teoremă

Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, intervale nedegenarate, $a \in I$, $f: I \to J$ o func. der. în a și $g: J \to \mathbb{R}$, o func. der. în $f(a) \in J$.

Atunci $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ e deriv. în a și $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Teoremă

Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, intervale nedegenarate, $a \in I$, $f: I \to J$, o func. cont. și bij.

Dacă f deriv. în a și $f'(a) \neq 0$, atunci func. inv. $f^{-1}: J \to I$ e deriv. în $b = f(a) \in J$ și $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ și $f: A \to \mathbb{R}$

Spunem că a este:

1) pct. de minim local al lui f dacă (∃) $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x)$, (∀) $x \in V \cap A$
2) pct. de maxim local al lui f dacă (∃) $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x)$, (∀) $x \in V \cap A$
3) pct. de extrem local al lui f dacă a este 1) sau 2)

Prop. (consecințe Lagrange)

Fie un $I \subset \mathbb{R}$ - int. nedegenerat și $f: I \to \mathbb{R}$ o func. deriv. (pe I)

1) Dacă $f'(x) = 0$, (∀) $x \in I$, atunci f e const.
2) Dacă $f'(x) \geq 0$, (∀) $x \in I$, atunci f e cresc.
3) Dacă $f'(x) \leq 0$, (∀) $x \in I$, atunci f e desc.

Teorema lui Fermat

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.î.

1) $a \in \mathring{A}$
2) a, pct. de extrem local
3) f deriv în a

Atunci: $f'(a) = 0$

Teorema lui Lagrange

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f - cont. pe $[a,b]$
2) f - deriv. pe (a,b)

Atunci (∃) $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema lui Cauchy

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f, g - cont. pe $[a,b]$
2) f, g - der. pe (a,b)

Atunci (∃) $c \in (a,b)$ a.î. $(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$

Teorema lui Rolle

Fie $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ a.î.

1) f cont. pe $[a,b]$
2) f deriv. pe (a,b)
3) $f(a) = f(b)$

Atunci (∃) $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$

Teorema lui Darboux

$I \subset \mathbb{R}$ - int. ned. și $f: I \to \mathbb{R}$ - deriv.

Atunci (∀) $J \subset I$, J interval, avem că $f'(J)$ e interval (i.e. f' are prop. lui Darboux)

Teorema lui l'Hospital

Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $I \subset \mathbb{R}$ interval ned. a.î. $(a,b) \subset I \subset [a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ și $f, g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (resp. $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$)
2) f, g - deriv. și $g'(x) \neq 0$, (∀) $x \in I \setminus \{x_0\}$
3) (∃) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci: α) $g(x) \neq 0$, (∀) $x \in I \setminus \{x_0\}$

β) (∃) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to \mathbb{R}$.

Def

Spunem că f e deriv. de 2 ori în a dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. f-deriv. pe $V \cap A$ și func. $f': V \cap A \to \mathbb{R}$ e deriv. în a. În acest caz, derivata func. f' în a se numește deriv. a doua a lui f în a și s.n. $f''(a)$ sau $f^{(2)}(a)$

Inductiv, se def. $f^{(n)}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ - int. ned., $n \in \mathbb{N}$ și $f: I \to \mathbb{R}$

Def

Spunem că f e de clasă C^n (pe I) dacă f e deriv. de n ori pe I și $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ e cont.

Notație

$C^n(I) = \{f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ e de clasă } C^n\}$

Spunem că f e de clasă C^∞ dacă f este derivabilă de orice ordin pe I (i.e. f e indefinit derivabilă)

Notație

$C^\infty(I) = \{f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ e de clasă } C^\infty\}$

Teoremă

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$

Obs

Reciproca e falsă

Def

O func. $g: X \to \mathbb{R}$ se numește mărg. dacă $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|g(x)| \leq M$, $(\forall)\ x \in X$

Prop

Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de func., $f_n: X \to \mathbb{R}$ a.î. f_n - mărg. $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ și $f: X \to \mathbb{R}$. Sunt echiv.:

1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

Teoremă (Formula lui Taylor cu rest Lagrange)

Fie, în plus, $a \in I$. Pp. că f e deriv. de $n+1$ ori pe I. Atunci $(\forall)\ x \in I$, $x \neq a$, $(\exists)\ c$ între a și x a.î.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\substack{\| \text{not} \\ T_n(x)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\substack{\| \text{not} \\ R_n(x)}}$$

($T_n(x)$: polinomul Taylor de ordin n; $R_n(x)$: restul de ordin n al form. lui Taylor)

Def

Fie $I \subset \mathbb{R}$ int. ned. și $f, F: I \to \mathbb{R}$. F e o primitivă a lui f dacă F e deriv. și $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I$

Șiruri de func.

Fie $X \neq \emptyset$, (Y, d) un sp. metric, $(f_n)_n$ un șir de func., $f_n: X \to Y$ $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ și $f: X \to Y$.

Def

Spunem că $(f_n)_n$:

1) Converge simplu (punctual) către f, dacă, $(\forall)\ x \in X$, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{d}{=} f(x)$ (i.e. $(\forall)\ x \in X$, $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_{\varepsilon,x}$, avem $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$)

În acest caz notăm $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s(p)} f$

2) Converge uniform către f dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, $(\forall)\ x \in X$, avem $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

În acest caz notăm $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Exc:

Fie $f_n: [-1;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

Stud. convergența simplă și uniformă pt. acest șir $(f_n)_n$

Sol Conv. simplă

Fie $x \in [-1,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f: [-1;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

Conv. uniformă

I. Varianta cu majorări, minorări

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{|x|}{1+n^2x^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x \in [-1;1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2} \right) = 0\ ?$

$\sup\limits_{x \in [-1;1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2}$: $\leq a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$; $\geq b_n > 0$, $b_n \cancel{\xrightarrow[n\to\infty]{}} 0 \Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[n\to\infty]{u}} f$

$1 + n^2x^2 = 1^2 + n^2|x|^2 \geq 2 \cdot 1 \cdot n|x|$ $(a^2+b^2 \geq 2ab)$ $\Rightarrow 1 \geq \frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \Rightarrow \frac{1}{2n} \geq \frac{|x|}{1+n^2x^2}$

$\Rightarrow \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x \in [-1;1]$

$\Rightarrow \sup\limits_{x \in [-1;1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup \frac{|x|}{1+n^2x^2} \right) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

II Calculul supremului

$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|, (\forall) n\in\mathbb{N}^*, (\forall) x\in[-1;1]$

Fie $f_n:[-1;1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x\cdot 2xn^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*, (\forall) x\in[-1;1]$$

$$f_{(n)}'(x)=0 \Leftrightarrow 1-n^2x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{n}$$

x	-1		$-\frac{1}{n}$		0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$	$-$	$-\ -$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-\ -$	$-$
$f_n(x)$	$\frac{-1}{1+n^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2n}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

Deci $\sup\limits_{x\in[-1;1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[-1;1]}\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|\right)=0$

Așadar $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Teorema (Bernstein)

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ o func. continuă.
Atunci $(\exists)(f_n)_n$ un șir de func. poli.,
$f_n:[a;b]\to\mathbb{R}$, a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

Teorema

Fie $(X,\mathcal{T})$ un sp. top., (Y,d) un sp. metric, $(f_n)_n$ un șir de func., $f_n:X\to Y$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, $f:X\to Y$ a.î.
$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ și $a\in X$.
Dacă f_n e cont în a, $(\forall) n\in\mathbb{N}$, atunci f e cont. în a

Teorema lui Dini

Fie $(X,\mathcal{T})$ un sp. top., $\emptyset\neq K\subset X$ o mulț. compactă, $(f_n)_n$ un șir monoton de func. continue, $f_n:K\to\mathbb{R}$, $(\forall) n\in\mathbb{N}$ și $f:K\to\mathbb{R}$, continuă
Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Teorema lui Tolya

Fie șirul de func. monotone $(f_n)_n$, $f_n:[a;b]\to\mathbb{R}$ și func. cont.
$f:[a;b]\to\mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Teorema de permutare a limitei cu derivata

Fie $(f_n)_n$, un șir de func., $f_n:I\to\mathbb{R}$ a.î.:

1) I - int. ned. și mărginit
2) $(\exists)\, x_0\in I$ a.î. $(f_n(x_0))_n$ e conv.
3) f_n deriv, $(\forall) n\in\mathbb{N}$
4) $(\exists)\, g:I\to\mathbb{R}$ a.î. $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{u} g$

Atunci $(\exists)\, f:I\to\mathbb{R}$ deriv. a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ și $f'=g$
(i.e. $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$)

1. Stud. cont. func. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Sol

f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu func. el.)

Stud. cont. lui f in $(0,0)$

Alegem $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ și

$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

$\Rightarrow f$ nu e cont. în origine $\square$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Sol

f - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu func. el.)

Stud. cont. lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

(pt. că $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$ $\Rightarrow 1 \geq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$)

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$\Rightarrow f$ - cont. în origine $\square$

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Stud. cont. și unif. cont. func. f

Sol

f-cont. pe $\mathbb{R}-\{0\}$ (op. de func. el.)

Stud dacă f este cont. în 0:

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\in[-1;1]} = 0$ (0 · mărg. = 0) $= f(0)$

Deci f cont. în 0

Fie $x \in \mathbb{R}^*$

$f'(x) = (x\sin\frac{1}{x})' = \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

$|f'(x)| = |\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}| \leq |\sin\frac{1}{x}| + |\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}| \leq 1 + |\frac{1}{x}||\cos\frac{1}{x}| \leq 1+1\cdot 1 = 2, (\forall) x \in (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

deci f - unif. cont. pe $(-\infty;-1]$ și pe $[1;+\infty)$
(pt. că derivata e mărg.)

$\left.\begin{array}{l} f \text{ - cont. pe } [-1;1] \\ [-1;1] \text{ - compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ - u.c. pe $[-1;1]$

Deci f este u.c. pe $\mathbb{R}$

3. Fie $A = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $B = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$

$f : A \cup B \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 2, & x \in B \end{cases}$

Arătați că:

a) f u.c. pe A și pe B

b) f nu e u.c. pe $A \cup B$

Sol

a) Fie $(x_n)_n \subset A$ și $(y_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(1-1) = 0$

Deci f e u.c. pe A

Analog f e u.c. pe B

b) Alegem $(x_n)_n \subset A \cup B$, $x_n = n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

și $(y_n)_n \subset A \cup B$, $y_n = n + \frac{1}{n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n - n - \frac{1}{n}) = -\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(1-2) = -1 \neq 0$ deci f nu este u.c. $\square$

4. Stud. u.c. func.:

a) $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f : [1; 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $(\forall)\, x \in [1, 2)$

$|f'(x)| = |-\frac{1}{x^2}| = \frac{1}{x^2} \leq 1$, $(\forall)\, x \in [1, 2)$

c) $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

Alegem $(x_n)_n \subset (0, \infty)$, $(y_n)_n \subset (0, \infty)$

$x_n = \frac{1}{2n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(2n - n \quad) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(2n - n) = \infty \neq 0$

5. Fie $a \geq 0$ și $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

Arătați că f e u.c. $\iff a > 0$

Sol „$\Leftarrow$"

Știm că $a > 0$, arătăm că f e u.c.

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $(\forall)\, x \in (a; +\infty)$

$|f'(x)| = \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$, $(\forall)\, x \in (a; +\infty) \Rightarrow$ f e u.c.

$x \in (a; +\infty) \Rightarrow a < x \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{x}$

„$\Rightarrow$"

Știm că f e u.c. și arătăm că $a > 0$

P.R.A. că $a = 0$

Alegem $(x_n)_n \subset (0; +\infty)$, $(y_n)_n \subset (0; +\infty)$,

$x_n = e^{-n}$, $y_n = e^{-2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{2n}}) = 0$

și $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(-n + 2n) = \infty \neq 0$

Deci f nu e u.c., contradicție,

așadar $a > 0$

6. Fie $f:(0,\frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$, $f(x)= \sin\frac{1}{x}$. Arăt. că f nu e u.c.

Sol

P.R.A. că f u.c.

Deci $(\exists)\ \tilde{f}:[0;\frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$ a.î. $\tilde{f}$ cont. și $\tilde{f}\big|_{(0;\frac{2}{\pi}]} = f$

$\tilde{f}$ - cont. în $0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \quad \left(\tilde{f}(x) = f(x) = \sin\frac{1}{x},\ (\forall)\, x \in (0;\frac{2}{\pi})\right)$$

Deci $(\exists) \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$

Alegem $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{1}{x_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$,

contradicție cu $(\exists) \lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ $(0 \neq 1)$

Așadar f nu e u.c.

7. Fie (X,d_1), (Y,d_2) sp. metrice, $(x_n)_n \subset X$ un șir Cauchy în rap. cu metrica d_1 și $f: X \to Y$ - o func. u.c.

Arătați că $(f(x_n))_n$ e tot șir Cauchy

Sol

f - u.c. $\Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\, x,y \in X$ cu prop. că $d_1(x,y) < \delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$ (și $\delta_\varepsilon > 0$ de mai sus)

$(x_n)_n$ șir Cauchy în rap. cu met. $d_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $d_1(x_m,x_n) < \delta_\varepsilon$

Fie $m,n \in \mathbb{N} \geq n_\varepsilon$

$d_2(f(x_m),f(x_n)) < \varepsilon$

Deci $(f(x_n))_n$ e șir Cauchy în rap. cu met. d_2 $\square$

Curs 7

Serii de funcții

Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de func., $f_n : X \to \mathbb{R}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n : X \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = f_p(x) + \ldots + f_n(x)$, $(\forall) n \geq p$

Def

Perechea $((f_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ s.n. **serie de func.** și se notează $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ (sau $\sum_{n\geq p} f_n$ sau $\sum_n f_n$)

Obs

În general $p=0$ sau $p=1$

Fie $\sum_n f_n$ o serie de func. ($s_n : X \to \mathbb{R}$, $s_n = f_0 + \ldots + f_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$)

Def

Spunem că seria de func $\sum_n f_n$:

1) **converge simplu** dacă șirul $(s_n)_n$ este simplu conv.
2) **converge uniform** dacă șirul $(s_n)_n$ este uniform conv.
3) **converge absolut** dacă seria $\sum_n |f_n(x)|$ e conv.

Def

Dacă $\sum_n f_n$ converge simplu, limita (simplă) a șirului $(s_n)_n$ se numește suma seriei $\sum_n f_n$ și se notează tot cu $\sum_n f_n$

Teoremă

Pp. că (X, τ) e sp. top. Fie $a \in X$. Dacă $\sum_n f_n$ converge uniform către funcția $f : X \to \mathbb{R}$ (i.e. $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$) și f_n cont. în a, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, atunci f cont. în a

Teoremă (Weierstrass)

Pp. că $(\exists)(\alpha_n)_n \subset [0;\infty)$ a.î.:

1) $\sum_n \alpha_n$ conv.
2) $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, $(\forall) x \in X$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Atunci $\sum_n f_n$ converge uniform și absolut

Exc

Arătați că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ este u.c. ($x \in \mathbb{R}$)

Alegem $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (serie armonică gen., $\alpha = 2$)

Conf. teoremei lui Weierstrass avem că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}$ e u.c.

Def

Mulțimea $A = \{x \in X \mid \sum_n f_n(x) \text{ e conv.}\}$ s.n. mult. de conv. a seriei de func. $\sum_n f_n$

Serii de puteri

Fie $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$, $(\forall) n \geq p$

($0^0 = 1$ prin convenție)

Def

Seria de func. $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n$ s.n. **serie de puteri**

Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri

Def

1) Definim $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$ (raza de conv. a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$)
2) Intervalul $(-R, R)$ s.n. intervalul de conv. al seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$
3) Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_n a_n x^n \text{ e conv.}\}$ s.n. mulțimea de conv. a $\sum_n a_n x^n$

Teoremă

Fie $\sum_n a_n x^n$ și R:

1) Dacă $(\exists) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0;\infty]$, atunci $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$
2) Dacă $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, atunci $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$

Teorema I a lui Abel

1) Pt. orice $x \in (-R, R)$, seria $\sum_n a_n x^n$ e abs. conv.
2) Pt. orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, $\sum_n a_n x^n$ e div.

Corolar

avem $(-R, R) \subset A \subset [-R, R]$

Exc

Det. mult. de conv. pt. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$

Sol

$a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+1}(1 + \ldots + \frac{1}{n+1})|}{|(-1)^n(1 + \ldots + \frac{1}{n})|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}(1 + \ldots + \frac{1}{n})}{(-1)^n(1 + \ldots + \frac{1}{n})} + \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \ldots + \frac{1}{n}}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \ldots + \frac{1}{n}}\right) = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

$0 \leq \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \ldots + \frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\downarrow$ 0

Fie A - mult. de conv. a $\sum_n a_n x^n$

Avem $(-1, 1) \subset A \subset [-1, 1]$

Stud. dacă $1 \in A$ și $-1 \in A$

Fie $x_n = (-1)^n\left(1 + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Pt. $x = 1$ seria devine $\sum_n a_n$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$

P.R.A. că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Deci $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}\right) = 0$

contradicție cu faptul că șirul $\left(1 + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ nu e conv (vezi Curs 1)

Deci $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$.

Conf. crit. suf. de div. avem că $\sum_n x_n$ e div.

Prin urmare $1 \notin A$

Pt. $x=-1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+\dots+\frac{1}{n})(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1+\dots+\frac{1}{n})$

Deoarece $\lim_{n\to\infty}(1+\dots+\frac{1}{n}) \neq 0$ rezultă conf. crit. suf. de div. că $\sum_n(1+\dots+\frac{1}{n})$ e div.

Deci $-1 \notin A$

Așadar $A=(-1,1)$ $\square$

Teorema a II-a a lui Abel

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $R>0$ și mulț. de conv. A.

Atunci func. $s: A \to \mathbb{R}$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e cont.

Explicații

1) Pt. orice $a \in (-R,R)$, s e cont. în a

2) Dacă $R \in A$ (resp. $-R \in A$), atunci s e cont. în R (resp. în $-R$), i.e.

$$\lim_{\substack{x\to R\\ x<R}} s(x) = s(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Teorema de derivare „termen cu termen" a seriilor de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu R. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \underset{n-1 \overset{not}{=} m}{=} \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ are același R

Dacă $R>0$ și $s:(-R,R)$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, atunci s e derivabilă și $s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

Teorema de integrare „termen cu termen" a seriilor de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu R. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}t^{n+1} \underset{t \overset{not}{=} x}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ are același R.

Dacă $R>0$ și $s, S:(-R,R)\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$,

atunci S e o primitivă a lui s

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $a \in I$ și $f \in C^{\infty}(I)$

Def

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ s.n. seria Taylor asoc. func. f în a

Teorema

Seria Taylor asoc. func. f în punctul a este conv. în punctul $x \in I$, $x \neq a$ și are suma $f(x)$ $\iff \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$, unde $R_n(x)$ e restul Formulei lui Taylor

Obs

În general $a=0$

Def

Seria lui Taylor asoc. lui f în 0 se mai numește și seria MacLaurin asoc. lui f.

Exc

Folosind teorema prec., arătați că $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (\forall) x \in \mathbb{R}$

Sol

$I = \mathbb{R}$

$a = 0 \in I$

$f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$

$f \in C^{\infty}(I)$

$f^{(k)}(x) = e^x, (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) k \in \mathbb{N}$

$f^{(k)}(0) = 1, (\forall) k \in \mathbb{N}$

$$\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_n \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Conf. Formulei lui Taylor cu rest Lagrange, $(\forall) n \in \mathbb{N}, (\forall) x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, $(\exists)$ c între 0 și x a.î. $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x)}$

$R_n(x) := \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}, (\forall) x \in \mathbb{R}^*$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}^*$

Fie $x \in \mathbb{R}^*$

Arătăm că $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$

$$0 \le |R_n(x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \overset{not}{=} x_n, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

c între 0 și $x \Rightarrow e^c < e^{|x|}$

Este suf. să arătăm că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{|x|} |x|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{e^{|x|} |x|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$$

Conf. crit rap. pt șiruri cu term strict pozitiv avem că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Deci $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Așadar $\underset{e^x}{\underset{\parallel}{f(x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (\forall) x \in \mathbb{R}^*$ □

$f(0) = e^0 = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$

Obs

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, (\forall) x \in (-1,1)$$

Înlocuim x cu $-x$ în relația precedentă și obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, (\forall) x \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Înlocuim x cu x^2 în ult. relație și obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, (\forall) x \in (-1,1)$$

Exc

Arătați că $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, (\forall) x \in [-1,1]$

Sol

Cons. $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, (\forall) x \in (-1;1)$$

Integrăm „termen cu termen" și obț. că $(\exists)$ $C \in \mathbb{R}$ a.î. $\underbrace{f(x)}_{\operatorname{arctg} x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C, (\forall) x \in (-1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 0^{2n+1} + C = 0 + C = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 0$$

Deci $\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, (\forall) x \in (-1,1)$

Pt. $x = 1$ seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} 1^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ conv. (crit. lui Leibniz)

Conf. teoremei a II-a a lui Abel, avem

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} 1^{2n+1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1$$

Pt. $x = -1$ seria devine ...

Deci $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}, (\forall) x \in [-1,1]$

Seria binomială

$(\forall) \alpha \in \mathbb{R}, (\forall) x \in (-1,1)$, avem

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

(?) Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp. metr., $(x_n)_n \subset X$ un șir Cauchy în rap. cu metrica d_1 și $f: X \to Y$, o funcț. u.c. Arătați că $(f(x_n))_n$ este șir Cauchy în rap. cu metrica d_2.

f u.c. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, y \in X$ cu prop. că $d_1(x,y) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta_\varepsilon > 0$ (de mai sus).

$(x_n)_n$ e șir Cauchy în rap. cu metrica $d_1 \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ $d_1(x_n, x_m) < \delta_\varepsilon$.

Fie $n, m \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ avem $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Deci $(f(x_n))_n$ e șir Cauchy în rap. cu metrica d_2.

16.11.2023

(1) Studiați conv. simplă și uniformă pt. urm. șirurilor de funcții:

a) $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Sol: C.S.: Fie $x \in [0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{x+n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f, \text{ unde } f:[0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 0$$

C.U.:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{x+n} \right| = \frac{x}{x+n} \quad \forall x \in [0, \infty), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{x+n} \underset{x=n}{\geq} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f_n \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\to}}$$

$$\frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

Seminar 7

1) Stud. conv. simplă și uni. pt. urm. șiruri de func.:

b) $f_n : [2,3] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

C.S. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} f$, unde $f : [2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

C.U.

$\sup\limits_{x\in[2,3]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[2,3]} \frac{x}{x+n}$

Fie $f_n : [2,3] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$

$f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} \geq 0$, $(\forall)\, x\in[2,3]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f_n$ cresc, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

x	2	3
$f_n'(x)$	+ + + + + + + + + +	
$f_n(x)$	$\nearrow$	

Deci $\sup\limits_{x\in[2,3]} f_n(x) = \frac{3}{3+n}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

Așadar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{3+n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

c) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Sol

C.S.

Fie $x \in [0,\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} f$, $f : [0,\infty)$, $f(x) = x$

C.U.

$\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - x\right| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \left| \frac{\cancel{x^2} + \frac{1}{n} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + x} \right| =$

$= \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + x} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

d) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n}{n+x}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Sol

C.S.

Fie $x \in [0,\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+x} = 1 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} f$, unde $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$

C.U.

$\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{n}{n+x} - 1\right| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{n+x}$

Fie $g_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{x}{n+x}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$g_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2} \geq 0$, $(\forall)\, x\in[0,\infty)$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow g_n$ - cresc., $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	+ + + + + + + + + +	
$g_n(x)$	$\nearrow$	1

Deci $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} g_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+n} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

Prin urmare $f_n \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\to}} f$

e) $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

Sol

C.S. Fie $x\in(0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x\in(0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} f$, unde

$f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x\in(0,1) \\ 1, & x=1 \end{cases}$

C.U.

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ continuă}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^* \\ f \text{ nu e continuă (în 1)} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\to}} f$ $\square$

f) $f_n : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Sol

C.S.

$f_n(x) = \left(\frac{1+x}{e^{2x}}\right)^n = (f_1(x))^n$, $(\forall)\, x\in[\frac{1}{2};1]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Arătăm că $\underset{\text{evident}}{0 \leq} f_1(x) < 1$, $(\forall)\, x\in[\frac{1}{2};1]$

Fie $g : [\frac{1}{2};1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1+x-e^{2x}$

$g'(x) = 1 - 2e^{2x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2x = -\ln 2 \Leftrightarrow$

$x = \frac{-\ln 2}{2}$

x	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	− − − − − − − −	
$g(x)$	$1-2e$ $\searrow$	$1-2e^2$

Deci $g(x) \leq 1-2e < 0$, $(\forall)\, x\in[\frac{1}{2};1]$

Așadar $1+x < e^{2x}$, $(\forall)\, x\in[\frac{1}{2};1]$.

Prin urmare, $f(x) = \frac{1+x}{e^{2x}} < 1$, $(\forall)\, x\in[\frac{1}{2};1]$

Fie $x\in[\frac{1}{2},1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_1(x))^n = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$,

unde $f:[\frac{1}{2},1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

c.u.

Avem:

1) $[\frac{1}{2},1]$ - compactă
2) $(f_n)_n$ e desc.
3) f_n, f sunt cont.
4) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$

Conf teoremei lui Dini avem că:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

g) $f_n:[\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(\cos x)^n$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Sol c.s.

$f_n(x)=(\cos x)^n=(f_1(x))^n$, $(\forall)\, x\in[\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$0\le f_1(x)<1$, $(\forall)\, x\in[\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}]$

Fie $x\in[\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f:[\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

c.u.

$$\underset{[\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}]}{x} \longmapsto \underset{[0,1)}{\cos x} \text{ desc.} \Rightarrow f_n \text{ - desc.}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$$

Avem:

1) $f_n, f:[\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$
2) f_n - desc., $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$
3) f - cont.
4) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$

Din teorema lui Polya avem:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

2. Fie $f_n, f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ și g e cont.
$(a,b\in\mathbb{R})$
$(a<b)$

Arătați că $f_n g \xrightarrow[n\to\infty]{u} fg$

Sol

$\left.\begin{array}{l} g:[a,b]\to\mathbb{R}, \text{ cont.} \\ [a,b] \text{ - compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists)\, M>0$ a.î. $|g(x)|\le M$, $(\forall)\, x\in[a,b]$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \Rightarrow (\forall)\, \varepsilon>0$, $(\exists)\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n\ge n_\varepsilon$, $(\forall)\, x\in[a,b]$ avem $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$

Fie $\varepsilon>0$. Avem $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ de mai sus

Fie $n\ge n_\varepsilon$ și $x\in[a;b]$

$|f_n(x)g(x)| - |f(x)g(x)| =$

$= |g(x)|\,|f_n(x)-f(x)| \le M\cdot|f_n(x)-f(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

$\Rightarrow f_n g \xrightarrow[n\to\infty]{u} fg$

3. Stud. conv. s. și u. pt:

$(f_n)_n$ și $(f_n')_n$, unde $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{\operatorname{arctg} nx}{n}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Sol

Pt. $(f_n)_n$:

c.s.

Fixăm $x\in\mathbb{R}$

$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} nx<\frac{\pi}{2}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$\underset{\searrow\ 0\ \swarrow}{-\frac{\pi}{2n}<f_n(x)<\frac{\pi}{2n}}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$

Prin urmare $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$,
unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$

c.u.

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\frac{|\operatorname{arctg} nx|}{n} \le \frac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Pt. $f_n'(x)$:

$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{1+n^2x^2}\cdot \cancel{n}}{\cancel{n}} = \frac{1}{1+n^2x^2}$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Fie $x\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2x^2} = \begin{cases}0, & x\in\mathbb{R}^*\\ 1, & x=0\end{cases} \Rightarrow f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{s} g$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{R}^*\\ 1, & x=0\end{cases}$

c.u

$\left.\begin{array}{l} f_n' \text{ continuă}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^* \\ g \text{ nu e continuă (în 0)} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n' \underset{n\to\infty}{\not\xrightarrow{u}} g$

Temă:

$f_n:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{\cos nx}{n}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Curs 8

Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Considerăm $\mathbb{R}^p = \{(x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{R}, (\forall) i = \overline{1,p}\}$

Def

Fie $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$
$y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^n$
și $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$
2) $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_p)$

Obs

Atunci când nu specificăm se subînțelege că notăm $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$, etc.

Def

Pt. orice $x \in \mathbb{R}^p$, def. norma lui prin:

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$

Prop

Func. $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $\underset{\in \mathbb{R}^p}{x} \longmapsto \underset{\in \mathbb{R}}{\|x\|}$ are prop.:

1) $\|x\| \geq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}^p$
2) $\|x\| = 0 \iff x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^p} \in \mathbb{R}^p$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (\forall) x, y \in \mathbb{R}^p$
4) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, (\forall) \alpha \in \mathbb{R}, (\forall) x \in \mathbb{R}^p$

Obs

Pt. orice $x, y \in \mathbb{R}^p$, avem $\underset{d(x,y)}{\overset{\shortparallel}{d_2(x,y)}} = \|x - y\|$

Obs

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$ și $f : A \to \mathbb{R}^p$

Pt. orice $a \in A$ avem $f(a) = (f_1(a), \dots, f_q(a))$

Prin urm. am def. func.

$f_1, \dots, f_q : A \to \mathbb{R}$

Derivate parțiale și funcții diferențiabile

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$ și $a \in \mathring{A}$

Def

1) Spunem că f e deriv. parțial (admite derivată parțială) în raport cu variabila x_i ($i \in \{1, \dots, p\}$ fixat) în punctul a dacă există în $\mathbb{R}^q$ lim. urm.:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t}, \text{ unde } e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$$

În acest caz notăm $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t}$

derivata parțială a func. f în rap. cu var x_i și în punctul a

2) Spunem că f este diferențiabilă sau derivabilă în punctul a dacă există o aplicație liniară $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ a.î.:
($T(x + y) = T(x) + T(y)$)
($T(\alpha x) = \alpha T(x)$)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0_{\mathbb{R}^q} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q$$

Obs

Aplicația liniară T, dacă există, este unică, se notează cu $df(a)$ (sau $Df(a)$ sau $f'(a)$) și se numește diferențiala lui f în a

($df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$)

Obs

1) Fie $c \in A$. Sunt echiv.:
   i) f cont. în c
   ii) $f_1, \dots, f_q$ cont în c

2) Fie $i \in \{1, \dots, p\}$. Sunt echiv:
   i) f admite der. parțială în rap. cu var. x_i, în punctul a
   ii) $f_1, \dots, f_q$ admit der. parțială în rap. cu var. x_i, în punctul a

Dacă i) sau ii) de la 2) e adv., atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a) \right)$$

3) Sunt echiv:
   i) f dif. în a
   ii) $f_1, \dots, f_q$ dif. în a

Dacă i) sau ii) de la 3 e adv., atunci:

$df(a) = (df_1(a), \dots, df_q(a))$

Teoremă

Dacă f este dif. în a, atunci f este der. parțial în rap. cu var. x_i în punctul a, $(\forall) i = \overline{1,p}$ și $df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$,

$$df(a)(\underset{(v_1, \dots, v_p)}{\overset{\shortparallel}{v}}) = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} \right]^t$$

Obs

Dacă $q = 1$, form. prec. devine:

$df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$df(a)(v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}^t =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) v_p$$

Teoremă

f dif. în $a \Rightarrow f$ cont. în a

Obs

Reciproca e falsă

Obs

Orice aplicație liniară $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ e dif. în orice punct $a \in \mathbb{R}^p$ și $df(a) = f$

Obs

Pt. orice $i \in \{1, \dots, p\}$, proiecția $pr_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $pr_i(u) = u_i$ este dif. în orice $a \in \mathbb{R}^p$ și $d\, pr_i(a) = pr_i$, deoarece pr_i e liniară

Notăm: $pr_i = dx_i$, $(\forall)\ i = \overline{1,p}$

Cu această notație, dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e dif. în $a \in \mathring{A}$, atunci $df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$df(a)(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)u_p =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, pr_1(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, pr_p(u) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, dx_p(u) =$$

$$= df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\, dx_p$$

Teoremă (Crit. de dif.)

Pp. că $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$, $V \subset A$ a.î. f admite toate deriv. parțiale pe V i.e. $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \in \mathbb{R}^q$, $(\forall)\ c \in V$, $(\forall)\ i \in \overline{1,p}$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \to \mathbb{R}^q$ e cont în a pt. orice $i = \overline{1,p}$.

Atunci f e dif. în a

Exc

Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - x + 2z$

Stud. dif. func. f în $(1,2,3)$ și în cazul în care f e dif. în $(1,2,3)$, det dif.

Sol

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z + 2$$

$\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}$ continue pe $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ - mult. deschisă (deci este vecinătate pt. toate punctele sale)

$\xRightarrow{\text{Crit. de dif.}}$ f dif. pe $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ f dif. în $(1,2,3)$

$df(1,2,3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$df(1,2,3)(u,v,w) = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) & \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right]^{T} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)}_{2\cdot 1 - 2 - 1 = -1} u + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)}_{2 \cdot 2 - 1 = 3} v + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)}_{2\cdot 3 + 2 = 8} w =$$

$$= -u + 3v + 8w$$

i.e. $df(1,2,3) = -dx + 3dy + 8dz$ $\square$

Exc

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 : & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Stud. cont. lui f

b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

c) Stud. dif. lui f

a) Vezi seminar 6

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(xy)'_x \sqrt{x^2+y^2} - (xy)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(xy)'_y \sqrt{x^2+y^2} - (xy)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+(t,0)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Am obținut:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot x}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dots & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă $\Rightarrow$ f dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif. în $(0,0)$, atunci

$$df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad df(0,0)(u,v) = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = 0u + 0v = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$= 0 \Rightarrow f$ dif. în $(0,0)$

$\neq 0 \Rightarrow f$ nu e dif. în $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0 \Rightarrow f$ nu e dif. în $(0,0)$ $\square$

Seminar 8

1. Arătați că seria de func. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2}$ converge uniform

Sol

$\frac{n^4+x^2}{2} \geq \sqrt{n^4 x^2} = n^2|x|, (\forall) x \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 1 \geq \frac{2n^2|x|}{n^4+x^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{2|x|}{n^4+x^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\left|\frac{2x}{n^4+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -\frac{1}{n^2} \leq \frac{2x}{n^4+x^2} \leq \frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}_{-\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}} \leq \operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2} \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2}\right| \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}$

Arătăm că $\operatorname{arctg} x \leq x, (\forall) x \in [0, \infty)$

Fie $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0, (\forall) x \in [0, \infty)$

x	0									∞
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	$\nearrow$									

Atunci $f(x) \geq f(0) = 0, (\forall) x \in [0, \infty)$

Deci $\operatorname{arctg} x \leq x, (\forall) x \in [0, \infty)$

Conf. celor discutate mai sus, avem

$\left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $\sum_n \frac{1}{n^2}$ este conv., avem, cf. Th. lui Weierstrass, că $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{n^4+x^2}$ conv. uniform

2. Det. mult. de conv. pt. urm. serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} x^n$

Sol

$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n \cdot 2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n \cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$

$R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Fie A - mult. de conv. a seriei de puteri din enunț

Avem $(-2,2) \subset A \subset [-2,2]$

Stud. dacă -2 și $2 \in A$

Dacă $x = -2$

Seria devine: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^n}}{n \cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ conv. (crit. lui Leibniz)

Deci $-2 \in A$

Dacă $x = 2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - divergentă (serie arm. gen. cu $\alpha = 1$)

Deci $2 \notin A$

Așadar $A = [-2, 2)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n! \cdot x^n}{(a+1)\dots(a+n)}, a > 1$

Sol

$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(a+1)\dots(a+n)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} \cancel{n!}\,(n+1)}{\cancel{(a+1)\dots(a+n)}(a+n+1)} \cdot \frac{\cancel{(a+1)\dots(a+n)}}{\cancel{n!} \cdot (-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a+n+1} = 1$

$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n} = 1$

Fie A - mult. de conv. a seriei de puteri din enunț

$(-1,1) \subset A \subset [-1,1]$

Stud. dacă $-1, 1 \in A$

Pt. $x = -1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\dots(a+n)}$

Fie $x_n = \frac{n!}{(a+1)\dots(a+n)}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Aplicăm crit. Raabe - Duhamel

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(a+1)\dots(a+n)}} \cdot \frac{\cancel{(a+1)\dots(a+n)}(a+n+1)}{\cancel{n!}\,(n+1)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot n}{n+1} = a \\ a > 1\end{array}\right\} \Rightarrow$ Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e conv.

Prin urmare $-1 \in A$

Pentru $x = 1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(a+1)\dots(a+n)}$

Fie $x_n = \frac{(-1)^n n!}{(a+1)\dots(a+n)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\dots(a+n)} =$ conv.

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e abs. conv. $\Rightarrow$ e și conv.

Prin urmare $A = [-1, 1]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}(x+3)^n$

Notăm $y = x+3$

Seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} y^n$

$a_n = \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{\cancel{3^n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = 3$

$R = \frac{1}{3}$

Fie B mulț. de conv. a seriei de puteri $\sum\limits_{n} a_n y^n$

$(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \subset B \subset [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$

Stud. dacă $\pm\frac{1}{3} \in B$

Dacă $y = -\frac{1}{3}$, seria devine $\sum\limits_{n} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}(-\frac{1}{3})^n = \sum\limits_{n} \frac{\cancel{3^n}}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\cancel{3^n}} = \sum\limits_{n} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ - conv. (Leibniz)

Deci $-\frac{1}{3} \in B$

Dacă $y = \frac{1}{3}$, seria devin $\sum\limits_{n} \frac{\cancel{3^n}}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{1}{\cancel{3^n}} = \sum\limits_{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ - div. (serie armonică gen. $\alpha = \frac{1}{3}$)

Deci $\frac{1}{3} \notin B$

Așadar $B = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Fie A - mulț. de conv. a seriei de puteri din enunț

$\underset{x+3}{\overset{\shortparallel}{y}} \in B \Rightarrow -\frac{1}{3} \le x+3 < \frac{1}{3} \quad | -3$

$-\frac{10}{3} \le x < -\frac{8}{3}$

$A = [-\frac{10}{3}, -\frac{8}{3})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}(x-2)^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \cdot x^{2n}$

(vezi la Matei)

f) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

$I = \mathbb{R}$
$a = 0$
$f \in C^{\infty}(I)$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$
. . . .

Conf. Form. lui Taylor cu rest Lagrange,

$(\forall)\, x \in \mathbb{R}, x \neq 0, (\forall)\, n \in \mathbb{N}, (\exists)\, c$ între 0 și x a.î.

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\text{Rest}}$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}, (\forall)\, x \in \mathbb{R}^*, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Fie $x \in \mathbb{R}^*$

Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Este suf. să arătăm că

$\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$

$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \frac{\overbrace{|f^{(n+1)}(c)|}^{\le 1}}{(n+1)!}|x^{n+1}| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Fie $x_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1$

Conf. crit. rap. pt. șiruri cu term. strict poz.

avem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Așadar $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^*$

(când n e par, term. e 0)

$f(0) = 0 \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 0^{2n+1}$

$\Rightarrow f(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$

Deci $f(x) = {}^{\shortparallel}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

Curs 9

Teoremă

Fie $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^q$,
$g: A \to B$, $g = (g_1, \dots, g_q)$, $h: B \to \mathbb{R}^r$, $h = (h_1, \dots, h_r)$,
$f = h \circ g : A \to \mathbb{R}^r$, $f = (f_1, \dots, f_r)$ și $a \in \mathring{A}$ a.î. $g(a) \in \mathring{B}$

Dacă g e dif. în a și h e dif. în $g(a)$. Atunci:

1) $f = h \circ g$ e dif. în a și $df(a) = d(h\circ g)(a) = dh(g(a)) \circ dg(a)$

2) $$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial (h\circ g)_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial h_i}{\partial y_l}(g(a)) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_k}(a)$$

$(\forall)\ i = \overline{1,r},\ k = \overline{1,p}$

Explicații teoremă

1) $$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "dg(a)"] \arrow[rr, bend right, "df(a) = dh(g(a)) \circ dg(a)"'] & \mathbb{R}^q \arrow[r, "dh(g(a))"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

2) $$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^p \arrow[r, "g = (g_1, \dots, g_q)"] \arrow[rr, bend right, "f = h\circ g"'] & B \subset \mathbb{R}^q \arrow[r, "h = (h_1, \dots, h_r)"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

$(x_1, \dots, x_p)$ $\qquad$ $(y_1, \dots, y_q)$

Au sens: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ $(\forall)\, k = \overline{1,p}$; $\quad \frac{\partial g}{\partial x_k}(a)$ $(\forall)\, k = \overline{1,p}$; $\quad \frac{\partial h}{\partial y_l}(g(a))$ $(\forall)\, l = \overline{1,q}$

Exc

Fie $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o func. dif.
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = h(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$

Arătați că f e dif și det. derivatele ei parțiale $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

Sol

Fie $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$ și $f = h\circ g$

Fie $g_1, g_2, g_3: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = xyz$
$g_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$
$g_3(x,y,z) = x+yz$

Avem $g = (g_1, g_2, g_3)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) \right) = (yz, 2x, 1),\ (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = (xz, 2y, z),\ (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = (xy, 2z, y),\ (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \text{ - cont. pe } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow g$ dif. pe $\mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} h \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \\ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow f = h\circ g$ dif. pe $\mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g = (g_1, g_2, g_3)"] \arrow[rr, bend right, "f = h\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(x,y,z) $\qquad$ (u,v,w)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial (h\circ g)}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot xz + \frac{\partial h}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2y + \frac{\partial h}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot z,\ (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial (h\circ g)}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot yz + \frac{\partial h}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2x + \frac{\partial h}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz),\ (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial (h\circ g)}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot yx + \frac{\partial h}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2z + \frac{\partial h}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot y,\ (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Obs

În exc. precedent, putem nota $g = (u, v, w)$ i.e. $g_1 = u$, $g_2 = v$, $g_3 = w$, ie
$u, v, w: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u(x,y,z) = xyz$,
$v(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $w(x,y,z) = x+yz$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g = (u,v,w)"] \arrow[rr, bend right, "f = h\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(x,y,z) $\qquad$ (u,v,w)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial v}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial h}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z)$$

$f(x,y,z) := h(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$

$f = h(u,v,w)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

Derivate parțiale de ordin superior și diferențiale de ordin superior

Fie $p,q\in\mathbb{N}^*$, $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}^p$, $f: A\to\mathbb{R}^q$ și $a\in\mathring{A}$

Def

Fie $i,j\in\{1,\dots,p\}$

Pp. că $(\exists)\ V\in\mathcal{V}_a$, $V\subset A$, a.î. f admite derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pe V

(i.e. $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)\ (\forall)\ c\in V$)

Dacă func. $\frac{\partial f}{\partial x_j}: V\to\mathbb{R}^q$ admite derivată parțială în rap. cu var. x_i, în punctul a, această derivată parțială s.n. derivata parțială de ord. 2 a func. f în rap. cu var. x_i și x_j, în punctul a și se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$, dacă $i\neq j$ și s.n. cu

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, dacă $i=j$

Similar se def. der. parțiale de ord. $k\geq 3$

Notații corecte:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ $\quad\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2\partial x_j}(a)$ $\quad\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(a)$ etc.

Notații greșite:

$\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2\partial x_j}(a)$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}(a)$ etc

Formula lui Taylor cu rest Lagrange, cazul multidimensional

Fie $p,q\in\mathbb{N}^*$, $\emptyset\neq D\subset\mathbb{R}^p$ deschisă și convexă

(i.e. $(\forall)\ x,y\in D$, $(\forall)\ t\in[0,1]$, avem $(1-t)x+ty\in D$),

$n\in\mathbb{N}$, $f: D\to\mathbb{R}^p$ o func. care admite toate derivatele parțiale de ord. $n+1$ pe D și acestea sunt continue pe D și fie $a\in D$. Atunci:

$(\forall)\ x\in D, x\neq a$, $(\exists)\ c\in(a,x) \overset{not}{=} \{(1-t)a+tx \mid t\in(0,1)\}$ a.î.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a)^2 + \frac{1}{n!}d^nf(a)(x-a)^n}_{T_n(x)} \underbrace{+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c)(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

Lama lui Schwarz

Fie $i,j\in\{1,\dots,p\}$, $i\neq j$ și $V\in\mathcal{V}_a$, $V\subset A$ a.î. f admite derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ per

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}: V\to\mathbb{R}^q$ e cont. în a, atunci

$(\exists)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$

Def

Pp că $(\exists)\ V\in\mathcal{V}_a$, $V\subset A$ a.î. V admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 a lui f în a

prin $d^2f(a): \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$,

$$d^2f(a)(\underset{(u_1,\dots,u_p)}{u},\underset{(v_1,\dots,v_p)}{v}) = \sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\,u_i v_j$$

Def

Pp că $(\exists)\ V\in\mathcal{V}_a$, $V\subset A$ a.î. V admite toate derivatele parțiale de ordinul 3 a lui f în a

prin $d^3f(a): \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$,

$$d^3(f(a)(u,v,w)) = \sum_{i,j,k=1}^{p}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(a)\,u_i v_j w_k$$

Similar se def. $d^kf(a)$, $k\geq 3$

Notații

$d^2f(a)(u,u) \overset{not}{=} d^2f(a)(u)^2$

$d^3f(a)(u,u,u) \overset{not}{=} d^3f(a)(u)^3$

. . . .

Obs

Dacă $p=2$, $q=1$ și $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$, atunci:

$$d^2f(a)(u)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)u_1u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)u_2^2$$

. . . .

$$d^kf(a)(u)^k = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a)u_1^k + \dots + C_k^i\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(a)u_1^{k-i}u_2^i + \dots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a)u_2^k$$

Exc $8+4-2+3=$

Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,
$f(x,y)=xy^3+2xy-2x^2+3x+y-2$

a) Det. deriv. part. de ord 2 ale lui f

Sol

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^3+2y-4x+3$$
$$(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3xy^2+2x+1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=3y^2+2\ \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{Lema}}{=}}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6xy$$

b) Det. $df(1,2)$ și $d^2f(1,2)$

Sol

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\text{ cont. pe }\mathbb{R}^2\\ \mathbb{R}^2\text{ desc.}\end{array}\right\}\Rightarrow f\text{ dif. pe }\mathbb{R}^2 \Rightarrow f\text{ dif. în }(1,2)$

$$df(1,2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ df(1,2)(\underset{(u_1,u_2)}{u})\overset{f}{=}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)}_{11}u_1+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)}_{15}u_2=11u_1+15u_2$$

Toate deriv. part. de ord 2 sunt continue

$$d^2f(1,2):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ d^2f(1,2)(\underset{(u_1,u_2)}{u},\underset{(v_1,v_2)}{v})=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)\cdot u_1v_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)\cdot u_1v_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2)u_2v_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)u_2v_2=$$

$$=-4u_1v_1+14u_1v_2+14u_2v_1+12u_2v_2$$

c) Det. polinomul Taylor de ord. 2 asoc. func. f în $(1,2)$ (i.e. $T_2(x,y)$)

Sol

$$T_2(x,y)=f(1,2)+\frac{1}{1!}df(1,2)((x,y)-(1,2))+\dots+\frac{1}{2!}d^2f(1,2)((x,y)-(1,2))^2=$$

$$=f(1,2)+\frac{1}{1!}(11(x-1)+15(y-2))+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)(x-1)(y-2)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\right)=$$

$$=13+11(x-1)+15(y-2)+\frac{1}{2}\left(-4(x-1)^2+28(x-1)(y-2)+12(y-2)^2\right)=$$

$$=13+11(x-1)+15(y-2)-2(x-1)^2+14(x-1)(y-2)+6(y-2)^2\ \square$$

Puncte de extrem local

Def

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}$.
Spunem că este:

1) punct de minim local al lui f, dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x), (\forall)\ x \in V \cap A$
2) punct de maxim local al lui f, dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x), (\forall)\ x \in V \cap A$
3) punct de extrem local dacă este 1) sau 2)

Def

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathring{A}$
Spunem că a este pct. critic al lui f dacă f e dif. în a și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, (\forall)\ i = \overline{1,p}$

Teorema lui Fermat

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.î.:

1) $a \in \mathring{A}$
2) a este punct de extrem local a lui f
3) f este dif. în a

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0\ (\forall)\ i = \overline{1,p}$

Def

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D deschisă, $f : D \to \mathbb{R}^q$ și $k \in \mathbb{N}$. Spunem că f e de clasă C^k (pe D) dacă f admite toate der. parțiale de ord. k (pe D) și acestea sunt continue (pe D)

Criteriul de stabilire a punctelor de extrem local

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^p$, D desc., $f : D \to \mathbb{R}$, o func. de clasă C^2 (pe D) și $a \in D$, un punct critic al lui f.

Notăm $H_f(a) =$ (matricea hessiană a lui f în a)

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}$$

$\cdots$

$$\Delta_p = \det(H_f(a))$$

1) Dacă $\Delta_1 > 0 \ldots \Delta_p > 0$, atunci a este punct de minim local al lui f
2) Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^p \Delta_p > 0$, a e punct de maxim local al lui f
3) Dacă $\Delta_1 \geq 0, \ldots, \Delta_p \geq 0$, sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \ldots, (-1)^p \Delta_p \geq 0$ și $(\exists)\ i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ a.î. $\Delta_{i_0} = 0$, atunci nu se poate trage nicio concluzie
4) În toate celelalte cazuri, a nu este punct de extrem local al lui f

Exc:

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
Det. punctele de extrem local ale lui f și precizați natura lor

Curs 10

Exc

Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$

Det. pct. de extrem ale lui f și prec. natura lor.

Sol

$\mathbb{R}^2$ deschisă

Det. pct. critice ale lui f

f cont.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-15$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=6xy-12$$
$,(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^2\\ \mathbb{R}^2 \text{ desc.}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ dif. pe $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-15=0 \,/:3\\ 6xy-12=0 \,/:6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-5=0\\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+\frac{4}{x^2}-5=0\\ y=\frac{2}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^4-5x^2+4=0\\ y=\frac{2}{x}\end{cases}$$

Notăm $t=x^2$

Avem t^2-5t+4

$\Delta=9$

$t=\frac{5\pm 3}{2}$, $t_1=4$, $t_2=1$

$x^2=4 \Rightarrow x\in\{\pm 2\} \Rightarrow y\in\{\pm 1\}$

$x^2=1 \Rightarrow x\in\{\pm 1\} \Rightarrow y\in\{\pm 2\}$

Soluțiile sist. de mai sus sunt:

$(2,1),(-2,-1),(1,2),(-1,-2)$

f este dif. pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ orice sol. a sist. este pct. critic al lui f

Punctele critice ale lui f sunt $(-2,-1),(1,2),(2,1),(-1,-2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6y \underset{\substack{\text{Lema}\\ \text{lui Schwarz}}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$
$,(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Obs. că f este de clasă C^2

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{pmatrix},(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$Hf(2,1)=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1=12>0\\ \Delta_2=\begin{vmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{vmatrix}=108>0\end{array}\right\} \Rightarrow (2,1)$ pct. de minim local al lui f

$Hf(-2,-1)=\begin{pmatrix}-12 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1<0\\ \Delta_2<0\end{array}\right\} \Rightarrow (-2,-1)$ pct. de maxim local al lui f

$Hf(1,2)=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & 6\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1=6>0\\ \Delta_2=-108<0\end{array}\right\} \Rightarrow (1,2)$ nu este pct. de extrem local al lui f

Analog nici $(-1,-2)$ nu este $\square$

Teorema funcțiilor implicite (T.F.I.)

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{p+1}$, D deschisă;
$F: D \to \mathbb{R}$ și $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0, y^0) \in D$ a.î.

1) $F(x_1^0, \dots, x_p^0, y^0) = 0$
2) F de clasă C^1 (pe D)
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, \dots, x_p^0, y^0) \neq 0$

Atunci $(\exists)\ U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}_{(x_1^0, \dots, x_p^0)}$, $(\exists)\ V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}_{y^0}$

și $(\exists!)\ f: U \to V$ (f func. implicită)

cu prop:

a) $f(x_1^0, \dots, x_p^0) = y^0$

b) $F(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p)) = 0, (\forall)(x_1, \dots, x_p) \in U$

c) f este de clasă C^1 și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))}, (\forall)(x_1, \dots, x_p) \in U,$ $(\forall)\ i = \overline{1,p}$

Notație

În contextul T.F.I., $f \overset{\text{not}}{=} y$

Def

Func. f care se notează cu y din T.F.I. s.n. func. implicită asoc. ec. $F(x_1, \dots, x_p, y) = 0$

Obs

Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Dacă $F \in C^k$, atunci f (not. y) $\in C^k$

Exc

Arătați că ec. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 2$ definește într-o vec. a pct. (1,1), func. implicită $y = y(x)$ și det. $y'(1)\left(= \frac{dy}{dx}(1)\right)$

Sol

Fie $D = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{1+1}$ și $F: D \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$
(D deschisă)

1) $F(1,1) = 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y + 1$
$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y + 1$ $\quad (\forall)(x,y) \in D = \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ cont. (pe D) $\Rightarrow$ F de clasă C^1

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -2 + 2 + 1 = 1 \neq 0$

Conf. T.F.I., $(\exists)\ U = \overset{\circ}{U} \in \mathcal{V}_1$
$(\exists)\ V = \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}_1$, $(\exists!)\ y: U \to V$

cu prop.:

a) $y(1) = 1$

b) $F(x, y(x)) = 0, (\forall)\ x \in U$

c) y este de clasă C^1 și $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}, (\forall)\ x \in U$

Pt. a det. $y'(1)$, avem 2 variante:

Varianta 1

↳ Folosim a) și c)

$$y'(x) = -\frac{2x - 2y(x) + 1}{-2x + 2y(x) + 1}, (\forall)\ x \in U \Rightarrow$$

$y'(x) \overset{c)}{=} \frac{dy}{dx}(x)$

$$y'(1) = -\frac{2 - 2y(1) + 1}{-2 \cdot 1 + 2y(1) + 1} = -\frac{2 - 2 + 1}{-2 + 2 + 1} = -1$$

Varianta 2

↳ Folosim a) și b)

$F(x, y(x)) = 0, (\forall)\ x \in U \iff x^2 - 2xy(x) + y^2(x) + x + y(x) - 2 = 0$ $\quad (\forall)\ x \in U$

Derivăm ult. rel. în raport cu x:

$$2x - 2y(x) - 2xy'(x) + 2y(x)y'(x) + 1 + y'(x) = 0$$

$(\forall)\ x \in U \Rightarrow y'(x)(-2x + 2y(x) + 1) = -2x + 2y(x) - 1, (\forall)\ x \in U$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-2x + 2y(x) - 1}{-2x + 2y(x) + 1}, (\forall)\ x \in U$$

$\Rightarrow y'(1) = -1$ $\square$

T.F.I., caz general

Fie $p,q\in\mathbb{N}^*$, $\emptyset\neq D\subset\mathbb{R}^{p+q}$, D desc., $F:D\to\mathbb{R}^q$ $(F=(F_1,\dots,F_q))$

şi $(x^0,y^0)\in D$ $(x^0=(x_1^0,\dots,x_p^0),\ y^0=(y_1^0,\dots,y_q^0))$

a.î.:

1) $F(x^0,y^0)=0_{\mathbb{R}^q}=(0,\dots,0)$
2) F este de clasă C^1 (pe D)
3) $$\frac{D(F_1,\dots,F_q)}{D(y_1,\dots,y_q)}(x^0,y^0)\overset{def}{=}\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x^0,y^0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q}(x^0,y^0)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F_q}{\partial y_1}(x^0,y^0) & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial y_q}(x^0,y^0)\end{vmatrix}\neq 0$$

Atunci $(\exists)\ U=\overset{\circ}{U}\in\mathcal{V}_{(x_1^0,\dots,x_p^0)}$, $(\exists)\ V=\overset{\circ}{V}\in\mathcal{V}_{(y_1^0,\dots,y_q^0)}$ şi

$(\exists!)\ f:U\to V$, func. implicită,

$f=(f_1,\dots,f_q)$ cu prop.

a) $f(x^0)=y^0$
b) $F(x,f(x))=0_{\mathbb{R}^q}$, $(\forall)\ x\in U$
c) f este de clasă C^1 şi

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)=-\frac{\frac{D(F_1,\dots,F_q)}{D(x_i,y_2,\dots,y_q)}(x,f(x))}{\frac{D(F_1,\dots,F_q)}{D(y_1,\dots,y_q)}(x,f(x))},\ (\forall)\ i=\overline{1,p},\ (\forall)\ x\in U$$

$\dots\dots\dots$

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x)=-\frac{\frac{D(F_1,\dots,F_q)}{D(y_1,\dots,y_{q-1},x_i)}(x,f(x))}{\frac{D(F_1,\dots,F_q)}{D(y_1,\dots,y_q)}(x,f(x))},\ (\forall)\ i=\overline{1,p},\ (\forall)\ x\in U$$

Extreme cu legături

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq A \subset E$, $f : E \to \mathbb{R}$ și $a \in A$.

Def

Spunem că a este:

1) pct. de minim local al lui f condiționat de A dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x)$, $(\forall)\ x \in U \cap A$

2) pct. de maxim local al lui f condiționat de A dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x)$, $(\forall)\ x \in U \cap A$

3) pct. de extrem local al lui f condiționat de A dacă a este 1) sau 2)

Obs

Dacă $A = E$, se omite sintagma „cond. de A"

Denumire alternativă

Punctele de extrem local ale lui f condiționate de A s.n. și pcte. de extrem local ale lui f relative la A

Fie $1 \leq k < p$ $(k \in \mathbb{N})$
și $g_1 \dots g_k : E \to \mathbb{R}$

Def

Dacă $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots g_k(x) = 0\}$, punctele de extrem local ale lui f cond. de A se numesc puncte de extrem local ale lui f cu legăturile $g_1(x) = \dots g_k(x) = 0$

Pp, în continuare, că $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots g_k(x) = 0\}$, E este mulțime desc. și $f, g_1, \dots, g_k$ sunt de clasă C^1 (pe E)

Teorema urm. dă condiții necesare de existență pt. punctele de extrem local cu legături.

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $a \in A$ (i.e. $g_1(a) = \dots g_k(a) = 0$)

Pp. că $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p}} = k$ și că a este pct. de extrem local al lui f condiționat de A

Atunci $(\exists)\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î.

$$(1)\ \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(a) = 0, \end{cases}$$

unde $L : E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$

Def

1) Un pct. $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$ a.î. $g_1(a) = \dots g_k(a) = 0$ (i.e. $a \in A$)

a.î. $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p}} = k$

și $(\exists)\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î. A verif. sist. (1)

s.n. punct staționar al lui f cond. de A

(sau cu leg. $g_1(x) = \dots g_k(x) = 0$)

2) Nr. reale $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ s.n multiplicatori lui Lagrange

3) Func. L s.n. lagrangeianul problemei de extreme

Obs

Valorile $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se schimbă odată cu punctul staționar condiționat a

Obs

Teorema prec. se poate reformula astfel:
„Orice pct. de extrem local cond. este punct staționar condiționat"

Obs

Reciproca este falsă

Algoritm pt. det. punctelor staționare condiționate

1) Se cons. func. $L : E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$
($\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nedeterminați)

2) Se formează sist.:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_p}(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ \dots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

și se caută sol. acestuia
($p+k$ ec. și $p+k$ nec.)
$x_1, \dots, x_p$
$\lambda_1, \dots, \lambda_k$

3) Dacă $(a_1, \dots, a_p, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e sol. a sist. de la 2) și $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p}} = k$ atunci $(a_1, \dots, a_p)$ e pct. staționar al lui f cu leg. $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

Obs

Printre aceste pcte. staționare cond., se pot afla și punctele de extrem local cond.

Căutăm acum condiții suficiente care să ne permită să identificăm dintre pctle. staț. cond., pe cele care sunt pcte. de extrem local cond.

Fie $a=(a_1,\dots,a_p)\in E$ un pct. staț. al lui f cond. de A. Aceasta înseamnă că $a\in A$ c.i.e. $g_1(a)=\dots g_k(a)=0)$,

$\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le p}}=k$ și $(\exists)\ \lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$

a.î. a să fie sol. a sist. (1)

Pp. că lagrangeianul $L\dots$ este de clasă C^2 pe E

Diferențiem în punctul a relațiile sist. $\begin{cases} g_1(x)=0\\ g_2(x)=0\\ \dots\\ g_k(x)=0\end{cases}$ și obținem $\begin{cases}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial g_1}{\partial x_p}(a)dx_p=0\\ \dots\dots\dots\\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\frac{\partial g_k}{\partial x_p}(a)dx_p=0\end{cases}$

Deoarece matricea acestui sistem liniar este

$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le p}}$ și rangul ei este k, putem exprima k diferențiale în func. de celelalte $p-k$

Pp. că det. urm. $\frac{D(g_1,\dots,g_k)}{D(x_{p-k+1},\dots,x_p)}(a)\neq 0$ (rangul e k)

Exprimăm $dx_{p-k+1},\dots,dx_p$ în func. de $dx_1,\dots,dx_{p-k}$

Putem scrie $(*)\begin{cases} dx_{p-k+1}=\sum_{i=1}^{p-k}\theta_i^1 dx_i\\ \dots\dots\\ dx_p=\sum_{i=1}^{p-k}\theta_i^k dx_i\end{cases}$

Reamintim că $d^2L(a):\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$

$$d^2L(a)(u,v)=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(a)\,u_i\cdot v_j$$

Fie $F(a):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $F(a)(u)=d^2L(a)(u)^2=$

$$=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(a)\,u_iu_j$$

Putem scrie $F(a)=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(a)dx_idx_j$

Înlocuim în expresia lui $F(a)$ pe $dx_{p-k+1},\dots,dx_p$ cu $(*)$ și

def. $F(a)|_{leg.}=\sum_{i,j=1}^{p-k}A_{ij}\,dx_idx_j$, unde A_{ij} rez. din calcul

$\left(F(a)|_{leg}:\mathbb{R}^{p-k}\to\mathbb{R},\ F(a)|_{leg}(u)=\sum_{i,j=1}^{p-k}A_{ij}\,u_iu_j\right)$

1) Dacă $F(a)|_{leg}(u)\ge 0,\ (\forall)\ u\in\mathbb{R}^{p-k}$ și $F(a)|_{leg.}(u)=0 \iff u=0_{\mathbb{R}^{p-k}}$, atunci a e pct. de minim local al lui f cu leg. $g_1(x)=\dots g_k(x)=0$

2) Dacă $F(a)|_{leg}(u)\le 0,\ (\forall)\ u\in\mathbb{R}^{p-k}$ și $F(a)|_{leg.}(u)=0 \iff u=0_{\mathbb{R}^{p-k}}$, atunci a e pct. de maxim local al lui f cu leg. $g_1(x)=\dots g_k(x)=0$

Denumire alt.

Pctle. staț. cond. s.n. și pcte. critice cond.

Obs

În aplicațiile noastre avem $dx_i\cdot dx_j=dx_j\cdot dx_i$, $(\forall)\ i,j=\overline{1,p-k}$

Seminar 9

1. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x func:

a) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{2-x}$

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$

Fie $y=\frac{x}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-y}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}y^n=\frac{1}{2}\cdot\sum_n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_n\frac{1}{2^{n+1}}x^n$, $(\forall)\ x\in(-2,2)$

$x\in(-2,2)\Rightarrow y\in(-1,1)$

b) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1-x)$

2 a) Stud. cont. lui f

b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

c) Stud. dif. lui f

unde: i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Sol

a) Vezi seminar 6

b) Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{(xy)'_x\cdot(x^2+y^2)-(xy)\cdot(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2y+y^3-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x(x^2+y^2)-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+te_1)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(t,0))-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t}=\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

Am obț $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^2+y^2)-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ - desc. $\Rightarrow f$ dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$

f nu e cont. în $(0,0)$

$\Rightarrow f$ nu e dif. în $(0,0)$ $\square$

ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5y^2}{x^8+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol

a) f - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. cont. în $(0,0)$

V1

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^5y^2}{x^8+y^4} - 0\right| = \left|\frac{x^5y^2}{x^8+y^4}\right| = \frac{|x^5y^2|}{x^8+y^4} = |x| \underbrace{\frac{x^4y^2}{x^8+y^4}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{|x|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f\text{-cont. în } (0,0)$$

$\left(\text{expl: } \frac{x^8+y^4}{2} \geq \sqrt{x^8 \cdot y^4} = \frac{x^8+y^4}{2} \geq x^4 \cdot y^2 \,/ : x^8+y^4 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}\right)$

V2

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^5y^2}{x^8+y^4}\right| = \frac{|x^5y^2|}{x^8+y^4} = \frac{|x^5| \cdot |y^2|}{x^8+y^4} = \left(\frac{|x|^8}{x^8+y^4}\right)^{\frac{5}{8}} \cdot \left(\frac{|y|^4}{x^8+y^4}\right)^{\frac{2}{4}} \cdot (x^8+y^4)^{\frac{5}{8}+\frac{2}{4}-1} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{x^8}{x^8+y^4}\right)^{\frac{5}{8}}}_{\leq 1} \underbrace{\left(\frac{y^4}{x^8+y^4}\right)^{\frac{2}{4}}}_{\leq 1} \cdot (x^8+y^4)^{\frac{9}{8}-1} \leq (x^8+y^4)^{\frac{1}{8}>0} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \quad \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0)$$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{5x^4y^2(x^8+y^4) - x^5y^2 \cdot 8x^7}{(x^8+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^5y(x^8+y^4) - x^5y^2 \cdot 4y^3}{(x^8+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ - cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă $\Rightarrow f$ dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif. în $(0,0)$, atunci $df(0,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df(0,0)(u,v) \stackrel{+}{=} \left[\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = 0u + 0v = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^5y^2}{x^8+y^4} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^2}{(x^8+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^2}{(x^8+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right), (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^5 y_n^2}{(x_n^2+y_n^4)\sqrt{x_n^2+y_n^2}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^5}\cdot\frac{1}{n^4}}{\left(\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^8}\right)\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^9}}{\frac{2}{n^8}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2n^9\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5y^2}{(x^8+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$

Deci f nu e dif. în $(0,0)$ $\square$

iii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^4+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol

a) f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. cont. lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{y^3}{x^4+y^2}\right| = \frac{|y^3|}{x^4+y^2} = |y| \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\leq 1} \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0)$$

(Expl. $x^4+y^2 \geq y^2 \Rightarrow \dfrac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1$)

b)
c) Rezolvați voi! $\square$

1\. a) Stud. cont. lui f

b) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

c) Stud. dif. lui f

unde: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4+y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{0 \cdot (x^4 \cdot y^2) - y^3 \cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{-4x^3y^3}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^4+y^2) - y^3 \cdot 2x}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dots = 1$$

c) $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont. în } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow$ f dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif în $(0,0)$, atunci $df(0,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$df(0,0)(u,v) \overset{t}{=} \left[\left(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}, \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] =$$

$$= 0 \cdot u + 1 \cdot v = v$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(x,y) - df((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{y^3}{x^4+y^2} - 0 - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{y^3} - x^4y - \cancel{y^3}}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left|\frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \left|\frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{x^4|y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{x^2|y|}{x^4+y^2}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}|x| \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2}|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(Expl. $\frac{x^4+y^2}{2} \geq \sqrt{x^4y^2} = x^2|y| \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{x^2|y|}{x^4+y^2}$ (expl. $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow 1 \geq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$)

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^4y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow f$ dif. în $(0,0)$

ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^7 y^8}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu func. el.)

Stud. cont. lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^7 y^8}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}} - 0 \right| = \frac{|x|^7 y^8}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}} = |y| \underbrace{\frac{|x|^7 |y|^7}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{2}}} \leq |y| \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|y|}{\sqrt{2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0)$$

(Expl. $\dfrac{x^{28}+y^{28}}{2} \geq \sqrt{x^{28} \cdot y^{28}}$

$\dfrac{x^{28}+y^{28}}{2} \geq x^{14} y^{14}$

$\dfrac{\sqrt{x^{28}+y^{28}}}{\sqrt{2}} \geq |x|^7 |y|^7$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \geq \dfrac{|x|^7 |y|^7}{\sqrt{x^{28}+y^{28}}}$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{7x^6 y^8 \sqrt{x^{28}+y^{28}} - \frac{x^7 y^8}{2\sqrt{x^{28}+y^{28}}} \cdot 28 x^{27}}{x^{28}+y^{28}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0}{t^{14}} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{0}{t^{14}} - 0}{t} = 0$$

2. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Arătați că f e cont.

b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ și arăt că sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ și nu sunt cont. în $(0,0)$

c) Arăt. că f e dif.

a) f e cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Stud. cont. în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} - 0 \right| = |xy| \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \leq |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0)$$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos \frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos \frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+te_1)+f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-0}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)+f(0,0)}{t}=0$$

Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{x^2+y^2}+xy\left(\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\ldots\ldots\ldots$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Arăt. că $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu e cont. în $(0,0)$

Alegem $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(y_n\sin\frac{1}{x_n^2+y_n^2}-\cos\left(\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\right)\cdot\frac{-2x_n^2y_n}{(x_n^2+y_n^2)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\cdot\sin\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2}-\cos\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2}\right)\cdot\frac{2\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}}{\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^2\right)^2}=$$

$$=0-\lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi\cdot\frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^3}{2\cdot\cancel{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)^4}=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}(1\cdot\sqrt{n\pi})=-\infty\neq 0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}$ nu e cont. în $(0,0)$

Analog se arată că $\frac{\partial f}{\partial y}$ este cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

c) $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\text{ cont. pe }\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\text{ desc.}\end{array}\right\}\Rightarrow f$ dif. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Stud. dif. lui f în $(0,0)$

Dacă f ar fi dif în $(0,0)$,

atunci $df(0,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$df(0,0)(u,v)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\underbrace{\sin\frac{1}{x^2+y^2}}_{\leq 1}\right|\leq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=|x|\underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1}\leq|x|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0\Rightarrow f\text{ dif. în }(0,0)$$

$(\text{Expl. }\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{y^2}=|y|$

3. Fie $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dif. și $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$f(x,y,z)=\varphi(xy,\ x^2+y^2-z^2)$.

Arătați că f e dif. și $xz\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)-yz\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+(x^2-y^2)\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0$, $(\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Fie $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y,z)=(xy,\ x^2+y^2-z^2)$

$f=\varphi\circ g$

Fie $u,v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $u(x,y,z)=x\cdot y$

$v(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=(y,2x)$

$(\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=(x,2y)$

$\dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=(0,2z)$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial x},\dfrac{\partial g}{\partial y},\dfrac{\partial g}{\partial z}\ \text{cont. pe } \mathbb{R}^3\\ \mathbb{R}^3 \text{ desc.}\end{array}\right\}\Rightarrow g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3\\ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3\end{array}\right\}\Rightarrow f=\varphi\circ g \text{ dif. pe } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd}\underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "g=(u,v)"] \arrow[rr, bend right, "f=g\circ\varphi"'] & \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}\end{tikzcd}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(g(x,y,z))\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)=$

$=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot y+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot 2x$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)+\dfrac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y,z)=$

$=\dfrac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot x+\dfrac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot 2y$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial z}(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)+\dfrac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot\dfrac{\partial v}{\partial z}(x,y,z)=$

$=\dfrac{\partial f}{\partial v}(g(x,y,z))(-2z)$

$xz\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)-yz\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+(x^2-y^2)\dfrac{\partial f}{\partial z}=\ldots=0$

4. Det. pctle. de extrem local ale func. de mai jos și prec. natura lor:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

$\mathbb{R}^2$ - desc., f. cont.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x^3$

$(\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ - cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 4x^3 = 0 \\ -4y^3 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - y^9 = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - y^8) = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$y = 0, x = 0$

sau

$y = 1, x = 1$

sau

$y = -1 \quad x = -1$

Punctele crit. ale lui f sunt: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Obs că f e de clasă C^2

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \Rightarrow (0,0)$ Nu e pct. de ext. local

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -12 < 0 \\ \Delta_2 = 144 - 36 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1)$ - pct. de max. local

$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (-1,-1)$ e pct. de max. local

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$

c) $f:(0,\infty)^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \frac{1}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+z$

$(0,\infty)^3 = (0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$

Sol

$(0,\infty)^3$ desc.

f cont.

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}$ $\quad (\forall)(x,y,z)\in(0,\infty)^3$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}+1$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ cont. pe } (0,\infty)^3 \\ (0,\infty)^3 \text{ desc.}\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } (0,\infty)^3$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}=0 \Rightarrow -z^{10}+z^2=0 \Rightarrow z^2(1-z^8)=0\\ -\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow -xz^4+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow xz^4=\frac{1}{z} \Rightarrow x=\frac{1}{z^5}\\ -\frac{y}{z^2}+1=0 \Rightarrow \frac{y}{z^2}=1 \Rightarrow y=\frac{1}{z^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$$

Singurul pct. crit al lui f este $(1,1,1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2}{x^3}$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2x}{y^3}$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{2y}{z^3}$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & 0\\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & -\frac{1}{z^2}\\ 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{2y}{z^3}\end{pmatrix}$$

$$Hf(1,1,1) = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = 2>0\\ \Delta_2 = 6>0\\ \Delta_3 = 6-2-2=2>0\end{array}\right\} \Rightarrow (1,1,1) \text{ pct. de extr. min.}$$

Curs 11

Exc

Fie $f:(0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = xy + xz + yz$

Să se det. punctele de extrem local ale lui f cu legătura $xyz = 1$

Sol

$E = (0,\infty)^3$ desc.

Fie $g: E \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = xyz - 1$

$(g = g_1)$ și $A = \{(x,y,z) \in E \mid g(x,y,z) = 0\}$

$$\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) =$$

$$= \text{rang}(yz\ \ xz\ \ xy) = 1 \quad (\forall)(x,y,z) \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + y \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = xy$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ cont. pe E

Fie $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$
$= xy + yz + xz + \lambda(xyz - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Scădem prima ec. din a doua și obț.:

$$x - y + \lambda z(x - y) = 0$$

$\Rightarrow (x-y)(1+\lambda z) = 0 \Rightarrow$

$x = y$ sau $\lambda z = -1$

Cazul 1

$x = y$

Din a 3-a ec. avem:

$x + x + \lambda x^2 = 0 \Rightarrow$

$x(2 + \lambda x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\lambda}$
$x \in (0,\infty)$

$\Rightarrow y = -\frac{2}{\lambda}$

Din prima ec. avem:

$-\frac{2}{\lambda} + z + \lambda\left(-\frac{2}{\lambda}\right) \cdot z = 0$

$\Rightarrow -\frac{2}{\lambda} - z = 0 \Rightarrow z = -\frac{2}{\lambda}$

$-\frac{8}{\lambda^3} = 1 \Rightarrow \lambda = -2$

Deci $(x,y,z) = (1,1,1)$

Cazul 2

$\lambda z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{\lambda}$

$y - \frac{1}{\lambda} + \lambda y\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{\lambda} = 0$ contradicție

Singurul pct. staționar al lui f cu leg. $xyz = 1$ este $(1,1,1)$

Avem $L(x,y,z) = xy + xz + yz - 2(xyz - 1)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 - 2z = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1 - 2y = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 - 2x = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}$$

$(\forall)(x,y,z) \in E$

Obs. că L e de clasă C^2

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1,1,1) = \ldots\ldots = -1$$

Fie $F_{(1,1,1)}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_{(1,1,1)}(u,v,w) = d^2L(1,1,1)(u,v,w)^2$

Avem $F_{(1,1,1)} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1)dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1)dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1)dz^2 +$
$2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1)dxdy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1)dxdz + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(1,1,1)dydz =$
$= -2(dxdy + dxdz + dydz)$

Diferențiem legătura $xyz - 1 = 0$ în (x,y,z) și obț.:

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$$

În $(1,1,1)$ rel prec. devine:

$$dx + dy + dz = 0$$

Avem $dz = -dx - dy$

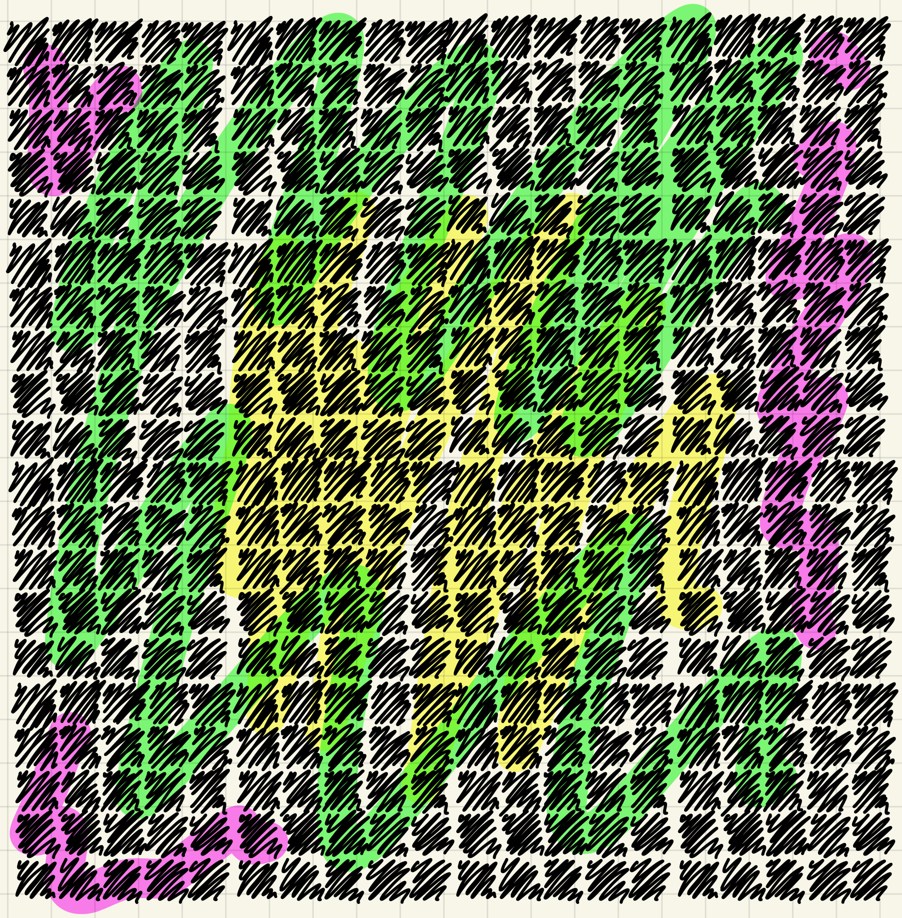
Fie $F_{(1,1,1)}|_{leg} = -2(dxdy + dx(-dx-dy) + dy(-dx-dy)) =$
$= -2(\cancel{dxdy} - dx^2 - \cancel{dxdy} - dxdy - dy^2) =$
$= 2(dx^2 + dxdy + dy^2) =$
$= 2\left(\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx\right)^2\right)$ evident!
$= 2\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx\right)^2$

$F_{(1,1,1)}|_{leg}: \mathbb{R}^{2 = 3-1} \to \mathbb{R}$, $F_{(1,1,1)}|_{leg}(\underset{(u_1,u_2)}{u}) = 2\left(\frac{1}{2}u_1 + u_2\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u_1\right)^2$

$F_{(1,1,1)}|_{leg}(u) \geq 0$, $(\forall)\, u \in \mathbb{R}^2$

$F_{(1,1,1)}|_{leg}(u) = 0 \iff u = (0,0)$

Deci $(1,1,1)$ e pct. de min. local al lui f cu leg. $xyz = 1$



Teorema Riemann pentru func. de o var. reală

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Def

1. S.n. diviziune a $[a,b]$, un sist. de puncte
   $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Notăm $D([a,b]) = \{\Delta \mid \Delta$ div. a lui $[a,b]\}$

2. Numărul $\|\Delta\| \overset{def}{=} \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = \overline{1,n}\}$
   s.n. norma div. Δ

3. S.n. sist. de puncte intermediare asoc. div. Δ, un sist. de puncte:
   $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ a.î. $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(\forall)\, i = \overline{1,n}$

4. Suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ s.n.
   Suma Riemann asoc. func. f,
   div. Δ și s.p.i. $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$
   și s.n. cu $\sigma_\Delta(f, \xi)$

Def

Spunem că f e integr. Riemann dacă
$(\exists)\, I \in \mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î.
$(\forall)\, \Delta \in D([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și
$(\forall)\, \xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ s.p.i., avem $|I - \sigma_\Delta(f, \xi)| < \varepsilon$

Obs

Nr. real I din def. prec., dacă există, este unic și se notează $I = \int_a^b f(x)\,dx$

Teoremă

f integr. Riemann $\Rightarrow$ f mărg. $(\Leftarrow\!\!\!\!/)$

Teoremă

f cont. $\Rightarrow$ f integr. Riemann $(\Leftarrow\!\!\!\!/)$

Teoremă

f monotonă $\Rightarrow$ f integr. Riemann $(\Leftarrow\!\!\!\!/)$

Teorema de permutare a lim. cu integr.

Fie șirul de func. $(f_n)_n$, $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$
și $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) f_n integr. R $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$
2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Atunci f e integr. R
și $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Ex

Det. $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}\,dx$

Sol

Fie $f_n: [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Știm din seminar 7 că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$,
unde $f: [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

f_n e cont. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f_n$ integr. R, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

Conf. T.P.L.I. avem că $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = 0$ $\square$

Def

O mult. $A \subset \mathbb{R}$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă pt. orice $\varepsilon > 0$, există un șir $(I_n)_n$ de intervale desc. și mărg. a.î.:

1. $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$, $\ell(I_n)$ = lung. inter. I_n

   $\ell((c,d)) = d - c$

Obs

1. Orice submulțime a unei mult. neglij. Lecbeg este neglij. Leobg
2. Orice mult. cel mult numărabilă este neglij. Leubaeg
3. Orice reuniune cel mult numărabilă de mult. neglij. Lesbeug este neglij. Leobueg

Notație

$D_f \overset{not}{=} \{x \in [a,b] \mid f$ nu e cont în $x\}$
(mulțimea discontinuităților lui f)

Criteriul lui Lebesgue de integr. R

Sunt echiv.:

1) f integr. R
2. f mărg. și D_f neglij Lebesgue

Exc

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}; & x\in(0,1]\\ 7; & x=0\end{cases}$

Arătați că f e integr. R

Sol

$|f(x)|\le 7\ (\forall)\ x\in[0,1] \Rightarrow f$ mărg.

$D_f \subset \underbrace{\{0\}}_{}$ finită $\Rightarrow$ neglij. Lebesgue

Cf. Crit. lui Lebesgue de integr. R avem că f integr. R $\square$

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărg.

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $\Delta\in D([a,b])$

Fie $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$

și $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$

Def

1. $S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$
(suma Darboux superioară asoc. lui f și Δ)

2. $s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$
(— " — inf — " —)

3. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf\{S_\Delta(f)\mid \Delta\in D([a,b])\}$
(integr. Darboux superioară a func. f)

4. $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup\{s_\Delta(f)\mid \Delta\in D([a,b])\}$
(— " — inf — " —)

Obs

1) $s_\Delta(f)\le S_\Delta(f)$
2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Criteriul lui Darboux de integralitate R

Sunt echiv:

1) f integr. R
2. $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$
3. $\forall\,\varepsilon>0,\ (\exists)\ \Delta_\varepsilon\in D([a,b])$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f)-s_{\Delta_\varepsilon}(f)<\varepsilon$
4. $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\ \Delta\in D([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$

Obs

Dacă una dintre afirm. de mai sus e adev., $\int_a^b f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$

Exc

Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}\\ -1, & x\in[-1,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Det. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ și prec. dacă f e integr. R

Sol

$|f(x)|\le 1,\ (\forall)\ x\in[-1,1]\Rightarrow f$ = mărg.

Fie $\Delta: -1=x_0<\ldots<x_n=1$, $\Delta\in D([-1,1])$

$M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=1,\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$
(deoarece între orice 2 nr. reale $(\exists)$ inf. nr. $\mathbb{Q}$)

$m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=-1,\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$
(deoarece între orice 2 nr. reale $(\exists)$ inf. nr. $\mathbb{Q}$)

$S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0=1-(-1)=2$

$s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=-2$

Cum Δ a fost aleasă arbitrar:

$\overline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx=\inf\{S_\Delta(f)\mid\Delta\in D([-1,1])\}=\inf\{2\mid\Delta\in D([-1,1])\}=2$

$\underline{\int_{-1}^{1}}=\ldots=-2$

$\overline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx\ne\underline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx\Rightarrow f$ nu e integr. R

Integrale improprii

I. Fie $-\infty < a < b \le +\infty$ și $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, o func. integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<b$

Def

Dacă există $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie a lui f pe $[a,b)$ și s.n. $\int_a^b f(x)dx$

Def

1. Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv. dacă $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)dx$ e finită
2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e div. dacă nu e conv.

II. Fie $-\infty \le a < b < +\infty$ și $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, o func. integr. R pe orice interval $[c,b]$, $a<c<b$

Def

Dacă există $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie a lui f pe $(a,b]$ și s.n. $\int_a^b f(x)dx$

Def

1. Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv. dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)dx$ e finită
2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e div. dacă nu e conv.

III. Fie $-\infty \le a < b \le +\infty$ și $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, o func. integr. pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$

Def

Dacă există $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$, val. ei s.n. integr. improprie a lui f pe (a,b) și s.n. $\int_a^b f(x)dx$

Def

1. Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv. dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)dx$ e finită
2. Spunem că integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e div. dacă nu e conv.

Prop

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, o func. integr. R pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$.
Dacă $(\exists)\ \alpha \in (a,b)$ a.î. integr. improprii $\int_a^\alpha f(x)dx$ și $\int_\alpha^b f(x)dx$ sunt conv., atunci și integr. improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv.
și $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx$

Criterii de conv. pt. integrale improprii

Vom enunța crit. de conv. doar pt. func. def. pe $[a,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$

1. **Crit. de comp. cu inegalități**

Fie $f,g:[a,\infty)\to[0,\infty)$, 2 func. integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<\infty$

a.î. $0\le f(x)\le g(x)$, $(\forall)\, x\in[a,\infty)$

1) Dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx$ e conv, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e conv.

2) Dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e div, atunci $\int_a^\infty g(x)\,dx$ e div.

2. **Crit. de comp. cu limită**

Fie $f,g:[a,\infty)\to[0,\infty)$, 2 func. integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<\infty$ a.î.

1) $g(x)>0$, $(\forall)\, x\in[a,+\infty)$

2) $(\exists)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{not}{=} l\in[0,\infty]$

i) Dacă $l\in(0,\infty)$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ au aceeași natură

ii) Dacă $l=0$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ e conv., atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e conv.

iii) Dacă $l=\infty$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ e div, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e div.

3. **Crit. integral al lui Cauchy**

Fie $f:[a,\infty)\to[0,\infty)$, o func. desc. (deci este integr. R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<\infty$).

Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și seria de nr. reale $\sum\limits_{n=p}^\infty f(n)$ au aceeași natură

$(\forall\, p\in[a,\infty)\cap\mathbb{N})$

Funcțiile Gamma și Beta
(Γ) (B)

Def

1) $\Gamma:(0,\infty)\to(0,\infty)$,
$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

2) $B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$
$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

Prop

1) $\Gamma(1)=1$

2) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

3) $\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$, $(\forall)\, x\in(0,\infty)$

În particular, $\Gamma(1+n)=n!$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N})$

4) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$ $(\forall)\, x\in(0,1)$

5) $B(x,y)=B(y,x)$ $(\forall)\, x,y\in(0,\infty)$

6) $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $(\forall)\, x,y\in(0,\infty)$

7) $B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}\,dt$, $(\forall)\, x,y\in(0,\infty)$

Denumire alt.:

func. Γ și B s.n. și integrale euleriene

Exc

Det $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Sol
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{d\to\infty}\int_1^d\frac{1}{x^2}\,dx=$$
$$=\lim_{d\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^d=\lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{d}+1\right)=1 \quad \square$$

Seminar 11

1. Det. pctle. de extrem local ale func. și prec. natura lor, unde:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4$

Sol

$\mathbb{R}^2$ desc.

f cont.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont. pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ dif. pe } \mathbb{R}^2$

$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Singurul pct. critic al lui f este $(0,0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \quad (\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Obs. că f e de clasă C^2

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Crit. nu decide

$\underset{x^4 + y^4}{\overset{\shortparallel}{f(x,y)}} \geq \underset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}} \quad (\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (0,0)$ pct. de min. global al lui f

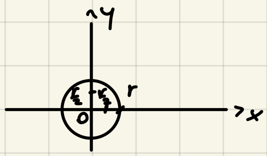
$\Rightarrow (0,0)$ pct. de min. local al lui f $\square$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - y^4$

Sol

Ca la punctul a, $(0,0)$ e singurul pct. critic și criteriul cu Hessiana nu decide

$\underset{x^4 - y^4}{\overset{\shortparallel}{f(x,y)}} \qquad \underset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}$



$(\forall)\ r > 0$, avem $\left(\frac{r}{2}, 0\right) \in B((0,0), r)$ și $\left(0, \frac{r}{2}\right) \in B((0,0), r)$

$(\forall)\ r > 0$, avem $f\left(\frac{r}{2}, 0\right) = \frac{r^4}{16} > 0 = f(0,0)$

și $f\left(0, \frac{r}{2}\right) = \frac{-r^4}{16} < 0 = f(0,0)$

Deci $f(0,0)$ nu e pct. de extrem local al lui f

2. Să se arate că ec. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$ definește într-o vec. a lui $(1,0,0)$ func. impl. (și unică) $z = z(x,y)$ și det. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ și $dz(1,0)$

. . . .

a) $z(1,0)=0$

b) $F(x,y,z(x,y))=0$, $(\forall)(x,y)\in U$

c) . . . .

Pt. a det. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$ și $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ avem 2 variante:

V_1 (fol. a) și c))

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{\cos y - z(x,y)\sin x}{-y\sin z(x,y)+\cos x}, (\forall)(x,y)\in U$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{\cos 0 - z(1,0)\sin 1}{-0\sin z(1,0)+\cos 1} = -\frac{1}{\cos 1}$$

$(z(1,0)=0)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \dots = -\frac{1}{\cos 1}$$

z de clasă $C^1 \Rightarrow z$ dif. (pe U)

$$dz(1,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ dz(1,0)(u,v) = \left[\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right] =$$

$$= -\frac{u}{\cos 1} - \frac{v}{\cos 1} \text{ (i.e. } dz(1,0) = -\frac{1}{\cos 1}dx - \frac{1}{\cos 1}dy)$$

V_2 (fol. a) și b))

Conf. b, avem $F(x,y,z(x,y))=0$, $(\forall)\ x,y\in U$, deci

$$x\cos y + y\cos z(x,y) + z(x,y)\cos x - 1 = 0\ (\forall)\ (x,y)\in U \quad (*)$$

Derivăm parțial relația $(*)$ în raport cu x și obț.:

$$\cos y - y\sin z(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\sin x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)(-y\sin z(x,y)+\cos x) = -\cos y + z(x,y)\sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{-\cos y + z(x,y)\sin x}{-y\sin(z(x,y))+\cos x}\ (\forall)(x,y)\in U$$

$\hookrightarrow$ se repetă V_1

3. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xy+xz+yz$. Det pct-le. de ext. local, cu legăturile $-x+y+z=1$ și $x-z=0$

Sol

$\mathbb{R}^3$ desc.

Fie $g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=-x+y+z-1$

$h(x,y,z)=x-z$

și $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0$ și $h(x,y,z)=0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y+z \qquad \frac{\partial g}{\partial x}=-1 \qquad \frac{\partial h}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+z \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial h}{\partial y}=0 \qquad (\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=x+y \qquad \frac{\partial g}{\partial z}=1 \qquad \frac{\partial h}{\partial z}=-1$$

Toate deriv. parțiale de mai sus sunt cont.

Fie $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)=$
$=xy+xz+yz+\lambda(-x+y+z-1)+\mu(x-z)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=0\\ g(x,y,z)=0\\ h(x,y,z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-\lambda+\mu=0\\ x+z+\lambda=0\\ x+y+\lambda-\mu=0\\ -x+y+z=1\\ x-z=0 \Rightarrow x=z\end{cases} \Rightarrow y=1$$

Adunăm ec. 1 și 3 și obț:

$x+2y+z=0 \xrightarrow[x=z]{y=1} 2x=-2$
$\Rightarrow x=-1$
$\Rightarrow z=-1$

$x+z+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$

$y+z-\lambda+\mu=0 \Rightarrow \mu=2$

$$\text{rang}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,-1) & \frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,-1) & \frac{\partial g}{\partial z}(-1,1,-1)\\ \frac{\partial h}{\partial x}(-1,1,-1) & \frac{\partial h}{\partial y}(-1,1,-1) & \frac{\partial h}{\partial z}(-1,1,-1)\end{pmatrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=2$$

Singurul pct. staționar al lui f cu leg. $g(x,y,z)=0$ și $h(x,y,z)=0$ este $(-1,1,-1)$

Avem: $L(x,y,z)=xy+xz+yz+2(-x+y+z-1)+2(x-z)$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=1=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=1=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=1=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial y}$$

Deriv. parțiale sunt cont.
$\Rightarrow L$ de clasă C^2

Fie $F_{(-1,1,-1)}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F_{(-1,1,-1)}(u)=d^2L(-1,1,-1)(u)^2$, $u=(u_1,u_2,u_3)$, i.e. $F_{(-1,1,-1)}=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(-1,1,-1)dx^2+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(-1,1,-1)dy^2+\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(-1,1,-1)dz^2+$
$+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(1,1,-1)dxdy+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(-1,1,-1)dxdz+2\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(-1,1,-1)dydz=$
$=2(dxdy+dydz+dxdz)$

Diferențiem leg. din enunț în (x, y, z) și obț.:

$$\begin{cases} -1\,dx + 1\,dy + 1\,dz = 0 \\ 1\,dx - 1\,dz = 0 \end{cases}$$

în punctul staț. $(-1,1,-1)$, sist. prec. devine:

$$\left.\begin{cases} -dx + dy + dz = 0 \\ dx - dz = 0 \Rightarrow dz = dx \end{cases}\right\} \Rightarrow dy = 0$$

Fie $F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg} : \mathbb{R}^{3-2} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg} = 2(dx \cdot 0 + 0 \cdot dz + dx \cdot dx) = 2dx^2$ (i.e. $F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg}(u) = 2u^2$)
$\phantom{F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg}(}\overset{\cap}{\mathbb{R}}$

$$\left.\begin{array}{l} F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg}(u) \geq 0, (\forall) u \in \mathbb{R} \\ F_{(-1,1,-1)}\big|_{leg}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,1,-1) \text{ e pct. de min. local al lui } f$$

Curs 12

Integrarea func. de mai multe variabile

Obs

Toate intervalele de forma (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b)$ sunt considerate cu $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$

Obs

Lucrăm cu sp. metric $(\mathbb{R}^n, \underset{d}{\overset{\text{not}}{d_2}})$ cu $n\in\mathbb{N}^*$

Def

1) O mulț. de forma $D=[a_1,b_1)\times\ldots\times[a_n,b_n)=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ s.n. dreptunghi

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)=\{D\subset\mathbb{R}^n \mid D \text{ dreptunghi}\}$

2) O mulț. de forma $E=\bigcup_{i=1}^{p} D_i$, unde $p\in\mathbb{N}^*$ și $D_i\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $(\forall)$ $i=\overline{1,p}$ s.n. mulț. elementară.

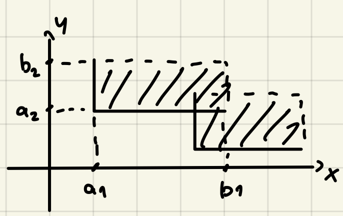
$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)=\{E\subset\mathbb{R}^n \mid E \text{ mulț. el.}\}$

3) Fie $D=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Numărul $vol(D)=(b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ s.n. volumul lui D

4) Fie $E=\bigcup_{i=1}^{p} D_i\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $D_i\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $(\forall)$ $i=\overline{1,p}$ și $D_i\cap D_j=\emptyset$ $(\forall)$ $i\ne j$.

$vol(E)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{p} vol(D_i)$ s.n. volumul lui E



Prop

Orice mulț. el. poate fi scrisă ca reuniune finită de dreptunghiuri disjuncte 2 câte 2. Deci putem defini $vol(E)$ pt. orice $E\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Fie $A\subset\mathbb{R}^n$, A mărg.

Def

1) $\mu^*(A)=\inf\{vol(F) \mid F\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), A\subset F\}$ (măsura Jordan exterioară a lui A)

2) $\mu_*(A)=\sup\{vol(E) \mid E\subset\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), E\subset A\}$ (măsura Jordan interioară a lui A)

Obs

$\mu_*(A) \le \mu^*(A)$

Def

Spunem că A e măsurabilă Jordan dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A)$

Notație

$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A$ măsurabilă Jordan$\}$

Def

Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, valoarea comună $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ s.n. măsura Jordan a lui A și se not cu $\mu(A)$

Prop

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. Atunci

1) $\mu^*(A) \le \mu^*(Fr(A)) + \mu_*(\mathring{A})$
2) $\mu^*(\bar{A}) = \mu^*(A)$
3) $\mu_*(A) = \mu_*(\mathring{A})$

Prop

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. Sunt echiv.

1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
2) $\bar{A}, \mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A})$
3) $Fr(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(Fr(A)) = 0$

Prop

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$

1) Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^q$ mărg.
Atunci $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ e mărg și avem ineg.:
$\mu^*(A \times B) \le \mu^*(A) \cdot \mu^*(B)$
$\mu_*(A \times B) \ge \mu_*(A) \cdot \mu_*(B)$

2) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ și $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^q)$.
Atunci $A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{p+q})$ și $\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$

Exemple de mulț. măsurabile Jordan / nemăsurabile

1. Fie $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ $\quad$ A e mărg, deoarece $A \subset [0,1]$
Avem că $A \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$

Justificare

$$\mu^*(A) = \mu^*(\underbrace{\bar{A}}_{[0,1]}) = \mu^*([0,1]) = \mu^*(\overline{[0,1)}) = \mu^*([0,1)) = \mu([0,1)) = 1 - 0 = 1$$

$$\mu_*(A) = \mu_*(\underbrace{\mathring{A}}_{\emptyset}) = \mu_*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

$\mu_*(A) < \mu^*(A) \Rightarrow A \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2. $A = \{(x,0) \mid x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$
$= ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times \{0\}$

Avem că $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

Justificare

$A \subset [0,1] \times [0,1] \Rightarrow A$ mărg.

$$\mu^*(A) = \mu^*(\underbrace{\bar{A}}_{[0,1] \times \{0\}}) = \mu^*([0,1] \times \{0\}) \le \mu^*([0,1]) \cdot \mu^*(\{0\}) = \mu^*([0,1)) \cdot \mu^*(\{0\}) =$$
$$= \mu([0,1)) \cdot \mu(\{0\}) =$$
$$= (1-0) \cdot \mu^*(\{0\}) = \mu^*(\{0\}).$$

Pt. orice $\varepsilon > 0$, avem $\{0\} \subset [0, \varepsilon)$,
deci $\mu^*(\{0\}) \le vol([0,\varepsilon)) = \varepsilon$

Așadar $\mu^*(\{0\}) = 0$, deci $\mu^*(A) = 0$

Deci $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$

Deci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ $\square$

Prop

1) Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt integr. R și $f(x)\le g(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$, atunci mult. $I_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ f(x)\le y\le g(x)\}\subset\mathbb{R}^2$ e măsurabilă Jordan și $\mu(I_{f,g})=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$

2) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e integr. R, atunci $G_f=\{(x,f(x))\mid x\in[a,b]\}\subset\mathbb{R}^2$ e măs. J și $\mu(G_f)=0$

Exc

Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1,\ |y|\le x^2\}$

Arăt. că $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și det. $\mu(A)$

Sol

$|x|\le 1 \iff -1\le x\le 1$

$|y|\le x^2 \iff -x^2\le y\le x^2$

Deci $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-1,1],\ -x^2\le y\le x^2\}$

Fie $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=-x^2,\ g(x)=x^2 \Rightarrow f(x)\le g(x),\ (\forall)x\in[-1,1]$

f,g cont. $\Rightarrow f,g$ integr. R

$A=I_{f,g}$

Deci $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(A)=\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx=\int_{-1}^{1}2x^2\,dx=2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$ □

Def

Fie $X\neq\emptyset$, $\emptyset\neq\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ și $\lambda:\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}_+=[0,\infty]$

Spunem că tripletul $(X,\mathcal{A},\lambda)$ e sp. cu măsură aditivă dacă:

1) $(\forall)A,B\in\mathcal{A}$, avem $A\cup B\in\mathcal{A}$ și $A\setminus B\in\mathcal{A}$ (va rezulta că $A\cap B\in\mathcal{A}$)

2) $(\forall)A,B\in\mathcal{A}$ a.î. $A\cap B=\emptyset$ avem $\lambda(A\cup B)=\lambda(A)+\lambda(B)$

Prop

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \mathrm{vol})$ și $(\mathbb{R}^n, \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \mu)$ sunt sp. cu măsură aditivă

Def

Fie $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Spunem că $\mathcal{A}=(A_i)_{i=\overline{1,p}}\subset\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e o descompunere Jordan a lui A dacă:

1) $A=\bigcup_{i=1}^{p}A_i$

2) $(\forall)\ i,j\in\{1,\dots,p\}$, $i\neq j$, avem $\mu(A_i\cap A_j)=0$

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ o desc. Jordan a lui A

Def

1) $\|\mathcal{A}\| \overset{def}{=} \max\{\operatorname{diam}(A_i) \mid i=\overline{1,p}\}$, unde $\operatorname{diam}(A_i) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A_i\}$, $(\forall)\ i=\overline{1,p}$
(norma lui $\mathcal{A}$)

2) O familie $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^n$ s.n. sistem de puncte intermediare asoc. desc. lui $\mathcal{A}$ dacă $\alpha_i \in A_i$ $(\forall)\ i=\overline{1,p}$

Obs

1) Pt orice $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și pt. orice $\varepsilon > 0$, $(\exists)\ \mathcal{A}$, o desc. Jordan a lui A a.î. $\|\mathcal{A}\| < \varepsilon$

2) Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ e o desc. J. a lui A, atunci $\mu(A) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i)$

Exemplu

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ și $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$

Știm că A e măs. Jordan

Fie $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$, o diviziune a intervalului $[a,b]$

Familia $\mathcal{A} = \{[x_{i-1}, x_i] \mid i=\overline{1,p}\}$ e desc. J. a lui A

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. J. a lui A și $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ un sist. de pct. inter. asoc. lui $\mathcal{A}$.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$

Def

Suma $\sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i)\mu(A_i)$ s.n. suma Riemann asoc. func. f, desc. $\mathcal{A}$ și s.p.i. $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ și s.n. cu $\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})$

Spunem că f e integr. R (pe A) dacă $(\exists)\ I \in \mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ cu prop. că $(\forall)\ \mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ desc. J. a lui A cu $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$ și $(\forall)\ (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i. asoc. lui $\mathcal{A}$, avem că $|I - \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})| < \varepsilon$

Obs

Nr. real I din def. prec., dacă există, este unic

Notație

$I \overset{not}{=} \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_A f(x)\, dx$

Obs

În contextul def prec. avem $\int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \lim_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,p}})$

Notații

1) Dacă $n=2$, scriem $I = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy$
2) Dacă $n=3$, scriem $I = \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

Exc

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\mu(A)=0$ și $f: A \to \mathbb{R}$.

Arăt că f e integr. R și $\int_A f(x)dx = 0$

Sol

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ desc. a lui A

$\mu(A)=0 \Rightarrow \mu(A_i)=0$, $(\forall)\ i=\overline{1,p}$

Fie $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i. asoc. lui $\mathcal{A}$

$\sigma_{\mathcal{A}}(f,(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i)\underbrace{\mu(A_i)}_{0} = 0$

Deci f e integr. R și $\int_A f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{A}\|\to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f,(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = 0$ □

Exc

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ și $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x)=a$

Arătați că f e integr. R și $\int_A f(x)dx = a\mu(A)$

Sol

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. J a lui A

și $(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}$ s.p.i asoc. lui $\mathcal{A}$

$\sigma_{\mathcal{A}}(f,(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{f(\alpha_i)}_{a}\mu(A_i) = a\sum_{i=1}^{p}\mu(A_i) = a\mu(A)$

Deci f e integr. R pe a și $\int_A f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{A}\|\to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f,(\alpha_i)_{i=\overline{1,p}}) = a\mu(A)$ □

Prop

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$

1) Dacă f e cont. și mărg., atunci f e integr. R

2) Dacă a e compactă și f e cont, atunci f e integr. R

Prop

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ și $f, g: A \to \mathbb{R}$, 2 func. integr. R

Atunci $f \pm g$ și $a \cdot f$ sunt integr. R și $\int_A (f \pm g)(x)dx = \int_A f(x)dx \pm \int_A g(x)dx$

și $\int_A (a f)(x)dx = a\int_A f(x)dx$

Dacă în plus $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)\ x \in A$

atun $\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx$

Prop

Fie $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ o func. integr. R,
atunci f e integr R pe A și pe B

Dacă în plus, $\mu(A \cap B) = 0$, atunci $\int_{A \cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$

Prop

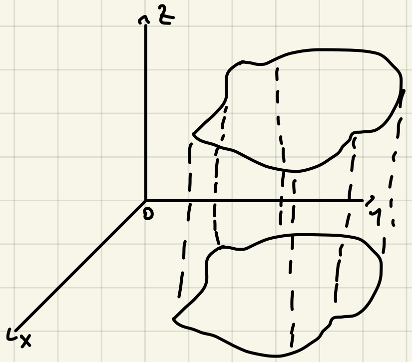
Fie $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ o func. mărg.
și integr. R. pe A și pe B. Atunci f
e integr. R pe $A \cup B$

Dacă în plus, $\mu(A \cap B) = 0$, atunci $\int_{A \cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$

Interpretare geometrică a integralei multiple

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ integr. R

1) Dacă $n = 2$ și $f(x) \geq 0 \; (\forall) x \in A$,
atunci $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ repr. vol. corpului cuprins între planul xOy și graficul funcției f



2) Dacă $n = 2$, atunci $\iint_A 1\,dx\,dy$ repr. aria mulț. A
3) Dacă $n = 3$, atunci $\iiint_A 1\,dx\,dy\,dz$ repr. vol. lui A

Teorema lui Fubini

Fie $B \subset \mathbb{R}^n$ compactă și măs. J. și $\alpha, \beta: B \to \mathbb{R}$ cont.
a.î. $\alpha(x) \leq \beta(x), (\forall) x \in B$

Fie $A = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \in B$ și $\alpha(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \leq x_j \leq \beta(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$
unde $(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$

Fie $f: A \to B$ cont. Atunci $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e comp. și măs. J,
f e integr. R pe A și $\int_A f(x_1, \dots, x_{n+1})\,dx_1 \dots dx_{n+1} = \int_B \left(\int_{\alpha(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})}^{\beta(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1})} f(x_1, \dots, x_{n+1})\,dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1}\,dx_{j+1} \dots dx_{n+1}$

cazuri particulare ale teoremei prec.

1. Integrala dublă

i) Dacă $A = [a,b] \times [c,d]$ și $f : A \to \mathbb{R}$ e cont.,
atunci A e mulț. comp. și măs. J. și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

ii) Dacă $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a,b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, unde $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont.
și $f : A \to \mathbb{R}$ e cont. ,atunci A e mulț. comp. și măs. J. și

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

iii) Dacă $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [c,d],\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$,
unde $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ cont. a.î. $\varphi(y) \le \psi(y)\ (\forall) y \in [c,d]$
și $f : A \to \mathbb{R}$ cont., atunci A e mulț. comp. și măs. J
și $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$

2. Integrala triplă

i) Dacă $A = [a,b] \times [c,d] \times [k,p]$ și $f : A \to \mathbb{R}$ e cont.,
atunci A e mulț. comp. și măs. J. și

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^p f(x,y,z)\,dz\right) dy\right) dx$$

ii) Fie $B \subset \mathbb{R}^2$ o mulț. comp. și măs. J. și $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B$ și $\varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$,
unde $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ cont.
Fie $: A \to \mathbb{R}$ cont.
Atunci A e mulț. comp. și măs. J. și

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_B \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy \text{ , etc.}$$

1. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+y$
Arăt. că $(0,0)$ este pct. staționar al lui f cu leg. $y=0$ și nu este pct. de ext. local al lui f

Sol
Fie $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $g(x,y)=y$ și
$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2$ desc.

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}=1$ $(\forall)$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Toate deriv. parțiale de mai sus sunt cont. (deci f este de clasă C^1)

$\frac{\partial g}{\partial x}=0$

$\frac{\partial g}{\partial y}=1$

Fie $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $L(x,y)=x^3+y+\lambda y=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ g(x,y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}3x^2=0\Rightarrow x=0\\ 1+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1\\ y=0\Rightarrow y=0\end{array}$$

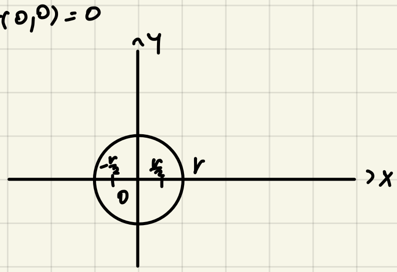
$\text{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\ \ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)=\text{rang}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=1$, $(\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\supset A\supset\{(0,0)\}$

Singurul pct. staționar al lui f cu leg. $g(x,y)=0$ este $(0,0)$

Arăt. că $(0,0)$ nu este pct. de ext. local al lui f cu leg. $g(x,y)=0$

$(\forall)$ $(x,y)\in A$, avem $f(x,y)=f(x,0)=x^3$

$f(0,0)=0$



$(\forall)$ $r>0$, avem $\left(\frac{r}{2},0\right)$ și $\left(-\frac{r}{2},0\right)\in A\cap B((0,0),r)$

$f\left(-\frac{r}{2},0\right)<f(0,0)<f\left(\frac{r}{2},0\right)$, $(\forall)$ $r>0$

Deci $(0,0)$ nu e pct. de ext. local al lui $f|_A$ (f cu leg. $g(x,y)=0$)

2. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$

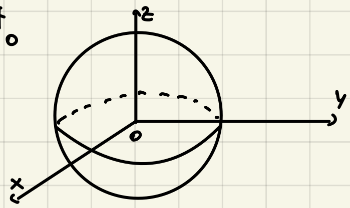
Det. pctle. de ext. global și val. ext. ale lui $f|_{B[(0,0,0),1]}$, unde $B[(0,0,0),1] \overset{not}{=} \bar{B}((0,0,0),1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

Sol

f cont.

$B[(0,0,0),1]$ compactă (închisă și mărg.) $\Big\} \Rightarrow$ f mărg. și își atinge marginile

Notăm $(0,0,0) \overset{not}{=} O$



Căutăm pctle. critice și staționare ($x^2+y^2+z^2=1$) și calc. valorile func. și alegem max. și min.

Notăm $h = f|_{B(0,1)}$

$B(0,1)$ - desc.

h-cont.

$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x$

$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \quad (\forall)\ (x,y,z) \in B(0,1)$

$\frac{\partial h}{\partial z} = 6z$

$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}$ cont. pe $B(0,1)$

$B(0,1)$ desc. $\Big\} \Rightarrow h$-dif. pe $B(0,1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{rcases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \\ 6z = 0 \end{rcases} \Rightarrow (0,0,0) \text{ pct. critic}$$

3. Fie $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ 2x+2y+z = 1\}$ și $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$. Det. val. ext. (globale) ale lui $f|_A$

Sol

$A \subset B[(0,0,0),1] \Rightarrow A$ mărg.

Fie $g_1, g_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $g_2(x,y,z) = 2x+2y+z-1$

$A = g_1^{-1}(\{0\}) \cap g_2^{-1}(\{0\})$

g_1, g_2 cont.

$\{0\}$ - înc. $\Big\} \Rightarrow g_1^{-1}(\{0\})$ închisă și $g_2^{-1}(\{0\})$ $\Big\} \Rightarrow$ A închisă

Continuați voi

4. Stud. posibilitatea aplicării Teoremei de permutare a limitei cu integrala pt. limitele de mai jos și apoi calculați-le:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x \sin(nx)}{n^2+nx^2+x} dx$

Sol

Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

f_n cont. $\Rightarrow$ f_n integr. R, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Conv. s.

Fie $x \in [0,1]$

$|f_n(x)| = \frac{x|\sin(nx)|}{n^2+nx^2+x} \leq \frac{1}{n^2}$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

Conv. u.

$\sup\limits_{x\in[0,1]} (|f_n(x) - f(x)|) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \frac{x|\sin(nx)|}{n^2+nx^2+x} \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f.$

Deci putem aplica th. de perm. a lim. cu integrala și avem că:

1) f e integr. R

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x) dx$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x} dx = \int_0^1 0 dx = 0$ $\square$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx$

Sol

Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

f_n cont. $\Rightarrow$ f_n integr. R $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

C.S

Dacă $x \in \{0,1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Fie $x \in (0,1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{x(1-x^2)^n}(1-x^2)}{n\,\cancel{x(1-x^2)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(1-x^2)}{n} = 1-x^2 < 1$

Conf. crit. rap. pt. șiruri de nr. poz.,

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Deci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$

C.U.

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} n x(1-x^2)^n \underset{x=\frac{1}{n}}{\geq} (1-\frac{1}{n^2})^n \; (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $(1-\frac{1}{n^2})^n > 0 \; (\forall) n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ și $\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n^2})^n = e^0 = 1 \neq 0$

Deci avem $f_n \underset{n\to\infty}{\not\overset{u}{\rightarrow}} f$

Așadar nu putem aplica th. de perm. a lim. cu integrala

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^1 n(1-x^2)'(1-x^2)^n dx =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2(n+1)} \int_0^1 ((1-x^2)^{n+1})' dx =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2(n+1)} (1-x^2)^{n+1} \Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2(n+1)}(0-1) = \frac{1}{2}$ (dif. de $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0 dx = 0$) □

c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$

Sol

Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \ln(1+x^n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

C.S. f_n - cont. $\Rightarrow$ f_n - integr. R

Fie $x \in [0,1]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \ln 2, & x = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \ln 2, & x = 1 \end{cases}$

C.U.

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{- cont. } (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ f \text{ nu e cont. (în 1)} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \underset{n\to\infty}{\not\overset{u}{\rightarrow}} f$

Așadar nu putem aplica th. de perm. a lim. cu integr.

$0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, $(\forall) x \in [0,1]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0$

Deci $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx = 0 \; (= \int_0^1 f(x)dx = 0)$

5

Det.

a) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{d\to\infty} \int_0^d \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{d\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^d = \lim\limits_{d\to\infty} \operatorname{arctg} d = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim\limits_{c\to-\infty} \int_c^0 e^x\,dx = \lim\limits_{c\to-\infty} e^x \Big|_c^0 = \lim\limits_{c\to-\infty} (1-e^c) = 1-0 = 1$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim\limits_{\substack{d\to1\\ d<1}} \int_0^d \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim\limits_{\substack{d\to1\\ d<1}} \arcsin x \Big|_0^d = \lim\limits_{\substack{d\to1\\ d<1}} (\arcsin d - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim\limits_{\substack{c\to0\\ c>0}} \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{\substack{c\to0\\ c>0}} \int_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}} t^{-2}\,dt = \lim\limits_{\substack{c\to0\\ c>0}} -\frac{1}{t}\Big|_{\ln c}^{\ln\frac{1}{2}} = \lim\limits_{\substack{c\to0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} + \frac{1}{\ln c}\right) = -\frac{1}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2}$ $\square$

sv. $\ln x = t$

$\frac{1}{x}\,dx = dt$

$x = c \Rightarrow t = \ln c$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \ln\frac{1}{2}$

e) $\int_0^1 \frac{1}{x^5}\,dx = \lim\limits_{\substack{c\to0\\ c>0}} \int_c^1 x^{-5}\,dx = \lim\limits_{\substack{c\to0\\ c>0}} \left(\frac{1}{-4x^4}\Big|_c^1\right) = \lim\limits_{\substack{c\to0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4c^4}\right) = +\infty$ $\square$

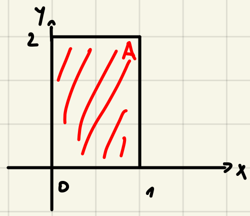
Curs 13

Exc

a) $\iint_A (2x+y)\,dx\,dy$

$A = [0,1] \times [0,2]$

Sol



$A = [0,1] \times [0,2] \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A compactă

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x + y$

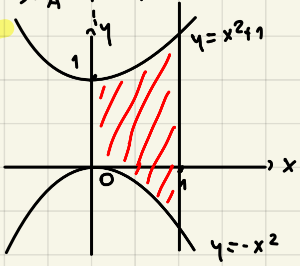
f cont.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\left(2xy + \frac{y^2}{2}\right) \Bigg|_{y=0}^{y=2} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 (4x+2)\,dx = 2x^2 + 2x \Big|_0^1 = 4 \ \square$$

b) $\iint_A x\,dx\,dy$, unde A e mulț. plană mărginită de $y = x^2+1$, $y = -x^2$, $x = 0$ și $x = 1$

Sol



$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], -x^2 \le y \le x^2+1 \}$

Fie $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = -x^2$, $\beta(x) = x^2+1$

α, β - cont.

$A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A compactă

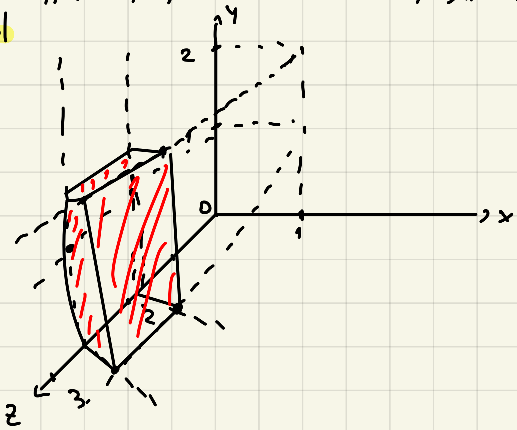
Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

f cont.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2+1} x\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(yx \Big|_{-x^2}^{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 (\cancel{x^3} + x + \cancel{x^3})\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ \square$$

c) $\iiint_A y\,dx\,dy\,dz$, unde $A = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$

Sol



$A = [0,1]\times[1,2]\times[2,3] \Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și A comp.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y$

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_2^3 y\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 yz \Big|_{z=2}^{z=3} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 y\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 dx = \int_0^1 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Lucrăm în sp. metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $d_2 \overset{not}{=} d$

Prop

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ o mulț. convexă și mărg.

Atunci $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Def

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathring{A}$ și $h : A \to \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n)$ o func. care admite toate deriv. parțiale în punctul a.

Matricea $\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial h_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s.n. matricea jacobiană (sau matricea Jacobi) a lui h în a și s.n. cu $J_h(a)$

Det. matricei

$\hookrightarrow$ jacobianul lui h în a

Teorema de schimbare de variabile – Varianta 1

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V mulț. desc.,
$h: U \to V$ un difeomorfism de clasă C^1
(i.e. h e bij. și h, h^{-1} sunt de clasă C^1),
$\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\bar{A} \subset U$ și
$f: h(A) \to \mathbb{R}$ o func. integr. R și
mărg. (avem din cele de mai sus că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$)

Atunci func. $(f \circ h) \cdot |\det J_h| : A \to \mathbb{R}$ e integr. R și
mărg. și $\int_{h(A)} f(y)\,dy = \int_A (f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)|\,dx$

Def

O mulț. $A \subset \mathbb{R}^n$ s.n. neglij. Lesboeg dacă
$(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)(D_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a.î.
$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$ și $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(D_k) < \varepsilon$

Obs

1) Orice submulț. a unei mulț. neglij. Leubeg este,
la rândul ei, neglij. Loebek
2) Orice mulț. c.m. numărabilă este neglij. Lwbg
3) Orice reuniune c.m. numărabilă de mulț. neglij. Lesbesgue
este neglij. Lowbeak
4) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\mu(A) = 0$.
Atunci A este neglij. Loinbank

Teorema de schimbare de variabilă. Varianta 2
(Teorema lui Pesle)

Fie $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^n$, U, V, deschise, $h: U \to V$
un difeomorfism de clasă C^1 a.î. $Fr(V)$ e neglij. Loaebaeske,
$\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A \subset U$, h și $\det J_h$ sunt mărg. pe A și
$f: h(A) \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.
(din cele de mai sus avem că $h(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$).

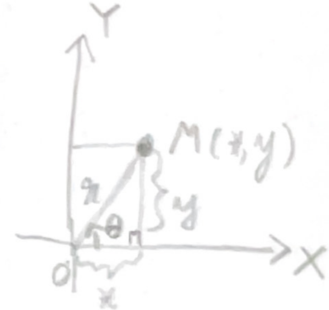
Atunci func. $(f \circ h) \cdot |\det J_h| : A \to \mathbb{R}$ e integr. R și
mărg. și $\int_{h(A)} f(y)\,dy = \int_A (f \circ h)(x) \cdot |\det J_h(x)|\,dx$

Schimbări standard de variabilă pentru integrala dublă

1. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare

$\cos\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta.$

$\sin\theta = \dfrac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta.$



θ în sens trigon.

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$).

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta \end{cases}, \; r \in [0, \infty), \; \theta \in [0, 2\pi].$

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(\alpha + r\cos\theta, \beta + r\sin\theta)\,dr\,d\theta,$

unde B se găsește din condiția $(x,y) \in A$. $B \subset [0,\infty) \times [0, 2\pi]$

2. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare generalizate

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$) și $a, b \in (0, \infty)$. Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + a r\cos\theta \\ y = \beta + b r\sin\theta \end{cases}, \; r \in [0, \infty), \; \theta \in [0, 2\pi]$

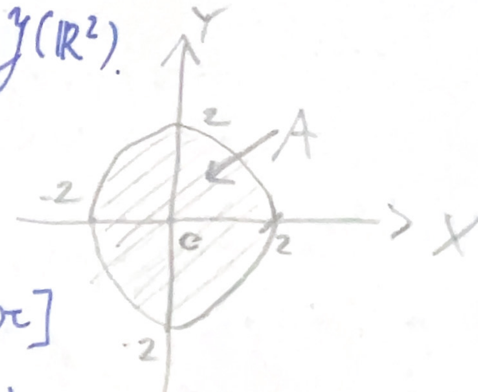
Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B abr\, f(\alpha + ar\cos\theta, \beta + br\sin\theta)\,dr\,d\theta,$

unde B se găsește din condiția $(x,y) \in A$, $B \subset [0,\infty) \times [0, 2\pi]$

exec. Det $\iint_A y\,dx\,dy$, unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\}$.

Sol.: A mărg. și convexă $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

A închisă și mărginită $\Rightarrow$ A compactă



Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$. f cont.

S.V. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$x, y \in A \Rightarrow x^2 + y^2 \le 4 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \le 4 \Rightarrow r^2 \le 4 \Rightarrow r \in [-2,2] \cap$
$\cap [0,\infty) \Rightarrow r \in [0,2]$.

Fie $B = [0,2] \times [0,2\pi]$.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\right) dr$$
$$= \int_0^2 r^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \int_0^2 r^2(-1)(1-1)\,dr = 0.$$

[$h: (0,2) \times (0,2\pi)$ ca să fie deschise. $h \to \mathring{A} \setminus ([0,2]\times\{0\})$ pt. a fol. teorema $\square$ riguros
de fapt $h: (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0\}$]

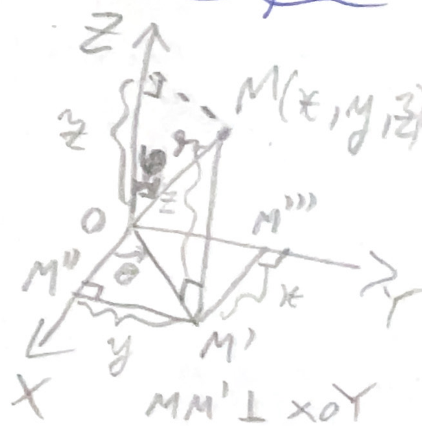
Schimbări standard de variabilă în integrala triplă

1) Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice

$z = r\cos\varphi$ $\sin\varphi = \frac{OM'}{r} \Rightarrow OM' = r\sin\varphi$

$x = (r\sin\varphi)\cos\theta = r\cos\theta\sin\varphi$

~~$y = r\cos\theta$~~ $y = r\sin\theta\sin\varphi$



[deducere intuitivă]

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$). Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = r \cos\theta \sin\varphi + \alpha, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi + \beta \\ z = r \cos\varphi + \gamma \end{cases}$ $r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$.

Avem $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B r^2 \sin\theta \cdot f(\alpha + r\cos\theta\sin\varphi, \beta + r\sin\theta\sin\varphi, \gamma + r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$, unde B se găsește din condiția $(x,y,z) \in A$.

2. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice generalizate

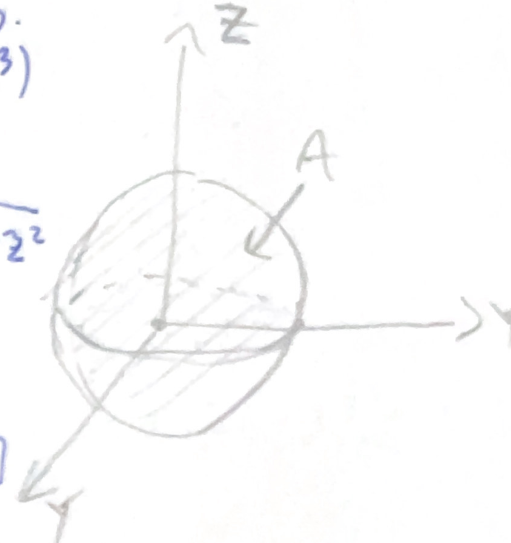
Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ și $a, b, c \in (0, \infty)$. Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ integr. R și mărg.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + a r \cos\theta \sin\varphi \\ y = \beta + b r \sin\theta \sin\varphi \\ z = \gamma + c r \cos\varphi \end{cases}$, $r \in [0, \infty], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$

Avem $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint abc\, r^2 \sin\varphi\, f((\alpha + a r\cos\theta\sin\varphi, \beta + b r\sin\theta\sin\varphi, \gamma + c r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$, unde B se găsește din condiția $(x,y,z) \in A$.

<u>Exc</u> Det $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, unde

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.



Sol] A convexă și mărg $\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$

A compactă.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

f cont.

$$\text{S.V.} \begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & r \in [0,\infty),\ \theta \in [0,2\pi] \\ z = r\cos\varphi & \varphi \in [0,\pi] \end{cases}$$

$(x,y,z) \in A \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \le 1 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi \le 1 \Leftrightarrow r^2\sin^2\varphi\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} + r^2\cos^2\varphi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2 \le 1 \underset{r\in[0,\infty)}{\Leftrightarrow} r \in [0,1]$.

Fie $B = [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$

$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_B r^2 \sin\varphi\, f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi \sqrt{r^2}\, d\varphi \right) d\theta \right) dr =$

$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3 \cdot \underbrace{(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}}_{1-(-1)=2} d\theta \right) dr = \int_0^1 2r^3 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$

Teoremă (Crit. lui Lebesgue de integrabilitate Riemann)

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită. Sunt $\equiv$:

1) f int. R

2) D_f e neg Lebesgue, unde $D_f = \{x \in A \mid f$ nu e cont. în $x\}$

<u>Exc</u>. Fie $f: [0,1] \times [2,3] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x+3y, & (x,y) \in [0,1] \times [2,3] \setminus \{(0,2)\} \\ 1, & x = 0 \text{ și } y = 2. \end{cases}$$

Studiați integr. R. a fct. f.

<u>Sol</u>.: $|f(x,y)| = |2x+3y| \leq 2|x| + 3|y| \leq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$,

$\left.\begin{array}{l} \forall (x,y) \in [0,1] \times [2,3] \setminus \{(0,2)\} \\ |f(0,2)| = 1 \leq 11 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x,y)| \leq 11, \forall (x,y) \in [0,1] \times [2,3]$

$\Rightarrow f$ mărg.

$D_f \subset \{(0,2)\}$. $\{(0,2)\}$ finită $\Rightarrow \{(0,2)\}$ neg. Lg.

$\Rightarrow D_f$ negl. Lebesgue. Așadar f e int. R conform crit. de integrabilitate Riemann.

Fie $\emptyset \neq A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ o fct mărg. și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. J. a lui A

Notăm $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall i = \overline{1,p}$, și $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall i = \overline{1,p}$.

<u>Def</u>.: 1) $s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} m_i \mu(A_i)$ suma Darboux inferioară asociată lui f și $\mathcal{A}$.

2) $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i \mu(A_i)$ suma Darboux superioară

CDI - C 13 8 - (90)

3) $\underline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \sup\{s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ desc. J. a lui $A\}$

<u>integrala Darboux</u> inferioară asociată ~~cu~~ funcției f

int. Darboux superioară

4) $\overline{\int}_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \inf\{S_{\mathcal{A}}(f) \mid A$ desc. Jordan a lui $A\}$

<u>Teoremă (Crit. lui Darboux de integrabilitate Riemann)</u>

Sunt echiv.:

1) f integr. R.

2) $\underline{\int}_A f(x)\,dx_1\dots dx_n = \overline{\int}_A f(x)\,dx$, caz în care avem $\int_A f\,dx = \overline{\int} = \underline{\int}$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \mathcal{A}_\varepsilon$ desc. Jordan a lui A a. î. $S_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) - s_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $\forall \mathcal{A}$ desc. J. a lui A cu propr. că $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$ avem $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

Obs. 1) $s_{\mathcal{A}}(f) \le S_{\mathcal{A}}(f)$ 2) $\underline{\int}_A f(x)\,dx \le \overline{\int}_A f(x)\,dx_1\dots dx_n$

<u>Ex</u> Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ a. î. $\mu(A) > 0$ și $f: A \to \mathbb{R}$,

$f(x,y) = \begin{cases} 0; & x, y \in \mathbb{Q} \\ 1; & \text{altfel} \end{cases}$. Determ. $\overline{\iint}_A f(x,y)\,dx\,dy$, $\underline{\iint}$ și precizați dacă f integr. Riemann.

<u>Sol</u>: $|f(x,y)| \le 1\ \forall (x,y) \in A \Rightarrow f$ mărg.

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,p}}$ o desc. Jordan a lui A și

$M_i = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in A_i\}\ \forall i = \overline{1,p}$ și

$m_i = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in A_i\}\ \forall i = \overline{1,p}$.

$$S_A(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{n} M_i\,\mu(A_i)$$

$$s_A(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{n} m_i\,\mu(A_i)$$

$\mu(A_i)>0 \Rightarrow \mu_*(A_i)>0 \Rightarrow \exists\, D\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2),\ D\subset A_i$ și $vol(D)>0$.

Fie $B_i=\{(x,y)\in A_i \mid x,y\in\mathbb{Q}\}$ și $C_i=\{(x,y)\in A_i \mid x\notin\mathbb{Q}$ sau $y\notin\mathbb{Q}\}$

Pentru $\forall\, i\in\{1,\dots,n\}$ a.î. $\mu(A_i)>0$, avem $D\cap B_i\neq\emptyset$ și $D\cap C_i\neq\emptyset$. Deci $\forall\, i=\overline{1,n}$ a.î. $\mu(A_i)>0$, avem $M_i=1$ și $m_i=0$. Așadar $S_A(f)=\sum_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{n} 1\,\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)=\mu(A)$ și

$$s_A(f)=\sum_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{n} 0\cdot\mu(A_i)=0.$$

$\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy=\inf\{S_A(f)\mid \forall A$ desc. Jordan a lui $A\}=\inf\{\mu(A)\}=\mu(A)$. $\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy=\sup\{\dots\}=\sup\{0\}=0$

Seminar 1101

1. Det. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$

Sol

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \lim_{c\to-\infty} \frac{1}{2}\int_{c}^{0} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} 2dx = \frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty} \operatorname{arctg}(x^2)\Big|_{c}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty}(0 - \operatorname{arctg}^2 c^2) = -\frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty}(\operatorname{arctg}(c^2)) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} 2dx = \lim_{d\to\infty} \frac{1}{2}\int_{0}^{d} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \ldots\ldots = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$$

2. Stud conv. urm. integr. improprii:

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$

Fie $f,g : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$

Avem $0 \le f(x) \le g(x)$ $(\forall)\ x \in [1,\infty)$

$$\int_1^{\infty} g(x) dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Deci $\int_1^{\infty} g(x) dx$ este conv.

Conf. crit. de comp. cu ineg. avem că $\int_1^{\infty} f(x) dx$ este conv.

b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx$

Sol

Fie $f,g : [2,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 \in (0,\infty)$$

Conf. crit. de comp. cu lim. avem că

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \sim \int_2^{\infty} g(x) dx$$

$$\int_2^{\infty} g(x) dx = \lim_{d\to\infty} \int_2^{d} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{d\to\infty} \int_2^{d} x^{-\frac{1}{2}} = \lim_{d\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_2^{d} = \lim_{d\to\infty} 2(\sqrt{d} - 2) = \infty$$

$\int_2^{\infty} g(x) dx$ - div. $\Rightarrow$ $\int_2^{\infty} f(x) dx$ - div.

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$

d) $\int_1^\infty \sin\frac{1}{x^{11}}\,dx$

Sol $\frac{1}{x^{11}} \in (0,1]\ (\forall)\ x\in[1,\infty)$

$\qquad\qquad \cap$

$\qquad\qquad (0,\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{x^{11}} > 0,\ (\forall)\ x\in[1,\infty)$

Fie $f:[1,\infty)\to(0,\infty),\ f(x)=\sin\frac{1}{x^{11}}$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{(0,\frac{\pi}{2})}{x} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\sin x} \text{ cresc.} \\[2ex] \underset{[1,\infty)}{x} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\frac{1}{x^{11}}} \text{ desc.} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ este desc.}$$

Conf. Crit. integral al lui Cauchy

avem că $\int_1^\infty f(x)\,dx \sim \sum_{n=1}^\infty f(n)$

$\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty \sin\frac{1}{n^{11}}$

Fie $x_n = \sin\frac{1}{n^{11}}\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ şi $y_n = \frac{1}{n^{11}}\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^{11}}}{\frac{1}{n^{11}}} = 1 \in (0,\infty)$

Conf. crit. de comp. cu limită,

avem că $\sum_{n=1}^\infty x_n \sim \sum_{n=1}^\infty y_n$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{11}}$ = conv. (serie arm. gen. cu $\alpha = 11$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty x_n$ conv. $\Rightarrow \int_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^{11}}$ conv. $\square$

3) Folosind, eventual, func. Γ şi B, calc.:

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$

a) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx \underset{1}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

s.v. $x^2 = t$

$\Rightarrow x = \sqrt{t}$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

c) $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx \underset{1}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^6}{2^6} e^{-t} dt = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^6 e^{-t} = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^{7-1} e^{-t} = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7}$ $\square$

s.v. $2x = t$

$\Rightarrow x = \frac{t}{2}$

$dx = \frac{1}{2} dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

d) $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3} dx \underset{1}{=} \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{\frac{1}{6}} \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$ $\square$

s.v. $x^3 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{3}}$

$dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

e) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx \underset{1}{=} 2\int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{2-2t}} dt = \int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{2(1-t)}} dt = \frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^2 (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^{3-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt$

s.v. $t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t$ $dx = 2dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \to 2 \Rightarrow t \to 1$

$= \frac{8}{\sqrt{2}} B\left(3, \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{16}{15} = \frac{128}{15\sqrt{2}} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$

$B\left(3, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2! \cdot \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\cancel{\sqrt{\pi}}}{\frac{15}{8}\cancel{\sqrt{\pi}}} = \frac{16}{15}$

$\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+2+\frac{1}{2}\right) = \left(2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{5}{2}\Gamma\left(1+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{5}{2}} (\cos)^{\frac{3}{2}} dt$

Sol

$2x-1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

$2y-1 = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\cdot\frac{7}{4}-1} (\cos t)^{2\cdot\frac{5}{4}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot \frac{3\pi\sqrt{2}}{32} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{64}$$

$$B\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{7}{4})\cdot\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{7}{4}+\frac{5}{4})} = \frac{\Gamma(\frac{7}{4})\cdot\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma(\frac{7}{4})\cdot\Gamma(\frac{5}{4})}{2!} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{32}$$

$\Gamma(\frac{7}{4}) = \Gamma(1+\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{3}{4})$

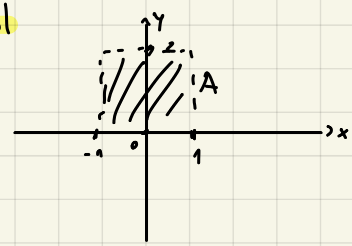
$\Gamma(\frac{5}{4}) = \Gamma(1+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})$

$$\Gamma(\frac{7}{4})\Gamma(\frac{5}{4}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4}) = \frac{3}{16}\Gamma(1-\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4}) = \frac{3}{16}\frac{\pi}{\sin(\pi\cdot\frac{1}{4})} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6\pi}{16\sqrt{2}} = \frac{6\pi\sqrt{2}}{32} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16} \ \square$$

4) Det:

a) $\iint_A y\,dxdy$, unde $A = [-1,1]\times[0,2]$

Sol



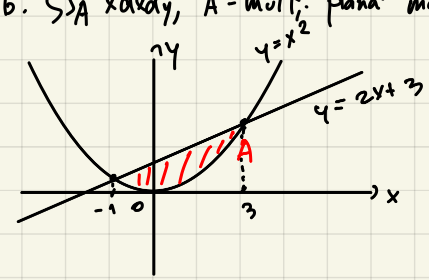
A-comp.
$A \in J(\mathbb{R}^2)$

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$

f-cont.

$$\Rightarrow \iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_A y\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^2 y\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 dx = \int_{-1}^{1} 2\,dx = 2x\Big|_{-1}^{1} = 4 \ \square$$

b. $\iint_A x\,dxdy$, A - mult. plană mărg. de $y = x^2$ şi $y = 2x+3$



$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-1,3],\ x^2\le y\le 2x+3\}$

Fie $\alpha,\beta: [-1,3]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = 2x+3$

α,β cont $\Rightarrow A\in J(\mathbb{R}^2)$ şi A comp.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

f_cont

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{2x+3} x\,dy\right)dx = \int_{-1}^{3}\left(xy\Big|_{y=x^2}^{y=2x+3}\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{3}(-x^3+2x^2+3x)\,dx =$$

$= \dots\dots =$

Sol

Det. pctle. de intersecţie dintre $y = x^2$ şi $y = 2x+3$

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x+3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

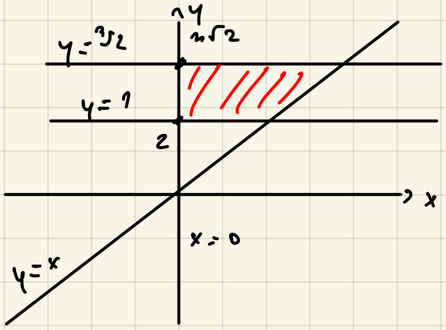
$(x+1)(x-3) = 0$

$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 1$

$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 9$

c) $\iint_A x\,dxdy$, A - mult. plană lim. de $y = -x^2-x+2$ şi $y = x-1$

d) $\iint_A y\,dx\,dy$, mulț. plană marg. de $x=0, y=1, y=\sqrt[3]{2}, y=x$



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\in[1,\sqrt[3]{2}],\ 0\le x\le y\}$

Fie $\varphi, \psi : [1,\sqrt[3]{2}]\to\mathbb{R}$. $\varphi(x)=0, \psi(x)=y$

φ,ψ cont.

$A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și compct.

Fie $f:A\to\mathbb{R}, f(x,y)=x$

f cont.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt[3]{2}}\left(\int_0^y x\,dx\right)dy =$

Curs 14

Teorema de permutare a limitei cu integrala, Cazul multidimensional

Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $\emptyset\neq A\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, $f_n, f: A\to\mathbb{R}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ a.î.:

1) f_n integr. R şi mărg. (pe A)

2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Atunci f este integr. R şi mărg. şi

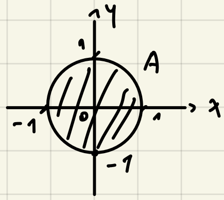
$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

Exc

Fie $A = B[(0,0),1] = \overline{B}((0,0),1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$

Det. $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_A \frac{\cos(n(x+y))+2(x^2+y^2)}{n^2+nx^2+y^2}\,dx\,dy$

Sol



A convexă şi mărg $\Rightarrow A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

A compactă

Fie $f_n: A\to\mathbb{R}$, $f_n(x,y) = \frac{\cos(n(x+y))+2(x^2+y^2)}{n^2+nx^2+y^2}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ cont } (\forall)\, n\in\mathbb{N}^* \\ A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2) \text{ şi comp.} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n$ integr. R şi mărg. $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

C.s

Fie $(x,y)\in A$

$0\le |f_n(x,y)| = \frac{|\cos(n(x+y))+2(x^2+y^2)|}{n^2+nx^2+y^2} \le \frac{|\cos(n(x+y))|+|2(x^2+y^2)|}{n^2+nx^2+y^2} \le \frac{1+2}{n^2} = \frac{3}{n^2}$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Avem $0\le |f_n(x,y)|\le \frac{3}{n^2}$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$\searrow\ \downarrow\ \swarrow$

0

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x,y)|=0$. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y)=0$

Aşadar $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, unde $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=0$

C.U

$$\sup_{(x,y)\in A} |f_n(x,y)-f(x,y)| = \sup_{(x,y)\in A} \left| \frac{\cos(n(x+y)) + 2(x^2+y^2)}{n^2+n x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{3}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

Conf. Th. de perm. a lim. cu integr. avem că f e integ. R și mărg.

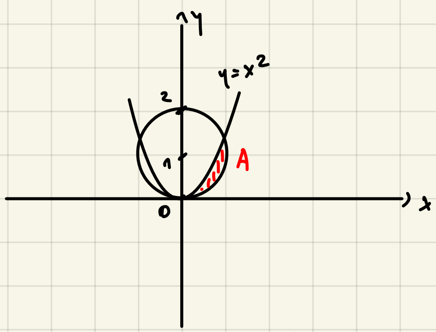
și $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(x,y)\,dxdy = \int_A f(x,y)\,dxdy = 0$ □

Seminar 14

1. Det:

a) $\iint_A (1-y)\,dxdy$, unde

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2 \leq 1,\ y \leq x^2, x \geq 0\}$



Det. pctle. de inter. dintre $x^2+(y-1)^2=1$ și $y=x^2$

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+(x^2-1)^2-1=0 \Rightarrow x^2+x^4-2x^2+1-1=0$$

$\Rightarrow x^4-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x \in \{-1,0,1\}$

$x_1=-1 \Rightarrow y_1=1$

$x_2=0 \Rightarrow y_2=0$

$x_3=1 \Rightarrow y_3=1$

$x^2+(y-1)^2 \leq 1 \Rightarrow (y-1)^2 \leq 1-x^2$

$\Rightarrow -\sqrt{1-x^2} \leq y-1 \leq \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow 1-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1+\sqrt{1-x^2}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ 1-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq x^2\}$

Fie $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = 1-\sqrt{1-x^2}$,
$\beta(x) = x^2$

α, β cont.

$\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și A comp.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1-y$

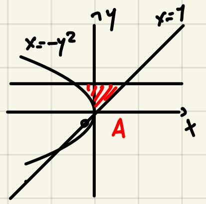
f - cont

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2} (1-y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left((-1)\frac{(1-y)^2}{2} \Big|_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{y=x^2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-x^2)^2 - (1-1+\sqrt{1-x^2})^2\right] dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (\cancel{1}+x^4-2x^2-\cancel{1}+x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (x^4-x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15}$$ □

b) $\iint_A y\,dx\,dy$, unde A e mulț. plană mărg. de $x=-y^2$, $x=y$ și $y=1$

Sol



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[0,1],\ -y^2\le x\le y\}$

Fie $f,\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(y)=-y^2$,

$\varphi(y)=y$ $\quad f,\varphi$ cont.

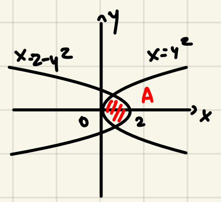
$A\in J(\mathbb{R}^2)$ și comp.

$f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$

f cont.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-y^2}^{y} y\,dx\right)dy = \int_0^1 xy\Big|_{x=-y^2}^{x=y}dy = \int_0^1 y^2+y^3\,dy = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ □

c) $\iint_A xy\,dx\,dy$, unde A e mulț. plană limitată de $x=y^2$ și $x=2-y^2$



Det. pctle. de inter. dintre $x=y^2$ și $y=2-y^2$

$\begin{cases}x=y^2\\ 2-y^2\end{cases} \Rightarrow y^2=2-y^2 \Rightarrow y^2=1,\ y=\pm 1,\ x=1$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[-1,1],\ y^2\le x\le 2-y^2\}$

Fie $f,\varphi:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(y)=y^2$, $\varphi(y)=2-y^2$

f,φ cont.

$A\in J(\mathbb{R}^2)$, A comp.

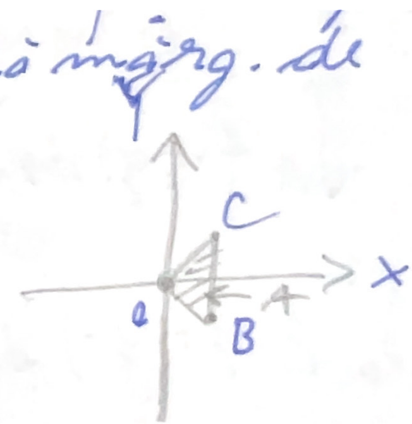
Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$

f cont.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{2-y^2} xy\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{y}{2}x^2\Big|_{x=y^2}^{2-y^2}\right)dy = \int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{y}{2}\left((2-y^2)^2-x^2\right)}_{\text{func. impară}}dy = 0$ □

d) $\iint_A x\,dx\,dy$, unde A e mulț. plană înconj. de

$\Delta OBC\ (O(0,0), B(1,-1), C(1,1))$



Sol.: ~~$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1]$~~,

Scriem ec. dreptelor:

! $OB: \dfrac{y-y_O}{y_B-y_O} = \dfrac{x-x_O}{x_B-x_O} \Rightarrow \dfrac{y}{-1} = \dfrac{x}{1} \Rightarrow y=-x$

$OC: \dfrac{y-y_O}{y_C-y_O} = \dfrac{x-x_O}{x_C-x_O} \Rightarrow \dfrac{y}{1} = \dfrac{x}{1} \Rightarrow y=x$

! $BC: \dfrac{y-y_B}{y_C-y_B} = \dfrac{x-x_B}{x_C-x_B} \Rightarrow \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{x-1}{1-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

CDI - C_{14}

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in [0,1], \ -x \le y \le x \}.$

Fie $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = -x$, $\beta(x) = x$ $\quad$ α, β cont.

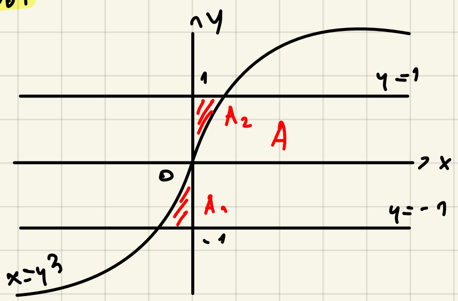
A măs. J. și comp. . Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$, f cont.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} x\,dy \right) dx = \int_0^1 x\,y \Big|_{y=-x}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^2)\,dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

e) $\iint_A e^{y^4}\,dx\,dy$, A mărg de $x=y^3,\ y=1,\ y=-1,\ x=0$

Sol



$A = A_1 \cup A_2$, unde $A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[-1,0],\ y^3\le x\le 0\}$

$A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[0,1],\ 0\le x\le y^3\}$

Fie $\varphi_1, \psi_1 : [-1,0]\to\mathbb{R}$,
$\varphi_1 = y^3,\ \psi_1 = 0$
φ_1, ψ_1 cont
$\Rightarrow A_1 \in J(\mathbb{R}^2)$ și A_1 comp.

Fie $\varphi_2, \psi_2 : [0,1]\to\mathbb{R}$
$\varphi_2 = 0,\ \psi_2 = y^3$
φ_2, ψ_2 cont
$A_2 \in J(\mathbb{R}^2)$ și comp.

$\Rightarrow A = A_1\cup A_2 \in J(\mathbb{R}^2)$ și comp.

$A_1\cap A_2 = \{(0,0)\} \Rightarrow \mu(A_1\cap A_2) = 0\cdot 0 = 0$

Fie $f : A\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{y^4}$
f - cont

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\int_{y^3}^{0} e^{y^4}\,dx\right)dy + \int_0^1\left(\int_0^{y^3} e^{y^4}\,dx\right)dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(e^{y^4}x\Big|_{x=y^3}^{x=0}\right)dy + \int_0^1\left(e^{y^4}x\Big|_{x=0}^{x=y^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-1}^{0} 4y^3 e^{y^4}\,dy + \frac{1}{4}\int_0^1 4y^3 e^{y^4}\,dy$$

$$-\frac{1}{4}e^{y^4}\Big|_{y=-1}^{y=0} + \frac{1}{4}e^{y^4}\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{4}(1-e) + \frac{1}{4}(e-1) =$$

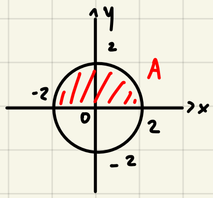
$$-\frac{1}{4}(1-e) - \frac{1}{4}(1-e) = -\frac{1}{4}(1-e+1-e) =$$

$$= -\frac{1}{4}(2-2e) = \frac{e-1}{2} \ \square$$

2. Det:

a) $\iint_A e^{-x^2-y^2}\,dxdy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$

Sol



A convexă şi mărg

$\Rightarrow A\in J(\mathbb{R})$

A comp.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2-y^2}$

f cont.

S.V. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$$(x,y)\in A \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\le 4 \\ r\sin\theta\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2\le 4 \\ r\sin\theta\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r\in[0,2] \\ \theta\in[0,\pi]\end{array}$$

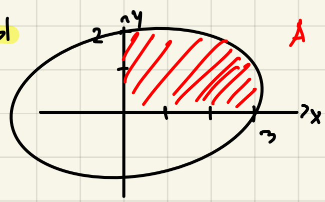
Fie $B=[0,2]\times[0,\pi]$

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B r(r\cos\theta, r\sin\theta)\,drd\theta =$$

$$= \int_0^2\left(\int_0^\pi re^{-r^2}d\theta\right)dr = \int_0^2 \pi re^{-r^2}dr = -\frac{\pi}{2}\int_0^2(-2r)e^{-r^2}dr = -\frac{\pi}{2}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=2} = -\frac{\pi}{2}e^{r^2}\Big|_{r=0}^{r=2} = -\frac{\pi}{2}(e^{-4}-1) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-4})\ \square$$

b) $\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,dxdy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

Sol



A conv. şi mărg

$\Rightarrow A\in J(\mathbb{R}^2)$

A comp

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}$

S.V. $x=3r\cos\theta$, $y=2r\sin\theta$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$$(x,y)\in A \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9r^2\cos^2\theta}{9}+\frac{4r^2\sin^2\theta}{4}\le 1 \\ 3r\cos\theta\ge 0 \\ 2r\sin\theta\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2\le 1 \\ \cos\theta\ge 0 \\ \sin\theta\ge 0\end{cases} \Rightarrow r\in[0,1],\ \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

$B=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

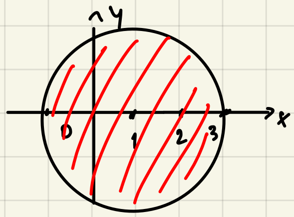
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B 3\cdot 2\cdot r\, f(3r\cos\theta, 2r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6r\sqrt{1-r^2}\,d\theta \right) dr = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\, 6r\sqrt{1-r^2}\,dr = -\frac{3\pi}{2}\int_0^1 -2r\,(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\,dr = -\frac{3\pi}{2}\, \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{r=0}^{r=1} = -\frac{3\pi}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi \;\square$$

1. Det.

a) $\iint_A y\,dx\,dy$, $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$

Sol



A convexă și mărg. $\Rightarrow$
$\Rightarrow A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

A - compactă

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$
f - cont.

S.V.

$$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r\in[0,\infty), \theta\in[0,2\pi]$$

$(x,y)\in A \Rightarrow (\cancel{1} + r\cos\theta - \cancel{1})^2 + (r\sin\theta)^2 \le 4$

$r^2 \le 4 \Rightarrow \begin{cases} r\in[0,2] \\ \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$

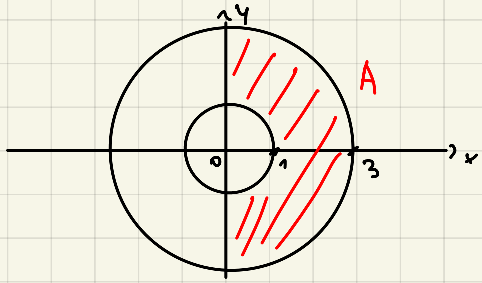
Fie $B = [0,2]\times[0,2\pi]$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(1 + r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\,d\theta \right) dr = \int_0^2 \left(r^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dr = 0 \;\square$$

b) $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0\}$

Sol



$$A=\underset{\substack{\uparrow \\ J(\mathbb{R}^2)}}{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0\}} \setminus \underset{\substack{\uparrow \\ J(\mathbb{R}^2)}}{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}}$$

Deci $A\in J(\mathbb{R}^2)$

A comp.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

f cont.

S.V.

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi)$

$(x,y)\in A \Rightarrow \begin{cases}1\le x^2+y^2\le 9\\ x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1\le r^2\le 9\\ r\cos\theta\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} r\in[1,3] \\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi]\end{array}$

Fie $B=[1,3]\times\left([0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi]\right)$

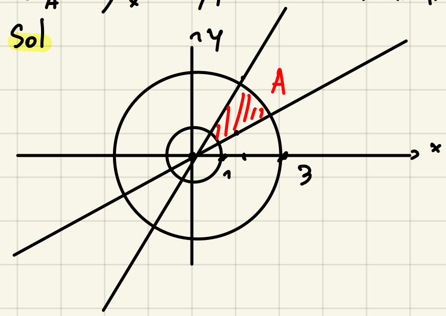
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_B r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_1^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{r^2}\,d\theta+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r\sqrt{r^2}\,d\theta\right)dr=$$

$$=\int_1^3\left(r^2\cdot\frac{\pi}{2}+r^2\cdot\frac{\pi}{2}\right)dr=\pi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_1^3=\pi\cdot\frac{26}{3}$$

c) $\iint_A \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1\le x^2+y^2\le 9,\ x\le\sqrt{3}y\le 3x\}$

Sol



$$A=\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 9,\ x\le\sqrt{3}y\le 3x\}}_{\in\, J(\mathbb{R}^2)} \setminus \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}}_{\in\, J(\mathbb{R}^2)}$$

Deci $A\in J(\mathbb{R}^2)$

A comp.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
f-cont.

S.V.

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,\infty)$$

$$(x,y)\in A \Rightarrow \begin{matrix} 1\le r^2\le 9 \\ r\cos\theta\le\sqrt{3}\,r\sin\theta \\ r\sin\theta\le\sqrt{3}\,r\cos\theta \end{matrix} \underset{\theta\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Rightarrow} \begin{cases} r\in[1,3] \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ge\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\le\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\in[1,3] \\ \operatorname{tg}\theta\ge\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{tg}\theta\le\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\in[1,3] \\ \theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}] \end{cases}$$

Fie $B=[1,3]\times[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_1^3\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r\operatorname{arctg}\left(\frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}\cos\theta}\right)d\theta\right)dr = \int_1^3\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r\theta\,d\theta\right)dr = \int_1^3\left(r\cdot\frac{\theta^2}{2}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{3}}\right)dr = \int_1^3 \frac{r}{2}\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)dr =$$

$$= \int_1^3 \frac{3\pi^2}{36}\cdot\frac{1}{2}\cdot r\,dr = \frac{\pi^2}{24}\int_1^3 r\,dr = \frac{\pi^2}{48}(9-1) = \frac{\pi^2}{6}\ \square$$

Obs

Atunci când calc. integr. triple nu este ne voie:

1) să schităm grafic mult. din $\mathbb{R}^3$
2) să justificăm că mult. din $\mathbb{R}^3$ sunt măs. J. (şi nici compacte)
3) să arătăm că func. def. pe mult. din $\mathbb{R}^3$ sunt integr. R. (şi nici mărg.)

Afirmaţiile de la 2) şi 3) se cons. adev. din enunţurile exc.

1. Det:

a) $\iiint_A (xyz+y^2)\,dxdydz$, $A=[-1,1]\times[2,3]\times[0,2]$

Sol

$$\iiint_A (xyz+y^2)\,dxdydz = \int_{-1}^{1}\left(\int_2^3\left(\int_0^2 (xyz+y^2)\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_2^3 \frac{xyz^2}{2}+y^2z\Big|_0^2\right)dy\Big)dz =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_2^3 (2xy+2y^2)\,dy)\right)dz =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(xy^2+\frac{2}{3}y^3\Big|_2^3\right)dz = \int_{-1}^{1}\left(5x+\frac{2}{3}\cdot 19\right)dx =$$

$$= \frac{5}{2}x^2+\frac{19}{3}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{38}{3}$$

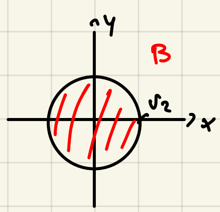
b) $\iiint_A x\,dxdydz$, $A=[1,2]\times[0,1]\times[2,3]$

c) $\iiint_A (x^2+y^2)z\,dxdydz$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in B,\ x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}\}$ şi $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2\}$

Sol

$$\iiint_A (x^2+y^2)z\,dxdydz = \iint_B\left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz\right)dxdy =$$

$$= \iint_B\left(\frac{(x^2+y^2)z^2}{2}\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}}\right)dxdy = \iint_B \frac{(x^2+y^2)}{2}\cdot\left(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right)dxdy$$



B convexă şi mărg.
$\Rightarrow B\in J(\mathbb{R}^2)$
B comp.

Fie $f: B\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)}{2}(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2)dxdy$

f cont.

S.V.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},\ r\in[0,\infty),\ \theta\in[0,2\pi]$$

$(x,y)\in B \Rightarrow x^2+y^2\le 2 \Rightarrow r^2\le 2 \Rightarrow r\in[0,\sqrt{2}]$
$\theta\in[0,2\pi]$

Fie $C=[0,\sqrt{2}]\times[0,2\pi]$

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_C r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta dr =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r\cdot\frac{r^2}{2}(6-r^2-r^4)\,d\theta dr =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \theta\cdot\left(\frac{r^3}{2}(6-r^2-r^4)\right)\Big|_0^{2\pi} dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{2}(6-r^2-r^4)\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(3r^3-\frac{r^5}{2}-\frac{r^4}{2}\right)dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{3}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{1}{12}r^6\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{1}{16}r^8\Big|_0^{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 6\pi-\frac{4}{3}\pi-2\pi=\frac{8}{3}\pi$$

d) $\iiint_A xyz\,dxdydz$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y)\in B,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 5\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 9\le x^2+y^2\le 25\}$