Subiecte Analiză

SI

- Def noțiunea de vec. în $\mathbb{R}$ ✓
- lim unui șir ✓

SII

- Proprietățiile șirurilor converg. ✓
- Converg. șirurilor monotone ✓
- Existența punctelor limită ✓

SIII

- Distanță, spațiu metric, bilă, vecinătate: șir conv., șir Cauchy. ✓
- Normă, spațiu normat ✓

SIV

- Prop. șirurilor conv și Cauchy în sp. metric ✓

SV ✓

- Caracterizarea limitei sup./inf. ✓ — ? prop limi?
- Def. limitei sup. ✓

SVI ✓

- Teorema Riemann ✓
- Teorema Cauchy-Hadamard ✓

SVII ✓

- Mulțime închisă/deschisă ✓, vecinătate, topologie într-un spațiu metric; A', $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $Fr(A)$ ✓
- Topologie și spațiu topologic ✓

§VIII

- Teorem. privind caract. punctuală a continuităţii
- Def. cu vecinătăţi şi cu ε a cont
- Def unei lim a unei f. cont.

§IX ✓

- Def conv. simple şi uniforme

§X ✓

- Teorema privind continuitatea lim. unui şir de fc

§XI ✓

- Teorema privind mărg. func. cont.

§XII ✓

- Def. derivabilităţii (clasică şi cu ε)

§XIII ✓

- Def noţiunii de fc. uniform continuă ✓
- Teorema privind uniform. fc. continue ✓

§XIV ✓

- Teoremele Fermat ✓, Rolle ✓, Lagrange ✓, Cauchy ✓, L'Hospital ✓
- Teorema lui Darboux pt f. deriv. ✓
- Deriv. unui şir de fc ✓

§XV

- Def polinomul Taylor
- Teoremele lui Taylor
- Condiții necesare și suficiente de extrem local

§XVI

- Def derivatei și a derivatei în rap cu un vec. ($\mathbb{R}^n$)
(clasică și cu Ω)

§XVII

- Teoremele privind derivarea fc. compuse și inversabile
- Teorema de inversare locală
- Teorema lui Fermat

§XVIII

- Def. derivatei de ord 2 și a deriv parțiale de ordin superior
- Teorem. lui Young și Schwartz
- Condiții necesare și suficiente de extrem local
- Teorema multiplicatorului lui Lagrange

§XIX

- Teorema fc. implicite

§XX ✓

Suma Darboux superioară / inferioară ✓
Suma Riemann ✓
Integrala Darboux sup. / inf. ✓
Def unei fc. integr. Riemann ✓

§XXI ✓

Suma lui Darboux, Teorema Darboux ✓
Clase de fc. integrabile ✓
Teorem. privind integrabilitatea unui şir de fc. ✓
Teorem. lui Lebesgue ✓

§XXII ✓

Dreptunghi ✓
Vol. unui dreptunghi ✓
Mulţime elem. ✓
Vol. unei mulţimi elem. ✓
Inel de mulţimi ✓
Mulţime măsurabilă Jordan (sup şi inf) ✓

§XXIII ✓

Propoziţia privind prop. măsurii sup şi inf în rap cu ✓
$\cap$, $\cup$, $\setminus$; Caract. topologică a mulţimilor măsurabile

§XXIV ✓

Partiţii Jordan ✓
Suma Darboux Sup. \ Inf. $\mathbb{R}^n$ ✓
Suma Riemann $\mathbb{R}^n$ ✓
Teorema lui Darboux, Teorema lui Lebesgue ✓
Teorema lui Fubini (2 variante) ✓
Teorema de schimbare de variabilă ✓

§I

Def: 1) O mulțime $V \subset \mathbb{R}\ (\overline{\mathbb{R}})$ se numește vecinătate pentru pct. $a \in \mathbb{R}$ dacă $(\exists)\ \varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$

2) $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ s.n vecinătate pentru $+\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă $(\exists)\ M \in \mathbb{R}$ a.î. $(M, +\infty) \in V$

3) $\mathcal{V}_a = \{ V \subset \overline{\mathbb{R}} \mid V$ vecinătate a lui $a \}$

4) $x_n \to a \iff (\forall)\ V \in \mathcal{V}_a, (\exists)\ n_V$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

Def: 1) Un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ converge la $a \in \mathbb{R}$ $\iff (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

2) $x_n \to +\infty \iff (\forall)\ M \in \mathbb{R}, (\exists)\ n_M \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_M \Rightarrow x_n > M$

3) $x_n \to -\infty \iff (\forall)\ m \in \mathbb{R}, (\exists)\ n_m \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \leq n_m \Rightarrow x_n < m$

S II.

Proprietățile șirurilor convergente

(P) Orice șir convergent este mărginit

(P) Fie $x_n \to a$, $y_n \to b$, $a, b \in \mathbb{R}$, atunci:

1) $(x_n + y_n) \to a+b$

2) $(x_n y_n) \to a \cdot b$

3) $|x_n| \to |a|$

4) $x_n \leq y_n$, $(\forall) n \geq 1$, $\Rightarrow a \leq b$

5) $x_n \neq 0$, $(\forall) n \geq 1$, $a \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x_n}\right) \to \frac{1}{a}$

(T) (Weierstrass)
Orice șir monoton și mărginit este convergent.

(T) Orice șir mărginit are un subșir convergent.

(T) Dacă $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$ Orice subșir x_{k_n} are limita l

S_{III}.

Spațiu metric

Def:

1) O funcție $d: X \times X \to [0, +\infty)$ s.n distanță dacă:

a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$, $(\forall) x, y \in X$

c) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, $(\forall) x, y, z \in X$
(inegalitatea triunghiului)

2) Perechea (X, d) s.n spațiu metric

3) $B(a, r) = \{ x \in X \mid d(a, x) < r \} \overset{not}{=}$
= bila de centru a și rază r

4) $V \subset X$ s.n vecinătate a lui a, dacă
$(\exists) \varepsilon > 0$ a.î $B(a, \varepsilon) \subset V$

5) $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon$ a.î
$(\forall) n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$

$x_n \xrightarrow{d} a \Leftrightarrow d(x_n, a) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon$ a.î $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ $d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$

Șiruri Cauchy

Def:

Un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ s.n Cauchy $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon>0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î $(\forall)\, n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$|x_n - x_m| < \varepsilon$

Def:

Un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ s.n Cauchy $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon>0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î $(\forall)\, n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Normă. Spațiu normat

Def: O funcție $\| \; \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ a.î:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$

3) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$, $(\forall)\, a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$

s.n normă.

Def: $(\mathbb{R}^n, \| \; \|)$ s.n spațiu normat

§IV.

Def: (Șir Cauchy)

Un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ s.n Cauchy dacă $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n, m \geq n_\varepsilon$, avem că:

$d(x_n, x_m)<\varepsilon$

Def: Un spațiu metric în care orice șir Cauchy este convergent s.n **complet**.

Proprietăți

Fie (X, d) spațiu metric, atunci:

1) Orice șir Cauchy este mărginit.

2) Orice șir convergent este șir Cauchy.

1) și 2) $\Rightarrow$ 3) Orice șir convergent este mărginit.

4) Un șir Cauchy care are un subșir convergent este convergent.

T Spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$ este complet.

§V.

Limite superioare și limite inferioare

Def:

1) Un element $a \in \mathbb{R}$ s.n punct limită al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă $(\exists)\ (x_{n_k})$ subșir a.î $x_{n_k} \longrightarrow a$

$\mathcal{L} = \{a \mid a \text{ punct limită pt } x_n\}$

2) $\sup \mathcal{L} \overset{\text{not}}{=}$ limita superioară a șirului $x_n =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

$\inf \mathcal{L} \overset{\text{not}}{=}$ limita inferioară a șirului $x_n =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

S VI

(T) (Riemann)

Dacă seria $s = \sum_{n\geq 1} x_n$ este absolut converg. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\ \sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijectivă, seria $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ este abs. convergentă și $\sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$

Dacă seria $s = \sum_{n\geq 1} x_n$ este semiconvergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\ \alpha \leq \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $(\exists)$ o perm. $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ a.î. mulțimea punctelor limită a seriei $\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ să fie $[\alpha, \beta]$

Def: O serie de forma $s(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ s.n. serie de puteri

$D = \{x \mid s(x) \text{ este conv.}\}$ – domeniu de convergență

$\rho = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ – rază de convergență

(T) (Cauchy-Hadamard)

Fie seria $s(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$, atunci:

1) Dacă $\rho = 0 \Rightarrow D = \{0\}$

$\rho = +\infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$

$\rho \in (0, \infty) \Rightarrow (-\rho, \rho) \subset D \subset [-\rho, \rho]$

2) Seria $s'(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ are $\rho_1 = \rho$

§VII

Def: O mulțime $D \subset X$ s.n deschisă pe spațiul metric (X, d) dacă este vecinătate pentru orice punct al. ei

$(\forall)\, x \in D \Rightarrow (\exists)\, \varepsilon_x > 0$ a.î $B(x, \varepsilon_x) \subset D$

$\mathcal{Z} = \{ D \in X \mid D \text{ deschisă} \}$

Def: $F \subset X$ s.n închisă $\Leftrightarrow X \setminus F \in \mathcal{Z}$

Def: $\mathcal{Z}$ s.n topologia spațiului metric (X, d)

Def: $A \subset X$

1) $A' = \{ a \in X \mid (\forall)\, V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset \} =$
$= \{ a \in X \mid (\exists)\, (x_n)_n \in A \text{ a.î } x_n \to a \text{ și } x_n \neq a \} =$
$=$ mulțimea pct. de acumulare A

2) $\overline{A} = A' \cup A = \{ a \in X \mid (\forall)\, V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \} =$
$= \{ a \in X \mid (\exists)\, (x_n)_n \in A \text{ a.î } x_n \to a \} =$
$=$ închiderea mulțimii A

3) $\mathring{A} = \operatorname{Int}(A) = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{Z} \\ D \subset A}} D = \{ x \in X \mid A \in \mathcal{V}_x \} =$
$=$ interiorul mulțimii A

4) $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{ a \in X \mid V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \text{ și } V \cap \complement A \neq \emptyset \}$

5) $iz(A) = A \setminus A'$ mulțimea pct izolate

SVII cont.

Topologie

Def: O familie de mulțimi $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$ s.n topologie dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2) $G_1, G_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$

3) $(G_i)_{i \in I} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$

$D \in \mathcal{T}$ s.n deschisă

$\mathcal{V}_a = \{ V \subset X \mid (\exists) D \in \mathcal{T}$ a.î. $a \in D \subset V \}$

$\mathcal{F} = \{ F \subset X \mid X \setminus F \in \mathcal{T} \}$ - familia mulț. închise

$x_n \to a$, $(\forall) V \in \mathcal{V}_a \to (\exists) n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall) n \geq n_V$, $x_n \in V$

S VIII.

Continuitatea

(T) Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice, $a \in X_1$ și $f: X_1 \to X_2$, atunci urm. afirmații sunt echiv.:

1) $(\forall) V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}$

2) $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

3) $(\forall) x_n \in X$ a.î. $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

4) f continuă în pct. a

Def: Fie func. $f: X_1 \to X_2$, unde (X_1, d_1), (X_2, d_2) sunt două sp. metrice.
Fie $x_0 \in X_1$. f cont. în $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

§ IX.

Șiruri de func. Convergența simplă și uniformă.

Def: Fie $f_n, f : A \to \mathbb{R}$

1) Spunem că șirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge <u>simplu</u> la f și not.: $f_n \xrightarrow{s} f$, dacă:

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in A \iff$

$\iff (\forall)\, x \in A$ și $\varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_{\varepsilon, x}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_{\varepsilon, x}$,

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

2) Spunem că șirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge <u>uniform</u> la f și not.: $f_n \xrightarrow{u} f$, dacă:

$(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $(\forall)\, x \in A$, sau:

Fie $a_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$

$f_n \xrightarrow{u} f \iff a_n \to 0$

S IX.

(T) Fie (X, d) un spațiu metric

$f_n, f : X \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și funcțiile

f_n să fie cont. în $a \in X$.

Atunci:

f este continuă în a

S XI

T Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, atunci:

$\exists\, c \in [a, b]$ a.î. $f(c) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Funcția f este mărginită și își atinge marginile

§XII

Derivabilitatea

Def: Fie $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$
Spunem că funcția f este derivabilă în c dacă $(\exists)\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\in\mathbb{R}$ și notăm:

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

(P) Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$
Spunem că f este derivabilă în x_0 $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $(\exists)\ \alpha\in\mathbb{R}$ și $\omega:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î.:

$$f(x)=f(c)+\alpha(x-c)+\omega(x)\cdot(x-c),$$ unde:

$$\alpha=f'(c) \text{ și } \omega(x)=\frac{f(x)-f(c)-\alpha(x-c)}{x-c}$$

§ XIII

Fc. uniform continue

Def: (Continuitatea)

Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice. O funcție $f: X_1 \to X_2$ este cont. în $a \in X_1 \Leftrightarrow$ $(\forall)\, a \in X_1$ și $(\forall)\, \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists)\, \delta_{\varepsilon, a}$ a.î. $(\forall)\, x \in X_1$ cu $d_1(x, a) < \delta_{\varepsilon, a} \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Def: (Uniform continuitatea)

Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două sp. metrice. Funcția $f: X_1 \to X_2$ este uniform continuă, dacă: $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x, x') < \delta_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$, $(\forall)\, x, x' \in X_1$

(T) Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata mărginită, atunci: f este uniform continuă.

(T) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ închisă și mărg. și $f: A \to \mathbb{R}^n$ continuă. Atunci: f este uniform continuă

§ XIV

(T) (Fermat)

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$ a.î.:

$(\exists)\, f'(c)$ și c este punct de extrem local, atunci:

$f'(c)=0$

(T) (Rolle)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b) și continuă pe $[a,b]$ și $f(a)=f(b)$, atunci:

$(\exists)\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$

(T) (Lagrange)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b), atunci:

$(\exists)\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(T) (Cauchy)

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î. f și g să fie continue pe $[a,b]$ și derivabile pe (a,b) și $g'(x)\neq 0, (\forall)\, x\in(a,b)$, $g(b)\neq g(a)$, atunci:

$(\exists)\, c\in(a,b)$ a.î. $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

§ XIV cont.

(T) (L'Hospital)

Fie $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile pe (a,b) și $g'(x) \neq 0$ a.î. $(\exists) \lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow b} g(x) \in \{0, +\infty\}$ și $(\exists) \lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, atunci:

$(\exists) \lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

(P) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe (a,b), atunci:

Derivata f' a lui f are propr. lui Darboux.

Derivabilitatea unui șir de funcții

(T) Fie $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $(\exists) f_n'$ pe (a,b) și $(\exists) g : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $f_n' \xrightarrow{u} g$

2) $(\exists) c \in (a,b)$ a.î. $(f_n(c))_n$ să fie converg.

Atunci:

$(\exists) f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $f' = g$

§ XV

Def: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă de $n-1$ ori pe (a,b) și $c\in(a,b)$ a.î. $(\exists)\ f^{(n)}(c)$

Polinomul $T_{f,n,c}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}\cdot(x-c)^k$

s.n. polinomul Taylor asociat func. f de ord. n în pct. c

Ⓣ (Taylor 1)

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ deriv. de $(n-1)$ ori pe (a,b) și $c\in(a,b)$ a.î. $(\exists)\ f^{(n)}(c)$, atunci:

$(\exists)\ \omega:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î.:

$f(x)=T_{f,n,c}(x)+(x-c)^n\cdot\omega(x)$ și $\lim\limits_{x\to c}\omega(x)=0$

Ⓣ (Taylor 2)

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ a.î. să $(\exists)\ f^{(n+1)}$ pe (a,b), atunci:

$(\exists)\ \alpha\in(x,c)$ a.î. $f(x)=T_{f,n,c}(x)+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}\cdot(x-c)^{n+1}$

$\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}\cdot(x-c)^{n+1}=R_{f,n,c}(x)$ = restul Lagrange

S XV.

(P) Fie $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b) și $c \in (a,b)$ a.î. $\exists\, f''(c)$, atunci:

1) Dacă c este pct de minim local $\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(c) = 0$ și $f''(c) \geq 0$

2) Dacă $f'(c) = 0$ și $f''(c) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow c$ este punct de minim local

3) Dacă c este pct de maxim local $\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(c) = 0$, și $f''(c) \leq 0$

4) Dacă $f'(c) = 0$ și $f''(c) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow c$ este punct de maxim local

S $\boxed{XVI}$

Def: Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ și $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$ (derivata funcției în rap cu vectorul v)

Def: Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}^m$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dacă $(\exists) \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$, unde $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots)$, atunci: f este derivabilă parțial în raport cu var. x_i și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$$

Def: Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}^m$

Funcția f este derivabilă (diferențiabilă) în a dacă $(\exists)\, T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o aplicație liniară a.î.:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|_2} = 0$$

Funcția f este deriv în a, dacă $(\exists)\, T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și $\omega: D \to \mathbb{R}^m$ a.î.:

$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\| \cdot \omega(x)$ și

$\lim_{x \to a} \omega(x) = 0$, cu $\omega(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}$

§XVII

Derivarea func. compuse

(T) Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $G = \mathring{G} \subset \mathbb{R}^m$,

$f : D \to G$ și $g : G \to \mathbb{R}^p$ și $a \in D$ a.î.

$(\exists)\ f'(a)$ și $(\exists)\ g'(f(a))$, atunci:

$$(\exists)\ (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & G \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

Derivarea func. inv.

(T) Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $G = \mathring{G} \subset \mathbb{R}^m$ și

$f : D \to G$ bijectivă și $a \in D$

Dacă $(\exists)\ f'(a)$ și $(\exists)\ f^{-1}$ continuă în $f(a)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\exists)\ (f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$$

sau: $f(a) = b$, $(f^{-1})'(b) = [f'(f^{-1}(b))]^{-1}$

(T) (Teorema de inversare locală)

Fie $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$

Dacă $\varphi \in C^1$ pe D și $f'(a)$ este inversabilă $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists)\ D_1 = \overset{\circ}{D_1} \subset \mathbb{R}^n$ și $D_2 = \overset{\circ}{D_2} \subset \mathbb{R}^n$ a.î.

$a \in D_1 \subset D$ și $\varphi(a) \in D_2$ și funcția $\psi : D_1 \to D_2$, cu

$\psi(x) = \varphi(x)$ să fie bij și $\psi^{-1} \in C^1$

(T) (Fermat)

Fie $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$ și $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Dacă $(\exists)\ f'(a)$ și a este un punct de extrem local pt. f pe $D \Rightarrow f'(a) = 0$

SXVIII

Derivate de ordin superior

Def: Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$

$u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și $f : D \to \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial^p f}{\partial u_p \partial u_{p-1} \ldots \partial_2 \partial_1}(a) = \frac{\partial}{\partial u_p}\left(\frac{\partial^p f}{\partial u_{p-1} \ldots \partial u_1}(a)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_p}\left(\frac{\partial}{\partial u_{p-1}} \ldots \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)\right)(a)$$

T (Teorema lui Young)

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ deriv pe D

Dacă $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

atunci: $$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a) = f''(a)(v, u) =$$

$$= f''(a)(u, v)$$

T (Teorema lui Schwartz)

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și

$f : D \to \mathbb{R}^m$

Pp. că $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ pe D

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ cont în a, atunci:

$(\exists)\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ în pct a și $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$

Extreme locale

(T) Fie $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ a.î.

$(\exists)$ f' pe D și $f''(a)$. Atunci:

1) Dacă a este un punct de minim local $\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(a) = 0$ și $f''(a) \geq 0$

2) Dacă a este un punct de maxim local $\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(a) = 0$ și $f''(a) \leq 0$

3) Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) > 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ a este un punct de minim local

4) Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) < 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ a este un punct de maxim local

S $\overline{XIX}$

(T) (Teorema multiplicatorilor lui Lagrange)

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ ($m < n$), $f : D \to \mathbb{R}$ și $a \in D$ a.î.:

1) $f, g \in C^1$

2) rang$(g'(a))$ maxim

3) a este un punct de extrem local al func. f pe mulțimea $A = \{g(x) = 0\}$

Atunci:

$(\exists)\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a.î. $h_\lambda'(a) = 0$, unde:

$h = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m$ $(g \in \mathbb{R}^m)$

(T) (Teorema funcțiilor implicite)

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $(a, b) \in D$ ($a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$) a.î. $f \in C^1$ pe D

Dacă $f(a, b) = 0$ și $(\exists) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}(a, b)$, atunci:

$(\exists)\ D_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}$ și $D_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^m}$ a.î. $(a, b) \in D_1 \times D_2 \subset D$

și $(\exists !)\ \varphi : D_1 \to D_2$ cu prop că

$f(x, \varphi(x)) = 0$, $(\forall)\ x_1 \in D_1$ și $\varphi \in C_1$

§XX

Suma Darboux sup. și inf.

Def: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărg. și

$\Delta = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k), \quad M_k = \sup_{x\in[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

s.n suma darboux superioară

$$s_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k), \quad m_k = \inf_{x\in[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

s.n suma darboux inferioară

Suma Riemann

Def: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărg. și

$\Delta = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ și un sistem de pct interm. $(\alpha_k)_{k=\overline{0,n-1}}$

$$\sigma_\Delta(f, (\alpha_k)_{k=\overline{0,n-1}}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) \text{ s.n}$$

suma Riemann

Integrala darboux sup și inf.

Def: Se num. integrala Darboux superioară:

$$\inf_\Delta S_\Delta(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{ și integr. Darboux infer.}$$

$$\sup_\Delta s_\Delta(f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Def: Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărg. și $\Delta = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ diviziune a interv, $(\alpha_k)_{k \in \overline{0,n-1}}$ sistem de puncte interm, $\alpha_k \in [x_k, x_{k+1}]$ și

$\sigma_\Delta(f, (\alpha_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$ suma Riemann asoc. f asoc. div. Δ și s.d.p.i (α_k)

f s.n integrabilă Riemann dacă:

$(\exists)\, I \in \mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$$\|\Delta\| = \max_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| I - \sigma_\Delta(f, (\alpha_k)_{k=\overline{0,n-1}}) \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \|\Delta\| \to 0 \text{ și } \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, (\alpha_k)) = I$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, (\alpha_k))$$

Lema lui Darboux

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită, atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} S_\Delta(f)$$

$$\Leftrightarrow$$

$(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| S_\Delta - \int_a^b f \right| < \varepsilon$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s_\Delta(f)$$

§ $\boxed{XXI}$

Sumele Darboux, Integr. Darboux

T (Teorema lui Darboux)

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită, AUASE:

1) f este integr. Riemman

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

3) $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \Delta$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

4) $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \delta_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

T Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă, atunci:
f este integrabilă Riemman

T Orice funcție monotonă este integr. Riemman.

P Fie $f, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ integr. Riemman.
Atunci: αf, $f+g$, $|f|$ și $f \cdot g$ sunt integr. Riemman și avem:

1) $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

2) $\int_a^b \alpha \cdot f = \alpha \int_a^b f$

3) $f \le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$

4) $m \le f \le M$
$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$

(P) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărg. și $c\in(a,b)$.
Atunci: f integr. pe $[a,b] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f$ integr pe $[a,c]$ și $[c,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Def: O mulțime $A\subseteq\mathbb{R}$ s.n neglijabilă Lebesgue dacă:
$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ I_n=(a_n,b_n)$ a.î. $A\subset\bigcup_{n\geq 1} I_n$ și
$\sum_{n\geq 1} \ell(I_n)<\varepsilon$

Not.: D_f = mulțimea discontinuităților

(T) (Lebesgue)
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită, atunci:
f este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow D_f$ este neglijabilă Lebesgue

(T) (Integr. unui șir de func.)
Fie $f_n, f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și
f_n integrabilă. Atunci:
f este integrabilă Riemann și
$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$

§ XXIII

Mulțimi măsurabile Jordan

Def: O mulțime $D = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ s.n dreptunghi (n-dimensional)

$v(D) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \overset{n.m}{=}$ volumul dreptunghiului

$\overline{D} = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, $\overset{\circ}{D} = \bigtimes_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$

s.n drept închis, s.n drept deschis

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{ D \subset \mathbb{R}^n \mid D$ dreptunghi $\}$

Def: O mulțime $E = \bigcup_{j=1}^{m} D_j$ s.n mulțime elementară

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \{ E \subset \mathbb{R}^n \mid E$ elementară $\}$

$v(E) = \sum_{i=1}^{m} v(D_i)$, dacă $D_i \cap D_j = \emptyset$

Notă: $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 / E_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$

Def: O mulțime $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ s.n inel de mulțimi dacă:

$(\forall)\ A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$

Def: Dacă $\mathcal{A}$ este un inel de mulțimi $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ s.n măsură aditivă, dacă: $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$, $(\forall)$ A_1, A_2 a.î. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ s.n spațiu cu măsură aditivă

Def: Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită

Semn. Măsură superioară Jordan a lui A:

$$\mu^+(A) = \inf_{A \subset E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} v(E)$$

Semn. Măsură inferioară Jordan a lui A:

$$\mu_+(A) = \sup_{E \subset A,\, E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} v(E)$$

A s.n mulțime măsurabilă Jordan dacă: $\mu_+(A) = \mu^+(A) = \mu(A)$

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \{ A \subset \mathbb{R}^n \text{ mărg.} \mid \mu^+(A) = \mu_+(A) \}$$

P $(\mathbb{R}^n, \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \mu)$ este un spațiu cu măsură aditivă.

§ XXIII

Ⓟ Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ și mărg. Atunci:

1) $\mu^+(A \cup B) + \mu^+(A \cap B) \leq \mu^+(A) + \mu^+(B)$

2) $\mu_+(A \cup B) + \mu_+(A \cap B) \geq \mu_+(A) + \mu_+(B)$

1) + 2) $\Rightarrow$ 3) $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Dacă $B \subset A$:

4) $\mu^+(A \setminus B) \leq \mu^+(A) - \mu_+(B)$

5) $\mu_+(A \setminus B) \geq \mu_+(A) - \mu^+(B)$

4) + 5) $\Rightarrow$ 6) $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Ⓟ Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărg. AVASE:

1) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ (A măsurabilă Jordan)

2) $\mu(\mathrm{Fr}\, A) = 0$

3) $\mathring{A}, \bar{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\mathring{A}) = \mu(\bar{A})$

§ XXIV

Def: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ o familie finită,
$\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ și
$\mu(A_i \cap A_j) = 0$, $(\forall)\, i \neq j \in I$ s.n descompunere Jordan.

$\|\mathcal{A}\| = \max_{i \in I} d(A_i)$, $d(A_i)$ = diametrul mulțimii A_i și

$d(A_i) = \sup_{x, y \in A_i} d(x, y)$

Def: Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
$f : A \to \mathbb{R}$ mărg. și $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ o descomp. Jordan a lui A
$\alpha_i \in A_i$, $(\alpha_i)_{i \in I}$ - familie de pct. interm.

$S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i \in I} M_i \cdot \mu(A_i)$, $M_i = \sup f(A_i)$
s.n sumă darboux superioară

$\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} f(\alpha_i) \cdot \mu(A_i)$
s.n sumă Riemman

$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i \in I} m_i \cdot \mu(A_i)$, $m_i = \inf f(A_i)$

$S_{\mathcal{A}}(f) \geq \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in I}) \geq s_{\mathcal{A}}(f)$

§ $\overline{XXIV}$ cont.

Def: $\overline{\int_A} f(x)\,dx = \inf_{A} S_A(f)$ = integrala Darboux superioară

$\underline{\int_A} f(x)\,dx = \sup_{A} s_A(f)$ = integrala Darboux inferioară

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{\|A\| \to 0} \sigma_A(f, (\xi_i)_{i \in I})$$

Def: f este integr. Riemann dacă:

$(\exists)\ \underline{I} \in \mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$$\|A\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| I - \sigma_A(f, (\xi_i)_i) \right| < \varepsilon$$

P (Lema Darboux)

$$\overline{\int_A} f = \lim_{\|A\| \to 0} S_A(f), \quad \underline{\int_A} f = \lim_{\|A\| \to 0} s_A(f)$$

(T) (Teorema lui Darboux)

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ mărg. AVASE:

1) f este integrabilă

2) $\overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$

3) $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \mathcal{A}$ desc. Jordan a lui A a.î. $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

4) $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

Def: O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ s.n. neglijabilă Lebesgue $\Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)(D_m) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a.î.: 1) $A \subset \bigcup_{m \geq 1} \overset{\circ}{D}_m$ și

2) $\sum_{m \geq 1} \mu(D_m) < \varepsilon$

(T) (Teorema Lebesgue)

O funcție $f: A \to \mathbb{R}$ mărg, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ este integrabilă $\Leftrightarrow D_f$ este neglijabilă Lebesgue

D_f = mulțimea discontinuităților func. f

§ $\overline{XXIV}$ cont.

(T) (Fubini)

Fie f o funcție continuă, $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$

atunci:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

(T) (Fubini)

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $B \in J(\mathbb{R}^m)$ $\left(A \times B \in J(\mathbb{R}^{m+n})\right)$ și $f : A \times B \to \mathbb{R}$ o func. mărg. și integr. Riemann

Fie $\overline{F}, \underline{F} : A \to \mathbb{R}$

$$\overline{F}(x) = \overline{\int_A} f(x,y)\,dy, \quad \underline{F}(x) = \underline{\int_A} f(x,y)\,dy$$

Atunci: $\overline{F}$ și $\underline{F}$ sunt integr. și:

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\overline{\int_B} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(T) (Schimbare de variabilă)

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $G = \mathring{G} \subset \mathbb{R}^m$

$\varphi : D \to G$, $\varphi \in C^1$ bijectivă a.î.:

$\varphi'(x)$ să fie inversabilă, $(\forall)\ x \in D$

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\overline{A} \subset D$ și

$f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ integrabilă (mărginită)

Atunci:

funcția $((f \circ \varphi) \cdot \det \varphi') : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă și:

$$\int_A f(\varphi(x)) \cdot |\det \varphi'|\, dx = \int_{\varphi(A)} f(y)\, dy$$