1. Definiți noțiunea de vecinătate în R

O mulțime $V \subset \mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{R}}$) se numește vecinătate pentru un element $a \in \mathbb{R}$ dacă $\exists\, \varepsilon > 0$ a î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$

2. Definiți limita unui șir

Se numește limită a unui șir $(x_n)_{n\geq 1}$ elementul $a \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

3. Propoziția privind proprietatea șirurilor convergente

Dacă $x_n \to a$ și $y_n \to b$ atunci:

1) $x_n + y_n \to a+b$
2) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$
3) $|y_n| \to |a|$
4) dacă $x_n \leq y_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow a \leq b$
5) dacă $x_n \neq 0\ \forall n \geq 1$ și $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

4. Teorema privind convergența șirurilor monotone

Orice șir monoton si mărginit este convergent.

5. Definiți distanța

O funcție $d: X \times X \to [0, \infty)$ se numește distanță sau metrică dacă:

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z), \quad \forall x,y,z \in X$

6. Definiți spațiul metric

Perechea (X, d) se numește spațiu metric + definiția distanței

7. Definiți noțiunea de bilă

B (a, r) = { x ∈ X | d (x, a) < r } - se numește bilă de centru a și rază r

8. Definiți noțiunea de vecinătate (în spațiul metric)

$V \in X$ se numește vecinătate a lui a dacă $\exists \varepsilon > 0$ a.î. $B(a, \varepsilon) \subset V$.

9. Definiți șirul convergent

$x_n \xrightarrow{d} a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ a.î. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \iff d(x_n, a) \to 0$

10. Definiți șirul Cauchy

Un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ a.î.

$\forall m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

11. Definiți noțiunea de normă

O funcție $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ a.î.:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

se numește NORMĂ.

12. Definiți spațiul normat

$(R^n, || \ ||)$ se numește spațiu normat. + definiția normei

13. Teorema privind proprietatea șirurilor convergente și Cauchy într-un spațiu metric

Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci:

1. Orice șir Cauchy este mărginit
2. Orice șir convergent este Cauchy
3. Din 1 și 2 $\Rightarrow$ Orice șir convergent este mărginit.
4. Un șir Cauchy care are un subșir convergent este convergent.

14. Propoziția privind caracterizarea limitei superioare

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit şi $a \in \mathbb{R}$. Atunci $a = \sup \{b \mid \exists\, x_{n_k} \to b\}$

15. Definiți limita superioară

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $a \in \mathbb{R}$:

$L = \{a \mid a$ este punct de limită pentru şirul $(x_n)_{n\geq 1}\}$

$\sup L$ se numeşte limita superioară a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\ell}$

16. Teorema Cauchy-Hadamard

- Fie seria $s(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$. Atunci:

1. Dacă $\rho = 0 \Rightarrow D = \{0\}$
   $\rho = +\infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$
   $0 < \rho < +\infty \Rightarrow (-\rho, \rho) \subset D \subset [-\rho, \rho]$

2. Seria $s_1(x) = \sum\limits_{n\geq 1} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ are $\rho_1 = \rho$ şi $s' = s_1$

$D = \{x \mid s(x)$ este conv.$\}$ $\qquad \rho = \dfrac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}}$

17. Noțiunea de mulțime deschisă

O mulțime $D \subset X$ se numeşte **deschisă** dacă $\forall x \in D$ $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_x > 0$ a.î. $B(x, r_x) \subset D$

18. Noțiunea de mulțime închisă

$F \subset X$ se numeşte **închisă** $\Leftrightarrow \underbrace{X \setminus F}_{\text{complementara lui } X} \in \mathcal{T}$

$\mathcal{T} \to$ mulțimea mulțimilor deschise incluse în X
$= \{D \subset X \mid D$ - deschisă$\}$

19. Noțiunea de vecinătate (topologie)

$V \subset X$ - vecinătate pt. $a \in X$ dacă $\exists\, \mathcal{E} > 0$ a.î. $B(a, \mathcal{E}) \subset V$ $((a-\mathcal{E}, a+\mathcal{E}) \subset V)$

20. Noțiunea de topologie într-un spațiu metric

O mulțime $D \subset X$ se numește **deschisă** dacă $\forall x \in D \Rightarrow \mathcal{E}_x > 0$ a.î. $B(x, r_x) \subset D$

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ - **topologia** lui (X, d)

21. A’

$A' = \{a \in X \mid \exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $x_n \to a$ și $x_n \neq a\}$

↳ **mulțimea punctelor de acumulare**

22. Ā

$\overline{A} = A' \cup A = \{a \in X \mid \exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $x_n \to a\}$

↳ **închiderea mulțimii A**

23. Å

$\mathring{A} = Int(A) = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D = \{x \in X \mid A \in V_x\}$

↳ **interiorul mulțimii A**

24. Fr(A)

$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{a \in X \mid \exists (x_n)_n \subset A$ și $\exists (y_n)_n \subset A$ a.î. $x_n \to a$ și $y_n \to a\}$

↳ **frontiera lui A**

25. Noțiunea de topologie

- Fie X o mulțime. O mulțime $\mathcal{T} \subset X$ se numește **topologie** dacă:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$
3. $(D_i)_{i\in J} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in J} D_i \in \mathcal{T}$

$D \in \mathcal{T}$ - mulțime deschisă

26. Teorema privind caracterizarea punctuală a continuității

Fie $(X, \mathcal{T}_X)$ și $(Y, \mathcal{T}_Y)$ spații topologice, $f: X \to Y$ și $a \in X$. Funcția f este continuă în a dacă $f^{-1}(V) \in V_a$, $\forall\, V \in V_{f(a)}$

27. Definiția cu ε a continuității

Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice. O funcție $f: X_1 \to X_2$ este **continuă** pe $X_1 \Leftrightarrow \forall\, a \in X_1$ și $\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, d_\varepsilon$ a.î. $\forall\, x \in X_1$ cu proprietatea că $d_1(x, a) < d_{\varepsilon, a} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

28. Definiția cu vecinătăți a continuității

Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice. O funcție $f: X_1 \to X_2$ este **continuă** pe $X_1 \Leftrightarrow \forall\, a \in X_1 \Rightarrow f^{-1}(V) \in V_a$, $\forall\, V \in V_{f(a)}$

29. Definiți limita unei funcții

Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) două spații metrice, $A \subset X_1$, $f: A \to X_1$, $a \in A$ și $\alpha \in X_2$.

Spunem că funcția **f are limita α în a** și notăm $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ dacă $\forall\, V \in V_\alpha \Rightarrow \exists\, W \in V_a$ a.î. $\forall\, x \in W \cap A \setminus \{a\}$
$\Rightarrow f(x) \in V$

30. Definiți convergența simplă

Fie $f_n, f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplu la f și notăm $f_n \xrightarrow{s} f$ dacă $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in A$

31. Definiți convergența uniformă

Spunem că f_n converge uniform la f și notăm $f_n \xrightarrow{u} f$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in A$

32. Teorema privind continuitatea limitei unui șir de funcții

Fie (X, d) un spațiu metric, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și funcțiile f_n să fie continue în a $(a \in X)$. Atunci f este continuă în a.

33. Teorema privind mărginirea unei funcții continue v1

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$. Atunci $\exists c, d \in [a,b]$ a.î. $f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ și $f(d) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$.

34. Teorema privind mărginirea unei funcții continue v2

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ închisă și mărginită și $f : A \to \mathbb{R}$ continuă pe A. Atunci $\exists a \in A$ a.î. $f(a) = \sup f(A)$.

35. Definiți noțiunea de funcție uniform continuă

Functia f este uniform continuă dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x, y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

36. Teorema privind uniformitatea funcțiilor continue

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ închisă și mărginită și $f : A \to \mathbb{R}^m$ continuă. Atunci f este uniform continuă.

37. Definiția derivabilității (clasică)

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$. Spunem că **f e derivabilă în c** dacă $\exists \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\in\mathbb{R}$ și notăm $f'(c)$

38. Definiția derivabilității (cu ω)

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$. Spunem că **f e derivabilă în c** dacă $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ și $\exists\ \omega:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î.:

i) $f(x)=f(c)+\alpha(x-c)+(x-c)\cdot\omega(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to c}\omega(x)=0$

39. Teorema lui Fermat (derivabilitate)

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$ a.î. $\exists\, f'(c)$ și c să fie punct de extrem local. Atunci $f'(c)=0$.

40. Teorema lui Rolle

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b), continuă în a și b ($\Rightarrow$ continuă pe $[a,b]$) și $f(a)=f(b)$. Atunci $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$

41. Teorema Lagrange (derivabilitate)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b).

Atunci $\exists\, c$ a.î. $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

42. Teorema Cauchy

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î. f și g să fie continue pe $[a,b]$, f și g să fie derivabile pe (a,b) și $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$. Atunci $g(b)\neq g(a)$ și $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

43. Teorema l'Hospital

Fie $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b) și $g'(x) \neq 0$ pe (a,b)
a.î. să $\exists \lim_{x \nearrow b} g(x) = \alpha \in \{0, +\infty\}$ și $\exists \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Atunci $\exists \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

44. Teorema lui Darboux pentru funcții derivabile

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilă. Atunci f are Prop. lui Darboux.

Proprietatea lui Darboux:

- dacă $f'(a) \neq f'(b)$, $\forall \lambda \in (f'(a), f'(b)) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = \lambda$

45. Teorema privind derivabilitatea unui șir de funcții

Fie $f_n, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(a < b \in \mathbb{R})$ a.î. $\exists f_n'$ pe (a,b) și
$\exists g : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $\begin{cases} f_n' \xrightarrow{u} g \\ \exists c \in (a,b) \text{ a. î. } (f_n(c))_{n \geq 1} \text{ să fie conv.} \end{cases}$

Atunci $\exists f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $f' = g$

46. Definiți polinomul Taylor

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă de $n+1$ ori pe (a,b) și $c \in (a,b)$
a.î. $\exists f^{(n)}(c)$.

Polinomul $T_{f,n,c}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^{(k)}$ se num. **polinomul lui Taylor asociat lui f de ordin n în c**.

47. Teorema Taylor v1

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă de $(n-1)$ ori pe (a,b) și $c \in (a,b)$
a.î. $\exists f^{(n)}(c)$.

Atunci $\exists \omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $\begin{cases} f(x) = T_{f,n,c}(x) + (x-c)^n \omega(x) \\ \lim_{x \to c} \omega(x) = 0 \end{cases}$

48. Teorema Taylor v2

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ a.î. $\exists f^{(n+1)}$ pe (a,b).
Atunci $\exists\ \alpha$ între x și c a.î.:

$$f(x) = T_{f,n,c}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{= R_{f,n,c}(x) = (x-c)^n \cdot \omega(x)}$$

$\omega(x) \to 0$

49. Condiții necesare și suficiente de extrem local

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b) și $c\in(a,b)$ a.î. $\exists f''(c)$
Atunci:

1. dacă c este pct. de min. local $\Rightarrow f'(c)=0$ și $f''(c)\geq 0$
2. dacă $f'(c)=0$ și $f''(c)>0 \Rightarrow c$ – **pct. de min. local**
3. dacă c este pct de max. local $\Rightarrow f'(c)=0$ și $f''(c)\leq 0$
4. dacă $f'(c)=0$ și $f''(c)<0 \Rightarrow c$ – **pct. de max. local**

50. Definiția derivatei

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}^n$. Funcția f este **derivabilă în c**

$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \overset{not}{=} f'(c)$

$f=(f_1,\dots,f_n)$ $\qquad f'(c)=(f_1'(c),\dots,f_n'(c))$

51. Definiția derivatei în raport cu un vector în R^n

Fie $D=\mathring{D}$ (D deschisă) $\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$, $f:D\to\mathbb{R}^m$
și $u\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Atunci:

i) $\frac{df}{dv}(a) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+t\cdot u)-f(a)}{t}$

ii) f este derivabilă în $a \Leftrightarrow T\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ a.î.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|_2}=0$$

52. Teorema privind derivarea funcțiilor inverse

Fie $D\subset\mathbb{R}^n$ deschisă, $G\subset\mathbb{R}^n$ deschisă; $f:D\to G$ bijectivă
și $a\in D$. Dacă $\exists f'(a)$ și e inversabilă și f^{-1} e continuă în a

$\Rightarrow \exists (f^{-1})'(f(a))=(f'(a))^{-1}$

53. Teorema privind derivarea funcțiilor compuse

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $G \subset \mathbb{R}^n$ deschisă; $f: D \to G$ și $g: G \to \mathbb{R}^p$ și $a \in D$.

Dacă $\exists f'(a)$ și $g'(a) \Rightarrow \exists (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$

54. Teorema de inversare locală

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $\varphi: D \to \mathbb{R}^n$.

Dacă $\varphi \in C^1$ pe D și $f'(a)$ este inversabilă

$\Rightarrow \exists D_1 = \mathring{D}_1 \subset \mathbb{R}^n$ și $D_2 = \mathring{D}_2 \subset \mathbb{R}^n$ a.î. $a \in D_1 \subset D$

și $\varphi(a) \in D_2$ și funcția $\psi: D_1 \to D_2$ dată

de $\psi(x) = \varphi(x)$ să fie bijectivă și $\psi^{-1} \in C^1$

55. Teorema lui Fermat

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $f: D \to \mathbb{R}$. Dacă $\exists f'(a)$

și a este un punct de extrem local pentru f pe D

$\Rightarrow f'(a) = 0$

56. Definiția derivatei de ordin 2

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă; $f: D \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$ și $u, v \in \mathbb{R}^n - \{a\}$

$$\frac{d^2 f}{du \cdot dv}(a) = \frac{d}{du}\left(\frac{df}{dv}\right)(a)$$

Dacă $u = v \Rightarrow \frac{d^2 f}{d^2 u}$ (derivata derivatei de ordin 1)

57. Definiția derivatei parțiale de ordin superior

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și $f: D \to \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d^p f}{du_p \cdot du_{p-1} \cdot \ldots \cdot du_2 \cdot du_1}(a) = \frac{d}{du_p} \cdot \left(\frac{d^p f}{du_{p-1} \cdot \ldots \cdot du_1}(a)\right) = \frac{d}{du_p}\left(\frac{d}{du_{p-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{d}{du_2}\left(\frac{df}{du_1}\right)\right)(a)$$

58. Teorema lui Young

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ derivabilă pe D.

Dacă $\exists f''(a)$ pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial v \cdot \partial u}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \cdot \partial v}(a) = f''(a)(u,v) = f''(a)(v,u)$$

59. Teorema lui Schwarz

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și $f : D \to \mathbb{R}^m$.

Presupunem că $\exists \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial^2 f}{\partial v \cdot \partial u}$ pe D.

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial v \cdot \partial u}$ este continuă în a $\Rightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial v \cdot \partial u}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \cdot \partial v}(a)$

60. Condiții necesare și suficiente de extrem local (R^n)

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists f'$ pe D și $f'(a)$.

Atunci:

1) Dacă a este un pct. de min. local $\Rightarrow f'(a) = 0$ și $f''(a) \geq 0$
2) Dacă a este un pct. de max. local $\Rightarrow f'(a) = 0$ și $f'(a) \leq 0$
3) Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) > 0$ $\Rightarrow$ a este min. local
4) Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) < 0$ $\Rightarrow$ a este max. local

61. Teorema multiplicatorului lui Lagrange

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$, $f : D \to \mathbb{R}$

și $a \in D$ a.î.:

i) $f, g \in C^1$

ii) rang $g'(a)$ să fie maxim

iii) a este un punct de extrem local al funcției f pe mulțimea $A = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$

Atunci $\exists \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ a.î. $k'_\eta(a) = 0$, unde

$k = f + \eta_1 g_1 + \eta_2 g_2 + \ldots + \eta_m g_m \qquad (g = (g_1, g_2, \ldots, g_m))$

62. Teorema funcțiilor implicite

Fie $\Delta = \mathring{\Delta} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$, $(a,b) \in \Delta$ $(a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m)$,
$x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ a.î. $f \in C^1$ pe Δ.
Dacă $f(a,b) = 0$ și $\exists \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}(a,b)$ $\left(f'(y_1 \dots y_n)(a,b) \in M_{n,m}(\mathbb{R})\right)$
atunci $\exists\, \Delta_1 \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ și $\Delta_2 \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m}$ a.î. $(a,b) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \subset \Delta$ a.î.
$\exists!\, \varphi : \Delta_1 \to \Delta_2$ cu proprietatea că $f(x, \varphi(x)) = 0$ și $\varphi \in C^1$

63. Suma Darboux superioară

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită și $\Delta = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$:

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(J_i)$$

↳ suma Darboux superioară

64. Suma Darboux inferioară

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită și $\Delta = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$:

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i), \qquad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(J_i)$$

↳ suma Darboux inferioară

65. Suma Riemann

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită și $\Delta = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$:

$$\sigma_\Delta\left(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i), \qquad \alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

↳ suma Riemann

66. Integrala Darboux superioară

Se numește integrală Darboux superioară:

$$\inf_\Delta S_\Delta(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

67. Integrala Darboux inferioară

Se numește integrală Darboux inferioară:

$$\sup_{\Delta} s_{\Delta}(f) = \int_{-a}^{b} f(x)\,dx$$

68. Definiția unei funcții integrabile Riemann

f se numește integrabilă Riemann dacă $\exists\, J \in \mathbb{R}$ a.î.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_{\varepsilon} > 0$ a.î. $\|\Delta\| = \max\limits_{k=1}^{n-1} x_{k+1} - x_k < \delta_{\varepsilon}$

$\Rightarrow |J - \nabla_{\Delta}(f, (\alpha_k)_{k=\overline{0,n-1}})| < \varepsilon$

$$\nabla_{\Delta}(f, (\alpha_k)_{k=\overline{0,n-1}}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)(x_{k+1} - x_k) \quad , x_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

69. Teorema lui Darboux

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci U.A.S.E.:

1) f este integrabilă Riemann
2) $\int_{-a}^{b} f = \int_{a}^{-b} f$
3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta$ a.î. $S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$
4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_{\varepsilon} > 0$ a.î. $\forall \Delta$ cu $\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon} \Rightarrow S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$

70. Teoremele privind integrabilitatea unui șir de funcții

1. Fie $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \to f$ și f_n să fie integrabilă $\forall n \geq 1$. Atunci f este integrabilă Riemann și $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

2. Fie $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{s} f$ și f_n și f sunt integrabile Riemann. Atunci $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

71. Definiți noțiunea de dreptunghi

O mulțime $\Delta = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} [a_i, b_i)$ se numește **dreptunghi** n-dimensional.

72. Definiți volumul unui dreptunghi

$v(\Delta) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$, $v(\Delta)$ - volumul lui Δ

73. Definiți noțiunea de mulțime elementară

$E = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j$ se numește **mulțime elementară**

74. Volumul unei mulțimi elementare

$v(E) = \sum_{i=1}^{m} v(\Delta_i)$ dacă $E = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$ și $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$

75. Inel de mulțimi

O mulțime $\mathcal{A} \subset P(X)$ se numește **inel de mulțimi** dacă $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow A_1 \cap A_2$, $A_1 \cup A_2$, $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$ ($(\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ - inel de mulțimi)

76. Mulțime măsurabilă Jordan (+inf și sup)

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită:

1. Măsura superioară Jordan a lui A, $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} (v(E))$
2. Măsura inferioară Jordan a lui A, $\mu_*(A) = \sup\limits_{\substack{E \subset A \\ E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)}} (v(E))$
3. A se numește **măsurabilă Jordan** dacă $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$
4. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n \text{ mărginită} \mid \mu^*(A) < \mu_*(A)\}$

77. Propoziția privind proprietatea măsurii superioare și inferioare în raport $\cap$, $\cup$ și \

- Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ şi mărginite. Atunci:

1. $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \le \mu^*(A) + \mu^*(B)$
2. $\mu_*(A \cup B) + \mu_*(A \cap B) \ge \mu_*(A) + \mu_*(B)$
3. $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
4. $\mu^*(A \setminus B) \le \mu^*(A) - \mu_*(B)$
5. $\mu_*(A \setminus B) \ge \mu_*(A) - \mu^*(B)$
6. $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi $B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
7. $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

78. Partiții Jordan

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ o familie finită, $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ şi $\mu(A_i \cap A_j) = 0,\ \forall i \ne j \in J$ se numeşte descompunere Jordan.

79. Suma Darboux superioară ($\mathbb{R}^n$)

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită. $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J}$ o descompunere Jordan a lui A şi $\alpha_i \in A_i$, $(\alpha_i)_{i \in J}$ o familie de puncte intermediare.

$$S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i \in J} M_i \cdot \mu(A_i) \quad , \quad M_i = \sup f(A_i)$$

80. Suma Darboux inferioară ($\mathbb{R}^n$)

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită. $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J}$ o descompunere Jordan a lui A şi $\alpha_i \in A_i$, $(\alpha_i)_{i \in J}$ o familie de puncte intermediare.

$$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i \in J} m_i \cdot \mu(A_i) \quad , \quad m_i = \inf f(A_i)$$

81. Suma Riemann ($\mathbb{R}^n$)

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită. $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J}$ o descompunere Jordan a lui A şi $\alpha_i \in A_i$, $(\alpha_i)_{i \in J}$ o familie de puncte intermediare.

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in J}) = \sum_{i \in J} f(\alpha_i) \cdot \mu(A_i)$$

82. Integrala superioară ($\mathbb{R}^n$)

$$\overline{\int_A} f(x)\,dx = \overline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n = \inf_A S_A(f)$$

83. Integrala inferioară (R^n)

$$\underline{\int_A} f(x)\,dx = \underline{\int_A} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n = \sup_A s_A(f)$$

84. Teorema lui Darboux

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci f este integrabilă.

85. Teorema lui Lebesgue

- Fie $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann $\iff$ D_f este neglijabilă Lebesgue

- D_f = mulțimea discontinuităților funcției f

- Neglijabilă Lebesgue = $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, D_m \in D(\mathbb{R}^n)$ a.î.:

$$A \subset \bigcup_{m \geq 1} \mathring{D}_m \text{ și } \sum_{m \geq 1} \mu(D_m) < \varepsilon$$

86. Teorema lui Fubini

Fie $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continuă.

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

87. Teorema de schimbare de variabilă

$$\int_B f \circ \varphi(x) \cdot |\det \varphi'(x)|\,dx = \int_{\varphi(B)} f(y)\,dy$$