Linear Algebra

November 24th 2024

1 Preparation

1.1 Background

Definition 1.1 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ 为 n 元齐次线性方程组

Definition 1.2 系数矩阵

将方程组中的系数写成一个数表，称为系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definition 1.3 解向量

将方程组中的未知数写成一个数表，称为解向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definition 1.4 齐次线性方程组的矩阵观点

$AX = O$

Definition 1.5 齐次线性方程组的向量观点

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = 0$

proposition 1.6 设 A 为 $n \times n$ 矩阵，则以下所有命题等价

1. A 是可逆矩阵

2. $A \cong E_n$

3. A 有 n 个主元位置

4. $Ax = 0$ 只有零解

5. A 的各列线性无关

6. 线性变换 $T(x) = Ax$ 为满射

7. 对 R^n 中任意 b, 方程 $Ax = b$ 至少一个解

8. A 的各列生成 R^n

9. $T(x) = Ax$ 为 $R^n \to R^n$

10. 存在 $n \times n$ 矩阵 C 使得 $CA = E$

11. 存在 $n \times n$ 矩阵 D 使得 $AD = E$

12. A^T 可逆

13. A 的列构成 R^n 的一个基

14. $ColA = R^n$

15. $rankA = n$

16. $dimNulA = 0$

17. $NulA = \{0\}$

2 Matrix

2.1 Some Definition

Definition 2.1 a_{ij} 形成的数表称为矩阵，特别地，如果 $m = n$，则称为方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definition 2.2 矩阵加法与数乘，且满足交换律和结合律

Definition 2.3 矩阵乘法

如果 $A_{m\times n}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $B_{n\times t}=(b_{ij})=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nt} \end{pmatrix}$

那么 AB 是有意义的，并且我们定义 $C_{m\times t}=(c_{ij})=\sum\limits_{u=1}^{n} a_{iu}b_{uj}$

Property 2.4 矩阵的乘法一般不具有交换律，消去律

但有吸收律和结合律，以及分配律

$$AO=O \tag{1}$$
$$ABC=(AB)C=A(BC) \tag{2}$$
$$A(B+C)=AB+AC \tag{3}$$
$$(B+C)A=BA+CA \tag{4}$$
$$EA=AE=A \tag{5}$$
$$AA^{-1}=A^{-1}A=E \tag{6}$$
$$AB=O \quad \neq A=O \quad or \quad B=O \tag{7}$$

Property 2.5 $AB=O$ 特别地，如果 A 满秩，则 B 为 O

这是因为如果系数矩阵满秩，则齐次方程组只有零解

Property 2.6 AA^T, A^TA 都有意义

Definition 2.7 矩阵的转置

交换矩阵的行和列记作 A^T

Property 2.8

$$(A+B)^T=A^T+B^T \tag{8}$$
$$(AB)^T=B^TA^T \tag{9}$$

Definition 2.9 矩阵的秩 *(rank)*

矩阵 $A_{m\times n}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 中所有不等于 *0* 的子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩

Definition 2.10 矩阵的初等变换
矩阵的初等变换包括
对换矩阵中第 i 行（列）和第 j 行（列）的位置
用非 *0* 常数 k 乘以第 i 行（列）的各元素
将第 j 行（列）的各元素乘以 k 后加到第 i 行（列）的各对应元素上
注：一般只用初等行变换

Property 2.11 任意一个矩阵都可以变为阶梯型矩阵（不唯一）

Property 2.12 任意一个矩阵都可以变为唯一的行最简形矩阵

Definition 2.13 初等矩阵
单位矩阵经过一次初等行变换所得的矩阵称为初等矩阵

Definition 2.14 矩阵的逆 对于方阵 A, 如果存在方阵 B 使得 $AB=BA=E$, 则称 B 是 A 的逆矩阵，记作 $B=A^{-1}$

Definition 2.15 矩阵的行秩与列秩
矩阵的行向量组的秩为行秩，列向量组的秩为列秩

Theory 2.16 矩阵的行秩 = 矩阵的列秩 = 矩阵的秩

Definition 2.17 零空间
矩阵 A 的零空间是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间，记作 $NulA$

Definition 2.18 列空间
矩阵 A 的列空间是 A 各列向量的线性组合，记作 $ColA$

Definition 2.19 行空间
矩阵 A 的行空间是 A 各列向量的线性组合，记作 $RowA$

Theory 2.20 $RowA=ColA^T$

Theory 2.21 秩定理 $rankA+dimNulA=n$

2.2 rank

秩是难以理解的概念，而且有多种定义方式，如果我们从向量空间角度出发, 会得到这样的定义

Definition 2.22 矩阵 A 的秩是 A 列空间的维数，$rankA = dimColA$

这个定义直接指向线性代数的研究对象，向量空间
这个定义带有浓厚的几何意义，而书本上的定义是代数的定义，实际上两个定义可以互相导出，不过，从几何意义出发，貌似更好理解，列空间的维数，就代表着生成这个空间的极大线性无关组的向量个数，这些向量可以表示其他的所有向量，任意加上一个其他向量，都线性相关，而且，由于它们线性无关，那么它们的分量组成的向量组也线性无关，于是，我们一定可以找到一个 dimColA 阶子式或者更小，包含这个向量组，不妨记作 K，考虑 $K^TK = \sum \alpha_i K$, 由于 $K^Tx = 0$ 只有 0 解（实际上只有零解和线性无关完全等价，因为齐次线性方程组和向量方程组等价），那么右边不为 0，换而言之，$|K^T||K| = |K|^2 \neq 0$, 因此这个子式不为 0，接下来考虑 dimColA+1 阶子式，如果他们线性相关，显然行列式为 0，因为总有一列可以被其他向量减为 0，而他们是不可能线性无关的，因为如果 dimColA 个向量线性无关，那么这一定是一组基（基定理），因此一定线性相关，从而行列式等于 0，dimColA 阶子式就是所有不等于 0 的子式的最高阶数，

2.3 Some exercise

24. $A^*BA = 2BA - 8E, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ find B

$(A^* - 2E)BA = -8E$
$B = -8E(A^* - 2E)^{-1}A^{-1} = -8(AA^* - 2A)^{-1} = -8(|A|E - 2A)^{-1}$

3 Determinant

Definition 3.1 逆序
在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，则他们构成一对逆序

Definition 3.2 逆序数
排列中逆序的总数

Definition 3.3 行列式的几何定义
线性变换对体积的拉伸程度
二维：$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ 表示 $span\{(a,c)^T,(b,d)^T\}$ 张成的平行四边形面积

Definition 3.4 行列式的代数定义
由 n^2 个数组成的取自所有不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和
方阵 $A_{n\times n}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
$|A|=\sum\limits_{j_1j_2...j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2...j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$

Corollary 3.5 对角矩阵的行列式 $|A|=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2....\lambda_n$

Prove 3.6 由于除了对角线上的元素都为 *0*，那么对于任意 a_{ij}，当且仅当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}\neq 0$ 则对于 $|A|=\sum\limits_{j_1j_2...j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2...j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$
当且仅当 $j_1=1,j_2=2...j_i=i$ 时，乘积不为 *0*
则 $|A|=(-1)^{\tau(1,2,3...,n)}\lambda_1\lambda_2....\lambda_n=(-1)^0\lambda_1\lambda_2....\lambda_n=\lambda_1\lambda_2....\lambda_n$

Definition 3.7 余子式与代数余子式 选定 a_{ij} 划掉第 i 行和第 j 行，剩下的元素组成的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}
记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为代数余子式

Definition 3.8 伴随矩阵 将各元素替换为代数余子式，再转置，得到伴随矩阵，记作 A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Theory 3.9 $AA^* = A^*A = |A|E$

Property 3.10 行列式的性质 *1*

行列式的行和列地位平等

$|A| = |A^T|$

Property 3.11 行列式的性质 *2*

互换行列式的两行，行列式变号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Corollary 3.12 若行列式有两行元素相等，则此行列式值为 *0*

Corollary 3.13 如果代数余子式和元素不对应，所展开行列式为 *0*

Theory 3.14 *|AB|=|A||B|*

Definition 3.15 奇异方阵

如果 $|A| \neq 0$ 那么称 A 是非奇异的，否则是奇异的

这种翻译并不好，应翻译成不可退化方阵，可退化方阵

非奇异方阵满秩，满秩方阵可逆，这三个概念完全等价

4 vector

4.1 some Definition

4.2 Linear Relationships

存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, ...k_n$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n = 0$ 那么我们称这 n 个向量线性相关，否则线性无关

Theory 4.1 如果 $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n$ 线性相关，那么至少有一个向量可以被其他向量线性表示

Theory 4.2 如果 $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n, \beta$ 线性相关，那么 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n$ 线性表示，且表法唯一

Theory 4.3 如果 $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n$ 线性相关, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n, a_{n+1}, \cdots a_s$ 也线性相关

Corollary 4.4 如果 $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n, a_{n+1}, \cdots a_s$ 线性无关, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n$ 也线性无关

4.3 maximal linearly independent system

Definition 4.5 极大线性无关组
如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$ 的部分向量组 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ...\alpha_{ir}$ 满足
(1) 部分向量组 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ...\alpha_{ir}$ 线性无关
(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$ 可由 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ...\alpha_{ir}$ 线性表示
则称部分向量组 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ...\alpha_{ir}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$ 的一个极大线性无关组

4.4 vector space

Definition 4.6 向量空间
设 V 是 n 维向量集合，$\forall \alpha, \beta \in V, \forall k \in R$ 都有
$\alpha + \beta \in V, k\alpha \in V$

Definition 4.7 子空间

设有向量空间 V, W，若有 $W \subseteq V$，则称 W 为 V 的子空间，若 $W \subset V$，则称 W 为 V 的真子空间