间断有限元

张阳

2022 年 12 月 6 日

目录

1 序

间断 Galerkin 方法最初是作为求解可能具有不连续解的双曲守恒定律的有效数值方法而设计的。

2 问题

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{2.1}$$

3 算法

以 $k=2$ 为例。

记 $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}), I = \cup_j I_j, \Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, h = \sup_j \Delta x_j$ 第 j 个小区间 I_j 上的试探函数为 $\{v_l^{(j)}(x), l = 0, 1, 2, \cdots, k\}$

$$U_h = V_h = V_h^k = \{p \in BV \cap L^1 : p|_{I_j} \in P^k(I_j)\} \tag{3.1}$$

选用正交多项式作为试探函数。

$$v_0^{(j)}(x) = 1, v_1^{(j)}(x) = x - x_j, v_2^{(j)}(x) = (x - x_j)^2 - \frac{1}{12}\Delta x_j^2 \tag{3.2}$$

定义自由度：

$$u_j^{(l)} = u_j^{(l)}(t) = \frac{1}{\Delta x_j^{l+1}} \int_{I_j} u(x,t) v_l^{(j)}(x) dx, \quad l = 0, 1, 2 \tag{3.3}$$

定义区间 I_j 上的近似函数

$$u^h(x,t) = \sum_{l=0}^{k} a_l u_j^{(l)}(t) v_l^{(j)}(x) \quad \text{for } x \in I_j \tag{3.4}$$

其中：

$$a_l = \frac{\Delta x_j^{l+1}}{\int_{I_j} \left(v_l^{(j)}(x)\right)^2 dx}, \quad \text{i.e., } a_0 = 1, a_1 = \frac{12}{\Delta x_j}, a_2 = \frac{180}{\Delta x_j^2}, \ldots \tag{3.5}$$

写出方程 (2.1) 的弱形式：

$$\frac{d}{dt} u_j^{(l)} + \frac{1}{\Delta x_j^{l+1}} \left[\Delta_+ \left(v_l^{(j)}\left(x_{j-1/2}\right) f\left(u_{j-1/2}\right)\right)\right] - \frac{1}{\Delta x_j^{l+1}} \int_{I_j} f\left(u^h(x,t)\right) \frac{d}{dx} v_l^{(j)}(x) dx = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, k \tag{3.6}$$

对于 $l = 0, 1, 2$：

$$\frac{d}{dt} u_j^{(0)} + \frac{1}{\Delta x_j}\left(h_{j+1/2} - h_{j-1/2}\right) = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}u_j^{(1)}+\frac{1}{2\Delta x_j}\left(h_{j+1/2}+h_{j-1/2}\right)-\frac{1}{\Delta x_j^2}\int_{I_j} f\left(u^h(x,t)\right)dx=0, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}u_j^{(2)}+\frac{1}{6\Delta x_j}\left(h_{j+1/2}-h_{j-1/2}\right)\\&\quad-\frac{2}{\Delta x_j^3}\int_{I_j} f\left(u^h(x,t)\right)v_1^{(j)}(x)dx=0\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中：$h_{j+1/2}=h\left(u_{j+1/2}^-,u_{j+1/2}^+\right)$，$u_{j+1/2}^{\pm}=u^h\left(x_{j+1/2}^{\pm},t\right)$

$$\begin{aligned}u_{j+1/2}^-&=u_j^{(0)}+6u_j^{(1)}+30u_j^{(2)}\\u_{j-1/2}^+&=u_j^{(0)}-6u_j^{(1)}+30u_j^{(2)}\end{aligned} \tag{3.10}$$

$h(\cdot,\cdot)$ 称作数值通量，需要满足下面三条性质：

- 一致性：$h(u,u)=f(u)$
- 连续性：$h(\cdot,\cdot)$ 对两个变量都满足 Lipschitz 连续
- 单调性：$h(\cdot,\cdot)$ 对第一个变量不减，对第二个变量不增。即：$\hat{f}(\uparrow,\downarrow)$

常用的数值通量有：

Local Lax-Friedrichs：

$$h^{\mathrm{LLF}}(a,b)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)-\beta(b-a)],\quad \beta=\max_{\min(a,b)\le u\le\max(a,b)}\left|f'(u)\right| \tag{3.11}$$

For convex $f, f''\geq 0$, one has $\beta=\max\left(\left|f'(a)\right|,\left|f'(b)\right|\right)$;

为了优化解的质量（稳定性，精确度，震荡）

需要使用限制器修正。为方便叙述，引入记号：

$$u_{j+1/2}^-=u_j^{(0)}+\tilde{u}_j,\quad u_{j-1/2}^+=u_j^{(0)}-\tilde{\tilde{u}}_j \tag{3.12}$$

其中：

$$\tilde{u}_j=\sum_{l=1}^k a_l u_j^{(l)}v_l^{(j)}\left(x_{j+1/2}\right),\quad \tilde{\tilde{u}}_j=-\sum_{l=1}^k a_l u_j^{(l)}v_l^{(j)}\left(x_{j-1/2}\right) \tag{3.13}$$

特别的，当 $k=2$ 时：

$$\tilde{u}_j=6u_j^{(1)}+30u_j^{(2)},\tilde{\tilde{u}}_j=6u_j^{(1)}-30u_j^{(2)} \tag{3.14}$$

下面介绍限制器 TVBlimiter

$$\tilde{u}_j^{(\bmod)}=\tilde{m}\left(\tilde{u}_j,\Delta_+u_j^{(0)},\Delta_-u_j^{(0)}\right),\quad \tilde{\tilde{u}}_j^{(\bmod)}=\tilde{m}\left(\tilde{\tilde{u}}_j,\Delta_+u_j^{(0)},\Delta_-u_j^{(0)}\right) \tag{3.15}$$

$$\tilde{m}\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)=\begin{cases}a_1 & \text{if } \left|a_1\right|\leq Mh^2\\ m\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right) & \text{otherwise}\end{cases} \tag{3.16}$$

$$m\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) = \begin{cases} s \cdot \min_{1 \leq i \leq n}\left|a_i\right| & \text{if } \operatorname{sign}\left(a_1\right)=\cdots=\operatorname{sign}\left(a_n\right)=s \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.17}$$

$$u_{j+1/2}^{-(\bmod)}=u_j^{(0)}+\tilde{u}_j^{(\mathrm{mod})}, \quad u_{j-1/2}^{+(\mathrm{mod})}=u_j^{(0)}-\tilde{\tilde{u}}_j^{(\mathrm{mod})} \tag{3.18}$$

$$u_j^{(1)(\mathrm{mod})}=\frac{1}{12}\left(\tilde{u}_j^{(\mathrm{mod})}+\tilde{\tilde{u}}_j^{(\mathrm{mod})}\right) \quad u_j^{(2)(\mathrm{mod})}=\frac{1}{60}\left(\tilde{u}_j^{(\mathrm{mod})}-\tilde{\tilde{u}}_j^{(\mathrm{mod})}\right) \tag{3.19}$$

A 勒让德多项式

勒让德多项式的一个重要性质是其在区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 关于 L^2 内积满足正交性，即：

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \mathrm{d} x=\frac{2}{2 n+1} \delta_{m n} \tag{A.1}$$

其中 δ_{mn} 为克罗内克 δ 记号，当 $m=n$ 时为 1，否则为 0。

勒让德多项式可以用下面的递推关系式计算。

$$(n+1) P_{n+1}=(2 n+1) x P_n-n P_{n-1} \tag{A.2}$$

其中

$$\begin{aligned} & p_0(x)=1 \\ & p_1(x)=x \\ & p_2(x)=\frac{1}{2}\left(3 x^2-1\right) \\ & p_3(x)=\frac{1}{2}\left(5 x^3-3 x\right) \\ & p_4(x)=\frac{1}{8}\left(35 x^4-30 x^2+3\right) \\ & p_5(x)=\frac{1}{8}\left(63 x^5-70 x^3+15 x\right) \end{aligned} \tag{A.3}$$

B 数值积分

B.1 机械求积公式

$$\int_k^h f(x) \mathrm{d} x \approx \sum_{k=1}^n A_k f\left(x_k\right) \tag{B.1}$$

x_k 称为求积节点；A_k 称为求积系数。

这类数值积分方法通常称为机械求积。

B.2 代数精度

如果某个求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确的成立，但对于 $m+1$ 次多项式就不准确成立，则称改求积公式具有 m 次代数精度。

B.3 高斯求积公式

若求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^n A_i f\left(x_i\right) \tag{B.2}$$

具有 $2n+1$ 次代数精度, 则称该公式为 Gauss 求积公式, 节点 x_i 称为 Gauss 点, A_i 称为 Gauss 系数.

B.3.1 Gauss-Lobatto 求积

B.3.2 Gauss-Legendre 求积

x_i 是勒让德多项式 p_n 的第 i 个零点。
ω_i 的取值：

$$w_i=\frac{2}{\left(1-x_i^2\right)\left[P_n^{\prime}\left(x_i\right)\right]^2} \tag{B.3}$$

C TVD

如果差分格式的差分解具有以下性质

$$\mathrm{TV}\left(u^{n+1}\right) \leqslant \mathrm{TV}\left(u^n\right) \tag{C.1}$$

也就是说, t_{n+1} 时刻差分解的总变差不超过 t_n 时刻差分解的总变差, 那么就称此差分格式为 TVD 格式, 即总变差不增 (Total Variation Diminishing) 的格式。

D 龙格库塔法

对于常微分方程

$$\frac{d}{dt} u^h=L_h\left(u^h, t\right) \tag{D.1}$$

应用龙格库塔法

$$\left(u^h\right)^{(i)}=\sum_{l-0}^{i-1}\left[\alpha_{il}\left(u^h\right)^{(l)}+\beta_{il} \Delta t L_h\left(\left(u^h\right)^{(l)}, t^n+d_l \Delta t\right)\right] \tag{D.2}$$

$$\left(u^h\right)^{(0)}=\left(u^h\right)^n, \quad\left(u^h\right)^{(r)}=\left(u^h\right)^{n+1}. \tag{D.3}$$

$i=1,2, \cdots, r$
r 和求解的准确性有关，当 $r<=4$ 的时候，上述求解结构有 r 解准确性。
这里给出 $r=3$ 时，各参数的取值：

$$\alpha_{10} = \beta_{10} = 1, \quad \alpha_{20} = \frac{3}{4}, \quad \beta_{20} = 0, \quad \alpha_{21} = \beta_{21} = \frac{1}{4}, \tag{D.4}$$

$$\alpha_{30} = \frac{1}{3}, \quad \beta_{30} = \alpha_{31} = \beta_{31} = 0, \quad \alpha_{32} = \beta_{32} = \frac{2}{3}; \tag{D.5}$$

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{2}; \quad \text{CFL } : \lambda_3 = 1; \tag{D.6}$$

把它写成常用的格式：

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L\left(u^n, t^n\right) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L\left(u^{(1)}, t^n + \Delta t\right) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L\left(u^{(2)}, t^n + \frac{1}{2}\Delta t\right). \end{aligned} \tag{D.7}$$