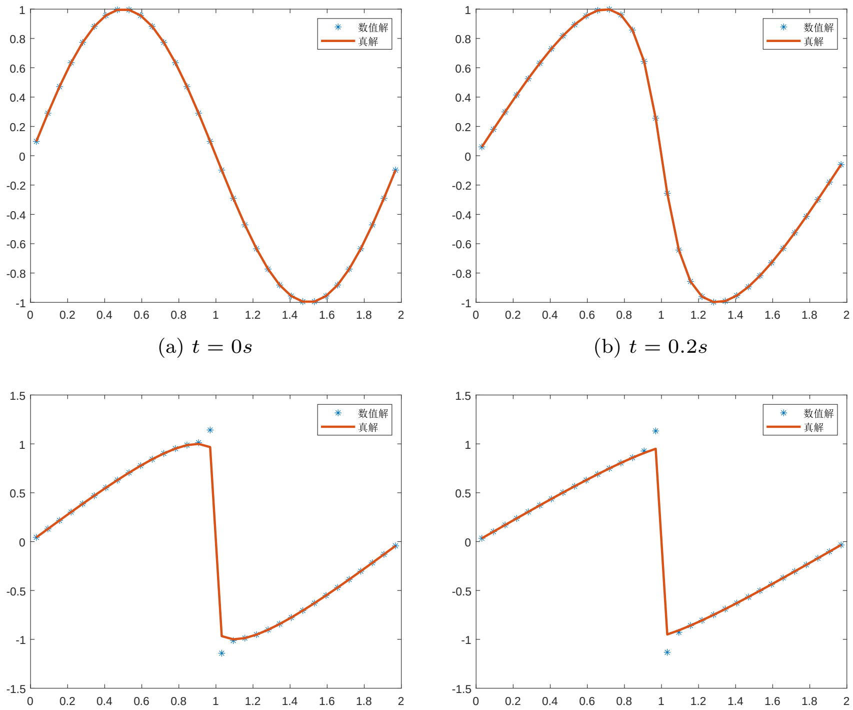
RKDG Primer

张阳

2023 年 6 月 14 日

目录

1 引言



(a) $t = 0s$ (b) $t = 0.2s$

(c) $t = 0.4s$ (d) $t = 0.6s$

图 1: 上图为 burgers 方程在初值条件为 $u = \sin(x)$ 时的演变

本文使用的数值方法为间断有限元 discontinuous Galerkin (DG) 法。让我们先简要回顾一下 DG 方法的历史。1973 年，Reed 和 Hill[24] 在中子传输框架下提出了第一个不连续 Galerkin（DG）方法。然后，Cockburn 等人在一系列论文中 [9, 8, 6, 11] 对 DG 方法进行了重大发展，其中他们建立了一个框架，使用显式、非线性稳定的高阶 Runge-Kutta 时间离散化和 DG 空间离散化，使用精确或近似的 Riemann 解算器作为界面通量和总变差有界（TVB）限制器 [25]，以实现对强不连续性的本质非振荡性。从那时起，这些方案被称为 RKDG 方法。但是，即使初始条件足够平滑，解决(**??**)也不容易，因为解可能包含强不连续性。不连续 Galerkin（DG）方法可以捕捉弱不连续性而无需进一步修改。然而，对于存在强不连续性的问题，数值解可能在强震荡或接触不连续性附近具有显著的虚假震荡，特别是对于高阶数值方法而言。控制这些虚假震荡的常见策略是应用非线性限制器。

通常，使用限制器的过程可以分为两个步骤。首先，需要确定“坏单元”（也称为“有问题的单元”），即包含间断的单元，这些单元需要进行限制。其次，需要在这些“坏单元”中修正 DG 多项式解。由于守恒的要求，需要保证单元平均值不变，并且减小振荡。

在第一部分中，我们通常使用“坏单元”或称为间断指示器，这些指示器包括基于最小模型的指示器 [9]、基于力矩的指示器 [2]、改进的力矩指示器 [5]、以及基于 DG 超收敛性质的 KXRCF 指示器 [17].

在第二部分中，一种限制器属于斜率型限制器，例如 minmod 类型限制器 [9, 8, 6, 11]，基于矩的限制器 [3] 和改进的基于矩的限制器 [5] 等。它们的优点是可以在强间断附近有效抑制伪振荡的出现，但付出的代价是在解的光滑极值点处有可能降低格式的数值精度。另一种限制器基于加权本质非振荡（WENO）方法

[12, 15, 16, 20, 7]，它可以在平滑区域中实现高阶精度，并在强不连续性附近保持本质非振荡性质。WENO 格式一经提出，便引起人们的广泛关注，近二十年来，WENO 的各种变形格式层出不穷。例如：经典的 WENO 限制器 (WENO-js)[23, 28]，Hermite WENO 限制器 (HWENO)[21, 22]，中心型 WENO 限制器 (CWENO)[19]，WENO-M 限制器 [14]，WENO-Z 限制器 [4]。但另一方面，基于 WENO 的限制器需要更广泛的空间模板来获得高阶方案。因此，在多维问题中，特别是在非结构化网格上，如三角形网格或四面体网格中实现它们是困难的。

2 符号说明

$$\Delta_+ w_j = w_{j+1} - w_j, \quad \Delta_- w_j = w_j - w_{j-1} \tag{2.0.1}$$

3 一维标量

离散格式推导与稳定性证明见 [10]

3.1 控制方程

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{3.1.1}$$

3.2 空间离散格式

$$u_h(x,t) = \sum_{l=0}^{k} u_i^{(l)}(t) v_l^{(i)}(x), \quad x \in I_i \tag{3.2.1}$$

其中 $u_i^{(l)}(t)$ 为自由度 (degrees of freedom:dof) 或矩，$v_l^{(i)}(x)$ 为基函数。当基函数为正交函数时，$u_i(l)(t)$ 的定义为：

$$u_i^{(l)}(t) = \frac{1}{a_l} \int_{I_i} u_h(x,t) v_l^{(i)}(x) dx \quad l = 0, 1, \ldots, k \tag{3.2.2}$$

其中 $a_l = \int_{I_i} \left(v_l^{(i)}(x) \right)^2 dx$

Remark 1. 如果基函数不是正交函数，需要先求出质量矩阵的值，再求其逆矩阵。

$$\left\| v_l^{(j)}(x) \right\|^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) + \left[\Delta_- \left(v_l^{(j)} \left(x_{j+1/2} \right) f_{j+1/2} \right) \right] - \int_{I_j} f\left(u^h(x,t) \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{3.2.3}$$

数值通量：

满足三原则：

- 一致性：$\widehat{f}(u,u) = f(u)$。
- 连续性：$\widehat{f}\left(u^-, u^+\right)$ 至少关于两个参数 u^- 和 u^+ 是 Lipschitz 连续的。

- 单调性：$\widehat{f}\left(u^{-}, u^{+}\right)$ 是第一个参数 u^{-} 的非降函数和第二个参数 u^{+} 的非增函数。符号上，$\widehat{f}(\uparrow, \downarrow)$.

以下是几个常见的数值通量 [10]

- Lax-Friedrichs flux

$$\widehat{f}^{LF}\left(u^{-}, u^{+}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(u^{-}\right)+f\left(u^{+}\right)-\alpha\left(u^{+}-u^{-}\right)\right), \quad \alpha=\max_{u}\left|f^{\prime}(u)\right| \tag{3.2.4}$$

- Local Lax-Friedrichs:

$$h^{\mathrm{LLF}}(a, b)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)-\beta(b-a)], \quad \beta=\max_{\min(a, b) \leq u \leq \max(a, b)}\left|f^{\prime}(u)\right| \tag{3.2.5}$$

For convex $f, f^{\prime \prime} \geq 0$, one has $\beta=\max \left(\left|f^{\prime}(a)\right|,\left|f^{\prime}(b)\right|\right)$

- Godunov flux

$$\widehat{f}^{God}\left(u^{-}, u^{+}\right)=\begin{cases}\min_{u^{-} \leq u \leq u^{+}} f(u), & \text{if } u^{-}<u^{+}, \\ \max_{u^{+} \leq u \leq u^{-}} f(u), & \text{if } u^{-} \geq u^{+}\end{cases} \tag{3.2.6}$$

- Engquist-Osher flux

$$\widehat{f}^{EO}=\int_{0}^{u^{-}} \max \left(f^{\prime}(u), 0\right) d u+\int_{0}^{u^{+}} \min \left(f^{\prime}(u), 0\right) d u+f(0) \tag{3.2.7}$$

4 一维向量

$$\mathbf{U}_{t}+\mathbf{F}(\mathbf{U})_{x}=\mathbf{0} \tag{4.0.1}$$

数值通量为：

5 二维向量

5.1 控制方程

$$\partial_{t} \boldsymbol{u}+\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=0 \tag{5.1.1}$$

5.2 空间离散格式

在每个小区间上做二维积分：

$$\frac{d}{d t} \int_{K} u_{h}(t, x) v_{h}(x) d x+\int_{K} \operatorname{div} \mathbf{f}\left(u_{h}(t, x)\right) v_{h}(x) d x=0, \forall v_{h} \in V_{h} \tag{5.2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \int_{K} u(x, t) v(x) \mathrm{d} x+\sum_{e \in \partial K} \int_{e} \mathbf{f}(u(x, t)) \cdot n_{e, K} v(x) \mathrm{d} \Gamma-\int_{K} \mathbf{f}(u(x, t)) \cdot \operatorname{grad} v(x) \mathrm{d} x=0 \tag{5.2.2}$$

Remark 2. 特别的，对于矩形网格，有：

其中 $n_{e,K}$ 是边界 e 的标准外法向量。由于函数在小区间边界上间断 $f(u)$ 在 e 上没有定义，和一维的情况类似，需要使用数值通量 $h_{e,K}\left(u_h\left(t,x^{\text{int}(K)}\right),u_h\left(t,x^{\text{ext}(K)}\right)\right)$ 代替 $\mathbf{f}\left(u_h(t,x)\right)\cdot\mathbf{n}_{e,K}$，其中：

$$\begin{aligned} &u_h\left(t,x^{int(K)}\right)=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in K}}u_h(t,y),\\ &u_h\left(t,x^{ext(K)}\right)=\begin{cases}\gamma_h(x,t), & \text{if } x\in\partial\Omega,\\ \lim\limits_{\substack{y\to x\\ y\in(K)^c}}u_h(t,y), & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$$h_{e,K}(a,b)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{f}(a)\cdot n_{e,K}+\mathbf{f}(b)\cdot n_{e,K}-\alpha_{e,K}(b-a)\right]. \tag{5.2.4}$$

6 时间离散格式

Δt 的取值大小要求为：[31]

$$\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\leq\text{CFL} \tag{6.0.1}$$

即：

$$\Delta t\leqslant\frac{\Delta x}{\alpha}\text{CFL} \tag{6.0.2}$$

对于二维情况，

$$\Delta t\leqslant\frac{\Delta x}{\alpha}\text{CFL} \tag{6.0.3}$$

6.1 ssp 二阶龙格库塔法

ssp(strong stability-preserving) 方法见：[13]

$$\begin{aligned} u^{(1)}&=u^n+\Delta tL\left(u^n\right)\\ u^{n+1}&=\frac{1}{2}u^n+\frac{1}{2}u^{(1)}+\frac{1}{2}\Delta tL\left(u^{(1)}\right)\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

6.2 ssp 三阶龙格库塔法

$$\begin{aligned} u^{(1)}&=u^n+\Delta tL\left(u^n\right)\\ u^{(2)}&=\frac{3}{4}u^n+\frac{1}{4}u^{(1)}+\frac{1}{4}\Delta tL\left(u^{(1)}\right),\\ u^{n+1}&=\frac{1}{3}u^n+\frac{2}{3}u^{(2)}+\frac{2}{3}\Delta tL\left(u^{(2)}\right),\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

6.3 三阶龙格库塔法

$$\begin{aligned} k_1&=f(t_n,y_n)\\ k_2&=f(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1)\\ k_3&=f(t_n+h,y_n-hk_1+2hk_2)\\ y_{n+1}&=y_n+\frac{h}{6}(k_1+4k_2+k_3)\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

6.4 四阶龙格库塔法

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_n, y_n\right) \\
k_2 &= f\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2} k_1\right) \\
k_3 &= f\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2} k_2\right) \\
k_4 &= f\left(t_n+h, y_n+h k_3\right) \\
y_{n+1} &= y_n+\frac{h}{6}\left(k_1+2 k_2+2 k_3+k_4\right)
\end{aligned}
\tag{6.4.1}
$$

7 方程解耦

对于双曲型方程

$$\mathbf{U}_t+\mathbf{F}(\mathbf{U})_x=\mathbf{0} \tag{7.0.1}$$

由链式法则可以得到：

$$\mathbf{U}_t+\mathbf{F}_u \mathbf{U}_x=\mathbf{0} \tag{7.0.2}$$

记 $A=F_u$，因为方程为双曲型方程，所以 A 可对角化，即存在可逆矩阵 P 使得

8 指示子

指示子英文为 indicator。限制器的一个重要组成部分是指示子，指示子可以找出存在强间断的小区间。

8.1 TVB 指示子

1、基于 minmod 函数的 TVB 限制器 [6] (简称 TVB)

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{-}=u_i^{(0)}+\tilde{u}_i, \quad u_{i-\frac{1}{2}}^{+}=u_i^{(0)}-\tilde{\tilde{u}}_i \tag{8.1.1}$$

我们可以看到

$$\tilde{u}_i=\sum_{l=1}^k u_i^{(l)} v_l^{(i)}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right), \quad \tilde{\tilde{u}}_i=-\sum_{l=1}^k u_i^{(l)} v_l^{(i)}\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \tag{8.1.2}$$

$$\tilde{u}_j^{(\mathrm{mod})}=m\left(\tilde{u}_j, \Delta_{+} u_j^{(0)}, \Delta_{-} u_j^{(0)}\right), \quad \tilde{\tilde{u}}^{(\text{ mod })}=m\left(\tilde{\tilde{u}}_j, \Delta_{+} u_j^{(0)}, \Delta_{-} u_j^{(0)}\right), \tag{8.1.3}$$

其中

$$m\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)= \begin{cases}a_1 & \text{if } \left|a_1\right| \leq M h^2 \\ s \cdot \min_{1 \leq j \leq n}\left|a_j\right| & \text{if } \operatorname{sign}\left(a_1\right)=\operatorname{sign}\left(a_2\right)=\cdots=\operatorname{sign}\left(a_n\right)=s, \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{8.1.4}$$

8.2 KXRCF 指示子

KXRCF 指示子利用了 DG 方法的超收敛性 [18]，把小单元 $I_{i,j}$ 的边界 $\partial I_{i,j}$ 分成 $\partial I_{i,j}^-, \partial I_{i,j}^+$ 两部分，分别对应流体流入和流出 $I_{i,j}$ 的边界。

$$\frac{\left|\int_{\partial I_{i,j}^-}\left(u_h(x,y,t)|_{I_{i,j}} - u_h(x,y,t)|_{I_l}\right) ds\right|}{h_{i,j}^R \left|\partial I_{i,j}^-\right| \cdot ||\ |\ \widehat{u_h}(x,y,t)|_{\partial I_{i,j}}\ |\ ||} \geq C_k, \tag{8.2.1}$$

其中，$R = 1$ 当 $k = 1$, $R = 1.5$ 当 $k > 1$. $h_{i,j}$ 为 $I_{i,j}$ 外接圆的半径。C_k 为常数，一般可取 $C_k = 1$. I_l 为 $I_{i,j}$ 在 $\partial I_{i,j}^-$ 一侧的相邻单元。u_h 可取守恒量，或者由守恒量引申出的物理量，$||\ |\ \widehat{u_h}(x,y,t)|_{\partial I_{i,j}}\ |\ ||$ 为 $|\ \widehat{u_h}(x,y,t)|_{\partial I_{i,j}}\ |$ 在 $\partial I_{i,j}$ 上的最大值。$|\partial I_{i,j}^-|$ 为 $\partial I_{i,j}^-$ 的长度。

9 限制器

9.1 非 WENO 类限制器

9.2 WENO 类限制器

9.2.1 WENO-JS 限制器

WENO 全称为 Weighted Essentially Non-Oscillatory。WENO 限制器的思想是：使用周围的小区间上守恒量的平均值来重构当前小区间的函数，再使用得到的新函数来修正原高阶自由度，从而达到修正限制的目的。下面我们简单介绍 WENO 限制器在一维标量方程上的使用方法，一维系统的情况请参阅 [23].

Step 1: 首先我们在 Gauss 或 Gauss-Lobatto 积分点处重构 u 的点值。对于基于 $\mathbb{P}^k$ 的 DG（精度为 $(k+1)$ 阶），我们需要一个至少精确到 $\mathrm{O}\left(h^{2k+2}\right)$ 的 Gauss 或 Gauss-Lobatto 积分规则，而 WENO 重构的精度必须至少为 $2k+1$。为此，我们需要使用相邻的 $2k+1$ 个单元 $I_{i-k}\cdots I_{i+k}$ 的单元平均值来重构 u 的点值。

Step 1.1. 我们确定 $k+1$ 个小的模板 S_j，其中 $j = 0, 1, \cdots, k$，使得 I_i 属于每个模板。记 $S_j = \cup_{l=0}^k I_{i+j-l}$。我们用 $\mathcal{T} = \cup_{j=0}^k S_j$ 表示包含所有 $k+1$ 个小模板的大模板. 在每个模板 $S_j, j = 0, \ldots, k$ 构造一个 k 次多项式重构 $p_j(x)$，使得每个模板 S_j 中每个单元格中 $p_j(x)$ 的平均值与给定的 u 的单元格平均值相符，即

$$\frac{1}{\Delta x_{i+j-l}} \int_{I_{i+j-l}} p_j(x) dx = u_{i+j-l}^{(0)}, \quad l = 0, \ldots, k. \tag{9.2.1}$$

在更大的模板 $\mathcal{T}$ 上，我们再重构一个 $2k$ 次多项式 $Q(x)$，使得

$$\frac{1}{\Delta x_{i+l}} \int_{I_{i+l}} Q(x) dx = u_{i+l}^{(0)}, \quad l = -k, \ldots, k. \tag{9.2.2}$$

关于 $p_j(x)$ 和 $Q(x)$ 的构造细节可以在文献 [7] 中找到。

Step 1.2. 我们找到组合系数，也称为线性权重，记为 $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$，满足

$$Q(x_G) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j p_j(x_G) \tag{9.2.3}$$

其中 x_G 是 Gauss 积分点。不同的积分点对应不同的线性权重。

Step 1.3. 我们计算每个权重组 S_j 的平滑度指示器，表示 $p_j(x)$ 在目标单元 I_i 中的平滑程度。平滑度指示器 β_j 越小，函数 $p_j(x)$ 在目标单元中的平滑度就越高，我们使用以下平滑度指示器：

$$\beta_j=\sum_{l=1}^{k}\int_{I_i}\Delta x_i^{2l-1}\left(\frac{\partial^l}{\partial x^l}p_j(x)\right)^2dx \tag{9.2.4}$$

Step 1.4. 我们基于平滑度指示器计算非线性权重，

$$\omega_j=\frac{\bar{\omega}_j}{\sum_l\bar{\omega}_l},\quad \bar{\omega}_j=\frac{\gamma_j}{(\varepsilon+\beta_j)^2}, \tag{9.2.5}$$

其中，γ_j 是在 **Step 1.2.** 中确定的线性权重，ε 是一个很小的数，用于避免分母为零。在本文中，我们在所有计算中使用 $\varepsilon=10^{-6}$。最终的 WENO 近似为：

$$u_{(x_G)}\approx\sum_{j=0}^{k}\omega_j p_j\left(x_G\right) \tag{9.2.6}$$

Step 2: 基于在 Gauss 积分点 x_G 上重构的点值 $u(x_G)$ 和数值积分，我们得到重构函数的高阶自由度：

$$u_i^{(l)}=\frac{1}{||v_l^{(j)}||^2}\sum_G w_G u\left(x_G\right)v_l^{(i)}\left(x_G\right),\quad l=1,\ldots,k \tag{9.2.7}$$

其中，w_G 是 Gauss 积分点 x_G 对应的高斯积分权重。

表 1

$x_G=x_{i+1/2}$	$u_{i-2}^{(0)}$	$u_{i-1}^{(0)}$	$u_i^{(0)}$	$u_{i+1}^{(0)}$	$u_{i+2}^{(0)}$
$P_0(x)$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{11}{6}$		
$P_1(x)$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	
$P_2(x)$			$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$Q=\frac{1}{10}p_0+\frac{6}{10}p_1+\frac{3}{10}p_2$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{13}{60}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{9}{20}$	$-\frac{1}{20}$
$x_G=x_{i+\sqrt{5}/10}$	$u_{i-2}^{(0)}$	$u_{i-1}^{(0)}$	$u_i^{(0)}$	$u_{i+1}^{(0)}$	$u_{i+2}^{(0)}$
$P_0(x)$	$-\frac{1}{60}+\frac{\sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{30}-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{59}{60}+\frac{3\sqrt{5}}{20}$		
$P_1(x)$		$-\frac{1}{60}-\frac{\sqrt{5}}{20}$	$\frac{31}{30}$	$-\frac{1}{60}+\frac{\sqrt{5}}{20}$	
$P_2(x)$			$\frac{59}{60}-\frac{3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{30}+\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{1}{60}-\frac{\sqrt{5}}{20}$
$Q=\frac{91+9\sqrt{5}}{440}p_0+\frac{129}{220}p_1+\frac{91-9\sqrt{5}}{440}P_2$	$\frac{1+6\sqrt{5}}{600}$	$-\frac{7+21\sqrt{5}}{300}$	$\frac{313}{300}$	$\frac{-7+21\sqrt{5}}{300}$	$\frac{1-6\sqrt{5}}{600}$

For $x_G=x_{i+1/2}$, we have

$$\begin{aligned}
p_0\left(x_G\right)&=\frac{1}{3}u_{i-2}^{(0)}-\frac{7}{6}u_{i-1}^{(0)}+\frac{11}{6}u_i^{(0)}\\
p_1\left(x_G\right)&=-\frac{1}{6}u_{i-1}^{(0)}+\frac{5}{6}u_i^{(0)}+\frac{1}{3}u_{i+1}^{(0)},\\
p_2\left(x_G\right)&=\frac{1}{3}u_i^{(0)}+\frac{5}{6}u_{i+1}^{(0)}-\frac{1}{6}u_{i+2}^{(0)},\\
Q\left(x_G\right)&=\frac{1}{30}u_{i-2}^{(0)}-\frac{13}{60}u_{i-1}^{(0)}+\frac{47}{60}u_i^{(0)}+\frac{9}{20}u_{i+1}^{(0)}-\frac{1}{20}u_{i+2}^{(0)},
\end{aligned} \tag{9.2.8}$$

and

$$\gamma_0=\frac{1}{10},\quad \gamma_1=\frac{6}{10},\quad \gamma_2=\frac{3}{10} \tag{9.2.9}$$

For $x_G=x_{i+\sqrt{5}/10}$ we have

$$\begin{aligned}
p_0\left(x_G\right)&=\left(-\frac{1}{60}+\frac{\sqrt{5}}{20}\right)u_{i-2}^{(0)}+\left(\frac{1}{30}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)u_{i-1}^{(0)}+\left(\frac{59}{60}+\frac{3\sqrt{5}}{20}\right)u_{i}^{(0)},\\
p_1\left(x_G\right)&=\left(-\frac{1}{60}-\frac{\sqrt{5}}{20}\right)u_{i-1}^{(0)}+\frac{31}{30}u_{i}^{(0)}+\left(-\frac{1}{60}+\frac{\sqrt{5}}{20}\right)u_{i+1}^{(0)},\\
p_2\left(x_G\right)&=\left(\frac{59}{60}-\frac{3\sqrt{5}}{20}\right)u_{i}^{(0)}+\left(\frac{1}{30}+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)u_{i+1}^{(0)}+\left(-\frac{1}{60}-\frac{\sqrt{5}}{20}\right)u_{i+2}^{(0)},\\
Q\left(x_G\right)&=\frac{1+6\sqrt{5}}{600}u_{i-2}^{(0)}-\frac{7+21\sqrt{5}}{300}u_{i-1}^{(0)}+\frac{313}{300}u_{i}^{(0)}+\frac{-7+21\sqrt{5}}{300}u_{i+1}^{(0)}+\frac{1-6\sqrt{5}}{600}u_{i+2}^{(0)},
\end{aligned} \tag{9.2.10}$$

and

$$\gamma_0=\frac{91+9\sqrt{5}}{440},\quad \gamma_1=\frac{129}{220},\quad \gamma_2=\frac{91-9\sqrt{5}}{440} \tag{9.2.11}$$

9.2.2 WENO-M

$$g_k(\omega)=\frac{\omega\left(\bar{\omega}_k+\bar{\omega}_k^2-3\bar{\omega}_k\omega+\omega^2\right)}{\bar{\omega}_k^2+\omega\left(1-2\bar{\omega}_k\right)} \tag{9.2.12}$$

$$\alpha_k^*=g_k\left(\omega_k^{(\mathrm{JS})}\right) \tag{9.2.13}$$

$$\omega_k^{(\mathrm{M})}=\frac{\alpha_k^*}{\sum_{i=0}^2\alpha_i^*} \tag{9.2.14}$$

9.2.3 WENO-Z

$$\tau_5=\left|\beta_0-\beta_2\right| \tag{9.2.15}$$

$$\beta_k^z=\left(\frac{\beta_k+\epsilon}{\beta_k+\tau_5+\epsilon}\right),\quad k=0,1,2 \tag{9.2.16}$$

$$\omega_k^z=\frac{\alpha_k^z}{\sum_{l=0}^2\alpha_l^z},\quad \alpha_k^z=\frac{d_k}{\beta_k^z}=d_k\left(1+\frac{\tau_5}{\beta_k+\epsilon}\right),\quad k=0,1,2 \tag{9.2.17}$$

9.3 MR-WENO 限制器

Step 1: 1

Step 1.1. 在有问题的单元 I_j 上定义一系列不同次数的多项式。我们构造多项式 $q_\ell(x),\ell=0,\ldots,k$，满足以下条件：

$$\int_{I_j}q_\ell(x)v_l^j(x)\mathrm{d}x=\int_{I_j}u_h(x)v_l^j(x,y)\mathrm{d}x,\ l=0,1,\ldots,\ell. \tag{9.3.1}$$

Remark 3. 如果我们采用规范正交基 $v_l^{(0)}(x)$, 那么不同的多项式 $q_\ell(x), \ell = 0, 1, , \dots, k$ 的构造非常简单。在这种情况下，我们可以直接得到多项式

$$q_\ell(x) = \sum_{l=0}^{\ell} u_j^{(l)}(t) v_l^{(j)}(x),\ \ell = 0, 1, \dots, k. \tag{9.3.2}$$

Step 1.2. 我们通过以下方式构造多项式 $p_{\ell,\ell}(x), p_{\ell,\ell+1}\ell(x) = 1, \dots, k$

$$p_{\ell,\ell}(x) = \frac{1}{\gamma_{\ell,\ell}} q_\ell(x) - \frac{\gamma_{\ell-1,\ell}}{\gamma_{\ell,\ell}} p_{\ell-1,\ell}(x), \ell = 1, \dots, k, \tag{9.3.3}$$

$$p_{\ell,\ell+1}(x) = \omega_{\ell,\ell} p_{\ell,\ell}(x) + \omega_{\ell-1,\ell} p_{\ell-1,\ell}(x), \ell = 1, \dots, k-1 \tag{9.3.4}$$

这些表达式中，$\gamma_{\ell-1,\ell}$ 和 $\gamma_{\ell,\ell}$ 是线性权重，要求 $\gamma_{\ell-1,\ell} + \gamma_{\ell,\ell} = 1$, 且 $\gamma_{\ell-1,\ell}, \gamma_{\ell,\ell} > 0$. 由于对于平滑解来说，高阶解通常是最好的，因此我们给予高阶多项式更高的线性权重，基于低阶多项式更小的线性权重。即：

$$\gamma_{\ell,\ell} \gg \gamma_{\ell-1,\ell} \tag{9.3.5}$$

当比值 $\frac{\gamma_{\ell,\ell}}{\gamma_{\ell-1,\ell}}$ 的值较小时，可以在不连续性上获得更好的结果，而当值较大时，通常对于平滑解更好。在我们的数值测试中，我们取

$$\gamma_{\ell-1,\ell} = 0.01, \quad \gamma_{\ell,\ell} = 0.99, \quad \ell = 1, \dots, k \tag{9.3.6}$$

这可以在平滑区域中保持原始的高阶，在所有数值例子中都可以保持基本上非振荡的冲击过渡。

$\omega_{\ell-1,\ell}$ 和 $\omega_{\ell,\ell}$ 是非线性权重（稍后将准确地介绍）。

Step 1.3. 计算光滑指示器 β_{ℓ,ℓ_2}，其衡量了 $p_{\ell,\ell_2}(x, y)$ for $\ell = \ell_2 - 1, \ell_2; \ell_2 = 1, 2, 3, 4$ 在小区间 I_j 上的光滑程度. 具体来说：β_{ℓ,ℓ_2} 越小，说明 $p_{\ell,\ell_2}(x, y)$ 在 I_j 上越光滑。

$$\beta_{l_1,l_2} = \sum_{l=1}^{k} \int_{I_i} \Delta x_i^{2l-1} \left(\frac{\partial^l}{\partial x^l} p_{l_1,l_2}(x) \right)^2 dx \tag{9.3.7}$$

由于 $p_{0,1}(x)$ 是一个常值函数，$p'_{0,1}(x) = 0$，因此无法使用统一的(9.3.7)式来衡量其光滑程度，因此我们为 $p_{0,1}(x)$ 设计了其独有的限制器：

定义线性函数 $q_{0,1}(x), q_{0,2}(x)$ 满足：

$$\begin{aligned} \int_{I_{j-1}} q_{0,1}(x) v_l^{(j-1)}(x) \mathrm{d}x &= \int_{I_{j-1}} u_h(x) v_l^{(j-1)} \mathrm{d}x, \quad l = 0, 1, \cdots, k \\ \int_{I_{j+1}} q_{0,1}(x) v_l^{(j+1)}(x) \mathrm{d}x &= \int_{I_{j+1}} u_h(x) v_l^{(j+1)} \mathrm{d}x, \quad l = 0, 1, \cdots, k \end{aligned} \tag{9.3.8}$$

再构造 ς_1, ς_2，其定义如下：

$$\varsigma_1 = \int_{I_j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} q_{0,1} \right)^2 \mathrm{d}x, \quad \varsigma_2 = \int_{I_j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} q_{0,1} \right)^2 \mathrm{d}x \tag{9.3.9}$$

$\beta_{0,1}$ 定义取 ς_1, ς_2 的最小值：

$$\beta_{0,1} = \min\{\varsigma_1, \varsigma_2\}. \tag{9.3.10}$$

Step 1.4. 基于线性权重和光滑性指标计算非线性权重。我们采用文献 [4] 中所示的 WENO-Z 的做法，τ_{ℓ_2} 定义如下：

$$\tau_{\ell_2}=(\beta_{\ell_2,\ell_2}-\beta_{\ell_2-1,\ell_2})^2 \tag{9.3.11}$$

$$\omega_{\ell_1,\ell_2}=\frac{\bar{\omega}_{\ell_1,\ell_2}}{\sum_{\ell=\ell_2-1}^{\ell_2}\bar{\omega}_{\ell,\ell_2}},\quad \bar{\omega}_{\ell_1,\ell_2}=\gamma_{\ell_1,\ell_2}\left(1+\frac{\tau_{\ell_2}}{\epsilon+\beta_{\ell_1,\ell_2}}\right) \tag{9.3.12}$$

得到最终的拟合函数：

$$p^{\text{new}}(x)=\sum_{\ell=\ell_2-1}^{\ell_2}\omega_{\ell,\ell_2}p_{\ell,\ell_2}(x),\quad \ell_2=1,2,3,4, \tag{9.3.13}$$

$$u_j^{(l)}(t)=\frac{1}{||v_l^{(j)}||^2}\int_{I_j}u(x,t)v_l^{(j)}(x)dx,\quad l=0,1,\cdots,k. \tag{9.3.14}$$

Step 2: 修正高阶矩

Remark 4. 如果不修正线性权重，那么最终会得到 $p^{new}(x)=p^{old}(x)$.

$$\begin{aligned}p^{new}(x)&=\gamma_{l_1,l_2}p_{l_1,l_2}(x)+\gamma_{l_2,l_2}p_{l_2,l_2}(x)\\&=\gamma_{l_1,l_2}p_{l_1,l_2}(x)+\gamma_{l_2,l_2}\left(\frac{1}{\gamma_{l_2,l_2}}q_{l_2}(x)-\frac{\gamma_{l_1,l_2}}{\gamma_{l_2,l_2}}p_{l_1,l_2}(x)\right)\\&=q_{l_2}(x)=p^{old}(x)\end{aligned} \tag{9.3.15}$$

$$\beta_{\ell,\ell_2}=\sum_{|\alpha|=1}^{\kappa}\int(\Delta x_i\Delta y_j)^{|\alpha|-1}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}p_{\ell,\ell_2}(x,y)\right)^2dxdy \tag{9.3.16}$$

特别的：

$$\begin{aligned}p_{01}&=q_0\\p_{11}&=\frac{1}{\gamma_{11}}q_1-\frac{\gamma_{01}}{\gamma_{11}}p_{01}\\p_{12}&=\omega_{11}p_{11}+\omega_{01}p_{0,1}\\p_{22}&=\frac{1}{\gamma_{22}}q_2-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}p_{12}\end{aligned} \tag{9.3.17}$$

$$\begin{aligned}p^{\text{MR-WENO2}}(x,y,z)&=\omega_{0,1}p_{0,1}(x,y,z)+\omega_{1,1}p_{1,1}(x,y,z),\\p^{\text{MR-WENO3}}(x,y,z)&=\omega_{1,2}p^{MR-WENO2}(x,y,z)+\omega_{2,2}p_{2,2}(x,y,z)\end{aligned} \tag{9.3.18}$$

10 保极值限制器

[26] 标量守恒性方程

$$u_t+\nabla\cdot\mathbf{F}(u)=0\quad\text{and}\quad u(\mathbf{x},0)=u_0(\mathbf{x}) \tag{10.0.1}$$

一个很重要的性质就是它满足最大值原则。具体来说，如果 $M=\max_x u_0(x)$,$m=\min_x u_0(x)$, 那么 $u(x,t)\in[m,M]$. 对任意的 x,t 都满足。所以，我们也希望数值解也满足这个性质。因为在一些情况下，超出了这个范围，就会得到无物理意义的解。比如负密度，或者负百分比，或者某个多组分混合物中某个组分的百分比大于一。

这样的限制器在多项流问题中尤为重要。

对于 DG 中的数值解 u_h，它可以写成

$$u_h = \overline{u_h} + (u_h - \overline{u_h}) \tag{10.0.2}$$

首先，可以证明，当 Δt 充分小时，$\overline{u_h} \in [m, M]$,

Theorem 1. 对于格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left[\hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n, u_j^n)\right] \tag{10.0.3}$$

其中 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ，h 是全局 *L-F* 通量 *(Lax-Friedrichs, Godunov* 好像也可以*)*:

$$h(u, v) = \frac{1}{2}[f(u) + f(v) - a(u - v)], \quad a = \max_u |f'(u)| \tag{10.0.4}$$

如果满足 *CFL* 条件 $\lambda a \leq 1$ ，且 $u_j^n \in [m, M], \forall j$ ，则 $u_{j+1}^n \in [m, M], \forall j$ 。

证明. 记 $H\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) = u_j^n - \lambda\left[h\left(u_j^n, u_{j+1}^n\right) - h\left(u_{j-1}^n, u_j^n\right)\right]$ ，则 $H(u, u, u) = u$ 。把 H 完全展开得:

$$\begin{aligned} H\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) &= u_J^n - \lambda\left[h\left(u_j^n, u_{j+1}^n\right) - h\left(u_{j-1}^n, u_j^n\right)\right] \\ &= u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left[f\left(u_j^n\right) + f\left(u_{j+1}^n\right) - a\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) - f\left(u_{j-1}\right) - f\left(u_j\right) + a\left(u_j - u_{j-1}\right)\right] \\ &= (1 - \lambda a)u_j^n + \frac{\lambda}{2}\left[a u_{j+1}^n - f\left(u_{j+1}^n\right)\right] + \frac{\lambda}{2}\left[a u_{j-1}^n - f\left(u_{j-1}^n\right)\right] \end{aligned} \tag{10.0.5}$$

注意到

$$\begin{cases} H_b(b, c, d) = \frac{\lambda}{2}\left(a - f'(b)\right) \geqslant 0 \\ H_d(b, c, d) = \frac{\lambda}{2}\left(a - f'(d)\right) \geqslant 0 \\ H_c(b, c, d) = 1 - \lambda a \geqslant 0 \end{cases} \tag{10.0.6}$$

因此 H 对三个变量都是单调增加的，即 $H(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$ ，从而

$$m = H(m, m, m) \leq H\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) \leq H(M, M, M) = M \tag{10.0.7}$$

□

Theorem 2. 设 $x_{j-1/2} = \hat{x}_j^1 < \hat{x}_j^2 < \cdots < \hat{x}_j^N = x_{j+1/2}$ ，其中 $\hat{x}_j$ 是 *Gauss-Lobatto* 积分点，满足 $2N - 3 \geq k$ ，k 是近似多项式的次数。记 $\hat{v}_\alpha := p_j\left(\hat{x}_j^\alpha\right)$ ，特别的，记 $\hat{v}_0 = u_{j-1/2}^-, \hat{v}_{N+1} = u_{j+1/2}^+$ $\hat{\omega}_\alpha$ 是对应的权重，满足 $\hat{\omega}_1 + \cdots + \hat{\omega}_N = 1$ 。如果格式满足 *CFL* 条件

$$\lambda a \leq \min_\alpha \hat{\omega}_\alpha \tag{10.0.8}$$

那么，只要所有的 $\hat{v}_\alpha \in [m, M]$ 且 $\bar{u}_j^n \in [m, M]$ ，就有 $\bar{u}_{j+1}^n \in [m, M]$。

证明.

$$\bar{u}_j^{\text{new}} = \bar{u}_j - \lambda\left[h\left(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+\right) - h\left(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+\right)\right] \tag{10.0.9}$$

我们有

$$\begin{aligned} h\left(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+\right) - h\left(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+\right) &= h\left(\hat{v}_N, \hat{v}_{N+1}\right) - h\left(\hat{v}_0, \hat{v}_1\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N h\left(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_{\alpha+1}\right) - h\left(\hat{v}_{\alpha-1}, \hat{v}_\alpha\right) \end{aligned} \tag{10.0.10}$$

而单元平均值满足 $\bar{u}_j^n=\frac{1}{\Delta x}\int_{I_j}p_j(x)\mathrm{d}x=\sum_{\alpha=1}^N\hat{\omega}_\alpha\hat{v}_\alpha$ ，于是

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{j+1}^n&=\bar{u}_j^n-\lambda\left[h\left(u_{j+1/2}^-,u_{j+1/2}^+\right)-h\left(u_{j-1/2}^-,u_{j-1/2}^+\right)\right]\\
&=\sum_{\alpha=1}^N\hat{\omega}_\alpha\hat{v}_\alpha-\lambda\sum_{\alpha=1}^N\left[h\left(\hat{v}_\alpha,\hat{v}_{\alpha+1}\right)-h\left(\hat{v}_{\alpha-1},\hat{v}_\alpha\right)\right]\\
&=\sum_{\alpha=1}^N\left\{\hat{\omega}_\alpha\hat{v}_\alpha-\lambda\left[h\left(\hat{v}_\alpha,\hat{v}_{\alpha+1}\right)-h\left(\hat{v}_{\alpha-1},\hat{v}_\alpha\right)\right]\right\}\\
&=\sum_{\alpha=1}^N\hat{\omega}_\alpha\left\{\hat{v}_\alpha-\frac{\lambda}{\hat{\omega}_\alpha}\left[h\left(\hat{v}_\alpha,\hat{v}_{\alpha+1}\right)-h\left(\hat{v}_{\alpha-1},\hat{v}_\alpha\right)\right]\right\}\\
&=\sum_{\alpha=1}^N\hat{\omega}_\alpha H_j^\alpha
\end{aligned}\tag{10.0.11}$$

其中 $H_j^\alpha=\hat{v}_\alpha-\frac{\lambda}{\hat{\omega}_\alpha}\left[h\left(\hat{v}_\alpha,\hat{v}_{\alpha+1}\right)-h\left(\hat{v}_{\alpha-1},\hat{v}_\alpha\right)\right]$ 。则根据已知条件，所有的 $\hat{v}_\alpha\in[m,M]$ $\lambda a\le\hat{\omega}_\alpha$ ，即 $\frac{\lambda}{\hat{\omega}_\alpha}a\le 1$ ，因此根据 Lemma 1 有 $H_j^\alpha\in[m,M]$ ，从而可得 $\bar{u}_j^{n+1}\in[m,M]$ ，因为 $\bar{u}_j^{n+1}$ 就是这些 H_j^α 的一个凸组合。 □

此外，对于 $(u_h-\overline{u_h})$，可以乘一个权重 θ，使得最终得到的数值解 u_h^{new} 也满足极值原则。

$$u_h^{\text{new}}=\overline{u_h}+\theta(u_h-\overline{u_h})\tag{10.0.12}$$

$$\theta=\min\left\{\left|\frac{M-\bar{u}_j^n}{M_j-\bar{u}_j^n}\right|,\left|\frac{m-\bar{u}_j^n}{m_j-\bar{u}_j^n}\right|,1\right\}\tag{10.0.13}$$

$$M_j=\max_{x\in I_j}p_j(x)\quad\text{and}\quad m_j=\min_{x\in I_j}p_j(x)\tag{10.0.14}$$

并且这种方法得到的 u_h^{new} 是保精度的。

对于二维的情况：

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{ij}^{n+1}=&\bar{u}_{ij}^n-\frac{\Delta t}{\Delta x\Delta y}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\hat{f}\left[u_{i+1/2,j}^-(y),u_{i+1/2,j}^+(y)\right]-\hat{f}\left[u_{i-1/2,j}^-(y),u_{i-1/2,j}^+(y)\right]\mathrm{d}y\\
&-\frac{\Delta t}{\Delta x\Delta y}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\hat{g}\left[u_{i,j+1/2}^-(x),u_{i,j+1/2}^+(x)\right]-\hat{g}\left[u_{i,j-1/2}^-(x),u_{i,j-1/2}^+(x)\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{10.0.15}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{ij}^{n+1}=&\bar{u}_{ij}^n-\lambda_1\sum_{\beta=1}^L w_\beta\left[\hat{f}\left(u_{i+1/2,\beta}^-,u_{i+1/2,\beta}^+\right)-\hat{f}\left(u_{i-1/2,\beta}^-,u_{i-1/2,\beta}^+\right)\right]\\
&-\lambda_2\sum_{\beta=1}^L w_\beta\left[\hat{g}\left(u_{\beta,j+1/2}^-,u_{\beta,j+1/2}^+\right)-\hat{g}\left(u_{\beta,j-1/2}^-,u_{\beta,j-1/2}^+\right)\right].
\end{aligned}\tag{10.0.16}$$

See figure 1 a for an illustration for k=2 . For simplicity, let $\mu_1=\lambda_1a_1/\left(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2\right)$ and $\mu_2=\lambda_2a_2/\left(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2\right)$ where $a_1=\max|f'(u)|$ and $a_2=\max|g'(u)|$. Notice that $\hat{w}_1=\hat{w}_N$, we have

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{ij}^{n} =& \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p_{ij}(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&(\mu_1+\mu_2)\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p_{ij}(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\frac{\mu_1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p_{ij}(x,y)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x + \frac{\mu_2}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p_{ij}(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
=&\mu_1 \sum_{\beta=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{N} w_\beta \hat{w}_\alpha p_{ij}\left(\hat{x}_i^\alpha, y_j^\beta\right) + \mu_2 \sum_{\beta=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{N} w_\beta \hat{w}_\alpha p_{ij}\left(x_i^\beta, \hat{y}_j^\alpha\right) \\
=&\sum_{\beta=1}^{L}\sum_{\alpha=2}^{N-1} w_\beta \hat{w}_\alpha \left[\mu_1 p_{ij}\left(\hat{x}_i^\alpha, y_j^\beta\right) + \mu_2 p_{ij}\left(x_i^\beta, \hat{y}_j^\alpha\right)\right] \\
&+ \sum_{\beta=1}^{L} w_\beta \hat{w}_1 \left[\mu_1 u_{i+1/2,\beta}^{-} + \mu_1 u_{i-1/2,\beta}^{+} + \mu_2 u_{\beta,j+1/2}^{-} + \mu_2 u_{\beta,j-1/2}^{+}\right]
\end{aligned}
\tag{10.0.17}
$$

Theorem 2.6. Consider a two-dimensional finite volume scheme or the scheme satisfied by the cell averages of the D G method on rectangular meshes (2.13), associated with the approximation polynomials $p_{ij}(x,y)$ of degree k (either reconstruction or D G polynomials) . If $u_{\beta,j\pm1/2}^{\pm}, u_{i\pm1/2,\beta}^{\pm} \in [m,M]$ and $p_{ij}(x,y) \in [m,M]$ (for any $(x,y) \in S_{ij}$) , then $\bar{u}_j^{n+1} \in [m,M]$ under the CFL condition

$$
\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \le \hat{w}_1. \tag{10.0.18}
$$

证明.

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{ij}^{n+1} =& \sum_{\beta=1}^{L}\sum_{\alpha=2}^{N-1} w_\beta \hat{w}_\alpha \left[\mu_1 p_{ij}\left(\hat{x}_i^\alpha, y_j^\beta\right) + \mu_2 p_{ij}\left(x_i^\beta, \hat{y}_j^\alpha\right)\right] \\
&+ \mu_1 \sum_{\beta=1}^{L} w_\beta \hat{w}_1 \left[u_{i+1/2,\beta}^{-} - \frac{\lambda_1}{\mu_1 \hat{w}_1}\left(\hat{f}\left(u_{i+1/2,\beta}^{-}, u_{i+1/2,\beta}^{+}\right) - \hat{f}\left(u_{i-1/2,\beta}^{+}, u_{i+1/2,\beta}^{-}\right)\right)\right. \\
&\left. + u_{i-1/2,\beta}^{+} - \frac{\lambda_1}{\mu_1 \hat{w}_1}\left(\hat{f}\left(u_{i-1/2,\beta}^{+}, u_{i+1/2,\beta}^{-}\right) - \hat{f}\left(u_{i-1/2,\beta}^{-}, u_{i-1/2,\beta}^{+}\right)\right)\right] \\
&+ \mu_2 \sum_{\beta=1}^{L} w_\beta \hat{w}_2 \left[u_{\beta,j+1/2}^{-} - \frac{\lambda_2}{\mu_2 \hat{w}_1}\left(\hat{g}\left(u_{\beta,j+1/2}^{-}, u_{\beta,j+1/2}^{+}\right) - \hat{g}\left(u_{\beta,j-1/2}^{+}, u_{\beta,j+1/2}^{-}\right)\right)\right. \\
&\left. + u_{\beta,j-1/2}^{+} - \frac{\lambda_2}{\mu_2 \hat{w}_1}\left(\hat{g}\left(u_{\beta,j-1/2}^{+}, u_{\beta,j+1/2}^{-}\right) - \hat{g}\left(u_{\beta,j-1/2}^{-}, u_{\beta,j-1/2}^{+}\right)\right)\right]
\end{aligned}
\tag{10.0.19}
$$

□

A 边界条件

A.1 周期性边界条件

A.2 冯诺依曼边界条件

B 数学符号

B.1 散度

在三维直角坐标系 xyz 中，设向量场 $\boldsymbol{A}$ 的表示为 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 其中的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴方向上的单位向量，场的分量 A_x, A_y, A_z 具有一阶连续偏导数，那么向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度就是:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.1.1}$$

B.2 梯度

∇f 在三维直角坐标系中表示为

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \tag{B.2.1}$$

i, j, k 为标准的单位向量，分别指向 x, y 跟 z 坐标的方向。

B.3 范数

范数（norm）是一个函数，它将一个向量映射到非负实数。在机器学习和优化中，范数是一种衡量向量大小或长度的方式。

L1, L2 和 L 无穷范数是线性代数中的三种不同的向量范数（或向量长度度量），它们在数学和数据科学领域中经常使用。

L1 范数：L1 范数也称为曼哈顿距离，它是一个向量中每个元素的绝对值之和。对于一个 n 维向量 $x = (x1, x2, ..., xn)$，其 $L1$ 范数定义如下：

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \tag{B.3.1}$$

L2 范数：L2 范数也称为欧几里得距离，它是向量中每个元素平方和的平方根。对于一个 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其 L2 范数定义如下：

$$||x||_2 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)} \tag{B.3.2}$$

L_∞ 范数：L_∞ 范数也称为最大值范数，它是向量中所有元素的绝对值中最大的值。对于一个 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其 L_∞ 定义如下：

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|) \tag{B.3.3}$$

这些向量范数在机器学习和优化算法中经常使用，例如 L1 和 L2 正则化（用于缩小模型参数），L1 和 L2 距离度量（用于计算相似性或距离），以及 L1 和 L2 约束（用于限制变量的取值范围）。

B.4 张量积

C 控制方程

C.1 一维方程

C.1.1 欧拉方程

方程形式

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\rho\\\rho u\\E\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\rho u\\\rho u^2+p\\u(E+p)\end{bmatrix}\tag{C.1.1}$$

或

$$\mathbf{F}(\mathbf{U})=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}u_2\\\frac{1}{2}(3-\gamma)\frac{u_2^2}{u_1}+(\gamma-1)u_3\\\gamma\frac{u_2}{u_1}u_3-\frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{u_2^3}{u_1^2}\end{bmatrix}\tag{C.1.2}$$

这里 ρ 为密度，p 为压力，u 为粒子速度，E 为每单位体积的总能量。

$$E=\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{p}{\gamma-1}\tag{C.1.3}$$

对于空气，一般可取 $\gamma=1.4$. 声速 a 的表达式为：

$$a=\sqrt{\left(p/\rho^2-e_\rho\right)/e_p}=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}\tag{C.1.4}$$

特征分析 Jacobian 矩阵为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{U})=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{U}}=\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial u_1\partial f_1/\partial u_2\partial f_1/\partial u_3\\\partial f_2/\partial u_1\partial f_2/\partial u_2\partial f_2/\partial u_3\\\partial f_3/\partial u_1\partial f_3/\partial u_2\partial f_3/\partial u_3\end{bmatrix}\tag{C.1.5}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{U})=\begin{bmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{2}(\gamma-3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2&(3-\gamma)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)&\gamma-1\\-\frac{\gamma u_2u_3}{u_1^2}+(\gamma-1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3&\frac{\gamma u_3}{u_1}-\frac{3}{2}(\gamma-1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2&\gamma\left(\frac{u_2}{u_1}\right)\end{bmatrix}\tag{C.1.6}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{2}(3-\gamma)u^2&(3-\gamma)u&(\gamma-1)\\-\gamma\frac{Eu}{\rho}+(\gamma-1)u^3&\gamma\frac{E}{\rho}-\frac{3}{2}(\gamma-1)u^2&\gamma u\end{bmatrix}\tag{C.1.7}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{U})$ 的特征值为：

$$\lambda_1=u-a,\lambda_2=u,\lambda_3=u+a\tag{C.1.8}$$

左右特征向量为 [29]：

$$L_j(u)=\begin{pmatrix}\frac{B_2+\mu/c}{2}&-\frac{B_1\mu+1/c}{2}&\frac{B_1}{2}\\1-B_2&B_1\mu&-B_1\\\frac{B_2-\mu/c}{2}&-\frac{B_1\mu-1/c}{2}&\frac{B_1}{2}\end{pmatrix}\tag{C.1.9}$$

$$R_j(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu - c & \mu & \mu + c \\ H - c\mu & \mu^2/2 & H + c\mu \end{pmatrix} \tag{C.1.10}$$

where $c = \sqrt{\gamma p/\rho}, B_1 = (\gamma - 1)/c^2, B_2 = B_1\mu^2/2$ and $H = (E+p)/\rho$. 对应的右特征向量为:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} \tag{C.1.11}$$

其中 H 为总比焓 (total specific enthalpy)，h 为比焓 (specific enthalpy).

$$H = (E+p)/\rho \equiv \frac{1}{2}u^2 + h, \quad h = e + p/\rho \tag{C.1.12}$$

算例

Example 1.

$$\begin{aligned} \rho(x,0) &= 1 + 0.2\sin \pi x \\ u(x,0) &= 0.7 \\ p(x,0) &= 1 \end{aligned} \tag{C.1.13}$$

计算区域为 $[0,2]$, 周期边界条件，解析解为：

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= 1 + 0.2\sin \pi(x - 0.7t) \\ u(x,t) &= 0.7 \\ p(x,t) &= 1 \end{aligned} \tag{C.1.14}$$

Example 2. *Lax 激波管问题 [31]*:

$$\begin{aligned} (\rho, v, p) &= (0.445, 0.698, 3.528) \qquad \text{当} x \leqslant 0, \\ (\rho, v, p) &= (0.5, 0, 0.571) \qquad \text{当} \quad x > 0. \end{aligned} \tag{C.1.15}$$

计算区域为 $[-5,5]$ 两瑞均是常数边界条件, 我们求解该问题至 $T = 1.3$.

Example 3. *Shu Osher 问题 [31]*,

$$\begin{aligned} (\rho, v, p) &= (3.857143, 2.629369, 10.333333) \qquad \text{当} x \leq -4, \\ (\rho, v, p) &= (1 + \varepsilon \sin(5x), 0, 1) \qquad \text{当} x > -4. \end{aligned} \tag{C.1.16}$$

选取 $\epsilon = 0.2$, 计算区域为 $[-5,5]$, 两端边界条件按初值条件给定后保持不变，求解至时间 $T = 1.8$

C.2 二维方程

C.2.1 欧拉方程

方程形式

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{0} \tag{C.2.1}$$

其中

$$
\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(E+p)\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(E+p)\end{bmatrix} \tag{C.2.2}
$$

其中

$$
E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2\right) \tag{C.2.3}
$$

同时

$$
F=\begin{bmatrix}u_2\\ \frac{u_2^2}{u_1}+(\gamma-1)u_4+\frac{1-\gamma}{2}\frac{u_2^2+u_3^2}{u_1}\\ \frac{u_2u_3}{u_1}\\ \frac{u_2}{u_1}\left(\gamma u_4+\frac{1-\gamma}{2}\frac{u_2^2+u_3^2}{u_1}\right)\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}u_3\\ \frac{u_2u_3}{u_1}\\ \frac{u_3^2}{u_1}+(\gamma-1)u_4+\frac{1-\gamma}{2}\frac{u_2^2+u_3^2}{u_1}\\ \frac{u_3}{u_1}\left(\gamma u_4+\frac{1-\gamma}{2}\frac{u_2^2+u_3^2}{u_1}\right)\end{bmatrix} \tag{C.2.4}
$$

特征分析 特征值为

$$
\lambda_1=u-a,\quad \lambda_2=\lambda_3=u,\quad \lambda_4=u+a \tag{C.2.5}
$$

$$
\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{\gamma(u_2-3)^2+(\gamma-1)u_3^2}{2u_1^2} & -(\gamma-3)\frac{u_2}{u_1} & -(\gamma-1)\frac{u_3}{u_1} & \gamma-1\\ -\frac{u_2u_3}{u_1^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} & 0\\ \frac{u_2}{u_1}\frac{((\gamma-1)(u_2^2+u_3^2)-\gamma u_1u_4)}{u_1^2} & \frac{3u_2^2-\gamma u_3^2-3\gamma u_2^2+u_3^2+2\gamma u_1u_4}{2u_1^2} & -\frac{u_2u_3(\gamma-1)}{u_1^2} & \frac{\gamma u_2}{u_1}\end{bmatrix} \tag{C.2.6}
$$

$$
\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -\frac{u_2\,u_3}{{u_1}^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} & 0\\ \frac{\gamma\,{u_2}^2+\gamma\,{u_3}^2-{u_2}^2-3\,{u_3}^2}{2\,{u_1}^2} & -\frac{u_2\,(\gamma-1)}{u_1} & -\frac{u_3\,(\gamma-3)}{u_1} & \gamma-1\\ \frac{u_3}{u_1}\frac{((\gamma-1)(u_2^2+u_3^2)-\gamma\,u_1\,u_4)}{{u_1}^2} & -(\gamma-1)\frac{u_2\,u_3}{{u_1}^2} & \frac{(1-\gamma){u_2}^2+3(1-\gamma)\,{u_3}^2+2\,\gamma\,u_1\,u_4}{2\,{u_1}^2} & \frac{\gamma\,u_3}{u_1}\end{bmatrix} \tag{C.2.7}
$$

$$
F_U=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -u^2+\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathbf{V}^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1\\ -uv & v & u & 0\\ u\left[\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathbf{V}^2-H\right] & H-(\gamma-1)u^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma u\end{bmatrix}. \tag{C.2.8}
$$

其中 $\mathbf{V}^2=v^2+u^2$,

左右特征向量为 [29]：

$$L_{ij}^{x}(u)=\begin{bmatrix} \dfrac{B_2+\mu/c}{2} & -\dfrac{B_1\mu+1/c}{2} & -\dfrac{B_1 v}{2} & \dfrac{B_1}{2} \\ v & 0 & -1 & 0 \\ 1-B_2 & B_1\mu & B_1 v & -B_1 \\ \dfrac{B_2-\mu/c}{2} & -\dfrac{B_1\mu-1/c}{2} & -\dfrac{B_1 v}{2} & \dfrac{B_1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_{ij}^{x}(u)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mu-c & 0 & \mu & \mu+c \\ v & -1 & v & v \\ H-c\mu & -v & \dfrac{\mu^2+v^2}{2} & H+c\mu \end{bmatrix} \tag{C.2.9}$$

$$L_{ij}^{y}(u)=\begin{bmatrix} \dfrac{B_2+v/c}{2} & -\dfrac{B_1\mu}{2} & -\dfrac{B_1 v+1/c}{2} & \dfrac{B_1}{2} \\ -\mu & 1 & 0 & 0 \\ 1-B_2 & B_1\mu & B_1 v & -B_1 \\ \dfrac{B_2-v/c}{2} & -\dfrac{B_1\mu}{2} & -\dfrac{B_1 v-1/c}{2} & \dfrac{B_1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_{ij}^{y}(u)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mu & 1 & \mu & \mu \\ v-c & 0 & v & v+c \\ H-cv & \mu & \dfrac{\mu^2+v^2}{2} & H+cv \end{bmatrix} \tag{C.2.10}$$

where $c=\sqrt{\gamma p/\rho}, B_1=(\gamma-1)/c^2, B_2=B_1\left(\mu^2+v^2\right)/2$ and $H=(E+p)/\rho$

算例

Example 4. 光滑问题：初值为：

$$\begin{aligned} \rho(x,y,0)&=1+0.2\sin(\pi(x+y)) \\ u(x,y,0)&=0.7 \\ v(x,y,0)&=0.3 \\ p(x,y,0)&=1 \end{aligned} \tag{C.2.11}$$

周期边界条件

准确解为：

$$\rho(x,y,t)=1+0.2\sin(\pi(x+y-(u+v)t)), u=0.7, v=0.3, p=1 \tag{C.2.12}$$

Example 5. 二维黎曼问题 *[27]*，初值为

$$\begin{cases} (\rho_1,p_1,\mu_1,v_1)^T=(0.5313,0.4,0,0)^T, & x>1, y>1, \\ (\rho_2,p_2,\mu_2,v_2)^T=(1,1,0,0.7276)^T, & x>1, y<1, \\ (\rho_3,p_3,\mu_3,v_3)^T=(1,1,0.7276,0)^T, & x<1, y>1, \\ (\rho_4,p_4,\mu_4,v_4)^T=(0.8,1,0,0)^T, & x<1, y<1 \end{cases} \tag{C.2.13}$$

$p_1<p_2=p_3=p_4$。滑移边界条件。建议计算至 $t=0.52$，网格为 *260*260.*

Example 6.

$$(\rho,u,v,p)=\begin{cases} (0.138,1.206,1.206,0.029), & (x,y)\in[0,0.8)\times[0,0.8) \\ (0.5323,1.206,0,0.3), & (x,y)\in[0,0.8)\times[0.8,1] \\ (0.5323,0,1.206,0.3), & (x,y)\in[0.8,1]\times[0,0.8) \\ (1.5,0,0,1.5), & (x,y)\in[0.8,1]\times[0.8,1] \end{cases} \tag{C.2.14}$$

$t_{end}=0.8$，网格为 800×800。

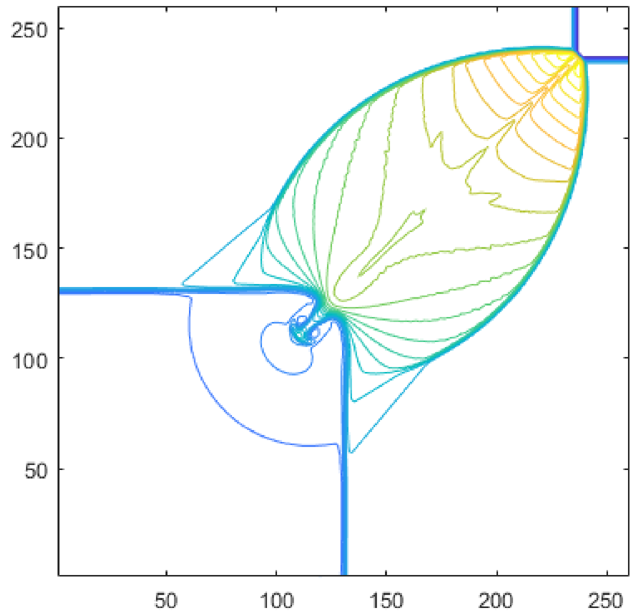


图 2: 网格密度 260x260，间断有限元方法，TVB 指示子，M=50，WENO-M

D 基函数函数

对于基函数，[30]

D.1 一维

在 $[-1,1]$ 上的勒让德函数为：

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(\xi)=1\\
&\varphi_1(\xi)=\xi\\
&\varphi_2(\xi)=\left(3\xi^2-1\right)/2\\
&\varphi_3(\xi)=\left(5\xi^3-3\xi\right)/2\\
&\varphi_4(\xi)=\left(35\xi^4-30\xi^2+3\right)/8
\end{aligned} \tag{D.1.1}$$

积分值为：

$$\int_{-1}^{-1}\varphi_i^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1},n=0,1,2,\cdots \tag{D.1.2}$$

D.2 二维

$[-1,1]\times[-1,1]$ 上的勒让德函数为：

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y) &= 1\\
\varphi_2(x,y) &= x\\
\varphi_3(x,y) &= y\\
\varphi_4(x,y) &= x^2-1/3\\
\varphi_5(x,y) &= xy\\
\varphi_6(x,y) &= y^2-1/3
\end{aligned} \tag{D.2.1}$$

对于 $[x_a,x_b]\times[y_a,y_b]$ 上的勒让德函数，只需令 $\xi=\dfrac{x-\dfrac{x_a+x_b}{2}}{\dfrac{x_b-x_a}{2}},\eta=\dfrac{y-\dfrac{y_a+y_b}{2}}{\dfrac{y_b-y_a}{2}}$

E 数值积分

一般采用的求积公式是机械求解求积公式中的高斯积分。高斯积分是一种非常常用的数值积分方法，具有如下优点：

- 高斯积分的精度随着积分点的增加而增加，当积分点的数量足够大时，可以达到非常高的精度。
- 当使用的点数固定为 $n+1$ 个时，高斯积分具有 $2n+1$ 阶的精度，是所有机械求积公式中最高的。因此在计算复杂函数积分时，高斯积分可以显著减少计算时间和计算成本。
- 高斯积分公式可以非常方便地使用代码实现。

具体而言，该公式可写成：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i f(x_i) \tag{E.0.1}$$

其中，ω_i 和 x_i 分别表示高斯积分公式中第 i 个点的权重和位置。对于积分区间非 $[-1,1]$ 的积分，可以使用下面的公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}\ \mathrm{d}t=\sum_i f(\frac{(b-a)x_i+b+a}{2})\frac{b-a}{2}\omega_i \tag{E.0.2}$$

表 2 给出 $n=2,3,4,5$ 时，高斯积分的取值点和权重大小.

表 2: Gauss-Legendre 的取值点和权重大小

n	取值点 x_i	权重 w_i
2	±0.57735027	1.00000000
3	0.00000000, ±0.77459667	0.88888889, 0.55555556
4	±0.86113631, ±0.33998104	0.34785485, 0.65214515
5	0.00000000, ±0.53846931, ±0.90617985	0.56888889, 0.23692689, 0.23692689

对于 n 不同的情况，可以从这个 [1] 查到更多 x_i,ω_i 的值。特别的，对于 $P^1,n\geqslant 2$,$P^2,n\geqslant 4$.

表 3: Gauss-Lobatto 的取值点和权重大小

n	取值点 x_i	权重 w_i
2	± 1.00000000	1.00000000
3	± 1.00000000, 0.00000000	0.33333333, 1.33333333
4	± 1.00000000, ± 0.44721360	0.16666667, 0.83333333
5	± 1.00000000, ± 0.65465367, 0.00000000	0.10000000, 0.54444444, 0.71111111

F 计算精度

假设我们得到的近似解为 u_h, 准确解为 u.

$$||u_h - u|| = Ch^p + O(h^{p+1}) \tag{F.0.1}$$

下面介绍如何通过数值实验求出 p.

在两次实验中，我们使用了不同的 $h = h_1, h_2$，得到的近似解为 u_{h_1}, u_{h_2}. 则：

$$\begin{aligned} ||u_{h_1} - u|| &= Ch_1^p + O(h^{p_1+1}) \\ ||u_{h_2} - u|| &= Ch_2^p + O(h^{p_2+1}) \end{aligned} \tag{F.0.2}$$

做比得到：

$$\frac{||u_{h_1} - u||}{||u_{h_2} - u||} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p \tag{F.0.3}$$

于是

$$p = \frac{\ln ||u_{h_1} - u|| - \ln ||u_{h_2} - u||}{\ln(h_1) - \ln(h_2)} \tag{F.0.4}$$

下面给出一种使用函数积分值来计算范数的方法：假设小区间的数量为 n，数值解为 u_h，准确解为 u。

- 对于 L_1 范数，我们有：

$$||u_h - u|| = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{I_i} |u_h - u| \mathrm{d}x}{\sum_{i=1}^n \int_{I_i} \mathrm{d}x} \tag{F.0.5}$$

- 对于 L_2 范数，我们有：

$$||u_h - u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{I_i} (u_h - u)^2 \mathrm{d}x} \tag{F.0.6}$$

- 对于 L_∞ 范数，我们有：

$$||u_h - u|| = \max_i \left\{ \frac{\int_{I_i} (u_h - u)^2 \mathrm{d}x}{} \right\} \tag{F.0.7}$$

$$\begin{aligned} L_1 - \mathrm{norm} &= \sum_{i=1}^n |u(x_i) - uh(x_i)| \\ L_2 - \ \mathrm{norm} \ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (u(x_i) - uh(x_i))^2} \\ L_\infty - \ \mathrm{norm} \ &= \max x_i, i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{F.0.8}$$

参考文献

[1] 高斯积分的节点值.

[2] Rupak Biswas, Karen D. Devine, and Joseph E. Flaherty. Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 14(1-3):255–283, 1994.

[3] Rupak Biswas, Karen D. Devine, and Joseph E. Flaherty. Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 14(1-3):255–283, 1994.

[4] Rafael Borges, Monique Carmona, Bruno Costa, and Wai Sun Don. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 227(6):3191–3211, 2008.

[5] A. Burbeau, P. Sagaut, and Ch H. Bruneau. A problem-independent limiter for high-order runge–kutta discontinuous galerkin methods. *Journal of Computational Physics*, 169(1):111–150, 2001.

[6] Bernardo Cockburn, Suchung Hou, and Chi-Wang Shu. The runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws. iv: The multidimensional case. *Mathematics of Computation*, 54(190), 1990.

[7] Bernardo Cockburn, Claes Johnson, C-W Shu, and Eitan Tadmor. *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations: lectures given at the 2nd session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Cetraro, Italy, June 23-28, 1997*. Springer, 2006.

[8] Bernardo Cockburn, San-Yih Lin, and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws iii: One-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, 84(1):90–113, 1989.

[9] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws ii: General framework. *Mathematics of Computation*, 52(186), 1989.

[10] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws ii: General framework. *Mathematics of Computation*, 52(186), 1989. RKDG 系列论文 2.

[11] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The runge–kutta discontinuous galerkin method for conservation laws v. *Journal of Computational Physics*, 141(2):199–224, 1998.

[12] Oliver Friedrich. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 144(1):194–212, 1998.

[13] Sigal Gottlieb, Chi-Wang Shu, and Eitan Tadmor. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*, 43(1):89–112, 2001. ssp 龙格库塔法.

[14] Andrew K. Henrick, Tariq D. Aslam, and Joseph M. Powers. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points. *Journal of Computational Physics*, 207(2):542–567, 2005.

[15] Changqing Hu and Chi-Wang Shu. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes. *Journal of Computational Physics*, 150(1):97–127, 1999.

[16] Guang-Shan Jiang and Chi-Wang Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1):202–228, 1996.

[17] L. Krivodonova, J. Xin, J. F. Remacle, N. Chevaugeon, and J. E. Flaherty. Shock detection and limiting with discontinuous galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 48(3-4):323–338, 2004.

[18] L. Krivodonova, J. Xin, J. F. Remacle, N. Chevaugeon, and J. E. Flaherty. Shock detection and limiting with discontinuous galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 48(3-4):323–338, 2004. 基于 DG 超收敛性质的 KXRCF 指示器.

[19] Doron Levy, Gabriella Puppo, and Giovanni Russo. Central weno schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(3):547–571, 1999.

[20] Xu-Dong Liu, Stanley Osher, and Tony Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115(1):200–212, 1994.

[21] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Hermite weno schemes and their application as limiters for runge-kutta discontinuous galerkin method: one-dimensional case. *Journal of Computational Physics*, 193(1):115–135, 2004.

[22] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Hermite weno schemes and their application as limiters for runge-kutta discontinuous galerkin method ii: Two dimensional case. *Computers & Fluids*, 34(6):642–663, 2005.

[23] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Runge–kutta discontinuous galerkin method using weno limiters. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(3):907–929, 2005.

[24] William H Reed and Thomas R Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA), 1973.

[25] Chi-Wang Shu. Tvb uniformly high-order schemes for conservation laws. *Mathematics of Computation*, 49(179), 1987.

[26] Xiangxiong Zhang and Chi-Wang Shu. Maximum-principle-satisfying and positivity-preserving high-order schemes for conservation laws: survey and new developments. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 467(2134):2752–2776, 2011. 一篇比较重要的保极值 review.

[27] Jun Zhu and Jianxian Qiu. A new type of finite volume weno schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Scientific Computing*, 73(2-3):1338–1359, 2017. 黎曼问题算例.

[28] Jun Zhu, Jianxian Qiu, Chi-Wang Shu, and Michael Dumbser. Runge–kutta discontinuous galerkin method using weno limiters ii: Unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(9):4330–4353, 2008.

[29] Jun Zhu, Xinghui Zhong, Chi-Wang Shu, and Jianxian Qiu. Runge-kutta discontinuous galerkin method with a simple and compact hermite weno limiter. *Communications in Computational Physics*, 19(4):944–969, 2016. 欧拉方程的左右特征向量.

[30] 梁俊凯. 欧拉方程间断伽辽金有限元解法的研究. 2018.

[31] 程悦. *Runge-Kutta* 间断 *Galerkin* 有限元方法的多种限制器比较. Thesis, 2011.