

# RKDG Primer

张阳

2023 年 6 月 9 日

## 目录

<b>1</b>	<b>引言</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>符号说明</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>一维标量</b>	<b>4</b>
3.1	控制方程 . . . . .	4
3.2	空间离散格式 . . . . .	4
<b>4</b>	<b>一维向量</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>二维向量</b>	<b>5</b>
5.1	控制方程 . . . . .	5
5.2	空间离散格式 . . . . .	5
<b>6</b>	<b>指示子</b>	<b>6</b>
6.1	TVB 指示子 . . . . .	6
6.2	KXRCF 指示子 . . . . .	6
<b>7</b>	<b>限制器</b>	<b>7</b>
7.1	TVB 限制器 . . . . .	7
7.2	WENO-JS 限制器 . . . . .	7
7.3	WENO-M . . . . .	8
7.4	WENO-Z . . . . .	8
7.5	MR-WENO 限制器 . . . . .	8
<b>8</b>	<b>保极值限制器</b>	<b>10</b>
<b>A</b>	<b>边界条件</b>	<b>13</b>
A.1	周期性边界条件 . . . . .	13
A.2	冯诺依曼边界条件 . . . . .	13

<b>B</b>	<b>数学符号</b>	<b>13</b>
B.1	散度 . . . . .	13
B.2	梯度 . . . . .	13
B.3	范数 . . . . .	13
<b>C</b>	<b>控制方程</b>	<b>14</b>
C.1	一维方程 . . . . .	14
C.1.1	欧拉方程 . . . . .	14
C.2	二维方程 . . . . .	15
C.2.1	欧拉方程 . . . . .	15
<b>D</b>	<b>基函数函数</b>	<b>18</b>
D.1	一维 . . . . .	18
D.2	二维 . . . . .	19
<b>E</b>	<b>龙格库塔法</b>	<b>19</b>
E.1	ssp 二阶龙格库塔法 . . . . .	19
E.2	ssp 三阶龙格库塔法 . . . . .	19
E.3	三阶龙格库塔法 . . . . .	20
E.4	四阶龙格库塔法 . . . . .	20
<b>F</b>	<b>数值积分</b>	<b>20</b>
<b>G</b>	<b>计算精度</b>	<b>21</b>

# 1 引言

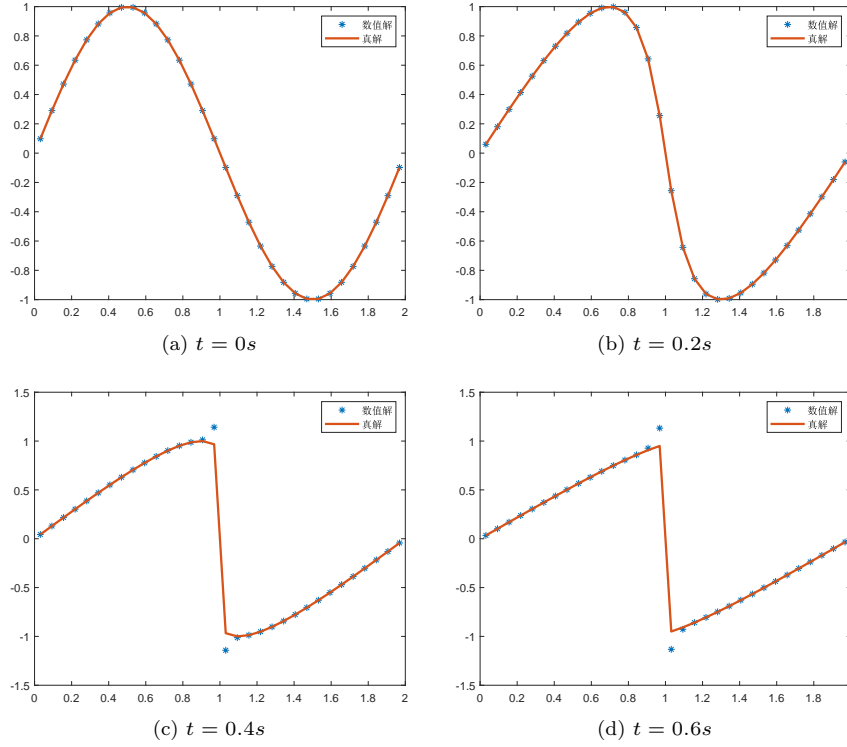


图 1: 上图为 burgers 方程在初值条件为  $u = \sin(x)$  时的演变

本文使用的数值方法为间断有限元 (DG) 法。让我们先简要回顾一下 DG 方法的历史。1973 年, Reed 和 Hill[24] 在中子传输框架下提出了第一个不连续 Galerkin (DG) 方法。然后, Cockburn 等人在一系列论文中 [9, 8, 6, 11] 对 DG 方法进行了重大发展, 其中他们建立了一个框架, 使用显式、非线性稳定的高阶 Runge-Kutta 时间离散化和 DG 空间离散化, 使用精确或近似的 Riemann 解算器作为界面通量和总变差有界 (TVB) 限制器 [25], 以实现对强不连续性的本质非振荡性。从那时起, 这些方案被称为 RKDG 方法。但是, 即使初始条件足够平滑, 解决(??)也不容易, 因为解可能包含强不连续性。不连续 Galerkin (DG) 方法可以捕捉弱不连续性而无需进一步修改。然而, 对于存在强不连续性的问题, 数值解可能在强震荡或接触不连续性附近具有显著的虚假震荡, 特别是对于高阶数值方法而言。控制这些虚假震荡的常见策略是应用非线性限制器。

通常, 使用限制器的过程可以分为两个步骤。首先, 需要确定“坏单元”(也称为“有问题的单元”), 即包含间断的单元, 这些单元需要进行限制。其次, 需要在这些“坏单元”中修正 DG 多项式解。由于守恒的要求, 需要保证单元平均值不变, 并且减小振荡。

在第一部分中, 我们通常使用“坏单元”或称为间断指示器, 这些指示器包括基于最小模型的指示器 [9]、基于力矩的指示器 [2]、改进的力矩指示器 [5]、以及基于 DG 超收敛性质的 KXRCF 指示器 [17]。

在第二部分中, 一种限制器属于斜率型限制器, 例如 minmod 类型限制器 [9, 8, 6, 11], 基于矩的限制器 [3] 和改进的基于矩的限制器 [5] 等。它们的优点是可以在强间断附近有效抑制伪振荡的出现, 但付出的代价是在解的光滑极值点处有可能降低格式的数值精度。另一种限制器基于加权本质非振荡 (WENO) 方法 [12, 15, 16, 20, 7], 它可以在平滑区域中实现高阶精度, 并在强不连续性附近保持本质非振荡性质。WENO 格

式一经提出, 便引起人们的广泛关注, 近二十年来, WENO 的各种变形格式层出不穷。例如: 经典的 WENO 限制器 (WENO-js)[23, 27], Hermite WENO 限制器 (HWENO)[21, 22], 中心型 WENO 限制器 (CWENO)[19], WENO-M 限制器 [14], WENO-Z 限制器 [4]。但另一方面, 基于 WENO 的限制器需要更广泛的空间模板来获得高阶方案。因此, 在多维问题中, 特别是在非结构化网格上, 如三角形网格或四面体网格中实现它们是困难的。

## 2 符号说明

$$\Delta_+ w_j = w_{j+1} - w_j, \quad \Delta_- w_j = w_j - w_{j-1} \quad (2.0.1)$$

## 3 一维标量

离散格式推导与稳定性证明见 [10]

### 3.1 控制方程

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (3.1.1)$$

### 3.2 空间离散格式

$$u_h(x, t) = \sum_{l=0}^k u_i^{(l)}(t) v_l^{(i)}(x), \quad x \in I_i \quad (3.2.1)$$

其中  $u_i^{(l)}(t)$  为自由度 (degrees of freedom:dof) 或矩,  $v_l^{(i)}(x)$  为基函数。当基函数为正交函数时,  $u_i(l)(t)$  的定义为:

$$u_i^{(l)}(t) = \frac{1}{a_l} \int_{I_i} u_h(x, t) v_l^{(i)}(x) dx \quad l = 0, 1, \dots, k \quad (3.2.2)$$

其中  $a_l = \int_{I_i} \left( v_l^{(i)}(x) \right)^2 dx$

**Remark 1.** 如果基函数不是正交函数, 需要先求出质量矩阵的值, 再求其逆矩阵。

$$\left\| v_l^{(j)}(x) \right\|^2 \frac{d}{dt} u(t) + \left[ \Delta_- \left( v_l^{(j)}(x_{j+1/2}) f_{j+1/2} \right) \right] - \int_{I_j} f(u^h(x, t)) \frac{d}{dx} v(x) dx = 0 \quad (3.2.3)$$

数值通量:

满足三原则:

- 一致性:  $\hat{f}(u, u) = f(u)$ 。
- 连续性:  $\hat{f}(u^-, u^+)$  至少关于两个参数  $u^-$  和  $u^+$  是 Lipschitz 连续的。
- 单调性:  $\hat{f}(u^-, u^+)$  是第一个参数  $u^-$  的非降函数和第二个参数  $u^+$  的非增函数。符号上,  $\hat{f}(\uparrow, \downarrow)$ 。

以下是几个常见的数值通量 [10]

- Lax-Friedrichs flux

$$\hat{f}^{LF}(u^-, u^+) = \frac{1}{2} (f(u^-) + f(u^+) - \alpha(u^+ - u^-)), \quad \alpha = \max_u |f'(u)| \quad (3.2.4)$$

- Local Lax-Friedrichs:

$$h^{LLF}(a, b) = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - \beta(b - a)], \quad \beta = \max_{\min(a,b) \leq u \leq \max(a,b)} |f'(u)| \quad (3.2.5)$$

For convex  $f, f'' \geq 0$ , one has  $\beta = \max(|f'(a)|, |f'(b)|)$

- Godunov flux

$$\hat{f}^{God}(u^-, u^+) = \begin{cases} \min_{u^- \leq u \leq u^+} f(u), & \text{if } u^- < u^+, \\ \max_{u^+ \leq u \leq u^-} f(u), & \text{if } u^- \geq u^+ \end{cases} \quad (3.2.6)$$

- Engquist-Osher flux

$$\hat{f}^{EO} = \int_0^{u^-} \max(f'(u), 0) du + \int_0^{u^+} \min(f'(u), 0) du + f(0) \quad (3.2.7)$$

## 4 一维向量

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \quad (4.0.1)$$

数值通量为:

## 5 二维向量

### 5.1 控制方程

$$\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (5.1.1)$$

### 5.2 空间离散格式

在每个小区间上做二维积分:

$$\frac{d}{dt} \int_K u_h(t, x) v_h(x) dx + \int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(u_h(t, x)) v_h(x) dx = 0, \forall v_h \in V_h \quad (5.2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_K u(x, t) v(x) dx + \sum_{e \in \partial K} \int_e \mathbf{f}(u(x, t)) \cdot n_{e,K} v(x) d\Gamma - \int_K \mathbf{f}(u(x, t)) \cdot \operatorname{grad} v(x) dx = 0 \quad (5.2.2)$$

**Remark 2.** 特别的, 对于矩形网格, 有:

其中  $n_{e,K}$  是边界  $e$  的标准外法向量。由于函数在小区间边界上间断  $f(u)$  在  $e$  上没有定义，和一维的情况类似，需要使用数值通量  $h_{e,K}(u_h(t, x^{\text{int}(K)}), u_h(t, x^{\text{ext}(K)}))$  代替  $\mathbf{f}(u_h(t, x)) \cdot \mathbf{n}_{e,K}$ ，其中：

$$\begin{aligned} u_h(t, x^{\text{int}(K)}) &= \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in K}} u_h(t, y), \\ u_h(t, x^{\text{ext}(K)}) &= \begin{cases} \gamma_h(x, t), & \text{if } x \in \partial\Omega, \\ \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in (K)^c}} u_h(t, y), & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$h_{e,K}(a, b) = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(a) \cdot n_{e,K} + \mathbf{f}(b) \cdot n_{e,K} - \alpha_{e,K}(b - a)]. \quad (5.2.4)$$

## 6 指示子

指示子英文为 indicator。限制器的一个重要组成部分是指示子，指示子可以找出存在强间断的小区间。

### 6.1 TVB 指示子

1、基于 minmod 函数的 TVB 限制器 [6] (简称 TVB)

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i^{(0)} + \tilde{u}_i, \quad u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i^{(0)} - \tilde{u}_i \quad (6.1.1)$$

我们可以看到

$$\tilde{u}_i = \sum_{l=1}^k u_i^{(l)} v_l^{(i)}(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad \tilde{u}_i = - \sum_{l=1}^k u_i^{(l)} v_l^{(i)}(x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (6.1.2)$$

$$\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = m(\tilde{u}_j, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}), \quad \tilde{u}^{(\text{mod})} = m(\tilde{u}_j, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}), \quad (6.1.3)$$

其中

$$m(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_1| \leq Mh^2 \\ s \cdot \min_{1 \leq j \leq n} |a_j| & \text{if } \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2) = \dots = \text{sign}(a_n) = s, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.1.4)$$

### 6.2 KXRCF 指示子

KXRCF 指示子利用了 DG 方法的超收敛性 [18]，把小单元  $I_{i,j}$  的边界  $\partial I_{i,j}$  分成  $\partial I_{i,j}^-, \partial I_{i,j}^+$  两部分，分别对应流体流入和流出  $I_{i,j}$  的边界。

$$\frac{\left| \int_{\partial I_{i,j}^-} (u_h(x, y, t)|_{I_{i,j}} - u_h(x, y, t)|_{I_l}) ds \right|}{h_{i,j}^R |\partial I_{i,j}^-| \cdot || \widehat{u}_h(x, y, t)|_{\partial I_{i,j}} ||} \geq C_k, \quad (6.2.1)$$

其中， $R = 1$  当  $k = 1$ ， $R = 1.5$  当  $k > 1$ 。  $h_{i,j}$  为  $I_{i,j}$  外接圆的半径。  $C_k$  为常数，一般可取  $C_k = 1$ 。  $I_l$  为  $I_{i,j}$  在  $\partial I_{i,j}^-$  一侧的相邻单元。  $u_h$  可取守恒量，或者由守恒量引申出的物理量，  $|| \widehat{u}_h(x, y, t)|_{\partial I_{i,j}} ||$  为  $|\widehat{u}_h(x, y, t)|_{\partial I_{i,j}}$  在  $\partial I_{i,j}$  上的最大值。  $|\partial I_{i,j}^-|$  为  $\partial I_{i,j}^-$  的长度。

## 7 限制器

### 7.1 TVB 限制器

### 7.2 WENO-JS 限制器

WENO 全称为 Weighted Essentially Non-Oscillatory。WENO 限制器的思想是：使用周围的小区间上守恒量的平均值来重构当前小区间的函数，再使用得到的新函数来修正原高阶自由度，从而达到修正限制的目的。下面我们简单介绍 WENO 限制器在一维标量方程上的使用方法，一维系统的情况请参阅 [23]。

**Step 1:** 首先我们在 Gauss 或 Gauss-Lobatto 积分点处重构  $u$  的点值。对于基于  $\mathbb{P}^k$  的 DG (精度为  $(k+1)$  阶)，我们需要一个至少精确到  $O(h^{2k+2})$  的 Gauss 或 Gauss-Lobatto 积分规则，而 WENO 重构的精度必须至少为  $2k+1$ 。为此，我们需要使用相邻的  $2k+1$  个单元  $I_{i-k} \cdots I_{i+k}$  的单元平均值来重构  $u$  的点值。

**Step 1.1.** 我们确定  $k+1$  个小的模板  $S_j$ ，其中  $j = 0, 1, \dots, k$ ，使得  $I_i$  属于每个模板。记  $S_j = \cup_{l=0}^k I_{i+j-l}$ 。我们用  $\mathcal{T} = \cup_{j=0}^k S_j$  表示包含所有  $k+1$  个小模板的大模板。在每个模板  $S_j, j = 0, \dots, k$  构造一个  $k$  次多项式重构  $p_j(x)$ ，使得每个模板  $S_j$  中每个单元格中  $p_j(x)$  的平均值与给定的  $u$  的单元格平均值相符，即

$$\frac{1}{\Delta x_{i+j-l}} \int_{I_{i+j-l}} p_j(x) dx = u_{i+j-l}^{(0)}, \quad l = 0, \dots, k. \quad (7.2.1)$$

在更大的模板  $\mathcal{T}$  上，我们再重构一个  $2k$  次多项式  $Q(x)$ ，使得

$$\frac{1}{\Delta x_{i+l}} \int_{I_{i+l}} Q(x) dx = u_{i+l}^{(0)}, \quad l = -k, \dots, k. \quad (7.2.2)$$

关于  $p_j(x)$  和  $Q(x)$  的构造细节可以在文献 [7] 中找到。

**Step 1.2.** 我们找到组合系数，也称为线性权重，记为  $\gamma_0, \dots, \gamma_k$ ，满足

$$Q(x_G) = \sum_{j=0}^k \gamma_j p_j(x_G) \quad (7.2.3)$$

其中  $x_G$  是 Gauss 积分点。不同的积分点对应不同的线性权重。

**Step 1.3.** 我们计算每个权重组  $S_j$  的平滑度指示器，表示  $p_j(x)$  在目标单元  $I_i$  中的平滑程度。平滑度指示器  $\beta_j$  越小，函数  $p_j(x)$  在目标单元中的平滑度就越高，我们使用以下平滑度指示器：

$$\beta_j = \sum_{l=1}^k \int_{I_i} \Delta x_i^{2l-1} \left( \frac{\partial^l}{\partial x^l} p_j(x) \right)^2 dx \quad (7.2.4)$$

**Step 1.4.** 我们基于平滑度指示器计算非线性权重，

$$\omega_j = \frac{\bar{\omega}_j}{\sum_l \bar{\omega}_l}, \quad \bar{\omega}_j = \frac{\gamma_j}{(\varepsilon + \beta_j)^2}, \quad (7.2.5)$$

其中， $\gamma_j$  是在 **Step 1.2.** 中确定的线性权重， $\varepsilon$  是一个很小的数，用于避免分母为零。在本文中，我们在所有计算中使用  $\varepsilon = 10^{-6}$ 。最终的 WENO 近似为：

$$u(x_G) \approx \sum_{j=0}^k \omega_j p_j(x_G) \quad (7.2.6)$$

**Step 2:** 基于在 Gauss 积分点  $x_G$  上重构的点值  $u(x_G)$  和数值积分, 我们得到重构函数的高阶自由度:

$$u_i^{(l)} = \frac{1}{||v_l^{(j)}||^2} \sum_G w_G u(x_G) v_l^{(i)}(x_G), \quad l = 1, \dots, k \quad (7.2.7)$$

其中,  $w_G$  是 Gauss 积分点  $x_G$  对应的高斯积分权重。

### 7.3 WENO-M

$$g_k(\omega) = \frac{\omega(\bar{\omega}_k + \bar{\omega}_k^2 - 3\bar{\omega}_k\omega + \omega^2)}{\bar{\omega}_k^2 + \omega(1 - 2\bar{\omega}_k)} \quad (7.3.1)$$

$$\alpha_k^* = g_k(\omega_k^{(JS)}) \quad (7.3.2)$$

$$\omega_k^{(M)} = \frac{\alpha_k^*}{\sum_{i=0}^2 \alpha_i^*} \quad (7.3.3)$$

### 7.4 WENO-Z

$$\tau_5 = |\beta_0 - \beta_2| \quad (7.4.1)$$

$$\beta_k^z = \left( \frac{\beta_k + \epsilon}{\beta_k + \tau_5 + \epsilon} \right), \quad k = 0, 1, 2 \quad (7.4.2)$$

$$\omega_k^z = \frac{\alpha_k^z}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^z}, \quad \alpha_k^z = \frac{d_k}{\beta_k^z} = d_k \left( 1 + \frac{\tau_5}{\beta_k + \epsilon} \right), \quad k = 0, 1, 2 \quad (7.4.3)$$

### 7.5 MR-WENO 限制器

**Step 1:** 1

**Step 1.1.** 在有问题的单元  $I_j$  上定义一系列不同次数的多项式。我们构造多项式  $q_\ell(x), \ell = 0, \dots, k$ , 满足以下条件:

$$\int_{I_j} q_\ell(x) v_l^j(x) dx = \int_{I_j} u_h(x) v_l^j(x, y) dx, \quad l = 0, 1, \dots, \ell. \quad (7.5.1)$$

**Remark 3.** 如果我们采用规范正交基  $v_l^{(0)}(x)$ , 那么不同的多项式  $q_\ell(x), \ell = 0, 1, \dots, k$  的构造非常简单。在这种情况下, 我们可以直接得到多项式

$$q_\ell(x) = \sum_{l=0}^{\ell} u_j^{(l)}(t) v_l^{(j)}(x), \quad \ell = 0, 1, \dots, k. \quad (7.5.2)$$

**Step 1.2.** 我们通过以下方式构造多项式  $p_{\ell, \ell}(x), p_{\ell, \ell+1}(x) = 1, \dots, k$

$$p_{\ell, \ell}(x) = \frac{1}{\gamma_{\ell, \ell}} q_\ell(x) - \frac{\gamma_{\ell-1, \ell}}{\gamma_{\ell, \ell}} p_{\ell-1, \ell}(x), \quad \ell = 1, \dots, k, \quad (7.5.3)$$

$$p_{\ell, \ell+1}(x) = \omega_{\ell, \ell} p_{\ell, \ell}(x) + \omega_{\ell-1, \ell} p_{\ell-1, \ell}(x), \quad \ell = 1, \dots, k-1 \quad (7.5.4)$$



这些表达式中,  $\gamma_{\ell-1,\ell}$  和  $\gamma_{\ell,\ell}$  是线性权重, 要求  $\gamma_{\ell-1,\ell} + \gamma_{\ell,\ell} = 1$ , 且  $\gamma_{\ell-1,\ell}, \gamma_{\ell,\ell} > 0$ . 由于对于平滑解来说, 高阶解通常是最好的, 因此我们给予高阶多项式更高的线性权重, 基于低阶多项式更小的线性权重. 即:

$$\gamma_{\ell,\ell} \gg \gamma_{\ell-1,\ell} \quad (7.5.5)$$

当比值  $\frac{\gamma_{\ell,\ell}}{\gamma_{\ell-1,\ell}}$  的值较小时, 可以在不连续性上获得更好的结果, 而当值较大时, 通常对于平滑解更好. 在我们的数值测试中, 我们取

$$\gamma_{\ell-1,\ell} = 0.01, \quad \gamma_{\ell,\ell} = 0.99, \quad \ell = 1, \dots, k \quad (7.5.6)$$

这可以在平滑区域中保持原始的高阶, 在所有数值例子中都可以保持基本上非振荡的冲击过渡。

$\omega_{\ell-1,\ell}$  和  $\omega_{\ell,\ell}$  是非线性权重 (稍后将准确地介绍)。

**Step 1.3.** 计算光滑指示器  $\beta_{\ell,\ell_2}$ , 其衡量了  $p_{\ell,\ell_2}(x, y)$  for  $\ell = \ell_2 - 1, \ell_2; \ell_2 = 1, 2, 3, 4$  在小区间  $I_j$  上的光滑程度. 具体来说:  $\beta_{\ell,\ell_2}$  越小, 说明  $p_{\ell,\ell_2}(x, y)$  在  $I_j$  上越光滑。

$$\beta_{\ell_1,\ell_2} = \sum_{l=1}^k \int_{I_i} \Delta x_i^{2l-1} \left( \frac{\partial^l}{\partial x^l} p_{\ell_1,\ell_2}(x) \right)^2 dx \quad (7.5.7)$$

由于  $p_{0,1}(x)$  是一个常值函数,  $p'_{0,1}(x) = 0$ , 因此无法使用统一的(7.5.7)式来衡量其光滑程度, 因此我们为  $p_{0,1}(x)$  设计了其独有的限制器:

定义线性函数  $q_{0,1}(x), q_{0,2}(x)$  满足:

$$\begin{aligned} \int_{I_{j-1}} q_{0,1}(x) v_l^{(j-1)}(x) dx &= \int_{I_{j-1}} u_h(x) v_l^{(j-1)} dx, \quad l = 0, 1, \dots, k \\ \int_{I_{j+1}} q_{0,1}(x) v_l^{(j+1)}(x) dx &= \int_{I_{j+1}} u_h(x) v_l^{(j+1)} dx, \quad l = 0, 1, \dots, k \end{aligned} \quad (7.5.8)$$

再构造  $\varsigma_1, \varsigma_2$ , 其定义如下:

$$\varsigma_1 = \int_{I_j} \left( \frac{d}{dx} q_{0,1} \right)^2 dx, \quad \varsigma_2 = \int_{I_j} \left( \frac{d}{dx} q_{0,2} \right)^2 dx \quad (7.5.9)$$

$\beta_{0,1}$  定义取  $\varsigma_1, \varsigma_2$  的最小值:

$$\beta_{0,1} = \min\{\varsigma_1, \varsigma_2\}. \quad (7.5.10)$$

**Step 1.4.** 基于线性权重和光滑性指标计算非线性权重. 我们采用文献 [4] 中所示的 WENO-Z 的做法,  $\tau_{\ell_2}$  定义如下:

$$\tau_{\ell_2} = (\beta_{\ell_2,\ell_2} - \beta_{\ell_2-1,\ell_2})^2 \quad (7.5.11)$$

$$\omega_{\ell_1,\ell_2} = \frac{\bar{\omega}_{\ell_1,\ell_2}}{\sum_{\ell=\ell_2-1}^{\ell_2} \bar{\omega}_{\ell,\ell_2}}, \quad \bar{\omega}_{\ell_1,\ell_2} = \gamma_{\ell_1,\ell_2} \left( 1 + \frac{\tau_{\ell_2}}{\epsilon + \beta_{\ell_1,\ell_2}} \right) \quad (7.5.12)$$

得到最终的拟合函数:

$$p^{\text{new}}(x) = \sum_{\ell=\ell_2-1}^{\ell_2} \omega_{\ell,\ell_2} p_{\ell,\ell_2}(x), \quad \ell_2 = 1, 2, 3, 4, \quad (7.5.13)$$

$$u_j^{(l)}(t) = \frac{1}{\|v_l^{(j)}\|^2} \int_{I_j} u(x, t) v_l^{(j)}(x) dx, \quad l = 0, 1, \dots, k. \quad (7.5.14)$$

## Step 2: 修正高阶矩

**Remark 4.** 如果不修正线性权重, 那么最终会得到  $p^{new}(x) = p^{old}(x)$ .

$$\begin{aligned} p^{new}(x) &= \gamma_{l_1, l_2} p_{l_1, l_2}(x) + \gamma_{l_2, l_2} p_{l_2, l_2}(x) \\ &= \gamma_{l_1, l_2} p_{l_1, l_2}(x) + \gamma_{l_2, l_2} \left( \frac{1}{\gamma_{l_2, l_2}} q_{l_2}(x) - \frac{\gamma_{l_1, l_2}}{\gamma_{l_2, l_2}} p_{l_1, l_2}(x) \right) \\ &= q_{l_2}(x) = p^{old}(x) \end{aligned} \quad (7.5.15)$$

$$\beta_{\ell, \ell_2} = \sum_{|\alpha|=1}^{\kappa} \int (\Delta x_i \Delta y_j)^{|\alpha|-1} \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} p_{\ell, \ell_2}(x, y) \right)^2 dx dy \quad (7.5.16)$$

特别的:

$$\begin{aligned} p_{01} &= q_0 \\ p_{11} &= \frac{1}{\gamma_{11}} q_1 - \frac{\gamma_{01}}{\gamma_{11}} p_{01} \\ p_{12} &= \omega_{11} p_{11} + \omega_{01} p_{0,1} \\ p_{22} &= \frac{1}{\gamma_{22}} q_2 - \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} p_{12} \end{aligned} \quad (7.5.17)$$

$$\begin{aligned} p^{\text{MR-WENO2}}(x, y, z) &= \omega_{0,1} p_{0,1}(x, y, z) + \omega_{1,1} p_{1,1}(x, y, z), \\ p^{\text{MR-WENO3}}(x, y, z) &= \omega_{1,2} p^{\text{MR-WENO2}}(x, y, z) + \omega_{2,2} p_{2,2}(x, y, z) \end{aligned} \quad (7.5.18)$$

## 8 保极值限制器

标量守恒性方程

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{F}(u) = 0 \quad \text{and} \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad (8.0.1)$$

一个很重要的性质就是它满足最大值原则。具体来说, 如果  $M = \max_x u_0(x), m = \min_x u_0(x)$ , 那么  $u(x, t) \in [m, M]$ . 对任意的  $x, t$  都满足。所以, 我们也希望数值解也满足这个性质。因为在一些情况下, 超出了这个范围, 就会得到无物理意义的解。比如负密度, 或者负百分比, 或者某个多组分混合物中某个组分的百分比大于一。

这样的限制器在多项流问题中尤为重要。

对于 DG 中的数值解  $u_h$ , 它可以写成

$$u_h = \overline{u_h} + (u_h - \overline{u_h}) \quad (8.0.2)$$

首先, 可以证明, 当  $\Delta t$  充分小时,  $\overline{u_h} \in [m, M]$ ,

**Theorem 1.** 对于格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left[ \hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n, u_j^n) \right] \quad (8.0.3)$$

其中  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ,  $h$  是全局  $L$ - $F$  通量 (*Lax-Friedrichs*, *Godunov* 好像也可以):

$$h(u, v) = \frac{1}{2} [f(u) + f(v) - a(u - v)], \quad a = \max_u |f'(u)| \quad (8.0.4)$$

如果满足  $CFL$  条件  $\lambda a \leq 1$ , 且  $u_j^n \in [m, M], \forall j$ , 则  $u_{j+1}^n \in [m, M], \forall j$ 。

证明. 记  $H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^n - \lambda [h(u_j^n, u_{j+1}^n) - h(u_{j-1}^n, u_j^n)]$ , 则  $H(u, u, u) = u$ . 把  $H$  完全展开得:

$$\begin{aligned} H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) &= u_j^n - \lambda [h(u_j^n, u_{j+1}^n) - h(u_{j-1}^n, u_j^n)] \\ &= u_j^n - \frac{\lambda}{2} [f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n) - a(u_{j+1}^n - u_j^n) - f(u_{j-1}^n) - f(u_j^n) + a(u_j^n - u_{j-1}^n)] \quad (8.0.5) \\ &= (1 - \lambda a)u_j^n + \frac{\lambda}{2} [au_{j+1}^n - f(u_{j+1}^n)] + \frac{\lambda}{2} [au_{j-1}^n - f(u_{j-1}^n)] \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{cases} H_b(b, c, d) = \frac{\lambda}{2} (a - f'(b)) \geq 0 \\ H_d(b, c, d) = \frac{\lambda}{2} (a - f'(d)) \geq 0 \\ H_c(b, c, d) = 1 - \lambda a \geq 0 \end{cases} \quad (8.0.6)$$

因此  $H$  对三个变量都是单调增加的, 即  $H(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$ , 从而

$$m = H(m, m, m) \leq H(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \leq H(M, M, M) = M \quad (8.0.7)$$

□

**Theorem 2.** 设  $x_{j-1/2} = \hat{x}_j^1 < \hat{x}_j^2 < \dots < \hat{x}_j^N = x_{j+1/2}$ , 其中  $\hat{x}_j$  是 Gauss-Lobatto 积分点, 满足  $2N-3 \geq k$ ,  $k$  是近似多项式的次数。记  $\hat{v}_\alpha := p_j(\hat{x}_j^\alpha)$ , 特别的, 记  $\hat{v}_0 = u_{j-1/2}^-, \hat{v}_{N+1} = u_{j+1/2}^+$   $\hat{\omega}_\alpha$  是对应的权重, 满足  $\hat{\omega}_1 + \dots + \hat{\omega}_N = 1$ 。如果格式满足 CFL 条件

$$\lambda a \leq \min_{\alpha} \hat{\omega}_\alpha \quad (8.0.8)$$

那么, 只要所有的  $\hat{v}_\alpha \in [m, M]$  且  $\bar{u}_j^n \in [m, M]$ , 就有  $\bar{u}_{j+1}^n \in [m, M]$ 。

证明.

$$\bar{u}_j^{\text{new}} = \bar{u}_j - \lambda [h(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+) - h(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+)] \quad (8.0.9)$$

我们有

$$\begin{aligned} h(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+) - h(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+) &= h(\hat{v}_N, \hat{v}_{N+1}) - h(\hat{v}_0, \hat{v}_1) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N h(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_{\alpha+1}) - h(\hat{v}_{\alpha-1}, \hat{v}_\alpha) \end{aligned} \quad (8.0.10)$$

而单元平均值满足  $\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} p_j(x) dx = \sum_{\alpha=1}^N \hat{\omega}_\alpha \hat{v}_\alpha$ , 于是

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j+1}^n &= \bar{u}_j^n - \lambda [h(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+) - h(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \hat{\omega}_\alpha \hat{v}_\alpha - \lambda \sum_{\alpha=1}^N [h(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_{\alpha+1}) - h(\hat{v}_{\alpha-1}, \hat{v}_\alpha)] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \{ \hat{\omega}_\alpha \hat{v}_\alpha - \lambda [h(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_{\alpha+1}) - h(\hat{v}_{\alpha-1}, \hat{v}_\alpha)] \} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \hat{\omega}_\alpha \left\{ \hat{v}_\alpha - \frac{\lambda}{\hat{\omega}_\alpha} [h(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_{\alpha+1}) - h(\hat{v}_{\alpha-1}, \hat{v}_\alpha)] \right\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \hat{\omega}_\alpha H_j^\alpha \end{aligned} \quad (8.0.11)$$

其中  $H_j^\alpha = \hat{v}_\alpha - \frac{\lambda}{\hat{\omega}_\alpha} [h(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_{\alpha+1}) - h(\hat{v}_{\alpha-1}, \hat{v}_\alpha)]$ 。则根据已知条件, 所有的  $\hat{v}_\alpha \in [m, M]$   $\lambda a \leq \hat{\omega}_\alpha$ , 即  $\frac{\lambda}{\hat{\omega}_\alpha} a \leq 1$ , 因此根据 Lemma 1 有  $H_j^\alpha \in [m, M]$ , 从而可得  $\bar{u}_j^{n+1} \in [m, M]$ , 因为  $\bar{u}_j^{n+1}$  就是这些  $H_j^\alpha$  的一个凸组合。□

此外, 对于  $(u_h - \bar{u}_h)$ , 可以乘一个权重  $\theta$ , 使得最终得到的数值解  $u_h^{\text{new}}$  也满足极值原则。

$$u_h^{\text{new}} = \bar{u}_h + \theta(u_h - \bar{u}_h) \quad (8.0.12)$$

$$\theta = \min \left\{ \left| \frac{M - \bar{u}_j^n}{M_j - \bar{u}_j^n} \right|, \left| \frac{m - \bar{u}_j^n}{m_j - \bar{u}_j^n} \right|, 1 \right\} \quad (8.0.13)$$

$$M_j = \max_{x \in I_j} p_j(x) \quad \text{and} \quad m_j = \min_{x \in I_j} p_j(x) \quad (8.0.14)$$

## A 边界条件

### A.1 周期性边界条件

### A.2 冯诺依曼边界条件

## B 数学符号

### B.1 散度

在三维直角坐标系  $xyz$  中，设向量场  $\mathbf{A}$  的表示为  $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}$  其中的  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  分别是  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴方向上的单位向量，场的分量  $A_x, A_y, A_z$  具有一阶连续偏导数，那么向量场  $\mathbf{A}$  的散度就是：

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{B.1.1})$$

### B.2 梯度

$\nabla f$  在三维直角坐标系中表示为

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{B.2.1})$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为标准的单位向量，分别指向  $x, y$  跟  $z$  坐标的方向。

### B.3 范数

范数（norm）是一个函数，它将一个向量映射到非负实数。在机器学习和优化中，范数是一种衡量向量大小或长度的方式。

L1, L2 和 L 无穷范数是线性代数中的三种不同的向量范数（或向量长度度量），它们在数学和数据科学领域中经常使用。

**L1 范数：**L1 范数也称为曼哈顿距离，它是一个向量中每个元素的绝对值之和。对于一个  $n$  维向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，其 L1 范数定义如下：

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad (\text{B.3.1})$$

**L2 范数：**L2 范数也称为欧几里得距离，它是向量中每个元素平方和的平方根。对于一个  $n$  维向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，其 L2 范数定义如下：

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (\text{B.3.2})$$

**$L_\infty$  范数：** $L_\infty$  范数也称为最大值范数，它是向量中所有元素的绝对值中最大的值。对于一个  $n$  维向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，其  $L_\infty$  定义如下：

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad (\text{B.3.3})$$

这些向量范数在机器学习和优化算法中经常使用，例如 L1 和 L2 正则化（用于缩小模型参数），L1 和 L2 距离度量（用于计算相似性或距离），以及 L1 和 L2 约束（用于限制变量的取值范围）。

## C 控制方程

### C.1 一维方程

#### C.1.1 欧拉方程

方程形式

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.1})$$

或

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{1}{2}(3-\gamma)\frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma-1)u_3 \\ \gamma\frac{u_2}{u_1}u_3 - \frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{u_2^3}{u_1^2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.2})$$

这里  $\rho$  为密度,  $p$  为压力,  $u$  为粒子速度,  $E$  为每单位体积的总能量。

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma-1} \quad (\text{C.1.3})$$

对于空气, 一般可取  $\gamma = 1.4$ . 声速  $a$  的表达式为:

$$a = \sqrt{(p/\rho^2 - e_p)/e_p} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (\text{C.1.4})$$

特征分析 Jacobian 矩阵为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \partial f_1 / \partial u_2 & \partial f_1 / \partial u_3 \\ \partial f_2 / \partial u_1 & \partial f_2 / \partial u_2 & \partial f_2 / \partial u_3 \\ \partial f_3 / \partial u_1 & \partial f_3 / \partial u_2 & \partial f_3 / \partial u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.5})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma-3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3-\gamma)\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & \gamma-1 \\ -\frac{\gamma u_2 u_3}{u_1^2} + (\gamma-1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 & \frac{\gamma u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma-1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.6})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(3-\gamma)u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ -\gamma\frac{Eu}{\rho} + (\gamma-1)u^3 & \gamma\frac{E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.7})$$

$\mathbf{A}(\mathbf{U})$  的特征值为:

$$\lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + a \quad (\text{C.1.8})$$

左右特征向量为 [28]:

$$L_j(u) = \begin{pmatrix} \frac{B_2 + \mu/c}{2} & -\frac{B_1\mu + 1/c}{2} & \frac{B_1}{2} \\ 1 - B_2 & B_1\mu & -B_1 \\ \frac{B_2 - \mu/c}{2} & -\frac{B_1\mu - 1/c}{2} & \frac{B_1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1.9})$$

$$R_j(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu - c & \mu & \mu + c \\ H - c\mu & \mu^2/2 & H + c\mu \end{pmatrix} \quad (\text{C.1.10})$$

where  $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ ,  $B_1 = (\gamma - 1)/c^2$ ,  $B_2 = B_1\mu^2/2$  and  $H = (E + p)/\rho$ . 对应的右特征向量为:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} \quad (\text{C.1.11})$$

其中  $H$  为总比焓 (total specific enthalpy),  $h$  为比焓 (specific enthalpy).

$$H = (E + p)/\rho \equiv \frac{1}{2}u^2 + h, \quad h = e + p/\rho \quad (\text{C.1.12})$$

## 算例

### Example 1.

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= 1 + 0.2 \sin \pi x \\ u(x, 0) &= 0.7 \\ p(x, 0) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.1.13})$$

计算区域为  $[0, 2]$ , 周期边界条件, 解析解为:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= 1 + 0.2 \sin \pi(x - 0.7t) \\ u(x, t) &= 0.7 \\ p(x, t) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.1.14})$$

### Example 2. Lax 激波管问题 [30]:

$$\begin{aligned} (\rho, v, p) &= (0.445, 0.698, 3.528) & \text{当 } x \leq 0, \\ (\rho, v, p) &= (0.5, 0, 0.571) & \text{当 } x > 0. \end{aligned} \quad (\text{C.1.15})$$

计算区域为  $[-5, 5]$  两端均是常数边界条件, 我们求解该问题至  $T = 1.3$ .

### Example 3. Shu Osher 问题 [30],

$$\begin{aligned} (\rho, v, p) &= (3.857143, 2.629369, 10.333333) & \text{当 } x \leq -4, \\ (\rho, v, p) &= (1 + \varepsilon \sin(5x), 0, 1) & \text{当 } x > -4. \end{aligned} \quad (\text{C.1.16})$$

选取  $\varepsilon = 0.2$ , 计算区域为  $[-5, 5]$ , 两端边界条件按初值条件给定后保持不变, 求解至时间  $T = 1.8$

## C.2 二维方程

### C.2.1 欧拉方程

方程形式

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.1})$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.2})$$

其中

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (\text{C.2.3})$$

同时

$$F = \begin{bmatrix} \frac{u_2}{u_1} + (\gamma - 1)u_4 + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ \frac{u_2}{u_1} \left( \gamma u_4 + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \right) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \frac{u_3}{u_1} \\ \frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma - 1)u_4 + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \\ \frac{u_3}{u_1} \left( \gamma u_4 + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.4})$$

特征分析 特征值为

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = u, \quad \lambda_4 = u + a \quad (\text{C.2.5})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma(u_2 - 3)^2 + (\gamma - 1)u_3^2}{2u_1^2} & -(\gamma - 3)\frac{u_2}{u_1} & -(\gamma - 1)\frac{u_3}{u_1} & \gamma - 1 \\ -\frac{u_2 u_3}{u_1^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} & 0 \\ \frac{u_2}{u_1} \frac{((\gamma - 1)(u_2^2 + u_3^2) - \gamma u_1 u_4)}{u_1^2} & \frac{3u_2^2 - \gamma u_3^2 - 3\gamma u_2^2 + u_3^2 + 2\gamma u_1 u_4}{2u_1^2} & -\frac{u_2 u_3(\gamma - 1)}{u_1^2} & \frac{\gamma u_2}{u_1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.6})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2 u_3}{u_1^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} & 0 \\ \frac{\gamma u_2^2 + \gamma u_3^2 - u_2^2 - 3u_3^2}{2u_1^2} & -\frac{u_2(\gamma - 1)}{u_1} & -\frac{u_3(\gamma - 3)}{u_1} & \gamma - 1 \\ \frac{u_3}{u_1} \frac{((\gamma - 1)(u_2^2 + u_3^2) - \gamma u_1 u_4)}{u_1^2} & -(\gamma - 1)\frac{u_2 u_3}{u_1^2} & \frac{(1 - \gamma)u_2^2 + 3(1 - \gamma)u_3^2 + 2\gamma u_1 u_4}{2u_1^2} & \frac{\gamma u_3}{u_1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.7})$$

$$F_U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathbf{V}^2 & (3 - \gamma)u & -(\gamma - 1)v & \gamma - 1 \\ -uv & v & u & 0 \\ u \left[ \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathbf{V}^2 - H \right] & H - (\gamma - 1)u^2 & -(\gamma - 1)uv & \gamma u \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2.8})$$

其中  $\mathbf{V}^2 = v^2 + u^2$ ,



左右特征向量为 [28]:

$$L_{ij}^x(u) = \begin{bmatrix} \frac{B_2 + \mu/c}{2} & -\frac{B_1\mu + 1/c}{2} & -\frac{B_1v}{2} & \frac{B_1}{2} \\ v & 0 & -1 & 0 \\ 1 - B_2 & B_1\mu & B_1v & -B_1 \\ \frac{B_2 - \mu/c}{2} & -\frac{B_1\mu - 1/c}{2} & -\frac{B_1v}{2} & \frac{B_1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_{ij}^x(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mu - c & 0 & \mu & \mu + c \\ v & -1 & v & v \\ H - c\mu & -v & \frac{\mu^2 + v^2}{2} & H + c\mu \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.9})$$

$$L_{ij}^y(u) = \begin{bmatrix} \frac{B_2 + v/c}{2} & -\frac{B_1\mu}{2} & -\frac{B_1v + 1/c}{2} & \frac{B_1}{2} \\ -\mu & 1 & 0 & 0 \\ 1 - B_2 & B_1\mu & B_1v & -B_1 \\ \frac{B_2 - v/c}{2} & -\frac{B_1\mu}{2} & -\frac{B_1v - 1/c}{2} & \frac{B_1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_{ij}^y(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mu & 1 & \mu & \mu \\ v - c & 0 & v & v + c \\ H - cv & \mu & \frac{\mu^2 + v^2}{2} & H + cv \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.10})$$

where  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ ,  $B_1 = (\gamma - 1)/c^2$ ,  $B_2 = B_1(\mu^2 + v^2)/2$  and  $H = (E + p)/\rho$

## 算例

**Example 4.** 光滑问题: 初值为:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, 0) &= 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)) \\ u(x, y, 0) &= 0.7 \\ v(x, y, 0) &= 0.3 \\ p(x, y, 0) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.2.11})$$

周期边界条件

准确解为:

$$\rho(x, y, t) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y - (u + v)t)), u = 0.7, v = 0.3, p = 1 \quad (\text{C.2.12})$$

**Example 5.** 二维黎曼问题 [26], 初值为

$$\begin{cases} (\rho_1, p_1, \mu_1, v_1)^T = (0.5313, 0.4, 0, 0)^T, & x > 1, y > 1, \\ (\rho_2, p_2, \mu_2, v_2)^T = (1, 1, 0, 0.7276)^T, & x > 1, y < 1, \\ (\rho_3, p_3, \mu_3, v_3)^T = (1, 1, 0.7276, 0)^T, & x < 1, y > 1, \\ (\rho_4, p_4, \mu_4, v_4)^T = (0.8, 1, 0, 0)^T, & x < 1, y < 1 \end{cases} \quad (\text{C.2.13})$$

$p_1 < p_2 = p_3 = p_4$ 。滑移边界条件。建议计算至  $t = 0.52$ , 网格为  $260 * 260$ 。

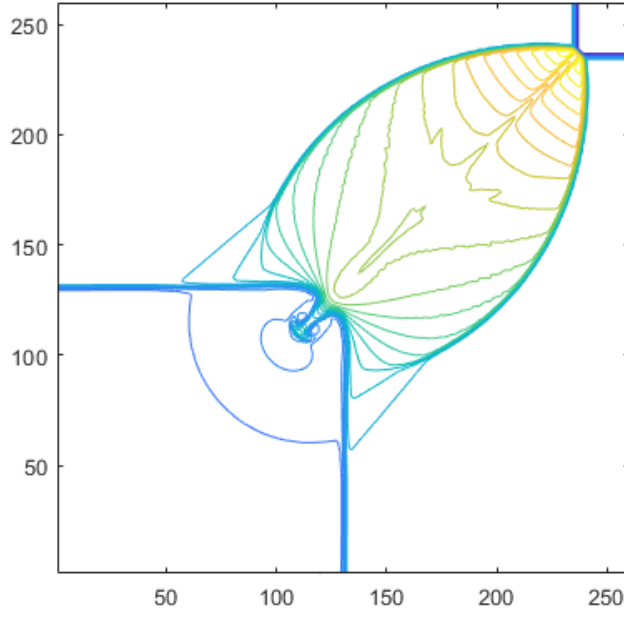


图 2: 网格密度 260x260, 间断有限元方法, TVB 指示子, M=50, WENO-M

## D 基函数函数

[29]

### D.1 一维

在  $[-1, 1]$  上的勒让德函数为:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(\xi) &= 1 \\
 \varphi_1(\xi) &= \xi \\
 \varphi_2(\xi) &= (3\xi^2 - 1) / 2 \\
 \varphi_3(\xi) &= (5\xi^3 - 3\xi) / 2 \\
 \varphi_4(\xi) &= (35\xi^4 - 30\xi^2 + 3) / 8
 \end{aligned} \tag{D.1.1}$$

积分值为:

$$\int_{-1}^{-1} \varphi_i^2 dx = \frac{2}{2n+1}, n = 0, 1, 2, \dots \tag{D.1.2}$$

## D.2 二维

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\xi, \eta) &= 1 \\
\varphi_2(\xi, \eta) &= \xi \\
\varphi_3(\xi, \eta) &= \eta \\
\varphi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (3\xi^2 - 1) \\
\varphi_5(\xi, \eta) &= \varphi_2 \cdot \varphi_3 = \xi \cdot \eta \\
\varphi_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (3\eta^2 - 1) \\
\varphi_7(\xi, \eta) &= (5\xi^3 - 3\xi) / 2 \\
\varphi_8(\xi, \eta) &= \varphi_4 \cdot \varphi_3 = \frac{1}{2} (3\xi^2 - 1) \cdot \eta \\
\varphi_9(\xi, \eta) &= \varphi_6 \cdot \varphi_2 = \frac{1}{2} (3\eta^2 - 1) \cdot \xi \\
\varphi_{10}(\xi, \eta) &= (5\eta^3 - 3\eta) / 2
\end{aligned} \tag{D.2.1}$$

## E 龙格库塔法

$\Delta t$  的取值大小要求为: [30]

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \text{CFL} \tag{E.0.1}$$

即:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\alpha} \text{CFL} \tag{E.0.2}$$

对于二维情况,

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\alpha} \text{CFL} \tag{E.0.3}$$

### E.1 ssp 二阶龙格库塔法

ssp(strong stability-preserving) 方法见: [13]

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\
u^{n+1} &= \frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(u^{(1)})
\end{aligned} \tag{E.1.1}$$

### E.2 ssp 三阶龙格库塔法

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\
u^{(2)} &= \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}), \\
u^{n+1} &= \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)}),
\end{aligned} \tag{E.2.1}$$

### E.3 三阶龙格库塔法

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)
\end{aligned} \tag{E.3.1}$$

### E.4 四阶龙格库塔法

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned} \tag{E.4.1}$$

## F 数值积分

一般采用的求积公式是机械求解求积公式中的高斯积分。高斯积分是一种非常常用的数值积分方法，具有如下优点：

- 高斯积分的精度随着积分点的增加而增加，当积分点的数量足够大时，可以达到非常高的精度。
- 当使用的点数固定为  $n + 1$  个时，高斯积分具有  $2n + 1$  阶的精度，是所有机械求积公式中最高的。因此在计算复杂函数积分时，高斯积分可以显著减少计算时间和计算成本。
- 高斯积分公式可以非常方便地使用代码实现。

具体而言，该公式可写成：

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i f(x_i) \tag{F.0.1}$$

其中， $\omega_i$  和  $x_i$  分别表示高斯积分公式中第  $i$  个点的权重和位置。对于积分区间非  $[-1, 1]$  的积分，可以使用下面的公式：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt = \sum_i f\left(\frac{(b-a)x_i + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2} \omega_i \tag{F.0.2}$$

表 1 给出  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  时，高斯积分的取值点和权重大小。对于  $n$  不同的情况，可以从这个 [1] 查到更多  $x_i, \omega_i$  的值。特别的，对于  $P^1, n \geq 2, P^2, n \geq 4$ 。

表 1: Gauss-Legendre 的取值点和权重大小

$n$	取值点 $x_i$	权重 $w_i$
2	$\pm 0.57735027$	1.00000000
3	$0.00000000, \pm 0.77459667$	0.88888889, 0.55555556
4	$\pm 0.86113631, \pm 0.33998104$	0.34785485, 0.65214515
5	$0.00000000, \pm 0.53846931, \pm 0.90617985$	0.56888889, 0.23692689, 0.23692689

## G 计算精度

假设我们得到的近似解为  $u_h$ , 准确解为  $u$ .

$$\|u_h - u\| = Ch^p + O(h^{p+1}) \quad (\text{G.0.1})$$

下面介绍如何通过数值实验求出  $p$ .

在两次实验中, 我们使用了不同的  $h = h_1, h_2$ , 得到的近似解为  $u_{h_1}, u_{h_2}$ . 则:

$$\begin{aligned} \|u_{h_1} - u\| &= Ch_1^p + O(h_1^{p+1}) \\ \|u_{h_2} - u\| &= Ch_2^p + O(h_2^{p+1}) \end{aligned} \quad (\text{G.0.2})$$

做比得到:

$$\frac{\|u_{h_1} - u\|}{\|u_{h_2} - u\|} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p \quad (\text{G.0.3})$$

于是

$$p = \frac{\ln \|u_{h_1} - u\| - \ln \|u_{h_2} - u\|}{\ln(h_1) - \ln(h_2)} \quad (\text{G.0.4})$$

当取值为小区间中心点时:

$$\begin{aligned} L_1 - \text{norm} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u_h(x_i)| \\ L_2 - \text{norm} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u(x_i) - u_h(x_i))^2} \end{aligned} \quad (\text{G.0.5})$$

$$L_\infty - \text{norm} = \max_{i=1,2,\dots,n} x_i$$

当取值为小区间积分值时:

$$\begin{aligned} L_1 - \text{norm} &= \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u_h(x_i)| \\ L_2 - \text{norm} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (u(x_i) - u_h(x_i))^2} \\ L_\infty - \text{norm} &= \max_{i=1,2,\dots,n} x_i \end{aligned} \quad (\text{G.0.6})$$

## 参考文献

[1] 高斯积分的节点值.

- [2] Rupak Biswas, Karen D. Devine, and Joseph E. Flaherty. Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 14(1-3):255–283, 1994.
- [3] Rupak Biswas, Karen D. Devine, and Joseph E. Flaherty. Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 14(1-3):255–283, 1994.
- [4] Rafael Borges, Monique Carmona, Bruno Costa, and Wai Sun Don. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 227(6):3191–3211, 2008.
- [5] A. Burbeau, P. Sagaut, and Ch H. Bruneau. A problem-independent limiter for high-order runge-kutta discontinuous galerkin methods. *Journal of Computational Physics*, 169(1):111–150, 2001.
- [6] Bernardo Cockburn, Suchung Hou, and Chi-Wang Shu. The runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws. iv: The multidimensional case. *Mathematics of Computation*, 54(190), 1990.
- [7] Bernardo Cockburn, Claes Johnson, C-W Shu, and Eitan Tadmor. *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations: lectures given at the 2nd session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Cetraro, Italy, June 23-28, 1997*. Springer, 2006.
- [8] Bernardo Cockburn, San-Yih Lin, and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws iii: One-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, 84(1):90–113, 1989.
- [9] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws ii: General framework. *Mathematics of Computation*, 52(186), 1989.
- [10] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws ii: General framework. *Mathematics of Computation*, 52(186), 1989. RKDG 系列论文 2.
- [11] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The runge-kutta discontinuous galerkin method for conservation laws v. *Journal of Computational Physics*, 141(2):199–224, 1998.
- [12] Oliver Friedrich. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 144(1):194–212, 1998.
- [13] Sigal Gottlieb, Chi-Wang Shu, and Eitan Tadmor. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*, 43(1):89–112, 2001. ssp 龙格库塔法.
- [14] Andrew K. Henrick, Tariq D. Aslam, and Joseph M. Powers. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points. *Journal of Computational Physics*, 207(2):542–567, 2005.

- [15] Changqing Hu and Chi-Wang Shu. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes. *Journal of Computational Physics*, 150(1):97–127, 1999.
- [16] Guang-Shan Jiang and Chi-Wang Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1):202–228, 1996.
- [17] L. Krivodonova, J. Xin, J. F. Remacle, N. Chevaugeon, and J. E. Flaherty. Shock detection and limiting with discontinuous galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 48(3-4):323–338, 2004.
- [18] L. Krivodonova, J. Xin, J. F. Remacle, N. Chevaugeon, and J. E. Flaherty. Shock detection and limiting with discontinuous galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 48(3-4):323–338, 2004. 基于 DG 超收敛性质的 KXRCF 指示器.
- [19] Doron Levy, Gabriella Puppo, and Giovanni Russo. Central weno schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(3):547–571, 1999.
- [20] Xu-Dong Liu, Stanley Osher, and Tony Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115(1):200–212, 1994.
- [21] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Hermite weno schemes and their application as limiters for runge-kutta discontinuous galerkin method: one-dimensional case. *Journal of Computational Physics*, 193(1):115–135, 2004.
- [22] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Hermite weno schemes and their application as limiters for runge-kutta discontinuous galerkin method ii: Two dimensional case. *Computers & Fluids*, 34(6):642–663, 2005.
- [23] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Runge-kutta discontinuous galerkin method using weno limiters. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(3):907–929, 2005.
- [24] William H Reed and Thomas R Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA), 1973.
- [25] Chi-Wang Shu. Tvb uniformly high-order schemes for conservation laws. *Mathematics of Computation*, 49(179), 1987.
- [26] Jun Zhu and Jianxian Qiu. A new type of finite volume weno schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Scientific Computing*, 73(2-3):1338–1359, 2017. 黎曼问题算例.
- [27] Jun Zhu, Jianxian Qiu, Chi-Wang Shu, and Michael Dumbser. Runge-kutta discontinuous galerkin method using weno limiters ii: Unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(9):4330–4353, 2008.
- [28] Jun Zhu, Xinghui Zhong, Chi-Wang Shu, and Jianxian Qiu. Runge-kutta discontinuous galerkin method with a simple and compact hermite weno limiter. *Communications in Computational Physics*, 19(4):944–969, 2016. 欧拉方程的左右特征向量.

- [29] 梁俊凯. 欧拉方程间断伽辽金有限元解法的研究. 2018.
- [30] 程悦. *Runge-Kutta* 间断 *Galerkin* 有限元方法的多种限制器比较. Thesis, 2011.