

RKDG Primer

张阳

2024 年 8 月 20 日

目录

1	快速实现	7
1.1	引言	7
1.2	符号说明	8
1.3	一维标量	8
1.3.1	控制方程	9
1.3.2	空间离散格式	9
1.3.3	实例	10
1.4	一维向量	10
1.5	二维标量	12
1.6	二维向量	12
1.6.1	控制方程	12
1.6.2	空间离散格式	12
1.7	时间离散格式	14
1.7.1	ssp 二阶龙格库塔法	14
1.7.2	ssp 三阶龙格库塔法	14
1.8	方程解耦	16
1.9	指示子	17
1.9.1	TVB 指示子	17
1.10	限制器	17
1.10.1	TVB 限制器	17
1.10.2	WENO-JS 限制器	17
2	更多知识	21
2.1	指示子	21
2.1.1	KXRCF 指示子	21

2.2	WENO 限制器	21
2.2.1	再看 WENOJS 限制器	21
2.2.2	修改光滑指示器 (Smoothness indicators)	25
2.2.3	自由设置线性权	26
2.2.4	HWENO	30
2.3	保极值限制器	30
2.3.1	一维	30
2.3.2	二维	32
2.4	数值通量	34
2.4.1	HLL(Harten-Lax-van Leer)	35
2.4.2	HLLC Flux	37
2.4.3	波速估计	40
2.5	双曲型方程 (hyperbolic equation)	41
2.5.1	激波 (Shock Wave)	41
2.5.2	接触间断 (Rarefaction Wave)	42
2.5.3	稀疏波 (Rarefaction Wave)	42
3	附录	43
3.1	模板	43
3.2	WENO3 与 WENO5 参数求解过程	45
3.3	编程小技巧	46
3.3.1	程序加速	46
3.3.2	检查程序错误	46
3.4	边界条件	47
3.4.1	周期性边界条件	47
3.4.2	常数边界条件	47
3.4.3	反射边界条件	47
3.4.4	滑移边界条件	47
3.5	多元微积分	47
3.5.1	方向导数	47
3.5.2	梯度	47
3.5.3	Green 公式	48
3.5.4	散度	48
3.5.5	拉普拉斯算子	48
3.5.6	维基百科: 拉普拉斯算子	48

3.5.7	范数	49
3.5.8	张量积	49
3.6	定义	49
3.7	控制方程	50
3.7.1	一维方程	50
3.7.2	二维方程	54
3.8	基函数函数	57
3.8.1	一维	57
3.8.2	二维	57
3.9	数值积分	57
3.10	计算精度	59
3.11	常用中英文对照表	60
3.12	常用期刊名缩写	61
3.13	常用缩写对照表	61

Chapter 1

快速实现

1.1 引言

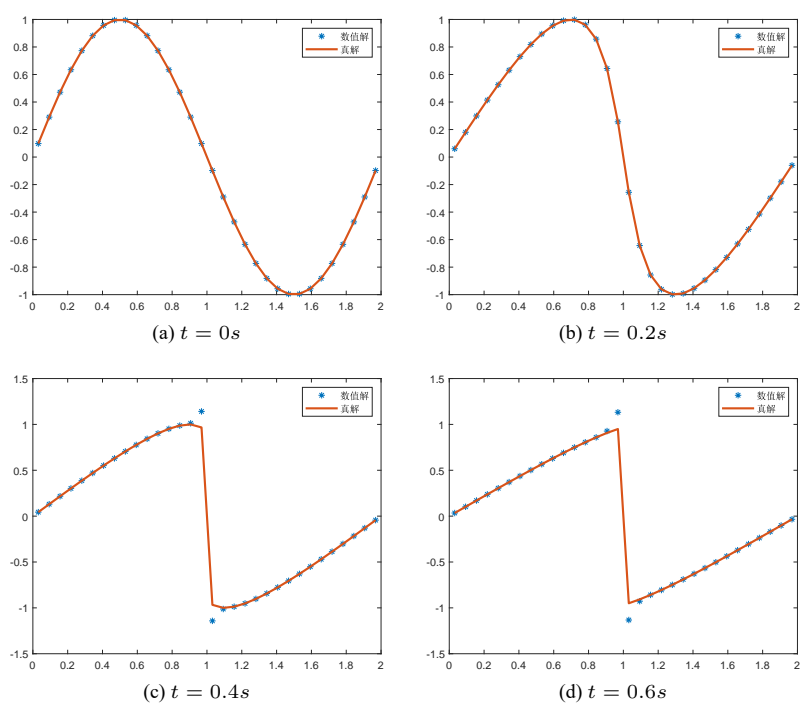


图 1.1: 上图为 burgers 方程在初值条件为 $u = \sin(x)$ 时的演变

本文使用的数值方法为间断有限元 discontinuous Galerkin (DG) 法. 让我们先简要回顾一下 DG 方法

的历史.1973 年,Reed 和 Hill[32] 在中子传输框架下提出了第一个 DG 方法. 然后,Cockburn 等人在一系列论文中 [9, 8, 6, 11] 对 DG 方法进行了重大发展, 其中他们建立了一个框架, 使用显式、非线性稳定的高阶 Runge-Kutta 时间离散化和 DG 空间离散化, 使用精确或近似的 Riemann 解算器作为界面通量和总变差有界 (TVB) 限制器 [34], 以实现**对强不连续性的本质非振荡性**. 从那时起, 这些方案被称为 RKDG 方法. 但是, 即使初始条件足够平滑, 解决(??)也不容易, 因为解可能包含强不连续性. 不连续 Galerkin (DG) 方法可以捕捉弱不连续性而无需进一步修改. 然而, 对于存在强不连续性的问题, 数值解**可能在强震荡或接触不连续性附近具有显著的虚假震荡**, 特别是对于高阶数值方法而言. 控制这些虚假震荡的常见策略是应用非线性限制器.

通常, 使用限制器的过程可以分为两个步骤. 首先, 需要确定“坏单元”(也称为“有问题的单元”), 即包含间断的单元, 这些单元需要进行限制. 其次, 需要在这些“坏单元”中修正 DG 多项式解. 由于守恒的要求, 需要保证单元平均值不变, 并且减小振荡.

在第一部分中, 我们通常使用“坏单元”或称为间断指示器, 这些指示器包括基于最小模型的指示器 [9]、基于力矩的指示器 [2]、改进的力矩指示器 [5]、以及基于 DG 超收敛性质的 KXRCF 指示器 [21].

在第二部分中, 一种限制器属于斜率型限制器, 例如 minmod 类型限制器 [9, 8, 6, 11], 基于矩的限制器 [3] 和改进的基于矩的限制器 [5] 等. 它们的优点是可以在强间断附近有效抑制伪振荡的出现, 但付出的代价是在解的光滑极值点处有可能降低格式的数值精度. 另一种限制器基于加权本质非振荡 (WENO) 方法 [14, 18, 19, 25, 7], 它可以在平滑区域中实现高阶精度, 并在强不连续性附近保持本质非振荡性质. WENO 格式一经提出, 便引起人们的广泛关注, 近二十年来, WENO 的各种变形格式层出不穷. 例如: 经典的 WENO 限制器 (WENO-js)[30, 40], Hermite WENO 限制器 (HWENO)[28, 29], 中心型 WENO 限制器 (CWENO)[23], WENO-M 限制器 [17], WENO-Z 限制器 [4]. 但另一方面, 基于 WENO 的限制器需要更广泛的空间模板来获得高阶方案. 因此, 在多维问题中, 特别是在非结构化网格上, 如三角形网格或四面体网格中实现它们是困难的.

1.2 符号说明

\hat{h} 数值通量

$$\Delta_+ w_j = w_{j+1} - w_j, \quad \Delta_- w_j = w_j - w_{j-1} \quad (1.1)$$

1.3 一维标量

离散格式推导与稳定性证明见 [10]

1.3.1 控制方程

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.2)$$

1.3.2 空间离散格式

做网格划分如下:

$$x_l = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = x_r. \quad (1.3)$$

做如下符号定义:

$$I_i \equiv \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right], \quad x_i \equiv \frac{1}{2} \left(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad \Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

数值解 $u_h(x, t)$ 表示为:

$$u_h(x, t) = \sum_{l=0}^k u_i^{(l)}(t) v_l^{(i)}(x), \quad x \in I_i \quad (1.5)$$

其中 $u_i^{(l)}(t)$ 为自由度 (degrees of freedom:dof) 或矩, $v_l^{(i)}(x)$ 为基函数. 当基函数为正交函数时, $u_i(l)(t)$ 的定义为:

$$u_i^{(l)}(t) = \frac{1}{a_l} \int_{I_i} u_h(x, t) v_l^{(i)}(x) dx \quad l = 0, 1, \dots, k \quad (1.6)$$

其中

$$a_l = \int_{I_i} \left(v_l^{(i)}(x) \right)^2 dx \quad (1.7)$$

Remark 1. 如果基函数不是正交函数, 需要先求出质量矩阵的值, 再求其逆矩阵.

质量矩阵

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_k) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_k, \varphi_0) & (\varphi_k, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_k, \varphi_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, u) \\ (\varphi_1, u) \\ \vdots \\ (\varphi_k, u) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Remark 2. 当基函数为正交函数时, 第一个自由度的值, 即为函数在小区间上的积分平均值.

$$\left\| v_l^{(j)}(x) \right\|^2 \frac{d}{dt} u(t) + \left[\Delta_- \left(v_l^{(j)}(x_{j+1/2}) f_{j+1/2} \right) \right] - \int_{I_j} f(u^h(x, t)) \frac{d}{dx} v(x) dx = 0 \quad (1.9)$$

Remark 3. 如果是有限体积分法 FV, 那么就可以把 $v(x)$ 看作是 1, 这样 (1.9) 就变成了:

$$\Delta x \frac{d}{dt} u(t) + \left[\Delta_- (f_{j+1/2}) \right] = 0 \quad (1.10)$$

也即：

$$\Delta x \frac{d}{dt} u(t) + [f_{j+1/2} - f_{j-1/2}] = 0 \quad (1.11)$$

1.3.3 实例

Example 1. 光滑问题：

$$u_t + u_x = 0, u(x, 0) = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1.12)$$

周期边界条件

解析解为：

$$u(x, t) = \sin(x - t) \quad (1.13)$$

Example 2.

$$u_t + u_x = 0 \quad (1.14)$$

$$u_0(x) = e^{-300*(x-Xc)^2}, Xc = 0.5 \quad (1.15)$$

计算区域 $[0, 1]$ ，周期边界条件，outputtime = 1s 参考文献：A new type of non-polynomial based TENO scheme for hyperbolic conservation laws

Example 3. 间断问题：

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0 \quad (1.16)$$

初值为：

$$u_0(x) = \sin(x)$$

计算域为 $[0, 2\pi]$.

$x = \pi$ 的地方会出现激波，激波出现的时间为 $t = 1$.

解析解使用特征线法求解.

1.4 一维向量

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0} \quad (1.17)$$

数值通量为：

Example 4.

$$\begin{aligned}\rho(x, 0) &= 1 + 0.2 \sin \pi x \\ u(x, 0) &= 0.7 \\ p(x, 0) &= 1\end{aligned}\tag{1.18}$$

计算区域为 $[0, 2]$, 周期边界条件, 解析解为:

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= 1 + 0.2 \sin \pi(x - 0.7t) \\ u(x, t) &= 0.7 \\ p(x, t) &= 1\end{aligned}\tag{1.19}$$

Example 5. *Lax* 激波管问题 (*shock-tube problem*)[24]:

$$\begin{cases} (\rho, v, p) = (0.445, 0.698, 3.528) & 0 \leq x < 0.5 \\ (\rho, v, p) = (0.5, 0, 0.571) & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}\tag{1.20}$$

计算区域为 $[0, 1]$ 两端均是常数边界条件, 我们求解该问题至 $T = 0.14$.

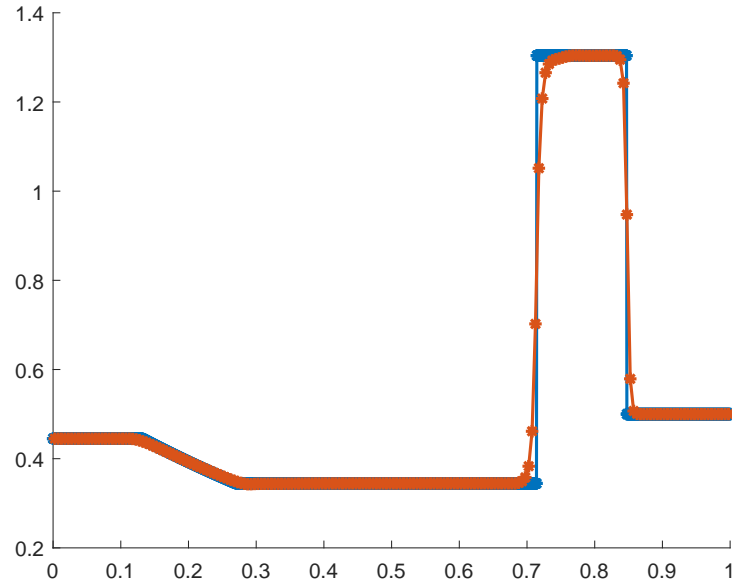


图 1.2: 蓝色: reference, 红色: $DG(P^2)$ -WENOJS-M=50-N=200

Example 6. Sod 激波管问题 (*shock-tube problem*)

$$\begin{cases} (\rho, v, p) = (1, 0, 1) & 0 \leq x < 0.5 \\ (\rho, v, p) = (0.125, 0, 0.1) & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.21)$$

计算区域为 $[0, 1]$ 两端均是常数边界条件, 我们求解该问题至 $T = 0.2$.

1.5 二维标量

1.6 二维向量

1.6.1 控制方程

$$\partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 \quad (1.22)$$

1.6.2 空间离散格式

在每个小区间上做二维积分:

$$\frac{d}{dt} \int_K u_h(t, x) v_h(x) dx + \int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(u_h(t, x)) v_h(x) dx = 0, \forall v_h \in V_h \quad (1.23)$$

$$\frac{d}{dt} \int_K u(x, t) v(x) dx + \sum_{e \in \partial K} \int_e \mathbf{f}(u(x, t)) \cdot \mathbf{n}_{e,K} v(x) d\Gamma - \int_K \mathbf{f}(u(x, t)) \cdot \operatorname{grad} v(x) dx = 0 \quad (1.24)$$

Remark 4. 特别的, 对于矩形网格, 有:

其中 $\mathbf{n}_{e,K}$ 是边界 e 的标准外法向量. 由于函数在小区间边界上间断 $f(u)$ 在 e 上没有定义, 和一维的情况类似, 需要使用数值通量 $h_{e,K}(u_h(t, x^{\operatorname{int}(K)}), u_h(t, x^{\operatorname{ext}(K)}))$ 代替 $\mathbf{f}(u_h(t, x)) \cdot \mathbf{n}_{e,K}$, 其中:

$$u_h(t, x^{\operatorname{int}(K)}) = \lim_{y \rightarrow x, y \in K} u_h(t, y),$$

$$u_h(t, x^{\operatorname{ext}(K)}) = \begin{cases} \gamma_h(x, t), & \text{if } x \in \partial\Omega, \\ \lim_{y \rightarrow x, y \in (K)^c} u_h(t, y), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.25)$$

$$h_{e,K}(a, b) = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(a) \cdot \mathbf{n}_{e,K} + \mathbf{f}(b) \cdot \mathbf{n}_{e,K} - \alpha_{e,K}(b - a)]. \quad (1.26)$$

Example 7. 光滑问题：初值为：

$$\begin{aligned}\rho(x, y, 0) &= 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)) \\ u(x, y, 0) &= 0.7 \\ v(x, y, 0) &= 0.3 \\ p(x, y, 0) &= 1\end{aligned}\tag{1.27}$$

周期边界条件

准确解为：

$$\rho(x, y, t) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y - (u + v)t)), u = 0.7, v = 0.3, p = 1\tag{1.28}$$

Example 8. 黎曼问题：算例可参考：[33]

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (0.138, 1.206, 1.206, 0.029), & (x, y) \in [0, 0.8] \times [0, 0.8] \\ (0.5323, 1.206, 0, 0.3), & (x, y) \in [0, 0.8] \times [0.8, 1] \\ (0.5323, 0, 1.206, 0.3), & (x, y) \in [0.8, 1] \times [0, 0.8] \\ (1.5, 0, 0, 1.5), & (x, y) \in [0.8, 1] \times [0.8, 1] \end{cases}\tag{1.29}$$

$t_{end} = 0.8$, 网格为 400×400 .

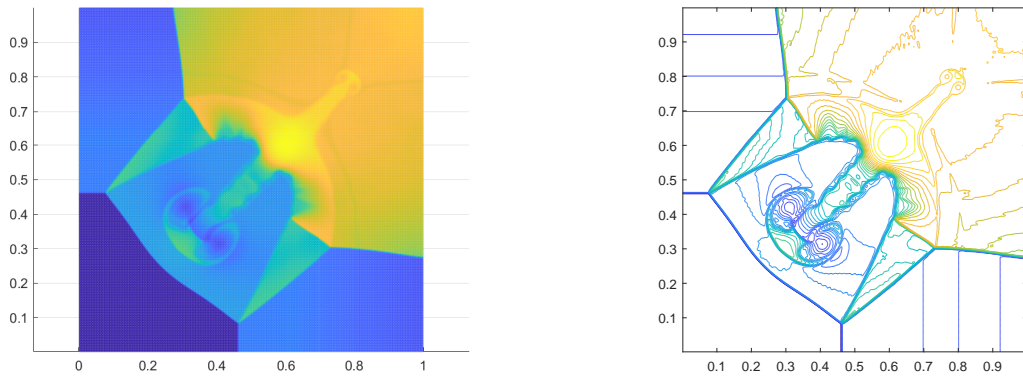


图 1.3: WENO-JS, M=200, 等高线: 0.2:0.05:1.7

Example 9 (Rayleigh-Taylor instability). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999104004760>

The initial condition is [70]

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (2, 0, -0.025c \cos(8\pi x), 1 + 2y), & \text{if } 0 \leq y < 1/2, \\ (1, 0, -0.025c \cos(8\pi x), y + 3/2), & \text{if } 1/2 \leq y \leq 1, \end{cases} \quad (1.30)$$

where c is the sound speed, $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ with $\gamma = \frac{5}{3}$. The computational domain is $[0, 0.25] \times [0, 1]$. Reflecting boundary conditions are imposed on the left and right boundaries of the domain. Constant primitive variables $(\rho, u, v, p) = (2, 0, 0, 1)$ and $(\rho, u, v, p) = (1, 0, 0, 2.5)$ are set at the bottom and top boundaries, respectively.

1.7 时间离散格式

时间步长 Δt 应当满足 CFL 条件来保证稳定。对于一维标量的情况：

$$\Delta t = \frac{CFL_k \Delta x}{\max |f'(u)|} \quad (1.31)$$

对于二维标量的情况：

$$\Delta t = \frac{CFL_k}{\max |f'(u)| / \Delta x + \max |g'(u)| / \Delta y}. \quad (1.32)$$

对于一维向量和二维向量的情况，上述公式中的 $\max |f'(u)|$ 和 $\max |g'(u)|$ 被 Jacobian 矩阵特征值的绝对值的最大值取代。我们使用如下的 CFL 数 [46][37][12]： $CFL_1 = 0.3$, $CFL_2 = 0.18$ and $CFL_3 = 0.1$

1.7.1 ssp 二阶龙格库塔法

ssp(strong stability-preserving) 方法见： [15]

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}u^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(1)}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

1.7.2 ssp 三阶龙格库塔法

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}), \end{aligned} \quad (1.34)$$

低储存的龙格库塔法:

$$\begin{aligned}
 temp &= u^n \\
 u^n &= temp + \Delta t L(u^n) \\
 u^n &= \frac{3}{4}temp + \frac{1}{4}u^n + \frac{1}{4}\Delta t L(u^n) \\
 u^{n+1} &= \frac{1}{3}temp + \frac{1}{4}u^n + \frac{2}{3}\Delta t L(u^n)
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Listing 1.1: My C++ Code

```

1 void CWENOFV::RunRK3(double deltaT)
2 {
3     // Copy current solution to temporary storage
4     for (int ei = m_startElemX; ei != m_endElemX; ei++)
5         for (int ej = m_startElemY; ej != m_endElemY; ej++)
6             for (int r = 0; r != m_varNum; ++r)
7                 m_Un[ei][ej].vector[r] = m_Uh[ei][ej].vector[r];
8
9     for (int step = 0; step != 3; step++)
10    {
11        // Assemble the right-hand side (RHS) for the equations
12        assembleRHS();
13
14        double a, b, c;
15        // Set coefficients for the third-order Runge-Kutta scheme based
16        // on the step
17        switch (step)
18        {
19            case 0:
20                a = 1.0;
21                b = 0.0;
22                c = 1.0;
23                break;
24            case 1:
25                a = 3.0 / 4.0;
26                b = 1.0 / 4.0;

```

```

26         c = 1.0 / 4.0;
27         break;
28     case 2:
29         a = 1.0 / 3.0;
30         b = 2.0 / 3.0;
31         c = 2.0 / 3.0;
32         break;
33     default:
34         std::cout << "Error: Invalid RK3 step" << std::endl;
35         std::cin.get();
36         exit(1);
37         break;
38     }
39
40     // Update solution vector using the RK3 coefficients
41     for (int ei = m_startElemX; ei != m_endElemX; ei++)
42         for (int ej = m_startElemY; ej != m_endElemY; ej++)
43             for (int r = 0; r < m_varNum; r++)
44                 m_Uh[ei][ej].vector[r] = a * m_Un[ei][ej].vector[r] +
45                     b * m_Uh[ei][ej].vector[r] + c * deltaT * m_rhs[ei][ej].vector[r];
46 }

```

1.8 方程解耦

对于双曲型方程

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0} \quad (1.36)$$

由链式法则可以得到:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_u \mathbf{U}_x = \mathbf{0} \quad (1.37)$$

记 $A = F_u$, 因为方程为双曲型方程, 所以 A 可对角化, 即存在可逆矩阵 P 使得

$$\Lambda = P^{-1}AP \quad (1.38)$$

1.9 指示子

指示子英文为 **indicator**. 限制器的一个重要组成部分是指示子, 指示子可以找出存在强间断的小区

1.9.1 TVB 指示子

1、基于 minmod 函数的 TVB 限制器 [6] (简称 TVB)

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i^{(0)} + \tilde{u}_i, \quad u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i^{(0)} - \tilde{u}_i \quad (1.39)$$

我们可以看到

$$\tilde{u}_i = \sum_{l=1}^k u_i^{(l)} v_l^{(i)} \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad \tilde{\tilde{u}}_i = - \sum_{l=1}^k u_i^{(l)} v_l^{(i)} \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (1.40)$$

$$\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = m \left(\tilde{u}_j, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)} \right), \quad \tilde{\tilde{u}}^{(\text{mod})} = m \left(\tilde{\tilde{u}}_j, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)} \right), \quad (1.41)$$

其中

$$m(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_1| \leq Mh^2 \\ s \cdot \min_{1 \leq j \leq n} |a_j| & \text{if } \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2) = \dots = \text{sign}(a_n) = s, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.42)$$

1.10 限制器

1.10.1 TVB 限制器

1.10.2 WENO-JS 限制器

WENO 全称为 **Weighted Essentially Non-Oscillatory**. WENO 限制器的思想是: 使用周围的小区间上守恒量的平均值来重构当前小区间的函数, 再使用得到的新函数来修正原高阶自由度, 从而达到修正限制的目的. 下面我们简单介绍 WENO 限制器在一维标量方程上的使用方法, 一维系统的情况请参阅 [30].

Step 1: 首先我们在 Gauss 或 Gauss-Lobatto 积分点处重构 u 的点值. 对于基于 \mathbb{P}^k 的 DG (精度为 $(k+1)$ 阶), 我们需要一个至少精确到 $O(h^{2k+2})$ 的 Gauss 或 Gauss-Lobatto 积分规则, 而 WENO 重构的精度必须至少为 $2k+1$. 为此, 我们需要使用相邻的 $2k+1$ 个单元 $I_{i-k} \dots I_{i+k}$ 的单元平均值来重构 u 的点值.

Step 1.1. 我们确定 $k+1$ 个小的模板 S_j , 其中 $j = 0, 1, \dots, k$, 使得 I_i 属于每个模板. 记 $S_j = \cup_{l=0}^k I_{i+j-l}$. 我们用 $\mathcal{T} = \cup_{j=0}^k S_j$ 表示包含所有 $k+1$ 个小模板的大模板. 在每个模板 $S_j, j = 0, \dots, k$ 构造一个 k 次多项式重构 $p_j(x)$, 使得每个模板 S_j 中每个单元格中 $p_j(x)$ 的平均值与给定的 u 的单元格平均值相符, 即

$$\frac{1}{\Delta x_{i+j-l}} \int_{I_{i+j-l}} p_j(x) dx = u_{i+j-l}^{(0)}, \quad l = 0, \dots, k. \quad (1.43)$$

在更大的模板 \mathcal{T} 上, 我们再重构一个 $2k$ 次多项式 $Q(x)$, 使得

$$\frac{1}{\Delta x_{i+l}} \int_{I_{i+l}} Q(x) dx = u_{i+l}^{(0)}, \quad l = -k, \dots, k. \quad (1.44)$$

关于 $p_j(x)$ 和 $Q(x)$ 的构造细节可以在文献 [7] 中找到.

Step 1.2. 我们找到组合系数, 也称为线性权重, 记为 $\gamma_0, \dots, \gamma_k$, 满足

$$Q(x_G) = \sum_{j=0}^k \gamma_j p_j(x_G) \quad (1.45)$$

其中 x_G 是 Gauss 积分点. 不同的积分点对应不同的线性权重.

Step 1.3. 我们计算每个权重 S_j 的平滑度指示器, 表示 $p_j(x)$ 在目标单元 I_i 中的平滑程度. 平滑度指示器 β_j 越小, 函数 $p_j(x)$ 在目标单元中的平滑度就越高, 我们使用以下平滑度指示器:

$$\beta_j = \sum_{l=1}^k \int_{I_i} \Delta x_i^{2l-1} \left(\frac{\partial^l}{\partial x^l} p_j(x) \right)^2 dx \quad (1.46)$$

Step 1.4. 我们基于平滑度指示器计算非线性权重,

$$\omega_j = \frac{\bar{\omega}_j}{\sum_l \bar{\omega}_l}, \quad \bar{\omega}_j = \frac{\gamma_j}{(\varepsilon + \beta_j)^2}, \quad (1.47)$$

其中, γ_j 是在 **Step 1.2.** 中确定的线性权重, ε 是一个很小的数, 用于避免分母为零. 在本文中, 我们在所有计算中使用 $\varepsilon = 10^{-6}$. 最终的 WENO 近似为:

$$u_{(x_G)} \approx \sum_{j=0}^k \omega_j p_j(x_G) \quad (1.48)$$

Step 2: 基于在 Gauss 积分点 x_G 上重构的点值 $u(x_G)$ 和数值积分, 我们得到重构函数的高阶自由度:

$$u_i^{(l)} = \frac{1}{\|v_l^{(j)}\|^2} \sum_G w_G u(x_G) v_l^{(i)}(x_G), \quad l = 1, \dots, k \quad (1.49)$$

其中, w_G 是 Gauss 积分点 x_G 对应的高斯积分权重.

表 1.1

$x_G = x_{i+1/2}$	$u_{i-2}^{(0)}$	$u_{i-1}^{(0)}$	$u_i^{(0)}$	$u_{i+1}^{(0)}$	$u_{i+2}^{(0)}$
$P_0(x)$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{11}{6}$		
$P_1(x)$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	
$P_2(x)$			$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$Q = \frac{1}{10}p_0 + \frac{6}{10}p_1 + \frac{3}{10}p_2$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{13}{60}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{9}{20}$	$-\frac{1}{20}$
$x_G = x_{i+\sqrt{5}/10}$	$u_{i-2}^{(0)}$	$u_{i-1}^{(0)}$	$u_i^{(0)}$	$u_{i+1}^{(0)}$	$u_{i+2}^{(0)}$
$P_0(x)$	$-\frac{1}{60} + \frac{\sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{30} - \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{59}{60} + \frac{3\sqrt{5}}{20}$		
$P_1(x)$		$-\frac{1}{60} - \frac{\sqrt{5}}{20}$	$\frac{31}{30}$	$-\frac{1}{60} + \frac{\sqrt{5}}{20}$	
$P_2(x)$			$\frac{59}{60} - \frac{3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{30} + \frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{1}{60} - \frac{\sqrt{5}}{20}$
$Q = \frac{91+9\sqrt{5}}{440}p_0 + \frac{129}{220}p_1 + \frac{91-9\sqrt{5}}{440}p_2$	$\frac{1+6\sqrt{5}}{600}$	$-\frac{7+21\sqrt{5}}{300}$	$\frac{313}{300}$	$\frac{-7+21\sqrt{5}}{300}$	$\frac{1-6\sqrt{5}}{600}$

For $x_G = x_{i+1/2}$, we have

$$\begin{aligned}
p_0(x_G) &= \frac{1}{3}u_{i-2}^{(0)} - \frac{7}{6}u_{i-1}^{(0)} + \frac{11}{6}u_i^{(0)} \\
p_1(x_G) &= -\frac{1}{6}u_{i-1}^{(0)} + \frac{5}{6}u_i^{(0)} + \frac{1}{3}u_{i+1}^{(0)}, \\
p_2(x_G) &= \frac{1}{3}u_i^{(0)} + \frac{5}{6}u_{i+1}^{(0)} - \frac{1}{6}u_{i+2}^{(0)}, \\
Q(x_G) &= \frac{1}{30}u_{i-2}^{(0)} - \frac{13}{60}u_{i-1}^{(0)} + \frac{47}{60}u_i^{(0)} + \frac{9}{20}u_{i+1}^{(0)} - \frac{1}{20}u_{i+2}^{(0)},
\end{aligned} \quad (1.50)$$

and

$$\gamma_0 = \frac{1}{10}, \quad \gamma_1 = \frac{6}{10}, \quad \gamma_2 = \frac{3}{10} \quad (1.51)$$

For $x_G = x_{i+\sqrt{5}/10}$ we have

$$\begin{aligned}
p_0(x_G) &= \left(-\frac{1}{60} + \frac{\sqrt{5}}{20}\right) u_{i-2}^{(0)} + \left(\frac{1}{30} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) u_{i-1}^{(0)} + \left(\frac{59}{60} + \frac{3\sqrt{5}}{20}\right) u_i^{(0)}, \\
p_1(x_G) &= \left(-\frac{1}{60} - \frac{\sqrt{5}}{20}\right) u_{i-1}^{(0)} + \frac{31}{30} u_i^{(0)} + \left(-\frac{1}{60} + \frac{\sqrt{5}}{20}\right) u_{i+1}^{(0)}, \\
p_2(x_G) &= \left(\frac{59}{60} - \frac{3\sqrt{5}}{20}\right) u_i^{(0)} + \left(\frac{1}{30} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) u_{i+1}^{(0)} + \left(-\frac{1}{60} - \frac{\sqrt{5}}{20}\right) u_{i+2}^{(0)}, \\
Q(x_G) &= \frac{1+6\sqrt{5}}{600} u_{i-2}^{(0)} - \frac{7+21\sqrt{5}}{300} u_{i-1}^{(0)} + \frac{313}{300} u_i^{(0)} + \frac{-7+21\sqrt{5}}{300} u_{i+1}^{(0)} + \frac{1-6\sqrt{5}}{600} u_{i+2}^{(0)},
\end{aligned} \tag{1.52}$$

and

$$\gamma_0 = \frac{91+9\sqrt{5}}{440}, \quad \gamma_1 = \frac{129}{220}, \quad \gamma_2 = \frac{91-9\sqrt{5}}{440} \tag{1.53}$$

Chapter 2

更多知识

2.1 指示子

2.1.1 KXRCF 指示子

KXRCF 指示子利用了 DG 方法的超收敛性 [22], 把小单元 $I_{i,j}$ 的边界 $\partial I_{i,j}$ 分成 $\partial I_{i,j}^-$, $\partial I_{i,j}^+$ 两部分, 分别对应流体流入和流出 $I_{i,j}$ 的边界.

$$\left| \frac{\int_{\partial I_{i,j}^-} \left(u_h(x, y, t)|_{I_{i,j}} - u_h(x, y, t)|_{I_l} \right) ds}{h_{i,j}^R |\partial I_{i,j}^-| \cdot |||\widehat{u}_h(x, y, t)|_{\partial I_{i,j}}|||} \right| \geq C_k, \quad (2.1)$$

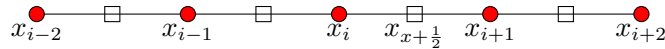
其中, $R = 1$ 当 $k = 1$, $R = 1.5$ 当 $k > 1$. $h_{i,j}$ 为 $I_{i,j}$ 外接圆的半径. C_k 为常数, 一般可取 $C_k = 1$. I_l 为 $I_{i,j}$ 在 $\partial I_{i,j}^-$ 一侧的相邻单元. u_h 可取守恒量, 或者由守恒量引申出的物理量, $|||\widehat{u}_h(x, y, t)|_{\partial I_{i,j}}|||$ 为 $|\widehat{u}_h(x, y, t)|_{\partial I_{i,j}}|$ 在 $\partial I_{i,j}$ 上的最大值. $|\partial I_{i,j}^-|$ 为 $\partial I_{i,j}^-$ 的长度.

2.2 WENO 限制器

2.2.1 再看 WENOJS 限制器

WENOJS 限制器的构造

WENO-JS 限制器首次被应用在 RKDG 上是 [31, 41].



这里我们需要重构 u 在 Gauss 或者 Gauss-Lobatto 积分点的值。对于 \mathbb{P}^k 的 DG 方法 (具有 $k+1$ 的精度 order accurate), Gauss 或者 Gauss-Lobatto 积分规则的误差至少要达到 $O(h^{2k+2})$ 。另一方面, WENO 重构多项式的精度至少要 $2k+1$ 。因此, 我们总共需要 $2k+1$ 个小单元上的平均值来重构 u 在 Gauss 或者 Gauss-Lobatto 积分点上的值, 我们使用下面的积分点:

- 对于 \mathbb{P}^1 的情况, 我们使用两点高斯积分点 $x_{i-\sqrt{3}/6}$ 和 $x_{i+\sqrt{3}/6}$ 。
- 对于 \mathbb{P}^2 的情况, 我们使用四点 Gauss-Lobatto 积分点 $x_{i-1/2}, x_{i-\sqrt{5}/10}, x_{i+\sqrt{5}/10}$, 和 $x_{i+1/2}$ 。
- 对于 \mathbb{P}^3 的情况, 我们使用四点 Gauss 积分点 $x_{i-\sqrt{525+70\sqrt{30}}/70}, x_{i-\sqrt{525-70\sqrt{30}}/70}, x_{i+\sqrt{525-70\sqrt{30}}/70}$ and $x_{i+\sqrt{525+70\sqrt{30}}/70}$ 。

WENO 最早被设计出来是作为有限差分法, 有限体积法的格式用的。WENO 对计算流体力学领域产生了深远的影响, 在过去的几十年中, 各种 WENO 格式的变形层出不穷, 直到今天仍然有很多人在做这方面的研究。

目标是找到 $k-1$ 次多项式 p , 满足:

$$p_i(x) = v(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in I_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

考虑函数

$$V(x) \equiv \int_{-\infty}^x v(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

从而

$$V(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi = \sum_{j=-\infty}^i \bar{v}_j \Delta x_j \quad (2.4)$$

$r, s \geq 0$, with $r+s+1=k$ 使用 $k+1$ 个点 $x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}}$, 上的 $V(x)$ 的值插值得到函数 $P(x)$, 记 $p(x) = P'(x)$, 则:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p(\xi) d\xi &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} P'(\xi) d\xi = \frac{1}{\Delta x_j} \left(P(x_{j+\frac{1}{2}}) - P(x_{j-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \left(V(x_{j+\frac{1}{2}}) - V(x_{j-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \left(\int_{-\infty}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x_{j-\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi = \bar{v}_j, \quad j = i-r, \dots, i+s, \end{aligned} \quad (2.5)$$

由数值分析可以得到:

$$P'(x) = V'(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in I_i \quad (2.6)$$

在光滑的情况下, 如果有:

$$\omega_r = d_r + O(\Delta x^{k-1}), \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (2.7)$$

那么:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = v\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x^{2k-1}) \quad (2.8)$$

这是因为:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} - \sum_{r=0}^{k-1} d_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} &= \sum_{r=0}^{k-1} (\omega_r - d_r) \left(v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} - v\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) \right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} O(\Delta x^{k-1}) O(\Delta x^k) = O(\Delta x^{2k-1}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

β_r 被称为模板 $S_r(i)$ 的平滑指示器”smooth indicators”. 如果 $v(x)$ 在模板 $S_r(i)$ 是光滑的, 那么:

$$\beta_r = O(\Delta x^2) \quad (2.10)$$

但是如果 $v(x)$ 在模板 $S_r(i)$ 有间断, 那么:

$$\beta_r = O(1) \quad (2.11)$$

对应到非线性权, 当 $v(x)$ 在模板 $S_r(i)$ 是光滑的, 那么:

$$\omega_r = O(\Delta x^4) \quad (2.12)$$

但是如果 $v(x)$ 在模板 $S_r(i)$ 有间断, 那么:

$$\omega_r = O(1) \quad (2.13)$$

One also has to worry about the accuracy requirement (2.56), which must be checked when the specific form of the smooth indicator β_r is given. For any smooth indicator β_r , it is easy to see that the weights defined by (2.58) satisfies (2.53). To satisfy (2.56), it suffices to have, through a Taylor expansion analysis:

$$\beta_r = D(1 + O(\Delta x^{k-1})), \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (2.14)$$

where D is a nonzero quantity independent of r (but may depend on Δx).

WENO-M 限制器在文章 [17] 中被提出, 在该文章中. 作者详细分析了 WENO 实现预期精度的充要条件, 并且指出 WENO-JS 格式会在 critical points 附近会损失精度, 但是由于 ϵ , 这一特点没有在 WENO-JS 中被发现, 并且给出了一个新的格式 MWENO 克服了这一问题.

$$\omega_k^{(\text{JS})} = \frac{\alpha_k}{\sum_{i=0}^2 \alpha_i}, \quad \text{where } \alpha_k = \frac{\bar{\omega}_k}{(\epsilon + \beta_k)^p}, \quad (2.15)$$

为了满足五阶格式的要求, 需要满足以下充要条件:

$$\sum_{k=0}^2 (\omega_k - \bar{\omega}_k) = \mathcal{O}(\Delta x^6), \quad (2.16a)$$

$$\left(3\omega_1^{(+)} - 3\omega_1^{(-)} - \omega_2^{(+)} + \omega_2^{(-)} + \omega_3^{(+)} - \omega_3^{(-)} \right) = \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (2.16b)$$

$$(\omega_k - \bar{\omega}_k) = \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.16c)$$

假如光滑指示器可以写成下面的形式:

$$\beta_k = D(1 + \mathcal{O}(\Delta x)^2) \quad (2.17)$$

其中 D 是一些与 k 无关的非零常数

$$\bar{\omega}_k = \frac{\gamma_k}{(D(1 + \mathcal{O}(\Delta x)^2))^p} = \frac{\gamma_k}{D^p} (1 + \mathcal{O}(\Delta x^2)) \quad (2.18)$$

$$\sum_{k=0}^2 \alpha_k = \frac{1}{D^p} (1 + \mathcal{O}(\Delta x^2)) \quad (2.19)$$

taking into account that $\sum_{k=0}^2 \bar{\omega}_k = 1$. Thus $\omega_k^{(\text{JS})}$, as defined in Eq. (30), is given by

$$\omega_k^{(\text{JS})} = \bar{\omega}_k + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.20)$$

which agrees with Eq. (29c). Note that Eq. (29b) is still not satisfied by enforcing Eq. (31).

$$\beta_0 = \frac{13}{12} (f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4} (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2, \quad (2.21a)$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (f_{i-1} - f_{i+1})^2, \quad (2.21b)$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12} (f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2. \quad (2.21c)$$

$$\beta_0 = f_i'^2 \Delta x^2 + \left(\frac{13}{12} f_i''^2 - \frac{2}{3} f_i' f_i''' \right) \Delta x^4 - \left(\frac{13}{6} f_i'' f_i''' - \frac{1}{2} f_i' f_i^{(4)} \right) \Delta x^5 + O(\Delta x^6), \quad (2.22a)$$

$$\beta_1 = f_i'^2 \Delta x^2 + \left(\frac{13}{12} f_i''^2 + \frac{1}{3} f_i' f_i''' \right) \Delta x^4 + O(\Delta x^6), \quad (2.22b)$$

$$\beta_2 = f_i'^2 \Delta x^2 + \left(\frac{13}{12} f_i''^2 - \frac{2}{3} f_i' f_i''' \right) \Delta x^4 + \left(\frac{13}{6} f_i'' f_i''' - \frac{1}{2} f_i' f_i^{(4)} \right) \Delta x^5 + O(\Delta x^6). \quad (2.22c)$$

WENO-JS 的局限性

- 对于非结构化网络, 需要计算线性权重, 计算较为繁琐
- 耗散较大, 捕捉细小尺度的流动结构不够精确
- 需要用到的模板较大, 紧致性差 (破坏了 DG 方法的紧致性) .
- 在部分光滑情况下存在丢精度的可能.

2.2.2 修改光滑指示器 (Smoothness indicators)

WENO-Z

在 WENO-Z 方案中, 非归一化和归一化非线性权重 α_k^Z 和 ω_k^Z 的一般定义分别为:

$$\alpha_k^Z = d_k \left[1 + \left(\frac{\tau}{\beta_k + \varepsilon} \right)^p \right], \quad \omega_k^Z = \frac{\alpha_k^Z}{\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j^Z}, \quad k = 0, \dots, r-1. \quad (2.23)$$

与 WENO-JS 权重一样, p 和 ε 分别是 power 和 sensitivity 参数。它们类似于 WENO-JS 方案中的参数。

WENO-Z 方案相对于经典方案的新颖思想是在非线性权重的形成中包含从全局阶平滑度指标 τ 获得的高阶信息。这个全局平滑度指标是 β_k 的线性组合, 即:

$$\tau = \left| \sum_{k=0}^{r-1} c_k \beta_k \right| \quad (2.24)$$

其中 c_k 是给定的常量。例如, 五阶 WENO-Z 方案的 τ 的表达式为:

$$\tau = |\beta_0 - \beta_2|. \quad (2.25)$$

τ 的顺序随 R 的变化而变化; 对于五阶 WENO-Z, 它的阶数恰好也是 5. 更多的 τ 的定义可查看表格 [13]

表 2.1: The global optimal order smoothness indicator τ_{2r-1} and its leading truncation order $\theta(\tau_{2r-1})$ of the $(2r-1)$ order WENO-Z scheme.

r	$2r-1$	τ_{2r-1}	$\theta(\tau_{2r-1})$
2	3	$ \beta_0 - \beta_1 $	3
3	5	$ \beta_0 - \beta_2 $	5
4	7	$ \beta_0 + 3\beta_1 - 3\beta_2 - \beta_3 $	7
5	9	$ \beta_0 + 2\beta_1 - 6\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 $	8
6	11	$ \beta_0 + \beta_1 - 8\beta_2 + 8\beta_3 - \beta_4 - \beta_5 $	9
7	13	$ \beta_0 + 36\beta_1 + 135\beta_2 - 135\beta_4 - 36\beta_5 - \beta_6 $	11

和 WENO-JS 相同, ε 对 WENO-Z 的精度有影响; 但是不同于 WENO-JS, ε 上的条件随 R 和 p 变化并且较弱. 例如, 在 $R = 5$ 且 $p = 2$ 的情况下, 如果 $\varepsilon = \Omega(\Delta x^4)$, WENO-Z 实现 5 阶精度, 但是对于 $\varepsilon < O(\Delta x^4)$ 精度通常会在接近 2 阶临界点时降低.

$$\tau_5 = |\beta_0 - \beta_2| = \frac{13}{3} |f''_i f'''_i| \Delta x^5 + O(\Delta x^6) \quad (2.26)$$

假设在模板 2 中存在间断, 那么 $\beta_2 > \beta_k$, 从而:

$$\frac{\beta_k^z}{\beta_2^z} = \frac{\beta_k \beta_2 + \tau_5}{\beta_2 \beta_k + \tau_5} \geq \frac{\beta_k}{\beta_2}, \quad k = 0, 1, \quad (2.27)$$

所以, 相比于 WENO-JS, WENO-Z 会增加间断模板的权重. 作者认为, WENO-Z 耗散更小的原因就在于此。

2.2.3 自由设置线性权

MRWENO

朱军等人在一系列论文 [42, 39, 43] 中发展了 MRWENO (multi-resolution WENO) 限制器。

Step 1: 1

Step 1.1. 在有问题的单元 I_j 上定义一系列不同次数的多项式. 我们构造多项式 $q_\ell(x)$, $\ell = 0, \dots, k$, 满足以下条件:

$$\int_{I_j} q_\ell(x) v_l^j(x) dx = \int_{I_j} u_h(x) v_l^j(x, y) dx, \quad l = 0, 1, \dots, \ell. \quad (2.28)$$

Remark 5. 如果我们采用规范正交基 $v_l^{(0)}(x)$, 那么不同的多项式 $q_\ell(x)$, $\ell = 0, 1, \dots, k$ 的构造

非常简单. 在这种情况下, 我们可以直接得到多项式

$$q_\ell(x) = \sum_{l=0}^{\ell} u_j^{(l)}(t) v_l^{(j)}(x), \ell = 0, 1, \dots, k. \quad (2.29)$$

Step 1.2. 我们通过以下方式构造多项式 $p_{\ell,\ell}(x), p_{\ell,\ell+1}(x) = 1, \dots, k$

$$p_{\ell,\ell}(x) = \frac{1}{\gamma_{\ell,\ell}} q_\ell(x) - \frac{\gamma_{\ell-1,\ell}}{\gamma_{\ell,\ell}} p_{\ell-1,\ell}(x), \ell = 1, \dots, k, \quad (2.30)$$

$$p_{\ell,\ell+1}(x) = \omega_{\ell,\ell} p_{\ell,\ell}(x) + \omega_{\ell-1,\ell} p_{\ell-1,\ell}(x), \ell = 1, \dots, k-1 \quad (2.31)$$

这些表达式中, $\gamma_{\ell-1,\ell}$ 和 $\gamma_{\ell,\ell}$ 是线性权重, 要求 $\gamma_{\ell-1,\ell} + \gamma_{\ell,\ell} = 1$, 且 $\gamma_{\ell-1,\ell}, \gamma_{\ell,\ell} > 0$. 由于对于平滑解来说, 高阶解通常是最好的, 因此我们给予高阶多项式更高的线性权重, 基于低阶多项式更小的线性权重. 即:

$$\gamma_{\ell,\ell} \gg \gamma_{\ell-1,\ell} \quad (2.32)$$

当比值 $\frac{\gamma_{\ell,\ell}}{\gamma_{\ell-1,\ell}}$ 的值较小时, 可以在不连续性上获得更好的结果, 而当值较大时, 通常对于平滑解更好. 在我们的数值测试中, 我们取

$$\gamma_{\ell-1,\ell} = 0.01, \quad \gamma_{\ell,\ell} = 0.99, \quad \ell = 1, \dots, k \quad (2.33)$$

这可以在平滑区域中保持原始的高阶, 在所有数值例子中都可以保持基本上非振荡的冲击过渡.

$\omega_{\ell-1,\ell}$ 和 $\omega_{\ell,\ell}$ 是非线性权重 (稍后将准确地介绍).

Step 1.3. 计算光滑指示器 β_{ℓ,ℓ_2} , 其衡量了 $p_{\ell,\ell_2}(x, y)$ for $\ell = \ell_2 - 1, \ell_2; \ell_2 = 1, 2, 3, 4$ 在小区间 I_j 上的光滑程度. 具体来说: β_{ℓ,ℓ_2} 越小, 说明 $p_{\ell,\ell_2}(x, y)$ 在 I_j 上越光滑.

$$\beta_{l_1, l_2} = \sum_{l=1}^k \int_{I_i} \Delta x_i^{2l-1} \left(\frac{\partial^l}{\partial x^l} p_{l_1, l_2}(x) \right)^2 dx \quad (2.34)$$

由于 $p_{0,1}(x)$ 是一个常值函数, $p'_{0,1}(x) = 0$, 因此无法使用统一的(2.34)式来衡量其光滑程度, 因此我们为 $p_{0,1}(x)$ 设计了其独有的限制器:

定义线性函数 $q_{0,1}(x), q_{0,2}(x)$ 满足:

$$\begin{aligned} \int_{I_{j-1}} q_{0,1}(x) v_l^{(j-1)}(x) dx &= \int_{I_{j-1}} u_h(x) v_l^{(j-1)} dx, \quad l = 0, 1, \dots, k \\ \int_{I_{j+1}} q_{0,1}(x) v_l^{(j+1)}(x) dx &= \int_{I_{j+1}} u_h(x) v_l^{(j+1)} dx, \quad l = 0, 1, \dots, k \end{aligned} \quad (2.35)$$

再构造 ς_1, ς_2 , 其定义如下:

$$\varsigma_1 = \int_{I_j} \left(\frac{d}{dx} q_{0,1} \right)^2 dx, \quad \varsigma_2 = \int_{I_j} \left(\frac{d}{dx} q_{0,1} \right)^2 dx \quad (2.36)$$

$\beta_{0,1}$ 定义取 ς_1, ς_2 的最小值:

$$\beta_{0,1} = \min\{\varsigma_1, \varsigma_2\}. \quad (2.37)$$

Step 1.4. 基于线性权重和光滑性指标计算非线性权重. 我们采用文献 [4] 中所示的 WENO-Z 的做法, τ_{ℓ_2} 定义如下:

$$\tau_{\ell_2} = (\beta_{\ell_2, \ell_2} - \beta_{\ell_2-1, \ell_2})^2 \quad (2.38)$$

$$\omega_{\ell_1, \ell_2} = \frac{\bar{\omega}_{\ell_1, \ell_2}}{\sum_{\ell=\ell_2-1}^{\ell_2} \bar{\omega}_{\ell, \ell_2}}, \quad \bar{\omega}_{\ell_1, \ell_2} = \gamma_{\ell_1, \ell_2} \left(1 + \frac{\tau_{\ell_2}}{\epsilon + \beta_{\ell_1, \ell_2}} \right) \quad (2.39)$$

得到最终的拟合函数:

$$p^{\text{new}}(x) = \sum_{\ell=\ell_2-1}^{\ell_2} \omega_{\ell, \ell_2} p_{\ell, \ell_2}(x), \quad \ell_2 = 1, 2, 3, 4, \quad (2.40)$$

$$u_j^{(l)}(t) = \frac{1}{\|v_l^{(j)}\|^2} \int_{I_j} u(x, t) v_l^{(j)}(x) dx, \quad l = 0, 1, \dots, k. \quad (2.41)$$

Step 2: 修正高阶矩

Remark 6. 如果不修正线性权重, 那么最终会得到 $p^{\text{new}}(x) = p^{\text{old}}(x)$.

$$\begin{aligned} p^{\text{new}}(x) &= \gamma_{l_1, l_2} p_{l_1, l_2}(x) + \gamma_{l_2, l_2} p_{l_2, l_2}(x) \\ &= \gamma_{l_1, l_2} p_{l_1, l_2}(x) + \gamma_{l_2, l_2} \left(\frac{1}{\gamma_{l_2, l_2}} q_{l_2}(x) - \frac{\gamma_{l_1, l_2}}{\gamma_{l_2, l_2}} p_{l_1, l_2}(x) \right) \\ &= q_{l_2}(x) = p^{\text{old}}(x) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\beta_{\ell, \ell_2} = \sum_{|\alpha|=1}^{\kappa} \int (\Delta x_i \Delta y_j)^{|\alpha|-1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} p_{\ell, \ell_2}(x, y) \right)^2 dx dy \quad (2.43)$$

特别的：

$$\begin{aligned}
p_{01} &= q_0 \\
p_{11} &= \frac{1}{\gamma_{11}} q_1 - \frac{\gamma_{01}}{\gamma_{11}} p_{01} \\
p_{12} &= \omega_{11} p_{11} + \omega_{01} p_{0,1} \\
p_{22} &= \frac{1}{\gamma_{22}} q_2 - \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} p_{12}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
p^{\text{MR-WENO2}}(x, y, z) &= \omega_{0,1} p_{0,1}(x, y, z) + \omega_{1,1} p_{1,1}(x, y, z), \\
p^{\text{MR-WENO3}}(x, y, z) &= \omega_{1,2} p^{\text{MR-WENO2}}(x, y, z) + \omega_{2,2} p_{2,2}(x, y, z)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

一维时：

$$\begin{aligned}
\beta_{01} &= 4 a_1^2 \\
\beta_{11} &= \frac{4 a_1^2}{\gamma_{11}^2} \\
\beta_{12} &= \frac{4 a_1^2 \omega_{11}^2}{\gamma_{11}^2} \\
\beta_{22} &= \frac{144 a_2^2}{\gamma_{22}^2} + \frac{4(a_1^2 \gamma_{11}^2 - 2 a_1^2 \gamma_{11} \gamma_{12} \omega_{11} + a_1^2 \gamma_{12}^2 \omega_{11}^2 + 3 a_2^2 \gamma_{11}^2)}{\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^2}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

二维时：

$$\begin{aligned}
\beta_{01} &= (\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})(\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b}) \left(\frac{4 a_1^2}{(\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})^2} + \frac{4 a_2^2}{(\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b})^2} \right) \\
\beta_{11} &= \left(\frac{4 a_1^2}{\gamma_{11}^2 (\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})^2} + \frac{4 a_2^2}{\gamma_{11}^2 (\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b})^2} \right) (\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})(\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b}) \\
\beta_{12} &= \frac{a_1^2 \omega_{11}^2 (\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})(\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b})}{\gamma_{11}^2 \left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{x}\mathbf{b}}{2} \right)^2} + \frac{a_2^2 \omega_{11}^2 (\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})(\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b})}{\gamma_{11}^2 \left(\frac{\mathbf{y}\mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{y}\mathbf{b}}{2} \right)^2}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

β_{22} 太复杂了，单独写一下

$$\begin{aligned}
\beta_{22} &= \frac{4(\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b})(3 a_1^2 \gamma_{11}^2 - 6 a_1^2 \gamma_{11} \gamma_{12} \omega_{11} + 3 a_1^2 \gamma_{12}^2 \omega_{11}^2 + 4 a_3^2 \gamma_{11}^2 + a_5^2 \gamma_{11}^2)}{3 \gamma_{11}^2 \gamma_{22}^2 (\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})} \\
&+ \frac{4(\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})(3 a_2^2 \gamma_{11}^2 - 6 a_2^2 \gamma_{11} \gamma_{12} \omega_{11} + 3 a_2^2 \gamma_{12}^2 \omega_{11}^2 + 4 a_4^2 \gamma_{11}^2 + a_5^2 \gamma_{11}^2)}{3 \gamma_{11}^2 \gamma_{22}^2 (\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b})} \\
&+ \frac{64 a_3^2 (\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b})^2}{\gamma_{22}^2 (\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})^2} + \frac{64 a_4^2 (\mathbf{x}\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})^2}{\gamma_{22}^2 (\mathbf{y}\mathbf{a} - \mathbf{y}\mathbf{b})^2} + \frac{16 a_5^2}{\gamma_{22}^2}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

事实上，所谓的自由设置线性权也不是完全自由。如果给定一个比较差的线性权，是无法重构到原精度的。数值例子可见 [37]

2.2.4 HWENO

2.3 保极值限制器

2.3.1 一维

[?] 标量守恒性方程

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{F}(u) = 0 \quad \text{and} \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad (2.49)$$

一个很重要的性质就是它满足最大值原则. 具体来说, 如果 $M = \max_x u_0(x), m = \min_x u_0(x)$, 那么 $u(x, t) \in [m, M]$. 对任意的 x, t 都满足. 所以, 我们也希望数值解也满足这个性质. 因为在一些情况下, 超出了这个范围, 就会得到无物理意义的解. 比如负密度, 或者负百分比, 或者某个多组分混合物中某个组分的百分比大于一. 这样的限制器在多项流问题中尤为重要.[36]

证明的思路为: 首先证明当时间步长充分小的时候一阶格式下是保界的, 然后证明在步长充分小的时候高阶格式的单元平均值是保界的, 然后对高阶格式的 $u_h - \bar{u}_h$ 做一个简单的线性限制, 使得高阶格式也能保界。

Theorem 2.3.1.1: 对

一阶 (单调 *monotone*) 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left[\hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n, u_j^n) \right] \equiv H_\lambda(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n), \quad (2.50)$$

满足严格的极值原则, 其中 $\lambda = \Delta t / \Delta x$, Δt 和 Δx 分别为时间步长和空间步长, 并且 $\hat{f}(a, b)$ 是 *monotone* 通量, 满足三条件。即: 当

$$\alpha \lambda \leq 1, \quad \alpha = \max |f'(u)|, \quad (2.51)$$

时, 如果有: $m \leq u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n \leq M$, 那么有 $u_j^{n+1} \in [m, M]$ 。

证明. 对于 Lax-Friedrichs 结构和 Godunov 结构可以证明 $H_\lambda(a, b, c)$ 对于三个变量都是单调递增的, 且一致的, 即: $H_\lambda(a, a, a) = a$. 在这种情况下:

$$m = H_\lambda(m, m, m) \leq u_j^{n+1} = H_\lambda(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \leq H_\lambda(M, M, M) = M \quad (2.52)$$

对于其他结构, 我没有在 [36] 中找到证明。 □

下面考虑对于一般的高阶格式

$$\begin{aligned}\bar{u}_j^{n+1} &= \bar{u}_j^n - \lambda \left[\hat{f} \left(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+ \right) - \hat{f} \left(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+ \right) \right] \\ &\equiv G_\lambda \left(\bar{u}_j^n, u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+, u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+ \right)\end{aligned}\quad (2.53)$$

中的单元平均值的保界性。考虑 $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上的 n 点的 Gauss-Lobatto 高斯点，其对于阶数小于等于 $2N - 3$ 的多项式的数值积分是准确的。我们将这些 I_j 上的积分点记作：

$$S_j = \{x_{j-1/2} = \hat{x}_j^1, \hat{x}_j^2, \dots, \hat{x}_j^{N-1}, \hat{x}_j^N = x_{j+1/2}\}.$$
 (2.54)

记 \hat{w}_α 为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上的 Gauss-Lobatto 的权重，从而： $\sum_{\alpha=1}^N \hat{w}_\alpha = 1$ ， N 为满足 $2N - 3 \geq k$ 的最小整数。那么：

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} p_j(x) dx = \sum_{\alpha=1}^N \hat{w}_\alpha p_j(\hat{x}_j^\alpha) = \sum_{\alpha=2}^{N-1} \hat{w}_\alpha p_j(\hat{x}_j^\alpha) + \hat{w}_1 u_{j-1/2}^+ + \hat{w}_N u_{j+1/2}^-.$$
 (2.55)

p_j 表示第 j 个小单元上的多项式， $u_{j-1/2}^+ = p_j(x_{j-1/2})$, $u_{j+1/2}^- = p_j(x_{j+1/2})$

Theorem 2.3.1.2

如果 $u_{j-1/2}^-, u_{j+1/2}^+, p_j(\hat{x}_j^\alpha) (\alpha = 1, 2, \dots, N) \in [m, M]$ ，且在 CFL 条件

$$\lambda a \leq \hat{w}_1 \quad (2.56)$$

满足的条件下， $\bar{u}_j^{n+1} \in [m, M]$.

证明. 将等式 (2.55) 带入 (2.53) 中，再增减 $\hat{f}(u_{j-1/2}^+, u_{j+1/2}^-)$ ，(2.53) 可变为：

$$\begin{aligned}\bar{u}_j^{n+1} &= \sum_{\alpha=2}^{N-1} \hat{w}_\alpha p_j(\hat{x}_j^\alpha) + \hat{w}_N \left(u_{j+1/2}^- - \frac{\lambda}{\hat{w}_N} \left[\hat{f}(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+) - \hat{f}(u_{j-1/2}^+, u_{j+1/2}^-) \right] \right) \\ &\quad + \hat{w}_1 \left(u_{j-1/2}^+ - \frac{\lambda}{\hat{w}_1} \left[\hat{f}(u_{j-1/2}^+, u_{j+1/2}^-) - \hat{f}(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+) \right] \right) \\ &= \sum_{\alpha=2}^{N-1} \hat{w}_\alpha p_j(\hat{x}_j^\alpha) + \hat{w}_N H_{\lambda/\hat{w}_N} \left(u_{j-1/2}^+, u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+ \right) \\ &\quad + \hat{w}_1 H_{\lambda/\hat{w}_1} \left(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+, u_{j+1/2}^- \right).\end{aligned}\quad (2.57)$$

注意到 $\hat{w}_1 = \hat{w}_N$ ，并且 H_{λ/\hat{w}_1} 在 CFL 条件(2.51)下是单调的，所以从上式中可以看出 \bar{u}_j^{n+1} 对于所有包含的变量 $u_{j-1/2}^-, u_{j+1/2}^+$ and $p_j(\hat{x}_j^\alpha)$ for $1 \leq j \leq N$ 都是单调增加的。

下面这句话很奇怪没有看懂：

(The same proof for the first-order monotone scheme now applies to imply $\bar{u}_j^{n+1} \in [m, M]$). □

对高阶矩的限制比较简单，只是做了一个线性限制器，重要的是限制之后的多项式没有损失原有的精度。

Remark 7. 这个留到下次再写

2.3.2 二维

先来说明小单元为矩阵的情况：

对于二维的情况：

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ij}^{n+1} = & \bar{u}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \hat{f} \left[u_{i+1/2,j}^-(y), u_{i+1/2,j}^+(y) \right] - \hat{f} \left[u_{i-1/2,j}^-(y), u_{i-1/2,j}^+(y) \right] dy \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \hat{g} \left[u_{i,j+1/2}^-(x), u_{i,j+1/2}^+(x) \right] - \hat{g} \left[u_{i,j-1/2}^-(x), u_{i,j-1/2}^+(x) \right] dx \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ij}^{n+1} = & \bar{u}_{ij}^n - \lambda_1 \sum_{\beta=1}^L w_{\beta} \left[\hat{f} \left(u_{i+1/2,\beta}^-, u_{i+1/2,\beta}^+ \right) - \hat{f} \left(u_{i-1/2,\beta}^-, u_{i-1/2,\beta}^+ \right) \right] \\ & - \lambda_2 \sum_{\beta=1}^L w_{\beta} \left[\hat{g} \left(u_{\beta,j+1/2}^-, u_{\beta,j+1/2}^+ \right) - \hat{g} \left(u_{\beta,j-1/2}^-, u_{\beta,j-1/2}^+ \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

See figure 1 a for an illustration for $k=2$. For simplicity, let $\mu_1 = \lambda_1 a_1 / (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)$ and $\mu_2 = \lambda_2 a_2 / (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)$ where $a_1 = \max |f'(u)|$ and $a_2 = \max |g'(u)|$. Notice that $\hat{w}_1 = \hat{w}_N$, we have

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{ij}^n &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p_{ij}(x, y) \, dx dy \\
&= (\mu_1 + \mu_2) \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p_{ij}(x, y) \, dx dy \\
&= \frac{\mu_1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p_{ij}(x, y) \, dy \, dx + \frac{\mu_2}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p_{ij}(x, y) \, dx \, dy \\
&= \mu_1 \sum_{\beta=1}^L \sum_{\alpha=1}^N w_{\beta} \hat{w}_{\alpha} p_{ij}(\hat{x}_i^{\alpha}, y_j^{\beta}) + \mu_2 \sum_{\beta=1}^L \sum_{\alpha=1}^N w_{\beta} \hat{w}_{\alpha} p_{ij}(x_i^{\beta}, \hat{y}_j^{\alpha}) \\
&= \sum_{\beta=1}^L \sum_{\alpha=2}^{N-1} w_{\beta} \hat{w}_{\alpha} \left[\mu_1 p_{ij}(\hat{x}_i^{\alpha}, y_j^{\beta}) + \mu_2 p_{ij}(x_i^{\beta}, \hat{y}_j^{\alpha}) \right] \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^L w_{\beta} \hat{w}_1 \left[\mu_1 u_{i+1/2, \beta}^{-} + \mu_1 u_{i-1/2, \beta}^{+} + \mu_2 u_{\beta, j+1/2}^{-} + \mu_2 u_{\beta, j-1/2}^{+} \right]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Theorem 2.6. Consider a two-dimensional finite volume scheme or the scheme satisfied by the cell averages of the D G method on rectangular meshes (2.13), associated with the approximation polynomials $p_{ij}(x, y)$ of degree k (either reconstruction or D G polynomials). If $u_{\beta, j \pm 1/2}^{\pm}, u_{i \pm 1/2, \beta}^{\pm} \in [m, M]$ and $p_{ij}(x, y) \in [m, M]$ (for any $(x, y) \in S_{ij}$), then $\bar{u}_j^{n+1} \in [m, M]$ under the CFL condition

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \leq \hat{w}_1. \tag{2.61}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{ij}^{n+1} &= \sum_{\beta=1}^L \sum_{\alpha=2}^{N-1} w_{\beta} \hat{w}_{\alpha} \left[\mu_1 p_{ij}(\hat{x}_i^{\alpha}, y_j^{\beta}) + \mu_2 p_{ij}(x_i^{\beta}, \hat{y}_j^{\alpha}) \right] \\
&\quad + \mu_1 \sum_{\beta=1}^L w_{\beta} \hat{w}_1 \left[u_{i+1/2, \beta}^{-} - \frac{\lambda_1}{\mu_1 \hat{w}_1} \left(\hat{f}(u_{i+1/2, \beta}^{-}, u_{i+1/2, \beta}^{+}) - \hat{f}(u_{i-1/2, \beta}^{+}, u_{i+1/2, \beta}^{-}) \right) \right. \\
&\quad \left. + u_{i-1/2, \beta}^{+} - \frac{\lambda_1}{\mu_1 \hat{w}_1} \left(\hat{f}(u_{i-1/2, \beta}^{+}, u_{i+1/2, \beta}^{-}) - \hat{f}(u_{i-1/2, \beta}^{-}, u_{i-1/2, \beta}^{+}) \right) \right] \\
&\quad + \mu_2 \sum_{\beta=1}^L w_{\beta} \hat{w}_2 \left[u_{\beta, j+1/2}^{-} - \frac{\lambda_2}{\mu_2 \hat{w}_1} \left(\hat{g}(u_{\beta, j+1/2}^{-}, u_{\beta, j+1/2}^{+}) - \hat{g}(u_{\beta, j-1/2}^{+}, u_{\beta, j+1/2}^{-}) \right) \right. \\
&\quad \left. + u_{\beta, j-1/2}^{+} - \frac{\lambda_2}{\mu_2 \hat{w}_1} \left(\hat{g}(u_{\beta, j-1/2}^{+}, u_{\beta, j+1/2}^{-}) - \hat{g}(u_{\beta, j-1/2}^{-}, u_{\beta, j-1/2}^{+}) \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.62}$$

□

2.4 数值通量

数值通量有多种可以选择，最简单的是 LLF 数值通量。欧拉方程中几种常见的数值通量的比较可以参考论文 [26, 27]

满足三原则：

- 一致性： $\hat{f}(u, u) = f(u)$.
- 连续性： $\hat{f}(u^-, u^+)$ 至少关于两个参数 u^- 和 u^+ 是 Lipschitz 连续的.
- 单调性： $\hat{f}(u^-, u^+)$ 是第一个参数 u^- 的非降函数和第二个参数 u^+ 的非增函数. 符号上, $\hat{f}(\uparrow, \downarrow)$.

以下是几个常见的数值通量 [10]

- Lax-Friedrichs flux

$$\hat{f}^{LF}(u^-, u^+) = \frac{1}{2} (f(u^-) + f(u^+) - \alpha(u^+ - u^-)), \quad \alpha = \max_u |f'(u)| \quad (2.63)$$

- Local Lax-Friedrichs:

$$h^{LLF}(a, b) = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - \beta(b - a)], \quad \beta = \max_{\min(a, b) \leq u \leq \max(a, b)} |f'(u)| \quad (2.64)$$

For convex f , $f'' \geq 0$, one has $\beta = \max(|f'(a)|, |f'(b)|)$

- Godunov flux

$$\hat{f}^{God}(u^-, u^+) = \begin{cases} \min_{u^- \leq u \leq u^+} f(u), & \text{if } u^- < u^+, \\ \max_{u^+ \leq u \leq u^-} f(u), & \text{if } u^- \geq u^+ \end{cases} \quad (2.65)$$

- Engquist-Osher flux

$$\hat{f}^{EO} = \int_0^{u^-} \max(f'(u), 0) du + \int_0^{u^+} \min(f'(u), 0) du + f(0) \quad (2.66)$$

- HLL Flux

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{Hll} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & S_L \geq 0 \\ \mathbf{F}^{Hll}, & S_L < 0 < S_R \\ \mathbf{F}_R, & S_R \leq 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{F}^{Hll} = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} \quad (2.68)$$

- HLLC Flux

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{Hllc} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & S_L > 0 \\ \mathbf{F}_{*,L}, & S_L < 0 < S_* \\ \mathbf{F}_{*,R}, & S_* < 0 < S_R \\ \mathbf{F}_R, & S_R < 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

$$S_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)}. \quad (2.70)$$

$$\mathbf{U}_{*K} = \rho_K \left(\frac{S_K - u_K}{S_K - S_*} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ S_* \\ v_K \\ w_K \\ \frac{E_K}{\rho_K} + (S_* - u_K) \left[S_* + \frac{p_K}{\rho_K (S_K - u_K)} \right] \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

2.4.1 HLL(Harten-Lax-van Leer)

更多 HLL, HLLC 内容可参考 [35] 第十章
考虑 Riemann 问题

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \quad (2.72)$$

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

我们假设它有两个波，波速分别为 S_L, S_R ，我们的目标是求解沿着 $x = 0$ 这条线的 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 的一个近似，这个近似值记为 $\mathbf{F}_{i+1/2}^{Hll}$ 。显然，若 $S_R < 0$ 或 $S_L > 0$ ，则直接有 $\mathbf{F}_{i+1/2}^{Hll} = \mathbf{F}_R$ 和 $\mathbf{F}_{i+1/2}^{Hll} = \mathbf{F}_L$ ；因此我们只需要讨论 $S_L < 0 < S_R$ 的情况。

现在取一个控制体 $[x_L, x_R] \times [0, T]$ ，其中 $x_L < TS_L$, $TS_R < x_R$ ，如图：考虑 PDE 在其上的积分形式：

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, t) dx = \int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, 0) dx + \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) dt - \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)) dt \quad (2.74)$$

后面三项都可以计算出来，从而得到

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, t) dx = x_R \mathbf{U}_R - x_L \mathbf{U}_L + T(\mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R) \quad (2.75)$$

另一方面，我们有：

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, t) dx = \int_{x_L}^{TS_L} + \int_{TS_L}^{TS_R} + \int_{TS_R}^{x_R} \mathbf{U}(x, t) dx \quad (2.76)$$

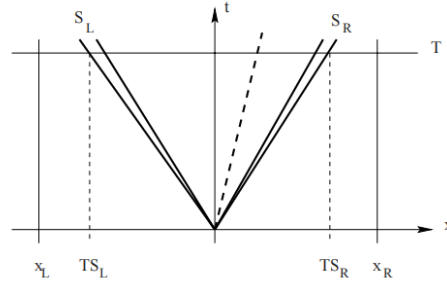


Fig. 10.2. Control volume $[x_L, x_R] \times [0, T]$ on x - t plane. S_L and S_R are the fastest signal velocities arising from the solution of the Riemann problem.

图 2.1

前一项和后一项都可以计算出来，从而得：

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{U}(x, t) dx = (TS_L - x_L) \mathbf{U}_L + \int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{U}(x, t) dx + (x_R - TS_R) \mathbf{U}_R \quad (2.77)$$

联立两式，得到：

$$\int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{U}(x, t) dx = T(S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R) \quad (2.78)$$

从而单元平均值为：

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{U}(x, t) dx = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{S_R - S_L} \quad (2.79)$$

当 $T \rightarrow 0^+$ ，我们得到 \mathbf{U}^* 的近似状态：

$$\mathbf{U}^{Hll} = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{S_R - S_L} \quad (2.80)$$

进一步，可以考虑如下的 \mathbf{U} 的近似：

$$\mathbf{U}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < S_L t \\ \mathbf{U}^{Hll}, & S_L t < x < S_R t \\ \mathbf{U}_R, & x > S_R t \end{cases} \quad (2.81)$$

设 Star Region 的 Flux 为 \mathbf{F}^{Hll} ，则利用 R-H 跳跃条件，得到

$$\mathbf{F}^{Hll} = \mathbf{F}_L + S_L (\mathbf{U}^{Hll} - \mathbf{U}_L) \quad (2.82)$$

和

$$\mathbf{F}^{Hll} = \mathbf{F}_R + S_R (\mathbf{U}^{Hll} - \mathbf{U}_R) \quad (2.83)$$

这两个代进去算，结果是一样的，都可以解得

$$\mathbf{F}^{Hll} = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} \quad (2.84)$$

从而，HLL Flux 的定义为：

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{Hll} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, S_L \geq 0 \\ \mathbf{F}^{Hll}, S_L < 0 < S_R \\ \mathbf{F}_R, S_R \leq 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

2.4.2 HLLC Flux

HLLC Flux 的近似更为精细，但计算也更复杂。假设除了两个激波外，还有一个波速为 S_* 的接触波，满足

$$S_L < S_* < S_R \quad (2.86)$$

如图：

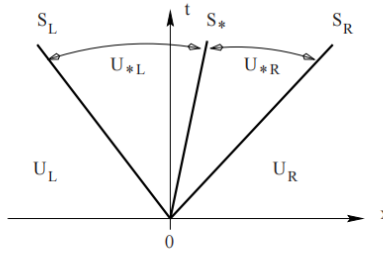


Fig. 10.4. HLLC approximate Riemann solver. Solution in the *Star Region* consists of two constant states separated from each other by a middle wave of speed S_* .

图 2.2

则 Star Region 中有两个未知状态： $\mathbf{U}_{*,L}$ 和 $\mathbf{U}_{*,R}$ 。仍然利用之前的控制体 $[x_L, x_R] \times [0, T]$ ，我们可以写

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{*,L} &= \frac{1}{T(S_* - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_*} \mathbf{U}(x, t) dx \\ \mathbf{U}_{*,R} &= \frac{1}{T(S_R - S_*)} \int_{TS_*}^{TS_R} \mathbf{U}(x, t) dx \end{aligned} \quad (2.87)$$

由于我们还有

$$\mathbf{U}^{Hll} = \frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} \mathbf{U}(x, t) dx \quad (2.88)$$

从而得到

$$\left(\frac{S_* - S_L}{S_R - S_L} \right) \mathbf{U}_{*,L} + \left(\frac{S_R - S_*}{S_R - S_L} \right) \mathbf{U}_{*,R} = \mathbf{U}^{Hll} \quad (2.89)$$

注意这里新的接触波的加入并不影响 \mathbf{U}^{Hll} 之前的推导，因此我们仍然有

$$\mathbf{U}^{Hll} = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{S_R - S_L} \quad (2.90)$$

HLLC Flux 的定义方式如下，与 HLL Flux 基本相同：

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_L, x < S_L t \\ \mathbf{U}_{*,L}, S_L t < x < S_* t \\ \mathbf{U}_{*,R}, S_* t < x < S_R t \\ \mathbf{U}_R, S_R t < x \end{cases} \quad (2.91)$$

对应的 Flux 为

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{Hllc} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, S_L > 0 \\ \mathbf{F}_{*,L}, S_L < 0 < S_* \\ \mathbf{F}_{*,R}, S_* < 0 < S_R \\ \mathbf{F}_R, S_R < 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

现在我们需要决定四个未知状态 $\mathbf{U}_{*,L}$, $\mathbf{U}_{*,R}$, $\mathbf{F}_{*,L}$, $\mathbf{F}_{*,R}$ 。利用 R-H 跳跃条件，可以列出三个关系式：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{*,L} - \mathbf{F}_L &= S_L (\mathbf{U}_{*,L} - \mathbf{U}_L) \\ \mathbf{F}_{*,R} - \mathbf{F}_{*,L} &= S_* (\mathbf{U}_{*,R} - \mathbf{U}_{*,L}) \\ \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_{*,R} &= S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_{*,R}) \end{aligned} \quad (2.93)$$

现在我们考虑 Euler 方程在 x 分量上的 Flux：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

根据方程本身的性质，我们附加以下条件：

1. 压强和法向速度是连续的:

$$p_{*,L} = p_{*,R} =: p_* \quad (2.95)$$

$$u_{*,L} = u_{*,R} =: u_* \quad (2.96)$$

2. 其它两个速度在左、右分别等于左右的初值:

$$v_{*,L} = v_L, \quad v_{*,R} = v_R \quad (2.97)$$

$$w_{*,L} = w_L, \quad w_{*,R} = w_R \quad (2.98)$$

3. 接触波的速度

$$S^* = u \quad (2.99)$$

注意到一个重要的关系式

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} =: u\mathbf{U} + p\mathbf{D} \quad (2.100)$$

因此, 我们可将两个激波上的跳跃条件重写为

$$S_L \mathbf{U}_{*,L} - \mathbf{F}_{*,L} = S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_L \quad (2.101)$$

$$S_R \mathbf{U}_{*,R} - \mathbf{F}_{*,R} = S_R \mathbf{U}_R - \mathbf{F}_R \quad (2.102)$$

考虑第一个式子的第一个分量:

$$S_L \rho_{*,L} - \rho_{*,L} u_{*,L} = S_L \rho_L - \rho_L u_L \quad (2.103)$$

考虑第一个式子的第二个分量:

$$\begin{aligned} S_L \rho_{*,L} u_{*,L} - u_{*,L} \rho_{*,L} u_{*,L} - p_{*,L} - p_{*,L} &= S_L \rho_L u_L - u_L \rho_L u_L - p_L \\ (S_L - u_{*,L}) \rho_{*,L} u_{*,L} - p_{*,L} &= (S_L - u_L) \rho_L u_L - p_L \end{aligned} \quad (2.104)$$

将上上式带入上式, 得到:

$$(S_L - u_L) \rho_L u_{*,L} - p_{*,L} = (S_L - u_L) \rho_L u_L - p_L \quad (2.105)$$

从而:

$$p_{*,L} = p_L + \rho_L (S_L - u_L) (S_* - u_L) \quad (2.106)$$

同理:

$$p_{*,R} = p_R + \rho_R (S_R - u_R) (S_* - u_R) \quad (2.107)$$

由于 $p_{*,L} = p_{*,R}$, 联立上述两式即可解出接触波的波速 S_* (注意它也等于法向的速度 u) 为:

$$S_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)} \quad (2.108)$$

并且 S_L, S_R 是已知的, 我们现在只需要利用 R-H 跳跃条件即可解出 HLLC Flux。

利用 $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = u\mathbf{U} + p\mathbf{D}$, 我们可以将激波的跳跃条件重写为

$$S_* \mathbf{U}_{*,K} + p_* \mathbf{D}_* = \mathbf{F}_K + S_K \mathbf{U}_{*,K} - S_K \mathbf{U}_K \quad (2.109)$$

其中 $K = L, R$, 因此

$$\mathbf{U}_{*,K} = \frac{S_K \mathbf{U}_K - \mathbf{F}_K + p_* \mathbf{D}_*}{S_K - S_*} \quad (2.110)$$

再用一次跳跃条件, 即得到直接的表达式:

$$\mathbf{F}_{*,K} = \frac{S_* (S_K \mathbf{U}_K - \mathbf{F}_K) + S_K (p_K + \rho_L (S_K - u_K) (S_* - u_K)) \mathbf{D}_*}{S_K - S_*} \quad (2.111)$$

2.4.3 波速估计

估计方法 1

$$s_L = \min(\bar{u} - \bar{c}, u_L - c_L), \quad s_R = \max(\bar{u} + \bar{c}, u_R + c_R), \quad (2.112)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \bar{c} &= \frac{c_L^2 \sqrt{\rho_L} + c_R^2 \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\rho_L} \sqrt{\rho_R}}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2} (u_R - u_L)^2. \end{aligned} \quad (2.113)$$

估计方法 2

这里给出一种估计 S_L, S_R 的方法 [27]:

$$s_L = v_L - c_L q_L, \quad s^* = v^*, \quad s_R = v_R + c_R q_R, \quad (2.114)$$

其中, for $K = L, R$,

$$q^K = \begin{cases} 1 & \text{if } p^* \leq p^K, \\ \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} (p^*/p^K - 1)\right)^{1/2} & \text{if } p^* > p^K, \end{cases} \quad (2.115)$$

其中

$$p^* = \frac{1}{2} (p_L + p_R) - \frac{1}{2} (v_R - v_L) \bar{\rho} \bar{c}, \quad v^* = \frac{1}{2} (v_L + v_R) - \frac{p_R - p_L}{2\bar{\rho} \bar{c}}, \quad (2.116)$$

其中

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} (\rho_L + \rho_R), \quad \bar{c} = \frac{1}{2} (c_L + c_R). \quad (2.117)$$

2.5 双曲型方程 (hyperbolic equation)

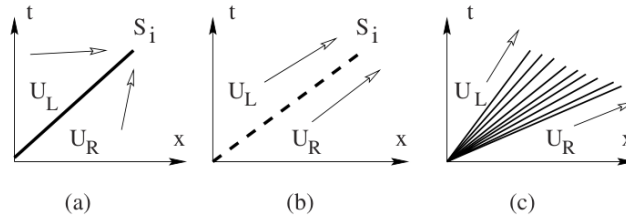


Fig. 2.20. Elementary wave solutions of the Riemann problem: (a) shock wave of speed S_i , (b) contact discontinuity of speed S_i and (c) rarefaction wave

图 2.3: Elementary wave solutions of the Riemann problem: (a) shock wave of speed S_i , (b) contact discontinuity of speed S_i and (c) rarefaction wave

2.5.1 激波 (Shock Wave)

For a shock wave the two constant states \mathbf{U}_L and \mathbf{U}_R are connected through a single jump discontinuity in a genuinely non-linear field \mathbf{f} and the following conditions apply the Rankine-Hugoniot conditions

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = S_i (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L). \quad (2.118)$$

the entropy condition

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) > S_i > \lambda_i(\mathbf{U}_R) \quad (2.119)$$

Fig. 2.20a depicts a shock wave of speed S_i . The characteristic $dx/dt = \lambda_i$ on both sides of the wave run into the shock wave, which illustrates the compressive character of a shock.

2.5.2 接触间断 (Rarefaction Wave)

For a contact wave the two data states \mathbf{U}_L and \mathbf{U}_R are connected through a single jump discontinuity of speed S_i in a linearly degenerate field i and the following conditions apply the Rankine-Hugoniot conditions

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = S_i (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (2.120)$$

constancy of the Generalised Riemann Invariants across the wave

$$\frac{dw_1}{k_1^{(i)}} = \frac{dw_2}{k_2^{(i)}} = \frac{dw_3}{k_3^{(i)}} = \dots = \frac{dw_m}{k_m^{(i)}}. \quad (2.121)$$

the parallel characteristic condition

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) = \lambda_i(\mathbf{U}_R) = S_i \quad (2.122)$$

Fig. 2.20b depicts a contact discontinuity. Characteristics on both sides of the wave run parallel to it.

2.5.3 稀疏波 (Rarefaction Wave)

For a rarefaction wave the two data states \mathbf{U}_L and \mathbf{U}_R are connected through a smooth transition in a genuinely non-linear field i and the following conditions are met constancy of the Generalised Riemann Invariants across the wave

$$\frac{dw_1}{k_1^{(i)}} = \frac{dw_2}{k_2^{(i)}} = \frac{dw_3}{k_3^{(i)}} = \dots = \frac{dw_m}{k_m^{(i)}}. \quad (2.123)$$

divergence of characteristics

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) < \lambda_i(\mathbf{U}_R) \quad (2.124)$$

Fig. 2.20c depicts a rarefaction wave. Characteristics on the left and right of the wave diverge as do characteristics inside the wave.

Chapter 3

附录

3.1 模板

	$N \times N$	DG with MRWENO limiter				DG with WENO-JS limiter			
		L_1 error	Order	L_∞ error	Order	L_1 error	Order	L_∞ error	Order
P^1	50×50	8.74E-05		1.38E-04		1.97E-04		8.99E-04	
	60×60	5.77E-05	2.28	9.07E-05	2.30	1.01E-04	3.68	5.51E-04	2.68
	70×70	4.09E-05	2.22	6.41E-05	2.25	6.18E-05	3.16	2.89E-04	4.18
	80×80	3.08E-05	2.14	4.83E-05	2.11	4.44E-05	2.48	1.85E-04	3.34
	90×90	2.40E-05	2.11	3.77E-05	2.10	3.16E-05	2.89	1.27E-04	3.22
	100×100	1.93E-05	2.09	3.02E-05	2.09	2.47E-05	2.33	8.66E-05	3.62
P^2	50×50	3.60E-06		5.14E-06		3.59E-06		5.14E-06	
	60×60	2.08E-06	3.02	3.01E-06	2.93	2.07E-06	3.01	3.01E-06	2.93
	70×70	1.30E-06	3.03	1.91E-06	2.95	1.30E-06	3.02	1.91E-06	2.95
	80×80	8.69E-07	3.03	1.29E-06	2.96	8.68E-07	3.03	1.29E-06	2.96
	90×90	6.08E-07	3.03	9.08E-07	2.97	6.08E-07	3.02	9.08E-07	2.97
	100×100	4.42E-07	3.03	6.64E-07	2.97	4.42E-07	3.03	6.64E-07	2.97

Listing 3.1: **main.m**

```
1 clc; % 清除命令行
2 clear; % 清除工作区
3 close all; % 关闭所有图形窗口
4
5 % 数据输入: N表示数据点数, err1和err2表示两组误差数据
6 data = [50 3.60E-06 5.14E-06
7         60 2.08E-06 3.01E-06
8         70 1.30E-06 1.91E-06
```

```

9         80 8.69E-07  1.29E-06
10        90 6.08E-07  9.08E-07
11        100 4.42E-07 6.64E-07];
12
13 % 提取数据
14 N = data(:,1); % 数据点数
15 err1 = data(:,2); % 第一组误差数据
16 err2 = data(:,3); % 第二组误差数据
17
18 % 定义斜率为-3的直线的起始点和比例系数
19 y_start = 1e-5; % 起始点的y值
20 order = 3; % 斜率为-3
21 xx = N; % 使用相同的N值作为x坐标
22 k = y_start / (xx(1)^(-order)); % 计算比例系数
23 yy = k * xx.^(-order); % 计算斜率为-3的直线的y值
24
25 %% 绘图
26 figure; % 创建新的图形窗口
27 hold on; % 保持当前图形窗口，允许在同一窗口中绘制多条曲线
28
29 % 绘制第一组误差数据，红色线条，线宽2
30 plot(N, err1, '*-r', 'LineWidth', 2);
31
32 % 绘制第二组误差数据，蓝色线条，线宽2
33 plot(N, err2, '*-b', 'LineWidth', 2);
34
35 % 绘制斜率为-3的直线，黑色虚线加菱形标记，线宽2
36 plot(xx, yy, 'k--d', 'LineWidth', 2);
37
38 hold off; % 释放当前图形窗口
39
40 % 设置坐标轴为对数坐标轴
41 set(gca, 'XScale', 'log', 'YScale', 'log');
42
43 % 添加图形标签和标题

```

```

44 xlabel('N'); % x轴 标签
45 ylabel('Error'); % y轴 标签
46 legend('Error 1', 'Error 2', 'Slope -3 Line'); % 图例

```

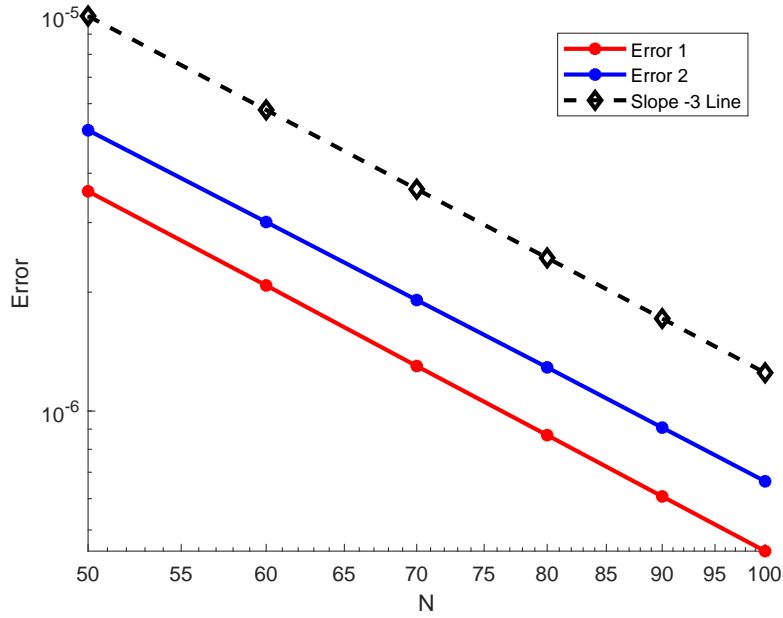


图 3.1

3.2 WENO3 与 WENO5 参数求解过程

WENO5 重构多项式:

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= \frac{1}{2} \left(u_i^{(0)} - 2u_{i-1}^{(0)} + u_{i-2}^{(0)} \right) x^2 + \frac{1}{2} \left(3u_i^{(0)} - 4u_{i-1}^{(0)} + u_{i-2}^{(0)} \right) x + \frac{23}{24} u_i^{(0)} + \frac{1}{12} u_{i-1}^{(0)} - \frac{1}{24} u_{i-2}^{(0)} \\
 P_1(x) &= \frac{1}{2} \left(u_{i+1}^{(0)} - 2u_i^{(0)} + u_{i-1}^{(0)} \right) x^2 + \frac{1}{2} \left(u_{i+1}^{(0)} - u_{i-1}^{(0)} \right) x - \frac{1}{24} u_{i+1}^{(0)} + \frac{13}{12} u_i^{(0)} - \frac{1}{24} u_{i-1}^{(0)} \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2} \left(u_i^{(0)} - 2u_{i+1}^{(0)} + u_{i+2}^{(0)} \right) x^2 + \frac{1}{2} \left(4u_{i+1}^{(0)} - u_{i+2}^{(0)} - 3u_i^{(0)} \right) x + \frac{1}{12} u_{i+1}^{(0)} - \frac{1}{24} u_{i+2}^{(0)} + \frac{23}{24} u_i^{(0)}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

满足:

$$\begin{aligned}
\int_{-5/2}^{-3/2} P_0(x) dx &= u_{i-2}^{(0)}, & \int_{-3/2}^{-1/2} P_0(x) dx &= u_{i-1}^{(0)}, & \int_{-1/2}^{1/2} P_0(x) dx &= u_i^{(0)} \\
\int_{-3/2}^{-1/2} P_1(x) dx &= u_{i-1}^{(0)}, & \int_{-1/2}^{1/2} P_1(x) dx &= u_i^{(0)}, & \int_{1/2}^{3/2} P_1(x) dx &= u_{i+1}^{(0)} \\
\int_{-1/2}^{1/2} P_2(x) dx &= u_i^{(0)}, & \int_{1/2}^{3/2} P_2(x) dx &= u_{i+1}^{(0)}, & \int_{3/2}^{5/2} P_2(x) dx &= u_{i+2}^{(0)}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.3 编程小技巧

3.3.1 程序加速

- 使用 linux 系统似乎会加快计算速度。
- 使用并行算法可以显著提升速度。
- 使用 c++, Fortran 等编译型语言放弃 MATLAB 等解释型语言
- 使用自适应网络。
- 使用合适的 CFL 数与合适的高斯积分点。
- 在初始化的时候储存基函数 $\varphi(x)$ 在高斯点处的值，从而省去每次计算 $\varphi(x_0)$ 。

3.3.2 检查程序错误

- 只完成初始化，不做时间推进，然后测试精度是否满足预期。这样可以检查初始化与精度计算是否有误。
- 左右特征向量矩阵相乘，检验是否得到单位矩阵。这样可以检查特征向量矩阵是否写错。
- 在测试二维程序的时候，将一个一维问题延拓成二维问题，并把计算结果与一维问题的情况做对比。
- 在测试二维程序的时候，先找一个对称的问题，检查计算结果是否对称。
- 先使用 L-F, P1 这样简单的设置，再尝试复杂的设置。
- 先计算结构化网络，再计算非结构化网络。
- 保极值限制器中 ϵ 不宜太小，参考值：1e-8 1e-13
- 太少的网格数量也可能导致程序出错

3.4 边界条件

3.4.1 周期性边界条件

3.4.2 常数边界条件

3.4.3 反射边界条件

3.4.4 滑移边界条件

3.5 多元微积分

3.5.1 方向导数

定义 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为开集,

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (3.3)$$

是定义在 D 上的二元函数, $(x_0, y_0) \in D$ 为一定点, $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 为一个方向。如果极限

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (3.4)$$

存在, 则称此极限为函数 f 在点 (x_0, y_0) 的沿方向 \mathbf{v} 的方向导数, 记为 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$ 。

定理: 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为开集, $(x_0, y_0) \in D$ 为一定点。如果函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (3.5)$$

在 (x_0, y_0) 可微, 那么对于任一方向 $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, f 在 (x_0, y_0) 点沿方向 \mathbf{v} 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin \alpha. \quad (3.6)$$

3.5.2 梯度

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为开集, $(x_0, y_0) \in D$ 为一定点。如果函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点可偏导, 则称向量 $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ 为 f 在点 (x_0, y_0) 的梯度, 记为 $\text{grad } f(x_0, y_0)$, 即

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \mathbf{i} + f_y(x_0, y_0) \mathbf{j} \quad (3.7)$$

如果 f 在 (x_0, y_0) 点可微, 注意到方向导数公式中的 $\|\mathbf{v}\| = 1$, 则得到它的另一种表达:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} = \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| \cos(\text{grad } f, \mathbf{v}) \quad (3.8)$$

其中 $(\text{grad } f, \mathbf{v})$ 表示 $\text{grad } f(x_0, y_0)$ 与 \mathbf{v} 的夹角。

3.5.3 Green 公式

设 D 为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围的单连通闭区域。如果函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有连续偏导数, 那么

$$\int_D P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy, \quad (3.9)$$

其中 ∂D 取正向, 即诱导定向。

3.5.4 散度

维基百科：散度 在三维直角坐标系 xyz 中, 设向量场 \mathbf{A} 的表示为 $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}$ 其中的 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别是 x 轴、 y 轴、 z 轴方向上的单位向量, 场的分量 A_x, A_y, A_z 具有一阶连续偏导数, 那么向量场 \mathbf{A} 的散度就是:

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.10)$$

3.5.5 拉普拉斯算子

text

3.5.6 维基百科：拉普拉斯算子

∇f 在三维直角坐标系中表示为

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (3.11)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为标准的单位向量, 分别指向 x, y 跟 z 坐标的方向.

3.5.7 范数

范数 (norm) 是一个函数, 它将一个向量映射到非负实数. 在机器学习和优化中, 范数是一种衡量向量大小或长度的方式.

L1, L2 和 L 无穷范数是线性代数中的三种不同的向量范数 (或向量长度度量), 它们在数学和数据科学领域中经常使用.

L1 范数: L1 范数也称为曼哈顿距离, 它是一个向量中每个元素的绝对值之和. 对于一个 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其 L1 范数定义如下:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad (3.12)$$

L2 范数: L2 范数也称为欧几里得距离, 它是向量中每个元素平方和的平方根. 对于一个 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其 L2 范数定义如下:

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (3.13)$$

L_∞ 范数: L_∞ 范数也称为最大值范数, 它是向量中所有元素的绝对值中最大的值. 对于一个 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其 L_∞ 定义如下:

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad (3.14)$$

这些向量范数在机器学习和优化算法中经常使用, 例如 L1 和 L2 正则化 (用于缩小模型参数), L1 和 L2 距离度量 (用于计算相似性或距离), 以及 L1 和 L2 约束 (用于限制变量的取值范围).

3.5.8 张量积

3.6 定义

Definition 3.6.0.1: 标

的巴赫曼-朗道符号 (Bachmann-Landau notation) 如下:

- $g(\Delta x) = O(\Delta x^n)$ 意为: 存在常数 $C > 0$, 使得当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $|g(\Delta x)| \leq C\Delta x^n$
- $g(\Delta x) = \Omega(\Delta x^n)$ 意为: 存在常数 $C > 0$, 使得当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $|g(\Delta x)| \geq C\Delta x^n$
- $g(\Delta x) = \Theta(\Delta x^n)$ 意为: 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $g(\Delta x) = O(\Delta x^n)$ and $g(\Delta x) = \Omega(\Delta x^n)$

请注意, 根据这个定义, $g = O(1)$ 并不意味着 g 是一个常数; 相反, 它意味着常数是 g 的上限, 即

$\Delta x \rightarrow 0$, 或者换句话说, g 不会随着 Δx 渐近增长. 例如, 此表示法中的 $\Delta x^{2/3} = O(1)$.

Definition 3.6.0.2: 如

$f(x_c) = f'(x_c) = \dots = f^{(n_{cp})}(x_c) = 0$ 但 $f^{(n_{cp}+1)}(x_c) \neq 0$, 那么 x_c 被认为是 $f(x)$ 的阶 n_{cp} 的临界点 (critical point)。如果 $f'(x_c) \neq 0$, 则 x_c 被定义为 $f(x)$ 的 0 阶临界点。

Definition 3.6.0.3: []

If the smoothness indicator measures the smoothness of the whole R points stencil $\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}$, it is called a global smoothness indicator; it is said to be a local smoothness indicator if it only acts in an r points substencil $\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}^k \subset \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}$.

Definition 3.6.0.4: []

simple critical points i.e., x such that $f'(x) = 0$ but $f''(x) \neq 0$

Definition 3.6.0.5: []

flatter critical points (where $f'(x) = f''(x) = 0$)

3.7 控制方程

3.7.1 一维方程

欧拉方程

方程形式

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

或

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{1}{2}(3 - \gamma) \frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma - 1)u_3 \\ \gamma \frac{u_2}{u_1} u_3 - \frac{1}{2}(\gamma - 1) \frac{u_2^3}{u_1^2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

这里 ρ 为密度, p 为压力, u 为粒子速度, E 为每单位体积的总能量.

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \quad (3.17)$$

对于空气, 一般可取 $\gamma = 1.4$. 声速 a 的表达式为:

$$a = \sqrt{(p/\rho^2 - e_p)/e_p} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (3.18)$$

特征分析 Jacobian 矩阵为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \partial f_1 / \partial u_2 & \partial f_1 / \partial u_3 \\ \partial f_2 / \partial u_1 & \partial f_2 / \partial u_2 & \partial f_2 / \partial u_3 \\ \partial f_3 / \partial u_1 & \partial f_3 / \partial u_2 & \partial f_3 / \partial u_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3 - \gamma)\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & \gamma - 1 \\ -\frac{\gamma u_2 u_3}{u_1^2} + (\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 & \frac{\gamma u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(3 - \gamma)u^2 & (3 - \gamma)u & (\gamma - 1) \\ -\gamma\frac{Eu}{\rho} + (\gamma - 1)u^3 & \gamma\frac{E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{U})$ 的特征值为:

$$\lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + a \quad (3.22)$$

左右特征向量为 [44]:

$$L_j(u) = \begin{pmatrix} \frac{B_2 + \mu/c}{2} & -\frac{B_1\mu + 1/c}{2} & \frac{B_1}{2} \\ 1 - B_2 & B_1\mu & -B_1 \\ \frac{B_2 - \mu/c}{2} & -\frac{B_1\mu - 1/c}{2} & \frac{B_1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$R_j(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu - c & \mu & \mu + c \\ H - c\mu & \mu^2/2 & H + c\mu \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

where $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$, $B_1 = (\gamma - 1)/c^2$, $B_2 = B_1 \mu^2 / 2$ and $H = (E + p)/\rho$. 对应的右特征向量为:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

其中 H 为总比焓 (total specific enthalpy), h 为比焓 (specific enthalpy).

$$H = (E + p)/\rho \equiv \frac{1}{2}u^2 + h, \quad h = e + p/\rho \quad (3.26)$$

算例

Example 10 (Linear Equation). [16]

$$u_t + u_x = 0 \quad (3.27)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} -x \sin\left(\frac{3\pi}{2}x^2\right) & -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ |\sin(2\pi x)| & -\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3} \\ 2x - 1 - \frac{1}{6} \sin(3\pi x) & \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

$T = 11$, $N=200$, $CFL = 0.4$

Example 11 (Linear Equation). We solve the linear equation[20]:

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0 \quad -1 < x < 1, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{periodic} \end{aligned} \quad (3.29)$$

其中:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(G(x, \beta, z - \delta) + G(x, \beta, z + \delta) + 4G(x, \beta, z)) & -0.8 \leq x \leq -0.6 \\ 1 & -0.4 \leq x \leq -0.2 \\ 1 - |10(x - 0.1)| & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \frac{1}{6}(F(x, \alpha, a - \delta) + F(x, \alpha, a + \delta) + 4F(x, \alpha, a)) & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$G(x, \beta, z) = e^{-\beta(x-z)^2}$$

$$F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x - a)^2, 0)}$$

常数取为 $a = 0.5$, $z = -0.7$, $\delta = 0.005$, $\alpha = 10$ 和 $\beta = \frac{\log 2}{36\delta^2}$. 该解包含了一个平滑但狭窄的高斯函数组

合、一个方波、一个尖锐的三角波和一个半椭圆。

结束时间为 $t = 8$, 网格数量为 200.

Example 12. [24]

$$u_0(x) = e^{-300*(x-x_c)^2}, x_c = 0.5 \quad (3.31)$$

$x \in [0, 1]$ 周期边界条件, $t_{end} = 1$

Example 13. [interacting blast waves problem[24]]

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000), if 0 \leq x < 0.1 \\ (1, 0, 0.01), if 0.1 \leq x < 0.9 \\ (1, 0, 100), if 0.9 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.32)$$

reflective boundary conditions, $x = 0, x = 1, t_{end} = 0.038$,

Example 14. [Shu Osher 问题 [46]]

$$\begin{aligned} (\rho, v, p) &= (3.857143, 2.629369, 10.333333) & \text{当 } x \leq -4, \\ (\rho, v, p) &= (1 + \epsilon \sin(5x), 0, 1) & \text{当 } x > -4. \end{aligned} \quad (3.33)$$

选取 $\epsilon = 0.2$, 计算区域为 $[-5, 5]$, 两端边界条件按初值条件给定后保持不变, 求解至时间 $T = 1.8$.

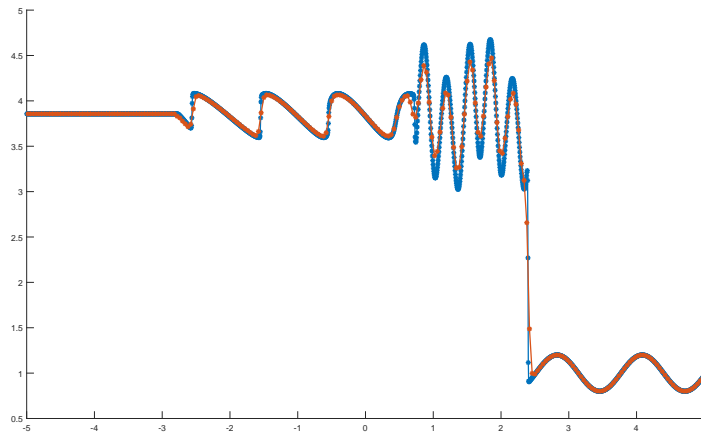


图 3.2: 蓝色: reference, 红色: DG(P^2)-WENOJS-M=50-N=200

3.7.2 二维方程

欧拉方程

方程形式

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

其中

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (3.36)$$

同时

$$F = \begin{bmatrix} \frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma - 1)u_4 + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ \frac{u_2}{u_1} \left(\gamma u_4 + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \right) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \frac{u_3^2}{u_1} + (\gamma - 1)u_4 + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ \frac{u_3}{u_1} \left(\gamma u_4 + \frac{1 - \gamma}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \right) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

特征分析 特征值为

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = u, \quad \lambda_4 = u + a \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma(u_2 - 3)^2 + (\gamma - 1)u_3^2}{2u_1^2} & -(\gamma - 3)\frac{u_2}{u_1} & -(\gamma - 1)\frac{u_3}{u_1} & \gamma - 1 \\ -\frac{u_2^2}{u_1^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} & 0 \\ \frac{u_2}{u_1} \frac{((\gamma - 1)(u_2^2 + u_3^2) - \gamma u_1 u_4)}{u_1^2} & \frac{3u_2^2 - \gamma u_3^2 - 3\gamma u_2^2 + u_3^2 + 2\gamma u_1 u_4}{2u_1^2} & -\frac{u_2 u_3 (\gamma - 1)}{u_1^2} & \frac{\gamma u_2}{u_1} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2 u_3}{u_1^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} & 0 \\ \frac{\gamma u_2^2 + \gamma u_3^2 - u_2^2 - 3 u_3^2}{2 u_1^2} & -\frac{u_1}{u_2 (\gamma - 1)} & -\frac{u_1}{u_3 (\gamma - 3)} & \gamma - 1 \\ \frac{u_3 ((\gamma - 1)(u_2^2 + u_3^2) - \gamma u_1 u_4)}{u_1^2} & -(\gamma - 1) \frac{u_2 u_3}{u_1^2} & \frac{(1 - \gamma)u_2^2 + 3(1 - \gamma) u_3^2 + 2 \gamma u_1 u_4}{2 u_1^2} & \frac{\gamma u_3}{u_1} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$F_U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathbf{V}^2 & (3 - \gamma)u & -(\gamma - 1)v & \gamma - 1 \\ -uv & v & u & 0 \\ u \left[\frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathbf{V}^2 - H \right] & H - (\gamma - 1)u^2 & -(\gamma - 1)uv & \gamma u \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

其中 $\mathbf{V}^2 = v^2 + u^2$,

左右特征向量为 [44]:

$$L_{ij}^x(u) = \begin{bmatrix} \frac{B_2 + \mu/c}{2} & -\frac{B_1\mu + 1/c}{2} & -\frac{B_1v}{2} & \frac{B_1}{2} \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ v & 0 & -1 & 0 \\ 1 - B_2 & B_1\mu & B_1v & -B_1 \\ \frac{B_2 - \mu/c}{2} & -\frac{B_1\mu - 1/c}{2} & -\frac{B_1v}{2} & \frac{B_1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_{ij}^x(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mu - c & 0 & \mu & \mu + c \\ v & -1 & v & v \\ H - c\mu & -v & \frac{\mu^2 + v^2}{2} & H + c\mu \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$L_{ij}^y(u) = \begin{bmatrix} \frac{B_2 + v/c}{2} & -\frac{B_1\mu}{2} & -\frac{B_1v + 1/c}{2} & \frac{B_1}{2} \\ -\mu & 1 & 0 & 0 \\ 1 - B_2 & B_1\mu & B_1v & -B_1 \\ \frac{B_2 - v/c}{2} & -\frac{B_1\mu}{2} & -\frac{B_1v - 1/c}{2} & \frac{B_1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_{ij}^y(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mu & 1 & \mu & \mu \\ v - c & 0 & v & v + c \\ H - cv & \mu & \frac{\mu^2 + v^2}{2} & H + cv \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

where $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$, $B_1 = (\gamma - 1)/c^2$, $B_2 = B_1 (\mu^2 + v^2) / 2$ and $H = (E + p)/\rho$

算例

Example 15 (光滑算例). 取计算域为 $[0, 10]^2$, 先给定一个平稳的流: $\rho = p = u = v = 1$, 然后在 $(x_0, y_0) = (5, 5)$ 施加一个冲击:

$$\begin{aligned} \Delta T &= -\frac{(\gamma-1)\varepsilon^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2} \\ \Delta S &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$(\Delta u, \Delta v) = \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{0.5(1-r^2)} (-\bar{y}, \bar{x}) \quad (3.45)$$

其中 $T = \frac{p}{\rho}$ 是温度, $S = \frac{p}{\rho^\gamma}$ 是熵, $(\bar{x}, \bar{y}) = (x-5, y-5)$, $r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$, $\varepsilon = 5$ (注意 $\Delta S = 0$ 不是一个没用的条件, 它表明了 $p = \rho^\gamma$)

Example 16. 二维黎曼问题 [38], 初值为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (0.8, 0, 0, 1), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1) \\ (1, 0.7276, 0, 1), & (x, y) \in [0, 1] \times [1, 2] \\ (1, 0, 0.7276, 1), & (x, y) \in [1, 2] \times [0, 1) \\ (0.5313, 0, 0, 0.4), & (x, y) \in [1, 2] \times [1, 2] \end{cases} \quad (3.46)$$

$p_1 < p_2 = p_3 = p_4$. 滑移边界条件. 建议计算至 $t = 0.52$, 网格为 260×260 .

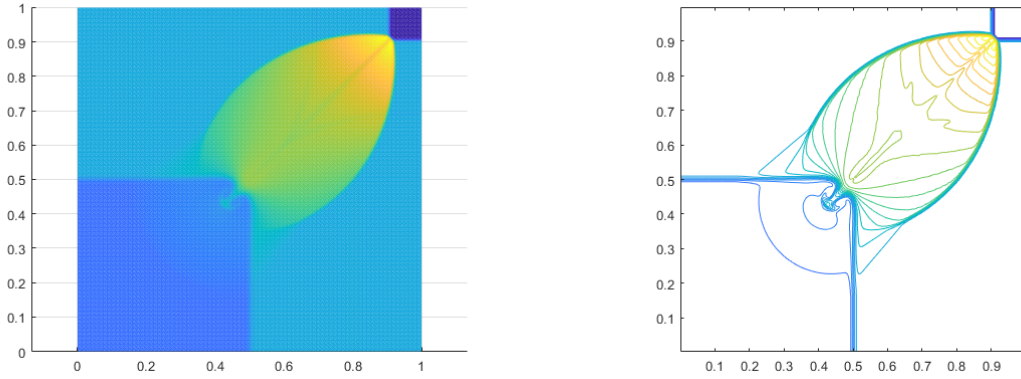


图 3.3: WENO-JS, $M=10$, 等高线: `linspace(0.56, 1.67, 30)`

3.8 基函数函数

对于基函数, [45]

3.8.1 一维

在 $[-1, 1]$ 上的勒让德函数为:

$$\begin{aligned}\varphi_0(\xi) &= 1 \\ \varphi_1(\xi) &= \xi \\ \varphi_2(\xi) &= (3\xi^2 - 1) / 2 \\ \varphi_3(\xi) &= (5\xi^3 - 3\xi) / 2 \\ \varphi_4(\xi) &= (35\xi^4 - 30\xi^2 + 3) / 8\end{aligned}\tag{3.47}$$

积分值为:

$$\int_{-1}^{-1} \varphi_i^2 dx = \frac{2}{2n+1}, n = 0, 1, 2, \dots\tag{3.48}$$

3.8.2 二维

$[-1, 1] \times [-1, 1]$ 上的勒让德函数为:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= 1 \\ \varphi_2(x, y) &= x \\ \varphi_3(x, y) &= y \\ \varphi_4(x, y) &= x^2 - 1/3 \\ \varphi_5(x, y) &= xy \\ \varphi_6(x, y) &= y^2 - 1/3\end{aligned}\tag{3.49}$$

对于 $[x_a, x_b] \times [y_a, y_b]$ 上的勒让德函数, 只需令 $\xi = \frac{x - \frac{x_a + x_b}{2}}{\frac{x_b - x_a}{2}}, \eta = \frac{y - \frac{y_a + y_b}{2}}{\frac{y_b - y_a}{2}}$

3.9 数值积分

一般采用的求积公式是机械求解求积公式中的高斯积分. 高斯积分是一种非常常用的数值积分方法, 具有如下优点:

- 高斯积分的精度随着积分点的增加而增加, 当积分点的数量足够大时, 可以达到非常高的精度.
- 当使用的点数固定为 n 个时, 高斯积分具有 $2n - 1$ 阶的精度, 是所有机械求积公式中最高的. 因此在计算复杂函数积分时, 高斯积分可以显著减少计算时间和计算成本.
- 高斯积分公式可以非常方便地使用代码实现.

具体而言, 该公式可写成:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i f(x_i) \quad (3.50)$$

其中, ω_i 和 x_i 分别表示高斯积分公式中第 i 个点的权重和位置. 对于积分区间非 $[-1, 1]$ 的积分, 可以使用下面的公式:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt = \sum_i f\left(\frac{(b-a)x_i + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2} \omega_i \quad (3.51)$$

表 3.1 给出 $n = 2, 3, 4, 5$ 时, 高斯积分的取值点和权重大小.

表 3.1: Gauss-Legendre 的取值点和权重大小

n	取值点 x_i	权重 w_i
2	± 0.57735027	1.00000000
3	0.00000000, ± 0.77459667	0.88888889, 0.55555556
4	± 0.86113631 , ± 0.33998104	0.34785485, 0.65214515
5	0.00000000, ± 0.53846931 , ± 0.90617985	0.56888889, 0.23692689, 0.23692689

还有一种求积方式也称为 Gauss-Lobatto 求积, 以荷兰数学家 Rehuel Lobatto 命名. 它类似于高斯求积, 但有以下区别:

- 积分点包括积分区间的端点.
- 对于 $2n-3$ 次以下的多项式, 它是准确的, 其中 n 是积分点的数量.

当需要使用区间断点作为积分点的时候, 应当选用 Gauss-Lobatto 求积.

[9] reamrk 2.6

为了计算 xx 中非线性 f 的积分, 必须使用正确阶次的求积, 以便近似误差

$$\frac{1}{\Delta x_j^{l+1}} \int_{I_j} f(u^h(x, t)) \frac{d}{dx} v_l^{(j)}(x) dx \quad (3.52)$$

为 $O(h^{k+1})$. 我们需要使求积的误差为 $O(h^{2k+2})$. 对于高斯积分, 误差为 $O(h^{2n-1})$, 对于 Gauss-Lobatto, 误差为 $O(h^{2n-3})$.

另一方面, 由于我们可以在使用 Gauss-Lobatto 积分的时候, 可以将 $h_{j\pm 1/2}$ 储存起来, 用于后面计算 $f(u^h(x_{j\pm 1/2}, t))$ 从而节省计算量。所以在积分点的数量 n 相同的情况下, 优先使用 Gauss-Lobatto 积分。

- 对于 \mathbb{P}^1 的情况, 我们使用两点高斯积分点 $x_{i-\sqrt{3}/6}$ 和 $x_{i+\sqrt{3}/6}$ 。
- 对于 \mathbb{P}^2 的情况, 我们使用四点 Gauss-Lobatto 积分点 $x_{i-1/2}, x_{i-\sqrt{5}/10}, x_{i+\sqrt{5}/10}$, 和 $x_{i+1/2}$ 。
- 对于 \mathbb{P}^3 的情况, 我们使用四点 Gauss 积分点 $x_{i-\sqrt{525+70\sqrt{30}}/70}, x_{i-\sqrt{525-70\sqrt{30}}/70}, x_{i+\sqrt{525-70\sqrt{30}}/70}$ and $x_{i+\sqrt{525+70\sqrt{30}}/70}$ 。

表 3.2: Gauss-Lobatto 的取值点和权重大小

n	取值点 x_i	权重 w_i
2	± 1.00000000	1.00000000
3	$\pm 1.00000000, 0.00000000$	0.33333333, 1.33333333
4	$\pm 1.00000000, \pm 0.44721360$	0.16666667, 0.83333333
5	$\pm 1.00000000, \pm 0.65465367, 0.00000000$	0.10000000, 0.54444444, 0.71111111

对于 n 不同的情况, 可以从这个 [1] 查到更多 x_i, ω_i 的值。

3.10 计算精度

假设我们得到的近似解为 u_h , 准确解为 u 。

$$\|u_h - u\| = Ch^p + O(h^{p+1}) \quad (3.53)$$

下面介绍如何通过数值实验求出 p 。

在两次实验中, 我们使用了不同的 $h = h_1, h_2$, 得到的近似解为 u_{h_1}, u_{h_2} 。则:

$$\begin{aligned} \|u_{h_1} - u\| &= Ch_1^p + O(h_1^{p+1}) \\ \|u_{h_2} - u\| &= Ch_2^p + O(h_2^{p+1}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

做比得到:

$$\frac{\|u_{h_1} - u\|}{\|u_{h_2} - u\|} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p \quad (3.55)$$

于是

$$p = \frac{\ln \|u_{h_1} - u\| - \ln \|u_{h_2} - u\|}{\ln(h_1) - \ln(h_2)} \quad (3.56)$$

下面给出一种使用函数积分值来计算范数的方法：假设小区间的数量为 n , 数值解为 u_h , 准确解为 u .

- 对于 L_1 范数, 我们有:

$$\|u_h - u\| = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{I_i} |u_h - u| dx}{\sum_{i=1}^n \int_{I_i} dx} \quad (3.57)$$

- 对于 L_2 范数, 我们有:

$$\|u_h - u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{I_i} (u_h - u)^2 dx} \quad (3.58)$$

- 对于 L_∞ 范数, 我们有:

$$\|u_h - u\| = \max_i \left\{ \frac{\int_{I_i} (u_h - u)^2 dx}{\int_{I_i} dx} \right\} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} L_1 - \text{norm} &= \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u_h(x_i)| \\ L_2 - \text{norm} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (u(x_i) - u_h(x_i))^2} \\ L_\infty - \text{norm} &= \max_i |u(x_i) - u_h(x_i)|, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.60)$$

3.11 常用中英文对照表

- Analytical Solution : 解析解
- monotone: 单调
- consistency: 一致性
- Shock Wave: 激波
- Contact Wave: 接触间断
- Rarefaction Wave: 稀疏波
- efficient
- framework
- simulate

- compressible
- phase
- novel
- robust
- demonstrate

3.12 常用期刊名缩写

- J. Comput. Phys. : Journal of Computational Physics

3.13 常用缩写对照表

- CFL: Courant-Friedrichs-Lewy
- CFD: Computational Fluid Dynamics
- DG: discontinuous Galerkin
- DOF: Degree of Freedom
- ENO: essentially non-oscillatory scheme
- SSP: strong stability perserving
- TVD: total variation diminishing
- TVDM: total variation diminishing in the means
- HLLC:Harten-Lax-van Leer contact
- RK: Runge-Kutta
- FV: finite volume
- FD: finite difference
- JCP: Journal of Computational Physics
- PPM: piecewise parabolic method
- WENO: weighted essentially non-oscillatory schemes

参考文献

- [1] 高斯积分的节点值.
- [2] Rupak Biswas, Karen D. Devine, and Joseph E. Flaherty. Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 14(1-3):255–283, 1994.
- [3] Rupak Biswas, Karen D. Devine, and Joseph E. Flaherty. Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 14(1-3):255–283, 1994.
- [4] Rafael Borges, Monique Carmona, Bruno Costa, and Wai Sun Don. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 227(6):3191–3211, 2008.
- [5] A. Burbeau, P. Sagaut, and Ch H. Bruneau. A problem-independent limiter for high-order runge – kutta discontinuous galerkin methods. *Journal of Computational Physics*, 169(1):111–150, 2001.
- [6] Bernardo Cockburn, Suchung Hou, and Chi-Wang Shu. The runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws. iv: The multidimensional case. *Mathematics of Computation*, 54(190), 1990.
- [7] Bernardo Cockburn, Claes Johnson, C-W Shu, and Eitan Tadmor. *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations: lectures given at the 2nd session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Cetraro, Italy, June 23-28, 1997*. Springer, 2006.
- [8] Bernardo Cockburn, San-Yih Lin, and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws iii: One-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, 84(1):90–113, 1989.
- [9] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws ii: General framework. *Mathematics of Computation*, 52(186), 1989.

- [10] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws ii: General framework. *Mathematics of Computation*, 52(186), 1989. RKDG 系列论文 2.
- [11] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The runge-kutta discontinuous galerkin method for conservation laws v. *Journal of Computational Physics*, 141(2):199–224, 1998.
- [12] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. Runge-kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems. *Journal of scientific computing*, 16:173–261, 2001.
- [13] Wai-Sun Don and Rafael Borges. Accuracy of the weighted essentially non-oscillatory conservative finite difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 250:347–372, 2013.
- [14] Oliver Friedrich. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 144(1):194–212, 1998.
- [15] Sigal Gottlieb, Chi-Wang Shu, and Eitan Tadmor. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*, 43(1):89–112, 2001. ssp 龙格库塔法.
- [16] Youngsoo Ha, Chang Ho Kim, Hyoseon Yang, and Jungho Yoon. Improving accuracy of the fifth-order weno scheme by using the exponential approximation space. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 59(1):143–172, 2021.
- [17] Andrew K. Henrick, Tariq D. Aslam, and Joseph M. Powers. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points. *Journal of Computational Physics*, 207(2):542–567, 2005.
- [18] Changqing Hu and Chi-Wang Shu. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes. *Journal of Computational Physics*, 150(1):97–127, 1999.
- [19] Guang-Shan Jiang and Chi-Wang Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1):202–228, 1996.
- [20] Guang-Shan Jiang and Chi-Wang Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1):202–228, 1996.
- [21] L. Krivodonova, J. Xin, J. F. Remacle, N. Chevaugeon, and J. E. Flaherty. Shock detection and limiting with discontinuous galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 48(3-4):323–338, 2004.

- [22] L. Krivodonova, J. Xin, J. F. Remacle, N. Chevaugeon, and J. E. Flaherty. Shock detection and limiting with discontinuous galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 48(3-4):323–338, 2004. 基于 DG 超收敛性质的 KXRCF 指示器.
- [23] Doron Levy, Gabriella Puppo, and Giovanni Russo. Central weno schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(3):547–571, 1999.
- [24] Tian Liang and Lin Fu. A new type of non-polynomial based teno scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 497, 2024.
- [25] Xu-Dong Liu, Stanley Osher, and Tony Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115(1):200–212, 1994.
- [26] Jianxian Qiu. A numerical comparison of the lax – wendroff discontinuous galerkin method based on different numerical fluxes. *Journal of Scientific Computing*, 30(3):345–367, 2006.
- [27] Jianxian Qiu, Boo Cheong Khoo, and Chi-Wang Shu. A numerical study for the performance of the runge–kutta discontinuous galerkin method based on different numerical fluxes. *Journal of Computational Physics*, 212(2):540–565, 2006.
- [28] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Hermite weno schemes and their application as limiters for runge–kutta discontinuous galerkin method: one-dimensional case. *Journal of Computational Physics*, 193(1):115–135, 2004.
- [29] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Hermite weno schemes and their application as limiters for runge–kutta discontinuous galerkin method ii: Two dimensional case. *Computers & Fluids*, 34(6):642–663, 2005.
- [30] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Runge–kutta discontinuous galerkin method using weno limiters. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(3):907–929, 2005.
- [31] Jianxian Qiu and Chi-Wang Shu. Runge–kutta discontinuous galerkin method using weno limiters. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(3):907–929, 2005. WENO 格式在 DG 方法上的首次应用;后续将其应用于非结构化网络 Runge–Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters II: Unstructured meshes.
- [32] William H Reed and Thomas R Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA), 1973.
- [33] Yiqing Shen, Shiyao Li, Shengping Liu, Kai Cui, and Guannan Zheng. A robust common-weights weno scheme based on the flux vector splitting for euler equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 119, 2023. 欧拉方程算例黎曼问题.

- [34] Chi-Wang Shu. Tvb uniformly high-order schemes for conservation laws. *Mathematics of Computation*, 49(179), 1987.
- [35] Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics.pdf*. 2009.
- [36] Xiangxiong Zhang and Chi-Wang Shu. Maximum-principle-satisfying and positivity-preserving high-order schemes for conservation laws: survey and new developments. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 467(2134):2752–2776, 2011. 一篇比较重要的保极值 review.
- [37] Hongqiang Zhu, Jianxian Qiu, and Jun Zhu. A simple, high-order and compact weno limiter for rkdg method. *Computers & Mathematics with Applications*, 79(2):317–336, 2020.
- [38] Jun Zhu and Jianxian Qiu. A new type of finite volume weno schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Scientific Computing*, 73(2-3):1338–1359, 2017. 黎曼问题算例.
- [39] Jun Zhu, Jianxian Qiu, and Chi-Wang Shu. High-order runge-kutta discontinuous galerkin methods with a new type of multi-resolution weno limiters. *Journal of Computational Physics*, 404, 2020. 2023-2-2 导师让看的一篇论文.
- [40] Jun Zhu, Jianxian Qiu, Chi-Wang Shu, and Michael Dumbser. Runge-kutta discontinuous galerkin method using weno limiters ii: Unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(9):4330–4353, 2008.
- [41] Jun Zhu, Jianxian Qiu, Chi-Wang Shu, and Michael Dumbser. Runge-kutta discontinuous galerkin method using weno limiters ii: Unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(9):4330–4353, 2008.
- [42] Jun Zhu and Chi-Wang Shu. A new type of multi-resolution weno schemes with increasingly higher order of accuracy. *Journal of Computational Physics*, 375:659–683, 2018.
- [43] Jun Zhu, Chi-Wang Shu, and Jianxian Qiu. High-order runge-kutta discontinuous galerkin methods with a new type of multi-resolution weno limiters on triangular meshes. *Applied Numerical Mathematics*, 153:519–539, 2020.
- [44] Jun Zhu, Xinghui Zhong, Chi-Wang Shu, and Jianxian Qiu. Runge-kutta discontinuous galerkin method with a simple and compact hermite weno limiter. *Communications in Computational Physics*, 19(4):944–969, 2016. 欧拉方程的左右特征向量.
- [45] 梁俊凯. 欧拉方程间断伽辽金有限元解法的研究. 2018.
- [46] 程悦. *Runge-Kutta 间断 Galerkin 有限元方法的多种限制器比较*. Thesis, 2011.