三次样条插值

张阳

2022 年 5 月 28 日

目录

1 问题的引出

当多项式次数较大时 ($n \geqslant 8$)，使用多项式拟合函数 $f(x)$ 就会产生龙格现象。

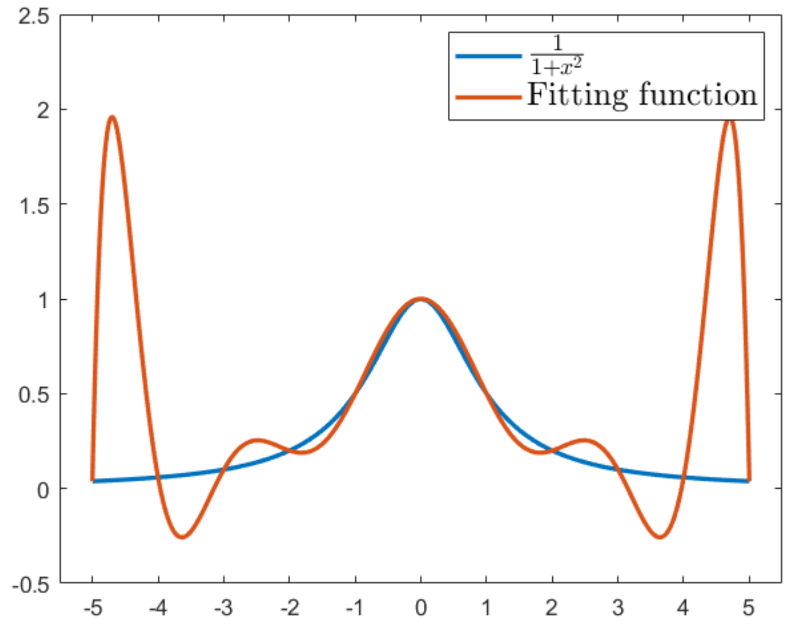

图 1: 图为 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 与 10 阶多项式拟合函数

为了避免高次多项式函数带来的龙格现象，又保留多项式函数的良好性质，我们采用了分段低次拟合的方法。

有定理已经证明，分段线性插值函数可在插值区间上一致收敛到原函数。

但是，分段线性插值函数在插值点处大多数情况下不可导，这就导致了拟合的函数不够光滑。因此，我们引入了三次样条插值。

2 三次样条插值的性质

定义 2.1. 若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$ 且在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式，其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是给定节点，则称 $S(X)$ 是节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的三次样条函数，若在节点 x_j 上给定函数值 $y_j = f(x_j)(j = 0, 1, \cdots, n)$，并成立

$$S(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n, \tag{2.1}$$

则称 $S(x)$ 为三次样条插值函数。记 $S_i(x) = S(x)|_{x \in [x_i, x_{i+1}]}$。

三次样条插值的特点是：在避免了龙格现象的同时，又使得插值函数具有良好的光滑性。

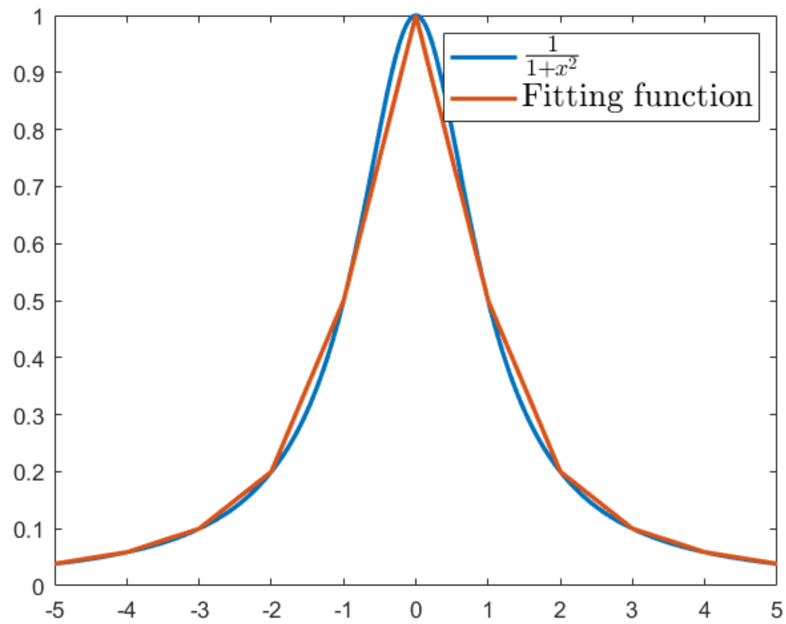

图 2: 图为 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 与线性插值拟合函数

3 计算三次样条插值

由定义知，$S(X)$ 在 $[a,b]$ 上的二阶导数连续（显然一阶导数和原函数也连续），于是应当满足

$$\begin{aligned} &S_a = y_0 \\ &S_b = y_n \\ &S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) = y_i, \quad i=1,2,\cdots,n-1 \\ &S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad i=1,2,\cdots,n-1 \\ &S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \quad i=1,2,\cdots,n-1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

共有 n 个三次函数，所以有 $4n$ 个未知参数求解，而 (3.1) 中共有 $4n-2$ 个等式。
为了求出确定的样条插值函数，还需给定 2 个条件。常用的条件有：

1. $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0$ 这样构造出来的样条称为自然样条
2. $S''_0(x_0) = u, S''_{n-1}(x_n) = v$ 这样构造出来的样条称为曲率调整三次样条
3. $S'_0(x_0) = u, S'_{n-1}(x_n) = v$ 这样构造出来的样条称为钳制三次样条
4. S_0, S_{n-1} 均为至多二阶，这样构造出来的样条称为抛物线端点的三次样条
5. $S'''_1(x_2) = S'''_2(x_2), S'''_{n-2}(x_{n-1}) = S'''_{n-1}(x_{n-1})$ 非纽结三次样条

下面给出三次样条插值的具体计算方法。

4 三次样条插值的理论推导

记

$$f'(x_i) = m_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{4.1}$$

为形式上的统一，记 $u = m_0, v = m_n$
于是有

	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
$f'(x)$	m_0	m_1	m_2	$\cdots$	m_n

通过 $S_i(x_i) = y_i, S_i'(x_i) = m_i, S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, S_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$ 得到

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{(x - x_{i+1})^2 \left[h_i + 2(x - x_i)\right]}{h_i^3} y_i \\ &+ \frac{(x - x_i)^2 \left[h_i + 2(x - x_{i+1})\right]}{h_i^3} y_{i+1} \\ &+ \frac{(x - x_{i+1})^2 (x - x_i)}{h_i^2} m_i \\ &+ \frac{(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})}{h_i^2} m_{i+1} \qquad i =, 0, 1 \cdots, n-1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$

注意 1. 这里求 $S_i(x)$ 用到了埃尔米特插值的基函数的方法。

为了解出 m_i，就要用到二阶导数连续的性质。

$$\begin{aligned} S_i''(x) &= \frac{6x - 2x_i - 4x_{i+1}}{h_i^2} m_i \\ &+ \frac{6x - 4x_i - 2x_{i+1}}{h_i^2} m_{i+1} \\ &+ \frac{6(x_i + x_{i+1} - 2x)}{h_i^3} (y_{i+1} - y_i) \quad , i = 0, 1, \cdots, n-1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

从而

$$\left.\begin{aligned} S_i''(x_i) &= -\frac{4}{h_i} m_i - \frac{2}{h_i} m_{i+1} + \frac{6}{h_i^2}(y_{i+1} - y_i) \\ S_i''(x_{i+1}) &= \frac{2}{h_i} m_i + \frac{4}{h_i} m_{i+1} - \frac{6}{h_i^2}(y_{i+1} - y_i) \end{aligned}\right. \quad , i = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{4.4}$$

由二阶导数连续的条件，有：

$$-\frac{4}{h_i} m_i - \frac{2}{h_i} m_{i+1} + \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) = \frac{2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{4}{h_{i-1}} m_i - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \quad , i = 1, 2, \cdots, n-1$$

整理得到：

$$\frac{1}{h_{i-1}}m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}\right)m_i+\frac{1}{h_i}m_{i+1}=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}\right)\quad(i=1,2,\cdots,n-1)\tag{4.5}$$

令

$$\lambda_i=\frac{\frac{1}{h_{i-1}}}{\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}}\quad\mu_i=\frac{\frac{1}{h_i}}{\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}}\quad g_i=3\frac{\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}}{\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}}\tag{4.6}$$

于是 (4.5) 可进一步化简为

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i\quad(i=1,2,\cdots,n-1)\tag{4.7}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}2&\mu_1&0&\cdots&0&0&0\\\lambda_2&2&\mu_2&\cdots&0&0&0\\0&\lambda_3&2&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&\mu_{n-1}&0\\0&0&0&\cdots&\lambda_{n-2}&2&\mu_{n-2}\\0&0&0&\cdots&0&\lambda_{n-1}&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1\\m_2\\m_3\\\vdots\\m_{n-3}\\m_{n-2}\\m_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1-\lambda_1m_0\\g_2\\g_3\\\vdots\\g_{n-3}\\g_{n-2}\\g_{n-1}-\mu_{n-1}m_n\end{bmatrix}\tag{4.8}$$

求解线性方程组 4.8 即可解出 $m_1,m_2,\cdots,m_{n-1}$ 从而算出 $s_i(x)$

注意 2. *由方程 4.6 可以看出，* $\mu_i,\lambda_i<1$ *所以此方程为严格对角占优矩阵。*

5 示例演示

- 根据下列数据点，求出三次样条插值多项式
- 利用三次样条插值多项式计算当 $x=3.5$ 时，y 的拟合值

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0.84	0.91	0.14	-0.76	-0.96	-0.28	-0.66	0.99
$f'(x)$	0.5403							-0.1455

利用公式 (4.6),(4.8)，可以得到关于 m_i 的线性方程组。

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3201 \\ -2.5050 \\ -1.6500 \\ 0.7200 \\ 2.4300 \\ 1.9778 \end{bmatrix} \tag{5.1}
$$

解得：

$$
m = [0.5403, -0.4133, -0.9869, -0.6490, 0.2831, 0.9568, 0.7497, -0.1455]^T
$$

带入 (4.2)，即可得到：

$$
S(x) = \begin{cases} 0.84(x-2)^2(2x-1) - 0.91(x-1)^2(2x-5) + 0.54(x-1)(x-2)^2 - 0.41(x-1)^2(x-2) & x \in (1,2) \\ 0.91(x-3)^2(2x-3) - 0.99(x-2)^2(x-3) - 0.14(x-2)^2(2x-7) - 0.41(x-2)(x-3)^2 & x \in (2,3) \\ 0.14(x-4)^2(2x-5) - 0.99(x-4)^2(x-3) - 0.65(x-4)(x-3)^2 + 0.76(x-3)^2(2x-9) & x \in (3,4) \\ 0.96(x-4)^2(2x-11) - 0.76(x-5)^2(2x-7) - 0.65(x-4)(x-5)^2 + 0.28(x-4)^2(x-5) & x \in (4,5) \\ 0.28(x-5)(x-6)^2 + 0.96(x-5)^2(x-6) - 0.96(x-6)^2(2x-9) + 0.28(x-5)^2(2x-13) & x \in (5,6) \\ 0.96(x-6)(x-7)^2 + 0.75(x-6)^2(x-7) - 0.28(x-7)^2(2x-11) - 0.66(x-6)^2(2x-15) & x \in (6,7) \\ 0.75(x-8)^2(x-7) - 0.15(x-8)(x-7)^2 + 0.66(x-8)^2(2x-13) - 0.99(x-7)^2(2x-17) & x \in (7,8) \end{cases} \tag{5.2}
$$

于是 $S(3.5) = -0.3522$

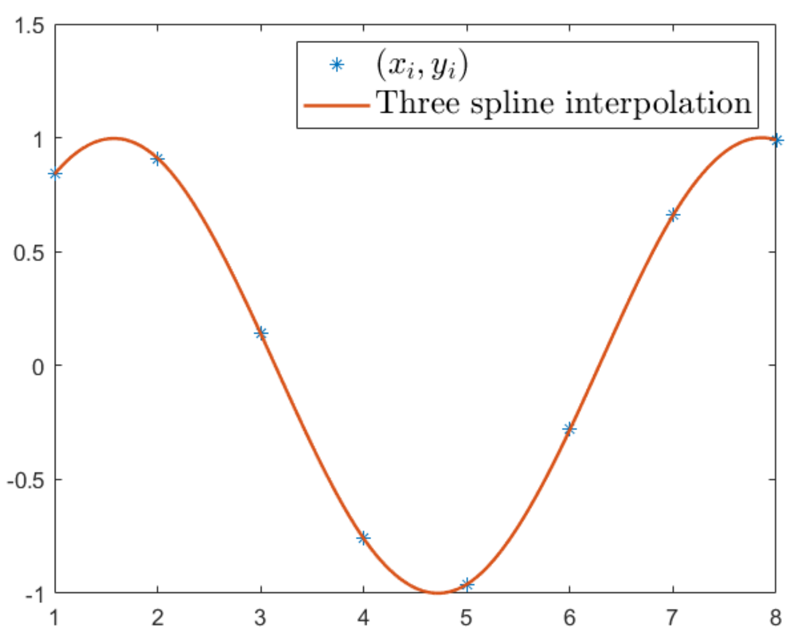

图 3: 插值点与插值函数

6 代码附录

Listing 1: **main.m**

```
clc , clear , close  all
x = [45 75 105 135 165 225 255];
y = [20 60 60 20 -60 -100 20];
n = length(x);
u = 0;
v = 3;
m = get_m(x,y,u,v);
xx = x(1):0.01:x(end);
yy = my_elmit(x,y,m,xx);
plot(x,y ,'*')
hold on
plot(xx,yy,'LineWidth',1.5)
h=legend('$(x_i,y_i)$','Three spline  interpolation ');
set(h,'Interpreter','latex','FontName','Times New Roman','FontSize',15,'FontWeight','normal')
```

Listing 2: **get_m.m**

```
function m = get_m(x,y,u,v)
n = length(x);
lambda = zeros(1,n-2);
mu = zeros(1,n-2);
g = zeros(1,n-2);
h = diff(x);

for i = 1:n-2
    lambda(i) = h(i+1)/(h(i)+h(i+1));
    mu(i) = 1-lambda(i);
    g_1 = h(i)^2*(y(i+2)-y(i+1)) + h(i+1)^2*(y(i+1)-y(i));
    g_2 = h(i)^2*h(i+1)+h(i+1)^2*h(i);
    g(i) = 3 * g_1/g_2 ;
end

A_1 = diag(2*ones(1,n-2));
A_2 = diag(lambda(2:end),-1);
A_3 = diag(mu(1:end-1),1);
A = A_1+A_2+A_3;

```

```
b = g';

b(1) = b(1) - lambda(1)*u;
b(end) = b(end) - mu(end)*v;
m = A\b;
m = [u;m;v];

end
```

Listing 3: **my_elmit.m**

```
function yy = my_elmit(x,y,m,xx)

n = length(x);
nn = length(xx);
yy = zeros(1,nn);
for i = 1:nn
    if xx(i) == x(end)
        yy(i) = y(end);
        continue
    elseif xx(i) == x(1)
        yy(i) = y(1);
        continue
    end


    dif = xx(i)-x;
    index = zeros(1,2);
    for j = 1:n
        if dif(j)<=0
            index(1) = round(j-1);
            index(2) = round(j);
            break
        end
    end

    index = sort(index);
    x_temp = x(index);
```

```
    y_temp = y(index);
    m_temp = m(index);


    s_1 = (xx(i) - x_temp(2))^2 * (1 + 2*(xx(i)-x_temp(1))/diff(x_temp)) / diff(x_temp)^2 * y_temp(1);
    s_2 = (xx(i) - x_temp(1))^2 * (1 - 2*(xx(i)-x_temp(2))/diff(x_temp)) / diff(x_temp)^2 * y_temp(2);
    s_3 = (xx(i) - x_temp(2))^2 * (xx(i) - x_temp(1)) / diff(x_temp)^2 * m_temp(1);
    s_4 = (xx(i) - x_temp(1))^2 * (xx(i) - x_temp(2)) / diff(x_temp)^2 * m_temp(2);
    s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4;
    yy(i) = s;
end
end
```