

# 数学小结论

张阳

2022 年 8 月 19 日

## 目录

1	定义	2
2	等式	2
3	不等式	3
4	代数	4

## 1 定义

**定义 1** (对角占优矩阵). 对角占优矩阵是指一矩阵的每一横行, 对角线上元素的大小大于或等于同一横行其他元素大小的和, 一矩阵  $A$  为对角占优矩阵若

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{for all } i \quad (1.1)$$

其中  $a_{ij}$  为第  $i$  行第  $j$  列的元素。

上述的定义中用到大于等于, 其条件较松, 因此有时会称为弱对角占优矩阵, 若上述的定义用大于代替大于等于, 则称为强对角占优矩阵。对角优势矩阵可以指弱对角占优矩阵, 也可以指强对角占优矩阵, 视上下文而定。

**定义 2** (范数).

**定义 3** (距离). 设  $\mathbb{X}$  为一非空集合, 如果对于  $\mathbb{X}$  中任给的两个元素  $x, y$ , 均有一个确定的实数, 记为  $\rho(x, y)$ , 与它们对应且满足下面三个条件:

- 非负性:  $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0$  的充分必要条件是  $x = y$ 。
- 对称性:  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 。
- 三角不等式:  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ , 这里  $z$  也是  $\mathbb{X}$  中的任意一个元素

则称  $\rho$  是  $\mathbb{X}$  上的一个距离, 而称  $\mathbb{X}$  是以  $\rho$  为距离的距离空间, 记为  $(X, \rho)$

**定义 4** (内积).

## 2 等式

**定理 1.** *Stirling* 公式

**定理 2.** *Wallis* 公式

**定理 3.** 和差化积公式

**定理 4.** 积化和差公式

**定理 5.**

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n = 2m \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (2.1)$$

证明. 1. 对于  $n = 1, \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 1$ , 结论显然成立

2. 对于  $n = 2$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \, d\varphi &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi \\
&= \left. \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2\varphi}{2} \right|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

结论也成立

3. 对于  $n > 2$  的情况:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi \, d\varphi = - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} \varphi \, d \cos \varphi \\
&= - \sin^{n-1} \varphi \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi - (n-1)I
\end{aligned} \tag{2.3}$$

所以

$$I = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi \tag{2.4}$$

利用 (2.4) 不难计算验证原结论。

综上 (2.1) 对任意  $n \in \mathbb{N}$  都成立。 □

**定理 6.** 二阶常系数齐次线性递推数列通项公式 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/33854447>

### 3 不等式

**定理 7.** 闵可夫斯基不等式 5

**定理 8.** 柯西不等式

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \tag{3.1}$$

其中  $a_k, b_k (k=1, 2, \dots, n)$  均为实数。

证明. 任取实数  $\lambda$ , 则

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^n a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \tag{3.2}$$

右端是  $\lambda$  的二次三项式。上述不等式表明, 它对于  $\lambda$  的一切实数值都是非负的, 故其判别式不大于零, 即

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \tag{3.3}$$

□

**定理 9.** 琴生不等式 1

**定理 10.** 柯西-施瓦茨不等式

**定理 11.** 伯努利不等式

$$(1+x)^a > 1+ax \quad (3.4)$$

其中,  $a$  为正实数,  $x \geq -1$

证明. 设  $f(x) = (1+x)^a - ax - 1$ , 于是  $f'(x) = a(1+x)^{a-1} - a$ ,  $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} > 0$ , 而  $f'(0) = 0$ , 所以  $f(x) \geq f(0) = 0$ .  $\square$

**定理 12.** 设  $a, b \geq 0, p, q$  为满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  的正数, 则

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad (3.5)$$

证明. 考虑函数  $f(x) = \ln x$ , 由  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  是严格上凸函数. 由上凸函数的性质可得:

$$\ln(ab) = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \quad (3.6)$$

由  $\ln(x)$  的单调性即可得到原不等式.  $\square$

## 4 代数

**定理 13.** 若  $A$  为实方阵, 则  $A$  为实对称阵当且仅当  $AA^T = A^2$

证明. 一个有关迹的例题在证明中的运用  $\square$

**定理 14.**  $A$  为实对称矩阵, 则

$$A = 0 \iff \text{tr}(AA^T) = 0 \quad (4.1)$$

**定理 15.** 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (4.2)$$

则  $|a_{ij}| > 0$

证明. 先证明  $|A| \neq 0$  华中科大 2022 高代: 主对角占优矩阵

若  $|A| = 0$ , 则存在一个非零向量  $x$ , 满足:

$$Ax = 0 \quad (4.3)$$

记  $x_m = \max_i x_i$ , 于是, 考虑线性方程组 (4.3) 中的第  $m$  个方程, 有:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \quad (4.4)$$

将除第  $m$  项外的其他项移到等式右边, 再将等式两边除以  $m$ , 得到:

$$x_m = -\frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1 - \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2 - \cdots - \frac{a_{m(m-1)}}{a_{mm}}x_{m-1} - \frac{a_{m(m+1)}}{a_{mm}}x_{m+1} - \cdots - \frac{a_{mn}}{a_{mm}}x_n \quad (4.5)$$

于是

$$\begin{aligned} |a_{mm}| &= \left| \frac{x_1}{x_m}a_{m1} + \frac{x_2}{x_m}a_{m2} + \cdots + \frac{x_{m-1}}{x_m}a_{m(m-1)} + \frac{x_{m+1}}{x_m}a_{m(m+1)} + \cdots + \frac{x_n}{x_m}a_{mn} \right| \\ &< \left| \frac{x_1}{x_m}a_{m1} \right| + \left| \frac{x_2}{x_m}a_{m2} \right| + \cdots + \left| \frac{x_{m-1}}{x_m}a_{m(m-1)} \right| + \left| \frac{x_{m+1}}{x_m}a_{m(m+1)} \right| + \cdots + \left| \frac{x_n}{x_m}a_{mn} \right| \\ &\leq |a_{m1}| + |a_{m2}| + \cdots + |a_{m(m-1)}| + |a_{m(m+1)}| + \cdots + |a_{mn}| \\ &= \left| \sum_{i \neq m} a_{mi} \right| \end{aligned} \quad (4.6)$$

这与公式 (4.2) 矛盾。于是假设不成立。即  $|A| \neq 0$

□