数学小结论

张阳

2022 年 4 月 27 日

目录

1 定义

定义 1 (对角占优矩阵)**.** 对角占优矩阵是指一矩阵的每一横行,对角线上元素的大小大于或等于同一横行其他元素大小的和,一矩阵 A 为对角占优矩阵若

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad for\ all\ i \tag{1.1}$$

其中 a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素。

上述的定义中用到大于等于, 其条件较松, 因此有时会称为弱对角占优矩阵, 若上述的定义用大于代替大于等于,则称为强对角占优矩阵。对角优势矩阵可以指弱对角占优矩阵,也可以指强对角占优矩阵,视上下文而定。

定义 2 (范数)**.**

定义 3 (距离)**.** 设 $\mathbb{X}$ 为一非空集合, 如果对于 $\mathbb{X}$ 中任给的两个元素 x, y, 均有一个确定的实数, 记为 $\rho(x, y)$, 与它们对应且满足下面三个条件:

- 非负性:$\rho(x,y) \geqslant 0, \rho(x,y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$。
- 对称性:$\rho(x,y) = \rho(y,x)$。
- 三角不等式:$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$,这里 z 也是 $\mathbb{X}$ 中的任意一个元素

则称 ρ 是 $\mathbb{X}$ 上的一个距离,而称 $\mathbb{X}$ 是以 ρ 为距离的距离空间,记为 (X,ρ)

定义 4 (内积)**.**

2 等式

定理 1. *Stirling* 公式

定理 2. *Wallis* 公式

定理 3. 和差化积公式

定理 4. 积化和差公式

定理 5.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2m \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases} \tag{2.1}$$

证明. 1. 对于 $n = 1$, $\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, \mathrm{d}\varphi = 1$,结论显然成立

2. 对于 $n = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \left.\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/2}\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}\tag{2.2}$$

结论也成立

3. 对于 $n>2$ 的情况：

$$\begin{aligned}I=\int_0^{\pi/2}\sin^n\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= -\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}\varphi\,\mathrm{d}\cos\varphi\\ &= -\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi\big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^{n-2}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}\varphi\,\mathrm{d}\varphi-(n-1)I\end{aligned}\tag{2.3}$$

所以

$$I=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\tag{2.4}$$

利用 (2.4) 不难计算验证原结论。

综上 (2.1) 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。 □

3 不等式

定理 6. *闵可夫斯基不等式 5*

定理 7. *柯西不等式*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^2\cdot\sum_{k=1}^n b_k^2\tag{3.1}$$

其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均为实数。

证明. 任取实数 λ,则

$$0\leqslant\sum_{k=1}^n(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^n a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^n a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^n b_k^2\tag{3.2}$$

右端是 λ 的二次三项式。上述不等式表明,它对于 λ 的一切实数值都是非负的,故其判别式不大于零,即

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^2\cdot\sum_{k=1}^n b_k^2\tag{3.3}$$

□

定理 8. *琴生不等式 1*

定理 9. *柯西–施瓦茨不等式*

定理 10. 伯努利不等式

$$(1+x)^a > 1+ax \tag{3.4}$$

其中,a 为正实数,$x \geqslant -1$

证明. 设 $f(x)=(1+x)^a-ax-1$,于是 $f'(x)=a(1+x)^{a-1}-a$,$f''(x)=a(a-1)(1+x)^{a-2}>0$, 而 $f'(0)=0$, 所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$ □

定理 11. 设 $a,b\geqslant 0$,p,q 为满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数,则

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \tag{3.5}$$

证明. 考虑函数 $f(x)=\ln x$,由 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是严格上凸函数。由上凸函数的性质可得:

$$\ln(ab)=\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)\leqslant \ln(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}a^q) \tag{3.6}$$

由 $\ln(x)$ 的单调性即可得到原不等式。

□

4 代数

定理 12. 若 A 为实方阵,则 A 为实对称阵当且仅当 $AA^T=A^2$

证明. 一个有关迹的例题在证明中的运用 □

定理 13. A 为实对称矩阵,则

$$A=0 \iff \mathrm{tr}(AA^T)=0 \tag{4.1}$$

定理 14. 设 n 阶矩阵 A 满足

$$a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \tag{4.2}$$

则 $|a_{ij}|>0$

证明. 先证明 $|A|\neq 0$ 华中科大 2022 高代:主对角占优矩阵

若 $|A|=0$,则存在一个非零向量 x, 满足:

$$Ax=0 \tag{4.3}$$

记 $x_m=\max_i x_i$,于是,考虑线性方程组 (4.3) 中的第 m 个方程,有:

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \tag{4.4}$$

将除第 m 项外的其他项移到等式右边,再将等式两边除以 m,得到:

$$x_m = -\frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1 - \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2 - \cdots - \frac{a_{m(m-1)}}{a_{mm}}x_{m-1} - \frac{a_{m(m+1)}}{a_{mm}}x_{m+1} - \cdots - \frac{a_{mn}}{a_{mm}}x_n \tag{4.5}$$

于是

$$\begin{aligned}
|a_{mm}| &= \left|\frac{x_1}{x_m}a_{m1} + \frac{x_2}{x_m}a_{m2} + \cdots + \frac{x_{m-1}}{x_m}a_{m(m-1)} + \frac{x_{m+1}}{x_m}a_{m(m+1)} + \cdots + \frac{x_n}{x_m}a_{mn}\right| \\
&< \left|\frac{x_1}{x_m}a_{m1}\right| + \left|\frac{x_2}{x_m}a_{m2}\right| + \cdots + \left|\frac{x_{m-1}}{x_m}a_{m(m-1)}\right| + \left|\frac{x_{m+1}}{x_m}a_{m(m+1)}\right| + \cdots + \left|\frac{x_n}{x_m}a_{mn}\right| \\
&\leqslant |a_{m1}| + |a_{m2}| + \cdots + |a_{m(m-1)}| + |a_{m(m+1)}| + \cdots + |a_{mn}| \\
&= |\sum_{i\neq m} a_{mi}|
\end{aligned} \tag{4.6}$$

这与公式 (4.2) 矛盾。于是假设不成立。即 $|A| \neq 0$ $\square$