Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Μάθημα: Διακριτά Μαθηματικά

Όνομα: Παναγιώτης Κωστοπαναγιώτης

Α.Μ: 03115196

Θέμα 1ο

1. Εφ΄ οσον οι επιβάτες δεν είναι διακεκριμένοι, αρκεί να μετρήσουμε τους τρόπους να χωρίσουμε 100 άτομα σε 12 υποδοχές το οποίο ισούται με $\binom{100+12-1}{12-1} = \binom{111}{11}$.

2. Η σειρά αποβίβασης δεν παίζει ρόλο, συνεπώς φανταζόμαστε τους επιβάτες ως μια συμβολοσειρά με 100 ψηφία, όπου κάθε ψηφίο δείχνει την στάση στην οποία θα κατέβει ο κάθε επιβάτης. Υπάρχουν 12 στάσεις συνολικά, συνεπώς το πλήθος των εν λόγω συμβολοσειρών είναι 12^{100}.

3. Εφ΄ όσον η σειρά αποβίβασης παίζει ρόλο, κάθε διαφορετική διάταξη των επιβατών μας δίνει έναν νέο τρόπο αποβίβασης. Συνεπώς, η απάντηση είναι $100! * \binom{111}{11} = \frac{111!}{11!}$.

4. Αναζητούμε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + ... + x_{12} = 45$, όπου x_i το πλήθος των ανδρών που κατεβαίνουν στην i-οστή στάση, καθώς και της εξίσωσης $y_1 + y_2 + ... + y_{12} = 55$, όπου y_i το πλήθος των γυναικών που κατεβαίνουν στην i-οστή στάση. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (1) είναι $\binom{56}{11}$ ενω της εξίσωσης (2) είναι $\binom{66}{11}$, συνολικά η απάντηση είναι $\binom{56}{11}\binom{66}{11}$.

5. Θεωρούμε πως έχουμε μια δυαδική συμβολοσειρά με 45 μηδενικά και 55 άσσους, αναζητάμε όλες τις πιθανές διαμερίσεις της συμβολοσειράς σε 12 κομμάτια. Αρχικά, το πλήθος των μεταθέσεων της συμβολοσειράς είναι $\binom{100}{45}$, έπειτα, για κάθε μια μετάθεση έχουμε $\binom{111}{11}$ πιθανές διαμερίσεις. Συνολικά λοιπόν η απάντηση είναι $\binom{100}{45}\binom{111}{11}$.

6. Εφ΄ όσον θέλουμε να κατεβαίνει τουλάχιστον ένας επιβάτης σε κάθε στάση, το σύνολο των τρόπων που μπορούμε να το πετύχουμε αυτό είναι $\binom{100-1}{12-1} = \binom{99}{11}$ για το ερώτημα (1) ενώ είναι $100!\binom{99}{11}$ για το ερώτημα (3).

Θέμα 2ο

(α) Αν τα τραπέζια δεν ήταν κυκλικά, κάθε πιθανή μετάθεση των παιδιών δημιουργεί και έναν νέο τρόπο να διατάξουμε τα παιδιά. Ωστόσο, εφ΄ όσον ανά ομάδα των 10 παιδιών μας ενδιαφέρουν οι κυκλικές διατάξεις, για κάθε πιθανή μετάθεση 10 διατάξεις ανά ομάδα είναι κοινές. Συνεπώς η απάντηση είναι $\frac{40!}{10^4}$.

(β) Ας συμβολίσουμε κάθε πιθανή επιλογή ως μια δυαδική συμβολοσειρά με n στοιχεία, όπου στην θέση i περιέχει άσσο αν πάρουμε το i-οστό βιβλίο, ενώ περιέχει μηδενικό σε άλλη περίπτωση. Μας ενδιαφέρει το πλήθος των δυαδικών συμβολοσειρών με k τω πλήθος άσσους, χωρίς να υπάρχουν δυο άσσοι σε διαδοχικές θέσεις. Όμως, αν σκεφτούμε τους άσσους σαν διαχωριστικά το πρόβλημα μετασχηματίζεται στην εύρεση του πλήθους των τρόπων να χωρίσουμε n αντικείμενα σε $k+1$ μη κενές ομάδες. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό, θεωρούμε πως έχουμε 2 επιπλέον ¨βιβλία¨, ένα στην αρχή και ένα στο τέλος, προκειμένου να συμπεριλάβουμε και την περίπτωση όπου η δυαδική ακολουθία έχει άσσο στην αρχή, είτε στο τέλος. Συνεπώς, η απάντηση είναι $\binom{n+2-1}{k+1-1} = \binom{n+1}{k}$.

(γ) (i) Δύο τύποι ανήκουν στην ίδια κλάση, αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας. Συνεπώς, αρκεί να μετρήσουμε το πλήθος των πινάκων αληθείας για n μεταβλητές. Για κάθε μια από τις 2^n αναθέσεις των μεταβλητών έχουμε 2 πιθανές επιλογές (T, F). Συνεπώς, το πλήθος των κλάσεων που δημιουργούνται είναι 2^{2^n}.

Θέμα 3ο

(α) 1. Θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3+x_4 = 500$ υπό τους περιορισμούς $50 \leqslant x_1, x_2, x_3, x_4 \leqslant 200$. Η γεννήτρια συνάρτηση για το εν λόγω πρόβλημα είναι η $(x^{50}+x^{51}+...+x^{200})^4$ και ο συντελεστής του όρου που μας δίνει την απάντηση στο πρόβλημα είναι ο x^{500}.

(α) 2. Ακριβώς όπως και στο παραπάνω ερώτημα, χρησιμοποιούμε τον εκθετικό απαριθμητή αυτή την φορά. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι η $(\frac{x^{50}}{50!} + \frac{x^{51}}{51!} + ... + \frac{x^{200}}{200!})^4$. Ο όρος του οποίου ο συντελεστής μας δίνει την λύση του προβλήματος είναι όρος $\frac{x^{500}}{500!}$.

(β) Βρίσκουμε τον εκθετικό απαριθμητή για το κάθε ψηφίο, βάσει των περιορισμών που μας δίνει το πρόβλημα.

- Για το ψηφίο 0: e^x-1.
- Για το ψηφίο 1: $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
- Για το ψηφίο 2: $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
- Για το ψηφίο 3: e^x.

Συνολικά, η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για το πρόβλημα είναι η $\frac{e^{4x}-e^{x}+e^{-x}-1}{4}$ και συνεπώς το πλήθος των δυαδικών συμβολοσειρών είναι $\frac{4^n+(-1)^n+1}{4}$.

Θέμα 4ο

(α) Για τον i-οστό φοιτητή έχουμε p_i πιθανότητα να απαντήσει σωστά και $1-p_i$ πιθανότητα να απαντήσει λάθος. Συνεπώς η γεννήτρια συνάρτηση που μας δίνει την συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X: πόσοι φοιτητές απάντησαν σωστά είναι η $\prod_{i=1}^{n}[(1-p_i)+p_i x]$. Η πιθανότητα να απαντήσουν k φοιτητές σωστά δίνεται από τον συντελεστή του όρου x^k της συνάρτησης.

(β) Ενδιαφερόμαστε για την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, η οποία είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της παραπάνω ακολουθίας. Ας συμβολίσουμε ως a_n την πιθανότητα n φοιτητές να απαντήσουν σωστά και ως $A(x)$ την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_n. Για την ακολουθία που αναζητάμε, ας την συμβολίσουμε b_n και $B(x)$ αντίστοιχα, έχουμε $a_n = b_n - b_{n-1}$ και λόγω γραμμικότητας συμπαιρένουμε $A(x) = B(x) - xB(x) \Rightarrow B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$. Συνεπώς, η γεννήτρια συνάρτηση για το πρόβλημα είναι η $\frac{A(x)}{1-x} = \frac{1}{1-x}A(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\{x^i \prod_{j=1}^{n}[(1-p_j)+p_j x]\} = \sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}[x^i(1-p_j)+p_j x^{i+1}]$ και η απάντηση δίνεται από τον k-οστό όρο του πολυωνύμου. Φυσικά η εν λόγω συνάρτηση αποτελεί άπειρη σειρά, ωστόσο αν ενδιαφερόμαστε για κάποιον όρο πεπερασμένου βαθμού, απλά υπολογίζουμε το άθροισμα μέχρι και τον όρο που μας ενδιαφέρει.

Θέμα 5ο

(α) 1. Εφ΄ όσον οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι, ενώ τα μπλουζάκια όχι, αρκεί να μετρήσουμε τους τρόπους να μοιράσουμε τα μπλουζάκια ενός χρώματος στους φοιτητές, αφού κάθε τέτοια μοιρασιά καθορίζει μονοσήμαντα το ποιοί φοιτητές θα πάρουν τα μπλουζάκια του άλλου χρώματος. Οι τρόποι που μπορούμε να το πετύχουμε αυτό είναι $\binom{1000}{300} = \binom{1000}{700}$.

(α) 2. Έστω x_i ο αριθμός από κόκκινα μπλουζάκια που μοιράστηκαν στο i-οστό έτος και y_i ο αριθμός από πράσινα μπλουζάκια που μοιράστηκαν στο i-στό έτος. Ενδιαφερόμαστε για το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 300$ καθώς και το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 700$. Το πλήθος των λύσεων της πρώτης εξίσωσης είναι $\binom{304}{4}$ ενώ της δεύτερης $\binom{704}{4}$. Συνολικά, μπορούμε να μοιράσουμε τα μπλουζάκια με $\binom{704}{4}\binom{304}{4}$ τρόπους.

(β) 1. Εφ' όσον οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι, η γεννήτρια συνάρτηση του προβλήματος είναι $[(x^2+x^4+...+x^{700})(x^2+x^4+...+x^{300})]^5$. Ο όρος του οποίου ο συντελεστής δίνει την απάντηση είναι ο x^{1000}.

(β) 2. Οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι, συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Η εν λόγω συνάρτηση είναι η $[(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{700}}{700!})(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{300}}{300!})]^5$. Ο όρος του οποίου ο συντελεστής μας δίνει την απάντηση στο πρόβλημα είναι ο $\frac{x^{1000}}{1000!}$.

(γ) Ο όρος x^n της γεννήτριας συνάρτησης $(1+x^2+...+x^{200})^5$ μετράει το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=n$ υπό τους περιορισμούς $0 \leqslant x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leqslant 200$ και επίσης με την προυπόθεση ότι οι τιμές των μεταβλητών x_i είναι άρτιες $\forall i$. Ορίζουμε τις slack μεταβλητές $y_i = 200 - x_i, \forall i$, η εξίσωση μετασχηματίζεται σε $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 1000-n$ υπό τους περιορισμούς $0 \leqslant y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \leqslant 200$. Το πλήθος των λύσεων της δεύτερης εξίσωσης δίνεται από τον συντελεστή του όρου x^{1000-n} της παραπάνω γεννήτριας συνάρτησης. Όμως, οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες, συνεπώς το πλήθος των λύσεων τους πρέπει να είναι ίδιο. Συνεπώς, οι συντελεστές των όρων x^n και x^{1000-n} πρέπει να είναι ίσοι για κάθε n. Θέτοντας όπου $n = 400$ έχουμε άμεσα το ζητούμενο.