Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Μάθημα: Διακριτά Μαθηματικά

Όνομα: Παναγιώτης Κωστοπαναγιώτης

Α.Μ: 03115196

Θέμα 1ο

α′ Έστω ένα υποσύνολο των αριθμών $A = a_1, ..., a_n$ για το οποίο δεν ισχύει αυτή η ιδιότητα. Μετράμε το πλήθος των αριθμών που δεν μπορούν να περιέχονται στο σύνολο. Προφανώς, με την εισαγωγή οποιουδήποτε αριθμού x απορρίπτουμε όλους τους αριθμούς στο διάστημα $[x+1, 2x]$.Συνεπώς, στο σύνολο αυτό δεν μπορούν να περιέχονται ακριβώς $a_1 + a_2 + ... + a_n$ αριθμοί. Έχουμε προφανώς $a_1 \geqslant 1, a_2 \geqslant 2, ..., a_i \geqslant 2^{i-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^n$ - 1, άτοπο, αφού το σύνολο των δυνατών επιλογών είναι 2^n-2. Συνεπώς, για κάθε επιλεγόμενο σύνολο n αριθμών υπάρχουν πάντα 2 $a < b$ για τους οποίους να ισχύει $2a > b$.

β′ Ορίζουμε τον δυαδικό πίνακα A διαστάσεων nxN για τον οποίο ισχύει A_{ij} =¨Το parity του αριθμού των εμφανίσεων του αριθμού i από την θέση 1 εώς την θέση j στην ακολουθία¨. Ας συμβολίσουμε επιπλέον ως A^i το διάνυσμα που προκύπτει από την στήλη i του πίνακα. Παρατηρούμε πως υπάρχουν 2^n πιθανά διαφορετικά διανύσματα και είναι $N > 2^n$, από υπόθεση. Συνεπώς, υπάρχουν δύο στήλες $i < j$ τέτοιες ώστε $A^i = A^j$. Όμως, αυτό σημαίνει πως κάθε αριθμός στο διάστημα $(i+1, j)$ εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών και άρα το γινόμενο σε αυτό το διάστημα είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέμα 2ο

1. Το γράφημα G_1 έχει $n + m$ κορυφές και συνολικά $n + \frac{m(m+1)}{2} + nm$ ακμές.

2. Προκειμένου το γράφημα να έχει κύκλο Euler πρέπει κάθε κορυφή να έχει άρτιο βαθμό. Για αυθαίρετα n, m κάθε κορυφή της συνιστώσας C_n έχει βαθμό $m + 2$ αφού κάθε ακμή του κύκλου συνεισφέρει κατά 2 στον βαθμό και κάθε κορυφή του κύκλου συνδέεται με όλες τις κορυφές του K_m. Από την άλλη, κάθε κορυφή του K_m συνδέεται με όλες τις κορυφές του C_n και έχουμε και μια συνεισφορά $m - 1$ στον βαθμό κάθε κορυφής από την κλίκα. Συνεπώς, ο βαθμός κάθε κορυφής του K_m είναι $n+m-1$. Απαιτούμε $2|m + 2 \wedge 2|m + n - 1$ από το οποίο λαμβάνουμε ότι για να έχουμε κύκλο Euler πρέπει το m να είναι άρτιος και το n περιττός.

3. Το γράφημα έχει κύκλο Hamilton για κάθε n, m. Έστω $1, 2, ..., n$ οι κορυφές του C_n και $n+1, n+2, ..., n+m$ οι κορυφές του K_m. Κατασκευάζουμε τον εξής κύκλο Hamilton , ξεκινάμε από την κορυφή 1, διασχίζουμε

το μονοπάτι $(1,2),(2,3),...,(n-1,n)$ και διασχίζουμε την ακμή $(n,n+1)$ για να περάσουμε στην συνιστώσα K_m. Έπειτα, διασχίζουμε το μονοπάτι $(n+1,n+2),...,(n+m-1,n+m)$ και για να ολοκληρώσουμε τον κύκλο διασχίζουμε την $(n+m,1)$.

4. Για κάθε τιμή του m ο χρωματικός αριθμός του K_m είναι m. Για τον κύκλο C_n διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν το n είναι άρτιος τότε ο χρωματικός αριθμός του C_n είναι 2, αλλιώς 3. Συνεπώς, ο χρωματικός αριθμός του G_1 είναι $m+3$ αν ο n είναι περιττός και $m+2$ αν ο n είναι άρτιος.

Θέμα 3ο

α′ Θα δείξουμε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον αριθμό τον κόμβων n του γράφου. Σε όλη την απόδειξη θα αναφερόμαστε στις διαμερίσεις ως χρωματισμούς, όπου μια κορυφή θα χρωματίζεται λευκή αν ανήκει στο πρώτο ανεξάρτητο σύνολο και μάυρη σε άλλη περίπτωση. Αρχικά για $n=1$ υπάρχουν 2 πιθανοί χρωματισμοί, είτε θα χρωματίσουμε την κορυφή άσπρη, είτε μαύρη. Έστω πως υπάρχουν 2 χρωματισμοί για κάθε διμερές γράφημα με πλήθος κορυφών k, θα δείξουμε ότι υπάρχουν 2 χρωματισμοί και για $k+1$ κορυφές. Εστω πως σε κάποιον αυθαίρετο διμερές γράφημα με k κορυφές εισάγουμε μια επιπλέον κορυφή και την συνδέουμε με κάποιες κορυφές, οι οποίες έχουν το ίδιο χρώμα αφού αλλιώς ο γράφος μας δεν θα παρέμενε διμερής. Συνεπώς υπάρχει μια επιλογή χρώματος της κορυφής $k+1$ για κάθε έναν από τους 2 χρωματισμούς του αρχικού διμερούς γραφήματος με k κορυφές ανεξάρτητα από το ποιές κορυφές επιλέξαμε. Συνεπώς, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, οι χρωματισμοί του γραφήματος παραμένουν 2 σε πλήθος. Όμως, κάθε ένας από τους 2 χρωματισμούς ορίζει την ίδια διαμέριση κορυφών, απλά ανάλογα με τον ποιόν από τους 2 επιλέγουμε αλλάζουμε την σείρα των συνόλων, χωρίς να αλλάζουμε την διαμέριση αυτή καθ′ αυτήν. Συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. Αν από την άλλη το γράφημά μας αποτελείται από k συνεκτικές, διμερείς, συνιστώσες οι οποίες ορίζονται από τα ανεξάρτητα σύνολα $(A_1,B_1),(A_2,B_2),...,(A_k,B_k)$ όπου $A_i \cup B_i = V_i \forall i$ για κάθε συνεκτική συνιστώσα έχουμε 2 επιλογές για το πως θα εισάγουμε τα ανεξάρτητα σύνολα στην συνολική διαμέριση. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά 2^k διαμερίσεις των κορυφών του γραφήματος (2^{k-1} αν λάβουμε υπ όψην την συμμετρία των διαμερίσεων).

β′
- Θα δείξουμε ότι το γράφημα που προκύπτει είναι διμερές παράγοντας έναν έγκυρο διχρωματισμό. Για κάθε ακμή e χρωματίζουμε μαύρη

την κορυφή X_e και λευκά τα άκρα της. Ο χρωματισμός αυτός είναι έγκυρος αφού για κάθε 2 λευκές κορυφές υπάρχει μια μαύρη που τις συνδέει. Το γράφημα που παράγεται έχει $2m$ ακμές, αφού κάθε ακμή αντικαθίσταται από 2 και $n+m$ κορυφές, αφού για κάθε ακμή εισάγουμε μια επιπλέον κορυφή στο γράφημα.

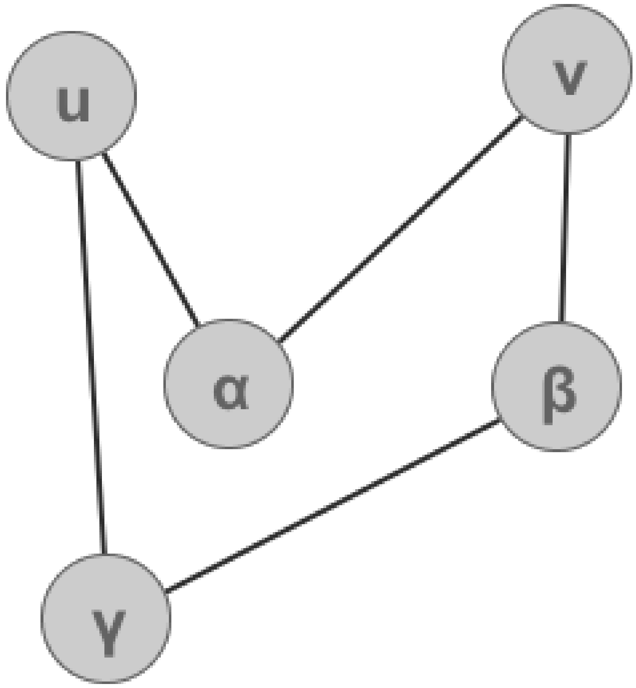
- -Ευθύ:
  -Αντίστροφο: Αν το γράφημά μας είναι το C_n τότε προφανώς έχει κύκλο Hamilton ο οποίος είναι το γράφημα που προκύπτει αυτό καθ' αυτό.

Θέμα 4ο

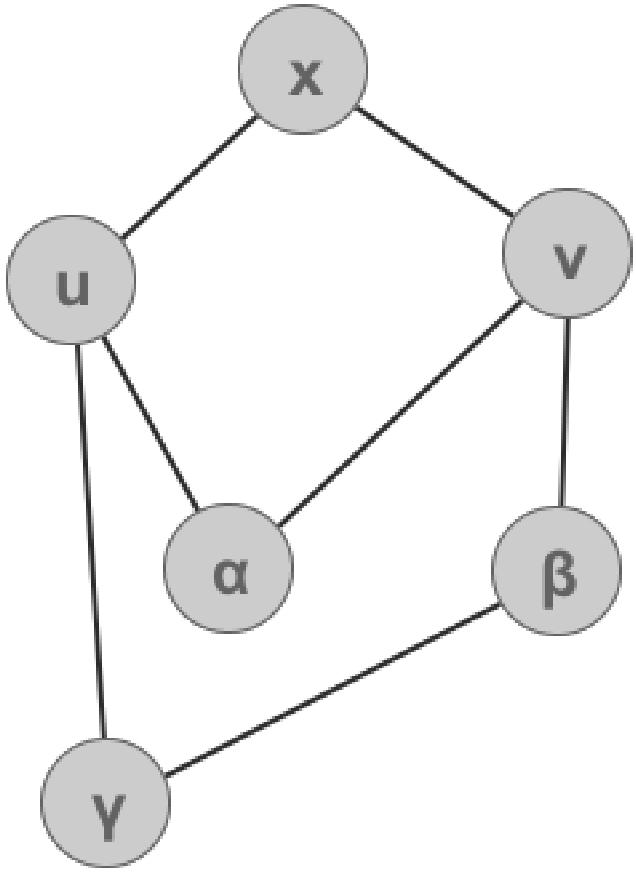
α'

β' Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Αρχικά, για $k = 2$ μπορούμε να αποσυνθέσουμε κάθε γράφο σε μια μονοκονδυλιά αφού ο γράφος έχει μονοπάτι $Euler$. Έστω πως κάθε γράφος με $k = 2m$ ακμές μπορεί να αποσυνθεθεί σε m μονοκονδυλιές. Έστω γράφος με $k = 2(m+1)$ κορυφές περιττού βαθμού, επιλέγουμε 2 αυθαίρετες εξάυτών u, v. Εφ' όσον ο γράφος είναι συνδεδεμένος, υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή u στην κορυφή v. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε εξ' αυτών, έστω $u, a_1, a_2, ..., a_l, v$ και διαγράφουμε τις ακμές του από τον γράφο. Ο γράφος που προέκυψε έχει $k-2$ κορυφές περιττού βαθμού, αφού για κάθε κορυφή a_i διαγράφουμε 2 ακμές που συνδέονται με αυτή με αποτέλεσμα να μην αλλάζει το $parity$ του βαθμού, ενώ για τις κορυφές u, v διαγράφουμε μόλις μια ακμή με αποτέλεσμα ο βαθμός τους να γίνει άρτιος. Επομένως, βάσει επαγωγικής υπόθεσης, ο γράφος που προκύπτει μπορεί να αποσυνθεθεί σε $\frac{k}{2}$ μονοκονδυλίες και συνεπώς ο αρχικός γράφος μπορεί να αποσυνθεθεί σε $\frac{k}{2}+1$ μονοκονδυλίες που είναι και το ζητούμενο.

γ' (i) Θα δείξουμε πως η ακμή (u, v) ανήκει αναγκαστικά στον κύκλο $Hamilton$. Θεωρούμε τον κύκλο $Hamliton$ του γράφου G-x, σε αυτόν τον κύκλο, όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2, όμως, εφ' όσον η ακμή (u, v) δεν ανήκει στον κύκλο, οι κορυφές u, v μπορούν να έχουν βαθμό το πολύ 1, άτοπο. Συνεπώς η ακμή αυτή ανήκει σε κάθε κύκλο $Hamilton$ και άρα μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με τις ακμές $(u, x) kai (x, v)$ για να παράξουμε κύκλο $Hamilton$ στο αρχικό γράφημα G.
(ii) Έστω ο παρακάτω γράφος, ο οποίος έχει προφανώς κύκλο $Hamliton$



Ώστοσο, εισάγοντας την κορυφή x παράγεται ο παρακάτω γράφος που δεν έχει κύκλο $Hamilton$:



Θέμα 5ο

α′ Το να δείξουμε ότι αν ένα δέντρο με n κορυφές έχει ακολουθία βαθμών $d_1, d_2, ..., d_n$ τότε $d_1 + d_2 + ... + d_n = 2(n-1)$ προκύπτει άμεσα από το λήμμα χειραψιών, αφού για οποιοδήποτε δέντρο με n κορυφές και m ακμές ισχύει $m = n$-1. Θα δείξουμε τώρα πως για κάθε ακολουθία ακεραίων $d_1, d_2, ..., d_n$ με $d_1 + ... + d_n = 2(n\text{-}1)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε δέντρο n κορυφών, οι βαθμοί των οποίων θα αποτελούν την ακολουθία $d_1, d_2, ..., d_n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε πως είναι $d_1 \leqslant d_2 \leqslant ... \leqslant d_n$. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Αρχικά, για $n = 2$ η μόνη έγκυρη ακολουθία ειναι η $d_1 = d_2 = 1$ για την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δέντρο με 2 κόμβους και μια ακμή. Έστω πως για κάθε ακολουθία $d_1, d_2, ..., d_k$ με $\sum_{i=1}^{k} d_i = 2(k\text{-}1)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δέντρο με k κορυφές και βαθμούς που δίνονται από την ακολουθία, θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $d_1, d_2, ..., d_{k+1}$ όπου $\sum_{i=1}^{k+1} d_i = 2k$ μπορούμε να κατασκευάσουμε δέντρο με $k+1$ κορυφές. Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, θα είναι $d_1 = 1$ αφού αλλιώς το άθροισμα της ακολουθίας θα ήταν τουλάχιστον $2k+2$. Αφαιρούμε αύτον τον όρο της ακολουθίας και αφαιρούμε και μια μονάδα από το d_{k+1}. Πλέον, η ακολουθία $(d_2, d_3, ..., d_{k+1}\text{-}1)$ αποτελείται από k-1 όρους και έχει άθροισμα $2(k\text{-}1)$, συνεπώς μπορούμε σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση να κατασκευάσουμε ένα δέντρο με βαθμούς κορυφών τους όρους της ακολουθίας. Έπειτα, προσθέτουμε και την κορυφή που αντιστοιχεί στον όρο που αφαιρέσαμε σαν παιδί της κορυφής $k+1$. Έτσι, έχουμε το ζητούμενο.

β′ Έστω δύο αυθαίρετες κορυφές του γραφήματος u, v και έστω και w_{max} το βάρος της βαρύτερης ακμής e στο μονοπάτι που ορίζεται από το ΕΣΔ. Αφαιρούμε την ακμή αυτή από το ΕΣΔ και το δέντρο σπάει σε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Έστω πως υπάρχει μια ακμή e' με βάρος w' έτσι ώστε $w' < w_{max}$ η οποία συνδέει τις δύο συνεκτικές συνιστώσες. Όμως, σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε να την επιλέξουμε στο ΕΣΔ και να παράξουμε ένα δέντρο με συνολικό βάρος μικρότερο του αρχικού, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, έχουμε το ζητούμενο.

Θέμα 6ο

α′ (i) Για $n = 2$ βλέπουμε ότι ο γράφος είναι επίπεδος. Ωστόσο, για $n > 2$ ο γράφος μας δεν είναι επίπεδος αφού περιέχει σαν υπογράφημα το $K_{3,3}$. Έναλλακτικα, βλέπουμε πως, επειδή ο γράφος μας είναι κυβικός, ισχύει $m = 3n > 3n - 6$,για $n > 2$ και άρα ο γράφος δεν μπορεί να είναι επίπεδος.

(ii) Παρατηρούμε ότι ο γράφος μας είναι κυβικός (3-κανονικός) για κάθε τιμή του n. Αν το n είναι άρτιος, ο γράφος περιέχει κύκλο περιττού μήκους, συνεπώς δεν είναι διμερής. Όμως, λόγω κανονικότητας ο χρωματικός του αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος του 3. Συμπαιρένουμε λοιπόν οτι ο χρωματικός αριθμός του είναι 3. Αν το n είναι περιττός, τότε ο γράφος μας δεν περιέχει κύκλο περιττού μήκους και συνεπώς είναι διμερής. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, ο γράφος έχει χρωματικό αριθμό 2.

β′ Έχουμε πως το άθροισμα των ακμών όλων των όψεων είναι ίσο με $2m$. Επιπλέον, αυτό το άθροισμα φράζεται κάτω από το $3(f\text{-}1) + n$ αφού όλες οι όψεις πέρα από την εξωτερική ορίζονται από τουλάχιστον 3 ακμές, ενώ η εξωτερική περιέχει τουλάχιστον n ακμές. Έχουμε επομένως $2m \geqslant 3f$-$3+n \rightarrow f \leqslant \frac{2m+n+3}{3}$. Εφαρμόζουμε τον τύπου του $Euler: n+m-2 = f \rightarrow m \leqslant 2n-3$, που είναι και το ζητούμενο.