Exercice 1 :

On définit sur $G = \mathbb{R} - \{-3\}$ une loi de composition $\divideontimes$ par :

$$x \divideontimes y = xy + 3x + 3y + 6$$

1) Montrer que $(x \divideontimes y = -3) \Leftrightarrow x = -3$ ou bien $y = -3$
2) Montrer que $(G,\divideontimes)$ est un groupe abélien.
3) Soit l'application $f : (G,\divideontimes) \longrightarrow (\mathbb{R}^*,.)$ définie par : $f(x) = x + 3$ où $(\mathbb{R}^*,.)$ est le groupe multiplicatif pour la multiplication usuelle de $\mathbb{R}$.
4) Montrer que f est un isomorphisme de groupes.
5) Déterminer la réciproque de f notée f^{-1}.

Solution de l'exercice 1 :

1) **Montrer que $(x \divideontimes y = -3) \Leftrightarrow x = -3$ ou bien $y = -3$**
   Nous montrons $(x \divideontimes y = -3) \Rightarrow x = -3$ ou bien $y = -3$

$$x \divideontimes y = -3 \Rightarrow xy + 3x + 3y + 6 = -3$$
$$\Rightarrow xy + 3x + 3y + 6 + 3 = 0$$
$$\Rightarrow xy + 3x + 3y + 9 = 0$$
$$\Rightarrow x(y + 3) + 3(y + 3) = 0$$
$$\Rightarrow (y + 3)(x + 3) = 0$$
$$\Rightarrow (y + 3) = 0 \text{ ou bien } (x + 3) = 0$$
$$\Rightarrow y = -3 \text{ ou bien } x = -3$$

Conclusion :$\big((x \divideontimes y = -3) \Rightarrow x = -3 \text{ ou bien } y = -3\big)$ est vérifiée

Montrons maintenant : $x = -3$ ou bien $y = -3 \Rightarrow (x \divideontimes y = -3)$

On remplace par $x = -3$ ou bien $y = -3$ dans l'expression de $x \divideontimes y$

Si : $x = -3$ donc :

$$x \divideontimes y = -3 \divideontimes y = -3y + 3(-3) + 3y + 6$$
$$= -9 + 6 = -3$$

Conclusion : $\big(x = -3 \text{ ou bien } y = -3 \Rightarrow (x \divideontimes y = -3)\big)$ est vérifiée

Conclusion finale : $\big((x \divideontimes y = -3) \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou bien } y = -3\big)$ est vérifiée

2) **Montrer que $(G,\divideontimes)$ est un groupe abélien**

$(G,\divideontimes)$ est un groupe abélien si et seulement si :

$\ast$ est interne, $\ast$ est commutative, $\ast$ est associative, $\ast$ admet un élément neutre et chaque élément de G possède un élément symétrique pour $\ast$.

$\ast$ est interne $\Leftrightarrow \forall x, y \in G, x \ast y \in G$

Soit $x \in G$, soit $y \in G$

$x \in G \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -3$

et

$y \in G \Longrightarrow y \in \mathbb{R}$ et $y \neq -3$

Selon la première question : $x \neq -3$ et $y \neq -3 \Leftrightarrow x \ast y \neq -3$

Donc on peut déduire que : $x \ast y \neq -3$ ce qui implique $x \ast y \in G$

Conclusion : $\ast$ est interne.

$\ast$ est commutative $\Leftrightarrow \forall x \in G, \forall y \in G, x \ast y = y \ast x$

Soit $x \in G$, Soit $y \in G$

$x \ast y = xy + 3x + 3y + 6 = yx + 3y + 3x + 6 = y \ast x$

Car $xy = yx$ et $3x + 3y = 3y + 3x$

Conclusion : $\ast$ est commutative.

$\ast$ est associative $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in G, \quad (x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$

Soit $x \in G$, soit $y \in G$, soit $z \in G$:

$$(x \ast y) \ast z = \underbrace{(xy + 3x + 3y + 6)}_{m} \ast z = m \ast z$$

$$= mz + 3m + 3z + 6$$

$$= (xy + 3x + 3y + 6)z + 3(xy + 3x + 3y + 6) + 3z + 6$$

$$= xyz + 3xz + 3yz + 6z + 3xy + 9x + 9y + 18 + 3z + 6$$

$$(x \ast y) \ast z = xyz + 3xz + 3yz + 3xy + 9x + 9y + 9z + 24 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x \ast (y \ast z) = x \ast \underbrace{(yz + 3y + 3z + 6)}_{s} = x \ast s$$

$$= xs + 3x + 3s + 6$$

$$= x(yz + 3y + 3z + 6) + 3x + 3(yz + 3y + 3z + 6) + 6$$

$$= xyz + 3xy + 3xz + 6x + 3x + 3yz + 9y + 9z + 18 + 6$$

$$x \ast (y \ast z) = xyz + 3xy + 3xz + 3yz + 9x + 9y + 9z + 24 \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) et (2) impliquent que : $(x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$

Conclusion : $\ast$ est associative.

L'existence de l'élément neutre : puisque $\ast$ est commutative il suffit de chercher l'élément neutre à droite ou bien à gauche.

Soit e l'élément neutre de G pour $\ast$ donc $\ast$ satisfait la relation :

$\forall\, x \in G, e \ast x = x$

$e \ast x = x \Longrightarrow ex + 3e + 3x + 6 = x,\ \forall\, x \in G$

$\Longrightarrow e(x+3) + 2x + 6 = 0$

$\Longrightarrow e(x+3) = -2x - 6$

$\Longrightarrow e = \frac{-2(x+3)}{x+3}$

Puisque $x \neq -3$ donc $e = -2$

$e = -2 \neq -3$ donc :

Conclusion : $e = -2$ est l'élément neutre de G pour $\ast$

L'existence de l'élément symétrique d'un élément $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G}$: puisque $\ast$ est commutative il suffit de chercher l'élément symétrique d'un élément $x \in G$ à droite ou bien à gauche.

Soit $x \in G$,

Si x' est l'élément symétrique de x pour la loi $\ast$ donc $x \ast x' = -2$

La relation $x \ast x' = -2 \Longrightarrow xx' + 3x + 3x' + 6 = -2$

$\Longrightarrow x'(x+3) + 3x + 8 = 0$

$\Longrightarrow x' = \frac{-3x-8}{x+3}$

$x' \in \mathbb{R}$ car $x \neq -3$

$x' \in G$ car : si $x' = -3$ donc $\frac{-3x-8}{x+3} = -3$, ce qui donne $-3x - 8 = -3(x+3)$ donc

$-8 = -9$, c'est une contradiction donc $x' \neq -3$

Conclusion : l'élément $x \in G$, possède un élément symétrique $x' = \frac{-3x-8}{x+3} \in G$ pour $\ast$.

Conclusion finale : $(G, \ast)$ est un groupe abélien.

3) **$\boldsymbol{f}$ est un isomorphisme de groupes ?**

$f\colon\ (G, \ast) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, .)$

$x \longmapsto f(x) = x + 3$

$(\mathbb{R}^*, .)$ est le groupe multiplicatif pour la multiplication usuelle de $\mathbb{R}$, cette loi est définit comme suit :

$. : \quad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$

$$(x, y) \longmapsto .\big((x, y)\big) = x.y$$

f est un isomorphisme de groupes si et seulement si f est un homomorphisme de groupes et f bijective.

Montrons que f est un homomorphisme de groupes

f est un homomorphisme de groupes car : $\forall x \in G, : \forall y \in G : \; f(x \divideontimes y) = f(x).f(y)$

En effet :

$$\begin{aligned} f(x \divideontimes y) &= (x \divideontimes y) + 3 \\ &= xy + 3x + 3y + 6 + 3 \\ &= xy + 3x + 3y + 9 \\ &= x(y+3) + 3(y+3) \\ &= (y+3).(x+3) = f(x).f(y) \end{aligned}$$

f injective car :

f injective $\Leftrightarrow \forall\, x \in G, \forall y \in G, [f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$

Soit $x \in G$, Soit $y \in G$;

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x + 3 = y + 3 \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

f surjective car :

f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^*, \exists\, x \in G, \; f(x) = y$

Soit $y \in \mathbb{R}^*$;

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x + 3 = y \\ &\Rightarrow x = y - 3 \in G \end{aligned}$$

Car si $y - 3 = -3$ donc $y = 0$; c'est une contradiction car $y \neq 0$

Conclusion : f est un isomorphisme de groupes.

4) f^{-1} la réciproque de f.

$f: \quad (G, \divideontimes) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, .)$

$x \longmapsto f(x) = x + 3 = y$ donc :

$f^{-1} : (\mathbb{R}^*, .) \longrightarrow (G, \divideontimes)$

$y \longmapsto f^{-1}(y) = x$

$x + 3 = y \Rightarrow x = y - 3$ donc :

$f^{-1} : (\mathbb{R}^*, .) \longrightarrow (G, \circledast)$

$y \longmapsto f^{-1}(y) = y - 3.$

Exercice 2 :

On définit sur $\mathbb{R}^2$ une loi de composition interne et associative notée $\triangle$ par :

$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall\, (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \triangle (x', y') = (x + x', y + y')$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, \triangle)$ est un groupe commutatif.

Soit H le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$$

Montrer que H est un sous groupe de $\mathbb{R}^2$.

Réponse :

$\triangle$ commutative $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) \triangle (x', y') = (x', y') \triangle (x, y)$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $(x', y') \in \mathbb{R}^2$

$(x, y) \triangle (x', y') = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = (x', y') \triangle (x, y)$

L'existence de l'élément neutre : puisque $\triangle$ est commutative donc il suffit de chercher l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ pour $\triangle$ à gauche ou bien à droite.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(e, e') l'élément neutre de $\in \mathbb{R}^2$ pour $\triangle \Leftrightarrow (e, e') \triangle (x, y) = (x, y)$

$(e, e') \triangle (x, y) = (x, y) \Longrightarrow (e + x, e' + y) = (x, y)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e + x = x \\ \quad et \\ e' + y = y \end{cases} \Longrightarrow \; e = 0 \;\text{ et }\; e' = 0$$

$$\Longrightarrow (e, e') = (0,0) \in \mathbb{R}^2$$

Conclusion : $(e, e') = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ pour $\triangle$

L'existence de l'élément symétrique d'un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$: puisque $\triangle$ est commutative donc il suffit de chercher l'élément symétrique d'un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ pour $\triangle$ à gauche ou bien à droite.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

(x', y') est l'élément symétrique de (x, y) pour $\triangle \Leftrightarrow (x, y) \triangle (x', y') = (0,0)$

$(x, y) \triangle (x', y') = (0,0) \Longrightarrow (x + x', y + y') = (0,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + x' = 0 \\ \quad et \\ y + y' = 0 \end{cases} \Longrightarrow \; x' = -x \;\text{ et }\; y' = -y$$

$$\Longrightarrow (x', y') = (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$$

Conclusion : $(x', y') = (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$ est l'élément symétrique de (x, y) pour $\triangle$.

Conclusion finale : $(\mathbb{R}^2, \triangle)$ est un groupe abélien.

$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$

Montrer que H est un sous groupe de G.

H est un sous groupe de G si et seulement si :

$$\begin{cases} (0,0) \in H \\ et \\ \forall (x, y) \in H, \forall (x', y') \in H, (x, y) \triangle (x', y')^{-1} \in H \end{cases}$$

$(x', y')^{-1}$ est l'élément symétrique de (x', y') pour $\triangle$.

$(0,0) \in H$ car $0 + 0 = 0$

$(x, y) \in H \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $y = -x$

On peut déduire qu'un élément $(x, y) \in H$ s'écrit sous la forme $(x, y) = (x, -x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ alors pour $x, y \in \mathbb{R}$

$(x, -x)$ et $(y, -y)$ sont deux éléments quelconque de H.

$$\begin{aligned} (x, -x) \triangle (y, -y)^{-1} &= (x, -x) \triangle (-y, y) \\ &= (x - y, -x + y) \end{aligned}$$

On a $(x - y) + (-x + y) = 0$ donc :

$(x - y, -x + y) \in H$

Ce qui implique : $(x, -x) \triangle (y, -y)^{-1} \in H$

Remarque : $(y, -y)^{-1}$ est le symétrique de $(y, -y)$ pour $\triangle$

Conclusion : H est un sous groupe de G.

<u>Polynômes :</u>

<u>Exercice 1 :</u>

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$P(X) = X^4 - X^3 - X + 1$$

1) Montrer que $\alpha = 1$ est une racine double de $P(X)$
2) Factoriser $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution :

$P(X) = X^4 - X^3 - X + 1$

1) Montrer que $\alpha = 1$ est une racine double de $P(X)$

$$\alpha = 1 \text{ est une racine double de } P(X) \Leftrightarrow \begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = 0 \\ P''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$P(\alpha) = \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha + 1 = (1)^4 - (1)^3 - 1 + 1 = 0$

$P(X) = X^4 - X^3 - X + 1 \Rightarrow P'(X) = 4X^3 - 3X^2 - 1$

$\Rightarrow P'(\alpha) = 4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 4(1)^3 - 3(1)^2 - 1 = 0$

$P'(X) = 4X^3 - 3X^2 - 1 \Rightarrow P''(X) = 12X^2 - 6X$

$\Rightarrow P''(\alpha) = 12\alpha^2 - 6\alpha = 12 - 6 = 6 \neq 0$

Conclusion : α est une racine double de $P(X)$

2) Factoriser $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{R}[X]$

Nous effectuons la division euclidienne du polynôme $P(X)$ par

$H(X) = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - X^3 - X + 1 & X^2 - 2X + 1 \\ + & \\ \cline{2-2} -(X^4 - 2X^3 + X^2) & X^2 + X + 1 \\ \hline = X^3 - X^2 - X + 1 & \\ + & \\ -(X^3 - 2X^2 + X) & \\ \hline = X^2 - 2X + 1 & \\ + & \\ -(X^2 - 2X + 1) & \\ \hline = 0 & \end{array}$$

Donc $P(X) = (X-1)^2(X^2 + X + 1)^1$

$X^2 + X + 1$ est un polynôme unitaire

Le discriminant de $X^2 + X + 1 = -3 < 0$ et puisque le degré de $(X^2 + X + 1) = 2$ donc le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

$X - 1$ est un polynôme unitaire et irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Conclusion : l'écriture $P(X) = (X-1)^2(X^2 + X + 1)^1$ est la factorisation de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Factoriser $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{C}[X]$

Le discriminant de $X^2 + X + 1 = -3$

Si α_1 et α_2 sont les deux racines de $X^2 + X + 1$

On suppose :

$\alpha_1 = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$ et $\alpha_2 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$

On note la racine de $X^2 + X + 1$ telle que la partie imaginaire est positive par j donc :

$P(X) = (X-1)^2(X-j)(X-\bar{j})$

$\bar{j}$ est le conjugué de j

Conclusion : l'écriture $P(X) = (X-1)^2(X-j)(X-\bar{j})$ est la factorisation de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 :

Soit $P(X) = X^8 + aX^6 + 3X^4 + 2X^2 + b$

- **i)** Déterminer les valeurs de a et b pour que j soit une racine double de $P(X)$ (On rappelle que j est le nombre complexe tel que $j^3 = 1$)
- **ii)** Que peut – on – dire de la parité de P. Déduire les autres racines.
- **iii)** Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Réponse :

Soit $P(X) = X^8 + aX^6 + 3X^4 + 2X^2 + b$

i) Les valeurs de $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ pour que $\boldsymbol{j}$ soit une racine double de $\boldsymbol{P(X)}$

j est la racine du polynôme $X^2 + X + 1$ telle que la partie imaginaire est positive cette racine vérifie aussi l'équation $X^3 = 1$

j racine double de $P(X) \Leftrightarrow P(j) = 0, P'(j) = 0$ et $P''(j) \neq 0$

$P(j) = j^8 + aj^6 + 3j^4 + 2j^2 + b$

En utilisant les relations : $\boldsymbol{j^3 = 1}$ et $\boldsymbol{j^2 + j + 1 = 0}$:

$P(j) = j^2 j^6 + aj^6 + 3jj^3 + 2j^2 + b$

$P(j) = j^2 + a + 3j + 2j^2 + b$

$P(j) = 3j^2 + 3j + a + b$

$P(j) = 3(j^2 + j) + a + b$

$P(j) = a + b - 3$

$P(X) = X^8 + aX^6 + 3X^4 + 2X^2 + b \Longrightarrow P'(X) = 8X^7 + 6aX^5 + 12X^3 + 4X$

Donc $P'(j) = 8j^7 + 6aj^5 + 12j^3 + 4j$

En utilisant les relations $\boldsymbol{j^3 = 1}$ et $\boldsymbol{j^2 + j + 1 = 0}$:

Donc après le calcul :

$P'(j) = (12 - 6a)j - 6a + 12 = (12 - 6a)(j + 1)$

$P'(X) = 8X^7 + 6aX^5 + 12X^3 + 4X \Longrightarrow P''(X) = 56X^6 + 30aX^4 + 36X^2 + 4$

$P''(j) = 56j^6 + 30aj^4 + 36j^2 + 4$

En utilisant les relations $\boldsymbol{j^3 = 1}$ et $\boldsymbol{j^2 + j + 1 = 0}$:

$P''(j) = (30a - 36)j + 24$

j racine double de $P \Leftrightarrow a + b - 3 = 0$, $(12 - 6a)(j + 1) = 0$ et $(30a - 36)j + 24 \neq 0$

Après le calcul : $a = 2$ et $b = 1$

On peut vérifier facilement que $(30a - 36)j + 24 \neq 0$ pour $a = 2$

D'où $P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$

ii) Que peut – dire de la parité de $\boldsymbol{P}$

Théoriquement puisque les puissances de polynôme P sont paires donc $P(-X) = P(X)$

Conclusion : P est un polynôme pair

Déduire les autres racines de $\boldsymbol{P}$

j est une racine double de $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, alors le conjugué de j qui est égal à j^2 (un simple calcul à faire) est aussi une racine de P d'ordre 2 selon un théorème vu dans le cours.

Vérification :

$P(j^2) = j^{16} + 2j^{12} + 3j^8 + 2j^4 + 1 = 3(j^2 + 3j + 1) = 0$

$P'(j^2) = 8j^{14} + 12j^{10} + 12j^6 + 4j^2$

$P'(j^2) = 8j^2 + 12j + 12 + 4j^2 = 12j^2 + 12j + 12 = 12(j^2 + j + 1) = 0$

$P''(j^2) = 56j^{12} + 60j^8 + 36j^4 + 4$

$P''(j^2) = 56 + 60j^2 + 36j + 4$

$P''(j^2) = 60j^2 + 36j + 60 = -24j \neq 0$

Donc j et j^2 sont des racines doubles de P et puisque P est pair donc $-j$ et $-j^2$ sont des racines de $P(X)$ $[P(j) = P(-j) = 0]$ et $[P(j^2) = P(-j^2) = 0]$

On peut remarquer que P' est impair $\big(P'(-X) = -P'(X)\big)$ et P'' est pair

$\big(P''(-X) = P''(X)\big)$ pour vérifier facilement que :

$P'(-j) = 0,\ P'(-j^2) = 0,\ P''(-j) \neq 0$ et $P''(-j^2) \neq 0$

Conclusion : les racines de P sont : $j, j^2, (-j)$ et $(-j)^2$

Les quatre racines sont d'ordre 2.

iii) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Dire factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ c'est-à-dire factoriser le, en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{C}[X]$.

Le polynôme P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires de la façon suivante :

$P(X) = (X - j)^2(X - j^2)^2(X + j)^2(X + j^2)^2$ car :

$X - j$ est un polynôme unitaire et irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

$X - j^2$ est un polynôme unitaire et irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

$X + j$ est un polynôme unitaire et irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

$X + j^2$ est un polynôme unitaire et irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$

Dire factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ c'est-à-dire factoriser le, en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{R}[X]$.

$P(X) = (X - j)^2(X - j^2)^2(X + j)^2(X + j^2)^2 = [(X - j)(X - j^2)]^2[(X + j)(X + j^2)]^2$

$(X - j)(X - j^2)$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car le polynôme produit est un polynôme de degré 2 et possède comme racines 2 nombres complexes non réels tels que l'un est le conjugué de l'autre.

$(X + j)(X + j^2)$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car le polynôme produit est un polynôme de degré 2 et possède comme racines 2 nombres complexes non réels tels que l'un est le conjugué de l'autre.

$P(X) = [X^2 - (j + j^2)X + jj^2]^2[X^2 + (j + j^2)X + jj^2]^2$

$P(X) = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2$ est la factorisation de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{R}[X]$.