Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année: 2020-2021
Module: Analyse 1

Résumé: continuité des fonctions réelles

1. INTRODUCTION

La notion de la continuité est à la base de l'analyse: il est nécessaire de s'en faire une idée intuitive et d'en bien comprendre la définition.

2. CONTINUITÉ EN x_0

Définition 2.1. *Soit f une fonction définie sur D et $x_0 \in D$.*
*f est dite **continue** en x_0 si est seulement si f définie au voisinage de x_0 et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Example 2.1. *La fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Au point $x = 0$, la fonction f est continue à gauche, mais elle ne l'est pas à droite car:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0 \ \ et \ \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0).$$

Example 2.2. *La fonction de la partie entière $x \mapsto E(x)$, elle est continue à droite en tout point entier $n \in \mathbb{Z}$, mais elle ne l'est pas continue à gauche en ces points car:*

$$\lim_{x \to n^-} E(x) = n - 1 \quad et \quad \lim_{x \to n^+} E(x) = E(n) = n$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc la fonction E n'est pas continue à gauche de $n \in \mathbb{Z}$.

3. CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

Définition 3.1. *On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$.*

3.0.1. *Opérations algébriques sur les fonctions continues.*

Théorème 3.1. *Soient λ un réel et f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f et g sont continues en $x_0 \in I$ alors on a les propriétés suivantes :*

(1) *$|f|$ est continue en x_0;*
(2) *$f + g$ est continue en x_0;*
(3) *$f \times g$ est continue en x_0;*
(4) *λf est continue en x_0;*
(5) *si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.*

*3.0.2. **Continuité des fonctions compositions**.*

Théorème 3.2. *Soient f une fonction définie au voisinage de x_0 et g une fonction définie au voisinage de $y_0 = f(x_0)$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et si g est continue en y_0 alors $\lim_{x\to x_0} g\left(f(x_0)\right) = g\left(y_0\right)$.*

Example 3.1. *Puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et que la fonction exponentielle est continue en 1, on en déduit que $\lim_{x\to 0} \exp \frac{\sin x}{x} = e$.*

*3.0.3. **Continuité des fonctions usuelles**.*

Théorème 3.3.

(1) *Toute fonction polynôme est continue en tout point.*
(2) *Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.*
(3) *Les fonctions* sin *et* cos *sont continues en tout point.*
(4) *Les fonctions* tan *et* cot *sont continues en tout point où elle sont définies.*

Corollaire 3.1. *Les fonctions construites à partir des fonctions usuelles par opérations algébriques et composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.*

Remarque 3.1. *Ce théorème permet souvent de conclure à la continuité d'une fonction sur son ensemble de définition.*

Example 3.2. *Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} x\ln|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

(1) *$x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De plus, la fonction* ln *est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc par composition, f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.*
(2) *Pour le point 0 qui échappe à ces considérations, on a $\lim_{u\to 0^+} u\ln u = 0$. Par suite*
$$\lim_{x\to 0} |x||\ln|x|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} |x\ln|x|| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$$
Par conséquent f possède une limite en 0 qui n'est autre que $f(0)$.
(3) *Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$*

4. Prolongement par continuité en un point

Définition 4.1. *Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in I$ et qu'elle admet en ce point une limite finie notée P, la fonction définie par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in I\setminus\{x_0\} \\ P & si\ x = x_0 \end{cases}$$

est dite prolongement par continuité de f au point x_0.

Example 4.1. *La fonction à valeurs réelles, définie, pour $x_0 \neq 0$ par $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$, peut se prolonger par continuité en 0, car:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} a\frac{\sin(ax)}{ax} = a.$$

Donc

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & si\ x \neq 0, \\ a & si\ x = 0. \end{cases}$$

Remarque 4.1. *Pour que f soit prolongeable par continuité au point x_0, il suffit que:*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l.$$

Example 4.2. *Soit*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}} & x>\frac{\pi}{4},\\[2mm] -\sqrt{2}+\frac{\pi}{4} & x<\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Peut-on prolonger la fonction f par continuité au point $x_0=\frac{\pi}{4}$.

Réponse:
f est prolongeable par continuité au point $x_0=\frac{\pi}{4}$ si et seulement si $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=l$. Dans ce cas le prolongement par continuité de f au point $x_0=\frac{\pi}{4}$, définie par:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}} & x>\frac{\pi}{4},\\[2mm] -\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-x & x<\frac{\pi}{4},\\[2mm] \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) & x=\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Calculons les limites de f à gauche et à droite, on a

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} -\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-x=-\sqrt{2}$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \dfrac{\cos x-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}}=\dfrac{0}{0}$ FI.

  On pose:

$$\begin{cases} y=x-\frac{\pi}{4},\\ x\to\frac{\pi}{4}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=y+\frac{\pi}{4},\\ y\to 0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}{y} &= \lim_{y\to0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y}{y}\\ &= \lim_{y\to0}-\sqrt{2}\frac{\sin y}{y}\\ &= -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent f est prolongeable par continuité au point $x_0=\frac{\pi}{4}$ et on a:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}} & x>\frac{\pi}{4},\\[2mm] -\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-x & x<\frac{\pi}{4},\\[2mm] -\sqrt{2} & x=\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

5. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors l'image $f(I)$ est également un intervalle (I n'est supposé ni fermé ni borné à priori) .*

Corollaire 5.1. *Si f prend au moins une valeur négative et au moins une valeur positive, alors f prend la valeur 0. Autrement dit : si f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Si $f(a)\times f(b)<0$ alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f(c)=0$.*

Example 5.1. *Considérons l'application* $f : x \in [0, 2\pi] \mapsto \sin(x) + (x-1)\cos(x)$. *Cette application est continue car les fonctions sinus et cosinus ainsi que la fonction polynomiale* $x \mapsto x-1$ *sont continues sur* $[0, 2\pi]$. *Puisque* $f(0) = -1 < 0$ *et* $f(2\pi) = 2\pi - 1 > 0$, *d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel* $c \in]0, 2\pi[$ *tel que* $f(c) = 0$.

Remarque 5.1. *Le réel* $c \in]a, b[$ *pour lequel* $f(c) = 0$ *n'est pas nécessairement unique.*

6. TRAVAUX DÉRIGÉS

Exercice 1. *On considère la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi\sin(x)}{x(x+\pi)} & x \neq -\pi, \\ 1 & x = -\pi. \end{cases}$$

(1) *Déterminer le domaine de définition* D_f.
(2) *Etudier la continuité de* f *sur* D_f.
(3) f *admet-elle un prolongement par continuité en* 0? *Si oui, donner le.*
(4) *Montrer que:*

$$\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(c) = c.$$

Réponse:

(1) Soit

$$f_1(x) = \frac{\pi\sin(x)}{x(x+\pi)}, \qquad D_{f_1} = \mathbb{R} - \{-\pi, 0\}.$$
$$f_2(x) = 1, \qquad D_{f_2} = \mathbb{R}.$$

D'où

$$\begin{aligned} D_f &= \left(D_{f_1} \cap \mathbb{R} - \{-\pi\}\right) \cup \left(D_{f_2} \cap \{-\pi\}\right) \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \\ &= \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

(2) • Sur $\mathbb{R} - \{-\pi, 0\}$, f est un rapport de produit de fonctions continues, donc f est continue.

• Au point $x_0 = -\pi$.
 ∗ On a: $f(-\pi) = 1$.
 ∗ $\lim\limits_{x\to-\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi} \dfrac{\pi\sin(x)}{x(x+\pi)} = \dfrac{0}{0}$ FI.
 On pose:

$$\begin{cases} y = x + \pi, \\ x \to -\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - \pi, \\ y \to 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\pi} \frac{\pi\sin(x)}{x(x+\pi)} = \lim_{y\to0} \frac{\pi\sin(y-\pi)}{y(y-\pi)}$$

On sait que:

1). $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \times \cos\beta \pm \cos\alpha \times \sin\beta$,

2). $\sin(-x) = -\sin(x)$,

3). $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,

4). $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Alors:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} \frac{\pi\sin(y-\pi)}{y(y-\pi)} &= \lim_{y\to 0} \frac{-\pi\sin(y)}{y(y-\pi)} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-\pi}{(y-\pi)} \frac{\sin(y)}{y} \\ &= 1 \\ &= f(-\pi).\end{aligned}$$

donc f est continue en $-\pi$ et alors f est continue sur D_f.

(3) f n'est pas définit en 0 mais définit au voisinage de 0 et on a:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\pi\sin(x)}{x(x+\pi)} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{(x+\pi)} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

donc f admet un prolongement par continuité donnée par:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

(4) Posons:

$$h(x) = g(x) - x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

La fonction h est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ car g est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $h(0) = g(0) - 0 = 1 > 0$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{8 - 3\pi^2}{6\pi} < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \ h(c) = g(c) - c = 0,$$

mais comme $c \neq 0$, alors $g(c) = f(c)$, c'est-à-dire:

$$\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \ f(c) = c.$$

****