U M B B
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année Informatique
Module: Analyse 1
Année: 2022/2023

Série d'exercices $n°$ 1. Nombres réels.

Ne traiter en TD que les exercices marqués par ♦

Exercice 1. *L'objectif de cet exercice est d'établir une formule simple de la somme suivante de n termes, définie pour $n \geq 1$, par:*

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}.$$

1. *Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.*
2. *Trouver une formule en n pour S_n.*
3. *Démonter cette formule par récurrence.*

Exercice 2. ♦ *Considérons $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. On pose $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.*

1. *Montrer que: $x + r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.*
   - *Que peut-on dire de la somme de deux nombres irrationnels?*
2. *Si $r \neq 0$. Montrer que: $rx \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.*
   - *Que peut-on dire du produit de deux nombres irrationnels?*

Exercice 3. *Soient x et y deux réels. Montrer que:*

a) $\forall \varepsilon > 0, \quad x < y + \varepsilon \;\Rightarrow\; x \leq y;$ ***a)*** $\forall \varepsilon > 0, \quad |x - y| < \varepsilon \;\Rightarrow\; x = y.$

Exercice 4. ♦

1. *Soit $A_n = 0,20232023\ldots2023$ (**n fois**).*
   Ecrire A_n sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
2. *Soit $A = 0,20232023\ldots$ (**une infinie de fois**).*
   Ecrire A sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
3. *Même question que la 2, pour le nombre: $P = 0,111\ldots + 0,222\ldots + \cdots + 0,999\ldots$*

Exercice 5. ♦ *Montrer que le nombre réel suivant est un entier:*

$$\alpha = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} - \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}.$$

Exercice 6.

1. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Montrer que:*

   a)♦ $|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq +a;$ ***c)*** $|x + y| \leq |x| + |y|;$

   b) $|x| \geq a \;\Leftrightarrow\; x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[;$ ***d)***♦ $||x| - |y|| \leq |x - y|.$

2. *Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations suivantes:*

   a)♦ $|x + 2| = -1;$ ***c)*** $|x - 3| > -2;$

   b) $|x - 1| - |x + 2| + |x - 5| = 0;$ ***d)***♦ $|x + 2| - |x - 3| + |x - 4| > 0.$

Exercice 7. ♦ *Le but de cet exercice est de trouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation*

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1. \qquad (1)$$

1. *Montrer que x est solution de l'équation (1) si et seulement si,*

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.$$

2. *Trouver les solutions $y\in\mathbb{R}$ de l'équation.*

$$|y-2|+|y-3|=1.$$

3. *Conclure.*

Exercice 8. ♦ *Déterminer (s'ils existent): les majorants, les minorants, la borne sup, la borne inf, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants:*

$A=\{n\in\mathbb{N},\ n^2+2n\leq 0\}$; $C=\{x\in\mathbb{Z},\ -3\leq x<3\}$; $E=\{x\in\mathbb{R}\ x^2\leq 5\}$;

$B=\{n^2+n,\ n\in\mathbb{N}\}$; $D=\{x\in\mathbb{R},\ -3\leq x<3\}$; $F=\{x\in\mathbb{Q},\ x^2\leq 5\}$.

Exercice 9. *Soient A et B deux ensembles non vides et bornés de $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que:*

   i) *Si $A\subset B$, alors $SupA\leq SupB$ et $InfB\leq InfA$;*

   ii) ♦$Sup(A\cup B)=max(SupA,SupB)$;

   iii) $Inf(A\cup B)=min(InfA,InfB)$.

2. ♦ *Déterminer les bornes supérieures et les bornes inférieures des deux ensembles suivants:*

$$A=\left\{1+\frac{1}{2n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\};\qquad B=\left\{-1+\frac{1}{2n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

♦ *En déduire* $\max A$, $\min A$, $\max B$ *et* $\min B$.

3. *Soit*

$$C=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

♦ *Trouver* $\sup C$ *et* $\inf C$.

Exercice 10. *On appelle partie entière de $x\in\mathbb{R}$, noté $E(x)$ le plus grand élément de $\mathbb{Z}$ qui est plus petit ou égal à x, c'est à dire:*

$$E(x)=max\{z\in\mathbb{Z},\quad z\leq x\}.$$

1. ♦ *Donner* $E(3,47)$ *et* $E(-3,47)$.

2. ♦ *Tracer le graphe de fonction $x\mapsto E(x)$.*

3. ♦ *Montrer que la fonction de la partie entière est croissante.*

4. *Soient $x,y\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer les propriétés suivantes:*

   a)♦ $E(x)+E(y)\leq E(x+y)\leq E(x)+E(y)+1$; **b)** $E(x+1)=E(x)+1$;

   c) $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$; **d)**♦ $E\left(\dfrac{x}{2}\right)+E\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=E(x)$.

5. *Résoudre dans $\mathbb{R}$*

   a) $E(\sqrt{x})=2$; **b)**♦ $E(\sqrt{x^2})=4$.

Bon courage