Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Module: Analyse 1
Année: 2021/2022

# Série d'exercices n°2. Suites Numériques.

## Généralités

**Exercice 1** ***Questions de cours:*** *Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes:*

1. *Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.*
2. *Toute suite convergente est bornée.*
3. *Toute suite bornée est convergente.*
4. *La somme de deux suites divergentes est une suite divergente.*
5. *Le produit de deux suites divergentes est une suite divergente.*
6. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.
7. *Si* $(|u_n|)$ *converge alors* $(u_n)$ *converge.*
8. *Si* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *majorées alors* $(u_n.v_n)$ *croissante.*
9. *Si* $(u_n)$ *converge vers* $l$, *alors* $l=sup\{u_n,\ \ n\geq 1\}$.
10. *Si* $(u_n)$ *majorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

## Nature d'une suite par définition

**Exercice 2**

***I)*** *Soit la suite numérique réelle définie par:* $u_n=\dfrac{3n+1}{5n+2}$.

***1)*** *En utilisant la définition de la limite montrer que:* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{3}{5}$.

***2)*** *À partir de quel rang a-t-on:* $\left|u_n-\frac{3}{5}\right|<10^{-4}$?

***3)*** *Combien de termes de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'appartiennent pas à l'intervalle:* $\left]\frac{3}{5}-10^{-4};\frac{3}{5}+10^{-4}\right[$.

***II)*** *En utilisant la définition de la limite d'une suite montrer que:*

***1)*** $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$, ***2)*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$, ***3)*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)=-\infty$.

## Nature d'une suite par diférents critères

**Exercice 3** *Etudier la nature des suites suivantes:*

***1)*** $u_n=\dfrac{sin(n)}{n}$, ***2)*** $u_n=\dfrac{E\left(n^2sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2n}$, ***3)*** $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,

***4)*** $u_n=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}$, ***5)*** $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a^k}\ (k>1)$, ***6)*** $u_n=\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$; $a>0;b>0$,

***7)*** $u_n=\sqrt{1+n}-\sqrt{n}$, ***8)*** $u_n=\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}$, ***9)*** $u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$,

***10)*** $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$, ***11)*** $u_n=\dfrac{a^n}{n!}$, ***12)*** $u_n=\dfrac{5\times7\times9\cdots(2n+5)}{4\times7\times10\cdots(3n+4)}$,

***13)*** $u_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $x\in\mathbb{R}$, ***14)*** $u_n=\left(\dfrac{n^2-n+3}{n^2+3n-1}\right)^n$, ***15)*** $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n}$.

**Exercice 4** *Calculer la limite $\ell$ de chacune des suites suivantes:*

1) $u_n = \dfrac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}$, 2) $u_n = \sqrt{n^2+2n+5} - n$,

3) $u_n = \dfrac{n3^n + 1}{n! + 1}$, 4) $u_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$,

5) $u_n = \dfrac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1}6^{n+1}}$.

## Suites adjacentes

**Exercice 5** *Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ suivantes sont-elles adjacentes?*

1) $u_n = 1 + + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$,

2) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

**Exercice 6** *Soient $p$ et $q$ deux réels tels que $p > q > 0$. On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par:*

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{p}{p+q}u_{n-1} + \dfrac{q}{p+q}v_{n-1}, & n \geq 1, \\ v_n = \dfrac{q}{p+q}u_{n-1} + \dfrac{p}{p+q}v_{n-1}, & n \geq 1. \end{cases}$$

*On suppose: $u_0 < v_0$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_n > u_n$.*
2. *Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes*
3. *Montrer que la somme $u_n + v_n$ est indépendante de $n$.*
4. *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$*
5. ***Application:*** *On prend $p = 3$ et $q = 2$.*

## Suites extraites (sous suites)

**Exercice 7** *En utilisant des sous-suites convenables, montrer que les suites de terme général:*

1) $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ 2) $v_n = \dfrac{n + (-1)^n n}{n - (-1)^n \frac{n}{2}}$ 3) $w_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$

*sont divergentes.*

**Exercice 8** *Soit $u_n$ une suite numrique. Montrer que:*

1. *Si les sous suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ sont convergentes, alors $(u_n)_n$ est convergente.*
2. *Si les sous suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes, alors $(u_n)_n$ est convergente.*

## Suites de Cauchy

**Exercice 9** *En utilisant le critère de Cauchy, déterminer la nature des suites $(u_n)_n$ défines par:*

$$1)\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}, \qquad 2)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}.$$

**Exercice 10** *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique telle que:*

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k\,|u_n - u_{n-1}| \quad \text{avec } 0 < k < 1.$$

1. *Montrer que:* $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|\,, \quad n \geq 1.$
2. *Montrer que* $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\quad 0 \leq q \leq p$, *on a:*
$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1-k}\,|u_1 - u_0|\,.$$
3. *En déduire la nature de la suite* $(u_n)_n$
4. ***Application:*** *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique donnée par:*
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sin u_n + \dfrac{5}{2} & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Indication: $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |\sin b - \sin a| \leq |b - a|\,.$

## Limites remarquables

**1)** $\forall x > 0 : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1;$

**2)** $\forall p = 1, 2, \ldots : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1;$

**3)** $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{si } 0 \leq |q| < 1, \\ = 1 & \text{si } q = 1, \\ \text{n'existe pas si} & q = -1, \\ \text{est infinie si} & |q| > 1. \end{cases}$

**4)** $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \text{ avec } 2 < e < 3;$

**5)** $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 1 : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0;$

**6)** $\forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0;$

**7)** $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0;$

**8)** $\forall a > 1 : \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0;$

**9)** $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \ldots + b_\ell n^\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \ell\,; \\ \dfrac{a_k}{b_k} & \text{si } k = \ell\,; \\ \infty & \text{si } k > \ell. \end{cases}$