Chapitre 3 : Les relations binaires

Introduction : Les relations sont partout, et dans le monde mathématique, et dans la vraie vie. Nous passons notre temps à comparer des objets, à les mettre en rapport les uns avec les autres selon tel ou tel aspect. Les phrases suivantes, pourtant diverses, sont toutes l'affirmation d'un lien entre deux objets : « $3 \leq 5$ », « 4 divise 12 »,

« Pierre est plus âgé que Paul », « $1+i$ et $1-i$ ont le même module », etc.

Définition 1 : Soient E et F deux ensembles, l'ensemble des éléments de la forme (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$ sont dit couple.

Remarque : L'écriture (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$ est la notation du couple.

Définition 2 : Soient E et F deux ensembles, le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$ est défini par :

$E \times F = \{(x, y),\ \text{tel que } x \in E, y \in F\}$

Le cas de plusieurs ensembles :

Soients $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille des ensembles (n est un entier naturel différent de 0) alors :

$E_1 \times E_2 \times \cdots\cdots\cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n),\ x_i \in E_i\}$

($\times$ est le produit cartésien).

Et on a pour $1 \leq i \leq n$:

$(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots\cdots\cdots, y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i$

Dans le cas précédent :

Si $E_1 = E_2 = \cdots\cdots\cdots = E_n = E$

Donc $E_1 \times E_2 \times \cdots\cdots\cdots \times E_n = \underbrace{E \times E \times \cdots\cdots\cdots \times E}_{n\ fois}$

Et on note $\underbrace{E \times E \times \cdots\cdots\cdots \times E}_{n\ fois} = E^n$

Remarque : Soients E et F deux ensembles, toute partie S de $E \times F$ définie une relation de E vers F notée $\mathcal{R}$

Les éléments (x, y) qui sont dans S sont dit liés par $\mathcal{R}$ et on note par $x\ \mathcal{R}\ y$

La notation $x\ \mathcal{R}\ y$ signifie que x est en relation avec y.

L'ensemble noté $G_{\mathcal{R}}$ défini par :

$G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E \times F, x\ \mathcal{R}\ y\}$ est le graphe de la relation $\mathcal{R}$.

Exemple : Soient E et F deux ensembles définis par :

$E = \{0,1,2,4,9\}$ et $F = \{4,7,8,81\}$

$\mathcal{R}$ est une relation de E vers F définie par :

$x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow y$ carré de x

Donc $G_{\mathcal{R}} = \{(2,4),(9,81)\}$

Définition 3 : Soient E et F deux ensembles et soit $\mathcal{R}$ une relation de E vers F, la relation réciproque de $\mathcal{R}$ notée $\mathcal{R}^{-1}$ est la relation définie de F vers E et cette relation $\mathcal{R}^{-1}$ est définie par :

$\forall\, x \in F, \forall\, y \in E,\ x\,\mathcal{R}^{-1} y \Leftrightarrow y\,\mathcal{R}\,x$

Dans l'exemple précédent le graphe de la relation $\mathcal{R}^{-1}$ noté $G_{\mathcal{R}^{-1}}$

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{R}^{-1}} &= \{(x,y) \in F \times E,\ x\,\mathcal{R}^{-1} y\ \} \\ &= \{(x,y) \in F \times E,\ y\,\mathcal{R}\,x\ \} \\ &= \{(x,y) \in F \times E,\ x \text{ carré de } y\} \\ &= \{(4,2),(81,9)\} \end{aligned}$$

Remarque : une relation entre deux éléments est dite relation binaire.

Soient E et F deux ensembles et soit $\mathcal{R}$ une relation de E vers F alors si $E = F$, $\mathcal{R}$ est dite relation dans E ou bien $\mathcal{R}$ est dite relation sur E.

On définit quelques notions d'une relation binaire comme suit :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, on dit que :

- $\mathcal{R}$ est réfléxive $\Leftrightarrow \forall\, x \in E, x\,\mathcal{R}\,x$
- $\mathcal{R}$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall\, x \in E, \forall\, y \in E, (x\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow y\,\mathcal{R}\,x)$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall\, x \in E, \forall\, y \in E, [(x\,\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,\mathcal{R}\,x) \Longrightarrow x = y]$
- $\mathcal{R}$ est transitive $\Leftrightarrow \forall\, x \in E, \forall\, y \in E, \forall\, z \in E, [(x\,\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,\mathcal{R}\,z) \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z]$

Les notions précédentes permettent de définir la relation d'équivalence et la relation d'ordre :

Définition 4 : La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\mathcal{R}$ est réflexive.
- $\mathcal{R}$ est symétrique.
- $\mathcal{R}$ est transitive.

Définition 5 : La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble E

si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\mathcal{R}$ est réflexive.
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
- $\mathcal{R}$ est transitive.

Classe d'équivalence : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, soit x un élément quelconque de E, on appelle classe d'équivalence de x suivant la relation $\mathcal{R}$ dans E ou bien classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$ dans E, l'ensemble noté $\overline{x}$ ou bien $\dot{x}$ défini par :

$\overline{x} = \{y \in E,\ x\,\mathcal{R}\,y\}$

Remarques :

- Dans l'ensemble précédent on a : $\overline{x} = \overline{y}$ et on dit que les deux éléments x et y sont équivalents.
- On peut trouver d'autres notations de la classe d'équivalence d'un élément.

Définition 6 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et soit x un élément quelconque de E, l'ensemble quotient est l'ensemble de toutes les classes d'équivalences et on le note $E/\mathcal{R}$

$E/\mathcal{R} = \{\overline{x}, \quad x \in E\}$

Définition 7 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E.

$\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre total sur E si et seulement si :

$\forall\, x \in E, \forall\, y \in E,\; x\,\mathcal{R}\,y$ ou bien $y\,\mathcal{R}\,x$

Définition 8 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E.

$\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre partiel sur E si et seulement si la relation d'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total sur E donc :

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur un ensemble E alors :

$\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre partiel sur E si et seulement si

$\exists\, x \in E,\; \exists\, y \in E :\; \overline{x\,\mathcal{R}\,y}$ et $\overline{y\,\mathcal{R}\,x}$

$\overline{x\,\mathcal{R}\,y}$: x n'est pas en relation avec y.

$\overline{y\,\mathcal{R}\,x}$: y n'est pas en relation avec x.

Exercice sur les relations d'équivalences.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R},\; x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2) Soit x un élément de $\mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence de x suivant la relation $\mathcal{R}$ dans E.
3) Déduire la classe d'équivalence de 5 suivant le relation $\mathcal{R}$ dans E.

La solution :

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{R}$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\; x\,\mathcal{R}\,x$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a $x^2 - x^2 = x - x$ donc $x\,\mathcal{R}\,x$

Conclusion : $\mathcal{R}$ est réflexive.

$\mathcal{R}$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, (x\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow y\,\mathcal{R}\,x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$

$$x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$$
$$\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$$
$$\Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x$$

Conclusion : $\mathcal{R}$ est symétrique.

$\mathcal{R}$ est transitive $\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, \forall\, z \in \mathbb{R}, [(x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z]$

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$ et soit $z \in \mathbb{R}$

$$x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$$
$$y \,\mathcal{R}\, z \Rightarrow y^2 - z^2 = y - z$$
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ y^2 - z^2 = y - z \end{cases} \Rightarrow x^2 - z^2 = x - z$$
$$\Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z$$

Conclusion : $\mathcal{R}$ est transitive.

Conclusion finale : Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive donc $\mathcal{R}$ est une relation d’équivalence.

2) La classe d’équivalence de x suivant la relation $\mathcal{R}$

$$\overline{x} = \{y \in \mathbb{R},\ x \,\mathcal{R}\, y\}$$
$$\overline{x} = \{\ y \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 = x - y\ \}$$
$$\overline{x} = \{\ y \in \mathbb{R},\ (x - y)(y + x - 1) = 0\ \}$$
$$\overline{x} = \{x, 1 - x\}$$

3) Déduire la classe d’équivalence de 5 suivant la relation $\mathcal{R}$

$$\overline{5} = \{5, -4\}$$