Université UMBB **Année 2021/2022**

Faculté des sciences, Dept de Maths **1ère Année, MI**

corrigé de la série d'algèbre1 n°1

1) Logique et ensembles:

Exercice 1: Soient les quatre assertions suivantes :

$$(\boldsymbol{a})\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}\,;\ (\boldsymbol{b})\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}\,;$$

$$(c)\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x + y > 0; (d)\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: y^2 > x.$$

1. Les assertions $(a), (b), (c)$ *et* (d) sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Solution :

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x + y \leq 0$ est vraie.
 Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$, par exemple on peut prendre
 $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$.

(b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors
 $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x + y \leq 0$.

(c) est fausse, par contre exemple $\exists x = -1, \exists y = 0$ tels que $x + y > 0$. La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x + y \leq 0.$$

(d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: y^2 \leq x$.

Exercice 2 : Démontrer par l'absurde que pour tout $x \in IR$; $|x + 3| \geq 3$ *ou* $|x - 3| \geq 3$

Solution : Soit $x \in IR$, on suppose que $|x + 3| < 3$ *et* $|x - 3| < 3$

On a $6=|6| = |3 + x - (x - 3)| = |(3 + x) + (-(x - 3))| \leq |3 + x| + |(-(x - 3))|$, inégalité triangulaire($|x + y| \leq |x| + |y|$), d ou $6\leq |3 + x| + |(x - 3)| < 3 + 3 = 6$, contradiction.

Exercice 3 :

1.Montrer par raisonnement direct et par contraposition l'assertion suivante :

E étant un ensemble $\forall A, B \in P(E), (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$

2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A\cup B\subset A\cup C$ et $A \cap B\subset A \cap C$.

Montrer que $B\subset C$.

Solution : Nous allons démontrer l'assertion de deux manières différentes.

1. étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ $(car\ A \cup B = A \cap B)$. Ainsi $x \in B$.

 D'autre part prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique que $x \in A$

 Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A{=}B$

Maintenant nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et nous devons montrer que $A \cap B \neq A \cup B$.

Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A$ et x n'appartient pas à B ou alors un élément $x \in B$ qui n appartient pas a A.
Nous supposons qu'il existe $x \in A$ et qui n est pas dans B. Alors $x \in A \cup B$ mais : $x \notin A \cap B$ Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

2. Prenons $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$, alors $x \in A \cup C$ d'après l'hypothèse. Si $x \in C$ c'est fini. Si

$x \in A$ alors $x \in A \cap B$ (puisque l'on a pris $x \in B$), d'après l'hypothèse $x \in A \cap C$ ce qui entraine que $x \in C$. On a bien montré que $B \subset C$.

<u>Exercice 4 :</u>

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités suivantes :

1. $A \subset B$, montrer $C_E B \subset C_E A$
2. $C_E\,(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$
3. $C_E\,(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

<u>Solution :</u>

1. Soit $x \in C_E B$ donc $x \notin B$, puisque $A \subset B$ alors $x \notin A$, d' où $x \in C_E A$.
2. Soit $x \in C_E\,(A \cap B)$, $x \notin A \cap B$ et donc $x \notin A$ ou $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cup C_E B$ Cela montre que $C_E\,(A \cap B) \subset C_E A \cup C_E B$. Soit $x \in C_E A \cup C_E B$, $x \notin A$ ou $x \notin B$ donc

$x \notin A \cap B$ ce qui entraine que $x \in C_E\,(A \cap B)$. Cela montre que $C_E A \cup C_E B \subset C_E\,(A \cap B)$. Et finalement $C_E\,(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

3. Soit $x \in C_E\,(A \cup B)$, $x \notin A \cup B$ et donc $x \notin A$ et $x \notin B$, ce qui signifie que $x \in C_E A \cap C_E B$ Cela montre que $C_E\,(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$. Soit $x \in C_E A \cap C_E B$, $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $x \notin A \cup B$ ce qui entraine que $x \in C_E\,(A \cup B)$. Cela montre que $C_E A \cap C_E B \subset C_E\,(A \cup B)$. Et finalement

$C_E\,(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

2) <u>Relations binaires</u>

<u>Exercice 1 :</u>

I – Soit $\Re$ une relation définie sur R par :

$\forall\, x, y \in \mathrm{R}\,;\quad x \,\Re\, y \Leftrightarrow x\, e^{y} = y\, e^{x}$

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

II – La relation $\Re$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}\,;\quad x \,\Re\, y \Leftrightarrow \exists\; k \in \mathbb{Z},\; x = k\, y$ est-elle une relation d'ordre ?

III – Montrer que la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2\,;\; (x_1, y_1) \Re (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ n'est pas une relation d'ordre.

Exercice 2 :

On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par : $\forall\, p,q \in \mathbb{N}$: $p\mathfrak{R}q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n = q$

***1)** Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.*

***2)** Cet ordre est –t-il total ? Justifier votre réponse.*

***Solution** :*

$p\mathfrak{R}q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $p^n = q$

1) $\mathfrak{R}$ *est une relation d'ordre si et si* $\begin{cases} i)\ \mathfrak{R}\ est\ réflexine \\ ii)\ \mathfrak{R}\ est\ antisymetique \\ iii)\mathfrak{R}\ est\ transitive \end{cases}$

i) $\mathfrak{R}\ est$ *reflexive* $\Leftrightarrow\ \forall\, P \in \mathbb{N}\ :\ PRP$
$soit\ \ P \in \mathbb{N}\ \ ;\ P = P = P^1 \quad \Rightarrow \exists\ \ n = 1 \in \mathbb{N}$ *t que* $P = P^n \quad \Rightarrow PRP$

ii) $\mathfrak{R}\ est\ antisymetique \Leftrightarrow\ \forall\, p,q \in \mathbb{N}\ \ ;\ pRq\ et\ qRp\ \Rightarrow\ \ p = q$
$soient\ \ p,q \in \mathbb{N}\ \ t.que\ \ pRq\ et\ qRp$
$alors\ \ \exists\ \ m,n\ \in \mathbb{N}\,;\ \ P^n\ = q\ et\ \ q^m = P$
$\Rightarrow\ (P^n)^m\ = q^m = P\ \Rightarrow\ \ P^{nm}\ = P$

- *Si* $P = 0$ *alors* $q = p^n\ = 0^n = 0\ \Rightarrow\ \ p = q = 0$
- *Si* $P \neq 0$ *on a :* $P^{nm-1} = 1\ \Rightarrow\ \ nm - 1 = 0\ \Rightarrow\ \ nm = 1$

Comme $m,n\ \in \mathbb{N}$*, les seuls diviseurs de 1 est 1 alors* $n = m = 1 \Rightarrow\ \ p = q$

iii) $\mathfrak{R}\ est\ transitive \Leftrightarrow\ \forall\, p,q,r \in \mathbb{N}$ *; t que* $pRq\ et\ qRr\ \ \Rightarrow pRr$
$soient\ \ p,q,r \in \mathbb{N}\ \ t.que\ \ \ pRq\ et\ qRr$
$\Rightarrow\ \exists\ \ m,n\ \in \mathbb{N}\,;\ \ p^n\ = q\ \ et\ \ q^m = r$
$\Rightarrow\ \ (p^n)^m\ = q^m = r\ \Rightarrow\ \ p^{nm}\ = r$

$\Rightarrow \exists\ \ s\ = mn\ \in \mathbb{N}\ \ t.que\ \ \ p^s\ = r\ \Rightarrow\ \ \ pRr$

D'ou $\mathfrak{R}$ *est une relation d'ordre*

2) $\mathfrak{R}$ *n'est pas une relation d'ordre total car*
$\exists\ P = 2\ \in \mathbb{N}\ et\ \ \exists\ q = 3\ \in \mathbb{N}\ t.que\ \forall\, n \in \mathbb{N} : 2^n \neq 3\ et\ 3^n \neq 2$
$car\ \ 2\ et\ 3\ sont\ premiers\ entre\ eux$

Exercice 3 :

I –On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$.

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence
2. Préciser la classe d'équivalence de a pour tout a de $\mathbb{R}^*$.

II – Même question pour la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow (x = y \;\; ou \;\; xy = 1$.

3) Applications

Exercice 1 :

I) Soit $f: E \to F$ une application. Montrer que :

$i)$ f injective $\Rightarrow \left(\forall A \subset E \;: f^{-1}\left(f \;\; (A)\right) \subset A\right)$.

$ii)$ f surjective $\Rightarrow \left(\forall B \subset F \;: f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B\right)$.

II) Soit l'application f définie par : $f: \; \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = 1 - \tfrac{1}{x^2}$$

1) Calculer $f(\{-1,1\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.
2) f est – elle injective ? surjective ? Justifier.

Solution :

I- *soient* $f: E \to F$ *une application,* $A \subset E$ *et* $B \subset F$

i) On suppose que f injective et on démontre que $f^{-1}\left(f \;\; (A)\right) \subset A$

Soit $x \in: f\left(f^{-1}(A)\right) \to f(x) \in f(A) \to \exists\, a \in A \in, f(x) = f(a)$

Comme f on obtient $x = a \quad \in A \;\; \to f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A.$

ii) *on suppose que f est surjective et on démontre que* $f\left(f^{-1}(B)\right) \supset B$

Soit $y \in B$ *, puisque* $B \subset F$ *et* f *surjective alors* $\exists\, x \in E, y = f(x)$

$Or\; y \in B \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Longrightarrow y \in f(f^{-1}(B))$

II- $f: \; \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = 1 - \tfrac{1}{x^2}$$

1) Calcul de $f(\{-1,1\})$ et $f^{-1}(\{1\})$

a) $f(\{-1,1\}) = \{f(-1), f(1)\} = \{0\}$

b) $f^{-1}(\{1\}) = \left\{x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \in \{1\}\right\}$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}^*, 1 - \frac{1}{x^2} = 1\right\} = \emptyset$$

2) Injective ? surjective ? justifier.

a) Puisque $f(\{-1,1\}) = \{0\}$ donc $f(-1) = f(1) = 0$ donc $\exists\ x = 1 \in \mathbb{R}^*$,

$\exists\ y = -1 \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(-1) = f(1)$ et $-1 \neq 1$

Conclusion : f n'est pas injective.

b) Puisque $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ donc on ne peut pas trouver $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = 1$

Conclusion : f n'est pas surjective.

Exercice 2 :

I) Soit l'application f définit par ; $f : \mathbb{R} \longrightarrow [5, +\infty[$ tel que :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5$.

1. f est – elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Comment peut-on **choisir un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée** pour obtenir une application bijective, dans ce cas déterminer la bijection réciproque.

II) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

i) Soient $A = \{-1,2,3\}$; $B = [0.1[$; $C = [-1,0]$; Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f^{-1}(C)$, f est-elle injective, surjective ?

ii) donner un ensemble de départ et un autre d'arrive de manière à avoir une application bijective, dans ce cas déterminer f^{-1}.

Solution :

I- **1.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow [5, +\infty[$ tel que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5$.

(f injective) ssi $\forall\ x,\ x' \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$\Leftrightarrow$ l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution

En effet: $f(x) = y \Leftrightarrow (x^2 - 8)^2 + 5 = y \Leftrightarrow x^2 - 8 = \pm\sqrt{y-5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8 \pm \sqrt{y-5}}$

ce qui montre que la solution n'est pas unique et f non injective.

- Ou bien on remarque que f est une application paire et donc : $f(1) = f(-1)$ mais $1 \neq -1$ et donc f n'est pas injective.

f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in [5, +\infty[, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

$\Leftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution

on a

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x^2-8)^2 + 5 = y \Leftrightarrow x^2 - 8 = \pm\sqrt{y-5} \Leftrightarrow x^2 = 8 \pm \sqrt{y-5}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{8 \pm \sqrt{y-5}}$$

la solution existe d'où : f est surjective.

f non injective implique que f non bijective.

- **2.** D'après la question1 f est surjective sur l'ensemble d'arrivée $[5, +\infty[$.
- Pour l'injectivité il faut que l'équation $y = f(x)$ **possède au plus** une solution en effet :

$y = f(x) \Leftrightarrow (x^2-8)^2 + 5 = y \Leftrightarrow x^2 - 8 = \pm\sqrt{y-5}$ alors pour que la solution soit au plus une **on choisit :** $x^2 - 8 = +\sqrt{y-5}$ qui corresponde à :

$x^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}, +\infty\right[$ dans ce cas :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 - 8 = \sqrt{y-5} \Leftrightarrow x^2 = 8 + \sqrt{y-5}$$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8 + \sqrt{y-5}}$ puisque l'injection nécessite au plus une solution **on choisit** $x \geq 0$ avec $x \in \left]-\infty, 2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}, +\infty\right[$ on obtient : $x \in \left[2\sqrt{2}, +\infty\right[$ et l'équation

$y = f(x)$ admet l'unique solution $x = \sqrt{8 + \sqrt{y-5}}$ ssi : $x \in \left[2\sqrt{2}, +\infty\right[$ ce qui donne l'ensemble de départ est $\left[2\sqrt{2}, +\infty\right[$ d'où :

L'application définie par : $\tilde{f}: \left[2\sqrt{2}, +\infty\right[\;\rightarrow\; [5, +\infty[$

$x \longmapsto \tilde{f}(x) = f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5$ est bijective et sa réciproque est définie par : $\tilde{f}^{-1}: [5, +\infty[\;\longrightarrow\; \left[2\sqrt{2}, +\infty\right[$

$$y \longmapsto \tilde{f}^{-1}(y) = x.$$

Tel que $y = f(x) \Leftrightarrow x = \boxed{\sqrt{8 + \sqrt{y-5}} = \tilde{f}^{-1}(y).}$

II- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definie par :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

i) *Soient* $A = \{-1, 2, 3\}$; $B = [0.1[$; $C = [-1, 0]$ *; Déterminer*

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \left\{\frac{1}{1+x^2}\,; x = -1 \vee x = -2 \vee x = 3\right\} = \left\{\frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+4}, \frac{1}{1+9}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right\} .$$

$f(B)=\{f(x),x\in[0.1[\ \}=\{f(x)\ ,0\leq x<1\}=\left\{\frac{1}{1+x^2}\ ,1\leq x^2+1<2\right\}=\left\{\frac{1}{1+x^2}\ ,\frac{1}{2}<\frac{1}{1+x^2}\leq 1\right\}$
$=\left]\frac{1}{2},1\right]$

$$f^{-1}(C)=\{x\in\mathbb{R}\,,f(x)\in[-1{,}0]\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,,\frac{1}{x^2+1}\in[-1{,}0]\right\}=\emptyset$$

ii) il est clair que *f* est une application paire donc :

$\exists x_1=2\,,x_2=-2\ \in\mathbb{R}\,,tels\ que\ f(2)=f(-2)\ mais\ 2\neq-2\ d'ouf\ est\ injective.$

De même *f* n'est pas surjective car :$\exists y=0\in\mathbb{R}\,,\forall x\in\mathbb{R}\,,\frac{1}{1+x^2}\neq 0\ \ i.e\ y\neq f(x)$

Le choix des éléments pour l'injection et la surjection de *f* n'est pas unique.

iii) Pour que *f* soit bijective il faut qu'elle soit injective et surjective ou bien *y= f(x)* admet une solution, on a :

$y=f(x)\Rightarrow y=\frac{1}{1+x^2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$

Donc la solution existe si

$$\left(y\neq 0\ et\ \frac{1-y}{y}\geq 0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}y>0\ et\ 1-y\geq 0\\ \quad ou\\ y<0\ et\ 1-y\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\quad y>0\ et\ y\leq 1\\ \quad ou\\ y<0\ et\ y\geq 1exclu\end{cases}\Leftrightarrow y\in]0.1]$$

Et elle est unique si $x\in\mathbb{R}_+\ ou\ x\in\mathbb{R}_-$

D'où finalement $\breve{f}:\mathbb{R}_+\ \ \rightarrow]0.1]$*définie par* $\breve{f}\,(x)=\frac{1}{1+x^2}$ *est bijective et admet une* application réciproque $\left(\breve{f}\right)^{-1}$:$]0.1]\rightarrow\mathbb{R}_+$ telle que $\left(\breve{f}\right)^{-1}(y)=\sqrt{\frac{1-y}{y}}$.