Chapitre 2 : les ensembles

Introduction : Les notions de la théorie des ensembles et des fonctions sont à la base d'une présentation moderne des mathématiques.

Immanquablement, on y fait appel pour la construction d'objets plus complexes, ou pour donner une base solide aux arguments logiques. En plus d'être des notions fondamentales pour les mathématiques, elles sont aussi cruciales en informatique, par exemple pour introduire la notion des structures de données.

Définition 1 : Un ensemble est une collection bien définie d'objets.

On note par E, et en écrit $E = \{ \quad \}$, (c'est la notation d'un ensemble).

Un ensemble peut être écrit en extension, c'est-à-dire que l'on donne la liste de tous ses éléments, ou en compréhension, c'est-à-dire que l'on définit cet ensemble par une propriété.

Définition 2 : Les objets de E sont appelés éléments.

Un élément x qui est dans E est dit appartenant à E ou x appartient à E et on note $x \in E$.

Dans les accolades et entre les éléments d'un ensemble on écrit des virgules.

Si le x n'appartient pas à E, on écrit $x \notin E$.

Exemples des ensembles :

- $E = \{2,3,4,5\}$ est défini en extension, et $F = \{n \in \mathbb{N}; 2 \leq n < 6\}$ est défini en compréhension. Remarquons que $E = F$
- L'ensemble $\{0,1,\cdots,n,\cdots\} = \mathbb{N}$ des entiers naturels.
- $H = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = 0\}$, les éléments de H sont les éléments de $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $x^2 - 1 = 0$ donc les éléments de H sont -1 et 1, on note $H = \{-1,1\}$
- $S = \{x \in \mathbb{N},\ x < 0\}$, les éléments de S sont les éléments de $\mathbb{N}$ vérifiant la relation $x < 0$ donc $H = \{\ \} = \emptyset$, ($\{\ \} = \emptyset$ est la notation de l'ensemble vide)
  $\{\ \} = \emptyset$ est l'ensemble qui contient aucun élément.

Remarque : Si E est un ensemble formé par un seul élément, alors E est dit singleton.

Exemple : $E = \{x \in \mathbb{R},\ x - 1 = 0\} = \{1\}$

Il y a des notations réservées pour certains ensembles ; par exemple :

$\mathbb{C}$ est l'ensembles des nombres complexes.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_-$ est l'ensembles des nombres réels négatifs.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

Si $E = \mathbb{C}$ ou bien $E = \mathbb{R}$ ou bien $E = \mathbb{Z}$ ou bien $E = \mathbb{N}$, alors :

l'ensemble $E - \{0\}$ est noté par E^*

Définition 3 : Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments qui forment

l'ensemble E, et on le note par $|E|$ ou bien $\text{card}\, E$.

2- Opérations sur les ensembles : Il nous faudra parfois effectuer des opérations sur les ensembles. Par exemple, nous voudrons peut- être trouver des éléments communs à plusieurs ensembles ou ceux qui appartiennent à un seul de ces ensembles. La section suivante vous présente les opérations ensemblistes les plus importantes, ainsi que leurs notations symboliques.

2-1 : Définition de l'inclusion : Soient E et F deux ensembles, on dit que : F est contenu dans E ou F est une partie de E ou F est un sous- ensemble de E si et seulement si tout élément de F est un élément de E et on note $F \subseteq E$ ou bien $F \subset E$, on écrit :

$F \subseteq E \Leftrightarrow (\forall x \in F \Longrightarrow x \in E)$

Si l'ensemble F n'est pas une partie de l'ensemble E, on écrit donc :

$F \nsubseteq E$ ou bien $F \not\subset E$

Exemple d'un sous- ensemble : $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\} \subseteq \mathbb{R}_+$

On distingue deux types d'inclusion :

- **Définition de l'inclusion large :** Soient E et F deux ensembles, F est inclus au sens large dans E si et seulement si F est une partie de E, et on note :
  $F \subseteq E$ ou bien $F \subset E$

Exemple : $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}_+$

- **Définition de l'inclusion stricte :** Soient E et F deux ensembles, F est inclus au sens stricte dans E si et seulement si F est une partie de E, mais E n'est pas une partie de F, et on note $F \subsetneq E$.

Exemple : $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \subsetneq \mathbb{R}$ car $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ est une partie de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, mais ce dernier n'est pas une partie de $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

2-2 : L'ensemble des parties d'un ensemble : L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est noté $P(E)$.

Exemple : Soit l'ensemble $E = \{0,1,2\}$

$|E| = 3$ et $P(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, E\}$.

Remarques :

- Si E est un ensemble donc $|P(E)| = 2^{|E|}$ et on a $P(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{\{\ \}\}$
- $\text{card}\, \emptyset = 0$

Dans l'exemple précédent :

$|P(E)| = 2^3 = 8$

La notion de l'inclusion permet de définir l'égalité entre les ensembles :

2-3 : Définition de l'égalité : Soient E et F deux ensembles, l'ensemble E est égal à l'ensemble F, si et seulement si l'ensemble E est une partie de F et l'ensemble F est une partie de E et on écrit $E = F$, donc on a la relation suivante :

$E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$ et $F \subseteq E$

Propriétés :

- Pour un ensemble E on a l'équivalence :
  $x \in E \Leftrightarrow \{x\} \in P(E)$
- Soit A un sous- ensemble d'un ensemble E donc :

  $A \in P(E) \Leftrightarrow A \subseteq E$

- Soient E, F et G trois ensembles alors :
  $E \subseteq F$ et $F \subseteq G \Longrightarrow E \subseteq G$
  C'est-à-dire que l'inclusion est transitive.

2-4 : Intersection des ensembles : Soient A et B deux parties d'un ensemble E, l'intersection de A et B notée $A \cap B$ est définie par la relation suivante :

$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$

Si $A \cap B = \emptyset$ alors A et B sont dit disjoints.

2-5 : Réunion des ensembles : Soient A et B deux parties d'un ensemble E, la réunion de

A et B notée $A \cup B$ est définie par la relation suivante :

$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$

2-6 : Complémentaire d'un ensemble : Soit A une partie d'un ensemble E,

le complémentaire de A dans E noté C_E^A est défini par la relation suivante :

$C_E^A = \{x \in E, \text{tel que } x \notin A\}$

2-7 : Différence de deux ensembles : Soient A et B deux parties d'un ensemble E,

la différence de A et B notée $A - B$ est définie par la relation suivante :

$A - B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

2-8 : Différence symétrique de deux ensembles : Soient A et B deux parties d'un

ensemble E, la différence symétrique de A et B notée $A \,\Delta\, B$ est définie par la relation suivante :

$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

Remarque très importante : Si E est un ensemble défini par une expression comme suit :

$E = \{x \in A,\ P(x)\}$ donc on peut écrire $E \subseteq A$ et on a :

- $P(x)$ est une propriété qui dépend de x. Cette propriété définit l'ensemble E.
  Et on peut écrire : $x \in E \Leftrightarrow x \in A$ et on a $P(x)$.
- Dans l'ensemble E on peut remplacer la propriété $P(x)$ par une deuxième propriété équivalente à cette première propriété. On note cette deuxième propriété par $Q(x)$ alors on peut écrire $E = \{x \in A,\ P(x)\} = \{x \in A,\ Q(x)\ \}$.

3- Partition d'un ensemble : Soit E un ensemble et E_i une famille des sous-ensembles de E tels que $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Les E_i forment une partition de E si et seulement si :

- $E_i \neq \emptyset$, $\forall\ i \in \{1,2,\cdots,n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
- $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall\ i \neq j, (\ j \in \{1,2,\cdots,n\})$ et $(i \in \{1,2,\cdots,n\})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
- $E_1 \cup E_2 \cup \cdots\cdots\cdots \cup E_n = E$

Exemple : Soit $E =]-1,2]$ un ensemble.

Nous considérons les sous-ensembles A et B de E définis par :

$A =]-1,0[$ et $B = [0,2]$

A et B forment une partition de E car :

$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$