Faculté des Sciences **Année: 2020-2021**

Département de Mathématiques **Module: Analyse 1.**

Résumé: Nombres réels

1. INTRODUCTION

La résolution de certaines équations algébriques donnent différents types de nombres dont:

(1) **Ensemble des entiers naturels**
l'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$, est donné par: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots n, \cdots\}$.

(2) **Ensemble des entiers relatifs:**
Les entiers naturels ne peuvent pas résoudre certaines équation comme: $x + 5 = 0$. Il doit alors construire un ensemble plus grand que $\mathbb{N}$. Cet ensemble noté $\mathbb{Z}$, est appelé l'ensemble des entiers relatifs:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

(3) **Ensemble des nombres rationnels**
La solution de l'équation $2x - 5 = 0$, dans $\mathbb{Z}$ montre que l'ensemble des entiers relatifs est insuffisant ($x = 2.5 \notin \mathbb{Z}$). Il faut alors introduire un ensemble agrandi du précédent. Cet ensemble noté $\mathbb{Q}$ est appelé ensemble des nombres rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Signalons que le nombre rationnel $\frac{a}{b}$, peut s'écrire en plus de sa forme fractionnaire comme un développement décimal limité: $\frac{5}{2} = 2.5$ ou illimité périodique: $\frac{1}{3} = 0.333333...$

(4) **Ensemble des nombres réels**
L'équation $x^2 - 2 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$ car ($x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). D'où la nécessite de la construction d'un ensemble de nombres plus vaste que $\mathbb{Q}$. Cet ensemble noté $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des nombres réels formé des nombres rationnels et irrationnels.

Définition 1.1. *Le nombre irrationnel ce qui signifie qu'on peut pas écrire* $\frac{a}{b}$ *(tout développement décimal illimité non périodique), qui appartient à* $\mathbb{R}$ *et n'appartient pas à* $\mathbb{Q}$*. On note par:* $\mathbb{R} \mid \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$*, l'ensemble des nombres irrationnels.*

Example 1.1.
- $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766 8\cdots$
- $\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749 4\cdots$

Dans ce chapitre, après quelques types des raisonnements mathématiques. Nous donnons certains règles de calcul sur les nombres réels. Nous précisons ensuite la propriété de la borne supérieure et la borne inférieure. À la fin de ce chapitre, nous présentons diverses notions s'appliquant aux nombres réels: intervalle, valeur absolu, partie entière et radicaux.

2. DIFFÉRENTS TYPES DE RAISONNEMENT EN MATHÉMATIQUES

Il est important de trouver un moyen ou une méthode pour répondre à un certain problème, pour cela on s'inspire à quelques techniques ou raisonnements.

2.1. **Raisonnement direct.** Il consiste à utiliser les informations (hypothèses) de l'énoncé ainsi que des résultats connus (théorèmes ou définitions), afin de construire une démonstration qui nous permet d'obtenir le résultat voulu.

Example 2.1. *Pour $x, y \in \mathbb{R}$. On montre que:*

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

En exploitant l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$, alors:

$$\text{Pour } \ x, y \in \mathbb{R}, \text{ on a } \ (a-b)^2 \geq 0, \text{ donc } \ (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \geq 0,$$

$$\text{d'où } \ a^2+b^2 \geq 2ab \text{ ce qui implique } xy \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

2.2. **Raisonnement direct par une implication.** Le résultat à démontrer est de la forme:

$$P \Rightarrow Q$$

Pour montrer ce résultat, on suppose que la proposition P est vraie et on montre alors la proposition Q est vraie.

Example 2.2. *Montrons que:*

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

On a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x} &\Rightarrow 1 = (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}), \\ &\Rightarrow 1 = 1-x, \\ &\Rightarrow x = 0, \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat.

2.3. **Raisonnement par contraposée.** Ce type de raisonnement est utilisé lorsque la démonstration directe est difficile $P \Rightarrow Q$. Il s'agit dans ce cas de montrer que:

$$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}.$$

Example 2.3. *Montrons que*

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}, \forall y \in \mathbb{R}-\{1\}, \quad \left(x \neq y \Rightarrow \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}\right),$$

La contraposée de cette propriété est donnée par:

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}, \forall y \in \mathbb{R}-\{1\}, \quad \left(\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow x = y\right).$$

On a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1} &\Rightarrow x-1 = y-1 \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

2.4. **Raisonnement par l'absurde.** Il consiste à supposer que la proposition que l'on veut démontrer est faussse et puis on essaye de trouver une contradiction.

Example 2.4. . *Montrons que: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \cdots (1)$ où $PGCD(a, b) = 1$. En élevant au carré (1): $2b^2 = a^2 \cdots (2)$, il est facile de remarquer que a est pair, donc $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = 2k \cdots (3)$, en remplaçant (3) dans (2), il vient $b^2 = 2k^2$, ce que implique que b est pair, alors $PGCD(a, b) \neq 1$, (nous avons trouvé une contradiction).

2.5. **Raisonnement par contre-exemple.** Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E \quad P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\forall x \in E \quad P(x)$.

Example 2.5. *L'assertion tout entier positif est somme de trois carrés est-elle vraie ? fausse ?*

Proof. L'énoncé se traduit ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a,b,c) \in \mathbb{N}^3, n = a^2+b^2+c^2$. On a

$$\begin{array}{llll} 0 = 0^2+0^2+0^2, & 1 = 1^2+0^2+0^2, & 2 = 1^2+1^2+0^2, & 3 = 1^2+1^2+1^2 \\ 4 = 2^2+0^2+0^2, & 5 = 2^2+1^2+0^2, & 6 = 2^2+1^2+1^2, & \end{array}$$

le nombre 7 n'est pas somme de trois carrés. Cela prouve que l'assertion est fausse. □

2.6. **Raisonnement par récurrence.** Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de l'initialisation on prouve $P(0)$. Pour l'étape d'hérédité, on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Example 2.6. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

Proof. Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
Initialisation. Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2^n + 2^n &> n + 2^n && \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n+1 && \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$. □

3. Règles de calcul

L'objet de cette partie est de rappeler les principales propriétés et formules calculatoires concernant les nombres réels.

(1) $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x \leq y \\ u \leq v \end{cases} \Rightarrow x+u \leq y+v.$

(2) $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x \leq y \\ u < v \end{cases} \Rightarrow x+u < y+v$

(3) $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x \leq y \\ u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow xu \leq yu.$

(4) $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x \leq y \\ u \leq 0 \end{cases} \Rightarrow xu \geq yu.$

(5) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \ \ 0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

(6) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \ \ x \leq y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$

(7) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \ \ x < 0 < y \Rightarrow \frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$

(8) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \ \ x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n.$

(9) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \ \ x \leq 1$ et $n \leq m \Rightarrow x^n \geq x^m.$

(10) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \ \ x \geq 1$ et $n \leq m \Rightarrow x^n \leq x^m.$

3.1. **Formule du binôme de Newton.** Soient x et y deux réels et n un entier non nul. On a

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k,\end{aligned}$$

où

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{(coefficient binomial).}$$

3.2. **Triangle de Pascal.**

$$\begin{array}{cccccccc}
(x+y)^0 & 1 & & & & & & \\
(x+y)^1 & 1 & 1 & & & & & \\
(x+y)^2 & 1 & 2 & 1 & & & & \\
(x+y)^3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
(x+y)^4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
(x+y)^5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Proposition 3.1. *Pour tous réels x et y et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{aligned}x^n - y^n &= (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \\ &= (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Par exemple: $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

4. MAJORANTS, MINORANTS

4.1. **Majorants, minorants.**

Définition 4.1.

(1) *On dit que A est majorée si et seulement si:* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A\ x \leq M$

(2) *On dit que A est minorée si et seulement si:* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A\ x \geq m.$

(3) *On dit que A est bornée si et seulement si A est majorée et minorée:* $\exists (M,m) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A\ m \leq x \leq M.$

Example 4.1.

(1) 5 *est un majorant de* $]0,1[$.

(2) $-7, -\pi, 0$ *sont des minorants de* $]0,+\infty[$ *mais il n'y a pas de majorant.*

(3) *Soit* $A = [0,1[$.

- *les majorants de A sont exactement les éléments de* $[1,+\infty[$,
- *les minorants de A sont exactement les éléments de* $]-\infty,0]$.

Remarque 4.1. *Les majorants et les minorants n'existent pas toujours quand ils existent ne sont pas uniques.*

4.2. **Maximum, minimum.**

Définition 4.2. *Soit A une partie non vide de* $\mathbb{R}$.

- *Un réel α est un plus grand élément de A si:* $\alpha \in A$ *et* $\forall x \in A\ \ x \leq \alpha$, *on le note alors:* $\alpha = \max A$.
- *Un réel β est un plus petit élément de A si:* $\beta \in A,\ \ \forall x \in A\ \ x \geq \beta$, *on le note alors:* $\beta = \min A$.

Le plus grand élément s'appelle aussi le maximum et le plus petit élément, le minimum.

Remarque 4.2. *Le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours quand ils existent sont uniques.*

Example 4.2.
- $\max[a,b] = b$, $\min[a,b] = a$.
- *L'intervalle* $]a,b[$ *n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.*
- *L'intervalle* $[0,1[$ *a pour plus petit élément* 0 *et n'a pas de plus grand élément.*

5. Borne supérieure, borne inférieure

Définition 5.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

(1) *Si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A contient un plus petit élément M, on dit que M est la borne supérieure de A. On note:* $M = \sup A$.
(2) *Si A est minorée et si l'ensemble des minorants de A contient un plus grand élément m, on dit que m est la borne inférieure de A. On note:* $m = \inf A$.

Example 5.1. *Soit* $A =]0,1]$.

(1) $\sup A = 1$ *: en effet les majorants de A sont les éléments de* $[1,+\infty[$. *Donc le plus petit des majorants est* 1.
(2) $\inf A = 0$ *: les minorants sont les éléments de* $]-\infty,0]$ *donc le plus grand des minorants est* 0.

Example 5.2.
- $\sup[a,b] = b$,
- $\inf[a,b] = a$,
- $\sup]a,b[= b$,
- $]0,+\infty[$ *n'admet pas de borne supérieure,*
- $\inf]0,+\infty[= 0$.

5.1. Propriétés de la borne supérieure (ou inférieure).

Théorème 5.1 (Théorème fondamental de l'ensemble des nombres réels)**.**

(1) *Tout sous-ensemble A* ***non vide*** *et* ***majoré*** *de $\mathbb{R}$ admet une* ***borne supérieure*** *M qui vérifie*

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \quad M - \varepsilon < x_\varepsilon \end{cases}$$

(2) *Tout sous-ensemble A* ***non vide*** *et* ***minoré*** *de $\mathbb{R}$ admet une* ***borne inférieure*** *m qui vérifie*

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \quad m + \varepsilon > x_\varepsilon \end{cases}$$

Example 5.3. *Montrons que* $Sup([0,2[) = 2$. *En utilisant la propriété de la borne supérieure:*

$$Sup([0,2[) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E; x \leq 2, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A;\ 2 - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, trouvons $x_\varepsilon \in E$ tel que: $2 - \varepsilon < x_\varepsilon$, x_ε existe dans E, il suffit de prendre $x_\varepsilon = \frac{2-\varepsilon+2}{2} = \frac{4-\varepsilon}{2} = 2 - \frac{\varepsilon}{2} \in E$, (car E est un intervalle). D'où $Sup(E) = 2$.

Example 5.4. *Déterminer les bornes inférieure et supérieure, lorsqu'elles existent, de l'ensemble*

$$A = \left\{ x = 3 - \frac{6}{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3 \right\}$$

(1) Montrons que A, non vide et borné?
- $A \neq \emptyset$, car: pour $n = 4 \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$, on a $0 = 3 - \dfrac{6}{4-2} \in A$.
- Aest borné $\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R} \ \forall x \in A; \quad m \leq x \leq M$. On a

$$n \geq 3 \Rightarrow n - 2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n-2} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{6}{n-2} \leq 6 \Rightarrow -6 \leq -\frac{6}{n-2} < 0 \Rightarrow -3 \leq 3 - \frac{6}{n-2} < 3 \Rightarrow -3 \leq x < 3.$$

Donc, 3 est un majorant de A et -3 est un minorant de A

(2) Déterminons: $Min(A)$, $Inf(A)$, $Sup(A)$, et $Max(A)$ s'ils existent?

- $\forall x \in A$; $-3 \leq x$. On remarque que $-3 \in A$ car: pour n = 3 ,on a: $-3 = 3 - \dfrac{6}{3-2} \in A$, donc $Min(A) = -3$
  Comme $Min(A)$ existe, alors $Inf(A)$ existe, donc $Min(A) = Inf(A) = -3$
- Montrons que $Sup(A) = 3$. En utilisant la caractérisation de la borne supérieure

$$Sup(A) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \leq 3, \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A;\ 3-\varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\};\ 3 - \dfrac{6}{n_\varepsilon - 2} \leq 3, & (1) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} - \{0,1,2\};\ 3 - \varepsilon < 3 - \dfrac{6}{n_\varepsilon - 2}. & (2) \end{cases}$$

La première inégalité est déjà démontrée
Examinons la seconde
Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $n_\varepsilon \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$; tel que:

$$3 - \frac{6}{n_\varepsilon - 2} > 3 - \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{6}{n_\varepsilon - 2} > -\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{6}{n_\varepsilon - 2} \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{6}{\varepsilon} + 2.$$

Il suffit de prendre $n_\varepsilon = E\left(\dfrac{6}{\varepsilon} + 2\right) + 1 \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$.
Ainsi, $Sup(A) = 3$
Par exemple: Pour $\varepsilon = 0,3 > 0$, on a:

$$\begin{aligned} n_\varepsilon &= E\left(\frac{6}{\varepsilon} + 2\right) + 1 = E\left(\frac{6}{0,3} + 2\right) + 1, \\ &= E(22) + 1 = 23 \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}. \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon &= 3 - \frac{6}{n_\varepsilon - 2}, \\ &= 3 - \frac{6}{23-2} = 2,71 \in A. \end{aligned}$$

Ce qui vérifié l'inégalité (2)

$$x_\varepsilon = 2.71 > 3 - \varepsilon = 3 - 0.6 = 2,4.$$

On a, $Sup(A) = 3 \notin A$, car:

$$\begin{aligned} 3 = 3 - \frac{6}{n-2} &\Leftrightarrow -\frac{6}{n-2} = 0, \\ &\Leftrightarrow -6 = 0, \text{ ce qui impossible.} \end{aligned}$$

On déduit alors que $Max(A)$ n'existe pas

6. LA NOTION DE PARTIE ENTIÈRE

Théorème 6.1 (Partie entière)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \leq x < \alpha + 1$.L'entier relatif α est appelé **partie entière** du réel x et est noté $E(x)$ ou $[x]$.*

Example 6.1. *On a $E(\pi) = 3, E(-\pi) = -4, E(2,99999) = 2, E(-4) = -4$.*

On appelle fonction partie entière l'application $\begin{array}{rl} E: \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{Z} \\ x \mapsto & E(x) \end{array}$. La fonction de la partie entière possède les propriétés suivantes :

Proposition 6.1. *Soit x un nombre réel. On a*

(1) $E(x) \le x < E(x)+1$ *et* $x-1 < E(x) \le x$.
(2) $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
(3) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \ E(x+n) = E(x)+n$.
(4) *La fonction* $x \mapsto E(x)$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
(5) $\forall x, y \in \mathbb{R}\quad E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0,1\}$.

On montre la propriété 5, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a les inégalités :

$$\begin{cases} x-1 < E(x) \le x \\ y-1 < E(y) \le y \\ x+y-1 < E(x+y) \le x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \le -E(x) < -x+1, \\ -y \le -E(y) < -y+1, \\ x+y-1 < E(x+y) \le x+y. \end{cases}$$

En sommant membre à membre, on obtient

$$-1 < E(x+y) - E(x) - E(y) < +2,$$

comme $E(x+y) - E(x) - E(y) \in \mathbb{Z}$, alors

$$E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0,1\}.$$

7. Intervalles

Définition 7.1. *Un intervalle de* $\mathbb{R}$ *est un sous-ensemble* I *de* $\mathbb{R}$ *vérifiant la propriété :*

$$\forall a, b \in I\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (a \le x \le b \implies x \in I)$$

Autrement dit, un intervalle est défini comme un ensemble où tout réel compris entre deux réels de l'ensemble appartient à l'ensemble.

7.1. **Les types d'intervalles.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On définit les intervalles d'extrémités a et b suivants,

(1) Un intervalle fermé: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \text{ et } x \le b\}$
(2) Un intervalle ouvert borné: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ et } x < b\}$
(3) Un intervalle semi-ouvert borné:

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \text{ et } x < b\} \text{ ou }]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ et } x \le b\}$$

(4) Un intervalle minoré non majoré :

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \text{ ou }]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

(5) Un intervalle majoré non minoré: $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ ou $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$
(6) Un intervalle ni majoré ni minoré: $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Example 7.1.

- $I = [1,2] \cup [4,5]$, *est un intervalle.*
- $J = [4,5]$, *est un intervalle.*
- *Par contre:* $D = I \cup J = [1,2] \cup [4,5]$ *n'est pas un intervalle, car: pour* $x \in I \subset D$ *et* $y \in J \subset D$ $\exists z = 3,\ \ x < z = 3 < y$ *mais* $3 \notin D$.

8. La valeur absolue

Définition 8.1. *On appelle valeur absolue du réel x le réel positif noté* $|x|$ *définie par*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ \ x \ge 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}.$$

Les principales propriétés de la valeur absolue sont données dans la proposition suivante.

Proposition 8.1. *On a*

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max\{x, -x\}$ *et* $|-x| = |x|$

(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(3) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x|\,|y|$
(4) $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \le x \le |x|$
(5) $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\sqrt{x^2} = |x|\right) \wedge \left(|x|^2 = x^2\right)$
(6) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+,\ |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$
(7) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+,\ |x| \ge a \Leftrightarrow ((x \ge a) \vee (x \le -a))$
(8) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x^n| = |x|^n$.
(9) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \le |x| + |y|$ *(1^{re} inégalité triangulaire)*
(10) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big||x| - |y|\big| \le |x-y|$ *(2^e inégalité triangulaire)*

Démonstration:

(1) On démontre la propriété 9. On a par définition de la valeur absolue:
$$-|x| \le x \le |x| \quad \text{et} \quad -|y| \le y \le |y|.$$
En additionnant membre à membre, on obtient
$$-\left(|x| + |y|\right) \le x + y \le |x| + |x|,$$
donc
$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

(2) On démontre la propriété 10. On a
$$\begin{cases} |x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y| \\ |y| = |y-x+x| \le |y-x| + |x| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| - |y| \le |x-y| & (a) \\ |x| - |y| \ge -|x-y| & (b) \end{cases}$$
(a) et (b) $\Leftrightarrow -|x-y| \le |x| - |y| \le |x-y| \Leftrightarrow \big||x| - |y|\big| \le |x-y|$.

9. Radicaux

Définition 9.1. *Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on appelle **racine carrée** de x et on note $\sqrt{x}$ l'unique élément y de $\mathbb{R}^+$ tel que $y^2 = x$. Plus généralement*

- *si n est un entier naturel pair $(n \ge 2)$ et si $x \in \mathbb{R}^+$, on appelle **racine n-ième** de x et on note $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ l'unique élément y de $\mathbb{R}^+$ tel que $y^n = x$;*
- *si n est impair, la racine n-ième de x est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$: c'est l'unique réel y tel que $y^n = x$.*

Ainsi, par définition,
$$\text{si } n \text{ est pair } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x \ \text{ et } y \ge 0$$
$$\text{si } n \text{ est impair } \forall x \in \mathbb{R} \quad y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$$

Example 9.1. $\sqrt[3]{-8} = -2$ *et* $\sqrt[3]{8} = 2$

Remarque 9.1. *On appelle **quantité conjuguée** de $\sqrt{a} + \epsilon\sqrt{b}\,(\epsilon = \pm 1)$ l'expression $\sqrt{a} - \epsilon\sqrt{b}$; les égalités suivantes :*
$$\sqrt{a} + \epsilon\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} - \epsilon\sqrt{b}}$$
$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$$
sont très utiles pour étudier les expressions irrationnelles.

* * * * * * * * * * * * * * * * * *