Chapitre 4 : Les applications

Définition : Soient E et F deux ensembles.

On appelle application de E vers F, toute relation $\mathcal{R}$ de E vers F qui associe à chaque élément x de E, un élément unique y dans F.

On note cette relation par f et on écrit :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = y \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y \end{aligned}$$

On dit que f est une application de E vers F ou bien f est une application de E dans F.

E est l'ensemble de départ de l'application f

F est l'ensemble d'arrivé de l'application f

x est dit antécédent de y par f

y est dit l'image de x par f

Caractérisation : Soient E et F deux ensembles, alors on peut écrire :

f est une application de E vers F si et seulement si $\forall\, x, x' \in E$, $[x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x')]$

Exemple : Soit $\mathcal{R}$ la relation de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow y = \ln x$$

Cette relation $\mathcal{R}$ définie une application de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et on écrit :

$$\begin{aligned} f :\ ]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = y = \ln x \end{aligned} \quad \text{est une application}$$

Et on a par exemple : $f(1) = \ln 1 = 0$

$f(2) = \ln 2$

Par contre la relation $\mathcal{R}_1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$x\,\mathcal{R}_1\,y \Leftrightarrow y = \ln x$, n'est pas une application.

Notation : Soit f une application d'un ensemble $E = E_1 \times E_2 \times \cdots\cdots\cdots \times E_n$ vers un ensemble F ($\times$ est le produit cartésien de plusieurs ensembles, déjà définit dans le chapitre des relations), alors pour un élément $(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n)$ de E , on peut écrire simplement

$f\big((x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n)\big) = f(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n)$.

Application identité : Soit E un ensemble, l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f(x) = x, \end{aligned}$$

est dite application identité dans E, on note le $f(x)$ par $Id_E(x)$

ou bien on note $f = Id_E$

Id_E est dite application identité dans E.

Composée d'applications : Soient E, F et G trois ensembles,

f et g deux applications définies par :

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x) = y$$
$$g : F \longrightarrow G$$
$$y' \longmapsto g(y') = z$$

L'application composée de f et g notée $g \circ f$ est définie par :

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$\circ$ est le symbole de composition des applications.

Exemple :

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = y = \ln x \quad \text{et}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = e^x$$

Pour $x \in]0, +\infty[$

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(\ln x) = e^{\ln x} = x$ donc :

$$g \circ f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = x$$

Définition : On définit par récurrence la composition d'un nombre fini quelconque d'applications. D'après la définition même, on peut voir que la composition d'applications est associative. On notera $f \circ g \circ h$

L'application $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(f, g et h sont trois applications)

La relation signifie que $\circ$ est associative

Applications injectives : Soit f une application de E vers F

L'application f est injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, [f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x']$

Et on peut écrire :

L'application f est injective $\Leftrightarrow$ tout élément y de F à au plus un antécédent x.

Applications surjectives : Soit f une application de E vers F

L'application f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

Et on peut écrire :

L'application f est surjective $\Leftrightarrow$ tout élément y de F à au moins un antécédent x.

Exemple :

1) Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

f n'est pas injective car : $\exists\, x,\ x' \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$

Par exemple $x = -1$ et $x' = 1$

f n'est pas surjective car : pour $y < 0$, on peut pas trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = y$

2) Soit l'application $g :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto g(x) = x^2$$

g est une application injective et surjective.

Applications bijectives : Soit f une application de E vers F

L'application f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et f est surjective.

Et on peut écrire :

L'application f est bijective $\Leftrightarrow \forall\, y \in F, \exists!\ x \in E,\ y = f(x)$

Exemple : L'application $g :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto g(x) = x^2$$

est une application bijective car elle est injective et surjective.

Propriétés : Soient f et g deux applications définies par :

$f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ alors on a les implications suivantes :

- f est injective et g est injective $\Longrightarrow g \circ f$ est injective.
- f est surjective et g est surjective $\Longrightarrow g \circ f$ est surjective.
- f est bijective et g est bijective $\Longrightarrow g \circ f$ est bijective

Applications réciproques :

Soit $f : E \longrightarrow F$

$$x \longmapsto f(x) = y$$

une application bijective, l'application notée f^{-1} définie par :

$$f^{-1} :\ F \longrightarrow E$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = x$$

est appelée application réciproque de f ou bien la réciproque de l'application f.

Exemple :

Soit l'application $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$x \longmapsto f(x) = e^x = y$$

L'application f est une application injective car :

Pour deux éléments x et x' dans $\mathbb{R}$ tels que $e^x = e^{x'}$, on peut déduire que $x = x'$

L'application f est une application surjective car :

Pour un élément y de $\mathbb{R}_+^*$ on peut trouver $x = \ln y$, de $\mathbb{R}$ tel que $e^x = y$

Donc l'application f est bijective. On peut chercher alors l'application f^{-1}

f^{-1} est une application définie de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ satisfait la relation suivante :

$f^{-1}(y) = x$

$e^x = y \Longrightarrow \ln(e^x) = \ln y \Longrightarrow x = \ln y$

Donc $f^{-1}:\ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \ln y$$

Propriété : Soit f une application bijective, alors La réciproque f^{-1} de f est une application bijective.

Conséquences :

1) Si f et g sont deux applications bijectives définies sur les ensembles comme suit :
$f:\ E \longrightarrow F$, $g:\ F \longrightarrow G$

Donc on a l'égalité $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

et $(g \circ f)^{-1}$ est bijective.

2) Soit f une application bijective de E vers F alors :

- $f \circ f^{-1} = Id_F$
- $f^{-1} \circ f = Id_E$

3) Si f est une application de E vers F et g est une application de F vers E telles que :

$$\begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$$

alors f et g sont des applications bijectives réciproques l'une de l'autre c'est-à-dire f et g sont bijectives et $f = g^{-1}$ et $g = f^{-1}$

Image directe d'un ensemble par une application :

Définition : Soient E et F deux ensembles, A un sous- ensemble de E et f une application de E vers F.

On appelle image de A par f notée $f(A)$ le sous- ensemble de F défini par :

$f(A) = \{f(x),\ \ x \in A\} = \{y \in F,\ \exists\, x \in A,\ y = f(x)\}$

Image réciproque d'un ensemble par une application : Soient E et F deux ensembles, B un sous- ensemble de F et f une application de E vers F.

On appelle image réciproque de B par f notée $f^{-1}(B)$ le sous- ensemble de E défini par :

$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$

Exemple : Soit l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x + 1 \end{aligned}$$

Calculer $f(\{1,2,3\})$ et $f^{-1}(\{2\})$

$f(\{1,2,3\}) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{2,3,4\}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{2\}) &= \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{2\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R},\ x + 1 = 2\} = \{1\} \end{aligned}$$

On peut démontrer facilement quelques propriétés de l'image directe et l'image réciproque

Proposition : Soit f une application de E vers F,

Soient A et B deux parties de E, A' et B' deux parties de F, alors

- $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $A' \subseteq B' \Longrightarrow f^{-1}(A') \subseteq f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

Remarque : On peut trouver d'autres relations.

Prolongement et restriction d'une application :

Définition : Soient f et g deux applications telles que

$f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$

On dit que g est un prolongement de f et f est une restriction de g si et seulement si

les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $E \subset E'$
- $F \subset F'$
- $\forall\, x \in E : g(x) = f(x)$

Exemple : Soient f et g deux applications définies par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = |x| \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ :\ g(x) = f(x)$ donc g est un prolongement de f et f est une restriction de g.