

Série d'exercices n°2. Suites Numériques.

Généralités

Exercice 1 Questions de cours: Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes:

1. Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. Toute suite bornée est convergente.
4. La somme de deux suites divergentes est une suite divergente.
5. Le produit de deux suites divergentes est une suite divergente.
6. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
7. Si $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge.
8. Si (u_n) et (v_n) majorées alors $(u_n \cdot v_n)$ croissante.
9. Si (u_n) converge vers l , alors $l = \sup \{u_n, n \geq 1\}$.
10. Si (u_n) majorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Nature d'une suite par définition

Exercice 2

I) Soit la suite numérique réelle définie par: $u_n = \frac{3n+1}{5n+2}$.

- 1) En utilisant la définition de la limite montrer que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{5}$.
- 2) À partir de quel rang a-t-on: $|u_n - \frac{3}{5}| < 10^{-4}$?
- 3) Combien de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'appartiennent pas à l'intervalle: $]\frac{3}{5} - 10^{-4}; \frac{3}{5} + 10^{-4}[$.

II) En utilisant la définition de la limite d'une suite montrer que:

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty, \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad 3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{n} \right) = -\infty.$$

Nature d'une suite par différents critères

Exercice 3 Etudier la nature des suites suivantes:

- 1) $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$, 2) $u_n = \frac{E\left(n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2n}$, 3) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,
- 4) $u_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^3}$, 5) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a^k} \ (k > 1)$, 6) $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}; \ a > 0; b > 0$,
- 7) $u_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n}$, 8) $u_n = \sqrt[3]{1+n} - \sqrt[3]{n}$, 9) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,
- 10) $u_n = \frac{n!}{n^n}$, 11) $u_n = \frac{a^n}{n!}$, 12) $u_n = \frac{5 \times 7 \times 9 \dots (2n+5)}{4 \times 7 \times 10 \dots (3n+4)}$,
- 13) $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \ x \in \mathbb{R}$, 14) $u_n = \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 3n - 1}\right)^n$, 15) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^n}$.

Exercice 4 Calculer la limite ℓ de chacune des suites suivantes:

$$1) \quad u_n = \frac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2},$$

$$2) \quad u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 5} - n,$$

$$3) \quad u_n = \frac{n3^n + 1}{n! + 1},$$

$$4) \quad u_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2},$$

$$5) \quad u_n = \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}}.$$

Suites adjacentes

Exercice 5 Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ suivantes sont-elles adjacentes?

$$1) \quad u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}, \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$2) \quad u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 6 Soient p et q deux réels tels que $p > q > 0$. On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par:

$$\begin{cases} u_n = \frac{p}{p+q}u_{n-1} + \frac{q}{p+q}v_{n-1}, & n \geq 1, \\ v_n = \frac{q}{p+q}u_{n-1} + \frac{p}{p+q}v_{n-1}, & n \geq 1. \end{cases}$$

On suppose: $u_0 < v_0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > u_n$.
2. Montrer que (u_n) et $(v_n)_n$ sont adjacentes
3. Montrer que la somme $u_n + v_n$ est indépendante de n .
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
5. **Application:** On prend $p = 3$ et $q = 2$.

Suites extraites (sous suites)

Exercice 7 En utilisant des sous-suites convenables, montrer que les suites de terme général:

$$1) \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$2) \quad v_n = \frac{n + (-1)^n n}{n - (-1)^n \frac{n}{2}}$$

$$3) \quad w_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

sont divergentes.

Exercice 8 Soit u_n une suite numérique. Montrer que:

1. Si les sous suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ sont convergentes, alors $(u_n)_n$ est convergente.
2. Si les sous suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes, alors $(u_n)_n$ est convergente.

Suites de Cauchy

Exercice 9 En utilisant le critère de Cauchy, déterminer la nature des suites $(u_n)_n$ définies par:

$$1) \quad u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln k}, \quad 2) \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k}.$$

Exercice 10 Soit $(u_n)_n$ une suite numérique telle que:

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k |u_n - u_{n-1}| \quad \text{avec } 0 < k < 1.$$

1. Montrer que: $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$, $n \geq 1$.

2. Montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \quad 0 \leq q \leq p$, on a:

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1 - k} |u_1 - u_0|.$$

3. En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$

4. **Application:** Soit $(u_n)_n$ une suite numérique donnée par:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \sin u_n + \frac{5}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Indication: $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

Limites remarquables

1) $\forall x > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1;$

2) $\forall p = 1, 2, \dots : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1;$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \begin{cases} = 0 & \text{si } 0 \leq |q| < 1, \\ = 1 & \text{si } q = 1, \\ \text{n'existe pas si } q = -1, \\ \text{est infinie si } |q| > 1. \end{cases}$

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ avec $2 < e < 3;$

5) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0;$

6) $\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0;$

7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$

8) $\forall a > 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0;$

9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_\ell n^\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \ell; \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{si } k = \ell; \\ \infty & \text{si } k > \ell. \end{cases}$