P1 (2021 - 2022) Logiques mathématiques

D : une proposition est une phrase qui peut être vraie ou fausse, on peut la noter P

phrase vraie → proposition vraie → notée 1

phrase fausse → proposition fausse → notée 0

Valeurs de vérités

D : négation « non » négation de P est le contraire de P notée $\overline{P}$

ex : Il pleut maintenant

Les connecteurs : $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

soient P et φ deux propositions :

* $P \wedge \varphi$ est (P et φ)
* $P \vee \varphi$ est (P ou φ)
* $P \Rightarrow \varphi$ est ($\overline{P}$ ou φ)

l'hypothèse, implication, conclusion

* $P \Leftrightarrow \varphi$ est $[(P \Rightarrow \varphi)$ et $(\varphi \Rightarrow P)]$, P et φ sont équivalentes

(vous allez trouvez quelques propriétés dans Moodle)

Les lois de Morgan : $\overline{P \wedge \varphi} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{\varphi}$

$\overline{P \vee \varphi} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{\varphi}$

Les quantificateurs : E un ensemble et $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont en fonction d'un élément x de E

ex : $(x^2 = 1)$ dépend d'un réel x on ne peut pas dire que $(x^2=1)$ vraie ou fausse tant que n'a pas précisé la valeur de x

P2

D : * $(\forall x \in E, P(x))$ c-à-dire (Pour tous les éléments x de E, $P(x)$ est vraie)

D : * $(\exists x \in E, P(x))$ c-à-dire (Il existe au moins un élément x de E, $P(x)$ est vraie)

$\forall$: s'appelle le quantificateur universel et se lit « quelque soit »

$\exists$: s'appelle le quantificateur existentiel et se lit « il existe au moins »

de manière évidente :

$\overline{\forall x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E, \overline{P(x)}$

$\overline{\exists x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E, \overline{P(x)}$

Phrases quantifiées : une phrase quantifiée est une phrase qui dépend d'un quantificateur ou bien plusieurs quantificateurs.

Pour plus d'un quantificateur dans une proposition, on peut permuter 2 quantificateurs identiques, donc si E et F sont des ensembles et $P(x,y)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont en fonction de x et y alors on peut permuter de la façon suivante :

$\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$

$\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$

mais les quantificateurs différents dans une proposition ne peuvent pas être permuter,

Types de raisonnement : P, Q deux propositions

* raisonnement déductif : c'est un raisonnement direct
* équivalence logique : pour montrer $(P \Leftrightarrow Q)$ il suffit de montrer $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
* raisonnement par la contraposée : pour montrer $(P \Rightarrow Q)$ il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

ex : $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ impair $\Rightarrow n$ impair

* raisonnement par l'absurde : pour démontrer P, on suppose qu'elle est fausse et on cherche une contradiction

ex : montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n+4 \neq 0$

supposons que $\exists n \in \mathbb{N}$, tel que $n+4=0$

donc $\exists n \in \mathbb{N}, n=-4$, contradiction donc

$\forall n \in \mathbb{N}, n+4 \neq 0$

* raisonnement par recurrence (البرهان بالتراجع)

Ensembles

D : un ensemble E est une collection d'objets et on écrit $E = \{\ \}$

D : les objets de E sont appelés éléments

un élément x qui est dans E est dit appartenant à E et on note $x \in E$

si le x n'appartient pas à E, on écrit $x \notin E$

Un ensemble peut-être écrit en extension,

ex : $E = \{2, 3, 4, 5\}$

Un ensemble peut-être écrit en compréhension,

ex : $H = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0\}$

$\{\ \} = \phi$ est l'ensemble qui contient aucun élément

D : card $E = |E|$ = nombre d'éléments de l'ensemble E

opérations : 1) E et F deux ensembles

* F est un sous ensemble de E si et seulement si tout élément de F est un élément de E, on note $F \subseteq E$ ou bien $F \subset E$

$F \subseteq E \Leftrightarrow [x \in F \Rightarrow x \in E]$

* $F = E \Leftrightarrow F \subseteq E$ et $E \subseteq F$

2) A et B deux parties d'un ensemble E

* intersection : $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$
* réunion : $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
* complémentaire : $C_E^A = \{x \in E, x \notin A\}$
* différence de A et B : $A - B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\}$
* différence symétrique de A et B : $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

D : $P(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble E

ex : $E = \{0,1,2\}$ donc :

$P(E) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, E\}$