Université de Boumrdès Faculté des Sciences
Département de Mathématiques Domaine MI
Année: **2021/2022**.
Module: **Analyse 1**

Corrigés des exercices de la série n°2. Suites Numériques.

Exercice 1. **Questions de cours**: Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes tout en justifiant vos réponses.

Remarque. Si la réponse est "vrai", alors dans ce cas, vous devez l'argumenter soit par un théorème ou un résultat connu (sans démonstration de ces derniers), soit par une petite démonstration rapide. Si la réponse est "faux", alors il suffit de donner un contre exemple.

1. *Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.*

Vrai. Exemple: $((-1)^n)_n : -1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$

2. *Toute suite convergente est bornée.*

Vrai. D'après le théorème qui dit que toute suite convergente est bornée

3. *Toute suite bornée est convergente.*

Faux. La suite dans (1), $((-1)^n)_n : -1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$ *est bornée, mais elle n'est pas convergente.*

4. *La somme de deux suites divergentes est une suite divergente.*

Faux. La suite $u_n = n$*,* $n \geq 1$ *est divergente car* $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ *et la suite* $v_n = -n$*,* $n \geq 1$ *est divergente car* $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$*, mais la suite* $(u_n + v_n)_n$ *et convergente. En effet* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(n - n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(0) = 0.$

5. *Le produit de deux suites divergentes est une suite divergente.*

6. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*.*

Vrai. D'après $0 < |u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n < \varepsilon$

7. *Si* $(|u_n|)$ *converge, alors* (u_n) *converge.*

Faux. Soit $(u_n) = ((-1)^n)_n$*. Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ *n'existe pas mais* $\lim\limits_{n\to+\infty}|(-1)^n| = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1.$

8. *Si* (u_n) *et* (v_n) *majorées, alors* $(u_n.v_n)$ *croissante.*

Faux. $u_n = (-1)^n$*,* $v_n = \frac{1}{n}$*,* $n \geq 0$ *sont majorées par* 1*, mais*

$$(u_n.v_n)_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{-1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \ldots$$

dont le terme général est successivement négatif et positif n'est pas croissante.

9. *Si* (u_n) *converge vers* ℓ*, alors* $\ell = sup\{u_n,\ \ n \geq 1\}$.

Faux. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. *Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 + 0 = 1$ *et* $\sup\{u_n,\ \ n \geq 1\} = 2$

10. *Si* (u_n) *majorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Faux. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ *est majorée par* 2 *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 2. **I**) Soit la suite numérique réelle définie par: $u_n = \dfrac{3n+1}{5n+2}$.

1) En utilisant la définition de la limite montrer que: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{5}$.

2) À partir de quel rang a-t-on: $\left| u_n - \dfrac{3}{5} \right| < 10^{-4}$?

3) Combien de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartiennent pas à l'intervalle: $]\frac{3}{5} - 10^{-4}; \frac{3}{5} + 10^{-4}[$.

II) En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que:

$$\mathbf{1)} \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty; \quad \mathbf{2)} \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0; \quad \mathbf{3)} \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty.$$

Corrigé) **I**) $u_n = \dfrac{3n+1}{5n+2}$, $n \geq 1$, $\ell = \dfrac{3}{5}$.

1) Il s'agit de montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_\varepsilon$, $\left| \dfrac{3n+1}{5n+2} - \dfrac{3}{5} \right| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. On a

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3n+1}{5n+2} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{25n+10} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{25n+10} < \varepsilon.$$

Cherchons les n vérifiant cette dernière inégalité. On remarque que l'on ne peut extraire directement n. Dans ce cas, on peut utiliser des relations de la forme

$$\left| \frac{3n+1}{5n+2} - \frac{3}{5} \right| \leq \ldots \leq f(n)$$

telles que l'inégalité $f(n) < \varepsilon$ soit une relation dépendant de n facile à étudier. Ainsi, on peut écrire

$$\frac{1}{25n+10} < \frac{1}{25n} \text{ et } \frac{1}{25n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{25n+10} < \varepsilon.$$

Or $\dfrac{1}{25n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{25\varepsilon}$. Il suffit de choisir donc $n_\varepsilon > \dfrac{1}{25\varepsilon}$ comme par exemple $n_\varepsilon = E\left(\dfrac{1}{25\varepsilon}\right) + 1$. Finalement on a

$$n_\varepsilon \geq E\left(\frac{1}{25\varepsilon}\right) + 1 \Rightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{25\varepsilon} \Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon,\ n > \frac{1}{25\varepsilon} \Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon,\ \frac{1}{25n} \leq \frac{1}{25n_\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon,\ \frac{}{25n}$$

D'où le résultat.

2) Le rang n dépend du choix de ε. Ainsi, pour $\varepsilon = 0,0001 = 10^{-4}$, on a

$$n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{25\varepsilon}\right) + 1 = E\left(\frac{1}{25.10^{-4}}\right) + 1 = E\left(\frac{10^4}{25}\right) + 1 = 400 + 1$$

et donc $\forall n \geq 401$, $\left| \dfrac{3n+1}{5n+2} - \dfrac{3}{5} \right| < 10^{-4}$.

3) Il reste au plus 400 termes, $u_1, u_2, \ldots, u_{400}$ qui peuvent ne pas appartenir à l'intervalle $\left]\frac{3}{5} - 1^{-4},\ \frac{3}{5} + 1^{-4}\right[$.

Explication. On a l'implication

$$\forall n \geq 1 : (n \geq 401 \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{5n+2} - \frac{3}{5}\right| < 10^{-4}).$$

Si $n \leq 400$, alors on ne peut rien dire. Car en logique, si p et q sont deux propositions telles que $p \Rightarrow q$, on ne peut affirmer que $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$; par contre, on a $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

II)

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_A,\ 2^n > A$.

Soit $A > 0$ aussi grand qu'on veut. Comme la fonction log est strictement croissante et $\log 2 > 0$, alors on a

$$2^n > A \Leftrightarrow \log 2^n > \log A \Leftrightarrow n > \frac{\log A}{\log 2}.$$

Il suffit de prendre $n_A = E\left(\frac{\log A}{\log 2}\right) + 1$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$. Il s'agit de montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_\varepsilon,\ \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Il suffit de prendre donc $n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_A,\ \log\left(\frac{1}{n}\right) < -A$.

Soit $A > 0$ aussi grand qu'on veut. Alors $-A < 0$. Comme l'exponetielle est strictement croissante, alors

$$\log\left(\frac{1}{n}\right) < -A \Leftrightarrow \frac{1}{n} < e^{-A} \Leftrightarrow n > e^A.$$

Il suffit de prendre donc $n_A = E(e^A) + 1$.

Corrigé de la série N°2 - Suites Numériques.

Exercice 3

1) $\boxed{u_n = \frac{\sin(n)}{n}}$, il suffit d'utiliser le théorème des trois suites

On a : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. donc $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0}$.

D'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

---

2) $\boxed{u_n = \frac{E\left(n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2n}}$ critère de comparaison. (trois suites).

On a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad x-1 < E(x) \leq x}$. et $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$

On obtient : $n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \leq E\left(n^2 \sin \frac{1}{n}\right) \leq n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

D'où $$\frac{n}{2} \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} < u_n \leq \frac{n}{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

On pose $x_n = \frac{1}{n}$ on a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

et $\frac{n}{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin(x_n)}{x_n}$ ce qui donne $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}}$

en effet : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = \frac{1}{2}$

On obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{n}{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n}\right] = \frac{1}{2}$.

Alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

---

3) $\boxed{u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $1 \leq k \leq n \implies n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$.

$\implies \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$.

suite Exercice 3

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

On a: $\sum_{k=1}^{n} \alpha = n\alpha.$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ ce qui entraine $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1.$

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$ c'est à dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

4) $\boxed{u_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^3}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. on peut utiliser la formule

$\boxed{1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ et on calcule la limite.

On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

ou bien la comparaison avec $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$, en effet:

On a : $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ fois}} \leq 1+2+\dots+n \leq \underbrace{n+n+\dots+n}_{n \text{ fois}}$

ce qui donne : $(n = n\times 1) \leq 1+2+\dots+n \leq (n\times n = n^2)$

D'où $\frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^3} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Remarque : pour $u_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^3}$ on a: ~~$u_{n+1} - u_n \dots (n+1)^3 \dots$~~

en effet: $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+2+\dots+(n+1))n^3 - (1+2+\dots+n)(n+1)^3}{n^3(n+1)^3}$

On obtient : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)n^3 - n(n+1)(n+1)^3}{2n^3(n+1)^3}$

$$= \frac{-n^2 - 3n - 1}{2n^2(n+1)^2} < 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $(u_n)_n$ est décroissante, de plus $0 < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$(u_n)_n$ décroissante et minorée alors elle converge.

(ce critère ne permet pas de déterminer la limite).

o—o—o—o—o—o

5) $\boxed{u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a^k}}$, $a \neq 0$. on discute la nature selon les valeurs de a.

(•) $a = 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n \Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

(••) $a = -1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ on a deux possibilités.

– si n pair alors $u_n = (-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{2p}$

$$= \underbrace{[(-1) + 1] + [-1+1] + \cdots + [-1+1]}_{p \text{ fois}} = p \times 0 = \boxed{0}$$

Donc la sous-suite $(v_n)_n = (u_{2p})_p$ converge vers 0 (car constante)

– si n impair alors $u_n = (-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{2p} + (-1)^{2p+1}$

$$= \underbrace{(-1+1) + (-1+1) + \cdots + (-1+1)}_{p \text{ fois}} + (-1) = \boxed{-1}$$

Donc la sous-suite $(w_n)_n = (u_{2p+1})_p$ converge vers (-1) (car cste)

On a deux sous-suites de la suite $(u_n)_n$ qui convergent vers deux limites différentes, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n$ n'existe pas, c'est à dire que $(u_n)_n$ diverge.

pour $|a| \neq 1$. i.e $|a| > 1$ ~~et~~ $|a| < 1$.

la suite $(u_n)_n$ a pour terme général la somme partielle de la suite géométrique de raison $\frac{1}{a}$.

c'est à dire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{a}\right)^n$

$$= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{1}{a} + \cdots + \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{a}}\right]$$

$$= \boxed{\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{a-1}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a|>1 \\ \infty & \text{si } |a|<1 \end{cases}$ (* voir explication)

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \frac{1}{a-1} & \text{si } |a|>1 \\ \infty & \text{si } |a|<1 \end{cases}$

(*) $|a|>1 \Rightarrow a>1$ ou $a<-1$.

- $a>1 \Rightarrow \frac{1}{a}<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$.
- $a<-1 \Rightarrow b = -a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{b^n} = 0$.

(*) $|a|<1 \Rightarrow 0<a<1$ ou $-1<a<0$

- $0<a<1 \Rightarrow \frac{1}{a}>1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n = +\infty$
- $-1<a<0 \Rightarrow 0<-a<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{b^n} \neq \pm\infty$

avec $b=-a$.

<u>Conclusion</u> : la suite $(u_n)_n$ converge si et ssi $|a|>1$ vers $\frac{1}{a-1}$.

6) $\boxed{u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}}$, $a > 0$, $b > 0$.

(•) si $a < b$, $u_n = \dfrac{\cancel{b^n}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right)}{\cancel{b^n}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right)}$ comme $\frac{a}{b} < 1$

alors $\left(\frac{a}{b}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} = \boxed{-1}$

Donc $(u_n)_n$ converge vers (-1)

(••) si $a > b$, $u_n = \dfrac{a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}$ comme $\frac{b}{a} < 1$

alors $\left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{\left(\frac{b}{a}\right)^n + 1} = \boxed{1}$

D'où $(u_n)_n$ converge vers $(+1)$.

(••) si $a = b$, on aura $u_n = \dfrac{a^n - a^n}{a^n + a^n} = \dfrac{0}{2a^n} = 0$, $\forall n$.

$(u_n)_n$ suite constante donc $(u_n)_n$ converge vers 0.

---

7) Calcul de limite directe $\boxed{u_n = \sqrt{1+n} - \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty - \infty$ F.I

On a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'où $(u_n)_n$ converge vers 0.

---

8) $\boxed{u_n = \sqrt[3]{1+n} - \sqrt[3]{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty - \infty$ F.I.

On a la formule suivante : $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

on pose $a = \sqrt[3]{n+1}$

$b = \sqrt[3]{n}$.

On obtient : $u_n = \dfrac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2}$

ce qui entraîne $u_n = \dfrac{(n+1)-n}{(n+1)^{2/3} + \left(n(n+1)\right)^{1/3} + n^{2/3}} = \dfrac{1}{(n+1)^{2/3} + \left(n(n+1)\right)^{1/3} + n^{2/3}}$

on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^{2/3} + [n(n+1)]^{1/3} + n^{2/3}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^{2/3}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

D'où $(u_n)_n$ converge vers 0.

---

9) $\boxed{u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : pour $n = 2p$, $u_{2p} = (-1)^{2p} + \frac{1}{2p} = +1 + \frac{1}{2p}$.

et $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} = \boxed{+1}$.

Pour $n = 2p+1$, $u_{2p+1} = (-1)^{2p+1} + \frac{1}{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$

et $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p+1} = \boxed{-1}$.

Ainsi $(u_n)_n$ a deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes, c'est à dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas, $(u_n)_n$ diverge.

---

10) $\boxed{u_n = \frac{n!}{n^n}}$ on a : $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

De plus $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}}$

car $(n+1)! = (n+1)(n!)$ ..

D'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \leq 1 \quad \text{car} \quad 0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$$

ce qui signifie que $(u_n)_n$ est décroissante

Donc $(u_n)_n$ décroissante, minorée par 0 alors elle converge.

o═══o═══o═══o═══o═══o═══o═══o

11) $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

On a : $$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } a \leq -1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

(•) Donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{0}{\infty} = 0$ si $-1 < a \leq 1$

(••) si $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ est une limite remarquable

(•••) si $a < -1$, on pose $b = -a$ donc $u_n = \frac{(-b)^n}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{b^n}{n!}$, $b > 1$

$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n!} = 0$ car $(-1)^n$ bornée et $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$

(∷) si $a = -1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0$ car $(-1)^n$ bornée

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$. D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.}$

o═o═o═

12) $\boxed{u_n = \frac{5\times 7\times 9\times \cdots \times(2n+5)}{4\times 7\times 10\times\cdots\times(3n+4)}}$, on a $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

De plus : $u_{n+1} = u_n \times \frac{2n+7}{3n+7}$ et $\frac{2n+7}{3n+7} \leq 1$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. c.à.d $(u_n)_n$ décroissante

Alors $(u_n)_n$ décroissante, minorée par 0, donc elle converge.

13) $\boxed{u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$, $x \in \mathbb{R}$. si $\boxed{x=0}$ $u_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

si $x \neq 0$.

On a : $\ln(u_n) = n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty \times 0$ F.I

mais comme : $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ on pose $y_n = \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On obtient : $\ln(u_n) = \frac{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \times \frac{x}{n} = x \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x \lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$

$= \boxed{x}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{e^x}$

$(u_n)_n$ converge vers $\underline{0}$ si $x=0$ et vers $\underline{e^x}$ si $x \neq 0$.

---

14) $\boxed{u_n = \left(\frac{n^2-n+3}{n^2+3n-1}\right)^n}$ $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\infty$ F.I

On procède de la même manière que dans (13)

On a : $\frac{n^2-n+3}{n^2+3n-1} = \frac{(n^2+3n-1)-4n+4}{n^2+3n-1} = 1 - \frac{4n-4}{n^2+3n-1}$

et $\ln u_n = n \ln\left(1 - \frac{4n-4}{n^2+3n-1}\right)$ on pose $\boxed{y = -\frac{4n-4}{n^2+3n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

$\ln(u_n) = +n\left(-\frac{4n-4}{n^2+3n-1}\right) \cdot \frac{\ln(1+y)}{y}$.

On obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(4-4n)n}{n^2+3n-1} \times \lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$.

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4n^2}{n^2} = \boxed{-4}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \boxed{e^{-4}} = \boxed{\frac{1}{e^4}}$

$(u_n)_n$ converge vers $\frac{1}{e^4}$.

15) $\boxed{u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n}} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n+1} & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{n-1}{2n-1} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1/2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

les deux sous-suites forment toute la suite et elles ont même limites.. donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$.

en effet : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$; $p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$

et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$; $p \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$

Ce qui entraîne que : $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \ N_0 = \max(N_1, N_2) \\ \text{tel que } \forall n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon. \\ (n = 2p \text{ ou } n = 2p+1). \end{cases}$

Exercice 4 :

1) $\boxed{u_n = \dfrac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$(n+5)^3 = n^3 + 3.5.n^2 + 3.5^2.n + 5^3 = n^3 + 15n^2 + 75n + 125$

$(n+7)^2 = n^2 + 2.7.n + 7^2 = n^2 + 14n + 49.$

$$u_n = \frac{n^3 + 15n^2 + 75n + 125 - (n^3 + 14n^2 + 49n)}{n^2} = \frac{n^2 + 36n + 125}{n^2}$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = \boxed{1}$

---

2) $u_n = (\sqrt{n^2 + 2n + 5} - n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty - \infty$ F.I

$$u_n = \frac{n^2 + 2n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 5} + n} = \frac{2n+5}{\sqrt{n^2 + 2n + 5} + n}.$$

5) $$u_n = \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}} = \frac{6^n \left[(-1)^n - \frac{5^{n+1}}{6^n}\right]}{6^n\left[\frac{5^n}{6^n} - (-1)^{n+1}\frac{6^{n+1}}{6^n}\right]}$$

$$= \frac{(-1)^n - 5\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{5}{6}\right)^n + 6(-1)^n}.$$

D'où $$u_n = \begin{cases} \dfrac{1-5\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{5}{6}\right)^n + 6} & \text{si } n \text{ pair} \\[2ex] \dfrac{-1-5\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 6} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc $$\lim_{n\to+\infty} u_{n} = \begin{cases} 1/6 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{-1}{-6} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers $\boxed{\frac{1}{6}}$

et on a : $(u_{2n})_n \cup (u_{2n+1})_n = (u_n)_n$.

On conclut que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{6}}$ (même démonstration que dans (15) de l'Exo 3)

<u>Suites adjacentes</u> : <u>Exercice 5</u>

(1) vue en cours

(2) $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

Donc $$v_{n+1} - v_n = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0.$$

Exercice 6

$p>q>0$, $u_0 < v_0$, pour $n \geq 1$ on a :

$$v_n = \frac{q}{p+q} u_{n-1} + \frac{p}{p+q} v_{n-1} \ , \ u_n = \frac{p}{p+q} u_{n-1} + \frac{q}{p+q} v_{n-1}$$

1) On a : $v_0 > u_0$, En utilisant un raisonnement par récurrence

Montrons que $v_n > u_n$.

(•) On $v_0 > u_0$ vraie par hypothèse.

(••) supposons $v_n > u_n$ vraie, donc $v_n - u_n > 0$

(•••) Montrons que $v_{n+1} > u_{n+1}$ si $v_n > u_n$.

On a : $v_{n+1} = \frac{q}{p+q} u_n + \frac{p}{p+q} v_n$. et $u_{n+1} = \frac{p}{p+q} u_n + \frac{q}{p+q} v_n$

On obtient :
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{q-p}{p+q} u_n + \frac{p-q}{p+q} v_n$$
$$= \frac{p-q}{p+q}(v_n - u_n) > 0 \ \left(\text{car } p>q>0 \text{ et } v_n > u_n, \ p-q>0, p+q>0.\right)$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n > u_n$. vraie.

2) (•) $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{q}{p+q} u_n + \frac{p}{p+q} v_n\right) - v_n$
$$= \frac{q}{p+q} u_n + \frac{p-(p+q)}{p+q} v_n = \frac{q}{p+q}(u_n - v_n) < 0.$$

Donc $(v_n)_n$ est decroissante.

(••) $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{p}{p+q} u_n + \frac{q}{p+q} v_n\right) - u_n$
$$= \frac{p-(p+q)}{p+q} u_n + \frac{q}{p+q} v_n = \frac{q}{p+q}(v_n - u_n) > 0$$

Donc $(u_n)_n$ est croissante.

4) Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n = 2\ell.$$

or $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = u_0+v_0$ car $u_n+v_n = u_0+v_0$, $\forall n$.

D'où $\boxed{\ell = \dfrac{u_0+v_0}{2}}$.

5) Application : $p=3$ et $q=2$.

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{3}{5}u_{n-1} + \dfrac{2}{5}v_{n-1} \\ v_n = \dfrac{2}{5}u_{n-1} + \dfrac{3}{5}v_{n-1} \end{cases}$$

o=o=o=o=o=o=o=o=o=o

Exercice 7 :

1) $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ on remarque pour : $n=0$; $u_0 = \cos 0 = 1$

et pour $n=4$, $u_4 = \cos\pi = -1$.

Donc si on considère la sous-suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ ou $\varphi(n) = 4n$ on obtient : pour $n\in\mathbb{N}$

$v_n = u_{4n} = \cos\left(\dfrac{4n\pi}{4}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. et $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe pas

Comme $(v_n)_n$ est divergente alors $(u_n)_n$ diverge..

puisqu'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ qui est divergente.

2) $v_n = \dfrac{n+(-1)^n n}{n-(-1)^n \frac{n}{2}}$, on calcule la limite selon la parité de n.

(•) Si n pair

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+n}{n-\frac{n}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{\frac{n}{2}} = \boxed{4}$

(••) Si n impair

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-n}{n+\frac{n}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0}{\frac{3n}{2}} = \boxed{0}$

Ce qui veut dire que (v_n) a deux sous-suites $(v_{2n})_n$ et $(v_{2n+1})_n$ qui ont deux limites différentes, donc elles ne convergent pas vers la même limite. Cela entraîne que $(v_n)_n$ diverge. car elle n'a pas de limite.

3) $w_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ même raisonnement que pour (1)

On considère la sous-suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = w_{3n}$.

o=o=o=o=o=o=o

Exercice 8 :

1) $(u_{2n})_n$ converge, notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$ ..... ①

$(u_{2n+1})_n$ ——, —— $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ ..... ②

et $(u_{3n})_n$ ——, —— $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$ ..... ③

On a : ① $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq N_1$ on a $|u_{2n} - \ell_1| < \varepsilon$

② $\Leftrightarrow$ ——, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq N_2$ —— $|u_{2n+1} - \ell_2| < \varepsilon$

③ $\Leftrightarrow$ ——, $\exists N_3 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq N_3$ —— $|u_{3n} - \ell_3| < \varepsilon$

On remarque que $(u_{3n})_n = (u_0, u_3, u_6, u_9, \dots \dots)$

les termes de cette suite ont des indices pairs et impairs.

autrement dit : si $n = 2k \Rightarrow 3n = 6k = 2(3k) = 2k'$

si $n = 2k+1 \Rightarrow 3n = 6k+3 = 2(3k+1)+1 = 2k''+1$.

Notons $w_n = u_{6n}$ et $v_n = u_{6n+3}$ on a que

$(w_n)_n$ est une sous-suite de $(u_{3n})_n$ et aussi de $(u_{2n})_n$

$(v_n)_n$ ------ ——— . ---------- ..de $(u_{2n+1})_n$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = \ell_3$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell_3$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell_1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell_1$.
$\Big\} \Rightarrow \ell_3 = \ell_1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell_2$ alors $\lim v_n = \ell_2$. de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_3$

Donc $\ell_2 = \ell_3$

Par transitivité on a : $\ell_3 = \ell_1 = \ell_2 = \boxed{\ell}$

Cela implique que les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite $\underline{\underline{\ell}}$.

Par conséquent : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 = \max(N_1, N_2)$ tel que

$\forall n \geq N_0$ on a : $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

car si n est pair, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ d'après (1). (pour $n \geq N_0 \geq N_1$)
si n est impair $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ——— (2) (pour $n \geq N_0 \geq N_2$)

2) si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes, elles convergent et ont même limite. On montre de la même manière que pour la question (1).