Les Relations 2021 - 2022 P5

Soient E et F deux ensembles

* l'ensemble des éléments de la forme (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$ sont dit couple
* le produit cartésien de E et F noté $E \times F$

$E \times F = \{(x,y),\ x \in E,\ y \in F\}$ notation du couple

* Toute $S \subseteq E \times F$ définie une relation de E vers F notée R
* les éléments $(x,y) \in S$ sont dit liés par R, on note $x R y$
* $x R y$ signifie que x est en relation avec y

Remarque : une relation entre deux éléments est dite relation binaire.

maintenant : si R est une relation de E vers F alors :

si $E = F$, R est dite relation dans E ou bien R relation sur E

Soit R une relation sur un ensemble E

(i) R réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E, x R x$

(ii) R symétrique $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall y \in E, [x R y \Rightarrow y R x]$

(iii) R antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall y \in E, [x R y \text{ et } y R x \Rightarrow x = y]$

(iv) R transitive $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, [x R y \text{ et } y R z \Rightarrow x R z]$

D : relation R est une d'équivalence sur E si et seulement si (i), (ii) et (iv) sont vérifiées

D : classe d'équivalence : Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E, soit $x \in E$

$\overline{x} = \{y \in E,\ x R y\}$ est la classe d'équivalence de x suivant R dans E

Ex : on définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire R par :

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

Montrer que R est une relation d'équivalence et déterminer $\overline{4}$

R est réfléxive ?

soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - x^2 = x - x$ donc $x R x$

R est symétrique ?

P6

soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$

$x R y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$

$\Rightarrow y R x$,

R est transitive ?

soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$, soit $z \in \mathbb{R}$

$x R y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$y R z \Rightarrow y^2 - z^2 = y - z$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ y^2 - z^2 = y - z \end{cases} \Rightarrow$

$x^2 - z^2 = x - z$

$\Rightarrow x R z$

conclusion : R est une relation d'équivalence

2021 - 2022

P7

$\overline{4} = \{x \in \mathbb{R}, 4 R x\} = \{x \in \mathbb{R}, 4^2 - x^2 = 4 - x\}$

$4^2 - x^2 = 4 - x \Rightarrow 4^2 - x^2 - (4 - x) = 0$

$\Rightarrow (4-x)(4+x) - (4-x) = 0$

$\Rightarrow (4-x)[(4+x) - 1] = 0$

$\Rightarrow x = 4$ oubien $x = -3$

$\overline{4} = \{4, -3\}$

D : Soit R une relation sur un ensemble E

R est une relation d'ordre sur E si et seulement si (i), (iii) et (iV) sont vérifiées.

D : Soit R une relation d'ordre sur un ensemble E

R est dite ordre total sur E si et seulement si

$\forall x \in E, \forall y \in E, x R y$ ou $y R x$

D : R est une relation d'ordre sur un ensemble E

R est dite ordre partiel sur E si et seulement si R n'est pas un ordre total sur E.

Ex : on définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire R par :

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x R y \Leftrightarrow x \leq y$

Montrer que R est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

la relation R est un ordre total ou partiel ? Justifier la réponse.

R est réflexive ?

soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq x$ donc $x R x$

R est antisymétrique ?

soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$

$x R y \Rightarrow x \leq y$

$y R x \Rightarrow y \leq x$

$x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

P8

R est transitive ?

soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$, soit $z \in \mathbb{R}$

$x R y \Rightarrow x \leq y$

$y R z \Rightarrow y \leq z$

$x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$\Rightarrow x R z$

conclusion : R est une relation d'ordre

R est un ordre total sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x R y$ ou $y R x$

R est un ordre total sur $\mathbb{R}$ car $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$

ex : on définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation binaire R par

$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, x R y \Leftrightarrow y$ divise x

R est une relation d'ordre (exercice à faire).

la relation R est un ordre partiel car :

$\exists x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{N}^*$, y ne divise pas x et x ne divise pas y

Il suffit de prendre $x = 2, y = 3$