Université de Boumerdès Faculté des Sciences
Département de Mathématiques DomaineMI
Module: **Analyse 1 Année**: **2021/2022**.

Corrigés détaillés des exercices de la série 1 du chapitre 1 "**Nombres réels**"

Exercice 1. Est-ce que le nombre donné est rationnel ou irrationnel?

i) $\frac{17}{7}$; ii) $2,131313\ldots$; iii) $\sqrt[3]{8}$; iv) $0,125$; v) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right))\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; vi) $\sqrt{2}$; vii) $\sqrt{10}$

Corrigé.

i) $\frac{17}{7} \in \mathbb{Q}$ par définition de $\mathbb{Q}$;

ii) $2,131313\ldots = 2,\overline{13} \in \mathbb{Q}$, car c'est un développement décimal illimité périodique de période 13;

iii) $\sqrt[3]{8} = 2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$;

iv) $0,125 = \mathbb{Q}$ car c'est un développement décimal limité ou bien $0,125 = \frac{125}{1000}$;

v) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right))\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = 2-3 = -1 \in \mathbb{Q}$;

vi) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ voir exemple du cours.

vii) Supposons que $\sqrt{10} \in \mathbb{Q}$. Il existe $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ avec PGCD$(a,b) = 1$. Alors, en élevant au carré,

$$10 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2 \times 5 \times b^2 = a^2.$$

Donc a^2 est pair et par suite a est pair avec $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$2 \times 5 \times b^2 = 4n^2 \Rightarrow 5 \times b^2 = 2n^2$$

Donc $5b^2$ est pair et comme 5 est impair, alors nécessairement b^2 est pair et par suite b est pair. Finalement a et b sont tous deux pairs, ce qui contredit PGCD$(a,b) = 1$.

En conclusion, $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2

1) Comparez: **a**) $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$, puis **b**) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ et $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Corrigé. **a**) On a

$$\left(6\sqrt{5}\right)^2 = 36 \times 5 = 180 \text{ et } \left(8\sqrt{3}\right)^2 = 64 \times 3 = 192$$

et comme $180 < 192$, alors $6\sqrt{5} < 8\sqrt{3}$ car tout est positif.

b) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{2\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{6-5} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{5}$,

$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$,

$$\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{6-2} = \sqrt{6}-\sqrt{2},$$

et donc $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{5}+\sqrt{6} < 2\sqrt{6}+2\sqrt{5}.$

d'où

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}.$$

2. **i**) Soient deux nombres réels a et b, vérifiant $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$. Donner un encadrement de $a-b$ et de $\dfrac{a}{b}$.

Corrigé. On a $-3 < b < -1 \Rightarrow 1 < -b < 3 \Rightarrow -b > 0$

$1^o/\quad -1 < a < 4,\quad 1 < -b < 3 \Rightarrow -1+1 < a-b < 4+3 \Rightarrow 0 < a-b < 7.$

$2^o/\quad \left(\left(-1 < a < 4,\ \frac{1}{3} < -\frac{1}{b} < 1\right) \text{ et } -\frac{1}{b} > 0\right) \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{a}{b} < 4 \Rightarrow -4 < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}.$

ii) Encadrez les quantités $a+b,\ a-b,\ ab,\ \dfrac{a}{b}$ et $|a|+|b|$ pour a et b, vérifiant $|a-1| \le 2$ et $-5 \le b \le -4$.

On a $|a-1| \le 2 \Leftrightarrow -1 \le a \le 3.$ Alors

pour $a+b$:

$$\left(-1 \le a \le 3,\quad -5 \le b \le -4\right) \Rightarrow -6 \le a+b \le -1$$

pour $a-b$:

$$\left(-1 \le a \le 3,\ 4 \le -b \le 5\right) \Rightarrow 3 \le a-b \le 8$$

pour ab :

$$\left(-1 \le a \le 3,\ 4 \le -b \le 5\right) \Rightarrow 4 \le -ab \le 15 \Rightarrow -15 \le ab \le -4$$

pour $\dfrac{a}{b}$:

$$\left(\left(-1 \le a \le 3,\ \frac{1}{5} \le -\frac{1}{b} \le \frac{1}{4}\right) \text{ et } -\frac{1}{b} > 0\right) \Rightarrow -\frac{1}{5} \le -\frac{a}{b} \le \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} \le -\frac{a}{b} \le -\frac{1}{5}$$

pour $|a|+|b|$:

$$\left(0 \le |a| \le 3,\quad 4 \le |b| \le 5\right) \Rightarrow 4 \le |a|+|b| \le 8$$

3. Les ensembles suivants sont-ils des intervalles, si oui de quels types?

$$A = [0,1[\cup[1,3[,\qquad B = [0,2] \cup [6,11] \cup [1,8]$$

$$C =]0,2[\cup]3,5[,\qquad D = [0,7] - [3,8].$$

a) $A = [0,1[\cup[1,3[= [0,3[$ est un intervalle semi-fermé à gauche et semi-ouvert à droite.

b) $B = [0,2] \cup [6,11] \cup [1,8] = [0,11]$ est un intervalle fermé et borné.

c) $C =]0,2[\cup]3,5[$ n'est pas un intervalle; c'est une réunion d'intervalles disjoints

d) $D = [0,7] - [3,8] = [0,3[$ est un intervalle semi-fermé à gauche et semi-ouvert à droite.

Exercice 3.

[**I**] **1**) Simplifier

i) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; **ii**) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$; **iii**) $a = \sqrt{x^2-8x+16} + \sqrt{x^2-12x+36}$.

Corrigé.

i) Ecrivons le nombre sous le radical $7-4\sqrt{3}$ comme un carré. Pour cela, on a $7-4\sqrt{3} = 4-4\sqrt{3}+3 = (2-\sqrt{3})^2$, d'où

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ car $2-\sqrt{3} > 0$.

ii) De même que dans i),

$9+4\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2}+1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = 2+\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)} =$

$= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1.$

iii) On a $a = \sqrt{x^2-8x+16} + \sqrt{x^2-12x+36} = \sqrt{(x-4)^2} + \sqrt{(x-6)^2} = |x-4|+|x-6|$.

Pour: a) $x < 4 \Rightarrow x < 6$ et $a = 4-x+6-x = 10-2x$;

b) $4 \le x < 6$: $a = x-4+6-x = 2$;

c) $x > 6$: $a = x-4+x-6 = 2x-10$.

D'où

$$\sqrt{x^2-8x+16} + \sqrt{x^2-12x+36} = \begin{cases} 10-2x & \text{si } x < 4, \\ 2 & \text{si } 4 \le x < 6, \\ 2x-10 & \text{si } x > 6. \end{cases}$$

2) Eliminer les radicaux dans le dénominteur dans:

i) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$; **ii**) $\dfrac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Corrigé

i) Application de l'idendité $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Pour $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{2}$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4}} = \frac{x\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}\right)}{x-2}.$$

ii) De même, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur:

$$\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{12}{(3+\sqrt{2})-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(3+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}} = \frac{12\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{12\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{9+6\sqrt{2}+2-3} = \frac{12\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2(4+3\sqrt{2})} = \frac{12\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2(4+3\sqrt{2})} \times \frac{4-3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{12\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)(4-3\sqrt{2})}{2(16-18))} = -3\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)(4-3\sqrt{2}).$$

En réponse à la question, on peut s'arrêter là. Mais en développant, on trouve que

$$\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 9\sqrt{2}\sqrt{3}+15\sqrt{2}-12\sqrt{3}-18.$$

Exercice 4 Démontrer dans $\mathbb{R}$, les relations suivantes:

1) $|x+y| \le |x|+|y|$; (en général $\left|\sum_{k=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_i|$)

2) $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$;

3) $|ux - vy| \leq \sqrt{(u^2+v^2)(x^2+y^2)}$.

Corrigé

1) On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$((-|x| \leq x \leq |x|) \wedge (-|y| \leq y \leq |y|)) \Rightarrow -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \Leftrightarrow |x+y| \leq |x|+|y|.$

2) On a, comme $|x+y| \leq |x|+|y|$

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = \frac{1}{\frac{1}{|x+y|}+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{|x|+|y|}+1} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} =$$

$$= \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

3) $|ux - vy| \leq \sqrt{(u^2+v^2)(x^2+y^2)}$ (voir corrigé de l'enseignate Tahar).

Exercice 5 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ positifs. Montrer que

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Corrigé. On a pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

Pour $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, alors

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\,\sqrt{y} < \frac{(\sqrt{x})^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

On a l'égalité si $x = y$.

La suite des corrigés se trouvent dans le fichier de l'enseignante Tahar

Corrigé de la série N°1 - Nombres réels

Exercice 6 : Résoudre $2^{2x-1} + 2^{x+3} - 10 = 0$.

On a : $2^{2x-1} = 2^{2x} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}(2^x)^2$

$2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$

On pose : $X = 2^x$, l'équation devient $\boxed{\frac{1}{2}X^2 + 8X - 10 = 0}$

$\Delta = 8^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(-10) = 64 + 20 = 84 = 2^2 \times 3 \times 7$

Les solutions sont $X_1 = \dfrac{-8 - 2\sqrt{21}}{2(1/2)} = -8 - 2\sqrt{21}$

$X_2 = \dfrac{-8 + 2\sqrt{21}}{2(1/2)} = -8 + 2\sqrt{21}$

$X_1 < 0$ ne convient pas car $2^x = e^{x \ln 2} > 0$.

$X_2 > 0$ car $4 < \sqrt{21} < 5$.

Ce qui donne : $2^x = -8 + 2\sqrt{21} \Rightarrow x \ln 2 = \ln(-8 + 2\sqrt{21})$

D'où $x = \dfrac{\ln(-8 + 2\sqrt{21})}{\ln 2} = \boxed{1 + \dfrac{\ln(-4 + \sqrt{21})}{\ln 2}}$.

o=o=o=o=o=o=o=o=o

Exercice 7 :

1) $A = [0, 2[$; on a : $\forall x \in A$, $0 \leq x < 2$. donc 0 est un minorant et 2 est un majorant de A

Comme $0 \in A$ et 0 est un minorant de A, alors $0 = \min A = \inf A$

(il est clair que lorsque le plus petit élément existe alors c'est la borne inférieure, on le note ~~de~~ min A).

si on considère B comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{M}_B = [1, +\infty[\quad \text{et} \quad m_B =]-\infty, \tfrac{1}{2}].$$

o=o=o=o=o=o.

4)

$C =]\frac{1}{2}, 1[\cap \mathbb{Q}$, on a $\forall x \in C$, $\frac{1}{2} < x < 1$.

même chose que ~~partie~~ (2) sauf que $\frac{1}{2} \notin C$ et $1 \notin C$.

a t-on $\frac{1}{2} = \inf C$ et $1 = \sup C$?

~~on a~~ la caractérisation de la borne inférieure et supérieure qui permettent d'y répondre..

(•) soit $\varepsilon > 0$, montrons que $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon[\cap C \neq \phi$.

(ce qui revient à montrer qu'il existe $x_0 \in C$ tel que $\frac{1}{2} \leq x_0 < \frac{1}{2} + \varepsilon$)

1er cas : si $\boxed{\frac{1}{2} + \varepsilon < 1}$ c'est à dire $\boxed{\varepsilon < \frac{1}{2}}$

on a $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon[\subset [\frac{1}{2}, 1[$ ~~donc~~.

Donc $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon[\cap C =]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \phi$

2e cas : si $\boxed{\frac{1}{2} + \varepsilon \geq 1}$ i.e $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$

on a $[\frac{1}{2}, 1] \subset [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$ ce qui donne

$$[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \varepsilon[\cap C =]\tfrac{1}{2}, 1[\cap \mathbb{Q} \neq \phi$$

On conclut que : $\forall \varepsilon > 0$, $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon[\cap C \neq \phi$

Donc $\frac{1}{2} = \inf C$ et comme $\frac{1}{2} \notin C$ alors $\min C$ n'existe pas.

On fait le même procédé pour montrer que $1 = \sup C$.

(l'étudiant peut s'entrainer à la rédaction de la démonstrat°)

On aura $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} = [1, +\infty[\cap \mathbb{Q}$ et $m_{\mathcal{C}} =]-\infty, 1/2] \cap \mathbb{Q}$.

si on considère que $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$.

et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} = [1, +\infty[$ et $m_{\mathcal{C}} =]-\infty, \frac{1}{2}]$ plus généralement

c'est à dire $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$. f.

o=o=o=o=o=o.

5) $D = \mathbb{N}$. On a $\forall x \in D$, $x \geqslant 0$ et $0 \in D$

Donc $\boxed{0 = \min D = \operatorname{Inf} D.}$

(•) Dans $\mathbb{N}$ lui même 0 est le seul minorant de D

c'est à dire que $m_D = \{0\}$.

(••) Dans $\mathbb{R}$, $m_D =]-\infty, 0]$.

<u>D n'est pas majoré.</u>

En effet, si on suppose D majoré dans $\mathbb{R}$, alors $\exists M \in \mathbb{R}$

tel que $\forall x \in D$, $x \leq M$. or $E(M) \leqslant M < E(M)+1$

et $(E(M)+1) \in \mathbb{N}$ donc $\exists x_0 \in D$, $x_0 = E(M)+1$ tel

que $M < x_0$, absurde car M est un majorant de D.

o=o=o=o=o=o

8) $E = \{x \in \mathbb{Q} ; \ x^2 < 2\}$

$x^2 < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Donc $\forall x \in E$, $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. c'est à dire $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} = E$

$(-\sqrt{2})$ est un minorant de E et $(\sqrt{2})$ est un majorant de E

(On observera les deux cas pour E, selon que $E \subset \mathbb{Q}$ exclusivement ou $E \subset \mathbb{R}$.

$E \subset \mathbb{R}$ plus généralement).

Montrons que $\left\{ -\sqrt{2} = \operatorname{Inf} E \right\}$ en utilisant la caractérisation.

même méthode que précédemment.

pour $\varepsilon > 0$, montrons que $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}+\varepsilon[\cap E \neq \emptyset$

1er cas : $-\sqrt{2}+\varepsilon < \sqrt{2} \Rightarrow \varepsilon < 2\sqrt{2}$, ~~alors~~

alors $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}+\varepsilon[\cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} =]-\sqrt{2}, -\sqrt{2}+\varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

2e cas : $-\sqrt{2}+\varepsilon \geq \sqrt{2} \Rightarrow \varepsilon \geq 2\sqrt{2}$

alors $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}+\varepsilon[\cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} = E \neq \emptyset$

(on rappelle qu'entre deux réels, il existe une infinité de rationnels. (éléments de $\mathbb{Q}$)).

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}+\varepsilon[\cap E \neq \emptyset \Rightarrow \boxed{\operatorname{Inf} E = -\sqrt{2}}$

On montre par la même méthode (laissé à l'étudiant) que $\boxed{\sqrt{2} = \operatorname{Sup} E}$.

$-\sqrt{2} \notin E$ et $\sqrt{2} \notin E$ donc $\min E$ et $\max E$ n'existent pas

On a alors : $\mathcal{M}_E = [\sqrt{2}, +\infty[$ et $m_E =]-\infty, -\sqrt{2}]$

si on considère $E \subset \mathbb{R}$. ~~plus~~

<u>attention</u> : si on considère exclusivement $E \subset \mathbb{Q}$, dans ce cas en respectant la définition de majorant et minorant, le problème qu'on rencontre est $(-\sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et comme les bornes sup et Inf sont uniques lorsqu'elles existent, cela peut mener à la conclusion que dans $\mathbb{Q}$ les bornes sup et Inf n'existent pas, même si les majorants et minorants existent.

si $a \in \mathbb{Q}$ et $a = \operatorname{Inf} E$ alors $]-\sqrt{2}, a[$ contient une infinité d'éléments de $\mathbb{Q}$.

3) $A \neq \emptyset$, A borné dans $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sup} A \text{ et } \text{Inf} A \text{ existent et} \\ \text{sont uniques.} \end{array}\right.$

$B = \{ |x-y| ;\ (x,y) \in A^2 \}$.

i) B est majoré : en effet : On a $\forall x \in A$, $\text{Inf}A \leq x \leq \text{Sup}A$

Donc : $\left.\begin{array}{l} \text{Inf}A \leq x \leq \text{Sup}A \\ \text{Inf}A \leq y \leq \text{Sup}A \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Inf}A - \text{Sup}A \leq x - y \leq \text{Sup}A - \text{Inf}A$

D'où : $-(\text{Sup}A - \text{Inf}A) \leq x - y \leq (\text{Sup}A - \text{Inf}A) \Rightarrow |x-y| \leq \text{Sup}A - \text{Inf}A$

Donc $\forall b \in B$, $b = |x-y|$ avec $x \in A, y \in A$, $b \leq \text{Sup}A - \text{Inf}A$.

Alors $\text{Sup}A - \text{Inf}A$ est un majorant de B

c'est à dire B est majoré.

ii) On a : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$; $\text{Sup}A - \varepsilon/2 < x_0 \leq \text{Sup}A$ .... ①
$\exists y_0 \in A$, $\text{Inf}A \leq y_0 < \text{Inf}A + \varepsilon/2$ .... ②

Donc : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$, $\exists y_0 \in A$, $y_0 < x_0$ et vérifiant ① et ②

c'est à dire que : $\text{Sup}A - \text{Inf}A - \frac{2\varepsilon}{2} < x_0 - y_0 < \text{Sup}A - \text{Inf}A$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b \in B$, $b = |x_0 - y_0| = x_0 - y_0$ tel que

$$\delta(A) - \varepsilon < b < \delta(A).$$

Donc $\boxed{\delta(A) = \text{Sup}\, B = \text{Sup}A - \text{Inf}A}$

Exercice 9 :

1) $x, y \in \mathbb{R}$ donc on a soit $x \leq y$ ou $x \geq y$.

supposons $x < y \Rightarrow -x > -y$

Donc $x<y \Rightarrow \min(x,y)=x$

et $-x>-y \Rightarrow \max(-x,-y)=-x$.

D'où $\boxed{\max(-x,-y) = -\min(x,y)}$

3) $x<y$: Comme $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$

On a : $-|x| \leq x < y \leq |y|$

Or $|y| \leq \max(|x|,|y|)$ et $-|x| \geq \min(-|x|,-|y|)$

D'après (2) $\min(-|x|,-|y|) = -\max(|x|,|y|)$.

D'où le résultat.

4) et 5) il suffit de remarquer que : $|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ y-x & \text{si } x<y. \end{cases}$

donc $|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } \max(x,y)=x \text{ ou } \min(x,y)=y \\ y-x & \text{si } \max(x,y)=y \text{ ou } \min(x,y)=x. \end{cases}$

o=o=o=o=o=o=o=o=o

Exercice 10

(1) et (2) E_1 et E_2 vus en cours.

3) $E_3 = \left\{ \dfrac{-1+2n}{3+n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

On a : $\dfrac{-1+2n}{3+n} = \dfrac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \dfrac{7}{n+3}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{7}{n+3} > 0 \Rightarrow 2 - \dfrac{7}{n+3} < 2$.

et $n+3 \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n+3} \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{-7}{n+3} \geq -\dfrac{7}{4} \Rightarrow 2 - \dfrac{7}{n+3} \geq \dfrac{1}{4}$

D'où $\forall x \in E_3$, $\boxed{\dfrac{1}{4} \leq x < 2}$

(i) $\frac{1}{4} \in E_3$ car $\frac{1}{4} = \frac{-1+2}{3+1}$ donc $\frac{1}{4} = \min E_3 = \inf E_3$.

(ii) $\{2 = \sup E_3\}$, on peut utiliser le fait que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1+2n}{n+3}\right) = \boxed{2}$.

ou bien la caractérisation de la borne supérieure.

soit $\varepsilon > 0$, cherchons $x_0 \in E_3$ tel que $2-\varepsilon < x_0 < 2$

ce qui revient à cherche $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\frac{-1+2n}{3+n} > 2-\varepsilon$

$$\frac{-1+2n}{3+n} > 2-\varepsilon \Rightarrow -1+2n > (2-\varepsilon)(3+n).$$

$$\Rightarrow 3\varepsilon - 7 > -n\varepsilon.$$

$$\Rightarrow n > \frac{7-3\varepsilon}{\varepsilon}$$

On choisit $n_0 = E\left(\frac{7-3\varepsilon}{\varepsilon}\right)+1$ par exemple et on aura.

$\forall \varepsilon>0, \exists x_0 \in E_3, \quad x_0 = \frac{-1+2n_0}{3+n_0}; \quad 2-\varepsilon < x_0 \leq 2.$

$2 \notin E_3 \Rightarrow \max E_3$ n'existe pas.

4) $E_4 = [a,b] \cup \{c\}$ avec $c > b > a$.

$\forall x \in E_4 \ , \quad a \leq x \leq c \ , \quad a \in E_4$ et $c \in E_4$

Donc $\boxed{\min E_4 = \inf E_4 = a}$ et $\boxed{\max E_4 = \sup E_4 = c}$.

5) $E_5 = \left\{-\frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2\right\}$.

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}.$$

$-1 \in E_5$ ~~car~~ $-1 = -\frac{1}{1}$, $x=1$ et $-\frac{1}{2} \in E_5$ car ~~$\frac{1}{2x}$~~ $x=2$.

Donc $\boxed{\max E_5 = \sup E_5 = -\frac{1}{2}}$ et $\boxed{\min E_5 = \inf E_5 = -1}$

6) $E_6 = \left\{(-1)^n + \frac{3}{5n}\right\}$.

$E_6 = \left\{(-1)^n + \frac{3}{5n} \,,\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(•) si n pair : $x = 1 + \frac{3}{5n}$, $n \geq 2$.

$n \geq 2 \Rightarrow 5n \geq 10 \Rightarrow 1 + \frac{3}{5n} \leq 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$.

et donc $1 < x \leq \frac{13}{10}$

(••) Si n impair : $x = -1 + \frac{3}{5n}$, $n \geq 1$

$n \geq 1 \Rightarrow 5n \geq 5 \Rightarrow -1 + \frac{3}{5n} \leq -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$

et donc $-1 < x \leq -\frac{2}{5}$

D'où $\forall x \in E_6$, $-1 < x \leq \frac{13}{10}$.

$\frac{13}{10} \in E_6$ car $\frac{13}{10} = (-1)^2 + \frac{3}{5 \times 2} \Rightarrow \boxed{\frac{13}{10} = \max E_6 = \sup E_6}$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-1 + \frac{3}{5n}\right) = -1$ donc $-1 = \inf E_6$.

$(-1) \notin E_6$ donc $\min E_6$ n'existe pas.

(pour que l'étudiant s'entraine à utiliser la caractérisation de la borne inférieure, montrer que $(-1) = \inf E_6$ en procédant comme pour E_3. c'est à dire pour $\varepsilon > 0$. chercher $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(-1) \leq (-1)^{n_0} + \frac{5}{3n_0} < (-1) + \varepsilon$.

En remarquant que n_0 doit être impair, donc On cherche $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\boxed{-1 + \frac{5}{3n_0} < -1 + \varepsilon}$

Exercice 11

1) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x)+1$

$x < E(x)+1 \Rightarrow x-1 < E(x)$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{x-1 < E(x) \leq x}$

2) On a : $\left.\begin{array}{l} E(x) \leq x < E(x)+1 \\ E(y) \leq y < E(y)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow E(x)+E(y) \leq x+y$

or $E(x+y) \leq x+y < E(x+y)+1$

On obtient : $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$.

De plus : $x+y < E(x)+E(y)+2$.

Alors $E(x+y)+1 \leq E(x)+E(y)+2$.

c.à.d $E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$.

Ainsi : $\underline{E(x)+E(y)} \leq E(x+y) \leq \underline{E(x)+E(y)+1}$

2 entiers consécutifs

On conclut que $E(x+y) = E(x)+E(y)$ ~~ou~~

ou $E(x+y) = E(x)+E(y)+1$

Donc $\boxed{E(x+y) = E(x)+E(y)+\varepsilon \quad \text{avec } \varepsilon = 0 \text{ ou } 1}$

3) $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+\dots+E\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)$

d'après (2) $E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(x)+E\left(\frac{k}{n}\right)+\varepsilon$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1.

pour : $0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} < 1 \Rightarrow E\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(E(x)+E\left(\frac{k}{n}\right)+\varepsilon\right) \qquad \text{avec } \varepsilon = 0 \text{ ou } 1$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} E(x)\right] + \left[\sum_{k=0}^{(n-1)} E\left(\frac{k}{n}\right)\right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\right]$$

$$= n.E(x) + n.E\left(\frac{k}{n}\right) + n.\varepsilon.$$

$$= n\,E(x) + n.\varepsilon$$

$$= n\left(E(x)+\varepsilon\right) =$$

$$= \underbrace{E(x)+E(x)+\dots+E(x)}_{n \text{ fois}} + \underbrace{\varepsilon+\varepsilon+\dots+\varepsilon}_{n \text{ fois}}$$

$$= \left[E(x)+E(x)+\varepsilon\right] + \underbrace{E(x)+E(x)+\dots+E(x)}_{(n-2)\text{ fois}} + \underbrace{\varepsilon+\dots+\varepsilon}_{(n-1)\text{ fois}}$$

$$= \left[E(x+x)+E(x)+\varepsilon\right] + \underbrace{E(x)+\dots+E(x)}_{(n-3)\text{ fois}} + \underbrace{\varepsilon+\dots+\varepsilon}_{(n-2)\text{ fois}}$$

$$= \left[E(x+x+x)+E(x)+\varepsilon\right] + \underbrace{E(x)+\dots+E(x)}_{(n-4)\text{ fois}} + \underbrace{\varepsilon+\dots+\varepsilon}_{(n-3)\text{ fois}}$$

ainsi de suite par récurrence (ou itérations successives)

on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = \left[E(\underbrace{x+\dots+x}_{(n-2)\text{ fois}}) + E(x) + \varepsilon\right] + E(x) + \varepsilon$$

$$= \left[E(\underbrace{x+\dots+x}_{(n-1)\text{ fois}}) + E(x) + \varepsilon\right]$$

$$= E(\underbrace{x+\dots+x}_{n\text{ fois}})$$

$$= E(nx)$$

D'où le résultat.

4) $E(2x) = 2E(x)$?

La réponse est non, en effet si on considère $\{x = \frac{1}{2}\}$

On a : $E\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = E(1) = 1$

et $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et donc $2E\left(\frac{1}{2}\right) = \{0\}$.

D'où $\boxed{E\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\right) \neq 2 \cdot E\left(\frac{1}{2}\right)}$

Exercice 4 :

3)
$$\begin{aligned}
(u^2+v^2)(x^2+y^2) &= u^2x^2 + v^2y^2 + u^2y^2 + v^2x^2 \\
&= \left[(ux)^2+(vy)^2\right] + \left[(uy)^2+(vx)^2\right] \\
&= (ux-vy)^2 + \underbrace{2(ux)(vy) + \left[(uy)^2+(vx)^2\right]} \\
&= (ux-vy)^2 + \left[uy+vx\right]^2
\end{aligned}$$

Donc
$$(u^2+v^2)(x^2+y^2) \geq (ux - v.y)^2 \quad \text{car} \quad (uy+vx)^2 \geq 0$$

Ce qui donne

$$\sqrt{(u^2+v^2)(x^2+y^2)} \geq |ux-vy|.$$

car $|ux-vy| = \sqrt{(ux-vy)^2}$.