## Les polynômes

Dans tout ce chapitre, $K$ désigne un corps commutatif.

$K = \mathbb{R}$ ou bien $K = \mathbb{C}$

$\mathbb{R} =$ Les nombres réels, $\mathbb{C} =$ Les nombres complexes.

**Définition 1 :** On appelle polynôme à une indéterminée $X$ de degré $n \in \mathbb{N}$ à coefficients $a_i$ tel que $i \in \{0, \cdots\cdots\cdots, n\}$, $a_i \in K$, toute écriture de la forme suivante :

$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots\cdots\cdots + a_nX^n$ où $a_i \in K$, $\forall\, i \in \{0, \cdots\cdots\cdots, n\}$ et $a_n \neq 0$

On peut noter $P(X)$ par $P$ , on écrit donc $P(X) = P$

**Remarque :** On peut ajouter à la définition précédente

$X^n$ est $X$ puissance $n$

$a_nX^n$ est la multiplication de $a_n$ et $X^n$

Donc on peut écrire $a_0 = a_0X^0$

**Définition 2** : On appelle degré de $P$ et on note par $\deg P$ ou bien d°$P$

Le nombre d°$P = \max\{i \in \mathbb{N},\ a_i \neq 0\}$

**Remarques :** Dans les définitions précédentes on a :

1) Si $a_i = 0$, $\forall\, i \in \{0, \cdots\cdots\cdots, n\}$, $P$ est dit le polynôme nul et on note $P = 0$
   Par convention, on pose d° $0 = -\infty$
2) Si $a_0 \neq 0$ et $a_i = 0$ $\forall\, i \in \{1, \cdots\cdots\cdots, n\}$, $P$ est dit polynôme constant.
3) Si $P \neq 0$ et d°$P = n$, alors le terme $a_n$ est appelé terme du plus grand degré ou bien terme dominant, si de plus $a_n = 1$, $P$ est dit polynôme unitaire.

**Exemple :** Le polynôme $P(X) = 1 + 4X + X^2$ est un polynôme unitaire.

**Notations :** Dans la définition 1 on a :

1) L'ensemble des polynômes à l'indéterminée $X$ à coefficients dans $K$ se note $K[X]$.
2) L'ensemble des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à $n$ se note $K_n[X]$.

**Opérations :** Soient $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots\cdots\cdots + a_nX^n$ et

$Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots\cdots\cdots + b_mX^m$ deux polynômes de $K[X]$ tels que $n \leq m$

Soit un élément $\lambda \in K$

1) La somme $P + Q$ des polynômes $P$ et $Q$ est le polynôme noté $(P + Q\,)(X)$ tel que

$(P + Q\,)(X) =$

$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \cdots\cdots\cdots + (a_n + b_n)X^n + (a_{n+1} + b_{n+1})X^{n+1}$

$+ \cdots\cdots\cdots + (a_m + b_m)X^m$ avec $a_i = 0$, $\forall\, i \in \{n + 1, \cdots\cdots\cdots, m\}$

**2)** On appelle produit des polynômes $P$ et $Q$, le polynôme noté $(PQ)(X)$ tel que

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} C_k X^k$$

$$o\grave{u}\ C_k = \sum_{i=0}^{i=k} a_i b_{k-i}$$

**3)** On appelle produit de polynôme $P$ par l'élément $\lambda$, le polynôme noté $(\lambda P)(X)$ tel que $(\lambda P)(X) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)X + (\lambda a_2)X^2 + \cdots\cdots\cdots + (\lambda a_n)X^n$

**4)** On appelle polynôme dérivé du polynôme

$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots\cdots\cdots + a_n X^n$ , le polynôme noté $P'(X)$ tel que :

$P'(X) = a_1 + 2a_2 X + \cdots\cdots\cdots + n a_n X^{n-1}$

**Notations :** on note :

$P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P''$,$\cdots\cdots\cdots$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$ où $P^{(k)}$ est appelé la dérivée d'ordre $k$ de $P(X)$.

**Exemple :** $P(X) = 2 + 3X - X^2 \Longrightarrow P'(X) = 3 - 2X$

**Proposition :** Soient $P$,$Q$ deux polynômes de $K[X]$, alors :

$$(P+Q)' = P' + Q'$$

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ C'est la formule de Leibnitz

$\forall \lambda \in K, (\lambda P)' = \lambda P'$

**Arithmétique dans $K[X]$ :**

**Définition :** Soient $A, B$ deux polynômes de $K[X]$ tel que $B \neq 0$, on dit que $B$ divise $A$ et on écrit $B/A$ s'il existe un polynôme $Q \in K[X]$ tel que $A = BQ$

On dit que $B$ est un diviseur de $A$ ou bien $A$ est divisible par $B$.

**Division euclidienne :**

**Proposition – définition :** Soient $A, B$ deux polynômes de $K[X]$ avec $\deg A \geq \deg B$, $B \neq 0$ alors il existe un unique couple $(Q, R)$ de polynômes dans $K[X]$ tels que : $A = BQ + R$ avec

$\deg R < \deg B$, c'est la division euclidienne de $A$ par $B$, $Q$ s'appelle le quotient de la division euclidienne de $A$ par $B$ et $R$ s'appelle le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$, si le $R = 0$, on dit que $A$ est divisible par $B$ ou que $B$ divise $A$.

**Exemple 1 :** $A(X) = X^5 + X^4 + 1,\ B(X) = X^2 + X + 1$

La division euclidienne de $A$ par $B$ donne :

le quotient $Q(X) = X^3 - X + 1$ et le reste $R(X) = 0$

Nous effectuons la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ comme suit :

| | |
|---|---|
| $X^5 + X^4 + 1$ | $X^2 + X + 1$ |
| $+$ | |
| $-(X^5 + X^4 + X^3)$ | $X^3 - X + 1$ |
| $= \quad -X^3 + 1$ | |
| $+$ | |
| $-(X^3 - X^2 - X)$ | |
| $= \quad X^2 + X + 1$ | |
| $+$ | |
| $-(X^2 + X + 1)$ | |
| $= \quad 0$ | |

$A(X) = B(X)Q(X) + 0$

**Exemple 2 :** $A(X) = X^3 + 4X^2 + 5X + 1\ ,\ B(X) = X^2 + X + 1$

La division euclidienne de $A$ par $B$ donne le quotient $Q(X) = X + 3$ et $R(X) = X - 2$

Nous effectuons la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ comme suit :

| | |
|---|---|
| $X^3 + 4X^2 + 5X + 1$ | $X^2 + X + 1$ |
| $+$ | |
| $-(X^3 + X^2 + X)$ | $X + 3$ |
| $= \quad 3X^2 + 4X + 1$ | |
| $+$ | |
| $-(3X^2 + 3X + 3)$ | |
| $= \quad X - 2$ | |

$A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$

**Remarque :** Dans la division euclidienne d'un polynôme $A$ par un polynôme $B$, il faut écrire tous les polynômes suivant les puissances décroissantes en l'indéterminé $X$ ainsi que les polynômes $A$ et $B$.

**$PGCD$ de deux polynômes :** Un plus grand diviseur commun de deux polynômes $A$ et $B$ est un polynôme $Q$ de degré le plus grand possible qui divise à la fois $A$ et $B$. On dit que $Q$ est un $PGCD$ de $A$ et $B$. On le note un $PGCD(A,B)$

**Remarque :** Un $PGCD$ de deux polynômes n'est pas unique, il est unique à coefficients près.

On s'intéresse maintenant au plus grand diviseur commun unitaire de deux polynômes

$A$ et $B$ qui est unique.

**Notation :** Le plus grand diviseur commun unitaire de deux polynômes $A$ et $B$ est noté

Le $PGCD(A,B)$.

**Proposition :** Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $K[X]$, et soit $R$ le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ alors :

Le $PGCD(A,B) =$ Le $PGCD\ (B,R)$ et si $B$ est un diviseur de $A$ (c'est-à-dire $R = 0$) alors

Le $PGCD(A,B) = B$

**Algorithme de $PGCD$ :** Soient $A$ et $B$ deux polynômes de $K[X]$, $B \neq 0$ tels que $\deg B \leq \deg A$, alors suivant la théorie de la division euclidienne on a :

$A = BQ_0 + R_0$ avec $\deg R_0 < \deg B$ et $R_0 \neq 0$

$B = R_0Q_1 + R_1$ avec $\deg R_1 < \deg R_0$ et $R_1 \neq 0$

$R_0 = R_1Q_2 + R_2$ avec $\deg R_2 < \deg R_1$ et $R_2 \neq 0$

$R_1 = R_2Q_3 + R_3$ avec $\deg R_3 < \deg R_2$ et $R_3 \neq 0$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$R_{n-1} = R_nQ_{n+1} + R_{n+1}$ avec $R_{n+1} = 0$

Comme la suite $\deg(R_i)$ est strictement décroissante et positive alors il viendra un moment où $R_{n+1} = 0$ , avec $R_{n+1}$ est le reste de la division euclidienne de $R_{n-1}$ par $R_n$

En utilisant la proposition précédente on a :

Le $PGCD\ (A,B) =$ Le $PGCD(B,R_0) =$

Le $PGCD(R_0,R_1) = \cdots\cdots\cdots =$ Le $PGCD(R_{n-1},R_n) = R_n$ , car $R_{n+1} = 0$

c'est-à-dire que Le $PGCD(A,B)$ est le dernier reste unitaire non nul dans cette suite des divisions euclidiennes.

**Exemple :** Soient $A$ et $B$ deux polynômes définis comme suit :

$A(X) = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 8X + 12$

$B(X) = X^4 + X^3 - X - 1$

$A = BQ_0 + R_0$ où $Q_0 = X - 3, R_0 = -3X^3 + 6X^2 + 6X + 9$

$B = R_0Q_1 + R_1$ où $Q_1 = \frac{-1}{3}X - 1,\ R_1 = 8X^2 + 8X + 8$

$R_0 = R_1Q_2 + R_2$ où $Q_2 = \frac{-3}{8}X + \frac{9}{8},\ R_2 = 0$

Le $PGCD(A,B) = \frac{1}{8}R_1 = X^2 + X + 1$

**Remarque :** On a effectué la division euclidienne de $A$ par $B$, ensuite de $B$ par $R_0$ , ensuite de $R_0$ par $R_1$

**Polynômes premiers entre eux :** Deux polynômes $P$ et $Q$ sont dites premiers entre eux si et seulement si leur $PGCD$ est égal à 1 c'est-à-dire Le $PGCD(P,Q) = 1$

**Théorèmes de Bézout :** Soient $P$ et $Q$ deux polynômes premiers entre eux, alors il existe

$u_1$ , $u_2 \in K[X]$ tels que : $u_1P + u_2Q = 1$

**Théorème de Gauss :** Soient $A$,$B$ et $C$ trois polynômes de $K[X]$ alors :

($A$ divise $BC$) et (Le $PGCD(A,B) = 1$) $\Longrightarrow A$ divise $C$

**Division suivant les puissances croissantes de $X$ :** Soient $A$ et $B$ deux polynômes tels que :

$A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots\cdots\cdots + a_mX^m \in K[X]$ et

$B(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots\cdots\cdots + b_nX^n \in K[X]$ tels que $b_0 \neq 0$ et $h \in \mathbb{N}$

Il existe un couple unique de polynômes $(Q,R)$ tel que $A = BQ + X^{h+1}R$ avec $\deg Q \leq h$

$Q$ s'appelle le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $A$ par $B$ à l'ordre $h$

Et $X^{h+1}$ s'appelle le reste de la division suivant les puissances croissantes de $A$ par $B$ à l'ordre $h$.

**Exemple :** Soient deux polynômes $A$ et $B$ définis comme suit :

$A(X) = 1 - 2X + X^2 - 4X^4 + 2X^5$ et $B(X) = 1 + X^2,\ h = 3$

$A = BQ + X^{h+1}R$ où $Q(X) = 1 - 2X + 2X^3,\ R = -4$

Nous effectuons la division suivant les puissances croissantes de $A(X)$ par $B(X)$ à l'ordre $3$ comme suit :

$$
\begin{array}{l|l}
1-2X+X^2-4X^4+2X^5 & 1+X^2 \\
+ & \hline \\
-(1+X^2) & 1-2X+2X^3 \\
\hline
= \quad -2X-4X^4+2X^5 & \\
+ & \\
-(2X-2X^3) & \\
\hline
= \quad 2X^3-4X^4+2X^5 & \\
+ & \\
-(2X^3+2X^5) & \\
\hline
= \quad -4X^4 = X^{h+1}R &
\end{array}
$$

C'est la division suivant les puissances croissantes de $A$ par $B$ à l'ordre $h=3$

**Remarque :** Dans la division suivant les puissances croissantes d'un polynôme $A$ par un polynôme $B$, il faut écrire tous les polynômes suivant les puissances croissantes.

**Zéros des polynômes :**

**Définition :** Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$, on dit que $\alpha$ est une racine de $P$ ou bien on dit que $\alpha$ est un zéro de $P$ si et seulement si $P(\alpha)=0$

**Proposition :** Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$,

$\alpha$ est une racine de $P \Leftrightarrow (X-\alpha)$ divise $P(X)$

$$\Leftrightarrow \exists Q(X) \in K[X] \text{ tel que } P(X)=(X-\alpha)Q(X)$$

**Multiplicité d'une racine :**

**Définition :** Soient $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$, $k \in \mathbb{N}-\{0\}$,

On dit que $\alpha$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $k$ si et seulement si $(X-\alpha)^k$ divise $P$ et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas $P$.

**Remarques :** Dans la définition précédente si :

$k=1$ donc $\alpha$ est une racine simple de $P$.

$k=2$ donc $\alpha$ est une racine double de $P$.

$k=3$ donc $\alpha$ est une racine triple de $P$.

**Proposition :** Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$, $k \in \mathbb{N}-\{0\}$,

$\alpha$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $k \Leftrightarrow \begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P^{(1)}(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

**Remarque :** dans la proposition précédente, on dit que $\alpha$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $k$ ou bien simplement $\alpha$ est une racine de $P$ d'ordre $k$.

**Exemple :** $\alpha = 1$ est une racine de $P(X)$.

$P(X) = X^3 - X^2 - X + 1$, $\alpha$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité 2 car :

$P(1) = 0$,

$P'(X) = 3X^2 - 2X - 1$

$P'(1) = 0$

$P''(X) = 6X - 2$

$P''(1) \neq 0$

**Proposition :** Soient $P$ un polynôme à coefficients réels et $Z$ un nombre complexe non réel, alors si $Z$ est une racine de $P$ d'ordre $k$ alors le conjugué de $Z$ noté $\overline{Z}$ est aussi une racine de $P$ de même ordre $k$.

**Factorisation des polynômes :**

**Définition :** Soit $P \in K[X]$, on dit que $P$ est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si

$\forall A, B \in K[X],\ P = AB \Longrightarrow A =$ constante ou bien $B =$ constante

On peut déduire facilement le corollaire suivant :

**Corollaire :**

1) Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de la forme $P(X) = aX + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$
2) Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de la forme
   $P(X) = aX + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$
   $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

**Théorème de d'Alembert -Gauss :** Tout polynôme non constant de $K[X]$, se factorise de façon unique en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $K[X]$.

Autrement dit :

Dans $\mathbb{C}[X]$ :

$\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P$ non constant, $\exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists n \in \mathbb{N} - \{0\}, \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$

deux à deux distincts, $\exists r_1, r_2, \cdots\cdots\cdots, r_n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tels que :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{k=n} (X - \alpha_k)^{r_k} = \lambda (X - \alpha_1)^{r_1} (X - \alpha_2)^{r_2} \cdots\cdots\cdots (X - \alpha_n)^{r_n}$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ P$ non constant, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, il existe un unique couple $(A, B)$ de polynômes unitaires dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$P(X) = \lambda\, A(X)B(X)$ avec

$A(X) = (X - \alpha_1)^{r_1} (X - \alpha_2)^{r_2} \cdots\cdots\cdots (X - \alpha_n)^{r_n}$

Et

$B(X) = (X^2 + p_1 X + q_1)^{s_1} (X^2 + p_2 X + q_2)^{s_2} \cdots\cdots\cdots (X^2 + p_m X + q_m)^{s_m}$

Avec $(p_i)^2 - 4q_i < 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ $r_1, r_2, \cdots\cdots\cdots, r_n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots, p_m \in \mathbb{R}$

$q_1, q_2, \cdots\cdots\cdots, q_m \in \mathbb{R}$, $s_1, s_2, \cdots\cdots\cdots, s_m \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Et on a $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\cdots, \alpha_n$ deux à deux distincts et les couples $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \cdots\cdots\cdots, (p_m, q_m)$ deux à deux distincts.

**Exercice** : Soit $P(X) = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

**1)** Montrer par deux méthodes différentes que $X_0 = 1$ est une racine triple de $P$.
**2)** Factoriser $P$ en facteurs irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

**Solution :** $P(X) = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1 \in \mathbb{R}[X]$

**1)** $X_0 = 1$ est une racine triple de $P$

**Première méthode :**

$X_0 = 1$ est une racine triple de $P$ c'est-à-dire que $X_0 = 1$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $k = 3$

Selon une proposition vue dans le cours on a :

$$X_0 = 1 \text{ est une racine triple de } P \Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \\ P''(1) = 0 \\ P'''(1) \neq 0 \end{cases}$$

$P'(X) = 5X^4 - 8X^3 + 3X^2 - 2X + 1$

$P'(1) = 0$

$P''(X) = 20X^3 - 24X^2 + 6X - 2$

$P''(1) = 0$

$P'''(X) = 60X^2 - 48X + 6$

$P'''(1) = 18 \neq 0$ donc $X_0 = 1$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $k = 3$

**Conclusion :** $X_0 = 1$ est une racine triple de $P$

**Deuxième méthode :**

$P(X) = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1 \in \mathbb{R}[X]$

Selon la définition du cours :

$X_0 = 1$ est une racine triple de $P \iff (X-1)^3$ divise $P$ et $(X-1)^4$ ne divise pas $P$

- Montrons que $(X-1)^3$ divise $P$ :

Le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ est nul,

En effet :

$$\begin{array}{l|l} X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1 & X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \\ + & \hline \\ -(X^5 - 3X^4 + 3X^3 - X^2) & X^2 + X + 1 \\ \hline = \quad X^4 - 2X^3 + 2X - 1 & \\ + & \\ -(X^4 - 3X^3 + 3X^2 - X) & \\ \hline = \quad X^3 - 3X^2 + 3X - 1 & \\ + & \\ -(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) & \\ \hline = \quad 0 & \end{array}$$

Donc $(X-1)^3$ divise $P$

- Montrons maintenant que $(X-1)^4$ ne divise pas $P$ :

Supposons que $(X-1)^4$ divise $P$

Si $(X-1)^4$ divise $P$ donc selon la définition de la divisibilité on peut trouver $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^4 Q(X)$.

Mais selon la division euclidienne précédente on a $P(X) = (X-1)^3(X^2 + X + 1)$

On peut déduire que $(X-1)^4 Q(X) = (X-1)^3(X^2 + X + 1)$

Cette dernière relation entraîne que $(X-1)^4 Q(X) - (X-1)^3(X^2 + X + 1) = 0$

Donc : $(X-1)^3[(X-1)Q(X) - (X^2 + X + 1)] = 0$

Et comme $(X-1)^3$ divise $P$ donc selon la définition de la divisibilité $(X-1)^3 \neq 0$, on peut déduire que $[(X-1)Q(X)-(X^2+X+1)]=0$

donc $(X^2+X+1)=(X-1)Q(X)$, c'est-à-dire $(X-1)$ divise $(X^2+X+1)$

et selon une proposition vue dans le cours donc $X_0=1$, est une racine de $(X^2+X+1)$

alors selon la définition d'une racine d'un polynôme on a : $(1)^2+1+1=0$

C'est une contradiction donc $(X-1)^4$ ne divise pas $P$

**Conclusion :** $X_0=1$ est une racine triple de $P$

**2) Factoriser $P$ en facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$**

Factoriser un polynôme $P$ en facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ c'est-à-dire factoriser ce polynôme en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Cette écriture est unique selon le théorème de d'Alembert - Gauss

On a :

$P(X)=(X-1)^3(X^2+X+1)^1$

Le polynôme $(X-1)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et il est unitaire.

Le polynôme $(X^2+X+1)$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et il est unitaire.

Le polynôme $(X^2+X+1)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ puisqu'il est de degré égal à 2,

et $\Delta(X^2+X+1)<0$

**Conclusion :** L'écriture $P(X)=(X-1)^3(X^2+X+1)^1$ est la factorisation du polynôme $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{R}[X]$.

**Remarque :** pour la factorisation de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{C}[X]$ , on peut la déduire facilement à partir de l'écriture suivante :

$P(X)=(X-1)^3(X^2+X+1)^1$

Puisque $\Delta(X^2+X+1)<0$ donc les racines du polynôme $h(X)=X^2+X+1$ sont complexes non réels

Soient $\alpha$ et $\lambda$ les racines du polynôme $h(X)=X^2+X+1$

Donc $X^2+X+1=(X-\alpha)(X-\lambda)$

tels que $\alpha=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On peut donc écrire :

$P(X)=(X-1)^3(X-\alpha)(X-\lambda)$ tels que $\alpha=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

est la factorisation de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{C}[X]$.