Université de UMBB **Année 2021/2022**

Faculté des sciences, Dept de Maths **1ère Année, MI**

Série d'exercices Algèbre1

(Logique, ensembles, relations binaires, applications)

1) Logique et ensembles : (vous trouvez avec la série la solution des exercices de logique et ensembles)

Exercice 1*:* Soient les quatre assertions suivantes :

$$(\boldsymbol{a}) \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > \mathbf{0} \; ; \; (\boldsymbol{b}) \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > \mathbf{0} \; ;$$

$$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0; \; (d) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: y^2 > x.$$

1) Les assertions $(a), (b), (c)$ et (d) sont-elles vraies ou fausses ?
2) Donner leur négation.

Exercice 2 :
Démontrer par l'absurde que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $|x+3| \geq 3$ ou $|x-3| \geq 3$

Exercice 3 :
1) Montrer par raisonnement direct et par contraposition l'assertion suivante :

E étant un ensemble $\forall A \in P(E)$ $\forall B \in P(E)$, $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$

2) On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $(A \cup B \subset A \cup C)$ et

$(A \cap B \subset A \cap C)$, montrer que $B \subset C$.

Exercice 4 :
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités suivantes :

1. $(A \subset B) \Rightarrow (C_E B \subset C_E A)$
2. $C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$
3. $C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

2)Relations binaires :

Exercice 1 :

I – Soit $\mathfrak{R}$ une relation définie sur R par :

$\forall x, y \in \mathrm{R}$; $x \,\mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow x e^y = y e^x$

Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

II – La relation $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$; $x \,\mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow \exists \; k \in \mathbb{Z}, \; x = k\,y$ est-elle une relation d'ordre ?

III – Montrer que la relation $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$par : $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$; $(x_1, y_1) \mathfrak{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2$ n'est pas une relation d'ordre.

Exercice 2 :

On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ *par :* $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ *:* $p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $p^n = q$

1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

2) Cet ordre est –t-il total ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

I –On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}.$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence
2. Préciser la classe d'équivalence de a pour tout a de $\mathbb{R}^*$.

II – Même question pour la relation $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow (x = y \ \ ou\ \ xy = 1)$$

3)Applications

Exercice 1 :

I) Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

$i)$ f injective $\Rightarrow \left(\forall A \subset E : f^{-1}\left(f(A)\right) \subset A\right)$.

$ii)$ f surjective $\Rightarrow \left(\forall B \subset F : f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B\right)$.

II) Soit l'application f définie par : $f :\ \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

1) Calculer $f(\{-1,1\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.
2) f est – elle injective ? surjective ? Justifier.

Exercice 2 :

I) Soit l'application f définit par ; $f : \mathbb{R} \longrightarrow [5, +\infty[$ tel que :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5$.

1. f est – elle injective ? surjective ? bijective ?

2. Comment peut-on **<u>choisir un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée</u>** pour obtenir une application bijective, dans ce cas déterminer la bijection réciproque.

II) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

i) Soient $A=\{-1,2,3\}$; $B = [0.1[$; $C = [-1,0]$; Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f^{-1}(C)$, f est-elle injective, surjective ?

ii) donner un ensemble de départ et un autre d'arrive de manière à avoir une application bijective, dans ce cas déterminer f^{-1}.