UMBB.
F.S
Dpt de Maths

MI 2021/2022

Série d'exercices n°1 : Les nombres réels et leurs propriétés.

Exercice 1 : *[I] i) Soient a, b, c des nombres réels dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses. Compléter les par des conditions lorsque cela est nécessaire.*

1) $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$; 2) $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$; 3) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b$;

4) $a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < |b|$; 5) $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$; 6) $a^3 < b^3 \Rightarrow a < b$;

7) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$; 8) $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$; 9) $a < b \Rightarrow ac < bc$;

10) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 11) $a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1$; 12) $a < b$ et $c < d \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

ii) Comparez $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$, puis $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ et $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

[II] i) Soient deux nombres réels a et b vérifiant $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$.

Donner un encadrement de $a - b$ et de $\frac{a}{b}$.

ii) Encadrez les quantités $a + b$, $a - b$, ab, $\frac{a}{b}$ et $|a| + |b|$,

pour a et b vérifiant $|a - 1| \leq 2$ et $-5 \leq b \leq -4$.

[III] les ensembles suivants sont-ils des intervalles, si oui de quels types?

$$A = [0, 1[\cup [1, 3[; \quad B = [0, 2] \cup [6, 11] \cup [1, 8]; \quad C =]0, 2[\cup]3, 5[; \quad D = [0, 7] \setminus [3, 8].$$

Exercice 2 : *Résoudre dans $\mathbb{R}$:*

1) $|x + 3| - |7x - 1| \geq |x - 1|$; 2) $\left|\frac{x-4}{x+1}\right| = \frac{x-2}{x+1}$;

3) $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n) > 0$; 4) $\sqrt{2x+3} \geq x$.

Exercice 3 : *Démontrer dans $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes:*

1) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$; 2) $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$;

3) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$; 4) $|ux - vy| \leq \sqrt{(u^2+v^2)(x^2+y^2)}$;

5) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

Exercice 4:

1) *Montrer que si l'entier n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.*

En déduire que $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ n'est pas rationnel.

2) *Soient x un nombre irrationnel et a un rationnel,*

que peut on dire de $x + a$ et aussi de ax pour $a \neq 0$?

3) *Montrer qu'il existe un irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.*

4) *Montrer que si x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ est irrationnel,*

alors $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est aussi irrationnel.

Exercice 5 :

1) *Montrer que si l'entier n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.*

En déduire que $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ n'est pas rationnel.

2) *Soient x un nombre irrationnel et a un rationnel,*

que peut on dire de $x+a$ et aussi de ax pour $a \neq 0$?

3) *Montrer qu'il existe un irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.*

4) *Montrer que si x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ est irrationnel,*

alors $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est aussi irrationnel.

Exercice 6 : *Démontrer à partir du système d'axiomes les propositions suivantes:*

1) *Les éléments; neutre , symétrique et unité sont uniques;*
2) $x.0 = 0.x = 0$;
3) $x.y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$;
4) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$;
5) $-x = (-1)x$, $(-x)y = x(-y) = (-xy)$, $(-x)(-x) = x.x$;
6) $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$ en particulier $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$;
7) $(x < y \wedge z < 0) \Rightarrow x.z > y.z$.

Exercice 7 : *Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants:*

1) $[0;\ 2[$; 2) $\{0\} \cup]1;\ 2]$; 3) $\left[\frac{1}{2};\ 1\right] \cap \mathbb{Q}$;

4) $\left]\frac{1}{2};\ 1\right[\cap \mathbb{Q}$; 5) $\mathbb{N}$; 6) $\{\sqrt{x}, x \in]2,9]\}$;

7) $\{xy;\ x \in]2,9],\ y \in]-1,10[\}$; 8) $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$.

Exercice 8 :

[I] *Soient A et B deux parties bornées non-vides de $\mathbb{R}$. Montrer que:*

a) *Si $A \subset B$, alors* $\boxed{\inf B \leq \inf A}$ *et* $\sup A \leq \sup B$.

b) $\boxed{\sup(A \cup B) = \max(\sup A,\ \sup B)}$ *et* $\inf(A \cup B) = \min(\inf A,\ \inf B)$.

c) *Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors* $\boxed{\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A,\ \sup B)}$ *et* $\max(\inf A,\ \inf B) \leq \inf(A \cap B)$.

[II] *Soient A et B deux parties bornées non-vides de $\mathbb{R}$ telles que: $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.*

Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

[III] *Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{|x-y|;\ (x,\ y) \in A^2\}$.*

a) *Justifier que B est majorée.*

b) *On note $\delta(A)$ la borne supérieure de cet ensemble. Prouver que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.*

Exercice 5 :

1) *Montrer que si l'entier n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.*

En déduire que $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ n'est pas rationnel.

2) *Soient x un nombre irrationnel et a un rationnel,*

que peut on dire de $x+a$ et aussi de ax pour $a \neq 0$?

3) *Montrer qu'il existe un irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.*

4) *Montrer que si x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ est irrationnel,*

alors $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est aussi irrationnel.

Exercice 6 : *Démontrer à partir du système d'axiomes les propositions suivantes:*

1) *Les éléments; neutre , symétrique et unité sont uniques;*
2) $x.0 = 0.x = 0$;
3) $x.y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$;
4) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$;
5) $-x = (-1)\,x$, $(-x)\,y = x\,(-y) = (-xy)$, $(-x)\,(-x) = x.x$;
6) $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$ *en particulier* $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$;
7) $(x < y \wedge z < 0) \Rightarrow x.z > y.z$.

Exercice 7 : *Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants:*

1) $[0;\ 2[$;

2) $\{0\} \cup]1;\ 2]$;

3) $\left[\frac{1}{2};\ 1\right] \cap \mathbb{Q}$;

4) $\left]\frac{1}{2};\ 1\right[\cap \mathbb{Q}$;

5) $\mathbb{N}$;

6) $\{\sqrt{x}, x \in]2,9]\}$;

7) $\{xy;\ x \in]2,9],\ y \in]-1,10[\}$;

8) $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$.

Exercice 8 :

[I] *Soient A et B deux parties bornées non-vides de $\mathbb{R}$. Montrer que:*

a) *Si $A \subset B$, alors* $\boxed{\inf B \leq \inf A}$ *et* $\sup A \leq \sup B$.

b) $\boxed{\sup(A \cup B) = \max(\sup A,\ \sup B)}$ *et* $\inf(A \cup B) = \min(\inf A,\ \inf B)$.

c) *Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors* $\boxed{\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A,\ \sup B)}$ *et* $\max(\inf A,\ \inf B) \leq \inf(A \cap B)$.

[II] *Soient A et B deux parties bornées non-vides de $\mathbb{R}$ telles que: $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b$.*

Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

[III] *Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{|x-y|;\ (x,\ y) \in A^2\}$.*

a) *Justifier que B est majorée.*

b) *On note $\delta(A)$ la borne supérieure de cet ensemble. Prouver que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.*