CAPITOLUL 2. FUNCŢII LOGICE

2.1 AXIOMELE ŞI TEOREMELE ALGEBREI LOGICE

Algebra logică are la bază ***principiul dualităţii*** potrivit căruia toate axiomele şi teoremele rămân valabile dacă se fac schimbările **“+”** cu **“•”** respectiv **“0”** cu **“1”**. Semnul **“+”** reprezintă **ADUNARE** logică. Semnul **“•”** reprezintă **ÎNMULŢIRE** logică. Conform principiului dualităţii fiecare axiomă şi teoremă are două forme.

AXIOMELE ALGEBREI LOGICE

1. ASOCIATIVITATEA: (A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C (A•B)•C = A•(B•C) = A•B•C

2. COMUTATIVITATEA: A + B = B + A A • B = B • A

3. DISTRIBUTIVITATEA: A • (B+C) = A • B + A • C A + B • C = (A+B) • (A+C)

4. ELEMENT NEUTRU: A + 0 = 0 + A = A A • 1 = 1 • A = A

5. COMPLEMENTUL: $A + \overline{A} = 1$ $A \bullet \overline{A} = 0$

TEOREMELE ALGEBREI LOGICE

1. IDEMPOTENŢA

A + A + A + ...+ A = A **A • A • A • ....• A = A**

2. ELEMENTE NEUTRE

A + 1 = 1 **A • 0 = 0**

3. ABSORBŢIA

A + A • B = A **A • (A + B) = A**

4. ABSORBŢIA INVERSĂ

$\overline{A} + \overline{A} \bullet B = \overline{A}$ $\overline{A} \bullet (\overline{A} + B) = \overline{A}$

$A + \overline{A} \bullet B = A + B$ $A \bullet (\overline{A} + B) = A \bullet B$

5. DUBLA NEGAŢIE (INVOLUŢIA)

$\overline{\overline{A}} = A$

6. TEOREMELE LUI DE MORGAN

$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$ $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

$A + B = \overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}$ $A \bullet B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$

Pentru înţelegerea şi demonstrarea axiomelor, teoremelor sau a altor relaţii în algebra logică se ţine cont de următoarele reguli:

A şi **B** pot fi înlocuite cu **0** sau **1**. Dacă **A = 0** atunci **B = 1** şi invers

0 • 0 = 0 **0 + 0 = 0** **0 • 1 = 0** $\overline{0} = 1$

1 • 1 = 1 **1 + 1 = 1** **1 • 0 = 0** $\overline{1} = 0$

2.2 PREZENTAREA FUNCŢIILOR LOGICE

Algebra booleană operează pe o mulţime **B = { x I x ∈ {0,1} }.**

În această mulţime se definesc 3 legi de compoziţie:

Complementarea (inversarea logică, negarea , "NU", „**NOT**"**)**

Disjuncţia (suma logică, reuniunea , „SAU", „**OR**")

Conjuncţia (produsul logic, intersecţia, „ŞI" , „**AND**")

O funcţie ***f* : B^n → B** se numeşte ***funcţie booleană***.

O funcţie booleană de **n** variabile **y = f (x_1, x_2, x_3,....x_n)** se caracterizează prin faptul că atât variabilele cât şi funcţia nu pot lua decât două valori distincte **0** şi **1**.

Din cele prezentate mai sus rezultă că în algebra booleană sunt **trei** funcţii elementare:

Funcţia NU → (NOT) → NEGAŢIE
Funcţia SAU → (OR) → ADUNARE
Funcţia ŞI → (AND) → ÎNMULŢIRE

Prin combinarea celor trei funcţii logice elementare se mai obţin încă patru funcţii logice:

Funcţia SAU – NU → (NOR) → NEGAREA SUMEI LOGICE
Funcţia ŞI – NU → (NAND) → NEGAREA PRODUSULUI LOGIC
Funcţia SAU – EXCLUSIV → (XOR) → SUMA MODULO 2
Funcţia SAU – EXCLUSIV - NU → (NXOR) → NEGARE SUMĂ MODULO 2

În **tabelul 2.1** sunt prezentate funcţiile logice elementare utilizate în algebra logică.

Tabelul 2.1 – FUNCŢII LOGICE ELEMENTARE

Nr. crt.	Denumirea funcţiei logice	Operaţia realizată	Expresia funcţiei logice
1	NU (NOT)	Inversare	Y = $\overline{A}$
2	SAU (OR)	Sumă logică	Y = A + B
3	ŞI (AND)	Produs logic	Y = A • B
4	SAU - NU (NOR)	Negarea sumei logice	Y = $\overline{A + B}$
5	ŞI – NU (NAND)	Negarea produsului logic	Y = $\overline{A \bullet B}$
6	SAU - EXCLUSIV (XOR)	Sumă modulo 2	Y = $A \oplus B$
7	SAU - EXCLUSIV NEGAT (NXOR)	Negarea sumei modulo 2	Y = $\overline{A \oplus B}$

Funcţiile logice de bază prezentate mai sus se implementează (realizează) cu ajutorul unor circuite fizice numite ***porţi logice***.

Aceste dispozitive sunt prezentate în capitolul **PORŢI LOGICE** .

2.3 REPREZENTAREA FUNCŢIILOR LOGICE

Pentru reprezentarea funcţiilor se folosesc în mod curent 2 metode:

- Reprezentarea prin tabela de adevăr;
- Reprezentarea prin diagrame Veitch – Karnaugh.

2.3.1. REPREZENTAREA FUNCŢIILOR LOGICE PRIN TABELA DE ADEVĂR

TABELA DE ADEVĂR - stabileşte corespondenţa dintre valorile de adevăr ale variabilelor de intrare şi valoarea de adevăr a funcţiei în fiecare punct al domeniului de definiţie.

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCŢIEI NU (NOT)

A	Y = $\overline{A}$
0	1
1	0

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCŢIEI SAU (OR)

A	B	Y = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCŢIEI ŞI (AND)

A	B	Y = A • B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCŢIEI SAU - NU (NOR)

A	B	Y = $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCŢIEI ŞI - NU (NAND)

A	B	Y = $\overline{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCŢIEI SAU-EXCLUSIV (XOR)

A	B	Y = $A \oplus B$ $\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{B}}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

TABELUL DE ADEVĂR AL FUNCŢIEI SAU-EXCLUSIV- NEGAT (NXOR)

A	B	Y = $\overline{A \oplus B}$ $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.3.2 REPREZENTAREA FUNCŢIILOR LOGICE PRIN DIAGRAME VEITCH – KARNAUGH

Diagramele Veitch - Karnaugh se utilizează pentru minimizarea unei funcţii logice, în scopul obţinerii unei expresii algebrice cât mai simple, care permite implementarea unui circuit digital cu un număr minim de porţi logice.

Diagrama Karnaugh simplifică o funcţie logică cu mai multe intrări (maxim 8).

O ***diagramă Karnaugh*** este o reprezentare grafică a tabelului de adevăr corespunzător unei funcţii logice. Diagrama unei funcţii logice cu ***n*** intrări, este un tablou 2^n celule, câte o celulă pentru fiecare combinaţie de intrare posibilă.

Liniile şi coloanele unei diagrame Karnaugh sunt etichetate astfel încât combinaţia de intrare a oricărei celule să poată fi aflată cu uşurinţă din denumirea liniei şi coloanei la intersecţia cărora se află celula respectivă.

În fiecare celulă a diagramei se scrie o valoare logică **0** sau **1** care reprezintă valoarea de adevăr a funcţiei când variabilele de intrare au valorile coordonatelor celulei respective.

În celula unei diagrame mai poate fi scris (cu dimensiuni mici) numărul ***mintermenului*** corespunzător din tabelul de adevăr. Mintermenul reprezintă valoarea zecimală a numărului binar format din biţii variabilelor de intrare (mai simplu, reprezintă numărul de ordine al rândului din tabelul de adevăr cu precizarea că numărătoarea începe de la **0**.

a. Diagrama Karnaugh pentru o funcţie cu două variabile

A \ B	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$f(\overline{A},\overline{B})$	$f(\overline{A},B)$
A	$f(A,\overline{B})$	$f(A,B)$

$\Longleftrightarrow$

A \ B	0	1
0	f(0, 0)	f(0, 1)
1	f(1, 0)	f(1, 1)

$\Longleftrightarrow$

A \ B	$\overline{B}(0)$	B(1)
$\overline{A}(0)$	f(0, 0) $f(\overline{A},\overline{B})$	f(0, 1) $f(\overline{A},B)$
A(1)	f(1, 0) $f(A,\overline{B})$	f(1, 1) $f(A,B)$

Figura 2.1 Versiunea simplificată a unei diagrame Karnaugh cu 2 variabile

Transformarea tabelului de adevăr a unei funcţii cu două variabile în diagramă Karnaugh este prezentată în **figura 2.2**

Mintermen	A	B	f
0	0	0	a
1	0	1	b
2	1	0	c
3	1	1	d

A \ B	$\bar{B}(0)$	B(1)
$\bar{A}(0)$	a	b
A(1)	c	d

Figura 2.2 Corespondenţa dintre tabela de adevăr şi diagrama Karnaugh

b. Diagrama Karnaugh pentru o funcţie cu trei variabile

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	$f(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$	$f(\bar{A},\bar{B},C)$	$f(\bar{A},B,C)$	$f(\bar{A},B,\bar{C})$
A	$f(A,\bar{B},\bar{C})$	$f(A,\bar{B},C)$	$f(A,B,C)$	$f(A,B,\bar{C})$

$\Leftrightarrow$

A \ BC	00	01	11	10
0	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$	$f(0,1,0)$
1	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$	$f(1,1,0)$

Figura 2.3 Versiunea simplificată a unei diagrame Karnaugh cu 3 variabile

Transformarea tabelului de adevăr a unei funcţii cu trei variabile în diagramă Karnaugh este prezentată în **figura 2.4**

Mintermen	A	B	C	f
0	0	0	0	a
1	0	0	1	b
2	0	1	0	c
3	0	1	1	d
4	1	0	0	e
5	1	0	1	f
6	1	1	0	g
7	1	1	1	h

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}(00)$	$\bar{B}C(01)$	$BC(11)$	$B\bar{C}(10)$
$\bar{A}(0)$	0 a	1 b	3 d	2 c
$A(1)$	4 e	5 f	7 h	6 g

Figura 2.4 Corespondenţa dintre tabela de adevăr şi diagrama Karnaugh

c. Diagrama Karnaugh pentru o funcţie cu patru variabile

$A \cdot B$ \ $C \cdot D$	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$	$f(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$	$f(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$	$f(\bar{A}, \bar{B}, C, D)$	$f(\bar{A}, \bar{B}, C, \bar{D})$
$\bar{A} \cdot B$	$f(\bar{A}, B, \bar{C}, \bar{D})$	$f(\bar{A}, B, \bar{C}, D)$	$f(\bar{A}, B, C, D)$	$f(\bar{A}, B, C, \bar{D})$
$A \cdot B$	$f(A, B, \bar{C}, \bar{D})$	$f(A, B, \bar{C}, D)$	$f(A, B, C, D)$	$f(A, B, C, \bar{D})$
$A \cdot \bar{B}$	$f(A, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$	$f(A, \bar{B}, \bar{C}, D)$	$f(A, \bar{B}, C, D)$	$f(A, \bar{B}, C, \bar{D})$

$\Updownarrow$

$A \cdot B$ \ $C \cdot D$	00	01	11	10
00	$f(0, 0, 0, 0)$	$f(0, 0, 0, 1)$	$f(0, 0, 1, 1)$	$f(0, 0, 1, 0)$
01	$f(0, 1, 0, 0)$	$f(0, 1, 0, 1)$	$f(0, 1, 1, 1)$	$f(0, 1, 1, 0)$
11	$f(1, 1, 0, 0)$	$f(1, 1, 0, 1)$	$f(1, 1, 1, 1)$	$f(1, 1, 1, 0)$
10	$f(1, 0, 0, 0)$	$f(1, 0, 0, 1)$	$f(1, 0, 1, 1)$	$f(1, 0, 1, 0)$

Figura 2.5 Versiunea simplificată a unei diagrame Karnaugh cu 4 variabile

Mintermen	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	a
1	0	0	0	1	b
2	0	0	1	0	c
3	0	0	1	1	d
4	0	1	0	0	e
5	0	1	0	1	f
6	0	1	1	0	g
7	0	1	1	1	h
8	1	0	0	0	i
9	1	0	0	1	j
10	1	0	1	0	k
11	1	0	1	1	l
12	1	1	0	0	m
13	1	1	0	1	n
14	1	1	1	0	o
15	1	1	1	1	p

AB \ CD	$\bar{C}\bar{D}$(00)	$\bar{C}D$(01)	CD(11)	$C\bar{D}$(10)
$\bar{A}\bar{B}$(00)	0 a	b	3 d	2 c
$\bar{A}B$(01)	4 e	5 f 7	h	6 g
AB(11)	12 m	13 n	15 p	14 o
$A\bar{B}$(10)	8 i	9 j	11 l	10 k

Figura 2.6 Corespondenţa dintre tabela de adevăr şi diagrama Karnaugh

2.4. SIMPLIFICAREA FUNCŢIILOR LOGICE

În proiectarea sistemelor digitale, implementarea circuitelor digitale se bazează pe algebra booleană. Între gradul de complexitate al funcţiei logice care descrie un circuit şi gradul de complexitate al circuitului respectiv există o strânsă legătura. Dacă reuşim sa simplificăm expresia funcţiei logice vom reduce automat şi complexitatea circuitului.

Implementarea practică a circuitului se realizează pe baza formei minimizate a funcţiei logice care descrie circuitul numeric, ceea ce conduce la o configuraţie optimă de circuit.

2.4.1 TRANSFORMAREA TABELULUI DE ADEVĂR ÎN EXPRESII LOGICE

Procesul de proiectare a circuitelor digitale începe adeseori de la un tabel de adevăr. După cum am văzut în secţiunea **2.2**, tabelul de adevăr stabileşte corespondenţa dintre valorile de adevăr ale variabilelor de intrare şi valoarea de adevăr a funcţiei circuitului respectiv. În funcţie de starea logică a variabilelor de intrare, funcţia logică a circuitului are o anumită formă. Înainte de a fi simplificată, funcţia logică trebuie determinată.

Pe baza tabelului de adevăr o funcţie logică se determină relativ simplu, după următorul algoritm:

- Se identifică în tabelul de adevăr liniile în care valoarea variabilei de ieşire **f** este **1**;
- Se face produsul variabilelor de intrare de pe liniile respective (câte un produs pentru fiecare linie);
- Forma algebrică a funcţiei logice **f** este suma acestor produse.

OBSERVAŢII:

- Dacă pe o linie a tabelului de adevăr, valoarea logică a unei variabile de intrare este **0** în expresie produsului apare forma negată a variabilei respective;
- Dacă pe o linie a tabelului de adevăr, valoarea logică a unei variabile de intrare este **1** în expresie produsului apare forma normală a variabilei respective.

Exemplu: Deducerea expresiei funcţiei logice care are următorul tabel de adevăr:

Dec	Hex	A	B	C	Fn	
0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	0	
2	2	0	1	0	0	
3	3	0	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
4	4	1	0	0	0	
5	5	1	0	1	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
6	6	1	1	0	1	$A\cdot B\cdot\overline{C}$
7	7	1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C$

$$f=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C$$

În cele se urmează se va prezenta prin câteva exemple determinarea unei funcţii logice pornind de la tabelul de adevăr.

EXEMPLUL 1.

Dec	Hex	A	B	C	Fn	
0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
2	2	0	1	0	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
3	3	0	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
4	4	1	0	0	1	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
5	5	1	0	1	0	
6	6	1	1	0	1	$A\cdot B\cdot\overline{C}$
7	7	1	1	1	0	

$$f=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot\overline{C}$$

EXEMPLUL 2.

Dec	Hex	A	B	C	D	Fn	
0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	
2	2	0	0	1	0	0	
3	3	0	0	1	1	0	
4	4	0	1	0	0	0	
5	5	0	1	0	1	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$
6	6	0	1	1	0	0	
7	7	0	1	1	1	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$
8	8	1	0	0	0	0	
9	9	1	0	0	1	0	
10	A	1	0	1	0	1	$\rightarrow A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D}$
11	B	1	0	1	1	1	$\rightarrow A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D$
12	C	1	1	0	0	0	
13	D	1	1	0	1	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$
14	E	1	1	1	0	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}$
15	F	1	1	1	1	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot C\cdot D$

$$f = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D} + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D +$$
$$+ A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D$$

EXEMPLUL 3.

Dec	Hex	A	B	C	D	Fn	
0	0	0	0	0	0	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot \overline{D}$
1	1	0	0	0	1	0	
2	2	0	0	1	0	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D}$
3	3	0	0	1	1	0	
4	4	0	1	0	0	0	
5	5	0	1	0	1	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$
6	6	0	1	1	0	0	
7	7	0	1	1	1	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$
8	8	1	0	0	0	1	$\rightarrow A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot \overline{D}$
9	9	1	0	0	1	0	
10	A	1	0	1	0	1	$\rightarrow A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D}$
11	B	1	0	1	1	0	
12	C	1	1	0	0	0	
13	D	1	1	0	1	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$
14	E	1	1	1	0	0	
15	F	1	1	1	1	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot C\cdot D$

$$f = \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot \overline{D} + \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D +$$
$$+ A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}\cdot \overline{D} + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D} + A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot D$$

EXEMPLUL 4.

Dec	Hex	A	B	C	D	Fn	
0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	
2	2	0	0	1	0	0	
3	3	0	0	1	1	0	
4	4	0	1	0	0	0	
5	5	0	1	0	1	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$
6	6	0	1	1	0	0	
7	7	0	1	1	1	1	$\rightarrow \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$
8	8	1	0	0	0	0	
9	9	1	0	0	1	0	
10	A	1	0	1	0	1	$\rightarrow A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D}$
11	B	1	0	1	1	1	$\rightarrow A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D$
12	C	1	1	0	0	0	
13	D	1	1	0	1	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$
14	E	1	1	1	0	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D}$
15	F	1	1	1	1	1	$\rightarrow A\cdot B\cdot C\cdot D$

$$f = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D} + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot D +$$
$$+ A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot \overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D$$

2.4.2 MINIMIZAREA FUNCŢIILOR LOGICE

Minimizarea unei funcţii logice se poate realiza prin:

- ***metoda analitică*** – care se bazează pe simplificarea expresiei unei funcţii logice pe baza axiomelor şi teoremelor algebrei booleene;
- ***metoda diagramelor Veitch – Karnaugh*** – care transpune axiomele şi teoreme algebrei booleene pe reprezentare funcţiei cu diagrame Karnaugh.

În cele se urmează se va explica prin câteva exemple simplificarea funcţiilor logice prin ambele metode.

EXEMPLUL 1. Minimizarea funcţiei $f = \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C$

1.1 Metoda analitică

$$f = \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C = B\cdot C\cdot\underbrace{(\overline{A} + A)}_{1} + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} =$$

$$= B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} = C\cdot\underbrace{(B + \overline{B}\cdot A)}_{(B + A)} + A\cdot B\cdot\overline{C} = C\cdot(B + A) + A\cdot B\cdot\overline{C} =$$

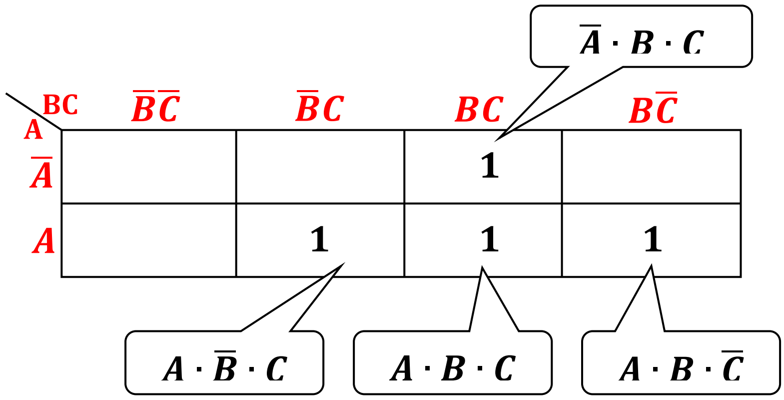
$$= C\cdot B + C\cdot A + A\cdot B\cdot\overline{C} = C\cdot B + A\cdot\underbrace{(C + \overline{C}\cdot B)}_{(C + B)} = C\cdot B + A\cdot(C + B) = B\cdot C + A\cdot C + A\cdot B$$

Prin metoda analitica se obţine în urma minimizării funcţia: **f = A•B + A•C + B•C**

1.2 Metoda diagramei Karnaugh

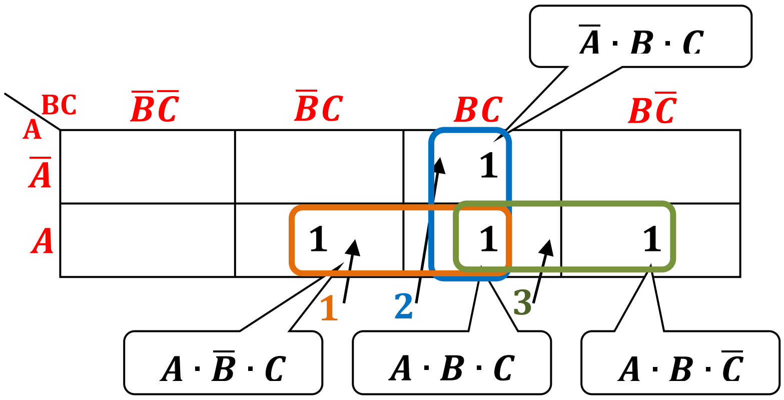
Se parcurg următoarele etape:

- Se scrie expresia funcţiei $f = \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C$;
- Se desenează diagrama Karnaugh;
- În celulele diagramei se introduc valorile de **1** corespunzător poziţiei fiecărui produs al sumei funcţiei **f** (coordonatele celulelor pentru funcţia cu 3 variabile sunt prezentate în **figura 2.3** din secţiunea **2.3.2**);



- Identificăm grupuri de celule alăturate care conţin valoarea 1.

- **OBSERVAŢII:**
  - Fiecare grup trebuie să conţină **două sau patru celule adiacente**;
  - Celule adiacente au o latură comună pe verticală sau pe orizontală şi diferă printr-o singură variabilă;
  - Se consideră adiacente şi celulele da la capetele opuse ale unei linii sau coloane;
  - celulă poate face parte din mai multe grupuri;
  - În diagrama de mai jos au fost identificate **3 grupuri** de câte două celule;



- Se caută variabila sau variabilele comune pentru fiecare grup şi scriem pentru fiecare grup în parte, variabila (sau produsul de variabile dacă sunt mai multe) ca rezultat boolean. Rezultatul final este suma rezultatelor fiecărui grup;
- În diagrama de mai sus:
  - pentru grupul 1 sunt comune variabilele **A** şi **C** **- rezultat logic A·C;**
  - pentru grupul 2 sunt comune variabilele **B** şi **C** **– rezultat logic B·C;**
  - pentru grupul 3 sunt comune variabilele **A** şi **B** **– rezultat logic A·B;**
- Rezultatul final este : **f = A•B + A•C + B•C.**

EXEMPLUL 2. Minimizarea funcţiei :

$$f = A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + A\cdot B\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}$$

2.1 Metoda analitică

$$f = A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + A\cdot B\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} = A\cdot\bar{C}\cdot\underbrace{(\bar{B}+B)}_{1} +$$

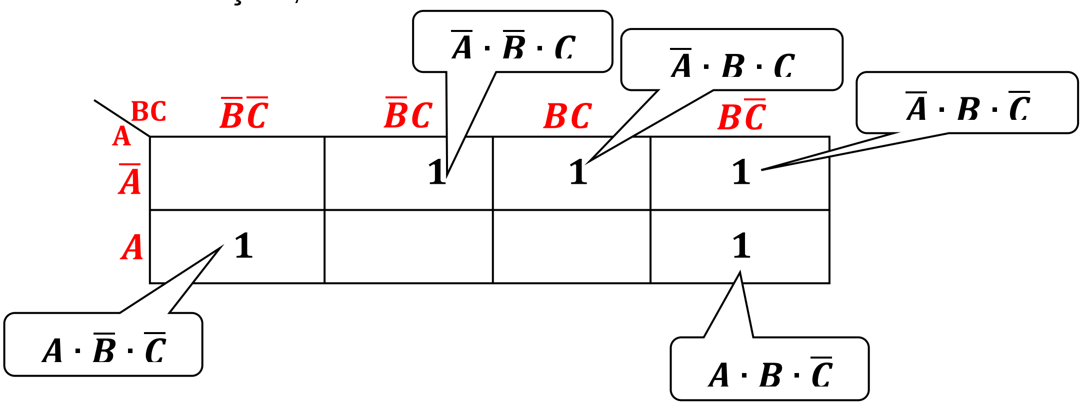
$$+\bar{A}\cdot C\cdot\underbrace{(\bar{B}+B)}_{1} + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} = A\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} = A\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot\underbrace{(C + B\cdot\bar{C})}_{(C+B)} =$$

$$= A\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot C + \bar{A}\cdot B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f = A\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot C + \bar{A}\cdot B}$$

2.2 Metoda diagramei Karnaugh

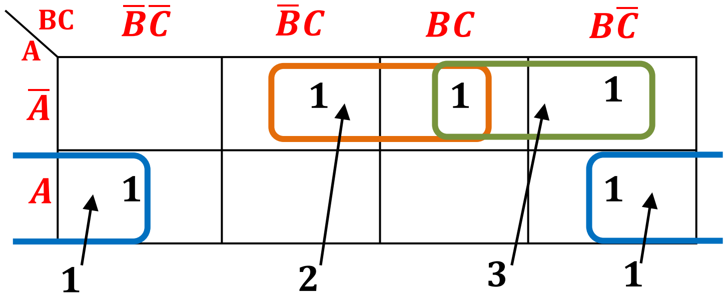
Se parcurg etapele prezentate la punctul 1.2

- În celulele diagramei se introduc valorile de **1** corespunzătoare poziţiei fiecărui produs al sumei funcţiei **f**;



- Identificăm grupuri de celule alăturate care conţin valoarea 1;

  În diagrama de mai jos au fost identificate **3 grupuri** de câte două celule



- În diagrama de mai sus:
  - pentru grupul **1** sunt comune variabilele ***A*** şi $\bar{C}$ **- rezultat logic** $\boldsymbol{A\cdot\bar{C}}$;
  - pentru grupul **2** sunt comune variabilele $\bar{A}$ şi ***C*** **– rezultat logic** $\boldsymbol{\bar{A}\cdot C}$;
  - pentru grupul **3** sunt comune variabilele $\bar{A}$ şi ***B*** **– rezultat logic** $\boldsymbol{\bar{A}\cdot B}$;
- Rezultatul final este : $\boldsymbol{f = A\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot C + \bar{A}\cdot B}$.

În exemplele următoare minimizarea unei funcţii logice se va prezenta numai prin metoda diagramei Karnaugh .

EXEMPLUL 3. Minimizarea funcţiei :

$$f = \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D + \bar{A}\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D} + A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D +$$
$$+ A\cdot B\cdot C\cdot\bar{D} + A\cdot B\cdot C\cdot D$$

Se observă că funcţia are **patru** variabile de intrare ⇒ diagrama Karnaugh are 16 celule.

- În celulele diagramei se introduc valorile de **1** corespunzătoare poziţiei fiecărui produs al sumei funcţiei **f**.

Deoarece funcţia are **7 termeni**, pe diagramă în **7 celule** va fi valoarea logică **1.**

Fiecare termen al funcţiei se plasează la adresa corespunzătoare din celulă (vezi **figura 2.4** din secţiunea **2.3.2**). Primele două caractere ale unui termen indică linia iar ultimele două caractere ale termenului indică coloana la intersecţia cărora se plasează caracterul **1** în tabel .**Exemple:**

- termenul $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D$ se plasează la intersecţia **liniei** $\bar{A} \cdot B$ cu **coloana** $\bar{C} \cdot D$

- termenul $A \cdot B \cdot C \cdot D$ se plasează la intersecţia **liniei** $A \cdot B$ cu **coloana** $C \cdot D$

$A \cdot B$ \ $C \cdot D$	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$				
$\bar{A} \cdot B$		1	1	
$A \cdot B$		1	1	1
$A \cdot \bar{B}$			1	1

A \ C	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$				
$\bar{A} \cdot B$		1	1	
$A \cdot B$		1	1	1
$A \cdot \bar{B}$			1	1

1 2

- Identificăm grupuri de celule alăturate care conţin valoarea 1

În general, pe o diagramă Karnaugh se încearcă formarea grupurile cu dimensiunea pătratelor cât mai mare (cu cât dimensiunea pătratului este mai mare cu atât se elimină mai multe caractere din rezultatul final)

În diagrama de mai sus s-au format **2** grupuri cu **pătrate** care au **4 celule** (latura = 2).

- În diagrama de mai sus:
  - pentru grupul **1** sunt comune variabilele ***B*** şi ***D*** **- rezultat logic *B*·*D***
  - pentru grupul **2** sunt comune variabilele ***A*** şi ***C*** **– rezultat logic *A*·*C***
- Rezultatul final este : ***f* = *A* · *C* + *B* · *D***

EXEMPLUL 4. Minimizarea funcţiei :

$$f = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} +$$
$$+ \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot D$$

- În celulele diagramei se introduc valorile de **1** corespunzătoare poziţiei fiecărui produs al sumei funcţiei **f**;

Deoarece funcţia are **8 termeni**, pe diagramă în **8 celule** va fi valoarea logică **1.**

Fiecare termen al funcţiei se plasează la adresa corespunzătoare din celulă (vezi **figura 2.6** din secţiunea **2.3.2**).

$A\cdot B$ \ $C\cdot D$	$\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{C}\cdot D$	$C\cdot D$	$C\cdot\overline{D}$
$\overline{A}\cdot\overline{B}$	1			1
$\overline{A}\cdot B$		1	1	
$A\cdot B$		1	1	
$A\cdot\overline{B}$	1			1

A \ C	$\overline{C}\cdot\overline{D}$	$\overline{C}\cdot D$	$C\cdot D$	$C\cdot\overline{D}$
$\overline{A}\cdot\overline{B}$	1			1
$\overline{A}\cdot B$		1	1	
$A\cdot B$		1	1	
$A\cdot\overline{B}$	1			1

- Identificăm grupuri de celule alăturate care conţin valoarea **1**;

Celulele din cele patru colţuri ale diagramei dacă au valoarea **1** formează un **pătrat**.

- În diagrama de mai sus s-au format **două** grupuri de **două pătrate** cu câte **4 celule**:
    - pentru pătratul format de celulele din mijlocul diagramei sunt comune variabilele ***B*** (pe cele 2 linii) şi D (pe cele 2 coloane) **- rezultat logic $B\cdot D$**
    - pentru pătratul format de celulele din colţurile diagramei sunt comune variabilele $\overline{B}$ (pe cele 2 linii) şi $\overline{D}$ (pe cele 2 coloane) **– rezultat logic $\overline{B}\cdot\overline{D}$**
- Rezultatul final este : ***f* = $B\cdot D + \overline{B}\cdot\overline{D}$**.

REZUMATUL CAPITOLULUI

- **TEOREMELE ALGEBREI LOGICE:**
    - $A + 0 = 0 + A = A \qquad A \bullet 1 = 1 \bullet A = A;$
    - $A + \overline{A} = 1 \qquad A \bullet \overline{A} = 0;$
    - $A + A + ... + A = A \qquad A \bullet A \bullet .... \bullet A = A;$
    - $A + 1 = 1 \qquad A \bullet 0 = 0;$
    - $A + A \bullet B = A \qquad A \bullet (A + B) = A;$
    - $\overline{A} + \overline{A} \bullet B = \overline{A} \qquad \overline{A} \bullet (\overline{A} + B) = \overline{A};$
    - $A + \overline{A} \bullet B = A + B \qquad A \bullet (\overline{A} + B) = A \bullet B;$
    - $\overline{\overline{A}} = A$
    - $\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B} \qquad \overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B};$
    - $A + B = \overline{\overline{A} \bullet \overline{B}} \qquad A \bullet B = \overline{\overline{A} + \overline{B}};$
- **PRINCIPALELE FUNCȚII LOGICE:**
    - **NU (NOT)** $Y = \overline{A};$
    - **SAU (OR)** $Y = A + B;$
    - **ȘI (AND)** $Y = A \bullet B;$
    - **SAU-NU (NOR)** $Y = \overline{A + B};$
    - **ȘI-NU (NAND)** $Y = \overline{A \bullet B};$
    - **SAU-EXCLUSIV (XOR)** $Y = A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B};$
    - **SAU-EXCLUSIV- NEGAT (NXOR)** $Y = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B};$
- **SIMPLIFICAREA funcțiilor logice pe baza tabelului de adevăr se face după următorul algoritm:**
    - Se identifică în tabelul de adevăr liniile în care valoarea variabilei de ieşire **f** este **1**;
    - Se face produsul variabilelor de intrare de pe liniile respective (câte un produs pentru fiecare linie);
    - Forma algebrică a funcţiei logice **f** este suma acestor produse.
- **OBSERVAŢII:**
    - Dacă pe o linie a tabelului de adevăr, valoarea logică a unei variabile de intrare este **0** în expresie produsului apare forma negată a variabilei respective;
    - Dacă pe o linie a tabelului de adevăr, valoarea logică a unei variabile de intrare este **1** în expresie produsului apare forma normală a variabilei respective.

- Minimizarea unei funcţii logice se poate realiza prin:
    - ***metoda analitică*** – care se bazează pe simplificarea expresiei unei funcţii logice pe baza axiomelor şi teoremelor algebrei booleene;
    - ***metoda diagramelor Veitch – Karnaugh*** – care transpune axiomele şi teoreme algebrei booleene pe reprezentare funcţiei cu diagrame Karnaugh.

EVALUAREA CUNOȘTINȚELOR

1.Deduceți expresia funcției logice căreia îi corespunde tabelului de adevăr:

a.

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

b.

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

c.

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2.Simplificați următoarele funcții logice utilizând teoremele algebrei logice:

a. $f = A \cdot A \cdot B + C \cdot \overline{C} \cdot D$;

b. $f = B \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{C} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$;

c. $f = \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot C$;

d. $f = (A + B) \cdot (\overline{A} + C)$;

e. $f = A \cdot B + A \cdot (B + C) + B \cdot (B + C)$;

f. $f = (A + \overline{A}) \cdot (A \cdot B + A \cdot B \cdot \overline{C})$;

g. $f = \overline{(\overline{\overline{A} + \overline{B}}) + (\overline{A + \overline{B}})}$;

h. $f = A \cdot B \cdot (\overline{\overline{A} + B \cdot C})$;

i. $f = (A + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{C}})$;

j. $f = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + (A + \overline{B}) \cdot A$;

3. Simplificați următoarele funcții logice utilizând metoda diagramei Karnaugh:

a. $f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$;

b. $f = \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$;

c. $f = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$.