

# Lecția 3

## Diagrame Veitch-Karnaugh

### Noțiuni teoretice

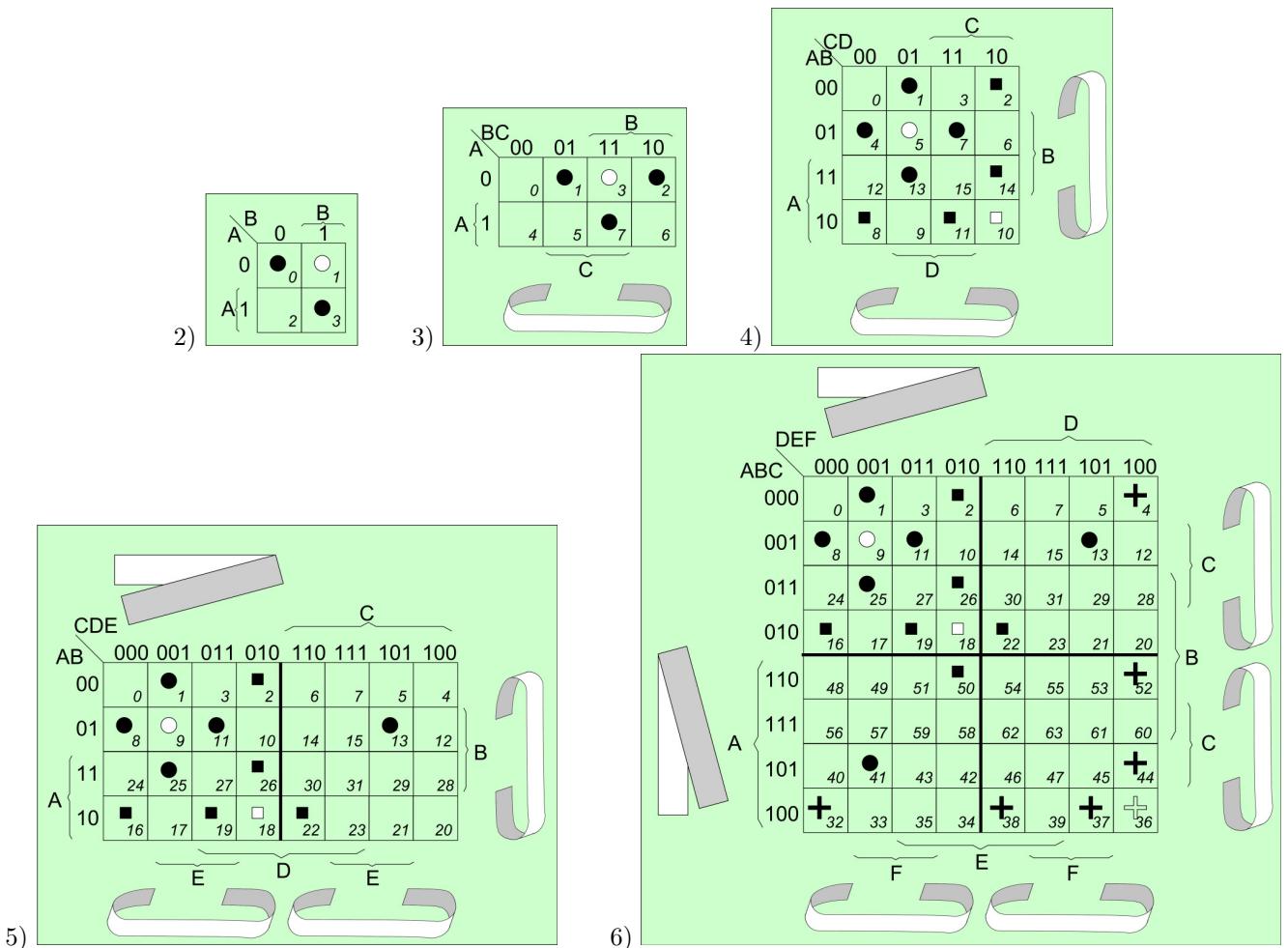
Diagramele Veitch-Karnaugh (V-K) sunt o modalitate de reprezentare grafică a funcțiilor logice. Pentru o funcție de  $N$  variabile, diagrama corespunzătoare are  $2^N$  căsuțe. Dispunerea căsuțelor se face astfel încât căsuțele vecine să aibă coduri care diferă printr-un singur bit. Din acest motiv, codurile căsuțelor, pe orizontală și verticală sunt în cod Gray, nu în binar. Codul Gray are proprietatea că două coduri binare succesive diferă printr-un singur bit și este un cod ciclic.

2 biți		3 biți						4 biți									
Cod Binar	Cod Gray	Cod Binar			Cod Gray			Cod Binar		Cod Gray							
$B_1$	$B_0$	$G_1$	$G_0$	$B_2$	$B_1$	$B_0$	$G_2$	$G_1$	$G_0$	$B_3$	$B_2$	$B_1$	$B_0$	$G_3$	$G_2$	$G_1$	$G_0$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
				1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
				1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
				1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
				1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
										1	0	0	0	1	1	0	0
										1	0	0	1	1	1	0	1
										1	0	1	0	1	1	1	1
										1	0	1	1	1	1	0	0
										1	1	0	0	1	0	1	0
										1	1	0	1	0	1	1	1
										1	1	1	0	1	0	0	1
										1	1	1	1	1	0	0	0

Fiecare căsuță are un număr de căsuțe vecine egal cu numărul de variabile de intrare. Căsuțele vecine au un cod care diferă cu un bit față de căsuța de referință. Fizic, pe diagramă, căsuțele vecine sunt adiacente pe orizontală sau verticală (nu și pe diagonală). Pentru a observa toate căsuțele vecine, diagramele V-K trebuie considerate atât rotite în jurul axelor orizontale și verticale, cât și pliate, așa cum prezintă simbolurile grafice din figura 1.

Figura 1 prezintă diagramele V-K pentru 2, 3, 4, 5 și 6 variabile. Se observă marcarea codurilor Gray pe orizontală și verticală, marcarea suprafețelor asociate variabilelor și a modului de rotire și pliere a diagrameelor. În fiecare căsuță este marcat codul numeric asociat căsuței. De asemenea, sunt marcate câteva exemple de căsuțe împreună cu căsuțele vecine din punct de vedere al codurilor (și vecine fizic, dacă diagramele se rotesc și se pliază).

Diagramele Veitch-Karnaugh (V-K) asigură suportul pentru minimizarea funcțiilor logice. Minimizarea funcțiilor logice (scrierea expresiilor acestora cu un număr minim de litere) determină un cost scăzut al implementării lor cu circuite electronice.



**Figura 1** Diagrame V-K pentru 2, 3, 4, 5 și 6 variabile.

Un *minterm* este un termen produs în care apar toate variabilele de intrare, negative sau ne-negative. Pe o diagramă V-K, un minterm care apare în expresia FCND/SOP este asociat cu o căsuță ce conține valoarea 1.

Un *implicant prim* este un termen produs care conține doar anumite variabilele de intrare, negative sau ne-negative. Pe o diagramă V-K, un implicant prim asociat unei suprafețe având toate câmpurile cu valoarea 1.

Un *implicant prim esențial* este un implicant prim care acoperă în mod unic un câmp cu valoarea 1 și este obligatoriu să fie prezent în expresia minimă a funcției.

Minimizarea funcțiilor logice presupune parcurgerea următoarelor etape:

- Se acoperă toate căsuțele cu valoare 1 cu cel puțin o suprafață. Suprafețele sunt dreptunghiulare cu laturi de dimensiuni puteri ale lui 2 ( $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, \dots$ ). O suprafață conține căsuțe vecine (din punct de vedere al codurilor asociate acestora).

Căsuțele cu valoarea 1 se acoperă cu un număr minim de suprafețe, având dimensiune maximă.

- Din considerarea suprafețelor care acoperă în întregime toate căsuțele cu valoare 1, se obține expresia minimă a funcției.

O suprafață de o căsuță generează un minterm în expresia minimă a funcției.

O suprafață de două căsuțe generează un implicant prim în expresia minimă a funcției. Implicantul prim este un produs al tuturor variabilelor de intrare cu excepția celei care are valoare 0 într-o căsuță și valoare 1 în cealaltă căsuță.

La fiecare dublare a suprafeței, din implicantul prim dispare o variabilă de intrare (cea care are valoare 1 în jumătate din căsuțele suprafeței și valoare 0 în cealaltă jumătate).

O suprafață ce acoperă jumătate din diagrama V-K va genera în expresia finală a funcției un "produs" cu o singură literă (variabila de intrare care are aceeași valoare în toate căsuțele suprafeței).

- 
3. Pentru determinarea implicantului prim asociat unei suprafețe se compară suprafața considerată cu regiunile definite de fiecare variabilă de intrare în parte. Pot exista 3 cazuri:
- Suprafața cade integral într-o regiune asociată cu o variabilă: în acest caz, în implicantul prim se preia variabila de intrare.
  - Suprafața cade integral în afara unei regiuni asociate cu o variabilă: în acest caz, în implicantul prim se preia variabila de intrare negată.
  - Suprafața cade jumătate în interiorul unei regiuni asociate cu o variabilă, jumătate în exteriorul acesteia: în acest caz, din implicantul prim lipsește variabila de intrare.

Pentru o funcție cu  $N$  variabile de intrare, o diagramă completă are  $2^N$  căsuțe cu valori 1 sau 0 (prin lipsa unei valori se presupune valoarea opusă celei ce apare în diagramă). Pentru un număr mare de intrări (mai mare decât 5) diagramele pot deveni mari și greu de operat cu ele. Din acest motiv, se poate micșora dimensiunea diagramei V-K prin introducerea în căsuțe a unor funcții de una sau mai multe variabile de intrare. Variabilele ale căror nume se regăsesc în interiorul diagramelor V-K se numesc *variabile reziduu*.

Un caz particular îl constituie *funcțiile incomplet definite* care au valori indiferente pentru anumite combinații ale intrărilor. În aceste cazuri, căsuțele asociate în diagramele V-K vor conține valoare indiferentă, marcată cu  $X$  (Engl. "don't care"). Pentru acțiunea de minimizare, valorile indiferente pot fi considerate ca având valori 1 sau 0 astfel încât să se acopere căsuțele ce conțin 1 cu suprafețe cât mai mari și cât mai puține.

Minimizarea funcțiilor cu variabile reziduu incomplet definite se realizează în următoarele etape:

- Se consideră căsuțele care au valori logice 1 și cele cu valori indiferente. Se determină formele minime ale suprafețelor definite.
  - Căsuțele cu valoare 1 se consideră a fi cu valoare indiferentă. Se consideră căsuțele care conțin aceeași funcție reziduu și cele cu valori indiferente. Implicantii primi rezultați vor fi considerați în conjuncție (AND) cu funcția reziduu.
  - Forma minimă a funcției se obține prin aplicarea funcției OR asupra tuturor implicantilor primi obținuți la cele două etape anterioare.
  - În cazuri particulare, dacă funcțiile reziduu au mai mult de o variabilă, expresia finală se poate reduce prin prelucrări analitice.
- 

## 3.2 Pentru cei ce vor doar să promoveze examenul

- Să se minimizeze următoarele funcții de 3 intrări, utilizând diagrame V-K:
    - $F_a(A, B, C) = \sum(0, 2, 3, 4, 6)$
    - $F_b(A, B, C) = \sum(3, 5, 6, 7)$
    - $F_c(A, B, C) = \sum(0, 1, 5, 7)$
  - Să se minimizeze următoarele funcții de 4 intrări, utilizând diagrame V-K:
    - $F_a(A, B, C, D) = \sum(1, 5, 9, 15)$
    - $F_b(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$
    - $F_c(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15)$
  - Să se simplifice expresiile utilizând diagrame V-K:
    - $F_a = \overline{X} \cdot \overline{Z} + Y \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot Z$
    - $F_b = \overline{A} \cdot B + \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
    - $F_c = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
  - Să se simplifice funcțiile incomplet definite, utilizând diagrame V-K:
    - $F_a(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 5, 7, 9, 15) + d(4, 6, 12, 13)$
    - $F_b(A, B, C) = \sum(3, 5, 6) + d(0, 7)$
-

### 3.3 Pentru cei ce vor să învețe

1. Să se minimizeze următoarele funcții utilizând diagrame V-K:

a)  $F_a(A, B, C) = \sum_0^7(0, 2, 3, 4, 5, 7)$

b)  $F_b(A, B, C, D) = \sum_0^{15}(0, 1, 4, 5, 9, 11, 13, 15)$

c)  $F_c(A, B, C, D, E) = \sum_0^{31}(0, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 24, 28)$

*Soluție*

Diagramele V-K asociate funcțiilor sunt prezentate în figura 5.2.

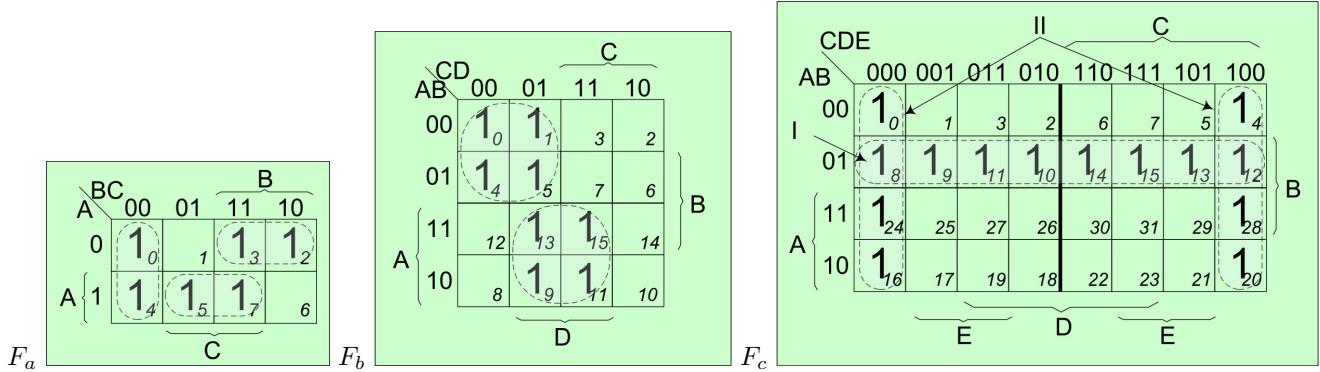


Figura 5.2 Diagrame V-K pentru problema 1.

a)  $F_a(A, B, C) = \sum_0^7(0, 2, 3, 4, 5, 7) = \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot C + \overline{A} \cdot B$

b)  $F_b(A, B, C, D) = \sum_0^{15}(0, 1, 4, 5, 9, 11, 13, 15) = \overline{A} \cdot \overline{C} + A \cdot D$

c)  $F_c(A, B, C, D, E) = \sum_0^{31}(0, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 24, 28) = \overline{A} \cdot B + \overline{D} \cdot \overline{E}$

2. Să se minimizeze următoarele funcții de 3 intrări, utilizând diagrame V-K:

a)  $F_a(A, B, C) = \sum(0, 2, 6, 7)$

b)  $F_b(A, B, C) = \sum(0, 1, 2, 3, 7)$

c)  $F_c(A, B, C) = \sum(1, 2, 3, 6, 7)$

d)  $F_d(A, B, C) = \sum(3, 4, 7)$

e)  $F_e(A, B, C) = \sum(1, 3, 5, 6, 7)$

f)  $F_f(A, B, C) = \sum(1, 3, 6, 7)$

g)  $F_g(A, B, C) = \sum(3, 5, 6, 7)$

h)  $F_h(A, B, C) = \sum(0, 1, 2, 4, 6)$

i)  $F_i(A, B, C) = \sum(0, 3, 4, 5, 7)$

j)  $F_j(A, B, C) = \prod(0, 1, 6, 7)$

k)  $F_k(A, B, C) = \prod(0, 2, 4, 5, 6)$

l)  $F_l(A, B, C) = \prod(1, 3, 4, 5, 7)$

*Soluție*

Diagramele V-K asociate funcțiilor sunt prezentate în figura 5.3.

a)  $F_a(A, B, C) = \sum(0, 2, 6, 7) = \overline{A} \cdot \overline{C} + A \cdot B$

b)  $F_b(A, B, C) = \sum(0, 1, 2, 3, 7) = \overline{A} + B \cdot C$

f)  $F_f = \sum(1, 3, 6, 7) = \overline{A} \cdot C + A \cdot B$

g)  $F_g = \sum(3, 5, 6, 7) = B \cdot C + A \cdot C + A \cdot B$

3. Să se minimizeze următoarele funcții de 4 intrări, utilizând diagrame V-K:

a)  $F_a(A, B, C, D) = \sum(6, 7, 8, 10, 12, 14)$

b)  $F_b(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14)$

c)  $F_c(A, B, C, D) = \prod(2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15)$

d)  $F_d(A, B, C, D) = \sum(1, 5, 9, 12, 13, 15)$

e)  $F_e(A, B, C, D) = \sum(1, 4, 5, 6, 12, 14, 15)$

f)  $F_f(A, B, C, D) = \sum(0, 1, 2, 4, 5, 7, 11, 15)$

g)  $F_g(A, B, C, D) = \sum(2, 3, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

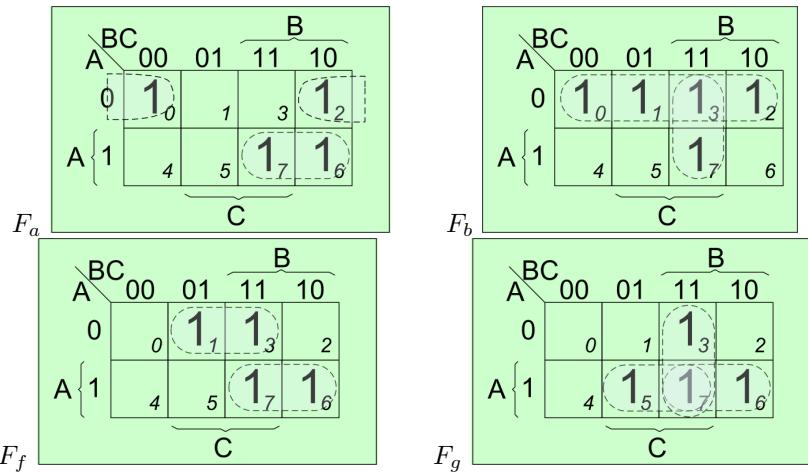


Figura 5.3 Diagramme V-K cu 8 căsuțe, pentru problema 2.

- h)  $F_h(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 15)$
- i)  $F_i(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 5, 8, 9, 11, 12, 13)$
- j)  $F_j(A, B, C, D) = \sum(3, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15)$
- k)  $F_k(A, B, C, D) = \sum(1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15)$
- l)  $F_l(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12)$
- m)  $F_m(A, B, C, D) = \sum(0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15)$
- n)  $F_n(A, B, C, D) = \prod(0, 1, 4, 5, 9, 10)$
- o)  $F_o(A, B, C, D) = \prod(0, 3, 4, 6, 7, 11, 15)$
- p)  $F_p(A, B, C, D) = \prod(0, 1, 3, 4, 5, 12, 13)$

Soluție

Diagrammele V-K asociate funcțiilor sunt prezentate în figura 5.4.

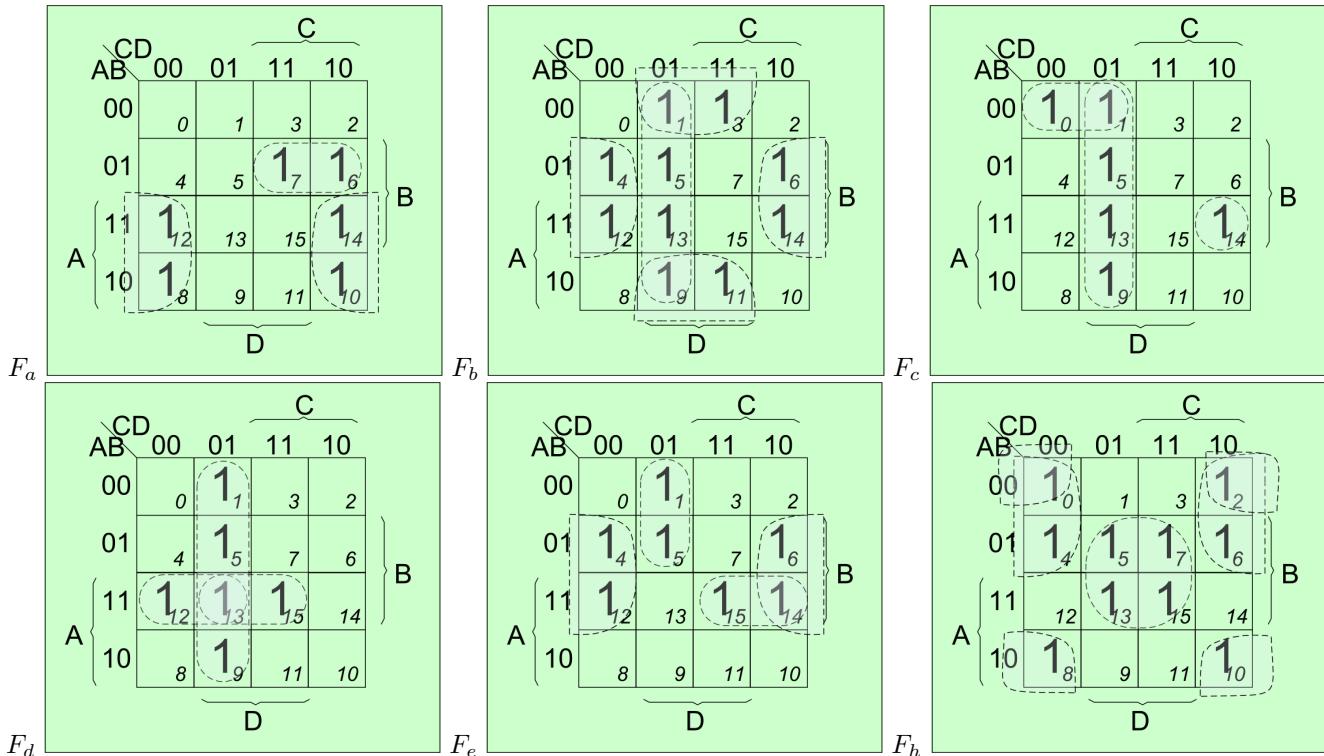


Figura 5.4 Diagramme V-K cu 16 căsuțe, pentru problema 3.

- a)  $F_a(A, B, C, D) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot \overline{D} = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{D}$   
 b)  $F_b(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14) = B \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot D + \overline{C} \cdot D$  sau  
 $F_b(A, B, C, D) = B \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot D + B \cdot \overline{C}$   
 c)  $F_c(A, B, C, D) = \prod(2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15) = \sum(0, 1, 5, 9, 13, 14) = \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$   
 d)  $F_d = \sum(1, 5, 9, 12, 13, 15) = \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot D$   
 e)  $F_e = \sum(1, 4, 5, 6, 12, 14, 15) = B \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C$   
 h)  $F_h = \sum(0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 15) = B \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot \overline{D}$  sau  
 $F_h = B \cdot D + \overline{A} \cdot B + \overline{B} \cdot \overline{D}$

4. Să se minimizeze următoarele funcții de 5 intrări, utilizând diagrame V-K:

- a)  $F_a(A, B, C, D, E) = \prod(0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 26, 27)$   
 b)  $F_b(A, B, C, D, E) = \sum(0, 2, 8, 10, 16, 18, 24, 26)$   
 c)  $F_c(A, B, C, D, E) = \sum(0, 1, 4, 5, 16, 17, 21, 25, 29)$

5. Să se identifice implicantii primi esențiali pentru următoarele expresii:

- a)  $F_a(A, B, C, D) = \sum(1, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$   
 b)  $F_b(A, B, C, D, E) = \sum(5, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 25, 29, 31)$   
 c)  $F_c(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15)$   
 d)  $F_d(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$   
 e)  $F_e(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$   
 f)  $F_f(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 15)$   
 g)  $F_g(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$   
 h)  $F_h(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$

*Soluție*

- a)  $F_a: A \cdot \overline{B}, \overline{C} \cdot D, B \cdot D$   
 b)  $F_b: \overline{A} \cdot B \cdot C, A \cdot \overline{B} \cdot C, C \cdot E, B \cdot \overline{D} \cdot E$

6. Să se simplifice expresiile utilizând diagrame V-K.

- a)  $F_a = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$   
 b)  $F_b = \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C}$   
 c)  $F_c = \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$   
 d)  $F_d = X \cdot Y + X \cdot Z + \overline{X} \cdot Y \cdot Z$   
 e)  $F_e = X \cdot Z + \overline{W} \cdot X \cdot \overline{Y} + W \cdot X \cdot Y + \overline{W} \cdot Y \cdot Z + W \cdot \overline{Y} \cdot Z$   
 f)  $F_f = \overline{B} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C$   
 g)  $F_g = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D + B \cdot \overline{C} \cdot D$   
 h)  $F_h = A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot D + A \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$   
 i)  $F_i = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{E} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E} + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + C \cdot D \cdot \overline{E} + B \cdot D \cdot \overline{E}$

*Soluție*

Suprafețele asociate "produselor" se plasează în diagramele V-K. Apoi se minimizează funcțiile prin acoperirea căsușelor cu 1 cu un număr minim de suprafețe, cât mai mari. Diagramele V-K asociate funcțiilor sunt prezentate în figura 5.5.

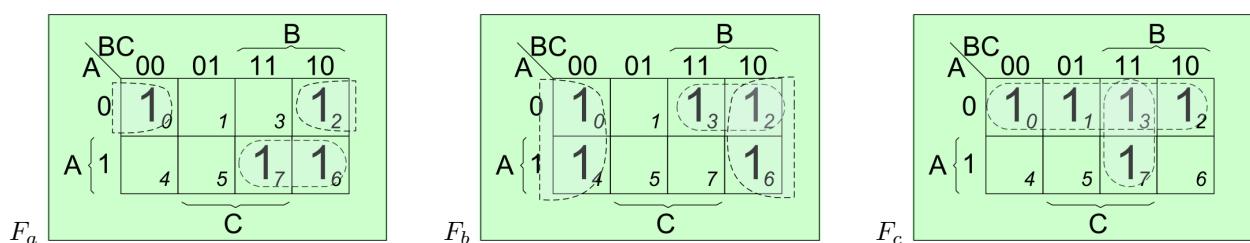


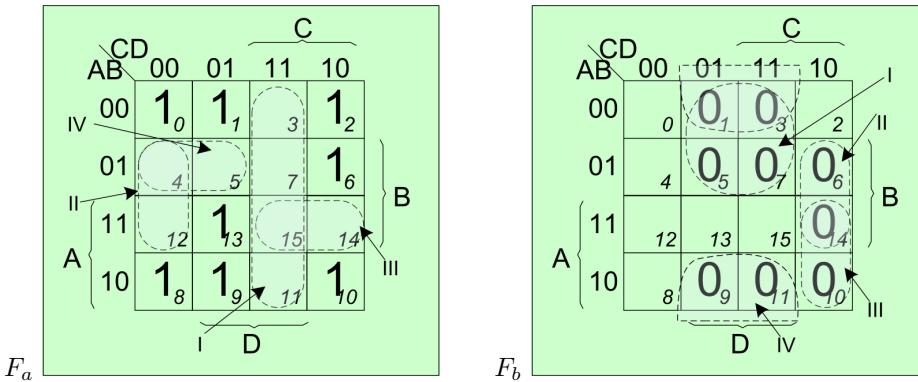
Figura 5.5 Diagramme V-K pentru problema 6.

- a)  $F_a = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{C}$   
 b)  $F_b = \overline{C} + \overline{A} \cdot B$   
 c)  $F_c = B \cdot C + \overline{A}$
7. Să se simplifice funcțiile sub forma de produs de sume, utilizând diagrame V-K.
- a)  $F_a(A, B, C, D) = \sum(0, 1, 2, 6, 8, 9, 10, 13)$   
 b)  $F_b(A, B, C, D) = \prod(1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14)$

### Soluție

a) Funcția în forma canonica conjunctivă (sumă de produse) conține indecșii mintermilor (produse ce conțin toate variabilele de intrare, negate și ne-negate). Dacă într-un minterm variabila este negată, se consideră căsuța cu index egal cu 0, dacă variabila este ne-negată, atunci se consideră căsuța cu index egal cu 1. De exemplu  $m_6 = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$  conține 1 în căsuța cu index  $6|_{10} = 0110|_2$ .

Simplificarea funcțiilor sub formă de produs de sume presupune minimizarea suprafețelor căsuțelor ce conțin 0 (nu conțin 1). Diagrama V-K asociată este prezentată în figura 5.6-a. Rezultă forma minimă a funcției:  $F_a = I \cdot II \cdot III \cdot IV = (\overline{C} + \overline{D}) \cdot (\overline{B} + C + D) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + C)$



b) Funcția în forma canonica disjunctivă (produs de sume) conține indecșii maxtermilor (sume ce conțin toate variabilele de intrare, negate și ne-negate). Dacă într-un maxterm variabila este negată, se consideră căsuța cu index egal cu 1, dacă variabila este ne-negată, atunci se consideră căsuța cu index egal cu 0. De exemplu  $m_9 = \overline{A} + B + C + \overline{D}$  conține 0 în căsuța cu index  $9|_{10} = 1001|_2$ .

Simplificarea funcțiilor sub formă de produs de sume presupune minimizarea suprafețelor căsuțelor ce conțin 0 (nu conțin 1). Diagrama V-K asociată este prezentată în figura 5.6-b. Rezultă forma minimă a funcției:  $F_b = I \cdot II \cdot III \cdot IV = (A + \overline{D}) \cdot (\overline{B} + \overline{C} + D) \cdot (\overline{A} + \overline{C} + D) \cdot (B + \overline{D})$

8. Să se simplifice funcțiile atât sub formă de sumă de produse cât și sub formă de produs de sume, utilizând diagrame V-K. S-au notat cu  $d$  (Engl. "don't care") termenii indiferenți.

- a)  $F_a = A \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot D + \overline{A} \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D$
- b)  $F_b = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{D}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + \overline{D}) \cdot (B + \overline{C} + \overline{D})$
- c)  $F_c = (\overline{A} + \overline{B} + D) \cdot (\overline{A} + \overline{D}) \cdot (A + B + \overline{D}) \cdot (A + \overline{B} + C + D)$
- d)  $F_d = \sum(2, 3, 7, 8, 10, 12, 13)$
- e)  $F_e = \prod(2, 10, 13)$
- f)  $F_f = \sum(2, 6, 11, 13) + d(4, 5, 7, 9, 10, 15)$
- g)  $F_g = \prod(1, 3, 4, 6, 9, 11) + d(0, 2, 5, 10, 12, 14)$

### Soluție

a) În figura 5.7-a este reprezentată diagrama V-K asociată funcției  $F_a$ , dedusă din expresia în care a fost prezentată funcția. Fiecare produs este asociat unei suprafețe în diagrama V-K.

Produsele  $A \cdot \overline{C}$  și  $\overline{B} \cdot D$  sunt asociate unor suprafețe de câte 4 căsuțe deoarece din produse lipsesc două variabile ( $2^2 = 4$ ).

Produsul  $\overline{A} \cdot C \cdot D$  este asociat unei suprafețe de 2 căsuțe deoarece din produs lipsește o singură variabilă ( $2^1 = 2$ ). Produsul  $A \cdot B \cdot C \cdot D$  este asociat unei suprafețe de a căsuță deoarece în produs sunt prezente toate variabilele de intrare, adică nu lipsește nicuna ( $2^0 = 1$ ).

Forma de sumă de produse se obține prin minimizarea suprafețelor cu căsuțe 1, așa ca în figura 5.7-b.

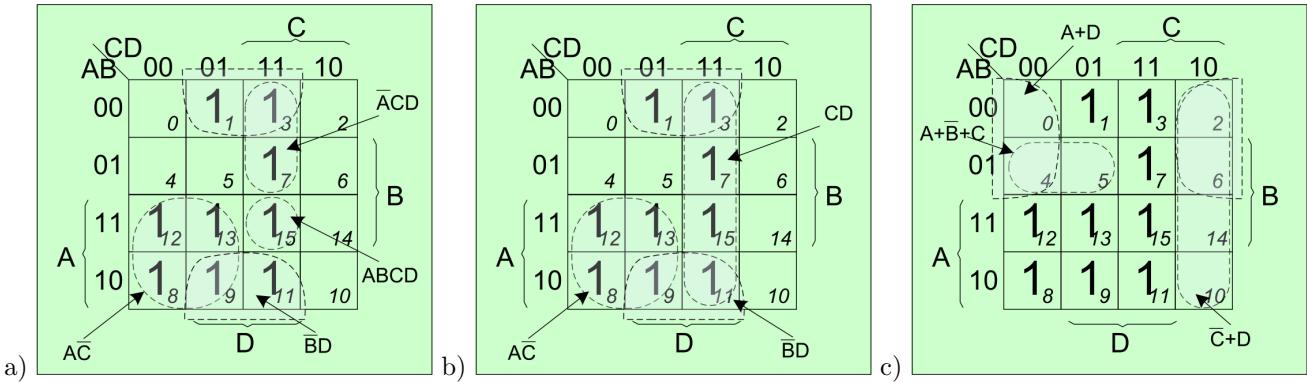
$$F_a = A \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot D + C \cdot D$$

Forma de produs de sume se obține prin minimizarea suprafețelor cu căsuțe 0, așa ca în figura 5.7-c.

$$F_a = (\overline{C} + D) \cdot (A + D) \cdot (A + \overline{B} + D)$$

9. Scrieți următoarele funcții sub formă de produs de sume ale variabilelor de intrare.

a)  $F_a(A, B) = \prod(0, 2, 3)$



**Figura 5.7** Diagrame V-K pentru problema 8, a) forma originală, b) minimizare de 1, c) minimizare de 0.

b)  $F_b(A, B, C) = \prod(1, 3, 4, 6, 7)$

c)  $F_c(A, B, C, D) = \prod(2, 3, 4, 5, 13, 14)$

d)  $F_d(A, B, C, D, E) = \prod(1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 26)$

*Soluție*

a)  $F_a(A, B) = \prod(0, 2, 3) = (A + B) \cdot (\bar{A} + B) \cdot (\bar{A} + \bar{C})$

b)  $F_b(A, B, C) = \prod(1, 3, 4, 6, 7) = (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

c)  $F_c(A, B, C, D) = \prod(2, 3, 4, 5, 13, 14) = (A + B + \bar{C} + D) \cdot (A + B + \bar{C} + \bar{B}) \cdot (A + \bar{B} + C + D) \cdot (A + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot (A + \bar{B} + C + D) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C} + D) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$

10. Transpuneți în diagramă V-K funcțiile următoare. Determinați forma minimă de sumă de produse. Pentru aceleasi funcții, determinați forma minimă de produs de sume.

a)  $F_a(A, B) = \sum(0, 1, 2)$

b)  $F_b(A, B) = \sum(0, 2, 3)$

c)  $F_c(A, B) = \sum(0, 1, 3)$

d)  $F_d(A, B) = \prod(2)$

*Soluție*

a)  $F(A, B) = \sum(0, 1, 2) = \bar{A} + \bar{B}$ , formă identică pentru reprezentarea SOP și POS.

b)  $F(A, B) = \sum(0, 2, 3) = A + \bar{B}$ , formă identică pentru reprezentarea SOP și POS.

11. Să se simplifice funcțiile incomplet definite, utilizând diagrame V-K.

a)  $F_a(A, B, C) = \sum(0, 1, 2, 4, 5) + d(3, 6, 7)$

b)  $F_b(A, B, C) = \sum(4, 6, 7) + d(2, 3, 5)$

c)  $F_c(A, B, C, D) = \sum(0, 6, 8, 13, 14) + d(2, 4, 10)$

d)  $F_d(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 4, 5, 8, 14, 15) + d(7, 10, 13)$

e)  $F_e(A, B, C, D) = \sum(4, 6, 7, 8, 12, 15) + d(2, 3, 5, 10, 11, 14)$

f)  $F_f(A, B, C, D) = \sum(1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14) + d(7)$

*Soluție*

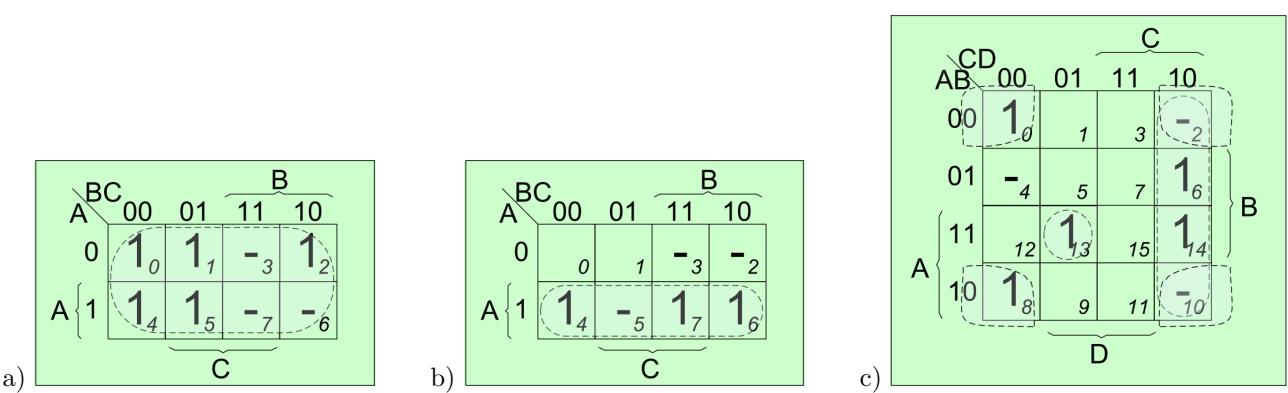
Funcțiile incomplet specificate conțin, pe lângă valorile 0 și 1, și valori indiferente. Valorile indiferente pot fi considerate atât 0 cât și 1, fără a influența funcționarea logică. Termenii produs care sunt indiferenți, notați cu  $d$  pot fi considerați în diagrama V-K fie de valoare 0, fie de valoare 1. Se va alege valoarea logică ce va determina implicații primi cu o exprimare minimă. În diagrama V-K, aceasta înseamnă definirea unor suprafețe cât mai mari și cât mai puține pentru a acoperi căsuțele cu 1.

Diagramele V-K sunt prezentate în figura 5.8.

a)  $F_a(A, B, C) = 1$

b)  $F_b(A, B, C) = A$

c)  $F_c(A, B, C, D) = \bar{B} \cdot \bar{D} + C \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D$



**Figura 5.8** Diagramme V-K pentru problema 11.

12. Să se minimizeze următoarele funcții incomplet definite utilizând diagramme V-K:

- $F_a(A, B, C, D) = \sum(2, 3, 4, 5, 13, 15) + d(8, 9, 10, 11)$
- $F_b(A, B, C, D) = \sum(1, 5, 7, 9, 13, 15) + d(8, 10, 11, 14)$
- $F_c(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 4, 8, 10, 14) + d(5, 6, 7, 12)$
- $F_d(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 5, 7, 8, 10, 13) + d(1, 9, 11)$
- $F_e(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 5, 7, 8, 10) + d(12, 13)$
- $F_f(A, B, C, D, E) = \sum(1, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 22, 25, 27, 28, 30) + d(8, 10, 24, 26)$
- $F_g(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14) + d(7)$

*Soluție*

- $F_a = \overline{B} \cdot C + A \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
- $F_b = \overline{C} \cdot D + B \cdot D$
- $F_c = \overline{D}$
- $F_d = \overline{C} \cdot E + C \cdot \overline{E}$

13. Transpuneți în diagramme V-K următoarele funcții (X=indiferent):

- $F_a(A, B, C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
- $F_b(A, B, C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot X$
- $F_c(A, B, C) = A \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot X + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot X$
- $F_d(A, B, C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot X + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot X$
- $F_e(A, B, C, D) = B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{D} \cdot X$
- $F_f(A, B, C, D) = A \cdot B \cdot D + \overline{A} \cdot C \cdot D + \overline{A} \cdot C \cdot \overline{D} \cdot X$
- $F_g(A, B, C, D) = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot X + A \cdot B \cdot C \cdot X$
- $F_h(A, B, C, D, E) = B \cdot E + B \cdot C \cdot \overline{D} \cdot \overline{E} + A \cdot \overline{C} \cdot D \cdot \overline{E} \cdot X + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D \cdot \overline{E} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \cdot \overline{E}$
- $F_i(A, B, C, D, E) = \overline{A} \cdot D \cdot E + \overline{A} \cdot D \cdot \overline{E} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot E + A \cdot C \cdot \overline{D} \cdot \overline{E} + A \cdot B \cdot D$

Să se minimizeze funcțiile.

*Soluție*

Implicații primi care apar în conjuncție cu valorile indiferente (marcate cu X) vor genera suprafețe formate din căsuțe cu valoare indiferentă. În algoritmul minimizării, acestea se vor considera 0 sau 1 astfel încât să determine acoperirea căsuțelor cu 1 cu un număr cât mai mic de suprafețe și de dimensiuni cât mai mari.

- $F_a(A, B, C) = A \cdot \overline{B}$
- $F_b(A, B, C) = A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C$
- $F_c(A, B, C) = A \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot \overline{C}$

14. Scrieți următoarele funcții sub formă de sumă de produse ale variabilelor de intrare. Scrieți aceleași funcții exprimate cu o variabilă reziduu. Determinați pentru aceleași funcții formele de produs de sume.

- $F_a(A, B) = \sum(1, 2, 3)$
- $F_b(A, B, C) = \sum(1, 5, 6, 7)$
- $F_c(A, B, C, D) = \sum(1, 2, 13, 14)$
- $F_d(A, B, C, D, E) = \sum(3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24)$
- $F_e(A, B, C, D, E) = m_0 + m_5 + m_{25}$
- $F_f(A, B, C, D, E, G) = m_{30} + m_{40} + m_{50} + m_{60}$

g)  $F_g(A, B, C, D, E, G, H) = m_0 + m_{15} + m_{25} + m_{35} + m_{55} + m_{75} + m_{125}$

*Soluție*

c)  $F_c(A, B, C, D) = \sum(1, 2, 13, 14) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} = \overline{A} \cdot (\overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}) + A \cdot (B \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot C \cdot \overline{D}) = \overline{A} \cdot \sum(1, 2) + A \cdot \sum(5, 6),$   
unde mintermul este asociat variabilelor  $m_i(B, C, D)$ .

$$\begin{aligned} F_c(A, B, C, D) &= \prod(0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15) = (A + B + C + D) \cdot (A + B + \overline{C} + \overline{D}) \cdot (A + \overline{B} + C + D) \cdot \\ &\cdot (A + \overline{B} + C + \overline{D}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) \cdot (\overline{A} + B + C + D) \cdot (\overline{A} + B + C + \overline{D}) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C} + D) \cdot \\ &\cdot (\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C + D) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) = \\ &= (A + (B + C + D) \cdot (B + \overline{C} + \overline{D})) \cdot (\overline{B} + C + D) \cdot (\overline{B} + \overline{C} + D) \cdot (\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) \cdot \\ &\cdot (\overline{A} + (B + C + D) \cdot (B + \overline{C} + \overline{D})) \cdot (\overline{B} + \overline{C} + D) \cdot (\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) \cdot (\overline{B} + C + D) = \\ &= (A + \prod(0, 3, 4, 5, 6, 7)) \cdot (\overline{A} + \prod(0, 1, 2, 3, 4, 7)), \end{aligned}$$

unde maxtermul este asociat variabilelor  $M_i(B, C, D)$ .

15. Să se simplifice expresiile și să se implementeze cu porți NAND și apoi cu porți NOR pe două nivele:

- a)  $W \cdot \overline{X} + W \cdot X \cdot Z + \overline{W} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + \overline{W} \cdot X \cdot \overline{Y} + W \cdot X \cdot \overline{Z}$
- b)  $X \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + W \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y}$
- c)  $(A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot (C \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot D)$
- d)  $W \cdot (X + Y + Z) + X \cdot Y \cdot Z$
- e)  $(\overline{A} \cdot B + C \cdot \overline{D}) \cdot B + B \cdot \overline{D} \cdot (A + B)$
- f)  $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot C + \overline{A} \cdot C \cdot \overline{D}$
- g)  $\overline{W} \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + W \cdot X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + \overline{W} \cdot \overline{X} \cdot Y \cdot Z + W \cdot X \cdot Y \cdot Z$
- h)  $\sum(0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 12)$
- i)  $\sum(5, 6, 9, 10)$

*Soluție*

a) Diagrama V-K a funcției originale și diagramele V-K după minimizarea zonelor de 1 și de 0 sunt prezentate în figurile 5.9-a. Expresiile minime sunt:

$$W + X \cdot \overline{Y} + \overline{Y} \cdot \overline{Z} = (X + \overline{Y}) \cdot (W + X + \overline{Z})$$

Structurile de implementare sunt prezentate în figurile 5.9-a.

b) Diagrama V-K a funcției originale și diagramele V-K după minimizarea zonelor de 1 și de 0 sunt prezentate în figurile 5.9-b. Expresiile minime sunt:

$$X \cdot Z + X \cdot Y + W \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} = (W + X) \cdot (X + \overline{Y}) \cdot (\overline{X} + Y + Z)$$

Structurile de implementare sunt prezentate în figurile 5.9-b.

16. Să se transpună diagramele V-K prezentate în figura 5.10 sub forma unor diagrame condensate, introducând o variabilă reziduu și înjumătățind dimensiunea diagramei.

*Soluție*

Înjumătățirea diagramei V-K cu includerea unei variabile în diagramă se face prin gruparea seturilor de două căsuțe adiacente în una singură. Conținutul căsuței în diagramă înjumătățită se determină prin compararea valorilor înscrise în cele două căsuțe cu valoarea variabilei reziduu pentru aceleași căsuțe.

- a) Alternativa cu variabilă reziduu  $C$  este prezentată în figurile 5.11 a)-C.  
Alternativa cu variabilă reziduu  $A$  este prezentată în figurile 5.11 a)-A.

- c) Alternativa cu variabilă reziduu  $D$  este prezentată în figurile 5.11 c)-D.  
Alternativa cu variabilă reziduu  $B$  este prezentată în figurile 5.11 c)-B.

### 3.4 Pentru cei ce vor să devină profesioniști

- Pentru funcțiile reprezentate în diagramele V-K din figura 5.12, cu variabile reziduu și incomplet definite, să se scrie forma minimă.

*Soluție*

Aplicând metodologia descrisă la noțiunile teoretice ale lecției, se obțin implicantii primi menționati în tabel.

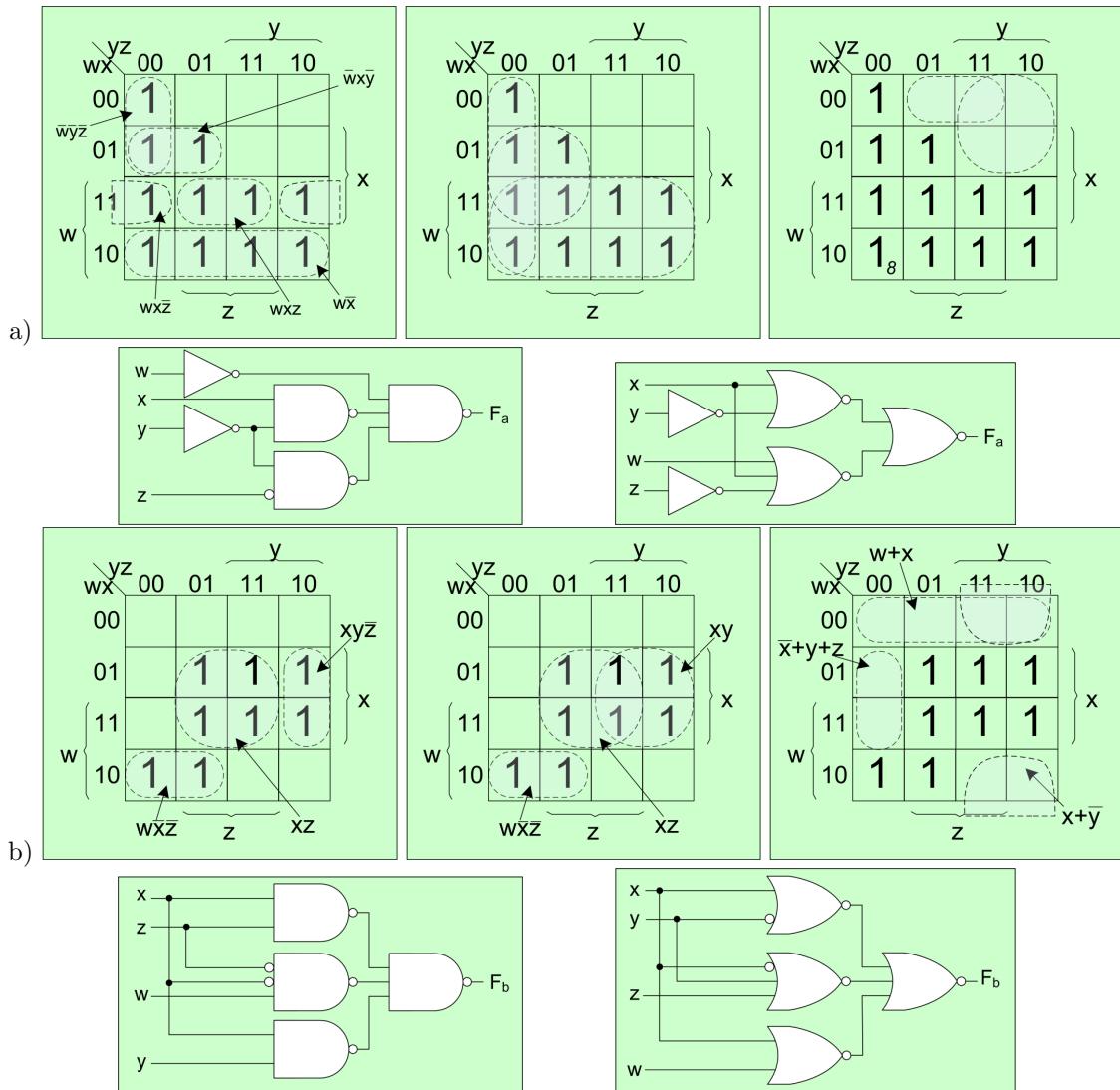


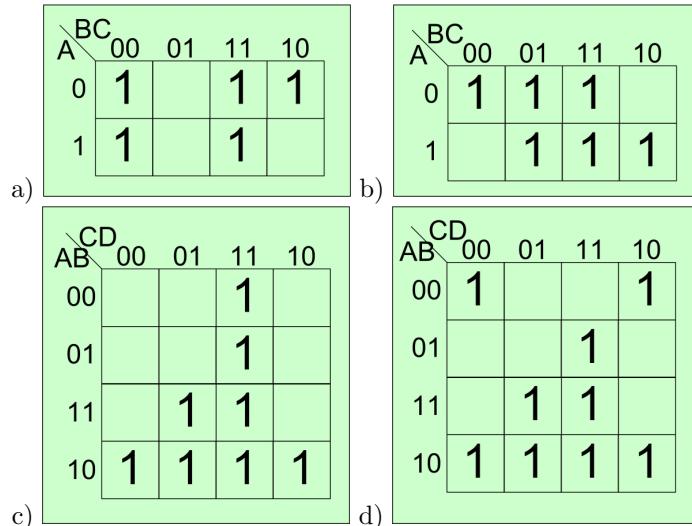
Figura 5.9 Diagramme V-K și structuri de implementare pentru problema 15-a) și b).

Funcția	Etapa întâi	Etapa a doua	Etapa a treia (forma minimă)
$F_a$	$A \cdot B$	$B \cdot C$	$A \cdot B + B \cdot C$
$F_b$	—	$A \cdot C$	$A \cdot C$
$F_c$	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B \cdot C$	$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B \cdot C$
$F_d$	$A$	$\bar{B} \cdot C + B \cdot D$	$A + \bar{B} \cdot C + B \cdot D$
$F_e$	$B$	$\bar{A} \cdot D$ sau $C \cdot D$	$B + \bar{A} \cdot D$ sau $B + C \cdot D$
$F_f$	$\bar{C} + A \cdot B$	$B \cdot E + A \cdot D$	$\bar{C} + A \cdot B + B \cdot E + A \cdot D$
$F_g$	$\bar{A} \cdot C + B$	$A \cdot \bar{C} \cdot D$	$\bar{A} \cdot C + B + A \cdot \bar{C} \cdot D$
$F_h$	$B \cdot C$	$C \cdot D \cdot E + \bar{A} \cdot B \cdot F$	$B \cdot C + C \cdot D \cdot E + \bar{A} \cdot B \cdot F$
$F_i$	$A \cdot D$	$B \cdot \bar{C} \cdot E + \bar{A} \cdot C \cdot \bar{E}$	$A \cdot D + B \cdot \bar{C} \cdot E + \bar{A} \cdot C \cdot \bar{E}$
$F_j$	$A \cdot C$	$\bar{B} \cdot \bar{D} \cdot E + C \cdot \bar{D} \cdot F$	$A \cdot C + \bar{B} \cdot \bar{D} \cdot E + C \cdot \bar{D} \cdot F$

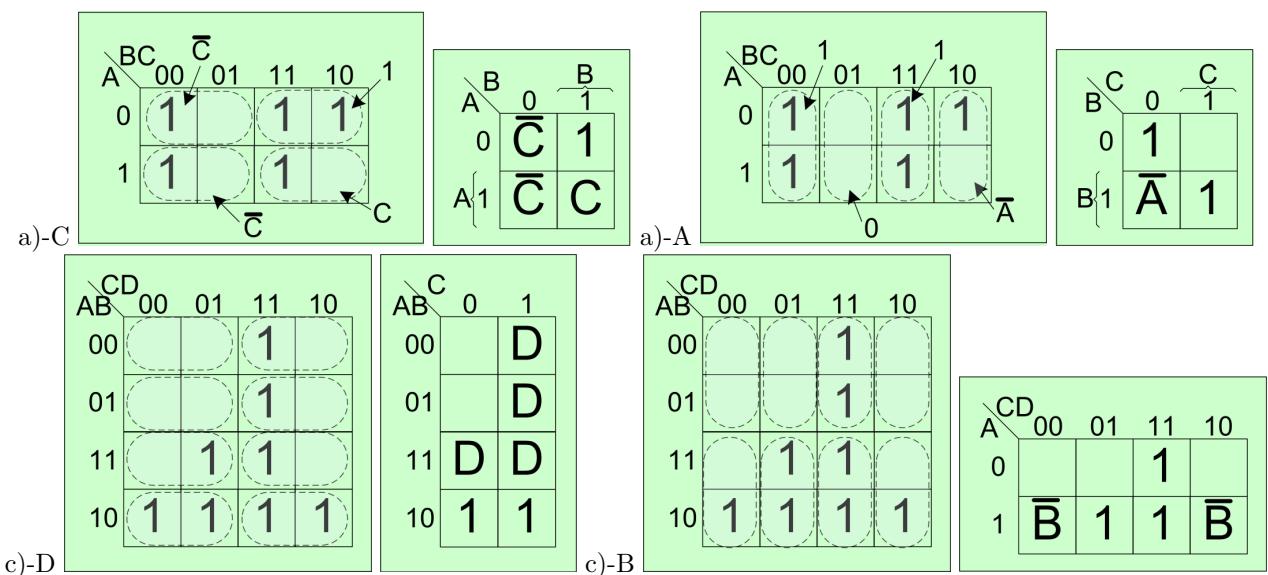
2. Implementați următoarea funcție exclusiv cu porți NAND cu două intrări:  $(A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot (C \cdot \bar{D} + \bar{C} \cdot D)$

*Soluție*

Se aplică distributivitatea și se ajunge la reprezentarea funcției în formă canonica conjunctivă. Se construiește diagrama V-K și se minimizează funcția. Se determină faptul că, în acest caz, forma minimă este identică cu forma canonica conjunctivă. Structura prezintă 4 porți NAND de 4 intrări pe primul nivel logic și o poartă NAND cu 4 intrări pe al doilea nivel logic (plus nivelul de inversoare pe fiecare variabilă de intrare).



**Figura 5.10** Înjumătățirea diagramelelor V-K prin introducerea unei variabile reziduu (problemă 16).



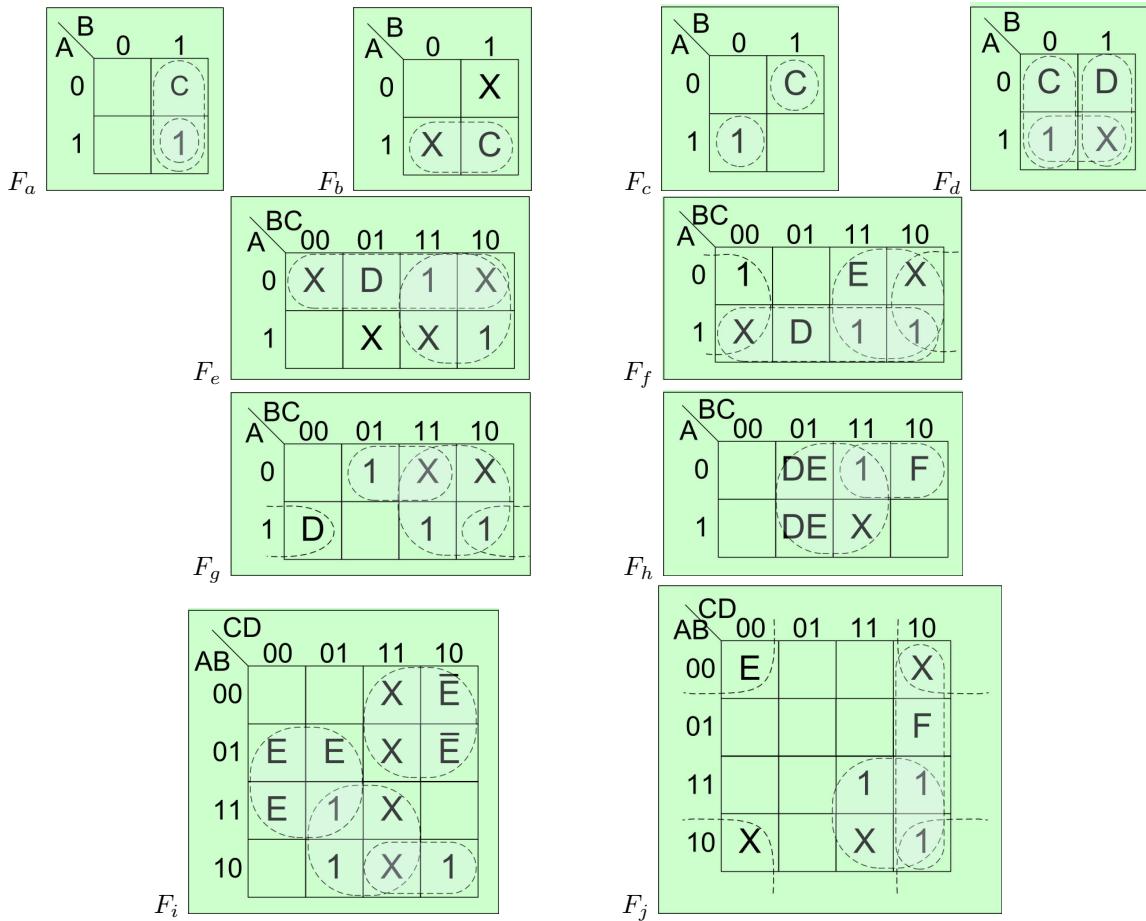
**Figura 5.11** Înjumătățirea diagramelelor V-K prin introducerea unei variabile reziduu (problemă 16).

3. Utilizând diagrame V-K să se minimizeze funcțiile exprimate cu variabile reziduu:

- $F_a(A, B, C) = \sum(0, 1 \cdot C, 2)$ , unde mintermul este  $m(A, B)$
- $F_b(A, B, C) = \sum(1, 2 \cdot C, 3 \cdot \bar{C}) + d(0)$ , unde mintermul este  $m(A, B)$
- $F_c(A, B, C) = \sum(0 \cdot C, 3) + d(1)$ , unde mintermul este  $m(A, B)$
- $F_d(A, B, C, D) = \sum(0, 1 \cdot (C + D), 3 \cdot C)$ , unde mintermul este  $m(A, B)$
- $F_e(A, B, C, D) = \sum(0 \cdot C, 2 \cdot C, 3)$ , unde mintermul este  $m(A, B)$
- $F_f(A, B, C, D) = \sum(0 \cdot C \cdot \bar{D}, 1, 2 \cdot \bar{D}) + d(3)$ , unde mintermul este  $m(A, B, C)$
- $F_g(A, B, C, D) = \sum(0, 2 \cdot D, 4 \cdot \bar{D}, 6)$ , unde mintermul este  $m(A, B, C)$
- $F_h(A, B, C, D) = \sum(2, 4, 5, 7 \cdot D) + \sum(6)$ , unde mintermul este  $m(A, B, C)$
- $F_i(A, B, C, D, E) = \sum(2 \cdot D \cdot E, 7 \cdot \bar{E}) + d(4, 6)$ , unde mintermul este  $m(A, B, C)$
- $F_j(A, B, C, D, E, G) = \sum(0 \cdot D, 1, 3 \cdot E, 6 \cdot \bar{G})$ , unde mintermul este  $m(A, B, C)$
- $F_k(A, B, C, D, E, G) = \sum(2 \cdot (E + G), 4, 5, 9 \cdot \bar{G}, 10 \cdot \bar{G}, 11 \cdot \bar{G}, 15) + d(14)$ , unde mintermul este  $m(A, B, C, D)$

*Soluție*

Diagramele V-K utilizate pentru minimizare sunt prezentate în figura 5.13. (a) diagrama funcției, b) diagrama căsușelor 1, c), d) diagrame cu variabilă reziduu). În diagramele funcției sunt prezentate căsușele cu valoare 1, “-” (indiferente) sau cu variabile reziduu. În diagramele căsușelor 1, căsușele cu funcții reziduu sunt considerate cu 0.



**Figura 5.12** Diagramme V-K cu variabile reziduu, incomplet definite, referite la problema 1.

În diagramele funcțiilor reziduu, căsuțele cu 1 sunt considerate "–", iar funcțiile reziduu sunt considerate una câte una. Implicanții primi rezultați din minimizare se consideră în conjuncție cu variabila reziduu corespunzătoare. În final, expresia obținută mai poate fi minimizată analitic.

- a)  $F_a(A, B, C) = \overline{B} + \overline{A} \cdot C$
- b)  $F_b(A, B, C) = \overline{A} + \overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{C}$
- c)  $F_c(A, B, C) = B + \overline{A} \cdot C$
- d)  $F_d(A, B, C, D) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot (C + D) + A \cdot B \cdot C = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot D + A \cdot B \cdot C = \overline{A} \cdot (\overline{B} + B \cdot D) + (\overline{A} + A) \cdot B \cdot C = \overline{A} \cdot (\overline{B} + D) + B \cdot C = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot D + B \cdot C$

4. Se consideră funcția de 7 variabile:

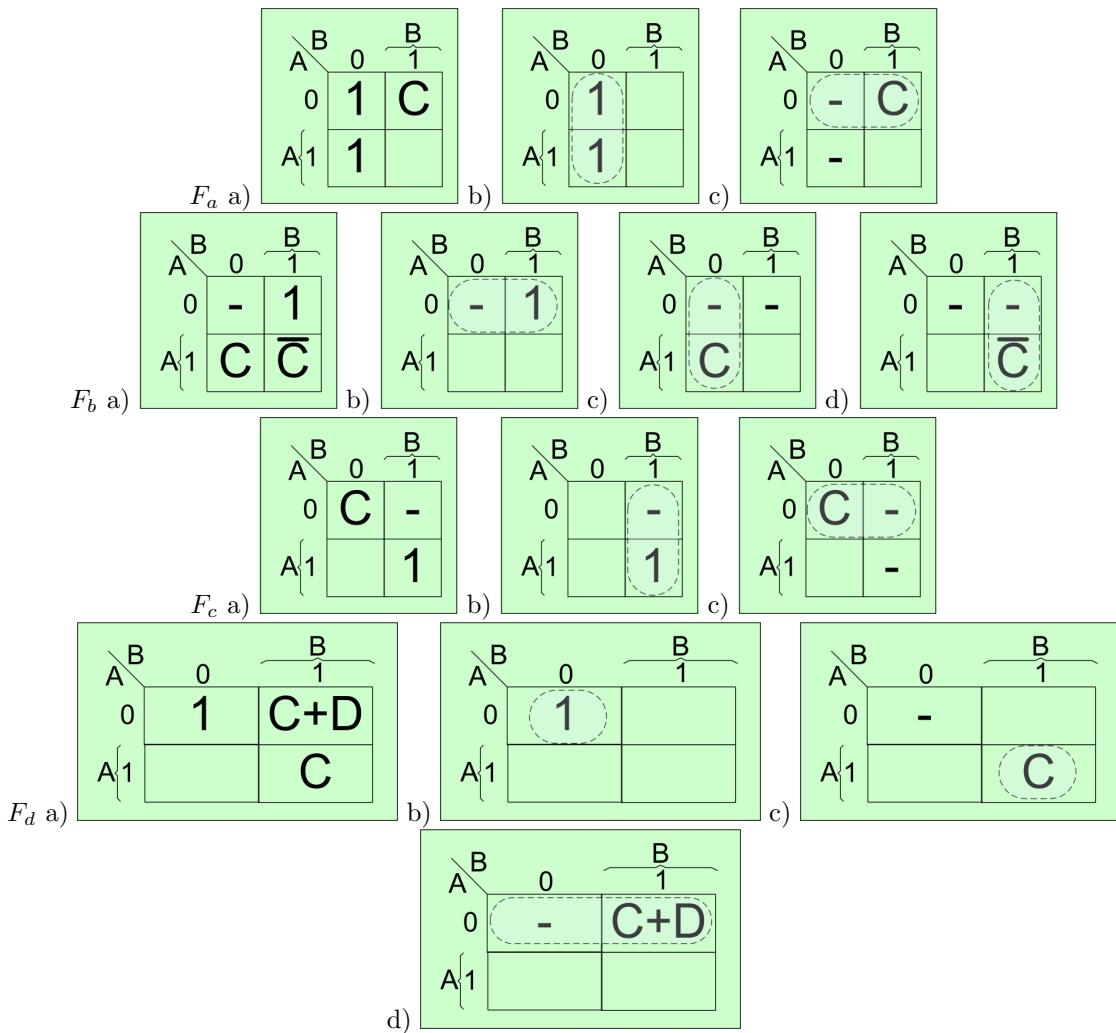
$Y(A, B, C, D, E, F, G) = \sum(2 \cdot G, 3, 4 \cdot E \cdot F, 5 \cdot E \cdot F, 6 \cdot G, 7, 9, 10, 12 \cdot E, 13) + d(0, 11, 15)$  unde minterm-ul este  $m(A, B, C, D)$ . Să se transpună funcția într-o diagramă V-K cu 4 variabile (cele asociate minterm-ului). Să se minimizeze funcția cu variabile reziduu E, F și G.

*Soluție*

Diagrama V-K (figura 5.14-a) conține 1 în căsuțele ale căror indecsă sunt listăți independent în expresia funcției (3, 7, 9, 10, 13), X în căsuțele asociate termenilor indiferenți (0, 11, 15) și expresiile reziduu, pe baza altor variabile (E, F, G) acolo unde mintermii apar în conjuncție cu acestea (2 și 6 cu G, 4 și 5 cu  $E \cdot F$ , 12 cu E). Minimizarea impune, în primă fază, minimizarea căsuțelor având valoarea 1 și a celor indiferente (figura 5.14-b). Se definesc suprafetele I, II, III corespunzătoare implicanților primi:  $I = C \cdot D$ ,  $II = A \cdot D$ ,  $III = A \cdot \overline{B} \cdot C$ . Apoi, fiecare expresie reziduu se consideră separat, împreună cu toate căsuțele indiferente, provenite din cele indiferente și cele cu 1 (minimizate în prima fază). Diagramalele asociate funcțiilor reziduu sunt prezentate în figurile 5.14-c,d,e. Rezultă implicanții primi:  $IV = \overline{A} \cdot C$ ,  $V = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$ ,  $VI = A \cdot B \cdot \overline{C}$ .

Implicanții primi rezultați prin minimizarea suprafetelor cu variabile reziduu se consideră în conjuncție cu funcțiile reziduu. Rezultă următoarea formă minimă a funcției:

$$Y = C \cdot D + A \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot C \cdot G + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot E \cdot F + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot E.$$



**Figura 5.13** Diagrame V-K cu variabile reziduu, asociate funcțiilor referite la problema 3.

5. Minimizați corelat funcțiile:

- a)  $F_1(A, B, C) = \sum(0, 2, 4, 6, 7)$  și  $F_2(A, B, C) = \sum(2, 6, 7)$
- b)  $F_1(A, B, C) = \sum(1, 3, 4, 7)$  și  $F_2(A, B, C) = \sum(3, 4, 6, 7)$
- c)  $F_1(A, B, C) = \sum(1, 2, 4, 6)$ ,  $F_2(A, B, C) = \sum(0, 1, 2, 6, 7)$  și  $F_3(A, B, C) = \sum(1, 2, 6)$
- d)  $F_1(A, B, C, D) = \sum(4, 5, 6, 7, 9, 14)$  și  $F_2(A, B, C, D) = \sum(0, 1, 2, 3, 9, 14)$
- e)  $F_1(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 7, 8, 10, 15)$  și  $F_2(A, B, C, D) = \sum(7, 9, 11, 13, 15)$

*Soluție*

Funcțiile cu ieșiri multiple (dependente de aceleași variabile de intrare) nu se minimizează independent, ci corelat. Motivul îl constituie posibilitatea reutilizării unor termeni produs pentru realizarea mai multor funcții, cu un cost mai redus.

d) Minimizarea independentă a funcțiilor (figura 5.15-a) determină expresiile:

$$F_1(A, B, C, D) = I + II + III = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + B \cdot C \cdot \bar{D}$$

$$F_2(A, B, C, D) = IV + V + VI = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D$$

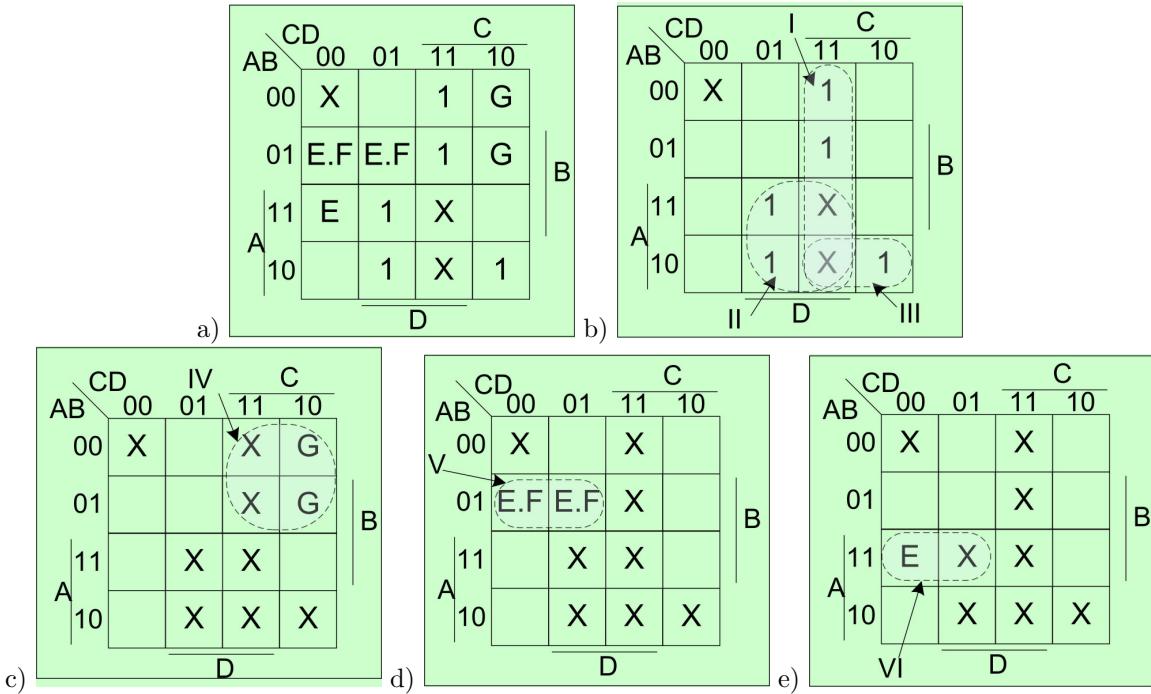
Minimizarea corelată a funcțiilor (figura 5.15-b) se bazează pe observația că suprafetele de o căsuță oricum trebuie considerate (pentru că reprezintă implicantă primă esențială în câte una din funcții) și pot fi refolosite pentru cealaltă funcție, nemaifiind necesară încă o suprafață adițională. Expresiile funcțiilor sunt:

$$F_1(A, B, C, D) = I + II + III = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D}$$

$$F_2(A, B, C, D) = II + III + IV = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Implementările asociate celor două tipuri de minimizări (independente și corelate) sunt prezentate în figurile 5.16.

Compararea resurselor necesare este prezentată în tabel:



**Figura 5.14** Diagramme V-K cu variabile reziduu, asociate funcției referite la problema 4.

Minimizate independent		Minimizate corelat	
Porti logice	Intrări	Porti logice	Intrări
2 × NANDx4	8	2 × NANDx4	8
4 × NANDx3	12	2 × NANDx3	6
2 × NANDx2	4	2 × NANDx2	4
4 × NOT	4	4 × NOT	4
Total: 12 porti	28 intrări	Total: 10 porti	22 intrări

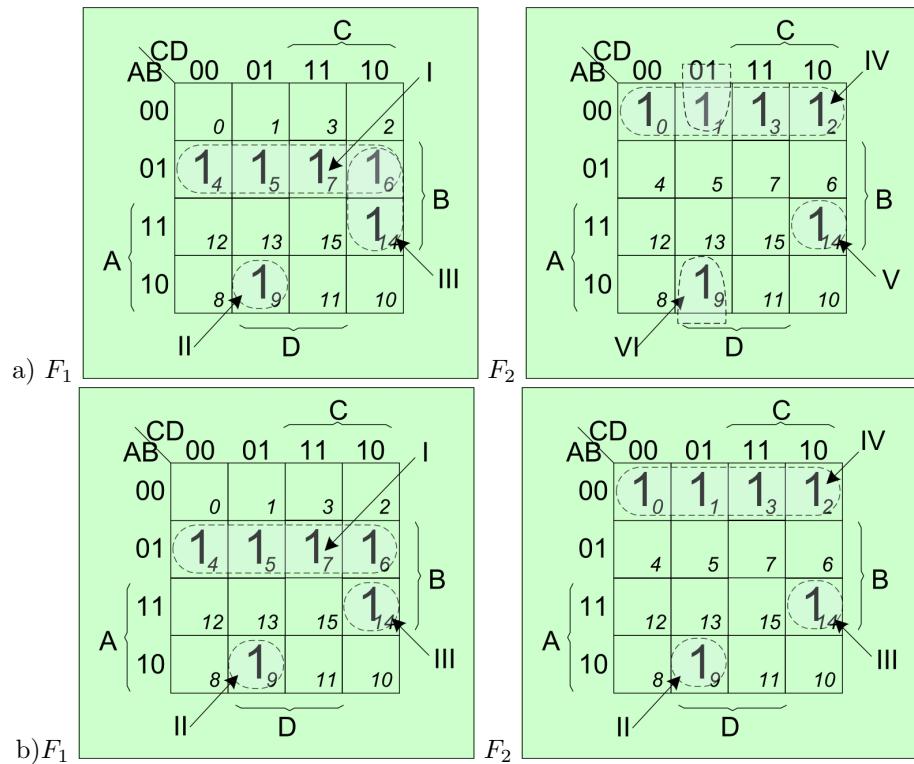
6. Minimizați funcțiile:

- a)  $F_1(A, B, C, D, E) = \sum(3, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 27, 31)$
- b)  $F_2(A, B, C, D, E) = \sum(0, 4, 8, 9, 13, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 29)$
- c)  $F_3(A, B, C, D, E, F) = \sum(0, 9, 13, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 29, 31, 32, 45, 47, 52, 53, 54, 55, 59, 63)$
- d)  $F_4(A, B, C, D, E, F) = \sum(0, 2, 4, 6, 16, 18, 20, 22, 25, 27, 29, 31, 32, 34, 36, 38, 41, 48, 50, 52, 54, 57, 59, 61, 63)$

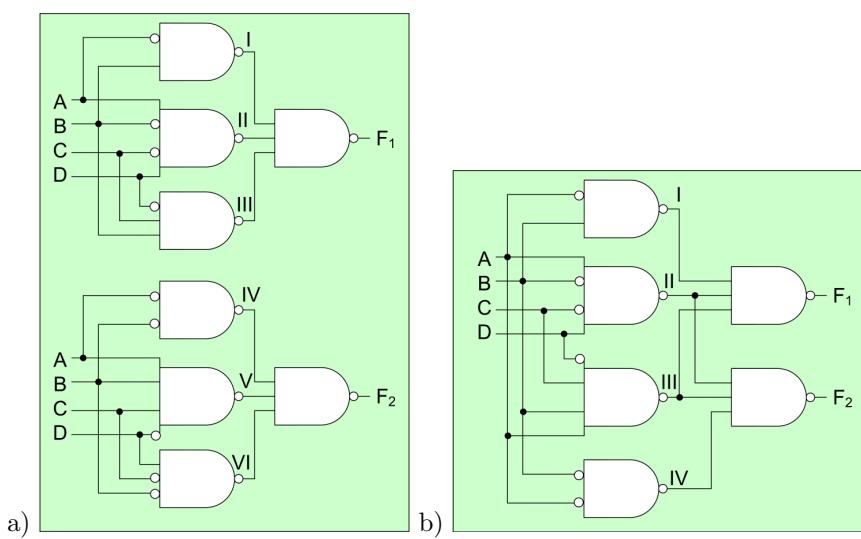
*Soluție*

Diagramele V-K și definirea suprafețelor necesare minimizării sunt prezentate în figura 5.17. Se obțin formele minime:

- a)  $F_1(A, B, C, D, E) = I + II + III = D \cdot E + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{E} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$
  - b)  $F_2(A, B, C, D, E) = I + II + III + IV + V = B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + B \cdot \bar{D} \cdot E + \bar{B} \cdot C \cdot \bar{E} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{D} \cdot \bar{E} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D$   
Se observă că există opțiunea ca în loc de implicantul prim  $IV = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{D} \cdot \bar{E}$  să se considere implicantul  $\bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} \cdot \bar{E}$  (căsuțele (0, 8), căsuța 4 fiind deja acoperită de suprafața III).
  - c)  $F_3(A, B, C, D, E, F) = I + II + III = \bar{C} \cdot \bar{F} + B \cdot C \cdot F + A \cdot C \cdot \bar{D} \cdot \bar{E} \cdot F$
  - d)  $F_4(A, B, C, D, E, F) = I + II + III + IV + V + VI + VII = B \cdot \bar{C} \cdot D + B \cdot C \cdot E \cdot F + B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} \cdot \bar{E} \cdot \bar{F} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{E} \cdot F + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} \cdot E + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D \cdot F + \bar{A} \cdot B \cdot D \cdot F$
- De menționat, căsuțele (13, 29, 21, 53) nu formează o suprafață (deoarece nu are dimensiuni puteri ale lui 2, pe fiecare dimensiune, în planuri suprapuse). Un implicant prim, dar ne-esențial, este determinat de suprafața căsuțelor (31, 23, 55, 63), de dimensiune  $2 \times 1 \times 2$ , în două planuri, după pliere pe orizontală.



**Figura 5.15** Minimizarea corelată a funcțiilor (problema 5-d): a) funcții minimizează independențial, b) funcții minimizează corelat.



**Figura 5.16** Implementarea funcțiilor corelate (problema 5-d): a) minimizează independențial, b) minimizează corelat.

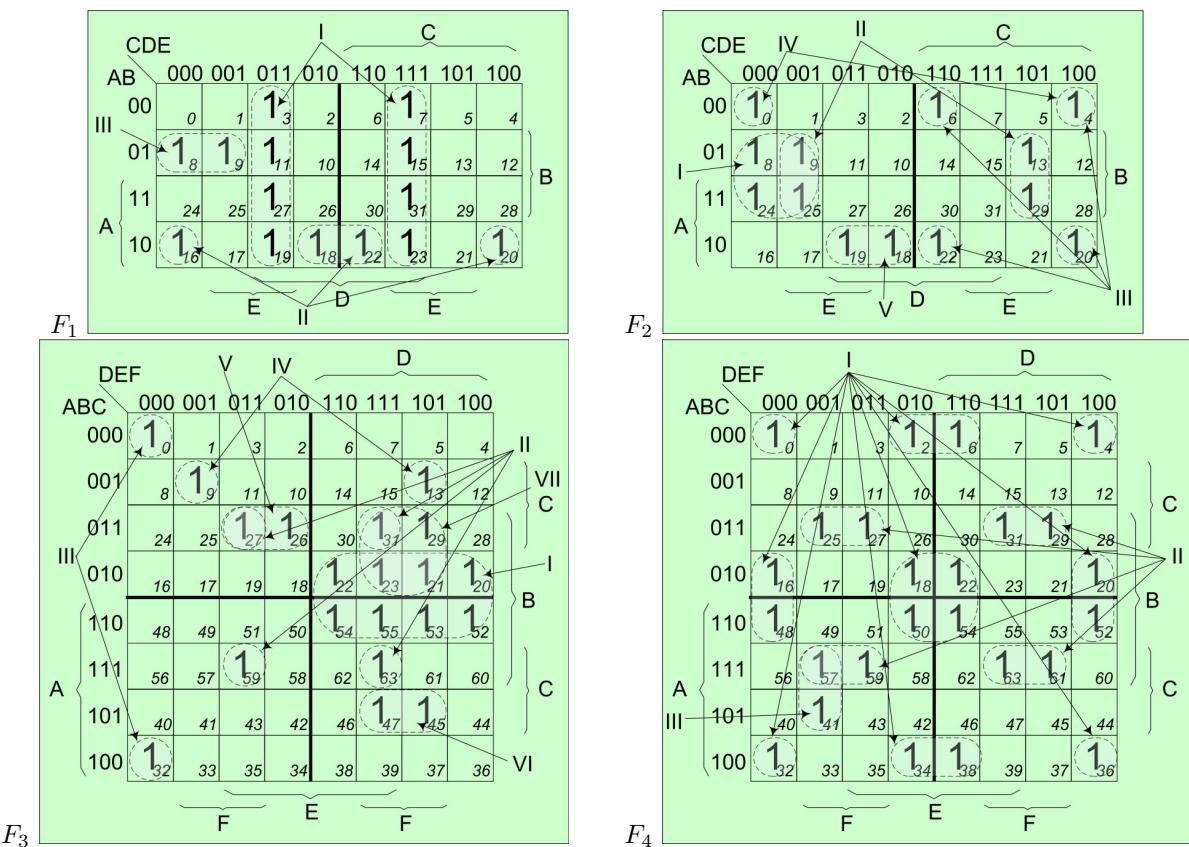


Figura 5.17 Diagramme V-K pentru problema 6.