

# CONTROLLI AUTOMATICI

Pierluca Peverè



# SISTEMI IN FORMA DI STATO

Un sistema si dice **tempo continuo** se la variabile  $t$  è una variabile reale ( $t \in \mathbb{R}$ ).  
Si definiscono le seguenti equazioni:

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$  detta equazione (o trasformazione) di uscita

Con ovviamente  $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$

Dove:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stato del sistema all'istante  $t$
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ingresso del sistema all'istante  $t$
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  uscita del sistema all'istante  $t$

$$\text{Quindi: } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

**Equazione di stato** È un'equazione differenziale ordinaria vettoriale del prim'ordine:

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

Dove  $\mathbb{R}^n$  si dice spazio di stato e  $n$  ordine del sistema.

Mentre  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta funzione di stato

**Equazione di uscita** È un'equazione algebrica:

$$\dot{y}_1(t) = h_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_p(t) = h_p\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

Dove  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  è detta funzione di uscita

Se la soluzione  $x(t)$  a partire da un istante iniziale  $t_0$  è univocamente determinata da  $x(t_0)$  e  $u(\tau)$ ,  $\tau \geq t_0$ , allora il sistema è detto **causale**.

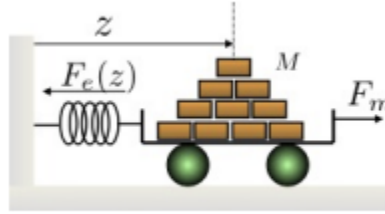
Un sistema si dice **tempo discreto** se  $t$  è una variabile intera ( $t \in \mathbb{Z}$ ).  
Si definiscono:

- $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$  detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$  detta equazione (o trasformazione) di uscita

**NB:** l'equazione di stato non è più differenziale ordinaria ma è un'equazione alle differenze finite.

La definizione di stato, uscita e ingresso rimane invariata rispetto al caso tempo continuo.

### ESEMPIO carrello massa molla



Utilizzando la legge di Newton (prendendo  $z$  come la posizione del centro di massa) si ha:

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con  $M$  massa e  $F_e$  forza elastica data da:

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

sostituendo:

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

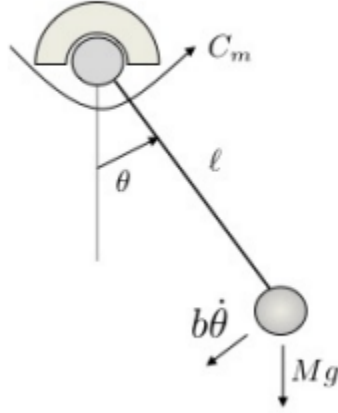
Definiamo:

- $x_1 := z$  (posizione),  $x_2 := \dot{z}$  (velocità) di conseguenza lo stato risulta  $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := F_m$  ingresso

Supponendo di misurare  $z(t)$  con un sensore allora  $y := z$ , sia  $k(t) = k$  e considerando come uscita l'energia totale  $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) = \frac{1}{2}(kx_1^2(t) + Mx_2^2(t))\end{aligned}$$

## ESEMPIO pendolo



Equazione dei momenti ( $C_m$  coppia motore):

$$Ml^2\ddot{\theta} = C_{grav} + C_{drag} + C_m$$

con  $M$  massa e  $C_{grav}$  e  $C_{drag}$  date da

$$C_{grav} = -Mgl\sin(\theta), \quad C_{drag} = -b\dot{\theta}$$

con  $b$  coefficiente d'attrito.

Definiamo:

- $x_1 := \theta$  (posizione angolare) e  $x_2 := \dot{\theta}$  (velocità angolare), di conseguenza lo stato  $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := C_m$  ingresso

Supponiamo di misurare  $\theta$  tramite un sensore angolo, allora  $y := \theta$ :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Se invece misuriamo la posizione verticale tramite sensore, allora  $y := -l\cos(\theta)$ :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$

$$y(t) = -l\cos(x_1(t))$$

## Definizione di traiettoria

Dato un istante iniziale  $t_0$  e uno stato iniziale  $x_{t_0}$ , la funzione del tempo  $(x(t), u(t))$ ,  $t \geq t_0$ , che soddisfa l'equazione di stato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  si dice **traiettoria** (o movimento) **del sistema**. In particolare,  $x(t)$  si dice traiettoria dello stato. Consistentemente,  $y(t)$  si dice traiettoria dell'uscita.

Per sistemi senza ingresso (detti non forzati) la traiettoria (dello stato)  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ , è determinata solo dallo stato iniziale  $x_{t_0}$ .

## EQUILIBRIO DI UN SISTEMA

**Equilibrio di un sistema non forzato** Dato un sistema non forzato  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ , uno stato  $x_e$  si dice **equilibrio** del sistema se  $x(t) = x_e, t \geq t_0$  è una traiettoria del sistema.

**Coppia di equilibrio** Dato un sistema forzato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ ,  $(x_e, u_e)$  si dice coppia di equilibrio se  $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e), t \geq t_0$ , è traiettoria del sistema.

Per sistemi  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  (tempo invarianti) vale la seguente proprietà: data una coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$  vale  $f(x_e, u_e) = 0$ , vale lo stesso per sistemi non forzati (se  $x_e$  equilibrio allora  $f(x_e) = 0$ ).

Quindi ricapitolando:

- se  $x(t) = x_e \forall t \implies \dot{x}(t) = 0 \implies f(x(t), t) = 0$  (sistemi non forzati)
- se  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ :  $f(x_e) = 0 \implies x_e$  equilibrio (sistemi non forzati tempo invarianti).
- se  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ :  $f(x_e, u_e) = 0 \implies (x_e, u_e)$  coppia di equilibrio (sistemi forzati tempo invarianti).

## CLASSIFICAZIONE DI SISTEMI IN FORMA DI STATO

Dato il caso generale,  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ equazione di stato}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \text{ equazione di uscita}$$

I sistemi in forma di stato si possono classificare in:

- **SISO** (Single Input Single Output), sotto classe dei sistemi MIMO (Multiple Input Multiple Output): se  $m = p = 1$  altrimenti MIMO
- **Strettamente propri**, sotto classe di propri: se  $y = h(x(t), t)$
- **Non forzati**, sotto classe di forzati:  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$   $y(t) = h(x(t), t)$
- **Tempo invarianti** sotto classe dei tempo varianti: se data una traiettoria  $(x(t), u(t), t), t \geq t_0$ , con  $x(t_0) = x_0, \forall \Delta \in \mathbb{R}$ , vale che per  $x(t_0 + \Delta) = x_0$  allora  $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$  è una traiettoria. Si può dimostrare che i sistemi tempo invarianti sono del tipo:  
 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0$   
 $y(t) = h(x(t), u(t))$   
senza perdita di generalità si può porre  $t_0 = 0$
- **Linearità** sotto classe dei non lineari

## SISTEMI LINEARI

Un sistema è detto lineare se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in  $x$  ed  $u$ .

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_{1(t)} + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)$$

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$y_p(t) = c_{p1}(t)x_1(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1}(t)u_1(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)$$

Quindi raggruppando tutti i coefficienti in matrici del tipo:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}$$

Dove  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Di conseguenza le equazioni di stato e di uscita diventano:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

## SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Un sistema si dice **lineare tempo invariante** se è lineare e le funzioni del movimento sono indipendenti dal tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Se **SISO**:  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \implies B$  è un vettore,  $C$  è un vettore riga e  $D$  è uno scalare.

### Principio di sovrapposizione degli effetti

Sia  $(x_a(t), u_a(t))$  traiettoria con  $x_a(t_0) = x_{0a}$

Sia  $(x_b(t), u_b(t))$  traiettoria con  $x_b(t_0) = x_{0b}$

Allora  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dato lo stato iniziale  $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$ , si ha che:

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è una **traiettoria del sistema**. Ovvero applicando in ingresso  $u_{ab}(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$  la traiettoria di stato è  $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

**Importante:** NON vale per sistemi non lineari

### Evoluzione libera e forzata

Sia  $x_\ell(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato ottenuta per  $x_\ell(t_0) = x_0$  e  $u_\ell(t) = 0$ ,  $t \geq t_0$ , detta **evoluzione libera**

Sia  $x_f(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato ottenuta per  $x_f(t_0) = 0$  e  $u_f(t) = u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , detta **evoluzione forzata**

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale  $x(t_0) = x_0$  e applicando l'ingresso  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$$

Ciò NON vale per sistemi non lineari (il principio di sovrapposizione vale solo per sistemi lineari)

## Traiettorie di un SLTI e rappresentazioni equivalenti

Dato il SLTI generico:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Dalla notazione introdotta nel paragrafo precedente si può scrivere:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\end{aligned}$$

Ricorda:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Proprietà della matrice esponenziale:

- Esponenziale e cambio di base:  $e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$
- Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi (forma di Jordan): l'esponenziale di una matrice di questo tipo è una matrice diagonale a blocchi in cui ciascun blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente della matrice di partenza

Difatti l'esponenziale di una matrice diagonale  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  è:  $e^{\Lambda t} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$

Dalle proprietà sopraelencate si può giungere ad una rappresentazione equivalente delle equazioni di traiettorie e uscite dei SLTI effettuando un cambio di base mediante una matrice  $T$  (invertibile):

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= Tx(t) \\ x(t) &= T^{-1}\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)\end{aligned}$$

con:  $\hat{A} = TAT^{-1}$ ,  $\hat{B} = TB$ ,  $\hat{C} = CT^{-1}$ ,  $\hat{D} = D$

## Modi naturali

Dato il SLTI generico:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Indicando con  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  gli  $r \leq n$  autovalori (reali e complessi coniugati) distinti della matrice  $A$ , con molteplicità algebrica  $n_1, \dots, n_r \geq 0$  tali che  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ .

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato  $x_i(t)$  si possono scrivere come:

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di  $h_i \leq n_i$ , dove i coefficienti  $\gamma_{jiq}$  dipendono dallo stato iniziale  $x(0)$ .

I termini  $t^{q-1}e^{\lambda_i t}$  sono detti **modi naturali** del sistema. L'evoluzione libera è **combinazione lineare dei modi**.

Inoltre poichè l'uscita è lineare nello stato, anche l'evoluzione libera dell'uscita è combinazione lineare dei modi.