

CONTROLLI AUTOMATICI

Pierluca Peverè



SISTEMI IN FORMA DI STATO

Un sistema si dice **tempo continuo** se la variabile t è una variabile reale ($t \in \mathbb{R}$).
Si definiscono le seguenti equazioni:

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ detta equazione (o trasformazione) di uscita

Con ovviamente $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$

Dove:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

$$\text{Quindi: } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Equazione di stato È un'equazione differenziale ordinaria vettoriale del prim'ordine:

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

Dove \mathbb{R}^n si dice spazio di stato e n ordine del sistema.

Mentre $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta funzione di stato

Equazione di uscita È un'equazione algebrica:

$$\dot{y}_1(t) = h_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_p(t) = h_p\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

Dove $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ è detta funzione di uscita

Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$, $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto **causale**.

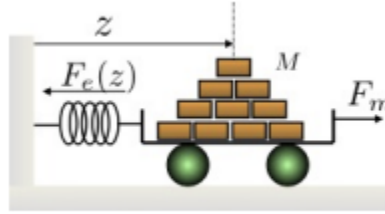
Un sistema si dice **tempo discreto** se t è una variabile intera ($t \in \mathbb{Z}$).
Si definiscono:

- $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$ detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ detta equazione (o trasformazione) di uscita

NB: l'equazione di stato non è più differenziale ordinaria ma è un'equazione alle differenze finite.

La definizione di stato, uscita e ingresso rimane invariata rispetto al caso tempo continuo.

ESEMPIO carrello massa molla



Utilizzando la legge di Newton (prendendo z come la posizione del centro di massa) si ha:

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e F_e forza elastica data da:

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

sostituendo:

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

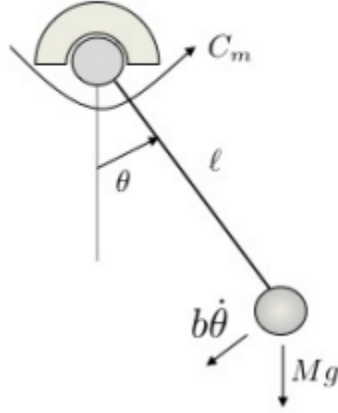
Definiamo:

- $x_1 := z$ (posizione), $x_2 := \dot{z}$ (velocità) di conseguenza lo stato risulta $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := F_m$ ingresso

Supponendo di misurare $z(t)$ con un sensore allora $y := z$, sia $k(t) = k$ e considerando come uscita l'energia totale $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) = \frac{1}{2}(kx_1^2(t) + Mx_2^2(t))\end{aligned}$$

ESEMPIO pendolo



Equazione dei momenti (C_m coppia motore):

$$Ml^2\ddot{\theta} = C_{grav} + C_{drag} + C_m$$

con M massa e C_{grav} e C_{drag} date da

$$C_{grav} = -Mgl\sin(\theta), \quad C_{drag} = -b\dot{\theta}$$

con b coefficiente d'attrito.

Definiamo:

- $x_1 := \theta$ (posizione angolare) e $x_2 := \dot{\theta}$ (velocità angolare), di conseguenza lo stato $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := C_m$ ingresso

Supponiamo di misurare θ tramite un sensore angolo, allora $y := \theta$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Se invece misuriamo la posizione verticale tramite sensore, allora $y := -l\cos(\theta)$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$

$$y(t) = -l\cos(x_1(t))$$

Definizione di traiettoria

Dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale x_{t_0} , la funzione del tempo $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice **traiettoria** (o movimento) **del sistema**. In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dice traiettoria dell'uscita.

Per sistemi senza ingresso (detti non forzati) la traiettoria (dello stato) $x(t)$, $t \geq t_0$, è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0} .

EQUILIBRIO DI UN SISTEMA

Equilibrio di un sistema non forzato Dato un sistema non forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice **equilibrio** del sistema se $x(t) = x_e, t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Coppia di equilibrio Dato un sistema forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice coppia di equilibrio se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e), t \geq t_0$, è traiettoria del sistema.

Per sistemi $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ (tempo invarianti) vale la seguente proprietà: data una coppia di equilibrio (x_e, u_e) vale $f(x_e, u_e) = 0$, vale lo stesso per sistemi non forzati (se x_e equilibrio allora $f(x_e) = 0$).

Quindi ricapitolando:

- se $x(t) = x_e \forall t \implies \dot{x}(t) = 0 \implies f(x(t), t) = 0$ (sistemi non forzati)
- se $\dot{x}(t) = f(x(t))$: $f(x_e) = 0 \implies x_e$ equilibrio (sistemi non forzati tempo invarianti).
- se $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$: $f(x_e, u_e) = 0 \implies (x_e, u_e)$ coppia di equilibrio (sistemi forzati tempo invarianti).

CLASSIFICAZIONE DI SISTEMI IN FORMA DI STATO

Dato il caso generale, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ equazione di stato}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \text{ equazione di uscita}$$

I sistemi in forma di stato si possono classificare in:

- **SISO** (Single Input Single Output), sotto classe dei sistemi MIMO (Multiple Input Multiple Output): se $m = p = 1$ altrimenti MIMO
- **Strettamente propri**, sotto classe di propri: se $y = h(x(t), t)$
- **Non forzati**, sotto classe di forzati: $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ $y(t) = h(x(t), t)$
- **Tempo invarianti** sotto classe dei tempo varianti: se data una traiettoria $(x(t), u(t), t), t \geq t_0$, con $x(t_0) = x_0, \forall \Delta \in \mathbb{R}$, vale che per $x(t_0 + \Delta) = x_0$ allora $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$ è una traiettoria. Si può dimostrare che i sistemi tempo invarianti sono del tipo:
 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0$
 $y(t) = h(x(t), u(t))$
senza perdita di generalità si può porre $t_0 = 0$
- **Linearità** sotto classe dei non lineari

SISTEMI LINEARI

Un sistema è detto lineare se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x ed u .

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_{1(t)} + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)$$

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$y_p(t) = c_{p1}(t)x_1(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1}(t)u_1(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)$$

Quindi raggruppando tutti i coefficienti in matrici del tipo:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}$$

Dove $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Di conseguenza le equazioni di stato e di uscita diventano:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Un sistema si dice **lineare tempo invariante** se è lineare e le funzioni del movimento sono indipendenti dal tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Se **SISO**: $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \implies B$ è un vettore, C è un vettore riga e D è uno scalare.

Principio di sovrapposizione degli effetti

Sia $(x_a(t), u_a(t))$ traiettoria con $x_a(t_0) = x_{0a}$

Sia $(x_b(t), u_b(t))$ traiettoria con $x_b(t_0) = x_{0b}$

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dato lo stato iniziale $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$, si ha che:

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è una **traiettoria del sistema**. Ovvero applicando in ingresso $u_{ab}(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ la traiettoria di stato è $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

Importante: NON vale per sistemi non lineari

Evoluzione libera e forzata

Sia $x_\ell(t)$, $t \geq t_0$ la traiettoria di stato ottenuta per $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_\ell(t) = 0$, $t \geq t_0$, detta **evoluzione libera**

Sia $x_f(t)$, $t \geq t_0$ la traiettoria di stato ottenuta per $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$, $t \geq t_0$, detta **evoluzione forzata**

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$ la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$$

Ciò NON vale per sistemi non lineari (il principio di sovrapposizione vale solo per sistemi lineari)

Traiettorie di un SLTI e rappresentazioni equivalenti

Dato il SLTI generico: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dalla notazione introdotta nel paragrafo precedente si può scrivere:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Ricorda:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Proprietà della matrice esponenziale:

- Esponenziale e cambio di base: $e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$
- Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi (forma di Jordan): l'esponenziale di una matrice di questo tipo è una matrice diagonale a blocchi in cui ciascun blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente della matrice di partenza

Difatti l'esponenziale di una matrice diagonale $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ è: $e^{\Lambda t} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$

Dalle proprietà sopraelencate si può giungere ad una rappresentazione equivalente delle equazioni di traiettorie e uscite dei SLTI effettuando un cambio di base mediante una matrice T (invertibile):

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

$$y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)$$

con: $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$, $\hat{D} = D$

Tutto questo per cambiare la posizione dell'origine in modo tale da non avere errore (non avere un gap fra l'origine e lo stato iniziale).

Modi naturali

Dato il SLTI generico: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Indicando con $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli $r \leq n$ autovalori (reali e complessi coniugati) distinti della matrice A , con molteplicità algebrica $n_1, \dots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ si possono scrivere come:

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di $h_i \leq n_i$, dove i coefficienti γ_{jiq} dipendono dallo stato iniziale $x(0)$.

I termini $t^{q-1}e^{\lambda_i t}$ sono detti **modi naturali** del sistema. L'evoluzione libera è **combinazione lineare dei modi**.

Inoltre poichè l'uscita è lineare nello stato, anche l'evoluzione libera dell'uscita è combinazione lineare dei modi.

Forma reale dei modi di un sistema Se la matrice A del SLTI è reale e $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ è autovalore di A , inoltre si può dimostrare che i coefficienti γ_{jiq} corrispondenti agli autovalori complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati. Si verifica inoltre per calcolo diretto che $x_{\ell,j}(t)$ sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati λ_i e $\bar{\lambda}_i$ sono del tipo:

$$t^{q-1}e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

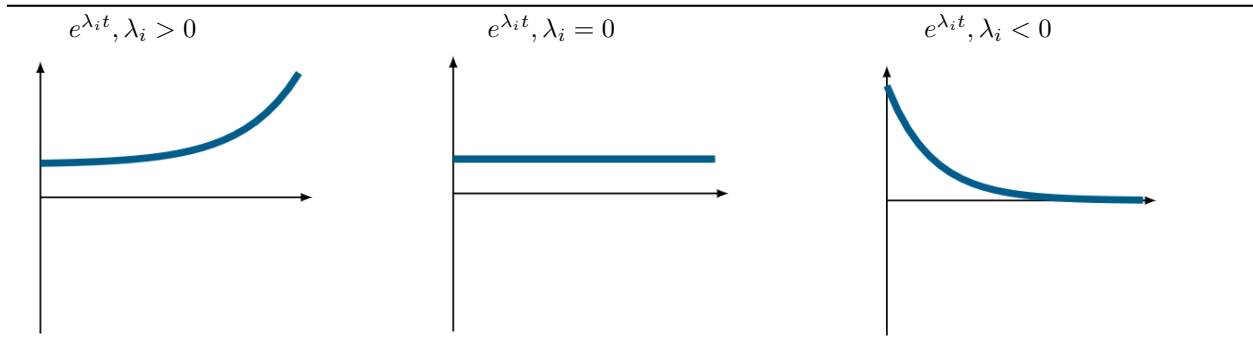
con opportuni valori della fase ϕ_i .

Nel caso in cui le molteplicità algebriche n_1, \dots, n_r degli autovalori di A coincidano con le molteplicità geometriche, allora i coefficienti h_i sono tutti pari ad 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

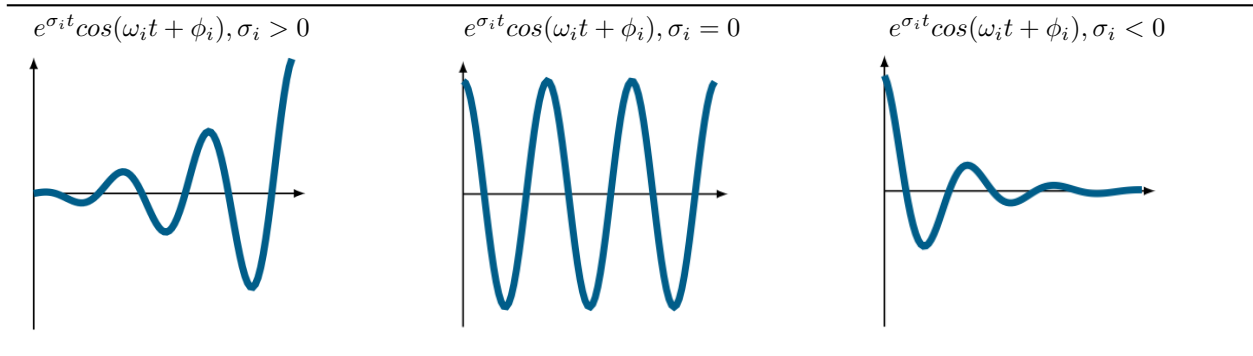
$$e^{\lambda_i t} \quad \text{per autovalori reali}$$

$$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad \text{per autovalori complessi coniugati}$$

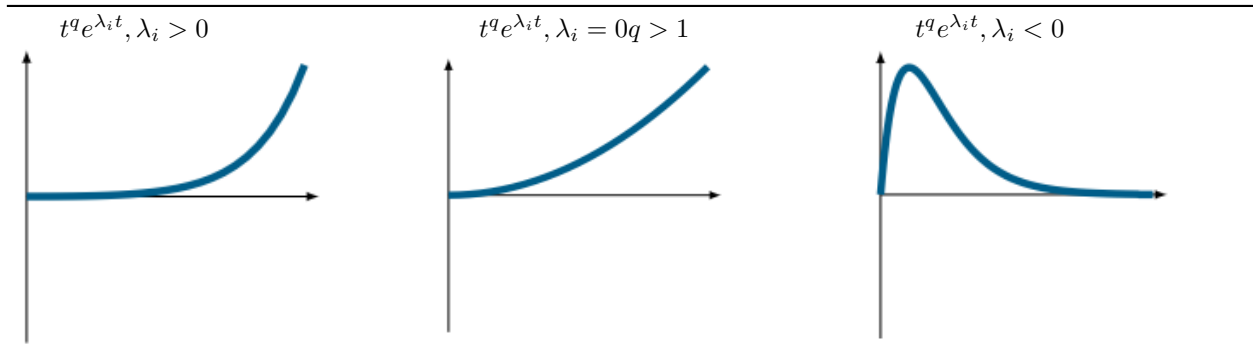
Modi naturali: autovalori reali semplici (m.a. = m.g.)



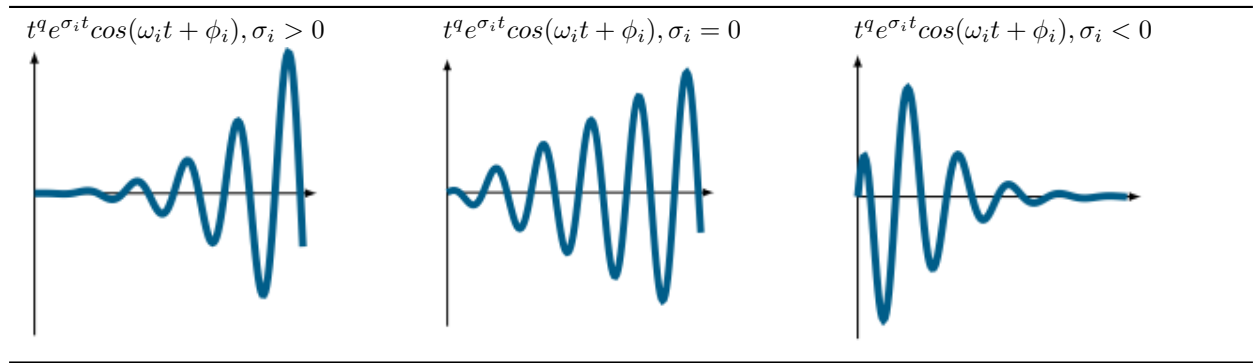
Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici (m.a. = m.g.)



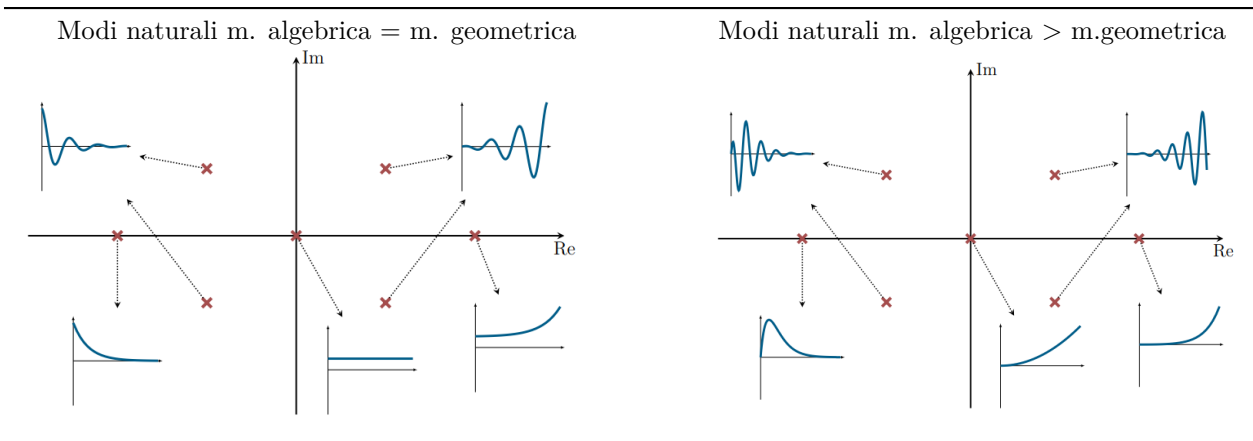
Modi naturali: autovalori reali (m.a. > m.g.)



Modi naturali: autovalori complessi coniugati (m.a. > m.g.)



Modi naturali: tabella riassuntiva



Forma di Jordan di una matrice

Per una generica matrice A si può dimostrare che esiste sempre T tale che:

$$J = TAT^{-1}$$

di μ autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ con n_i molteplicità algebrica di λ_i

$$J = \text{diag}\{J_1, \dots, J_\mu\}$$

con J_i blocco di Jordan associato all'autovalore λ_i dato da

$$J_i = \text{diag}\{J_{i1}, \dots, J_{i\nu_i}\}$$

con $J_{ih} \in \mathbb{R}^{\eta_{ih} \times \eta_{ih}}$ miniblocchi di Jordan dell'autovalore λ_i dati da

$$J_{ih} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dove $\sum_{h=1}^{\nu_i} \eta_{ih} = n_i$

Esponenziale di un miniblocco

Dato J_{ih} definito come nel paragrafo precedente allora il suo esponenziale $e^{J_{ih}t}$ è dato da (λ_i reale o complesso)

$$e^{J_{ih}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\eta_{ih}-1}}{(\eta_{ih}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: carrello

Prendendo in esempio il carrello con la massa e la molla e considerando k costante cosicchè il sistema sia LTI, si ha:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$

Autovalori: $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$, $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$

Se applichiamo un controllo $u = -hx_2$ gli autovalori diventano:

$$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}, \quad \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

Se $h^2 > 4Mk$ allora autovalori reali, se $h^2 < 4Mk$ autovalori complessi coniugati.

Se $h^2 = 4Mk \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$ (m.a.=2), si può dimostrare che m.g.=1, quindi blocco di Jordan 2×2 :

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \\ e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

STABILITÀ

Equilibrio stabile Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$

Equilibrio instabile Uno stato di equilibrio x_e si dice instabile se non è stabile.

Equilibrio attrattivo Uno stato di equilibrio x_e si dice attrattivo se $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

Equilibrio asintoticamente stabile Uno stato di equilibrio x_e si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo

Stabilità locale Le definizioni date sottointendono la parola locale, cioè la proprietà vale in un intorno di x_e

Stabilità globale Le proprietà di stabilità ed asintotica stabilità sono globali se valgono $\forall x_e \in \mathbb{R}^n$

Stabilità di una traiettoria Le definizioni di stabilità si possono generalizzare a una traiettoria $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$

STABILITÀ INTERNA DI SLTI

Nei sistemi lineari se $u = 0$ allora $x = 0$ è **sempre** un equilibrio. Nei sistemi lineari si può dimostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, per questo motivo si parla di **stabilità del sistema**.

Teorema 1

Un SLTI è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

Teorema 2

Un SLTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i miniblocchi di Jordan associati hanno dimensione 1)

Conseguenza immediata è che se si ha almeno un autovalore a parte reale positiva o se almeno un autovalore a parte reale nulla ha m.a. $> \text{m.g.}$

Prendendo in esame l'esempio del carrello, se $h^2 > 4Mk$ o se $h^2 < 4Mk$ gli autovalori, in entrambi i casi, sono a parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile. Se, invece, $h^2 = 4Mk$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$ (m.a. = 2), si può però dimostrare che m.g. = 2 e che gli autovalori sono a parte reale negativa quindi il sistema è asintoticamente stabile.

RETROAZIONE DELLO STATO

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Supponendo di misurare l'intero stato, ovvero se $y(t) = x(t)$ allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice di guadagni e $v(t)$ un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato. Risulta quindi

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile dobbiamo progettare K tale che $(A + BK)$ abbia autovalori tutti a parte reale negativa. La possibilità di scegliere gli autovalori di $(A + BK)$ dipende dalla coppia di matrici (A, B) ed è legata alla proprietà di **raggiungibilità**.

Se non è possibile misurare l'intero stato, ovvero se $x(t) \neq y(t)$, esistono tecniche per ricostruire lo stato a partire dalle misure mediante sistemi ausiliari detti **osservatori**. Se si possa ricostruire o meno lo stato dipende dalla coppia (A, C) ed è legato alla proprietà di osservabilità.

LINEARIZZAZIONE DI SISTEMI NON LINEARI (tempo invarianti)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio, $f(x_e, u_e) = 0$, consideriamo una traiettoria a partire da stato iniziale $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \\ y(t) &= h(x_e, u_e) + \tilde{y}(t) = y_e + \tilde{y}(t)\end{aligned}$$

Essendo una traiettoria vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))\end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor (f e h suff. regolari) in (x_e, u_e)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \text{term. ord. sup.} = \\ &= f(x_e, u_e) + A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} = \\ &= A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t)\end{aligned}$$

$$y_e + \tilde{y}(t) = h(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \text{term. ord. sup.}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= \frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}\end{aligned}$$

Conseguentemente ponendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} &= A_e \in \mathbb{R}^{n \times n} & \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} &= B_e \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ \frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} &= C_e & \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} &= D_e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} & \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0 \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}\end{aligned}$$

Approssimando

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &\approx A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) \\ \dot{\tilde{y}}(t) &\approx C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t)\end{aligned}$$

Quindi il sistema linearizzato risulta

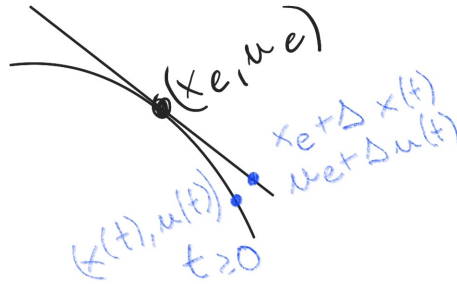
$$\begin{aligned}\dot{\Delta x}(t) &= A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C_e \Delta x(t) + D_e \Delta u(t)\end{aligned}$$

Con $(\Delta x(t), \Delta u(t)), t \geq 0$, traiettoria del linearizzato.

Le traiettorie del sistema linearizzato soddisfano

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \approx x_e + \Delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \approx u_e + \Delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \tilde{y}(t) \approx y_e + \Delta y(t)\end{aligned}$$

per variazioni sufficientemente piccole (Δ sufficientemente piccolo).



Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno a (x_e, u_e) è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio x_e , relativo all'ingresso u_e è (localmente) asintoticamente stabile.

Ricorda: per vedere se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile in un intorno della coppia di equilibrio si guardano gli autovalori di A (o di $A + BK$ se è retroazionato).

Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio. Se il linearizzato intorno a (x_e, u_e) ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora l'equilibrio x_e , relativa all'ingresso u_e , è instabile.

N.B.: non si può dire nulla in caso abbiano solo autovalori a parte reale minore o uguale a zero con almeno un autovalore a parte reale nulla.

Controllo non lineare mediante linearizzazione

Consideriamo il sistema non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Linearizzazione intorno all'equilibrio (x_e, u_e) ($A_e = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \right|_{x=x_e, u=u_e}$, $B_e = \left. \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right|_{x=x_e, u=u_e}$)

$$\dot{\Delta x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

Obiettivo: portare $\Delta x(t)$ a zero, ovvero $x(t)$ a x_e “in modo approssimato”. Usando retroazione dello stato $\Delta u(t) = K \Delta x(t) + \Delta v(t)$ otteniamo il sistema in anello chiuso:

$$\dot{\Delta x}(t) = (A_e + B_e K) \Delta x(t) + B_e \Delta v(t)$$

Posso progettare K in modo che $(A_e + B_e K)$ sia asintoticamente stabile. Grazie ai teoremi sulla linearizzazione x_e risulta un equilibrio (localmente asintoticamente stabile per il sistema lineare non in anello chiuso retroazionato).

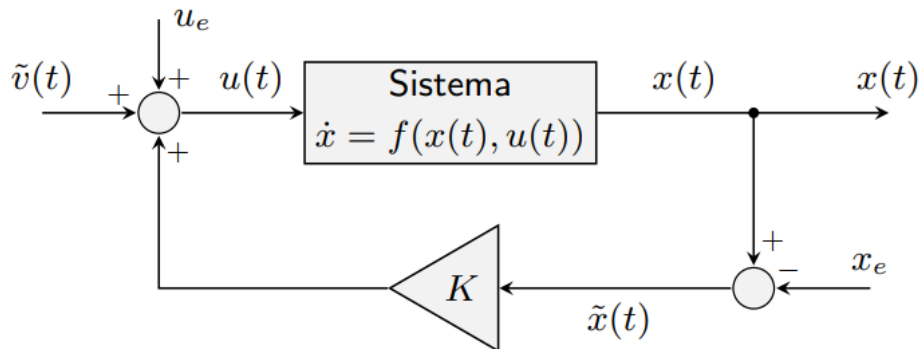
Visto che $\Delta x(t) \approx x(t) - x_e$:

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t) \approx u_e + K \Delta x(t) + \tilde{v}(t)$$

Perciò la legge di controllo finale sarà:

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t) \quad \text{feedback (retroazione) per il sistema non lineare}$$

Con la K progettata sul sistema linearizzato.



TRASFORMATA DI LAPLACE

Richiami sui numeri complessi

Un numero complesso può essere rappresentato in 2 modi:

- **Forma cartesiana:**

$$s = \sigma + j\omega \quad \sigma \text{ parte reale}, \omega \text{ parte immaginaria}$$

- **Forma polare:**

$$s = \rho e^{j\varphi} \quad \rho \text{ modulo}, \varphi \text{ argomento}$$

Ovviamente esistono le formule per il passaggio fra l'una e l'altra:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad \varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

$$\sigma = \rho \cos(\varphi) \quad \omega = \rho \sin(\varphi)$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

Data una funzione complessa f di variabile reale t , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Sia $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa, allora:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{Trasformata di Laplace di } f(t)$$

Se esiste per qualche s , ossia se l'integrale converge.

Notazione: Trasformazione di Laplace $\mathcal{L} \quad f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

OSSERVAZIONI

Ascissa di convergenza Sia $\bar{\sigma} > -\infty$ estremo inferiore di $s = \sigma + j\omega$ per cui l'integrale converge. Allora la trasformata esiste nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > \bar{\sigma}$. $\bar{\sigma}$ è detta ascissa di convergenza. La definizione si estende anche a $\operatorname{Re}(s) \leq \bar{\sigma}$.

N.B.: solo i valori di $f(t)$ per $t \geq 0$ determinano la trasformata.

N.B.: L'integrale va da 0^- a $+\infty$ quindi gli impulsi in 0 sono considerati nell'integrazione.

Trasformate razionali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove $N(s)$ e $D(s)$ sono polinomi primi fra loro.

Se f reale allora $N(s)$ e $D(s)$ a coefficienti reali.

Gli **zeri** sono le radici di $N(s) = 0$

I **poli** sono le radici di $D(s) = 0$

ANTITRASFORMAZIONE

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

con $\sigma > \bar{\sigma}$.

Notazione: antitrasformazione di Laplace $\mathcal{L}^{-1} \quad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

N.B.: $f(t)$ fornita solo per $t \geq 0$. Si assume $f(t) = 0$ per $t < 0$.

N.B.: Considerando solo $f(t)$ t.c. $f(t) = 0$ per $t < 0$ allora c'è corrispondenza biunivoca tra $f(t)$ e $F(s)$, quindi hanno lo stesso contenuto informativo.

N.B.: la definizione è poco usata per l'antitrasformazione.

PROPRIETÀ

Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad \forall \tau > 0$$

Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - a) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Derivazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Ne consegue iterando

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}f(t)\big|_{t=0}$$

Integrazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Convoluzione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

TEOREMI DEL VALORE INIZIALE E FINALE

Teorema del valore iniziale

Se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore allora

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Teorema del valore finale

Se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore e poli nulli o a parte reale negativa allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

TRASFORMATA DI SEGNALI ELEMENTARI

Delta di Dirac $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

Gradino unitario $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$

Rampa $\mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}$

Esponenziale $\mathcal{L}[e^{\alpha t}1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$

Seno $\mathcal{L}[\sin(\omega t)1(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Coseno $\mathcal{L}[\cos(\omega t)1(t)] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[\frac{d}{dt} \sin(\omega t)1(t)] = \frac{s}{\omega} \mathcal{L}[\sin(\omega t)1(t)] = \frac{s}{\omega} \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Seno con fase $\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi)1(t)] = \frac{\omega \cos(\varphi) \pm s \sin(\varphi)}{s^2+\omega^2}$

Coseno con fase $\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi)1(t)] = \frac{s \cos(\varphi) \mp \omega \sin(\varphi)}{s^2+\omega^2}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Sistema non variante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dt}x(t)] = \mathcal{L}[f(x(t), u(t))]$$

$$sX(s) - x(0) = \int_0^{+\infty} f(x(t), u(t))e^{-st}dt$$

Sistema lineare tempo variante

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$sX(s) - x_0 = \mathcal{L}[A(t)x(t) + B(t)u(t)] = \mathcal{L}[A(t)x(t)] + \mathcal{L}[B(t)u(t)] = \int_0^{+\infty} A(t)x(t)e^{-st}dt + \int_0^{+\infty} B(t)u(t)e^{-st}dt$$

SISTEMA LINEARE TEMPO INVARIANTE

Dato il seguente SLTI con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ ed $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

con $x(0) = x_0$

Siano $X(s) := \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$.

Trasformando entrambi i membri e ricordando che $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

Si possono quindi individuare le trasformate dell'evoluzione libera (quelle dipendenti da x_0) e dell'evoluzione forzata (quelle dipendenti da $U(s)$):

- Evoluzione libera:

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

- Evoluzione forzata:

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y_f(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

Considerando la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita:

$$Y_f(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

La matrice:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è detta **funzione di trasferimento**.

Se il sistema è SISO allora è uno scalare.

Dunque ora si ha una rappresentazione ingress-uscita (detta rappresentazione *esterna*) del tipo:

$$Y_f(s) = G(s)U(s)$$

Se si assumesse $x(0) = 0$ allora si avrebbe

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

N.B.: la funzione di trasferimento è data dal rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso $x(0) = x_0 = 0$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Operativamente la funzione di trasferimento può essere calcolata come:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

Nel caso sia SISO la funzione è una funzione razionale fratta:

- il denominatore di grado n e numeratore di grado $\leq n$ ($= n$ se $D \neq 0$ e ne consegue che il sistema sarebbe proprio e NON strettamente proprio)
- il numeratore ed il denominatore possono avere radici comuni e quindi semplificabili, questo comporta un minore contenuto informativo rispetto alla forma di stato
- la relazione fra grado del numeratore e denominatore è detta *grado relativo*

E a livello dimensionale si avrebbe: $D \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\text{adj}(sI - A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\det(sI - A)$ che è un polinomio di grado n .

Nel caso in cui il sistema non sia SISO comunque $G(s)$ sarebbe una matrice i cui i singoli elementi sono rapporti di polinomi.

La funzione di trasferimento:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Se vista come rapporto di polinomi, può essere scritta:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Le radici di $N(s)$ sono dette **zeri**.

Le radici di $D(s)$ sono dette **poli**.

Molto importante: i poli sono radici di $\det(sI - A)$ quindi sono gli autovalori di A .

Un'altra osservazione può essere che poli e zeri sono reali o complessi coniugati poichè sono radici di polinomi a coefficienti reali.

Ma perchè usiamo la trasformata di Laplace?

Perchè, usando la trasformata di Laplace, abbiamo un dominio (diverso da quello del tempo) nel quale non dobbiamo agire e risolvere equazioni differenziali potenzialmente molto complicate, bensì si riduce tutto a rapporti di polinomi di facile risoluzione.

Rappresentazioni e parametri della funzione di trasferimento

Una forma fattorizzata è:

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

I cui poli reali sono: $-p_i$.

E gli zeri reali: $-z_i$.

Si può dimostrare che $|\xi_i| < 1$ perchè devono essere complesse coniugate:

$$\begin{aligned} s^2 + \xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2 &\Rightarrow s_{p_{i,1,2}} = -\xi_i \omega_{ni} \pm \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 - \omega_{ni}^2} \\ &= -\xi_i \omega_{ni} \pm \omega_{ni} \sqrt{\xi_i^2 - 1} \\ &= -\xi_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \end{aligned}$$

Dalla forma presentata in precedenza si può arrivare ad una seconda forma particolarmente di interesse:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni} s} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni} s} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$

detta **forma di Bode**.

Dimostrazione:

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

$$\prod_i (s + z_i) = \prod_i \left(1 + \frac{1}{z_i} s\right) z_i \quad \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2) = \prod_i \left(\frac{s^2}{\alpha_{ni}^2} + \frac{s\zeta_i}{\alpha_{ni}} + 1\right) \alpha_{ni}^2$$

$$\prod_i (s + p_i) = \prod_i \left(1 + \frac{1}{p_i} s\right) p_i \quad \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2) = \prod_i \left(\frac{s^2}{\omega_{ni}^2} + \frac{s\xi_i}{\omega_{ni}} + 1\right) \omega_{ni}^2$$

Quindi la $G(s)$ diventa:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \\ &= \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2 \prod_i \left(1 + \frac{1}{z_i} s\right) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{s^g \prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2 \prod_i \left(1 + \frac{1}{p_i} s\right) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)} \end{aligned}$$

Chiamando:

$$\mu = \rho \frac{\prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2} \quad \tau_i = \frac{1}{z_i} \quad T_i = \frac{1}{p_i}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \\ &= \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2 \prod_i \left(1 + \frac{1}{z_i} s\right) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{s^g \prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2 \prod_i \left(1 + \frac{1}{p_i} s\right) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)} \\ &= \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)} \end{aligned}$$

Da qui una variante un po' più chiara della forma di Bode è:

$$G(s) = \mu \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)} \quad \blacksquare$$

In cui:

- ρ costante di trasferimento, μ guadagno
- g tipo
- $-z_i$ zeri reali, $-p_i$ poli reali, τ_i e T_i costanti di tempo
- $\alpha_{ni} > 0$, $\omega_{ni} > 0$ pulsazioni naturali di zeri e poli complessi coniugati
- ζ_i , ξ_i ($|\zeta_i| < 1$ e $|\xi_i| < 1$) smorzamenti di zeri e poli complessi coniugati

Esempio sistemi del II ordine: $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + s\xi\omega_n + \omega_n^2}$

Esempio: $G(s) = 100 \frac{s+1}{s(s+10)} = \frac{100}{10} \frac{s+1}{s(1+\frac{1}{10}s)} = 10 \frac{s+1}{s(1+\frac{1}{10}s)}$

Quindi si ha: $\rho = 100$, $z = 1$, $p = 10$, $\mu = 10$, $\tau = 1$ e $T = \frac{1}{10}$

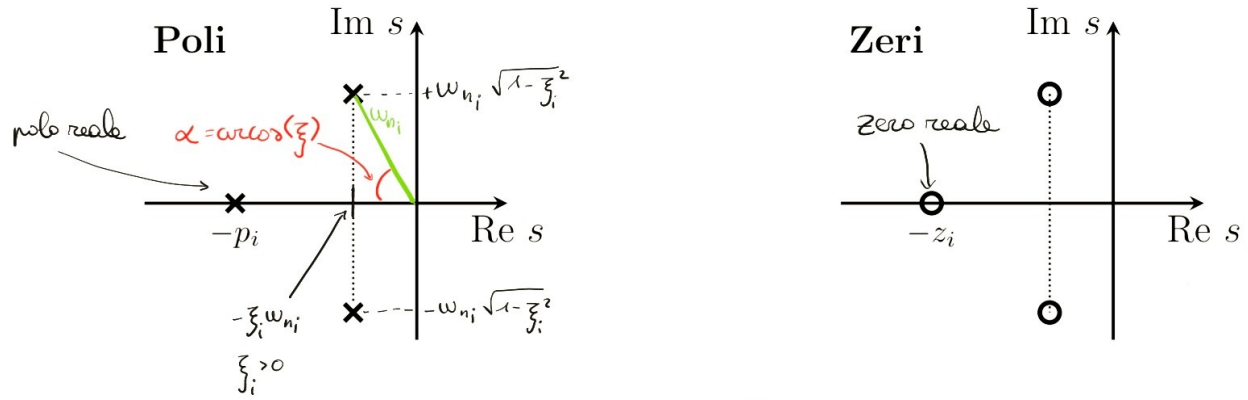


Figure 1: Rappresentazione dei poli e degli zeri sul piano complesso

Esempio 1

Dato il sistema:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$y = x_2$$

Allora

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

Esempio 2

Dato il sistema:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = 4x_2$$

$$y = x_1$$

Trasformando entrambi i membri:

$$sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) - 2X_2(s) + U(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = 4X_2(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

In alternativa calcolandola con $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ si ha $G(s) = \frac{s-4}{(s-4)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$

ANTITRASFORMAZIONE DI LAPLACE

Ricordiamo che la trasformata della risposta di un SLTI SISO è data da: $Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$ con $C(sI - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Inoltre sappiamo che si può far vedere che gli elementi di $C(sI - A)^{-1}$ sono rapporti di polinomi. Quindi ora si può scrivere:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con $N(s)$ e $D(s)$ polinomi opportuni.

Ora si ricorda che per $x(0) = 0$ (cioè in risposta forzata) si ha:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

E applicando a quest'ultima una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$ (che ha trasformata $U(s) = 1$) si arriva ad avere:

$$Y(s) = G(s)$$

Indi per cui per la risposta all'impulso le radici di $D(s)$ sono i poli della funzione di trasferimento.

Esempio di antitrasformazione tramite sviluppo di Heaviside

Data la risposta:

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)}$$

e mettiamo di volerla scrivere come:

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+5}$$

con r_1, r_2 coefficienti.

Calcolando l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+5} \right] && \text{per linearità della trasformata} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r_1}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r_2}{s+5} \right] \\ &= r_1 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] + r_2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+5} \right] && \text{ricordando le trasformate fondamentali} \\ &= r_1 e^{-t} 1(t) + r_2 e^{-5t} 1(t) \end{aligned}$$

Ma come calcolare r_1 e r_2 ?

Si sceglie un polo e si calcola la $Y(s)$ moltiplicata per il fatto che corrisponde al polo per la $s \rightarrow \text{polo}$. Nel nostro caso scegliamo $(s+1)$ quindi $\text{polo} = -1$:

$$\begin{aligned} (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} &= (s+1) \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)} \Big|_{s=-1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} &= (s+1) \frac{r_1}{s+1} + (s+1) \frac{r_2}{s+5} \Big|_{s=-1} = r_1 \end{aligned}$$

Allora

$$r_1 = (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{10(s+2)}{s+5} \Big|_{s=-1} = \frac{5}{2}$$

Si fa lo stesso per r_2 e risulta:

$$r_2 = (s+5)Y(s) \Big|_{s=-5} = \frac{10(s+2)}{s+1} \Big|_{s=-5} = \frac{15}{2}$$

Riassunto:

$$Y(s) = \frac{5}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{15}{2} \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{5}{2} e^{-t} 1(t) + \frac{15}{2} e^{-5t} 1(t)$$

SVILUPPO DI HEAVISIDE O IN FRATTI SEMPLICI

Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)

Si può scrivere $Y(s)$ come:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s+p_i}$$

Gli r_i sono detti **residui**.

Consideriamo:

$$(s+p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{r_j(s+p_i)}{s+p_j} \Big|_{s=-p_i} + r_i$$

Quindi ciascun residuo r_i può essere calcolato come

$$r_i = (s+p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Infine, antitrasformando:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s+p_i}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n r_i \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+p_i} \right] = \sum_{i=1}^n r_i e^{-p_i t} 1(t)$$

Osservazione: r_i reali se associati a poli reali, r_i complessi coniugati se associati a poli complessi coniugati.

È interessante notare, inoltre, la forma reale dei poli complessi coniugati trovati col procedimento precedente, quindi consideriamo la coppia di poli complessi coniugati seguente:

$$p_{i,1} = \sigma_i + j\omega_i \quad p_{i,2} = \sigma_i - j\omega_i$$

E i residui associati sono:

$$r_{i,1} = M_i e^{-j\varphi_i} \quad r_{i,2} = M_i e^{j\varphi_i}$$

Quindi l'antitrasformata dei due termini associati è data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{r_{i,2}}{s+p_{i,2}} \right] &= M_i e^{-j\varphi_i} e^{-p_{i,1}t} 1(t) + M_i e^{j\varphi_i} e^{-p_{i,2}t} 1(t) \\ &= M_i e^{-j\varphi_i} e^{-(\sigma_i + j\omega_i)t} 1(t) + M_i e^{j\varphi_i} e^{-(\sigma_i - j\omega_i)t} 1(t) \\ &= M_i e^{-\sigma_i t} (e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} + e^{j(\omega_i t + \varphi_i)}) 1(t) \\ &= 2M_i e^{-\sigma_i t} \frac{(e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} + e^{j(\omega_i t + \varphi_i)})}{2} 1(t) \\ &= 2M_i e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) 1(t) \end{aligned}$$

Da cui valgono le regole di divergenza e convergenza viste per i modi naturali:

- $-\sigma_i > 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ diverge
- $-\sigma_i = 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ rimane costante
- $-\sigma_i < 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ converge

Caso 2: poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

Si può scrivere $Y(s)$ come:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{r_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

con $r_{i,h}$, $h = 1, \dots, n_i$, residui del polo $-p_i$.

Si consideri:

$$\begin{aligned} (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} &= \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \sum_{h=1}^{n_j} \frac{r_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i-h} r_{i,h} \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \sum_{h=1}^{n_j} \frac{r_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i-1} (s + p_i)^{n_i-h} r_{i,h} + r_{i,n_i} \end{aligned}$$

Quindi il residuo r_{i,n_i} è dato da:

$$r_{i,n_i} = (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Derivando $(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}$ si calcolano gli altri residui come:

$$r_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \frac{d^{n_i-h}}{ds^{n_i-h}} \left[(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \Big|_{s=-p_i}$$

Antitrasformando la $Y(s)$ sviluppata in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{r_{i,h}}{(s + p_i)^h} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} r_{i,h} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + p_i)^h} \right] \\ &\text{ricordando le regole di antitrasformazione} \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} r_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t) \end{aligned}$$

Si può dimostrare che per una coppia di poli complessi coniugati

$$\sigma_i + j\omega_i \quad \text{e} \quad \sigma_i - j\omega_i$$

con molteplicità n_i , il contributo elementare associato è dato da:

$$\sum_{h=1}^{n_i} 2M_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$

I modi naturali per un polo reale (multiplo) $-p_i$ è dato da:

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t)$$

Mentre per una coppia di poli complessi coniugati (multipli) $-(\sigma_i + j\omega_1)$ e $-(\sigma_i - j\omega_1)$ è dato da:

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$

Da qui le regole di convergenza sono le stesse viste per i modi naturali con molteplicità algebrica maggiore di quella geometrica.

Esempio di antitrasformazione tramite sviluppo di Heaviside: caso 2

Data la funzione:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2}$$

Si vuole scrivere come:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_{2,1}}{s+2} + \frac{r_{2,2}}{(s+2)^2}$$

Si calcola r_1 :

$$r_1 = s \frac{s+1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

Si procede calcolando $Y(s)(s+2)^2 \Big|_{s=-2}$:

$$Y(s)(s+2)^2 \Big|_{s=-2} = \begin{cases} (s+2)^2 \frac{s+1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} \\ (s+2)^2 \frac{r_1}{s} + (s+2)^2 \frac{r_{2,1}}{s+2} + (s+2)^2 \frac{r_{2,2}}{(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = r_{2,2} \end{cases} \implies r_{2,2} = \frac{1}{2}$$