

# CONTROLLI AUTOMATICI

Pierluca Pevere



# SISTEMI IN FORMA DI STATO

Un sistema si dice **tempo continuo** se la variabile  $t$  è una variabile reale ( $t \in \mathbb{R}$ ).  
Si definiscono le seguenti equazioni:

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$  detta equazione (o trasformazione) di uscita

Con ovviamente  $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$

Dove:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stato del sistema all'istante  $t$
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ingresso del sistema all'istante  $t$
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  uscita del sistema all'istante  $t$

Quindi:  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$   $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$   $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$

**Equazione di stato** È un'equazione differenziale ordinaria vettoriale del prim'ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t) \\ &\quad \vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t) \end{aligned}$$

Dove  $\mathbb{R}^n$  si dice spazio di stato e  $n$  ordine del sistema.

Mentre  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta funzione di stato

**Equazione di uscita** È un'equazione algebrica:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= h_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t) \\ &\quad \vdots \\ \dot{y}_p(t) &= h_p(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t) \end{aligned}$$

Dove  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  è detta funzione di uscita

Se la soluzione  $x(t)$  a partire da un istante iniziale  $t_0$  è univocamente determinata da  $x(t_0)$  e  $u(\tau)$ ,  $\tau \geq t_0$ , allora il sistema è detto **causale**.

Un sistema si dice **tempo discreto** se  $t$  è una variabile intera ( $t \in \mathbb{Z}$ ).

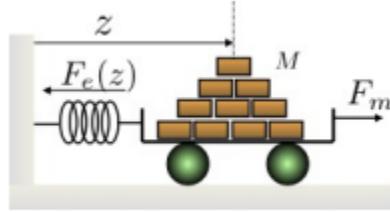
Si definiscono:

- $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$  detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$  detta equazione (o trasformazione) di uscita

**NB:** l'equazione di stato non è più differenziale ordinaria ma è un'equazione alle differenze finite.

La definizione di stato, uscita e ingresso rimane invariata rispetto al caso tempo continuo.

### ESEMPIO carrello massa molla



Utilizzando la legge di Newton (prendendo  $z$  come la posizione del centro di massa) si ha:

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con  $M$  massa e  $F_e$  forza elastica data da:

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

sostituendo:

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

Definiamo:

- $x_1 := z$  (posizione),  $x_2 := \dot{z}$  (velocità) di conseguenza lo stato risulta  $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := F_m$  ingresso

Supponendo di misurare  $z(t)$  con un sensore allora  $y := z$ , sia  $k(t) = k$  e considerando come uscita l'energia totale  $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) = \frac{1}{2}(kx_1^2(t) + Mx_2^2(t))\end{aligned}$$

## ESEMPIO pendolo



Equazione dei momenti ( $C_m$  coppia motore):

$$Ml^2\ddot{\theta} = C_{grav} + C_{drag} + C_m$$

con  $M$  massa e  $C_{grav}$  e  $C_{drag}$  date da

$$C_{grav} = -Mgl\sin(\theta), \quad C_{drag} = -b\dot{\theta}$$

con  $b$  coefficiente d'attrito.

Definiamo:

- $x_1 := \theta$  (posizione angolare) e  $x_2 := \dot{\theta}$  (velocità angolare), di conseguenza lo stato  $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := C_m$  ingresso

Supponiamo di misurare  $\theta$  tramite un sensore angolo, allora  $y := \theta$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Se invece misuriamo la posizione verticale tramite sensore, allora  $y := -l\cos(\theta)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) &= -l\cos(x_1(t))\end{aligned}$$

## Definizione di traiettoria

Dato un istante iniziale  $t_0$  e uno stato iniziale  $x_{t_0}$ , la funzione del tempo  $(x(t), u(t))$ ,  $t \geq t_0$ , che soddisfa l'equazione di stato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  si dice **traiettoria** (o movimento) **del sistema**. In particolare,  $x(t)$  si dice traiettoria dello stato. Consistentemente,  $y(t)$  si dice traiettoria dell'uscita.

Per sistemi senza ingresso (detti non forzati) la traiettoria (dello stato)  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ , è determinata solo dallo stato iniziale  $x_{t_0}$ .

## EQUILIBRIO DI UN SISTEMA

**Equilibrio di un sistema non forzato** Dato un sistema non forzato  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ , uno stato  $x_e$  si dice **equilibrio** del sistema se  $x(t) = x_e, t \geq t_0$  è una traiettoria del sistema.

**Coppia di equilibrio** Dato un sistema forzato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ ,  $(x_e, u_e)$  si dice coppia di equilibrio se  $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e), t \geq t_0$ , è traiettoria del sistema.

Per sistemi  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  (tempo invarianti) vale la seguente proprietà: data una coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$  vale  $f(x_e, u_e) = 0$ , vale lo stesso per sistemi non forzati (se  $x_e$  equilibrio allora  $f(x_e) = 0$ ).

Quindi ricapitolando:

- se  $x(t) = x_e \forall t \implies \dot{x}(t) = 0 \implies f(x(t), t) = 0$  (sistemi non forzati)
- se  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ :  $f(x_e) = 0 \implies x_e$  equilibrio (sistemi non forzati tempo invarianti).
- se  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ :  $f(x_e, u_e) = 0 \implies (x_e, u_e)$  coppia di equilibrio (sistemi forzati tempo invarianti).

## CLASSIFICAZIONE DI SISTEMI IN FORMA DI STATO

Dato il caso generale,  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ equazione di stato}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \text{ equazione di uscita}$$

I sistemi in forma di stato si possono classificare in:

- **SISO** (Single Input Single Output), sotto classe dei sistemi MIMO (Multiple Input Multiple Output): se  $m = p = 1$  altrimenti MIMO
- **Strettamente propri**, sotto classe di propri: se  $y = h(x(t), t)$
- **Non forzati**, sotto classe di forzati:  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$   $y(t) = h(x(t), t)$
- **Tempo invarianti** sotto classe dei tempo varianti: se data una traiettoria  $(x(t), u(t), t), t \geq t_0$ , con  $x(t_0) = x_0, \forall \Delta \in \mathbb{R}$ , vale che per  $x(t_0 + \Delta) = x_0$  allora  $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$  è una traiettoria. Si può dimostrare che i sistemi tempo invarianti sono del tipo:  
 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0$   
 $y(t) = h(x(t), u(t))$   
senza perdita di generalità si può porre  $t_0 = 0$
- **Linearità** sotto classe dei non lineari

## SISTEMI LINEARI

Un sistema è detto lineare se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in  $x$  ed  $u$ .

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t)$$

⋮

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)$$

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t)$$

⋮

$$y_p(t) = c_{p1}(t)x_1(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1}(t)u_1(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)$$

Quindi raggruppando tutti i coefficienti in matrici del tipo:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}$$

Dove  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Di conseguenza le equazioni di stato e di uscita diventano:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

## SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Un sistema si dice **lineare tempo invariante** se è lineare e le funzioni del movimento sono indipendenti dal tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Se **SISO**:  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \implies B$  è un vettore,  $C$  è un vettore riga e  $D$  è uno scalare.

### Principio di sovrapposizione degli effetti

Sia  $(x_a(t), u_a(t))$  traiettoria con  $x_a(t_0) = x_{0a}$

Sia  $(x_b(t), u_b(t))$  traiettoria con  $x_b(t_0) = x_{0b}$

Allora  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dato lo stato iniziale  $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$ , si ha che:

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è una **traiettoria del sistema**. Ovvero applicando in ingresso  $u_{ab}(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$  la traiettoria di stato è  $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

**Importante:** NON vale per sistemi non lineari

### Evoluzione libera e forzata

Sia  $x_\ell(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato ottenuta per  $x_\ell(t_0) = x_0$  e  $u_\ell(t) = 0$ ,  $t \geq t_0$ , detta **evoluzione libera**

Sia  $x_f(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato ottenuta per  $x_f(t_0) = 0$  e  $u_f(t) = u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , detta **evoluzione forzata**

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale  $x(t_0) = x_0$  e applicando l'ingresso  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$$

Ciò NON vale per sistemi non lineari (il principio di sovrapposizione vale solo per sistemi lineari)

## Traiettorie di un SLTI e rappresentazioni equivalenti

Dato il SLTI generico:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dalla notazione introdotta nel paragrafo precedente si può scrivere:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

Ricorda:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Proprietà della matrice esponenziale:

- Esponenziale e cambio di base:  $e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$
- Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi (forma di Jordan): l'esponenziale di una matrice di questo tipo è una matrice diagonale a blocchi in cui ciascun blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente della matrice di partenza

Difatti l'esponenziale di una matrice diagonale  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  è:  $e^{\Lambda t} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$

Dalle proprietà sopraelencate si può giungere ad una rappresentazione equivalente delle equazioni di traiettorie e uscite dei SLTI effettuando un cambio di base mediante una matrice  $T$  (invertibile):

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= Tx(t) \\ x(t) &= T^{-1}\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned}$$

con:  $\hat{A} = TAT^{-1}$ ,  $\hat{B} = TB$ ,  $\hat{C} = CT^{-1}$ ,  $\hat{D} = D$

Tutto questo per cambiare la posizione dell'origine in modo tale da non avere errore (non avere un gap fra l'origine e lo stato iniziale).

## Modi naturali

Dato il SLTI generico:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Indicando con  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  gli  $r \leq n$  autovalori (reali e complessi coniugati) distinti della matrice  $A$ , con molteplicità algebrica  $n_1, \dots, n_r \geq 0$  tali che  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ .

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato  $x_\ell(t)$  si possono scrivere come:

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{j i q} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di  $h_i \leq n_i$ , dove i coefficienti  $\gamma_{j iq}$  dipendono dallo stato iniziale  $x(0)$ .

I termini  $t^{q-1}e^{\lambda_i t}$  sono detti **modi naturali** del sistema. L'evoluzione libera è **combinazione lineare dei modi**.

Inoltre poiché l'uscita è lineare nello stato, anche l'evoluzione libera dell'uscita è combinazione lineare dei modi.

**Forma reale dei modi di un sistema** Se la matrice  $A$  del SLTI è reale e  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$  è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato  $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$  è autovalore di  $A$ , inoltre si può dimostrare che i coefficienti  $\gamma_{j iq}$  corrispondenti agli autovalori complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati. Si verifica inoltre per calcolo diretto che  $x_{\ell,j}(t)$  sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati  $\lambda_i$  e  $\bar{\lambda}_i$  sono del tipo:

$$t^{q-1}e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

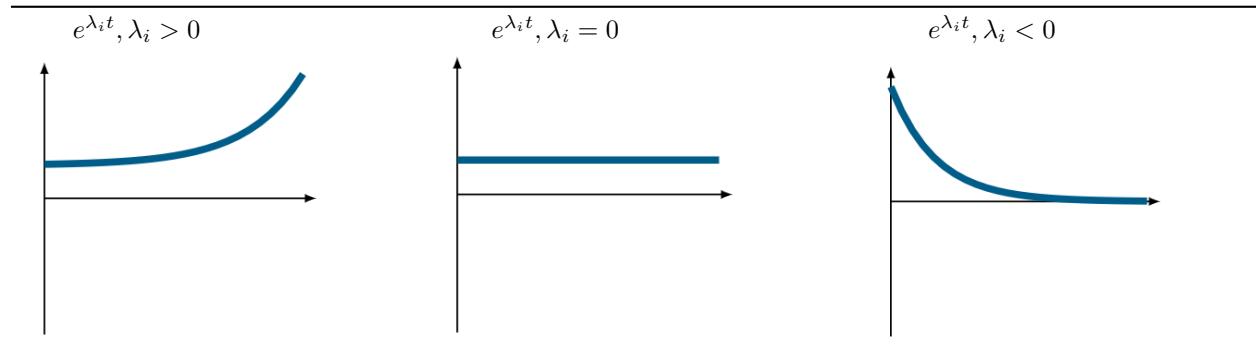
con opportuni valori della fase  $\phi_i$ .

Nel caso in cui le molteplicità algebriche  $n_1, \dots, n_r$  degli autovalori di  $A$  coincidano con le molteplicità geometriche, allora i coefficienti  $h_i$  sono tutti pari ad 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

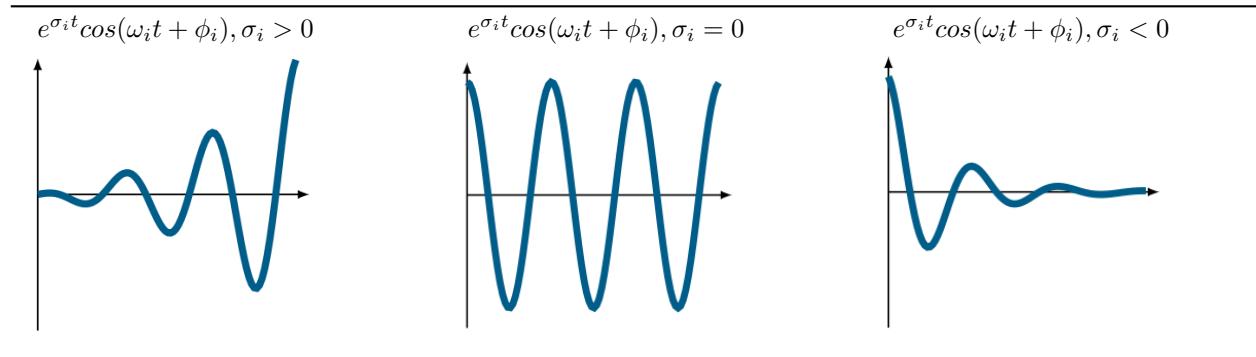
$$e^{\lambda_i t} \quad \text{per autovalori reali}$$

$$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad \text{per autovalori complessi coniugati}$$

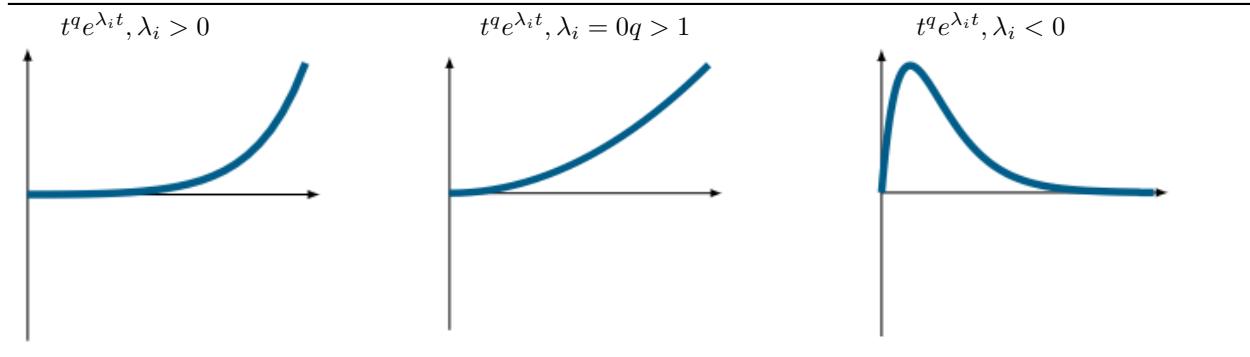
### Modi naturali: autovalori reali semplici (m.a. = m.g.)



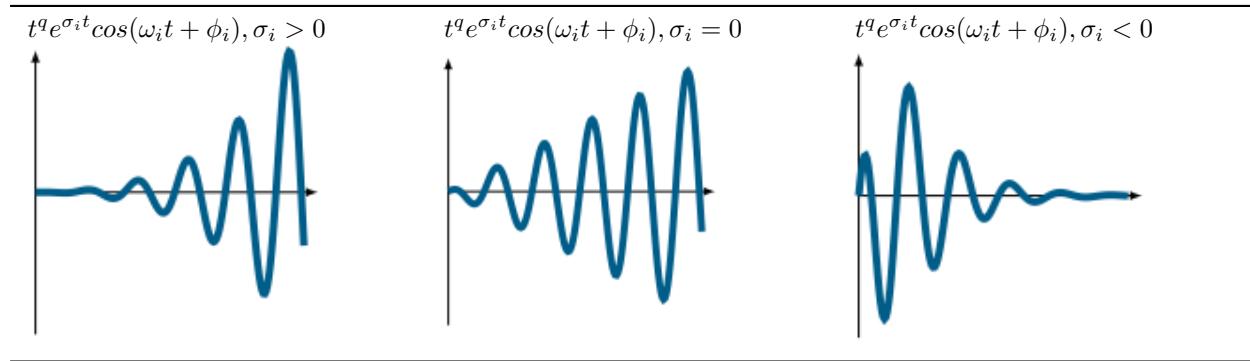
### Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici (m.a. = m.g.)



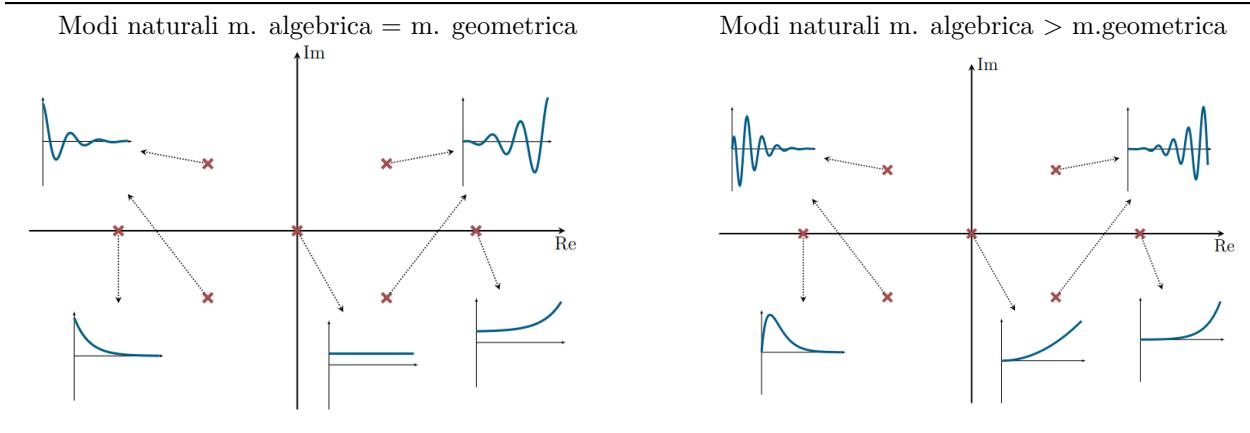
### Modi naturali: autovalori reali (m.a. > m.g.)



### Modi naturali: autovalori complessi coniugati (m.a. > m.g.)



### Modi naturali: tabella riassuntiva



### Forma di Jordan di una matrice

Per una generica matrice  $A$  si può dimostrare che esiste sempre  $T$  tale che:

$$J = TAT^{-1}$$

di  $\mu$  autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$  con  $n_i$  molteplicità algebrica di  $\lambda_i$

$$J = \text{diag}\{J_1, \dots, J_\mu\}$$

con  $J_i$  blocco di Jordan associato all'autovalore  $\lambda_i$  dato da

$$J_i = \text{diag}\{J_{i1}, \dots, J_{i\nu_i}\}$$

con  $J_{ih} \in \mathbb{R}^{\eta_{ih} \times \eta_{ih}}$  miniblocchi di Jordan dell'autovalore  $\lambda_i$  dati da

$$J_{ih} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dove  $\sum_{h=1}^{\nu_i} \eta_{ih} = n_i$

### Esonenziale di un miniblocco

Dato  $J_{ih}$  definito come nel paragrafo precedente allora il suo esponenziale  $e^{J_{ih}t}$  è dato da ( $\lambda_i$  reale o complesso)

$$e^{J_{ih}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\eta_{ih}-1}}{(\eta_{ih}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Esempio: carrello

Prendendo in esempio il carrello con la massa e la molla e considerando  $k$  costante cosicchè il sistema sia LTI, si ha:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{aligned}$$

Autovalori:  $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$ ,  $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$

Se applichiamo un controllo  $u = -hx_2$  gli autovalori diventano:

$$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}, \quad \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

Se  $h^2 > 4Mk$  allora autovalori reali, se  $h^2 < 4Mk$  autovalori complessi coniugati.

Se  $h^2 = 4Mk \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$  (m.a.=2), si può dimostrare che m.g.=1, quindi blocco di Jordan  $2 \times 2$ :

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \\ e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

## STABILITÀ

**Equilibrio stabile** Uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice stabile se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x_0$  tale che  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$  allora risulti  $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$

**Equilibrio instabile** Uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice instabile se non è stabile.

**Equilibrio attrattivo** Uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice attrattivo se  $\exists \delta > 0$  tale che  $\forall x_0$  tale che  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$  allora risulti  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

**Equilibrio asintoticamente stabile** Uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo

**Stabilità locale** Le definizioni date sottointendono la parola locale, cioè la proprietà vale in un intorno di  $x_e$

**Stabilità globale** Le proprietà di stabilità ed asintotica stabilità sono globali se valgono  $\forall x_e \in \mathbb{R}^n$

**Stabilità di una traiettoria** Le definizioni di stabilità si possono generalizzare a una traiettoria  $\bar{x}(t), t \geq 0$

## STABILITÀ INTERNA DI SLTI

Nei sistemi lineari se  $u = 0$  allora  $x = 0$  è **sempre** un equilibrio. Nei sistemi lineari si può dimostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, per questo motivo si parla di **stabilità del sistema**.

### Teorema 1

Un SLTI è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

### Teorema 2

Un SLTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i miniblocchi di Jordan associati hanno dimensione 1)

Conseguenza immediata è che se si ha almeno un autovalore a parte reale positiva o se almeno un autovalore a parte reale nulla ha m.a. > m.g.

Prendendo in esame l'esempio del carrello, se  $h^2 > 4Mk$  o se  $h^2 < 4Mk$  gli autovalori, in entrambi i casi, sono a parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile. Se, invece,  $h^2 = 4Mk$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$  (m.a. = 2), si può però dimostrare che m.g. = 2 e che gli autovalori sono a parte reale negativa quindi il sistema è asintoticamente stabile.

## RETROAZIONE DELLO STATO

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Supponendo di misurare l'intero stato, ovvero se  $y(t) = x(t)$  allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice di guadagni e  $v(t)$  un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato. Risulta quindi

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile dobbiamo progettare  $K$  tale che  $(A + BK)$  abbia autovalori tutti a parte reale negativa. La possibilità di scegliere gli autovalori di  $(A + BK)$  dipende dalla coppia di matrici  $(A, B)$  ed è legata alla proprietà di **raggiungibilità**.

Se non è possibile misurare l'intero stato, ovvero se  $x(t) \neq y(t)$ , esistono tecniche per ricostruire lo stato a partire dalle misure mediante sistemi ausiliari detti **osservatori**. Se si possa ricostruire o meno lo stato dipende dalla coppia  $(A, C)$  ed è legato alla proprietà di osservabilità.

## LINEARIZZAZIONE DI SISTEMI NON LINEARI (tempo invarianti)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Sia  $(x_e, u_e)$  una coppia di equilibrio,  $f(x_e, u_e) = 0$ , consideriamo una traiettoria a partire da stato iniziale  $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \\ y(t) &= h(x_e, u_e) + \tilde{y}(t) = y_e + \tilde{y}(t)\end{aligned}$$

Essendo una traiettoria vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))\end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor ( $f$  e  $h$  suff. regolari) in  $(x_e, u_e)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \frac{\partial}{\partial u}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \text{term. ord. sup.} = \\ &= f(x_e, u_e) + A_e\tilde{x}(t) + B_e\tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} = \\ &= A_e\tilde{x}(t) + B_e\tilde{u}(t)\end{aligned}$$

$$y_e + \tilde{y}(t) = h(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \frac{\partial}{\partial u}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \text{term. ord. sup.}$$

Quindi

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

Conseguentemente ponendo

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = A_e \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = B_e \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = C_e \quad \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = D_e$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$$

$$\tilde{y}(t) = C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

Approssimando

$$\dot{\tilde{x}}(t) \approx A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t)$$

$$\tilde{y}(t) \approx C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t)$$

Quindi il sistema linearizzato risulta

$$\dot{\Delta x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = C_e \Delta x(t) + D_e \Delta u(t)$$

Con  $(\Delta x(t), \Delta u(t))$ ,  $t \geq 0$ , traiettoria del linearizzato.

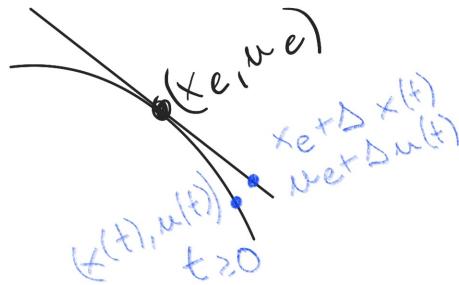
Le traiettorie del sistema linearizzato soddisfano

$$x(t) = x_e + \tilde{x}(t) \approx x_e + \Delta x(t)$$

$$u(t) = u_e + \tilde{u}(t) \approx u_e + \Delta u(t)$$

$$y(t) = y_e + \tilde{y}(t) \approx y_e + \Delta y(t)$$

per variazioni sufficientemente piccole ( $\Delta$  sufficientemente piccolo).



### Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invarianti,  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , sia  $(x_e, u_e)$  una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno a  $(x_e, u_e)$  è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio  $x_e$ , relativo all'ingresso  $u_e$  è (localmente) asintoticamente stabile.

**Ricorda:** per vedere se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile in un intorno della coppia di equilibrio si guardano gli autovalori di  $A$  (o di  $A + BK$  se è retroazionato).

## Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante,  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , sia  $(x_e, u_e)$  una coppia di equilibrio. Se il linearizzato intorno a  $(x_e, u_e)$  ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora l'equilibrio  $x_e$ , relativa all'ingresso  $u_e$ , è instabile.

**N.B.:** non si può dire nulla in caso abbiano solo autovalori a parte reale minore o uguale a zero con almeno un autovalore a parte reale nulla.

## Controllo non lineare mediante linearizzazione

Consideriamo il sistema non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Linearizzazione intorno all'equilibrio  $(x_e, u_e)$  ( $A_e = \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$ ,  $B_e = \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$ )

$$\dot{\Delta x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

*Obiettivo:* portare  $\Delta x(t)$  a zero, ovvero  $x(t)$  a  $x_e$  “in modo approssimato”. Usando retroazione dello stato  $\Delta u(t) = K \Delta x(t) + \Delta v(t)$  otteniamo il sistema in anello chiuso:

$$\dot{\Delta x}(t) = (A_e + B_e K) \Delta x(t) + B_e \Delta v(t)$$

Posso progettare  $K$  in modo che  $(A_e + B_e K)$  sia asintoticamente stabile. Grazie ai teoremi sulla linearizzazione  $x_e$  risulta un equilibrio (localmente asintoticamente stabile per il sistema lineare non in anello chiuso retroazionato).

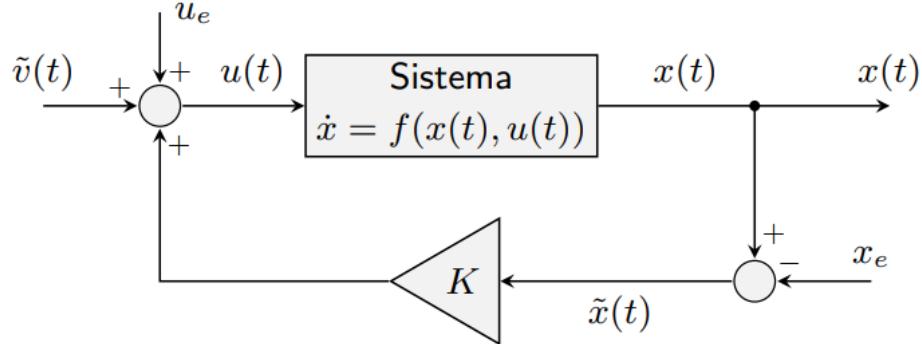
Visto che  $\Delta x(t) \approx x(t) - x_e$ :

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t) \approx u_e + K \Delta x(t) + \tilde{v}(t)$$

Perciò la legge di controllo finale sarà:

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t) \quad \text{feedback (retroazione) per il sistema non lineare}$$

Con la  $K$  progettata sul sistema linearizzato.



# TRASFORMATA DI LAPLACE

## Richiami sui numeri complessi

Un numero complesso può essere rappresentato in 2 modi:

- **Forma cartesiana:**

$$s = \sigma + j\omega \quad \sigma \text{ parte reale , } \omega \text{ parte immaginaria}$$

- **Forma polare:**

$$s = \rho e^{j\varphi} \quad \rho \text{ modulo , } \varphi \text{ argomento}$$

Ovviamente esistono le formule per il passaggio fra l'una e l'altra:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad \varphi = \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

$$\sigma = \rho \cos(\varphi) \quad \omega = \rho \sin(\varphi)$$

# TRASFORMATA DI LAPLACE

Data una funzione complessa  $f$  di variabile reale  $t$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Sia  $s = \sigma + j\omega$  una variabile complessa, allora:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{Trasformata di Laplace di } f(t)$$

Se esiste per qualche  $s$ , ossia se l'integrale converge.

**Notazione:** Trasformazione di Laplace  $\mathcal{L}$      $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

## OSSERVAZIONI

**Ascissa di convergenza** Sia  $\bar{\sigma} > -\infty$  estremo inferiore di  $s = \sigma + j\omega$  per cui l'integrale converge. Allora la trasformata esiste nel semipiano  $\text{Re}(s) > \bar{\sigma}$ .  $\bar{\sigma}$  è detta ascissa di convergenza. La definizione si estende anche a  $\text{Re}(s) \leq \bar{\sigma}$ .

**N.B.:** solo i valori di  $f(t)$  per  $t \geq 0$  determinano la trasformata.

**N.B.:** L'integrale va da  $0^-$  a  $+\infty$  quindi gli impulsi in 0 sono considerati nell'integrazione.

## Trasformate razionali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove  $N(s)$  e  $D(s)$  sono polinomi primi fra loro.

Se  $f$  reale allora  $N(s)$  e  $D(s)$  a coefficienti reali.

Gli **zeri** sono le radici di  $N(s) = 0$

I **poli** sono le radici di  $D(s) = 0$

## ANTITRASFORMAZIONE

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

con  $\sigma > \bar{\sigma}$ .

**Notazione:** antitrasformazione di Laplace  $\mathcal{L}^{-1} \quad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

**N.B.:**  $f(t)$  fornita solo per  $t \geq 0$ . Si assume  $f(t) = 0$  per  $t < 0$ .

**N.B.:** Considerando solo  $f(t)$  t.c.  $f(t) = 0$  per  $t < 0$  allora c'è corrispondenza biunivoca tra  $f(t)$  e  $F(s)$ , quindi hanno lo stesso contenuto informativo.

**N.B.:** la definizione è poco usata per l'antitrasformazione.

## PROPRIETÀ

### Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

### Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad \forall \tau > 0$$

### Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - a) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

### Derivazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Ne consegue iterando

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t) \Big|_{t=0}$$

### Integrazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

### Convoluzione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

## TEOREMI DEL VALORE INIZIALE E FINALE

### Teorema del valore iniziale

Se  $f(t)$  reale con trasformata razionale  $F(s)$  con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore allora

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

## Teorema del valore finale

Se  $f(t)$  reale con trasformata razionale  $F(s)$  con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore e poli nulli o a parte reale negativa allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

## TRASFORMATA DI SEGNALI ELEMENTARI

**Delta di Dirac**  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

**Gradino unitario**  $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{t}$

**Rampa**  $\mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}$

**Espoenziale**  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$

**Seno**  $\mathcal{L}[\sin(\omega t) 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

**Coseno**  $\mathcal{L}[\cos(\omega t) 1(t)] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \sin(\omega t) 1(t)\right] = \frac{s}{\omega} \mathcal{L}[\sin(\omega t) 1(t)] = \frac{s}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

**Seno con fase**  $\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi) 1(t)] = \frac{\omega \cos(\varphi) \pm s \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$

**Coseno con fase**  $\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi) 1(t)] = \frac{s \cos(\varphi) \mp \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$

## FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

### Sistema non variante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} x(t)\right] &= \mathcal{L}[f(x(t), u(t))] \\ sX(s) - x(0) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(x(t), u(t)) e^{-st} dt \end{aligned}$$

### Sistema lineare tempo variante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ sX(s) - x_0 &= \mathcal{L}[A(t)x(t) + B(t)u(t)] = \mathcal{L}[A(t)x(t)] + \mathcal{L}[B(t)u(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} A(t)x(t)e^{-st} dt + \int_{0^-}^{+\infty} B(t)u(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

## SISTEMA LINEARE TEMPO INVARIANTE

Dato il seguente SLTI con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  ed  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

con  $x(0) = x_0$

Siano  $X(s) := \mathcal{L}[x(t)]$ ,  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  e  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ .

Trasformando entrambi i membri e ricordando che  $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$ :

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

Si possono quindi individuare le traformate dell'evoluzione libera (quelle dipendenti da  $x_0$ ) e dell'evoluzione forzata (quelle dipendenti da  $U(s)$ ):

- Evoluzione libera:

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

- Evoluzione forzata:

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y_f(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

Considerando la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita:

$$Y_f(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

La matrice:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è detta **funzione di traferimento**.

Se il sistema è SISO allora è uno scalare.

Dunque ora si ha una rappresentazione ingresso-uscita (detta rappresentazione *esterna*) del tipo:

$$Y_f(s) = G(s)U(s)$$

Se si assumesse  $x(0) = 0$  allora si avrebbe

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

**N.B.:** la funzione di trasferimento è data dal rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso  $x(0) = x_0 = 0$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Operativamente la funzione di traferimento può essere calcolata come:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

Nel caso sia SISO la funzione è una funzione razionale fratta:

- il denominatore di grado  $n$  e numeratore di grado  $\leq n$  ( $= n$  se  $D \neq 0$  e ne consegue che il sistema sarebbe proprio e NON strettamente proprio)
- il numeratore ed il denominatore possono avere radici comuni e quindi semplificabili, questo comporta un minore contenuto informativo rispetto alla forma di stato
- la relazione fra grado del numeratore e denominatore è detta *grado relativo*

E a livello dimensionale si avrebbe:  $D \in \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\text{adj}(sI - A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\det(sI - A)$  che è un polinomio di grado  $n$ .

Nel caso in cui il sistema non sia SISO comunque  $G(s)$  sarebbe una matrice i cui i singoli elementi sono rapporti di polinomi.

La funzione di traferimento:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Se vista come rapporto di polinomi, può essere scritta:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Le radici di  $N(s)$  sono dette **zeri**.

Le radici di  $D(s)$  sono dette **poli**.

**Molto importante:** i poli sono radici di  $\det(sI - A)$  quindi sono gli autovalori di  $A$ .

Un'altra osservazione può essere che poli e zeri sono reali o complessi coniugati poiché sono radici di polinomi a coefficienti reali.

Ma perchè usiamo la trasformata di Laplace?

Perchè, usando la trasformata di Laplace, abbiamo un dominio (diverso da quello del tempo) nel quale non dobbiamo agire e risolvere equazioni differenziali potenzialmente molto complicate, bensì si riduce tutto a rapporti di polinomi di facile risoluzione.

### Rappresentazioni e parametri della funzione di traferimento

Una forma fattorizzata è:

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

I cui poli reali sono:  $-p_i$ .

E gli zeri reali:  $-z_i$ .

Si può dimostrare che  $|\xi_i| < 1$  perchè devono essere complesse coniugate:

$$\begin{aligned} s^2 + \xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2 &\Rightarrow s_{p_{i1,2}} = -\xi_i \omega_{ni} \pm \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 - \omega_{ni}^2} \\ &= -\xi_i \omega_{ni} \pm \omega_{ni} \sqrt{\xi_i^2 - 1} \\ &= -\xi_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \end{aligned}$$

Dalla forma presentata in precedenza si può arrivare ad una seconda forma particolarmente di interesse:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$

detta **forma di Bode**.

*Dimostrazione:*

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \\
 \prod_i (s + z_i) &= \prod_i (1 + \frac{1}{z_i} s) z_i & \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2) &= \prod_i (\frac{s^2}{\alpha_{ni}^2} + \frac{s\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + 1) \alpha_{ni}^2 \\
 \prod_i (s + p_i) &= \prod_i (1 + \frac{1}{p_i} s) p_i & \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2) &= \prod_i (\frac{s^2}{\omega_{ni}^2} + \frac{s\xi_i}{\omega_{ni}} s + 1) \omega_{ni}^2
 \end{aligned}$$

Quindi la  $G(s)$  diventa:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \\
 &= \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2 \prod_i (1 + \frac{1}{z_i} s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2 \prod_i (1 + \frac{1}{p_i} s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}
 \end{aligned}$$

Chiamando:

$$\mu = \rho \frac{\prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2} \quad \tau_i = \frac{1}{z_i} \quad T_i = \frac{1}{p_i}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \\
 &= \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2 \prod_i (1 + \frac{1}{z_i} s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2 \prod_i (1 + \frac{1}{p_i} s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})} \\
 &= \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}
 \end{aligned}$$

Da qui una variante un po' più chiara della forma di Bode è:

$$G(s) = \mu \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})} \blacksquare$$

In cui:

- $\rho$  costante di trasferimento,  $\mu$  guadagno
- $g$  tipo
- $-z_i$  zeri reali,  $-p_i$  poli reali,  $\tau_i$  e  $T_i$  costanti di tempo
- $\alpha_{ni} > 0$ ,  $\omega_{ni} > 0$  pulsazioni naturali di zeri e poli complessi coniugati
- $\zeta_i, \xi_i$  ( $|\zeta_i| < 1$  e  $|\xi_i| < 1$ ) smorzamenti di zeri e poli complessi coniugati

Esempio sistemi del II ordine:  $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + s\xi\omega_n + \omega_n^2}$

Esempio:  $G(s) = 100 \frac{s+1}{s(s+10)} = \frac{100}{10} \frac{s+1}{s(1+\frac{1}{10}s)} = 10 \frac{s+1}{s(1+\frac{1}{10}s)}$

Quindi si ha:  $\rho = 100$ ,  $z = 1$ ,  $p = 10$ ,  $\mu = 10$ ,  $\tau = 1$  e  $T = \frac{1}{10}$

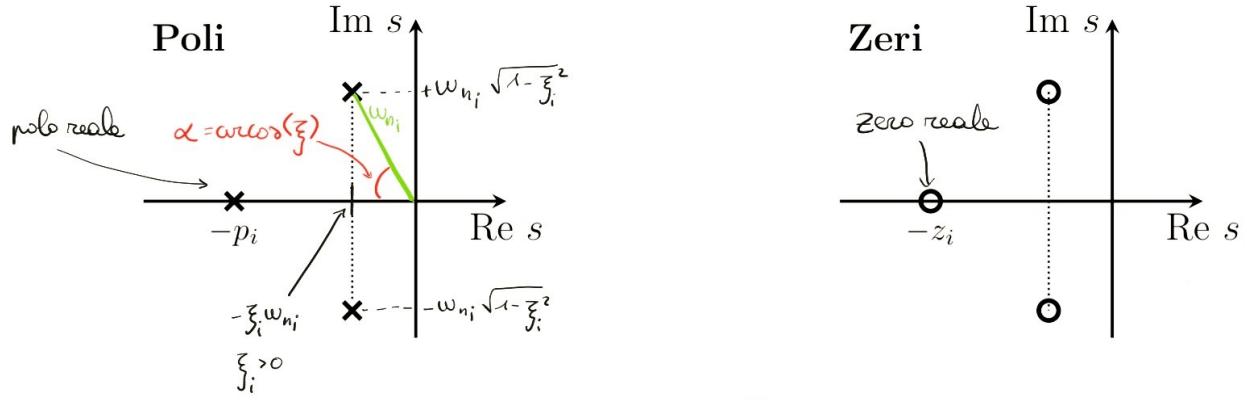


Figure 1: Rappresentazione dei poli e degli zeri sul piano complesso

### Esempio 1

Dato il sistema:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$y = x_2$$

Allora

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

### Esempio 2

Dato il sistema:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = 4x_2$$

$$y = x_1$$

Trasformando entrambi i membri:

$$sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) - 2X_2(s) + U(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = 4X_2(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

In alternativa calcolandola con  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  si ha  $G(s) = \frac{s-4}{(s-4)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$

## ANTITRAFORMAZIONE DI LAPLACE

Ricordiamo che la trasformata della risposta di un SLTI SISO è data da:  $Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$  con  $C(sI - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Inoltre sappiamo che si può far vedere che gli elementi di  $C(sI - A)^{-1}$  sono rapporti di polinomi. Quindi ora si può scrivere:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con  $N(s)$  e  $D(s)$  polinomi opportuni.

Ora si ricorda che per  $x(0) = 0$  (cioè in risposta forzata) si ha:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

E applicando a quest'ultima una delta di Dirac  $u(t) = \delta(t)$  (che ha traformata  $U(s) = 1$ ) si arriva ad avere:

$$Y(s) = G(s)$$

Indi per cui per la risposta all'impulso le radici di  $D(s)$  sono i poli della funzione di traferimento.

### Esempio di antitrasformazione tramite sviluppo di Heaviside

Data la risposta:

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)}$$

e mettiamo di volerla scrivere come:

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+5}$$

con  $r_1, r_2$  coefficienti.

Calcolando l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+5}\right] \quad \text{per linearità della trasformata} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_2}{s+5}\right] \\ &= r_1\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + r_2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] \quad \text{ricordando le trasformate fondamentali} \\ &= r_1e^{-t}1(t) + r_2e^{-5t}1(t) \end{aligned}$$

Ma come calcolare  $r_1$  e  $r_2$ ?

Si sceglie un polo e si calcola la  $Y(s)$  moltiplicata per il fatto che corrisponde al polo per la  $s \rightarrow \text{polo}$ . Nel nostro caso scegliamo  $(s+1)$  quindi  $\text{polo} = -1$ :

$$\begin{aligned} (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} &= (s+1)\frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)}\Big|_{s=-1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} &= (s+1)\frac{r_1}{s+1} + (s+1)\frac{r_2}{s+5}\Big|_{s=-1} = r_1 \end{aligned}$$

Allora

$$r_1 = (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{10(s+2)}{s+5}\Big|_{s=-1} = \frac{5}{2}$$

Si fa lo stesso per  $r_2$  e risulta:

$$r_2 = (s+5)Y(s)\Big|_{s=-5} = \frac{10(s+2)}{s+1}\Big|_{s=-5} = \frac{15}{2}$$

Riassumendo:

$$Y(s) = \frac{5}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{15}{2} \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{5}{2} e^{-t} 1(t) + \frac{15}{2} e^{-5t} 1(t)$$

## SVILUPPO DI HEAVISIDE O IN FRATTI SEMPLICI

**Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)**

Si può scrivere  $Y(s)$  come:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s+p_i}$$

Gli  $r_i$  sono detti **residui**.

Consideriamo:

$$(s+p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{r_j(s+p_i)}{s+p_j} \Big|_{s=-p_i} + r_i$$

Quindi ciascun residuo  $r_i$  può essere calcolato come

$$r_i = (s+p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Infine, antitrasformando:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s+p_i}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n r_i \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+p_i}\right] = \sum_{i=1}^n r_i e^{-p_i t} 1(t)$$

**Osservazione:**  $r_i$  reali se associati a poli reali,  $r_i$  complessi coniugati se associati a poli complessi coniugati.

È interessante notare, inoltre, la forma reale dei poli complessi coniugati trovati col procedimento precedente, quindi consideriamo la coppia di poli complessi coniugati seguente:

$$p_{i,1} = \sigma_i + j\omega_i \quad p_{i,2} = \sigma_i - j\omega_i$$

E i residui associati sono:

$$r_{i,1} = M_i e^{-j\varphi_i} \quad r_{i,2} = M_i e^{j\varphi_i}$$

Quindi l'antitrasformata dei due termini associati è data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{r_{i,2}}{s+p_{i,2}}\right] &= M_i e^{-j\varphi_i} e^{-p_{i,1} t} 1(t) + M_i e^{j\varphi_i} e^{-p_{i,2} t} 1(t) \\ &= M_i e^{-j\varphi_i} e^{-(\sigma_i + j\omega_i)t} 1(t) + M_i e^{j\varphi_i} e^{-(\sigma_i - j\omega_i)t} 1(t) \\ &= M_i e^{-\sigma_i t} (e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} + e^{j(\omega_i t + \varphi_i)}) 1(t) \\ &= 2M_i e^{-\sigma_i t} \frac{(e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} + e^{j(\omega_i t + \varphi_i)})}{2} 1(t) \\ &= 2M_i e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) 1(t) \end{aligned}$$

Da cui valgono le regole di divergenza e convergenza viste per i modi naturali:

- $-\sigma_i > 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  diverge
- $-\sigma_i = 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  rimane costante
- $-\sigma_i < 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  converge

## Caso 2: poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

Si può scrivere  $Y(s)$  come:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{r_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

con  $r_{i,h}$ ,  $h = 1, \dots, n_i$ , residui del polo  $-p_i$ .

Si consideri:

$$\begin{aligned} (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} &= \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_j} \frac{r_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i - h} r_{i,h} \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_j} \frac{r_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i-1} (s + p_i)^{n_i - h} r_{i,h} + r_{i,n_i} \end{aligned}$$

Quindi il residuo  $r_{i,n_i}$  è dato da:

$$r_{i,n_i} = (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Derivando  $(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}$  si calcolano gli altri residui come:

$$r_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \frac{d^{n_i - h}}{ds^{n_i - h}} \left[ (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \Big|_{s=-p_i}$$

Antitrasformando la  $Y(s)$  sviluppata in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{r_{i,h}}{(s + p_i)^h} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} r_{i,h} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s + p_i)^h} \right] \\ &\quad \text{ricordando le regole di antitrasformazione} \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} r_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t) \end{aligned}$$

Si può dimostrare che per una coppia di poli complessi coniugati

$$\sigma_i + j\omega_i \quad \text{e} \quad \sigma_i - j\omega_i$$

con molteplicità  $n_i$ , il contributo elementare associato è dato da:

$$\sum_{h=1}^{n_i} 2M_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$

I modi naturali per un polo reale (multiplo)  $-p_i$  è dato da:

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t)$$

Mentre per una coppia di poli complessi coniugati (multipli)  $-(\sigma_i + j\omega_1)$  e  $-(\sigma_i - j\omega_1)$  è dato da:

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$

Da qui le regole di convergenza sono le stesse viste per i modi naturali con molteplicità algebrica maggiore di quella geometrica.

### Esempio di antitrasformazione tramite sviluppo di Heaviside: caso 2

Data la funzione:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2}$$

Si vuole scrivere come:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_{2,1}}{s+2} + \frac{r_{2,2}}{(s+2)^2}$$

Si calcola  $r_1$ :

$$r_1 = s \frac{s+1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

Si procede calcolando  $Y(s)(s+2)^2 \Big|_{s=-2}$ :

$$Y(s)(s+2)^2 \Big|_{s=-2} = \begin{cases} (s+2)^2 \frac{s+1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} \\ (s+2)^2 \frac{r_1}{s} + (s+2)^2 \frac{r_{2,1}}{s+2} + (s+2)^2 \frac{r_{2,2}}{(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = r_{2,2} \end{cases} \implies r_{2,2} = \frac{1}{2}$$

Ora manca solo  $r_{2,1}$ , per calcolarlo si nota che:

$$Y(s)(s+2)^2 = (s+2)^2 \frac{r_1}{s} + (s+2)^2 \frac{r_{2,1}}{s+2} + r_{2,2}$$

$$\frac{d}{ds} [Y(s)(s+2)^2] \Big|_{s=-2} = \left[ 2(s+2) \frac{r_1}{s} - (s+2)^2 \frac{r_1}{s^2} + r_{2,1} + 0 \right] \Big|_{s=-2} = r_{2,1}$$

Quindi:

$$r_{2,1} = \frac{d}{ds} Y(s)(s+2)^2 \Big|_{s=-2} = \frac{d}{ds} \frac{s+1}{s} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

Quindi rimettendo insieme i pezzi:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s(s+2)^2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{r_1}{s} + \frac{r_{2,1}}{s+2} + \frac{r_{2,2}}{(s+2)^2} \right] \\ &= r_1 \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] + r_{2,1} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+2} \right] + r_{2,2} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+2)^2} \right] \\ &= r_1 1(t) + r_{2,1} e^{-2t} 1(t) + r_{2,2} t e^{-2t} 1(t) \\ &= \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t e^{-2t} \right) 1(t) \end{aligned}$$

### RISPOSTA AD UN INGRESSO GENERICO

Ricordando che:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$$

in cui  $C(sI - A)^{-1}$ ,  $G(s)$  e  $U(s)$  sono rapporti di polinomi, si può affermare che:

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = y_\ell(t) + y_{f,G}(t) + y_{f,U}(t)$$

nella quale:

- $y_\ell(t)$  e  $y_{f,G}(t)$  sono combinazioni lineari di modi naturali del sistema di matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$
- $y_{f,U}(t)$  è combinazione lineare di “modi” presenti nell’ingresso  $u(t)$  (dovuti alle radici del denominatore di  $U(s)$ )

## RISPOSTE DI SISTEMI ELEMENTARI

Si ricordi che

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \omega_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

Considerando il caso di poli distinti. Da quanto visto fin'ora risulta che per  $x(0) = 0$  (risposta forzata):

$$Y(s) = G(s)U(s) = \sum_i \frac{r_i}{s + p_i} + \sum_i \frac{a_i s + b_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2}$$

Viene da se che è importante studiare le risposte di sistemi elementari.

### Esempio 1: risposta al gradino sistema del prim'ordine

Ricordando:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Si studi la risposta del sistema descritto dalla seguente  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

Ponendo in ingresso:

$$u(t) = k1(t)$$

Trasformando la  $u(t)$  si trova:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[k1(t)] = \frac{k}{s}$$

Quindi la risposta nel dominio di Laplace è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \frac{k}{s} = \frac{k\mu}{s(s + \frac{1}{T})} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s + \frac{1}{T}}$$

Calcolando i residui:

$$\begin{aligned} r_1 &= sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{k\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \Big|_{s=0} = k\mu \\ r_2 &= \left(s + \frac{1}{T}\right) Y(s) \Big|_{s=-\frac{1}{T}} = \frac{k\mu}{Ts} \Big|_{s=-\frac{1}{T}} = -k\mu \end{aligned}$$

Si arriva ad una risposta del tipo:

$$Y(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s + \frac{1}{T}} = k\mu \frac{1}{s} - k\mu \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = k\mu \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right)$$

Antitrasformando:

$$y(t) = k\mu(1(t) - e^{-\frac{t}{T}} 1(t)) = k\mu(1 - e^{-\frac{t}{T}})1(t)$$

## STABILITÀ ESTERNA o BIBO

Un sistema si dice BIBO (Bounded-Input Nuonded-Output) stabile se la sua uscita forzzata è limitata per ogni ingresso limitato.

Consideriamo l'uscita forzata ( $x(0) = 0$ ):

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Da quanto visto fino ad ora con lo sviluppo di Heaviside si può dedurre che un sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  è BIBO stabile se e solo se tutti i poli della  $G(s)$  sono a parte reale strettamente minore di zero.

### Esempio 1

Data la seguente  $G(s)$  si dica se il sistema descritto da essa è BIBO stabile:

$$G(s) = \frac{r}{s+p} \quad p > 0$$

In ingresso si ha un rapporto di polinomi:

$$U(s) = \frac{N_U(s)}{D_U(s)}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) = \frac{r}{s+p} \frac{N_U(s)}{D_U(s)} \\ &= \frac{r_1}{s+p} + \frac{\alpha}{D_U(s)} \end{aligned}$$

Il primo addendo antitrasformandolo si ottiene  $r_1 e^{-pt} 1(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0$  e il secondo è la traformata di un segnale limitato, quindi è limitata, indi per cui il sistema è BIBO stabile.

### Esempio 2

Il sistema descritto da:

$$G(s) = \frac{r}{s} \quad u(t) = 1(t)$$

è BIBO stabile?

Trasformando la  $u(t)$  si ottiene:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

Da cui

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{r}{s^2}$$

Che antitrsformando corrisponde a

$$y(t) = rt1(t)$$

che per  $t \rightarrow 0$  diverge, quindi la risposta è no, il sistema sopra descritto NON è BIBO stabile.

## ESEMPIO IMPORTANTE

### Risposta al gradino di un sistema del II ordine

Date le seguenti equazioni:

$$u(t) = k1(t) \implies U(s) = \frac{k}{s} \quad G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k\mu\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Con poli:

$$s_{p_{1,2}} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Per trovare la risposta nel dominio del tempo come prima cosa bisogna, innanzitutto, la  $Y(s)$  come:

$$Y(s) = k\mu\omega_n^2 \left( \frac{r_1}{s} + \frac{r_{2,1}}{s + \xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{r_{2,2}}{s + \xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

Successivamente si trovano i residui:

$$r_1 = sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,1} &= Y(s) \left( s + \omega_n \xi + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) \Big|_{s=-\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \\
&= \frac{s + \omega_n \xi + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{s(s + \omega_n \xi - j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})(s + \omega_n \xi + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})} \Big|_{s=-\xi\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \\
&= \frac{1}{(-\xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})(-\xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} + \omega_n \xi - j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})} \\
&= \frac{1}{(-\xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})(-2j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})} \frac{j}{j} \\
&= \frac{j}{(-\xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) 2\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \frac{(-\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})}{(-\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})} \\
&= \frac{(-\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) j}{(\xi^2 \omega_n^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)) 2\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \\
&= \frac{\omega_n (-\sqrt{1 - \xi^2} - j\xi)}{\omega_n^2 2\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \\
&= \frac{-\sqrt{1 - \xi^2} - j\xi}{2\omega_n^2 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{2\omega_n^2 \sqrt{1 - \xi^2}} e^{j\psi} = M e^{j\psi}
\end{aligned}$$

Si arriva a  $r_{2,2}$  con lo stesso procedimento ottenendo che è il complesso coniugato di  $r_{2,1}$ :  $r_{2,2} = \bar{r}_{2,1}$   
Ricordando (vedi dimostrazione a pag. 23):

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{r_{i,1}}{s + p_{i,1}} + \frac{r_{i,2}}{s + p_{i,2}} \right] = 2M_i e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) 1(t)$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
y(t) &= k\mu\omega_n^2 \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{r_1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{r_{2,1}}{s + \xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{r_{2,2}}{s + \xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \right] \right) \\
&= k\mu\omega_n^2 \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\omega_n s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Me^{j\psi}}{s + \xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{Me^{-j\psi}}{s + \xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \right] \right) \\
&= k\mu\omega_n^2 \left[ \frac{1}{\omega_n} + 2Me^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} + \psi) \right] 1(t)
\end{aligned}$$

È utile partire da questo esempio per definire il concetto di **sovraelongazione**: il valore massimo raggiunto dalla  $y(t)$  rispetto alla  $y_\infty$ .

Da qui viene la definizione di **sovraelongazione percentuale**:

$$S\% := \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$$

E **solo** per i sistemi del II ordine può essere anche scritta come:

$$S\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Un'altra definizione importante è quella di **tempo di assestamento**: tempo  $T_{a,\epsilon}$  tale che

$$(1 - 0.01\epsilon)y_\infty \leq y(t) \leq (1 + 0.01\epsilon)y_\infty \quad \forall t \geq T_{a,\epsilon}$$

Approssimazioni utili per  $T_{a,\epsilon}$  sono:  $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$      $T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$

Inoltre:

- $\xi$  è detto *coefficiente di smorzamento*
- $\omega_n$  è detta *pulsazione naturale*
- $\mu$  è detto *guadagno*

Dato un valore massimo di sovraelongazione  $S^*$ , dalle formule precedenti, si può ricavare il valore massimo del coefficiente di smorzamento  $\xi$  per i sistemi del secondo ordine:

$$S\% \leq S^* \implies \xi \geq \frac{\left| \ln \left( \frac{S^*}{100} \right) \right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \left( \frac{S^*}{100} \right)}}$$

$$y(t) = \mu k (1 - A e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)) 1(t)$$

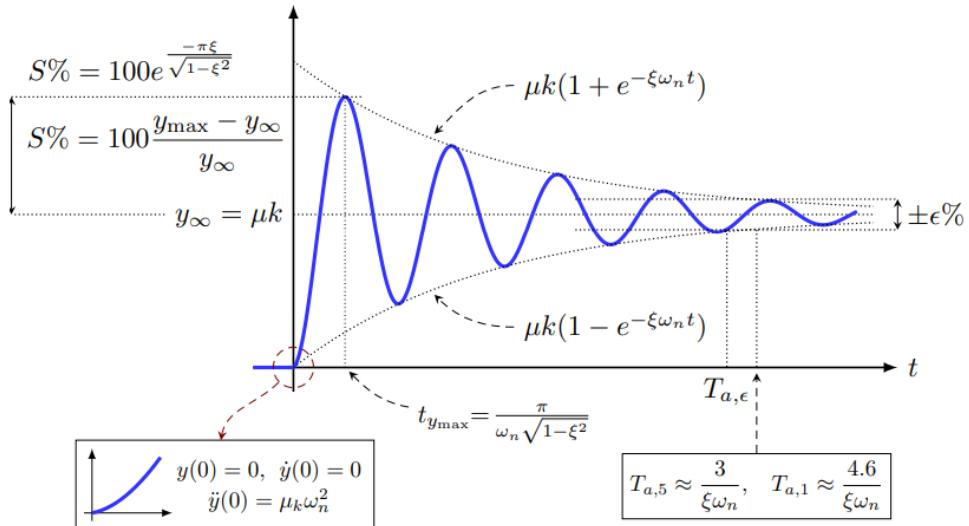


Figure 2: Immagine rappresentativa di tutti i concetti introdotti

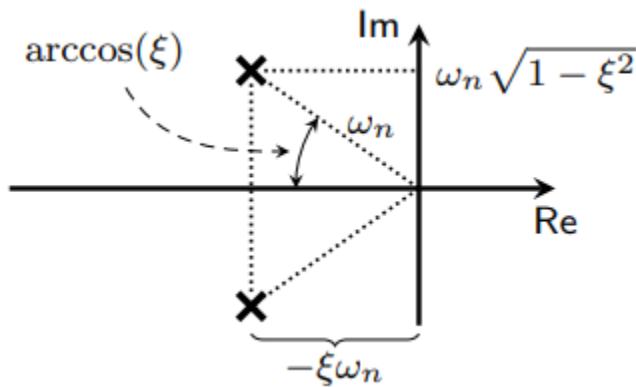


Figure 3: Mappatura dei parametri della risposta a gradino dei sistemi del secondo ordine sul piano complesso

### Luogo di punti a tempo di assestamento costante

Si ricordi che abbiamo approssimato  $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$ ,  $T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$ , inoltre si è visto che  $-\xi\omega_n$  è la parte reale dei poli complessi coniugati. Ne consegue che sistemi con poli complessi coniugati che hanno la stessa parte reale avranno una risposta al gradino con **stesso tempo di assestamento**.

Sul piano complesso i luoghi dei punti a tempo di assestamento costante sono rette parallele all'asse immaginario.

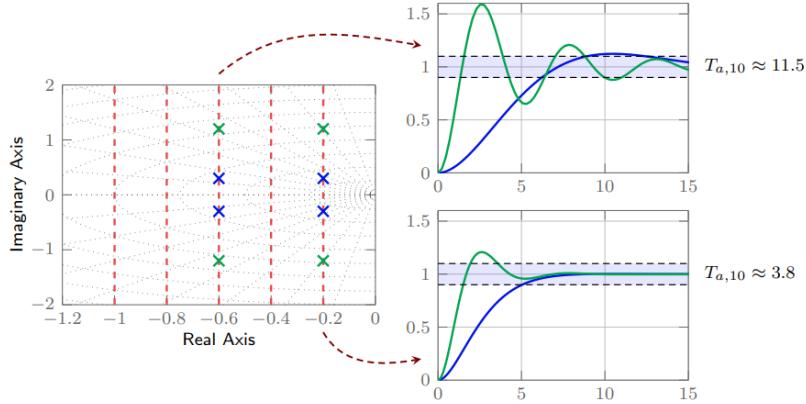


Figure 4: Luogo dei punti a tempo di assestamento costante

### Luogo dei punti a sovraelongazione costante

Si ricordi che per i sistemi del secondo ordine  $S\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ , inoltre  $\arccos(\xi)$  è l'angolo formato con l'asse reale sul piano complesso. Si evince, quindi, che sistemi con stesso coefficiente di smorzamento avranno una risposta al gradino con **stessa sovraelongazione**.

Sul piano complesso i luoghi dei punti a sovraelongazione costante sono semirette uscenti dall'origine.

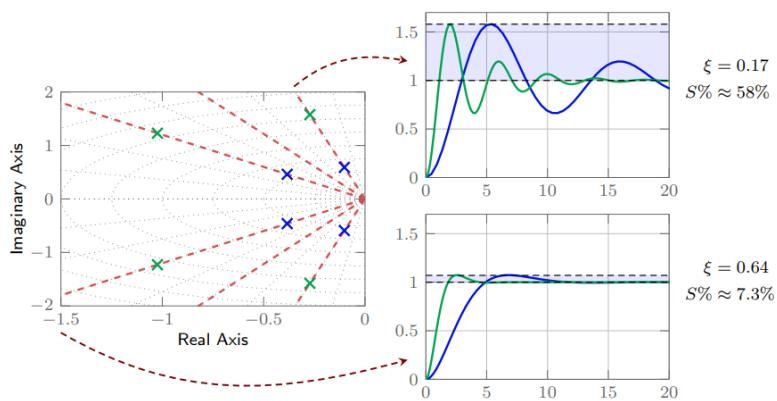


Figure 5: Luogo dei punti a sovraelongazione costante

### Mappatura di specifiche temporali nel piano complesso

Si vuole caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) con  $S\% \leq S^*$  e, per esempio,  $T_{a,5} \leq T^*$ . Tali specifiche sono, quindi, soddisfatte per:  $\xi \geq \xi^*$  e  $\xi \omega_n \geq \frac{3}{T^*}$ . Quindi i poli complessi coniugati del sistema si devono trovare all'interno della zona colorata.

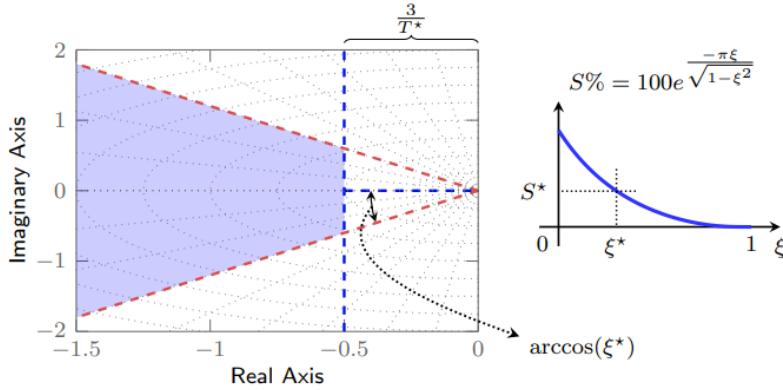


Figure 6: Mappatura specifiche temporali nel piano complesso

### SISTEMI DEL SECONDO ORDINE CON POLI REALI

**Caso**  $T_1 \neq T_2$ ,  $T_1 > T_2$

Avendo

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

Risulta

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k\mu}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

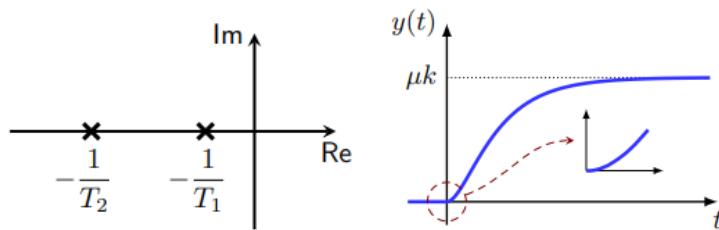
$$\mu > 0, \quad k > 0, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(t) = k\mu \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(t) = 0, \quad \ddot{y}(0) = \frac{k\mu}{T_1 T_2}, \quad y_\infty = k\mu$$

Da notare che i modi presenti sono  $1(t)$  (dovuto all'ingresso),  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  e  $e^{-\frac{t}{T_2}}$  (dovuti al sistema).



**Sistemi a polo dominante** Se nel precedente esempio considerassimo  $T_1 \gg T_2$ , nella risposta  $e^{-\frac{t}{T_2}} \rightarrow 0$  velocemente e  $\frac{T_2}{T_1-T_2} \ll \frac{T_1}{T_1-T_2} \approx 1$ , quindi

$$y(t) \approx k\mu \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) 1(t)$$

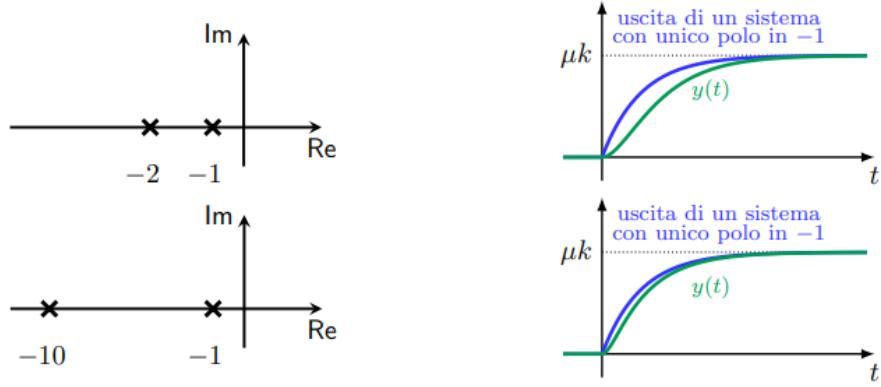


Figure 7: Variazione uscita in base al polo dominante

**Caso  $T_1 = T_2$**

Considerando

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1s)^2} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

Risulta

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k\mu}{s(1+T_1s)^2}$$

$$\mu > 0, \quad k > 0, \quad T_1 > 0$$

Antitrasformando

$$y(t) = k\mu \left(1 - e^{\frac{t}{T_1}} - \frac{t}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}\right) 1(t)$$

Da notare che i modi presenti nel sistema sono  $1(t)$  (dovuto all'ingresso),  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  e  $te^{-\frac{t}{T_1}}$  (dovuti al sistema).

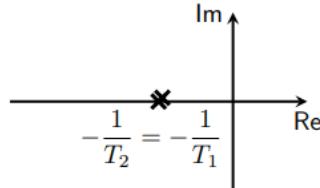


Figure 8: Poli coincidenti

A questo punto si possono trarre delle conclusioni riguardo ai sistemi del secondo ordine con poli reali:

- la risposta è monotona
- se  $T_1 \gg T_2$  polo dominante allora il comportamento è simile a quello di un sistema del prim'ordine
- $\dot{y}(t) = 0$  quindi continuità in zero anche della derivata prima
- $T_{a,\epsilon}$  funzione non semplice di  $T_1$  e  $T_2$

## SISTEMI DEL PRIM'ORDINE CON UNO ZERO

Considerando

$$\mu \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

Risulta

$$Y(s) = G(s)U(s) = k\mu \frac{1 + \alpha Ts}{s(1 + Ts)}$$

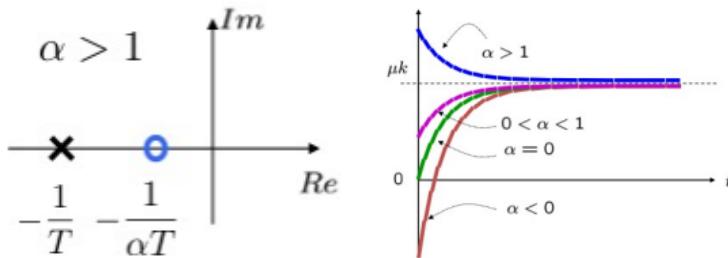
$$\mu > 0, \quad k > 0, \quad T > 0$$

Antitrasformando l'uscita

$$y(t) = k\mu \left( 1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = k\mu\alpha, \quad y_\infty = k\mu$$

Si noti che il grado relativo è zero (grado numeratore uguale al grado del denominatore) quindi c'è collegamento algebrico ingresso-uscita ( $y(0) = k\mu\alpha \neq 0$ ).



## SISTEMI DEL SECONDO ORDINE CON POLI REALI E ZERO

Considerando

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = k\mu \frac{1 + \tau s}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$\mu > 0, \quad k > 0, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0$$

Antitrasformando

$$y(t) = k\mu \left( 1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

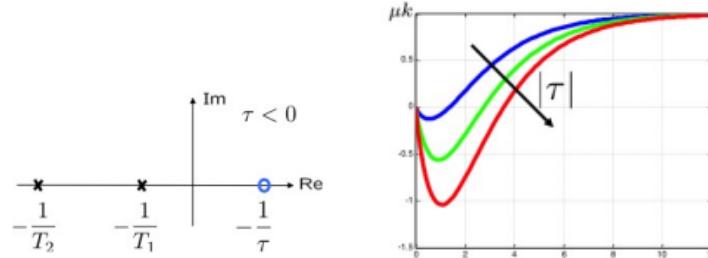
$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \frac{k\mu\tau}{T_1 T_2}, \quad y_\infty = k\mu$$

Si noti che il segno della derivata  $\dot{y}(0) = \frac{k\mu\tau}{T_1 T_2}$  dipende da  $\tau$ .

Da qui si distinguono 3 casi:

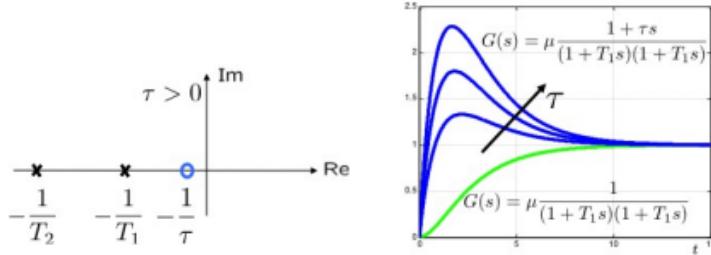
### Caso $T_1 > T_2, \tau < 0$ , sistemi a fase NON minima

si ha sottoelongazione ( $\dot{y}(0) = \frac{k\mu\tau}{T_1 T_2} < 0$ ), il sistema risponde in “senso contrario” ( $< 0$ ) rispetto all’ingresso  $> 0$ .



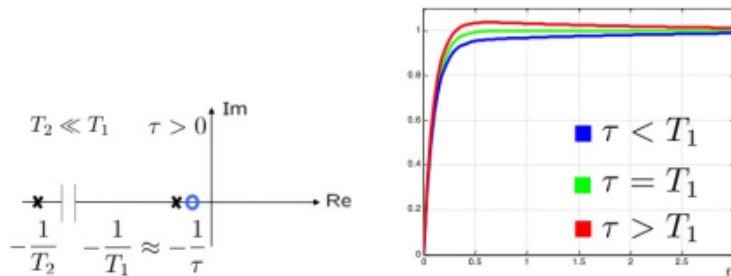
### Caso $\tau > T_1 > T_2 > 0$ , sistemi a fase minima (sovraelongazione)

è presente una sovraelongazione tanto più accentuata quanto più lo zero è vicino all’origine (ovvero al crescere di  $\tau$ ).



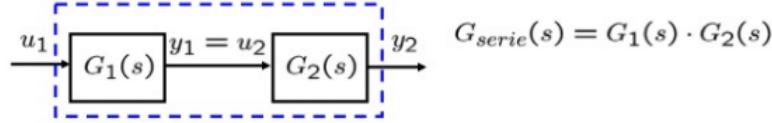
### Caso $\tau \approx T_1 \gg T_2$ , sistemi a fase minima (code di assestamento)

a causa della non perfetta cancellazione polo/zero ( $\tau \approx T_1$ ) il modo “lento”  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  è presente e il suo transitorio si esaurisce lentamente.



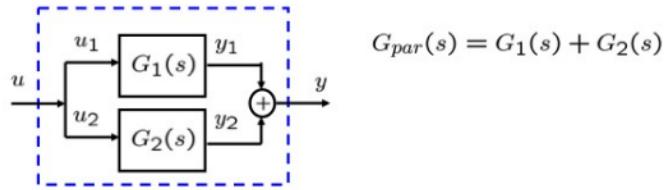
## INTERCONNESSIONE SCHEMI A BLOCCHI

Serie



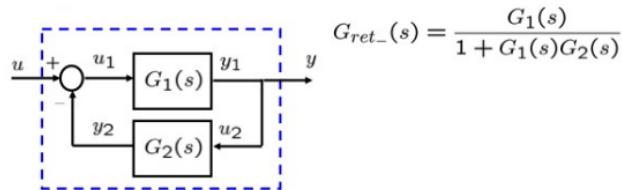
$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \implies Y_1(s) = G_1(s)U_1(s) \\ Y_2(s) &= G_2(s)U_2(s) \\ &= G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s) \implies G_{serie}(s) = G_1(s)G_2(s) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Parallelo



$$\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) \\ &= (G_1(s) + G_2(s))U(s) \implies G_{parallelo}(s) = G_1(s)G_2(s) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Retroazione negativa



$$\begin{aligned} Y(s) &= [U(s)Y_2(s)]G_1(s) \\ &= [U(s) - Y(s)G_2(s)]G_1(s) \\ &= \frac{G_1(s)}{G_2(s)G_1(s) + 1}U(s) \implies G_{retro\_}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## RISPOSTA IN FREQUENZA

L'idea d'ora in poi sarà considerare ogni sistema come un filtro.

### Esempio

Si calcoli l'uscita nel dominio del tempo del seguente sistema con il seguente ingresso

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} \quad u(t) = U \cos(\omega t), \quad U > 0$$

Innanzitutto si trasforma la  $u(t)$  (ricordando le trasformate fondamentali)

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = U \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Quindi l'uscita risulta

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu Us}{(1 + Ts)(s^2 + \omega^2)} = \frac{\mu U}{T} \frac{s^2}{(s + \frac{1}{T})(s^2 + \omega^2)}$$

Ora si scrive la  $Y(s)$  come somma dei residui fratto i poli

$$Y(s) = \frac{r_1}{1 + \frac{1}{T}} + \frac{r_u}{s - j\omega} + \frac{\bar{r}_u}{s + j\omega} \quad r_u = M_u e^{j\varphi_u} = |r_u| e^{j\arg(r_u)}$$

Quindi la  $y(t)$  risulta

$$y(t) = r_1 e^{-\frac{t}{T}} 1(t) + 2M_u e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi_u) 1(t)$$

In questo esempio si ha  $\sigma = 0$ .

Proseguendo

$$y(t) = r_1 e^{-\frac{t}{T}} 1(t) + 2|r_u| \cos(\omega t + \arg\{r_u\}) 1(t)$$

Per  $t \gg 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$y(t) \approx 2|r_u| \cos(\omega t + \arg\{r_u\}) 1(t)$$

Calcolando il residuo si arriva a

$$r_u = Y(s)(s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = G(s) \frac{Us}{(s - j\omega)(s + j\omega)} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)Uj\omega}{2j\omega} = \frac{U}{2} G(j\omega)$$

Quindi la  $y(t)$  risulta

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \frac{|G(j\omega)|U}{2} \cos(\omega t + \arg\{G(j\omega)\}) 1(t) \\ &= |G(j\omega)|U \cos(\omega t + \arg\{G(j\omega)\}) 1(t) \end{aligned}$$

## RISPOSTA AD UN SEGNALE DI INGRESSO SINUSOIDALE

Dato un SLTI SISO con funzione di trasferimento  $G(s)$  si vuole calcolare l'uscita in corrispondenza di un ingresso sinusoidale generico:

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

Ricordando che

$$U(s) = U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$$

Quindi

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$$

Considerando  $G(s)$  con poli distinti a parte reale negativa (BIBO stabile). Sviluppando in tratti semplici si ottiene

$$\begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s + p_i}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{r_u}{s - j\omega} + \frac{\bar{r}_u}{s + j\omega}}_{Y_2(s)} \\ &= Y_1(s) + Y_2(s) \end{aligned}$$

Antitrasformando la  $Y(s)$  si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n r_i e^{-p_i t} 1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2|r_u| \cos(\omega t + \arg(r_u)) 1(t)}_{y_2(t)} \\ &= y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

Poichè i poli della funzione di trasferimento sono a parte reale negativa, i contributi  $e^{-p_i t}$  sono tutti convergenti a zero. Pertanto  $y_1(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Mentre il residuo  $r_u$  è dato da

$$\begin{aligned} r_u &= (s - j\omega) Y(s) \Big|_{s=j\omega} = U G(j\omega) \frac{j\omega \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{j\omega + j\omega} \\ &= U G(j\omega) \frac{j \cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{2j} = U G(j\omega) \frac{\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)}{2} \end{aligned}$$

Ricordando che  $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$  si ha

$$r_u = U G(j\omega) \frac{e^{j\varphi}}{2} = \frac{U |G(j\omega)|}{2} e^{\arg(G(j\omega)) + \varphi}$$

dove si è scritto  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{\arg(G(j\omega))}$ .

Antitrasformando  $Y(s)$  si arriva a

$$y(t) = y_1(t) + U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

Ma si è visto che  $y_1(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ , quindi l'uscita  $y(t)$  converge a

$$y_2(t) = U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

ovvero per  $t$  sufficientemente grande si ha

$$y(t) \approx U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

Quanto trovato trova la sua generalizzazione nel seguente teorema.

### Teorema

Se ad un sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento  $G(s)$  avente poli a parte reale negativa si applica l'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

l'uscita a transitorio esaurito è data da

$$y_2(t) = U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

## RISPOSTA A SEGNALI SVILUPPABILI IN SERIE DI FOURIER

In base a quanto visto per un ingresso sinusoidale e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi BIBO stabili si può dimostrare che per  $t$  elevati

$$y(t) \approx Y_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |Y_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(Y_n))$$

con

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad Y_n = G(jn\omega_0)U_n \quad n = 0, 1, \dots$$

$$|Y_n| = |G(jn\omega_0)||U_n| \quad \arg\{Y_n\} = \arg(U_n) + \arg(G(jn\omega_0))$$

Osservazione:

$$G(s) = \mu \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)\dots}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)\dots}$$

allora

$$G(0) = \mu$$

Tutto ciò può essere schematizzato come segue

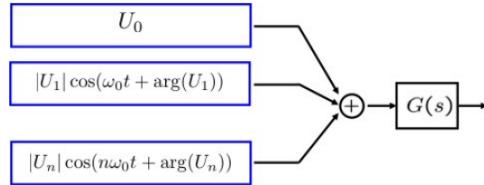


Figure 9: Risposta a segnali sviluppabili con Fourier

E a  $t$  sufficientemente elevati anche con

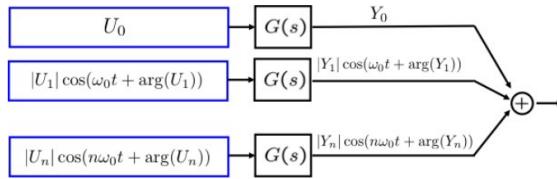


Figure 10: Risposta a segnali sviluppabili con Fourier a  $t$  elevati

## RISPOSTA A SEGNALI DOTATI DI TRASFORMATA DI FOURIER

Dato un segnale non periodico dotato di trasformata di Fourier, si può anche scrivere come

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|U(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(U(j\omega))) d\omega$$

con

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ovvero l'ingresso è scomponibile come un'infinità non numerabile di armoniche con valori di  $\omega$  reali maggiori o uguali a 0.

Quindi se il sistema è BIBO stabile per  $t$  elevati

$$y(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|Y(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(Y(j\omega))) d\omega$$

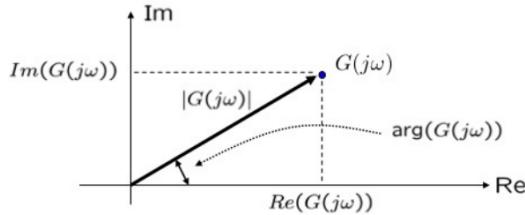
con

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

## RISPOSTA IN FREQUENZA

La funzione complessa  $G(j\omega)$  ottenuta valutando  $G(s)$  in  $s = j\omega$  è detta **risposta in frequenza**. Il concetto di risposta in frequenza viene esteso anche a sistemi non asintoticamente stabili.

Per un certo valore di  $\omega$ ,  $G(j\omega)$  è un numero complesso



Nel caso in cui la risposta in frequenza non sia nota si possono sfruttare i risultati precedenti per ricavarla sperimentalmente.

Si vedrà in seguito che dalla rappresentazione grafica di  $G(j\omega)$  sarà possibile ricavare: guadagno statico, poli e zeri della funzione di trasferimento  $G(s)$ .

Uno dei modi più utilizzati per rappresentare la  $G(j\omega)$  sono i **diagrammi di Bode** in cui si rappresentano separatamente modulo ( $|G(j\omega)|$ ) e fase ( $\arg(G(j\omega))$ ) in funzione di  $\omega$ .

## DIAGRAMMI DI BODE

Si parte dalla forma fattorizzata della funzione di trasferimento (detta forma di Bode):

$$G(s) = \mu \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\alpha_{n,i}s} + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

con risposta in frequenza associata

$$G(s) = \mu \frac{\prod_i (1 + j\omega \tau_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2})}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

Come detto in precedenza si studiano  $|G(j\omega)|$  e  $\arg(G(j\omega))$ .

Sull'asse delle ascisse si hanno sempre le frequenze **in scala logaritmica** di base 10 (ricorda:  $\omega \geq 0$ ).

Mentre sull'asse delle ordinate si ha:

- l'ampiezza in **decibel**:  $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(|G(j\omega)|)$
- nel diagramma delle fasi l'angolo:  $\arg(G(j\omega))$

È quindi utile ricordare che per quanto riguarda il diagramma del modulo la scala logaritmica è sia per l'asse delle ascisse che per quello delle ordinate, mentre per il diagramma della fase questa scala si usa solo per le ascisse.

La seguente immagine riporta un esempio di diagramma di Bode.

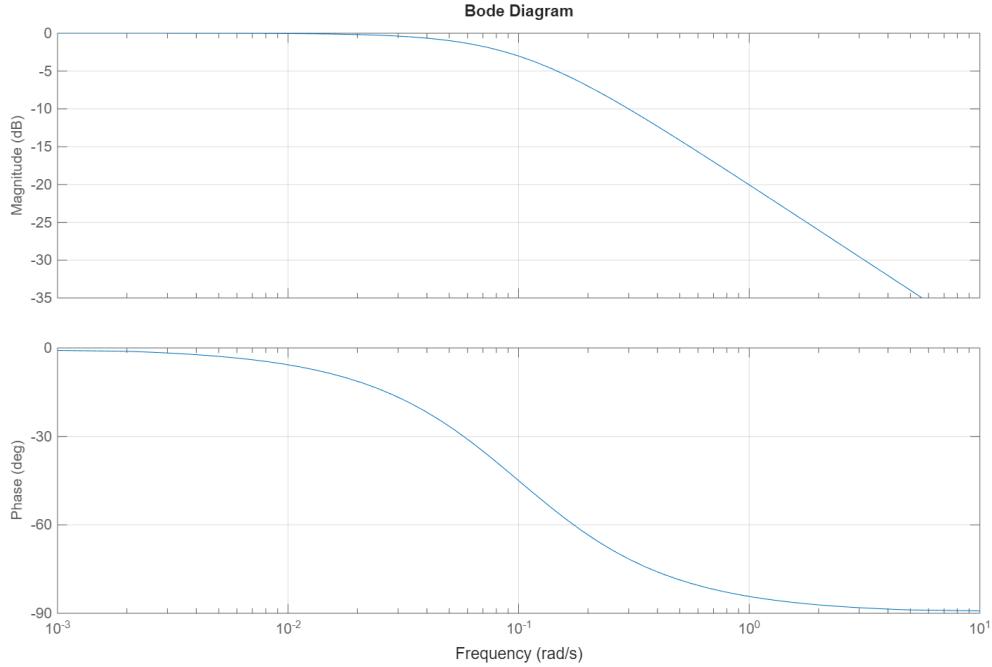


Figure 11: Esempio di diagramma di Bode della funzione:  $G(j\omega) = \frac{1}{1+10j\omega}$

Per la risposta in frequenza è utile studiare come risulta la funzione che restituisce  $|G(j\omega)|_{dB}$  e  $\arg(G(j\omega))$

$$\begin{aligned}|G(j\omega)|_{dB} &= 20\log(|G(j\omega)|) \\&= 20 \log |\mu| - 20g \log |j\omega| \\&\quad + \sum_i 20 \log |1 + j\omega\tau_i| + \sum_i 20 \log \left| 1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right| \\&\quad - \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i| - \sum_i 20 \log \left| 1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} \right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(G(j\omega)) &= \arg(\mu) - g \arg(j\omega) \\&\quad + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_i \arg \left( 1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right) \\&\quad - \sum_i -\arg(1 + j\omega T_i) - \sum_i \arg \left( 1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} \right)\end{aligned}$$

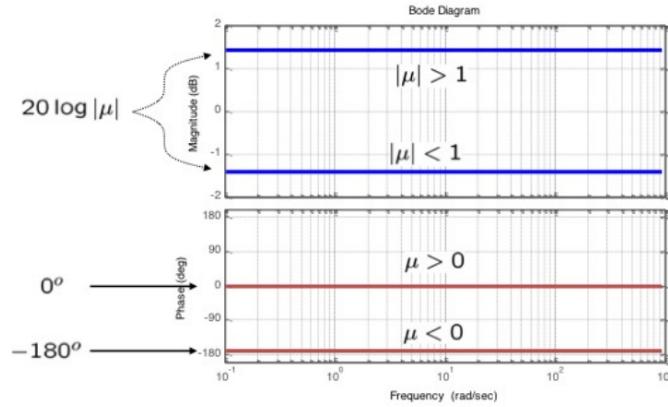
**N.B.:** si noti che in entrambe le equazioni la prima e la terza sommatoria hanno lo stesso andamento ma con segno opposto, e stessa cosa vale per la seconda e la quarta.

Si può passare, quindi, a studiare l'andamento dei contributi fondamentali per poi sommarli (grazie al principio di sovrapposizione degli effetti) per ottenere il risultato:

- $G_a(j\omega) = \mu$
- $G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g}$
- $G_c(j\omega) = (1 + j\omega\tau_i)$  e, per quanto visto nel nota bene,  $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_i}$  ha lo stesso andamento ma con segno opposto
- $G_d(j\omega) = \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2}\right)$  e, per quanto visto nel nota bene,  $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2}}$  ha lo stesso andamento ma con segno opposto

### Guadagno statico $\mu$

$$G_a(j\omega) = \mu \quad |G_a(j\omega)|_{dB} = 20 \log |\mu| \quad \arg(G(j\omega)) = \arg(\mu)$$



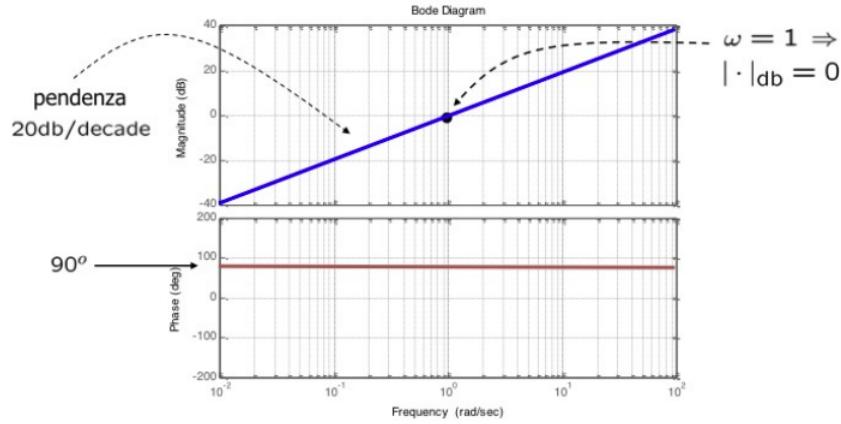
**Ampiezza:** se  $\mu \geq 1$  allora  $20 \log |\mu| \geq 0$  e si ha amplificazione, mentre se  $\mu < 1$  allora  $20 \log |\mu| < 0$  e si ha attenuazione.

**Fase:** se  $\mu \geq 0$  allora  $\arg(\mu) = 0$ , se  $\mu < 0$  allora  $\arg(\mu) = -180^\circ$

## Zeri nell'origine

Consideriamo uno zero nell'origine ( $g = -1$ )

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega \quad |G_b(j\omega)|_{dB} = 20 \log(\omega) \quad \arg(G_b(j\omega)) = \arg(j\omega)$$



In scala logaritmica  $\log \omega \mapsto 20 \log \omega$  corrisponde ad una retta di pendenza 20 dB/decade.

Quindi se ho  $g$  zeri nell'origine, la pendenza della retta sarà  $20g$  dB/decade.

$j\omega$  è un punto sul semiasse immaginario positivo  $\forall \omega > 0$ , quindi ha fase  $90^\circ \quad \forall \omega > 0$ .

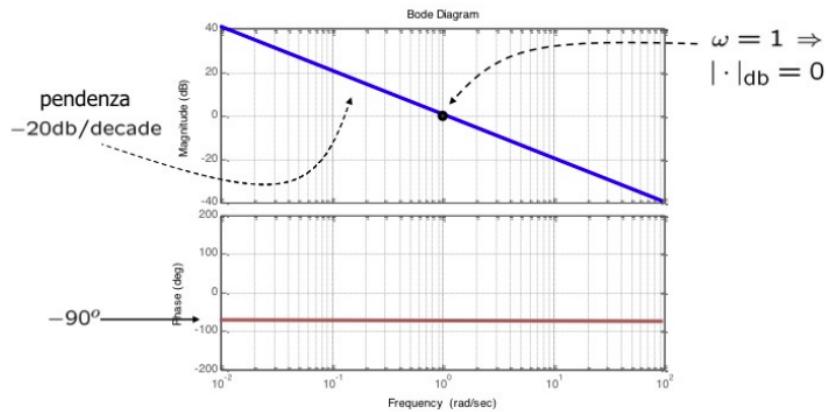
La fase sarà uguale, quindi, a  $\arg(j\omega)^g = g90^\circ$ .

Sostanzialmente una funzione di trasferimento del generatore è un derivatore, che amplifica le alte frequenze e quindi anche il rumore (che solitamente si trova ad alta frequenza).

## Poli nell'origine

Si consideri, ora, un polo nell'origine ( $g = 1$ )

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega} \quad |G_b(j\omega)|_{dB} = -20 \log(\omega) \quad \arg(G_b(j\omega)) = -\arg(j\omega)$$



Sostanzialmente valgono li stessi discorsi fatti in precedenza per lo zero, ma col segno opposto.

Quindi, in scala logaritmica  $\log \omega \mapsto -20 \log \omega$  corrisponde ad una retta di pendenza -20 dB/decade.

Quando ho  $g$  poli nell'origine la pendenza diventa  $-20g$  dB/decade.

$-j\omega$  è un punto sul semiasse immaginario positivo  $\forall \omega > 0$ , quindi ha fase  $-90^\circ \quad \forall \omega > 0$ .

Più in generale, la fase è uguale a  $\arg(j\omega)^g = g90^\circ$   $g < 0$ .

Questo tipo di funzione di trasferimento rappresenta un integratore, che attenua le alte frequenze ma introduce ritardo.

### Zero reale

Ora si consideri  $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = 20 \log(\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}) \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = 20 \log(\omega) + 20 \log |\tau| & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

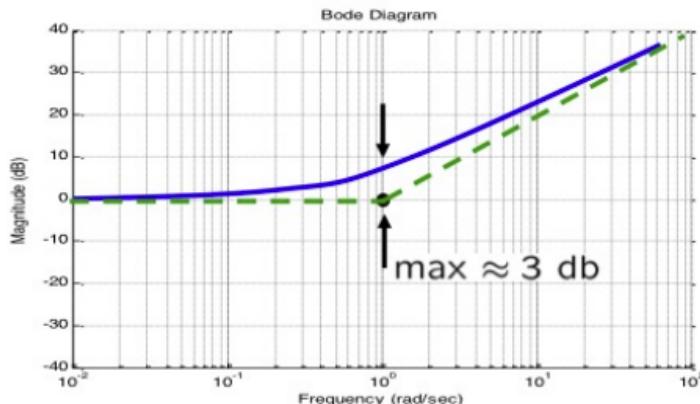
$$\approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log(\omega) - 20 \log \frac{1}{|\tau|} & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

$$\left| G_d(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{1}{|\tau|}} \right| = \left| G\left(j\frac{1}{|\tau|}\right) \right| = \left| 1 + j\frac{1}{|\tau|}\tau \right| = |1 \pm j| = \sqrt{2}$$

$$\left| G_d\left(j\frac{1}{|\tau|}\right) \right|_{dB} = 20 \log \sqrt{2} = 10 \log 2 \approx 3 \text{ dB}$$

In verde è rappresentato il grafico asintotico (approssimazione).

In blu vi è rappresentato il diagramma reale.



Il riferimento per l'approssimazione è 1 decade, quindi:

$$\omega \ll \frac{1}{|\tau|} \implies \omega < \frac{1}{|\tau|} \cdot 10^{-1}$$

$$\omega \gg \frac{1}{|\tau|} \implies \omega > \frac{1}{|\tau|} \cdot 10^1$$

Fino alla **pulsazione di taglio**  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$  l'andamento dell'approssimazione è costante a 0 dB.

Sempre in riferimento alla pulsazione di taglio  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$  entra in gioco la retta  $\log \omega \mapsto -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega$  con pendenza 20 dB/dec.

Per quanto riguarda, invece, il grafico reale ha un discostamento massimo proprio alla pulsazione di taglio  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ , tale scostamento vale proprio 3 dB (come visto in precedenza).

Per la fase, invece, considerando uno zero reale negativo ( $\tau > 0$ ):

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

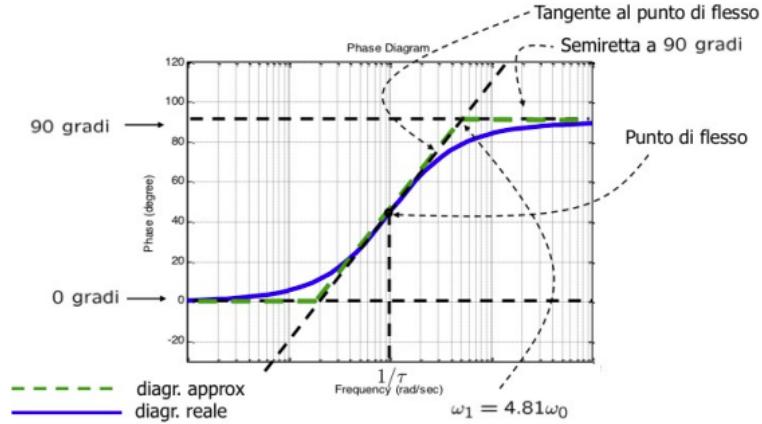


Figure 12: Fase di uno zero reale negativo  $\tau > 0$

Se, invece, si prende in considerazione uno zero reale positivo ( $\tau < 0$ ) si ha:

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

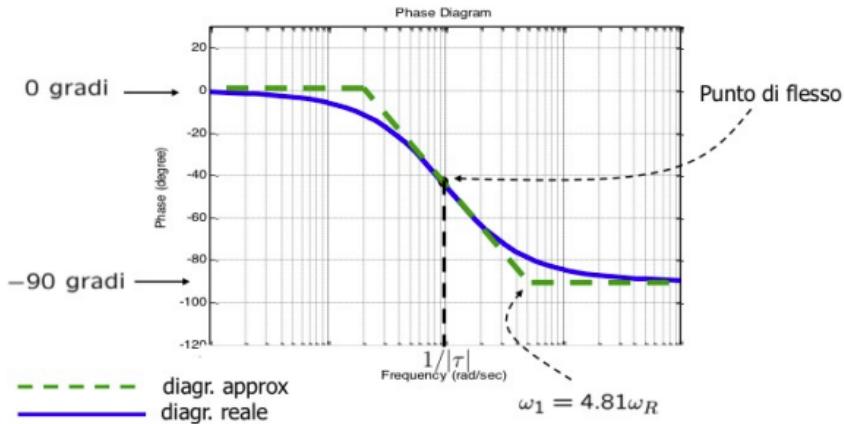


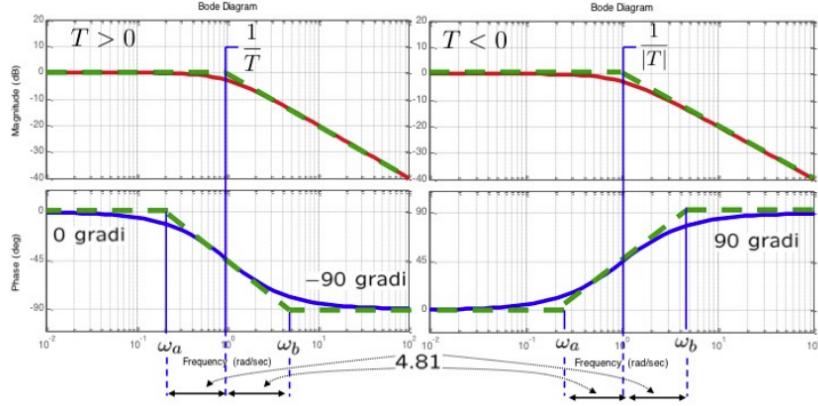
Figure 13: Fase di uno zero reale positivo  $\tau > 0$

Come si evince da entrambe le immagini, il cambio di fase inizia circa una decade prima ( $(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{|\tau|})$ ) e finisce circa una decade dopo ( $(5 \cdot \frac{1}{|\tau|})$ ) la pulsazione di taglio  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ .

### Polo reale

Considerando  $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$  (polo reale):

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$



A destra il diagramma di Bode di un polo reale negativo ( $T > 0$ ), mentre a sinistra di un polo reale positivo ( $T < 0$ ).

Il diagramma è ottenuto da quello dello zero ribaltando rispetto all'asse reale: fino alla pulsazione di taglio ha sempre andamento costante a 0 dB, dopo  $\omega = \frac{1}{|T|}$  si ha la retta  $\log \omega \mapsto 20 \log \frac{1}{|T|} - 20 \log \omega$  di pendenza  $-20$  dB/dec.

Anche lo scostamento massimo è uguale ma di segno opposto rispetto a quello dello zero:

$$|G_c(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + 1} = -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$$