CONTROLLI AUTOMATICI

Pierluca Pevere

SISTEMI IN FORMA DI STATO

Un sistema si dice **tempo continuo** se la variabile t è una variabile reale ($t \in \mathbb{R}$).
Si definiscono le seguenti equazioni:

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ detta equazione (o trasformazione) di uscita

Con ovviamente $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$
Dove:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

Quindi: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$

Equazione di stato È un'equazione differenziale ordinaria vettoriale del prim'ordine:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

Dove $\mathbb{R}^n$ si dice spazio di stato e n ordine del sistema.
Mentre $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è detta funzione di stato

Equazione di uscita È un'equazione algebrica:

$$\dot{y}_1(t) = h_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_p(t) = h_p(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

Dove $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ è detta funzione di uscita

Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$, $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto **causale**.

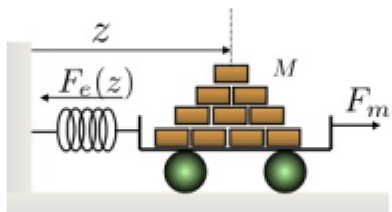
Un sistema di dice **tempo discreto** se t è una variabile intera ($t \in \mathbb{Z}$).
Si definiscono:

- $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$ detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ detta equazione (o trasformazione) di uscita

NB: l'equazione di stato non è più differenziale ordinaria ma è un'equazione alle differenze finite.

La definizione di stato, uscita e ingresso rimane invariata rispetto al caso tempo continuo.

ESEMPIO carrello massa molla



Utilizzando la legge di Newton (prendendo z come la posizione del centro di massa) si ha:

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e F_e forza elastica data da:

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

sostituendo:

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

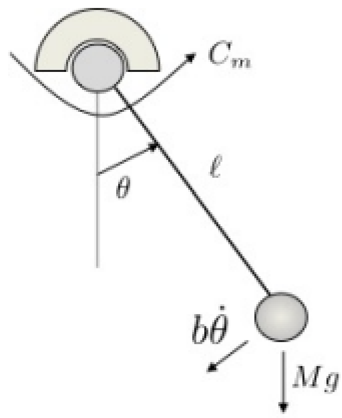
Definiamo:

- $x_1 := z$ (posizione), $x_2 := \dot{z}$ (velocità) di conseguenza lo stato risulta $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := F_m$ ingresso

Supponendo di misurare z(t) con un sensore allora $y := z$, sia $k(t) = k$ e considerando come uscita l'energia totale $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$:

$$\dot{x}_1 = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t) = \frac{1}{2}(kx_1^2(t) + Mx_2^2(t))$$

ESEMPIO pendolo



Equazione dei momenti (C_m coppia motore):

$$Ml^2\ddot{\theta} = C_{grav} + C_{drag} + C_m$$

con M massa e C_{grav} e C_{drag} date da

$$C_{grav} = -Mgl\sin(\theta), \quad C_{drag} = -b\dot{\theta}$$

con b coefficiente d'attrito.
Definiamo:

- $x_1 := \theta$ (posizione angolare) e $x_2 := \dot{\theta}$ (velocità angolare), di conseguenza lo stato $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := C_m$ ingresso

Supponiamo di misurare θ tramite un sensore angolo, allora $y := \theta$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Se invece misuriamo la posizione verticale tramite sensore, allora $y := -l\cos(\theta)$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$
$$y(t) = -l\cos(x_1(t))$$

Definizione di traiettoria

> Dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale x_{t_0}, la funzione del tempo $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice **traiettoria** (o movimento) **del sistema**. In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dic traiettoria dell'uscita.
> Per sistemi senza ingresso (detti non forzati) la traiettoria (dello stato) $x(t)$, $t \geq t_0$, è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0}.

EQUILIBRIO DI UN SISTEMA

Equilibrio di un sistema non forzato Dato un sistema non forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice **equilibrio** del sistema se $x(t) = x_e$, $t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Coppia di equilibrio Dato un sistema forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e,u_e) si dice coppia di equilibrio se $(x(t),u(t)) = (x_e,u_e)$, $t \geq t_0$, è traiettoria del sistema.
Per sistemi $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ (tempo invarianti) vale la seguente proprietà: data una coppia di equilibrio (x_e,u_e) vale $f(x_e,u_e) = 0$, vale lo stesso per sistemi non forzati (se x_e equilibrio allora $f(x_e) = 0$).

Quindi ricapitolando:

- se $x(t) = x_e \forall t \Longrightarrow \dot{x}(t) = 0 \Longrightarrow f(x(t), t) = 0$ (sistemi non forzati)
- se $\dot{x}(t) = f(x(t))$: $f(x_e) = 0 \Longrightarrow x_e$ equilibrio (sistemi non forzati tempo invarianti).
- se $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$: $f(x_e, u_e) = 0 \Longrightarrow (x_e, u_e)$ coppia di equilibrio (sistemi forzati tempo invarianti).

CLASSIFICAZIONE DI SISTEMI IN FORMA DI STATO

Dato il caso generale, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)\text{equazione di stato}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t)\text{equazione di uscita}$$

I sistemi in forma di stato si possono classificare in:

- **SISO** (Single Input Single Output), sotto classe dei sistemi MIMO (Multiple Input Multiple Output): se $m = p = 1$ altrimenti MIMO
- **Strettamente propri**, sotto classe di propri: se $y = h(x(t), t)$
- **Non forzati**, sotto classe di forzati: $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ $y(t) = h(x(t), t)$
- **Tempo invarianti** sotto classe dei tempo varianti: se data una traiettoria $(x(t), u(t), t), t \geq t_0$, con $x(t_0) = x_0, \forall \Delta \in \mathbb{R}$, vale che per $x(t_0 + \Delta) = x_0$ allora $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$ è una traiettoria. Si può dimostrare che i sistmei tempo invarianti sono del tipo:
  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0$
  $y(t) = h(x(t), u(t))$
  senza perdita di generalità si può porre $t_0 = 0$
- **Linearità** sotto classe dei non lineari

SISTEMI LINEARI

Un sistema è detto lineare se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x ed u.

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_{1(t)} + \cdots + a_{1n(t)}x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \cdots + b_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \cdots + b_{nm}(t)u(t)$$

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + \cdots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \cdots + d_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$y_p(t) = c_{p1}(t)x_1(t) + \cdots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1}(t)u_1(t) + \cdots + d_{pm}(t)u_m(t)$$

Quindi raggruppando tutti i coefficienti in matrici del tipo:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}$$

Dove $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p\times m}$
Di conseguenza le equazioni di stato e di uscita diventano:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Un sistema si dice **lineare tempo invariante** se è lineare e le funzioni del movimento sono indipendenti dal tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p\times m}$
Se **SISO**: $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{1\times 1} \Longrightarrow B$ è un vettore, C è un vettore riga e D è uno scalare.

Principio di sovrapposizione degli effetti

Sia $(x_a(t), u_a(t))$ traiettoria con $x_a(t_0) = x_{0a}$
Sia $(x_b(t), u_b(t))$ traiettoria con $x_b(t_0) = x_{0b}$
Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dato lo stato iniziale $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$, si ha che:

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è una **traiettoria del sistema**. Ovvero applicando in ingresso $u_{ab}(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ la traiettoria di stato è $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$
Importante: NON vale per sistemi non lineari

Evoluzione libera e forzata

Sia $x_\ell(t)$, $t \geq t_0$ la traiettoria di stato ottenuta per $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_l(t) = 0$, $t \geq t_0$, detta **evoluzione libera**
Sia $x_f(t)$, $t \geq t_0$ la traiettoria di stato ottenuta per $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$, $t \geq t_0$, detta **evoluzione forzata**
Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$ la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$$

Ciò NON vale per sistemi non lineari (il principio di sovrapposizione vale solo per sistemi lineari)

Traiettorie di un SLTI e rappresentazioni equivalenti

Dato il SLTI generico: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dalla notazione introdotta nel paragrafo precedente si può scrivere:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Ricorda:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Proprietà della matrice esponenziale:

- Esponenziale e cambio di base: $e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$
- Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi (forma di Jordan): l'esponenziale di una matrice di questo tipo è una matrice diagonale a blocchi in cui ciascun blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente della matrice di partenza

Difatti l'esponenziale di una matrice diagonale $\Lambda = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ è: $e^{\Lambda t} = diag\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$

Dalle proprietà sopraelencate si può giungere ad una rappresentazione equivalente delle equazioni di traiettorie e uscite dei SLTI effettuando un cambio di vase mediante una matrice T (invertibile):

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

$$y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)$$

con: $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$, $\hat{D} = D$
Tutto questo per cambiare la posizione dell'origine in modo tale da non avere errore (non avere un gap fra l'origine e lo stato iniziale).

Modi naturali

Dato il SLTI generico: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Indicando con $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli $r \leq n$ autovalori (reali e complessi coniugati) distinti della matrice A, con molteplicità algebrica $n_1, \dots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.
Le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_l(t)$ si possono scrivere come:

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di $h_i \leq n_i$, dove i coefficienti γ_{jiq} dipendono dallo stato iniziale $x(0)$.
I termini $t^{q-1}e^{\lambda_i t}$ sono detti **modi naturali** del sistema. L'evoluzione libera è **combinazione lineare dei modi**.
Inoltre poichè l'uscita è lineare nello stato, anche l'evoluzione libera dell'uscita è combinazione lineare dei modi.

Forma reale dei modi di un sistema Se la matrice A del SLTI è reale e $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ è autovalore di A, inoltre si può dimostrare che i coefficienti γ_{jiq} corrispondenti agli autovalori complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati. Si verifica inoltre per calcolo diretto che $x_{\ell,j}(t)$ sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati λ_i e $\bar{\lambda}_i$ sono del tipo:

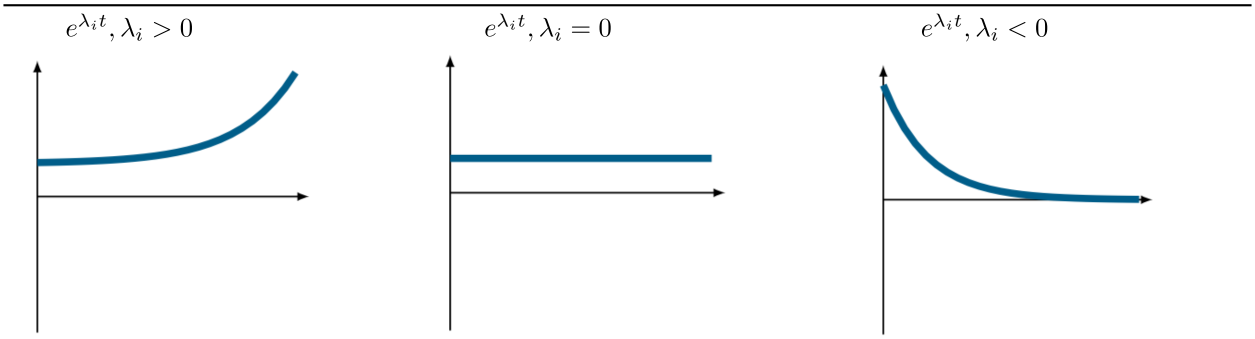
$$t^{q-1}e^{\sigma_i t}cos(\omega_i t + \phi_i)$$

con opportuni valori della fase ϕ_i.
Nel caso in cui le molteplicità algebriche $n_1, \ldots, n_r$ degli autovalori di A coincidano con le molteplicità geometriche, allora i coefficienti h_i sono tutti pari ad 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

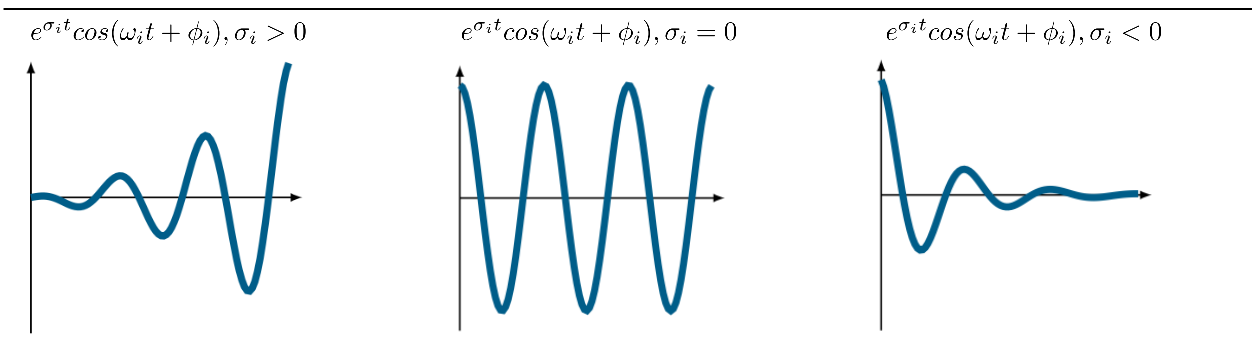
$$e^{\lambda_i t} \qquad \text{per autovalori reali}$$

$$e^{\sigma_i t}cos(\omega_i t + \phi_i) \qquad \text{per autovalori complessi coniugati}$$

Modi naturali: autovalori reali semplici (m.a. = m.g.)

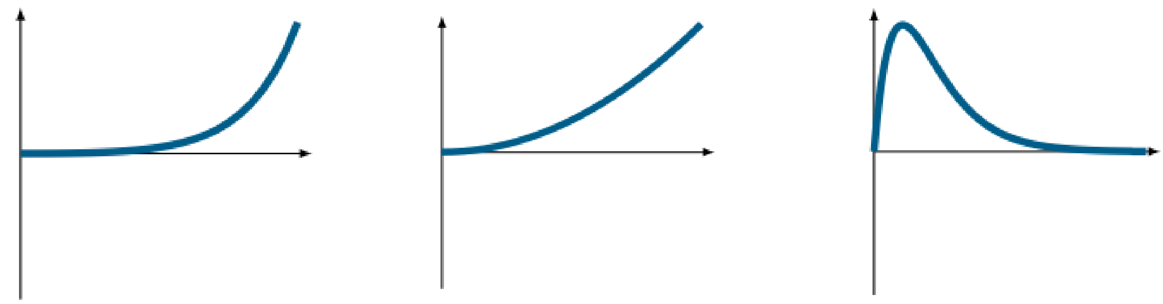


Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici (m.a. = m.g.)



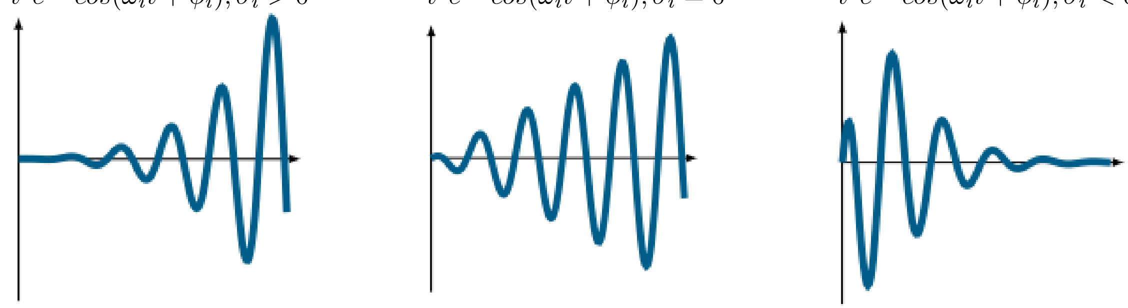
Modi naturali: autovalori reali (m.a. > m.g.)

$t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i > 0$ | $t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i = 0 q > 1$ | $t^q e^{\lambda_i t}, \lambda_i < 0$



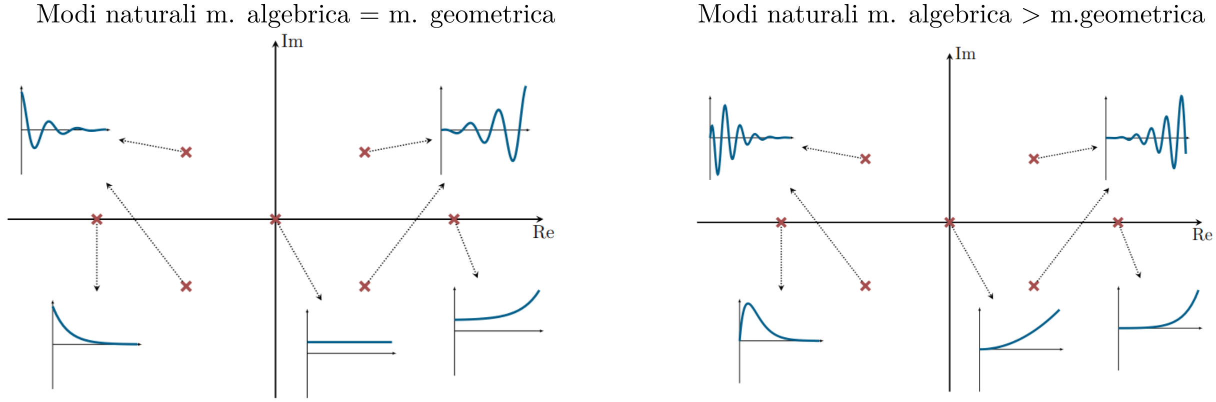
Modi naturali: autovalori complessi coniugati (m.a. > m.g.)

$t^q e^{\sigma_i t} cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i > 0$ | $t^q e^{\sigma_i t} cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i = 0$ | $t^q e^{\sigma_i t} cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i < 0$



Modi naturali: tabella riassuntiva

Modi naturali m. algebrica = m. geometrica | Modi naturali m. algebrica > m.geometrica



Forma di Jordan di una matrice
Per una generica matrice A si può dimostrare che esiste sempre T tale che:

$$J = TAT^{-1}$$

di μ autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ con n_i molteplicità algebrica di λ_i

$$J = diag J_1, \dots, J_\mu$$

con J_i blocco di Jordan associato all'autovalore λ_i dato da

$$J_i = diag J_{i1}, \dots, J_{i\nu_i}$$

con $J_{ih} \in \mathbb{R}^{\eta_{ih} \times \eta_{ih}}$ miniblocchi di Jordan dell'autovalore λ_i dati da

$$J_{ih} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dove $\sum_{h=1}^{\nu_i} \eta_{ih} = n_i$

Esponenziale di un miniblocco
Dato J_{ih} definito come nel paragrafo precedente allora il suo esponenziale $e^{J_{ih}t}$ è dato da (λ_i reale o complesso)

$$e^{J_{ih}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\eta_{ih}-1}}{(\eta_{ih}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: carrello
Prendendo in esempio il carrello con la massa e la molla e considerando k costante cosicchè il sistema sia LTI, si ha:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$

Autovalori: $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$, $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$
Se applichiamo un controllo $u = -hx_2$ gli autovalori diventano:
$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$, $\lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$
Se $h^2 > 4Mk$ allora autovalori reali, se $h^2 < 4Mk$ autovalori complessi coniugati. Se $h^2 = 4Mk \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$ (m.a.= 2), si può dimostrare che m.g.= 1, quindi blocco di Jordan 2×2:

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \qquad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_2(0) \\ e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

STABILITÀ

Equilibrio stabile Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$, $\forall t \geq 0$

Equilibrio instabile Uno stato di equilibrio x_e si dice instabile se non è stabile.

Equilibrio attrattivo Uno stato di equilibrio x_e si dice attrattivo se $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\lim_{x_0 \to +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

Equilibrio asintoticamente stabile Uno stato di equilibrio x_e si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo