# CONTROLLI AUTOMATICI

Pierluca Pevere

## Sistemi in forma di stato

Un sistema si dice **tempo continuo** se la variabile t è una variabile reale ($t \in \mathbb{R}$).
Si definiscono le seguenti equazioni:

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ detta equazione (o trasformazione) di uscita

Con ovviamente $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$
Dove:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

Quindi: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$

**Equazione di stato** È un'equazione differenziale ordinaria vettoriale del prim'ordine:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

Dove $\mathbb{R}^n$ si dice spazio di stato e $n$ ordine del sistema.
Mentre $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è detta funzione di stato

**Equazione di uscita** È un'equazione algebrica:

$$\dot{y}_1(t) = h_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_p(t) = h_p(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

Dove $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ è detta funzione di uscita

Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante iniziale $t_0$ è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$, $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto **causale**.

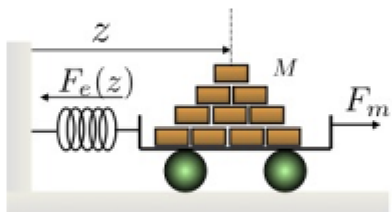
Un sistema di dice **tempo discreto** se $t$ è una variabile intera ($t \in \mathbb{Z}$).
Si definiscono:

- $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$ detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ detta equazione (o trasformazione) di uscita

**NB**: l'equazione di stato non è più differenziale ordinaria ma è un'equazione alle differenze finite.

La definizione di stato, uscita e ingresso rimane invariata rispetto al caso tempo continuo.

**ESEMPIO carrello massa molla**




Utilizzando la legge di Newton (prendendo $z$ come la posizione del centro di massa) si ha:

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e $F_e$ forza elastica data da:

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

sostituendo:

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

Definiamo:

- $x_1 := z$ (posizione), $x_2 := \dot{z}$ (velocità) di conseguenza lo stato risulta $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := F_m$ ingresso

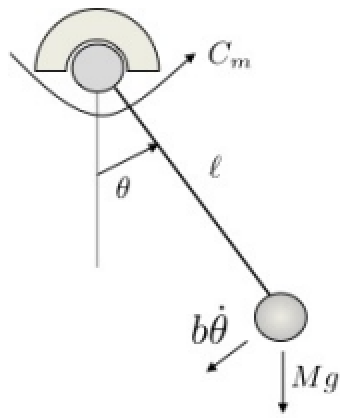
Supponendo di misurare z(t) con un sensore allora $y := z$, sia $k(t) = k$ e considerando come uscita l'energia totale $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$:

$$\dot{x}_1 = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) = \frac{1}{2}(kx_1^2(t) + Mx_2^2(t))$$

**ESEMPIO pendolo**




Equazione dei momenti ($C_m$ coppia motore):

$$Ml^2\ddot{\theta} = C_{grav} + C_{drag} + C_m$$

con M massa e $C_{grav}$ e $C_{drag}$ date da

$$C_{grav} = -Mgl\sin(\theta), \quad C_{drag} = -b\dot{\theta}$$

con $b$ coefficiente d'attrito.
Definiamo:

- $x_1 := \theta$ (posizione angolare) e $x_2 := \dot{\theta}$ (velocità angolare), di conseguenza lo stato $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := C_m$ ingresso

Supponiamo di misurare $\theta$ tramite un sensore angolo, allora $y := \theta$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Se invece misuriamo la posizione verticale tramite sensore, allora $y := -l\cos(\theta)$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$
$$y(t) = -l\cos(x_1(t))$$

**Definizione di traiettoria**

> Dato un istante iniziale $t_0$ e uno stato iniziale $x_{t_0}$, la funzione del tempo $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice **traiettoria** (o movimento) **del sistema**. In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dic traiettoria dell'uscita.
> Per sistemi senza ingresso (detti non forzati) la traiettoria (dello stato) $x(t)$, $t \geq t_0$, è determinata solo dallo stato iniziale $x_{t_0}$.