

CONTROLLI AUTOMATICI

Pierluca Peverè



SISTEMI IN FORMA DI STATO

Un sistema si dice **tempo continuo** se la variabile t è una variabile reale ($t \in \mathbb{R}$).
Si definiscono le seguenti equazioni:

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ detta equazione (o trasformazione) di uscita

Con ovviamente $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$

Dove:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

$$\text{Quindi: } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Equazione di stato È un'equazione differenziale ordinaria vettoriale del prim'ordine:

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

Dove \mathbb{R}^n si dice spazio di stato e n ordine del sistema.

Mentre $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta funzione di stato

Equazione di uscita È un'equazione algebrica:

$$\dot{y}_1(t) = h_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\vdots$$

$$\dot{y}_p(t) = h_p\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

Dove $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ è detta funzione di uscita

Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$, $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto **causale**.

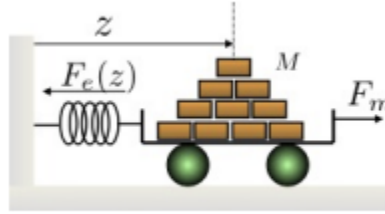
Un sistema si dice **tempo discreto** se t è una variabile intera ($t \in \mathbb{Z}$).
Si definiscono:

- $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$ detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$ detta equazione (o trasformazione) di uscita

NB: l'equazione di stato non è più differenziale ordinaria ma è un'equazione alle differenze finite.

La definizione di stato, uscita e ingresso rimane invariata rispetto al caso tempo continuo.

ESEMPIO carrello massa molla



Utilizzando la legge di Newton (prendendo z come la posizione del centro di massa) si ha:

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e F_e forza elastica data da:

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

sostituendo:

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

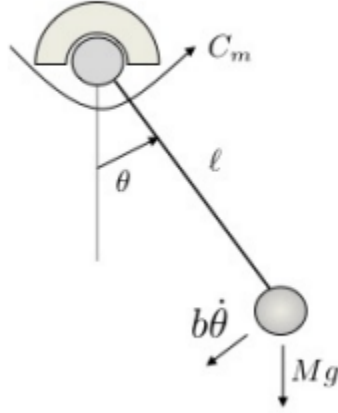
Definiamo:

- $x_1 := z$ (posizione), $x_2 := \dot{z}$ (velocità) di conseguenza lo stato risulta $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := F_m$ ingresso

Supponendo di misurare $z(t)$ con un sensore allora $y := z$, sia $k(t) = k$ e considerando come uscita l'energia totale $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) = \frac{1}{2}(kx_1^2(t) + Mx_2^2(t))\end{aligned}$$

ESEMPIO pendolo



Equazione dei momenti (C_m coppia motore):

$$Ml^2\ddot{\theta} = C_{grav} + C_{drag} + C_m$$

con M massa e C_{grav} e C_{drag} date da

$$C_{grav} = -Mgl\sin(\theta), \quad C_{drag} = -b\dot{\theta}$$

con b coefficiente d'attrito.

Definiamo:

- $x_1 := \theta$ (posizione angolare) e $x_2 := \dot{\theta}$ (velocità angolare), di conseguenza lo stato $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := C_m$ ingresso

Supponiamo di misurare θ tramite un sensore angolo, allora $y := \theta$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Se invece misuriamo la posizione verticale tramite sensore, allora $y := -l\cos(\theta)$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t)$$

$$y(t) = -l\cos(x_1(t))$$

Definizione di traiettoria

Dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale x_{t_0} , la funzione del tempo $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice **traiettoria** (o movimento) **del sistema**. In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dice traiettoria dell'uscita.

Per sistemi senza ingresso (detti non forzati) la traiettoria (dello stato) $x(t)$, $t \geq t_0$, è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0} .

EQUILIBRIO DI UN SISTEMA

Equilibrio di un sistema non forzato Dato un sistema non forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice **equilibrio** del sistema se $x(t) = x_e, t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Coppia di equilibrio Dato un sistema forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice coppia di equilibrio se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e), t \geq t_0$, è traiettoria del sistema.

Per sistemi $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ (tempo invarianti) vale la seguente proprietà: data una coppia di equilibrio (x_e, u_e) vale $f(x_e, u_e) = 0$, vale lo stesso per sistemi non forzati (se x_e equilibrio allora $f(x_e) = 0$).

Quindi ricapitolando:

- se $x(t) = x_e \forall t \implies \dot{x}(t) = 0 \implies f(x(t), t) = 0$ (sistemi non forzati)
- se $\dot{x}(t) = f(x(t))$: $f(x_e) = 0 \implies x_e$ equilibrio (sistemi non forzati tempo invarianti).
- se $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$: $f(x_e, u_e) = 0 \implies (x_e, u_e)$ coppia di equilibrio (sistemi forzati tempo invarianti).

CLASSIFICAZIONE DI SISTEMI IN FORMA DI STATO

Dato il caso generale, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ equazione di stato}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \text{ equazione di uscita}$$

I sistemi in forma di stato si possono classificare in:

- **SISO** (Single Input Single Output), sotto classe dei sistemi MIMO (Multiple Input Multiple Output): se $m = p = 1$ altrimenti MIMO
- **Strettamente propri**, sotto classe di propri: se $y = h(x(t), t)$
- **Non forzati**, sotto classe di forzati: $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ $y(t) = h(x(t), t)$
- **Tempo invarianti** sotto classe dei tempo varianti: se data una traiettoria $(x(t), u(t), t), t \geq t_0$, con $x(t_0) = x_0, \forall \Delta \in \mathbb{R}$, vale che per $x(t_0 + \Delta) = x_0$ allora $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$ è una traiettoria. Si può dimostrare che i sistemi tempo invarianti sono del tipo:
 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0$
 $y(t) = h(x(t), u(t))$
senza perdita di generalità si può porre $t_0 = 0$
- **Linearità** sotto classe dei non lineari

SISTEMI LINEARI

Un sistema è detto lineare se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x ed u .

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_{1(t)} + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)$$

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\vdots$$

$$y_p(t) = c_{p1}(t)x_1(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1}(t)u_1(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)$$

Quindi raggruppando tutti i coefficienti in matrici del tipo:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}$$

Dove $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Di conseguenza le equazioni di stato e di uscita diventano:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Un sistema si dice **lineare tempo invariante** se è lineare e le funzioni del movimento sono indipendenti dal tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Se **SISO**: $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \implies B$ è un vettore, C è un vettore riga e D è uno scalare.

Principio di sovrapposizione degli effetti

Sia $(x_a(t), u_a(t))$ traiettoria con $x_a(t_0) = x_{0a}$

Sia $(x_b(t), u_b(t))$ traiettoria con $x_b(t_0) = x_{0b}$

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dato lo stato iniziale $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$, si ha che:

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è una **traiettoria del sistema**. Ovvero applicando in ingresso $u_{ab}(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ la traiettoria di stato è $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$