

# CONTROLLI AUTOMATICI

Pierluca Pevere



# SISTEMI IN FORMA DI STATO

Un sistema si dice **tempo continuo** se la variabile  $t$  è una variabile reale ( $t \in \mathbb{R}$ ).  
Si definiscono le seguenti equazioni:

- $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$  detta equazione (o trasformazione) di uscita

Con ovviamente  $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$

Dove:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stato del sistema all'istante  $t$
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ingresso del sistema all'istante  $t$
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  uscita del sistema all'istante  $t$

Quindi:  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$   $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$   $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$

**Equazione di stato** È un'equazione differenziale ordinaria vettoriale del prim'ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t) \\ &\quad \vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t) \end{aligned}$$

Dove  $\mathbb{R}^n$  si dice spazio di stato e  $n$  ordine del sistema.

Mentre  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta funzione di stato

**Equazione di uscita** È un'equazione algebrica:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= h_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t) \\ &\quad \vdots \\ \dot{y}_p(t) &= h_p(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t) \end{aligned}$$

Dove  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  è detta funzione di uscita

Se la soluzione  $x(t)$  a partire da un istante iniziale  $t_0$  è univocamente determinata da  $x(t_0)$  e  $u(\tau)$ ,  $\tau \geq t_0$ , allora il sistema è detto **causale**.

Un sistema si dice **tempo discreto** se  $t$  è una variabile intera ( $t \in \mathbb{Z}$ ).

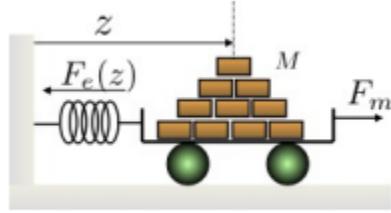
Si definiscono:

- $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$  detta equazione di stato
- $y(t) = h(x(t), u(t), t)$  detta equazione (o trasformazione) di uscita

**NB:** l'equazione di stato non è più differenziale ordinaria ma è un'equazione alle differenze finite.

La definizione di stato, uscita e ingresso rimane invariata rispetto al caso tempo continuo.

### ESEMPIO carrello massa molla



Utilizzando la legge di Newton (prendendo  $z$  come la posizione del centro di massa) si ha:

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con  $M$  massa e  $F_e$  forza elastica data da:

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

sostituendo:

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

Definiamo:

- $x_1 := z$  (posizione),  $x_2 := \dot{z}$  (velocità) di conseguenza lo stato risulta  $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := F_m$  ingresso

Supponendo di misurare  $z(t)$  con un sensore allora  $y := z$ , sia  $k(t) = k$  e considerando come uscita l'energia totale  $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) = \frac{1}{2}(kx_1^2(t) + Mx_2^2(t))\end{aligned}$$

## ESEMPIO pendolo



Equazione dei momenti ( $C_m$  coppia motore):

$$Ml^2\ddot{\theta} = C_{grav} + C_{drag} + C_m$$

con  $M$  massa e  $C_{grav}$  e  $C_{drag}$  date da

$$C_{grav} = -Mgl\sin(\theta), \quad C_{drag} = -b\dot{\theta}$$

con  $b$  coefficiente d'attrito.

Definiamo:

- $x_1 := \theta$  (posizione angolare) e  $x_2 := \dot{\theta}$  (velocità angolare), di conseguenza lo stato  $x := [x_1 x_2]^T$
- $u := C_m$  ingresso

Supponiamo di misurare  $\theta$  tramite un sensore angolo, allora  $y := \theta$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Se invece misuriamo la posizione verticale tramite sensore, allora  $y := -l\cos(\theta)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{Ml^2}x_2(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t) \\ y(t) &= -l\cos(x_1(t))\end{aligned}$$

## Definizione di traiettoria

Dato un istante iniziale  $t_0$  e uno stato iniziale  $x_{t_0}$ , la funzione del tempo  $(x(t), u(t))$ ,  $t \geq t_0$ , che soddisfa l'equazione di stato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  si dice **traiettoria** (o movimento) **del sistema**. In particolare,  $x(t)$  si dice traiettoria dello stato. Consistentemente,  $y(t)$  si dice traiettoria dell'uscita.

Per sistemi senza ingresso (detti non forzati) la traiettoria (dello stato)  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ , è determinata solo dallo stato iniziale  $x_{t_0}$ .

## EQUILIBRIO DI UN SISTEMA

**Equilibrio di un sistema non forzato** Dato un sistema non forzato  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ , uno stato  $x_e$  si dice **equilibrio** del sistema se  $x(t) = x_e, t \geq t_0$  è una traiettoria del sistema.

**Coppia di equilibrio** Dato un sistema forzato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ ,  $(x_e, u_e)$  si dice coppia di equilibrio se  $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e), t \geq t_0$ , è traiettoria del sistema.

Per sistemi  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  (tempo invarianti) vale la seguente proprietà: data una coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$  vale  $f(x_e, u_e) = 0$ , vale lo stesso per sistemi non forzati (se  $x_e$  equilibrio allora  $f(x_e) = 0$ ).

Quindi ricapitolando:

- se  $x(t) = x_e \forall t \implies \dot{x}(t) = 0 \implies f(x(t), t) = 0$  (sistemi non forzati)
- se  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ :  $f(x_e) = 0 \implies x_e$  equilibrio (sistemi non forzati tempo invarianti).
- se  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ :  $f(x_e, u_e) = 0 \implies (x_e, u_e)$  coppia di equilibrio (sistemi forzati tempo invarianti).

## CLASSIFICAZIONE DI SISTEMI IN FORMA DI STATO

Dato il caso generale,  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ equazione di stato}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \text{ equazione di uscita}$$

I sistemi in forma di stato si possono classificare in:

- **SISO** (Single Input Single Output), sotto classe dei sistemi MIMO (Multiple Input Multiple Output): se  $m = p = 1$  altrimenti MIMO
- **Strettamente propri**, sotto classe di propri: se  $y = h(x(t), t)$
- **Non forzati**, sotto classe di forzati:  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$   $y(t) = h(x(t), t)$
- **Tempo invarianti** sotto classe dei tempo varianti: se data una traiettoria  $(x(t), u(t), t), t \geq t_0$ , con  $x(t_0) = x_0, \forall \Delta \in \mathbb{R}$ , vale che per  $x(t_0 + \Delta) = x_0$  allora  $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$  è una traiettoria. Si può dimostrare che i sistemi tempo invarianti sono del tipo:  
 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0$   
 $y(t) = h(x(t), u(t))$   
senza perdita di generalità si può porre  $t_0 = 0$
- **Linearità** sotto classe dei non lineari

## SISTEMI LINEARI

Un sistema è detto lineare se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in  $x$  ed  $u$ .

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t)$$

⋮

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)$$

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t)$$

⋮

$$y_p(t) = c_{p1}(t)x_1(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1}(t)u_1(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)$$

Quindi raggruppando tutti i coefficienti in matrici del tipo:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}$$

Dove  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Di conseguenza le equazioni di stato e di uscita diventano:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

## SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

Un sistema si dice **lineare tempo invariante** se è lineare e le funzioni del movimento sono indipendenti dal tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Se **SISO**:  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \implies B$  è un vettore,  $C$  è un vettore riga e  $D$  è uno scalare.

### Principio di sovrapposizione degli effetti

Sia  $(x_a(t), u_a(t))$  traiettoria con  $x_a(t_0) = x_{0a}$

Sia  $(x_b(t), u_b(t))$  traiettoria con  $x_b(t_0) = x_{0b}$

Allora  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dato lo stato iniziale  $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$ , si ha che:

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è una **traiettoria del sistema**. Ovvero applicando in ingresso  $u_{ab}(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$  la traiettoria di stato è  $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

**Importante:** NON vale per sistemi non lineari

### Evoluzione libera e forzata

Sia  $x_\ell(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato ottenuta per  $x_\ell(t_0) = x_0$  e  $u_\ell(t) = 0$ ,  $t \geq t_0$ , detta **evoluzione libera**

Sia  $x_f(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato ottenuta per  $x_f(t_0) = 0$  e  $u_f(t) = u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , detta **evoluzione forzata**

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale  $x(t_0) = x_0$  e applicando l'ingresso  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$  la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$$

Ciò NON vale per sistemi non lineari (il principio di sovrapposizione vale solo per sistemi lineari)

## Traiettorie di un SLTI e rappresentazioni equivalenti

Dato il SLTI generico:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dalla notazione introdotta nel paragrafo precedente si può scrivere:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

Ricorda:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Proprietà della matrice esponenziale:

- Esponenziale e cambio di base:  $e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$
- Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi (forma di Jordan): l'esponenziale di una matrice di questo tipo è una matrice diagonale a blocchi in cui ciascun blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente della matrice di partenza

Difatti l'esponenziale di una matrice diagonale  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  è:  $e^{\Lambda t} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$

Dalle proprietà sopraelencate si può giungere ad una rappresentazione equivalente delle equazioni di traiettorie e uscite dei SLTI effettuando un cambio di base mediante una matrice  $T$  (invertibile):

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= Tx(t) \\ x(t) &= T^{-1}\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned}$$

con:  $\hat{A} = TAT^{-1}$ ,  $\hat{B} = TB$ ,  $\hat{C} = CT^{-1}$ ,  $\hat{D} = D$

Tutto questo per cambiare la posizione dell'origine in modo tale da non avere errore (non avere un gap fra l'origine e lo stato iniziale).

## Modi naturali

Dato il SLTI generico:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Indicando con  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  gli  $r \leq n$  autovalori (reali e complessi coniugati) distinti della matrice  $A$ , con molteplicità algebrica  $n_1, \dots, n_r \geq 0$  tali che  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ .

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato  $x_\ell(t)$  si possono scrivere come:

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{j i q} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di  $h_i \leq n_i$ , dove i coefficienti  $\gamma_{j iq}$  dipendono dallo stato iniziale  $x(0)$ .

I termini  $t^{q-1}e^{\lambda_i t}$  sono detti **modi naturali** del sistema. L'evoluzione libera è **combinazione lineare dei modi**.

Inoltre poiché l'uscita è lineare nello stato, anche l'evoluzione libera dell'uscita è combinazione lineare dei modi.

**Forma reale dei modi di un sistema** Se la matrice  $A$  del SLTI è reale e  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$  è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato  $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$  è autovalore di  $A$ , inoltre si può dimostrare che i coefficienti  $\gamma_{j iq}$  corrispondenti agli autovalori complessi coniugati sono anch'essi complessi coniugati. Si verifica inoltre per calcolo diretto che  $x_{\ell,j}(t)$  sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati  $\lambda_i$  e  $\bar{\lambda}_i$  sono del tipo:

$$t^{q-1}e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

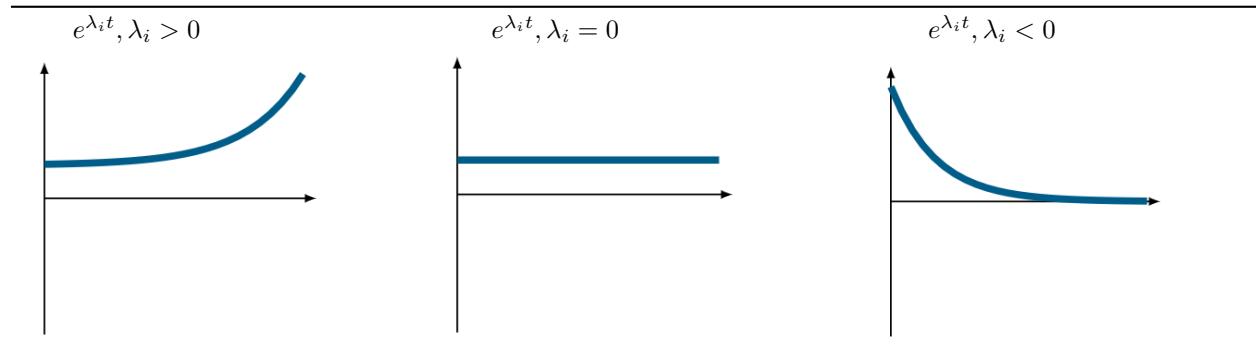
con opportuni valori della fase  $\phi_i$ .

Nel caso in cui le molteplicità algebriche  $n_1, \dots, n_r$  degli autovalori di  $A$  coincidano con le molteplicità geometriche, allora i coefficienti  $h_i$  sono tutti pari ad 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

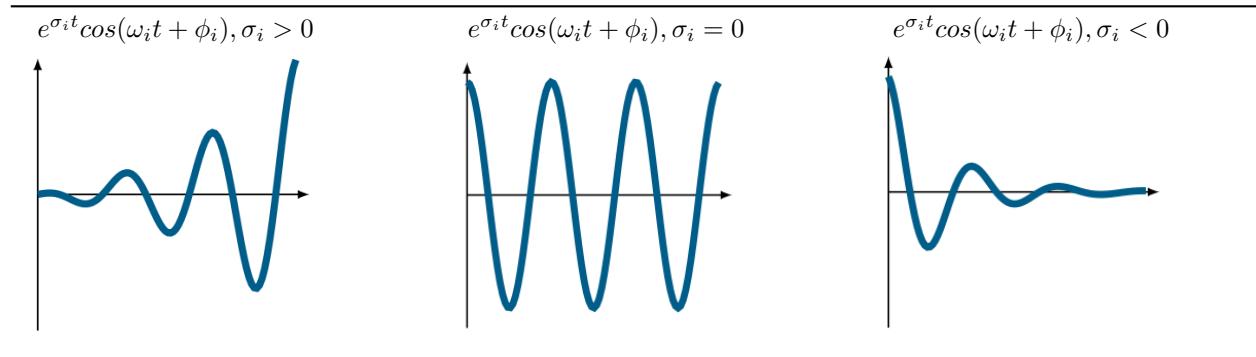
$$e^{\lambda_i t} \quad \text{per autovalori reali}$$

$$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad \text{per autovalori complessi coniugati}$$

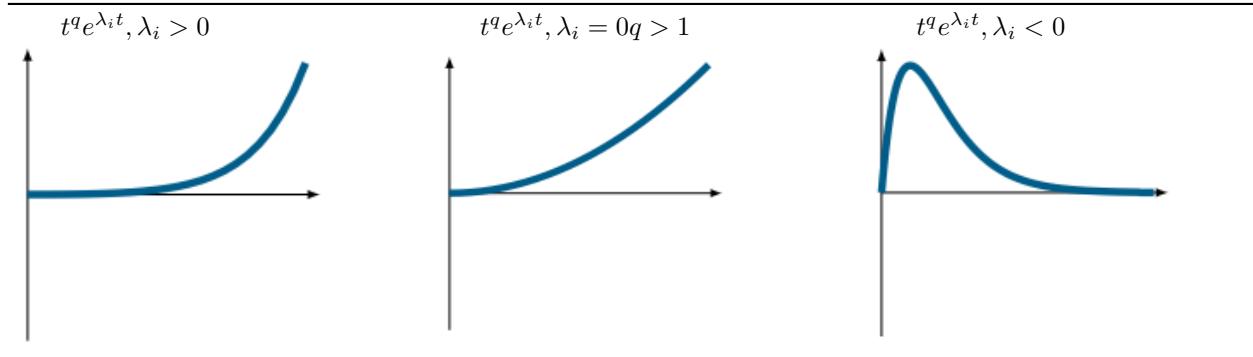
### Modi naturali: autovalori reali semplici (m.a. = m.g.)



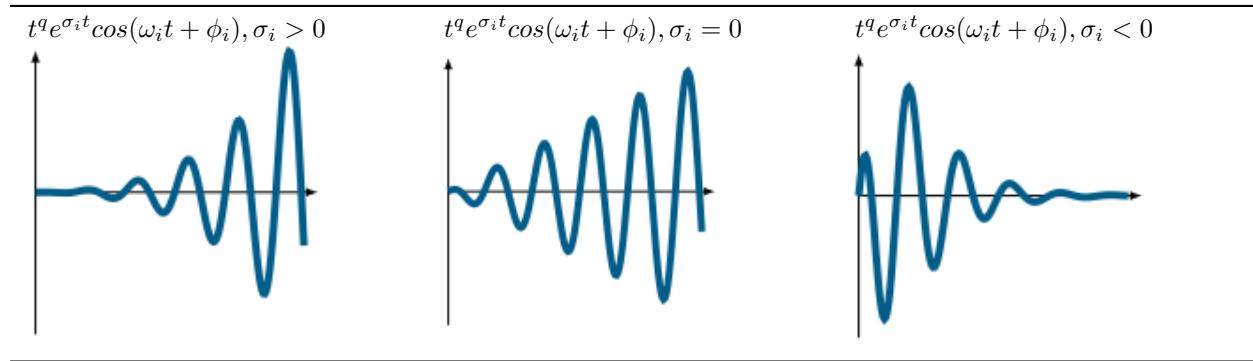
### Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici (m.a. = m.g.)



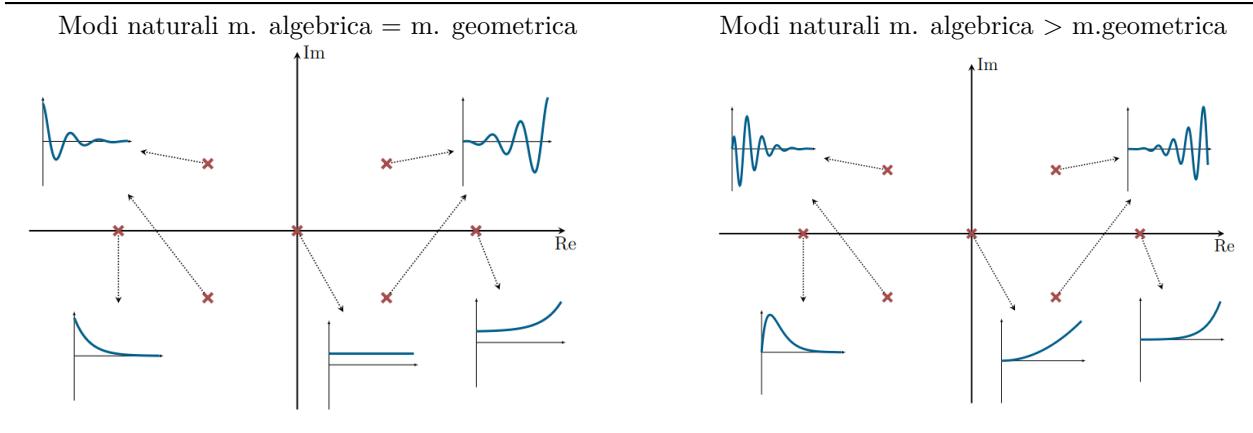
### Modi naturali: autovalori reali (m.a. > m.g.)



### Modi naturali: autovalori complessi coniugati (m.a. > m.g.)



### Modi naturali: tabella riassuntiva



### Forma di Jordan di una matrice

Per una generica matrice  $A$  si può dimostrare che esiste sempre  $T$  tale che:

$$J = TAT^{-1}$$

di  $\mu$  autovalori distinti  $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$  con  $n_i$  molteplicità algebrica di  $\lambda_i$

$$J = \text{diag}\{J_1, \dots, J_\mu\}$$

con  $J_i$  blocco di Jordan associato all'autovalore  $\lambda_i$  dato da

$$J_i = \text{diag}\{J_{i1}, \dots, J_{i\nu_i}\}$$

con  $J_{ih} \in \mathbb{R}^{\eta_{ih} \times \eta_{ih}}$  miniblocchi di Jordan dell'autovalore  $\lambda_i$  dati da

$$J_{ih} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dove  $\sum_{h=1}^{\nu_i} \eta_{ih} = n_i$

### Esonenziale di un miniblocco

Dato  $J_{ih}$  definito come nel paragrafo precedente allora il suo esponenziale  $e^{J_{ih}t}$  è dato da ( $\lambda_i$  reale o complesso)

$$e^{J_{ih}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{\eta_{ih}-1}}{(\eta_{ih}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Esempio: carrello

Prendendo in esempio il carrello con la massa e la molla e considerando  $k$  costante cosicchè il sistema sia LTI, si ha:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{aligned}$$

Autovalori:  $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$ ,  $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$

Se applichiamo un controllo  $u = -hx_2$  gli autovalori diventano:

$$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}, \quad \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

Se  $h^2 > 4Mk$  allora autovalori reali, se  $h^2 < 4Mk$  autovalori complessi coniugati.

Se  $h^2 = 4Mk \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$  (m.a.=2), si può dimostrare che m.g.=1, quindi blocco di Jordan  $2 \times 2$ :

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \\ e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

## STABILITÀ

**Equilibrio stabile** Uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice stabile se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x_0$  tale che  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$  allora risulti  $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$

**Equilibrio instabile** Uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice instabile se non è stabile.

**Equilibrio attrattivo** Uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice attrattivo se  $\exists \delta > 0$  tale che  $\forall x_0$  tale che  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$  allora risulti  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$

**Equilibrio asintoticamente stabile** Uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo

**Stabilità locale** Le definizioni date sottointendono la parola locale, cioè la proprietà vale in un intorno di  $x_e$

**Stabilità globale** Le proprietà di stabilità ed asintotica stabilità sono globali se valgono  $\forall x_e \in \mathbb{R}^n$

**Stabilità di una traiettoria** Le definizioni di stabilità si possono generalizzare a una traiettoria  $\bar{x}(t), t \geq 0$

## STABILITÀ INTERNA DI SLTI

Nei sistemi lineari se  $u = 0$  allora  $x = 0$  è **sempre** un equilibrio. Nei sistemi lineari si può dimostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, per questo motivo si parla di **stabilità del sistema**.

### Teorema 1

Un SLTI è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

### Teorema 2

Un SLTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i miniblocchi di Jordan associati hanno dimensione 1)

Conseguenza immediata è che se si ha almeno un autovalore a parte reale positiva o se almeno un autovalore a parte reale nulla ha m.a. > m.g.

Prendendo in esame l'esempio del carrello, se  $h^2 > 4Mk$  o se  $h^2 < 4Mk$  gli autovalori, in entrambi i casi, sono a parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile. Se, invece,  $h^2 = 4Mk$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$  (m.a. = 2), si può però dimostrare che m.g. = 2 e che gli autovalori sono a parte reale negativa quindi il sistema è asintoticamente stabile.

## RETROAZIONE DELLO STATO

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Supponendo di misurare l'intero stato, ovvero se  $y(t) = x(t)$  allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice di guadagni e  $v(t)$  un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato. Risulta quindi

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile dobbiamo progettare  $K$  tale che  $(A + BK)$  abbia autovalori tutti a parte reale negativa. La possibilità di scegliere gli autovalori di  $(A + BK)$  dipende dalla coppia di matrici  $(A, B)$  ed è legata alla proprietà di **raggiungibilità**.

Se non è possibile misurare l'intero stato, ovvero se  $x(t) \neq y(t)$ , esistono tecniche per ricostruire lo stato a partire dalle misure mediante sistemi ausiliari detti **osservatori**. Se si possa ricostruire o meno lo stato dipende dalla coppia  $(A, C)$  ed è legato alla proprietà di osservabilità.

## LINEARIZZAZIONE DI SISTEMI NON LINEARI (tempo invarianti)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Sia  $(x_e, u_e)$  una coppia di equilibrio,  $f(x_e, u_e) = 0$ , consideriamo una traiettoria a partire da stato iniziale  $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \\ y(t) &= h(x_e, u_e) + \tilde{y}(t) = y_e + \tilde{y}(t)\end{aligned}$$

Essendo una traiettoria vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))\end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor ( $f$  e  $h$  suff. regolari) in  $(x_e, u_e)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \frac{\partial}{\partial u}f(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \text{term. ord. sup.} = \\ &= f(x_e, u_e) + A_e\tilde{x}(t) + B_e\tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} = \\ &= A_e\tilde{x}(t) + B_e\tilde{u}(t)\end{aligned}$$

$$y_e + \tilde{y}(t) = h(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \frac{\partial}{\partial u}h(x, u)\Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} + \text{term. ord. sup.}$$

Quindi

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

Conseguentemente ponendo

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = A_e \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = B_e \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = C_e \quad \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = D_e$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$$

$$\tilde{y}(t) = C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

Approssimando

$$\dot{\tilde{x}}(t) \approx A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t)$$

$$\tilde{y}(t) \approx C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t)$$

Quindi il sistema linearizzato risulta

$$\dot{\Delta x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = C_e \Delta x(t) + D_e \Delta u(t)$$

Con  $(\Delta x(t), \Delta u(t))$ ,  $t \geq 0$ , traiettoria del linearizzato.

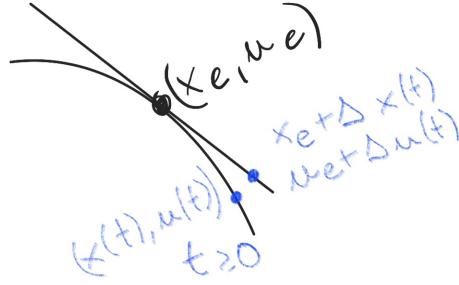
Le traiettorie del sistema linearizzato soddisfano

$$x(t) = x_e + \tilde{x}(t) \approx x_e + \Delta x(t)$$

$$u(t) = u_e + \tilde{u}(t) \approx u_e + \Delta u(t)$$

$$y(t) = y_e + \tilde{y}(t) \approx y_e + \Delta y(t)$$

per variazioni sufficientemente piccole ( $\Delta$  sufficientemente piccolo).



### Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invarianti,  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , sia  $(x_e, u_e)$  una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno a  $(x_e, u_e)$  è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio  $x_e$ , relativo all'ingresso  $u_e$  è (localmente) asintoticamente stabile.

**Ricorda:** per vedere se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile in un intorno della coppia di equilibrio si guardano gli autovalori di  $A$  (o di  $A + BK$  se è retroazionato).

## Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante,  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , sia  $(x_e, u_e)$  una coppia di equilibrio. Se il linearizzato intorno a  $(x_e, u_e)$  ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora l'equilibrio  $x_e$ , relativa all'ingresso  $u_e$ , è instabile.

**N.B.:** non si può dire nulla in caso abbiano solo autovalori a parte reale minore o uguale a zero con almeno un autovalore a parte reale nulla.

## Controllo non lineare mediante linearizzazione

Consideriamo il sistema non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Linearizzazione intorno all'equilibrio  $(x_e, u_e)$  ( $A_e = \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$ ,  $B_e = \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$ )

$$\dot{\Delta x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

*Obiettivo:* portare  $\Delta x(t)$  a zero, ovvero  $x(t)$  a  $x_e$  “in modo approssimato”. Usando retroazione dello stato  $\Delta u(t) = K \Delta x(t) + \Delta v(t)$  otteniamo il sistema in anello chiuso:

$$\dot{\Delta x}(t) = (A_e + B_e K) \Delta x(t) + B_e \Delta v(t)$$

Posso progettare  $K$  in modo che  $(A_e + B_e K)$  sia asintoticamente stabile. Grazie ai teoremi sulla linearizzazione  $x_e$  risulta un equilibrio (localmente asintoticamente stabile per il sistema lineare non in anello chiuso retroazionato).

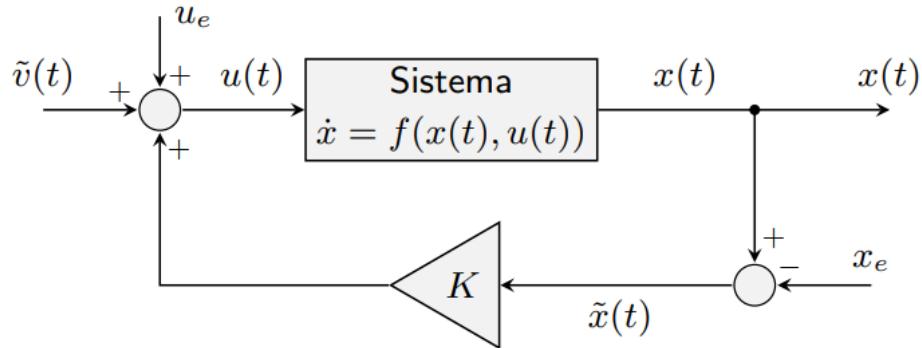
Visto che  $\Delta x(t) \approx x(t) - x_e$ :

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t) \approx u_e + K \Delta x(t) + \tilde{v}(t)$$

Perciò la legge di controllo finale sarà:

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t) \quad \text{feedback (retroazione) per il sistema non lineare}$$

Con la  $K$  progettata sul sistema linearizzato.



# TRASFORMATA DI LAPLACE

## Richiami sui numeri complessi

Un numero complesso può essere rappresentato in 2 modi:

- **Forma cartesiana:**

$$s = \sigma + j\omega \quad \sigma \text{ parte reale , } \omega \text{ parte immaginaria}$$

- **Forma polare:**

$$s = \rho e^{j\varphi} \quad \rho \text{ modulo , } \varphi \text{ argomento}$$

Ovviamente esistono le formule per il passaggio fra l'una e l'altra:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad \varphi = \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

$$\sigma = \rho \cos(\varphi) \quad \omega = \rho \sin(\varphi)$$

# TRASFORMATA DI LAPLACE

Data una funzione complessa  $f$  di variabile reale  $t$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Sia  $s = \sigma + j\omega$  una variabile complessa, allora:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{Trasformata di Laplace di } f(t)$$

Se esiste per qualche  $s$ , ossia se l'integrale converge.

**Notazione:** Trasformazione di Laplace  $\mathcal{L}$      $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

## OSSERVAZIONI

**Ascissa di convergenza** Sia  $\bar{\sigma} > -\infty$  estremo inferiore di  $s = \sigma + j\omega$  per cui l'integrale converge. Allora la trasformata esiste nel semipiano  $\text{Re}(s) > \bar{\sigma}$ .  $\bar{\sigma}$  è detta ascissa di convergenza. La definizione si estende anche a  $\text{Re}(s) \leq \bar{\sigma}$ .

**N.B.:** solo i valori di  $f(t)$  per  $t \geq 0$  determinano la trasformata.

**N.B.:** L'integrale va da  $0^-$  a  $+\infty$  quindi gli impulsi in 0 sono considerati nell'integrazione.

## Trasformate razionali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove  $N(s)$  e  $D(s)$  sono polinomi primi fra loro.

Se  $f$  reale allora  $N(s)$  e  $D(s)$  a coefficienti reali.

Gli **zeri** sono le radici di  $N(s) = 0$

I **poli** sono le radici di  $D(s) = 0$

## ANTITRASFORMAZIONE

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

con  $\sigma > \bar{\sigma}$ .

**Notazione:** antitrasformazione di Laplace  $\mathcal{L}^{-1} \quad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

**N.B.:**  $f(t)$  fornita solo per  $t \geq 0$ . Si assume  $f(t) = 0$  per  $t < 0$ .

**N.B.:** Considerando solo  $f(t)$  t.c.  $f(t) = 0$  per  $t < 0$  allora c'è corrispondenza biunivoca tra  $f(t)$  e  $F(s)$ , quindi hanno lo stesso contenuto informativo.

**N.B.:** la definizione è poco usata per l'antitrasformazione.

## PROPRIETÀ

### Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

### Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad \forall \tau > 0$$

### Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - a) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

### Derivazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Ne consegue iterando

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t) \Big|_{t=0}$$

### Integrazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

### Convoluzione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

## TEOREMI DEL VALORE INIZIALE E FINALE

### Teorema del valore iniziale

Se  $f(t)$  reale con trasformata razionale  $F(s)$  con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore allora

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

## Teorema del valore finale

Se  $f(t)$  reale con trasformata razionale  $F(s)$  con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore e poli nulli o a parte reale negativa allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

## TRASFORMATA DI SEGNALI ELEMENTARI

**Delta di Dirac**  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

**Gradino unitario**  $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{t}$

**Rampa**  $\mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}$

**Espoenziale**  $\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$

**Seno**  $\mathcal{L}[\sin(\omega t) 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

**Coseno**  $\mathcal{L}[\cos(\omega t) 1(t)] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \sin(\omega t) 1(t)\right] = \frac{s}{\omega} \mathcal{L}[\sin(\omega t) 1(t)] = \frac{s}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

**Seno con fase**  $\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi) 1(t)] = \frac{\omega \cos(\varphi) \pm s \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$

**Coseno con fase**  $\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi) 1(t)] = \frac{s \cos(\varphi) \mp \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$

## FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

### Sistema non variante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} x(t)\right] &= \mathcal{L}[f(x(t), u(t))] \\ sX(s) - x(0) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(x(t), u(t)) e^{-st} dt \end{aligned}$$

### Sistema lineare tempo variante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ sX(s) - x_0 &= \mathcal{L}[A(t)x(t) + B(t)u(t)] = \mathcal{L}[A(t)x(t)] + \mathcal{L}[B(t)u(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} A(t)x(t)e^{-st} dt + \int_{0^-}^{+\infty} B(t)u(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

## SISTEMA LINEARE TEMPO INVARIANTE

Dato il seguente SLTI con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  ed  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

con  $x(0) = x_0$

Siano  $X(s) := \mathcal{L}[x(t)]$ ,  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  e  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ .

Trasformando entrambi i membri e ricordando che  $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$ :

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

Si possono quindi individuare le traformate dell'evoluzione libera (quelle dipendenti da  $x_0$ ) e dell'evoluzione forzata (quelle dipendenti da  $U(s)$ ):

- Evoluzione libera:

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

- Evoluzione forzata:

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y_f(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

Considerando la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita:

$$Y_f(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

La matrice:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è detta **funzione di traferimento**.

Se il sistema è SISO allora è uno scalare.

Dunque ora si ha una rappresentazione ingresso-uscita (detta rappresentazione *esterna*) del tipo:

$$Y_f(s) = G(s)U(s)$$

Se si assumesse  $x(0) = 0$  allora si avrebbe

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

**N.B.:** la funzione di trasferimento è data dal rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso  $x(0) = x_0 = 0$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Operativamente la funzione di traferimento può essere calcolata come:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

Nel caso sia SISO la funzione è una funzione razionale fratta:

- il denominatore di grado  $n$  e numeratore di grado  $\leq n$  ( $= n$  se  $D \neq 0$  e ne consegue che il sistema sarebbe proprio e NON strettamente proprio)
- il numeratore ed il denominatore possono avere radici comuni e quindi semplificabili, questo comporta un minore contenuto informativo rispetto alla forma di stato
- la relazione fra grado del numeratore e denominatore è detta *grado relativo*

E a livello dimensionale si avrebbe:  $D \in \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\text{adj}(sI - A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\det(sI - A)$  che è un polinomio di grado  $n$ .

Nel caso in cui il sistema non sia SISO comunque  $G(s)$  sarebbe una matrice i cui i singoli elementi sono rapporti di polinomi.

La funzione di traferimento:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Se vista come rapporto di polinomi, può essere scritta:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Le radici di  $N(s)$  sono dette **zeri**.

Le radici di  $D(s)$  sono dette **poli**.

**Molto importante:** i poli sono radici di  $\det(sI - A)$  quindi sono gli autovalori di  $A$ .

Un'altra osservazione può essere che poli e zeri sono reali o complessi coniugati poiché sono radici di polinomi a coefficienti reali.

Ma perchè usiamo la trasformata di Laplace?

Perchè, usando la trasformata di Laplace, abbiamo un dominio (diverso da quello del tempo) nel quale non dobbiamo agire e risolvere equazioni differenziali potenzialmente molto complicate, bensì si riduce tutto a rapporti di polinomi di facile risoluzione.

### Rappresentazioni e parametri della funzione di traferimento

Una forma fattorizzata è:

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

I cui poli reali sono:  $-p_i$ .

E gli zeri reali:  $-z_i$ .

Si può dimostrare che  $|\xi_i| < 1$  perchè devono essere complesse coniugate:

$$\begin{aligned} s^2 + \xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2 &\Rightarrow s_{p_{i1,2}} = -\xi_i \omega_{ni} \pm \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 - \omega_{ni}^2} \\ &= -\xi_i \omega_{ni} \pm \omega_{ni} \sqrt{\xi_i^2 - 1} \\ &= -\xi_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \end{aligned}$$

Dalla forma presentata in precedenza si può arrivare ad una seconda forma particolarmente di interesse:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}s} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$

detta **forma di Bode**.

*Dimostrazione:*

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \\
 \prod_i (s + z_i) &= \prod_i (1 + \frac{1}{z_i} s) z_i & \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2) &= \prod_i (\frac{s^2}{\alpha_{ni}^2} + \frac{s\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + 1) \alpha_{ni}^2 \\
 \prod_i (s + p_i) &= \prod_i (1 + \frac{1}{p_i} s) p_i & \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2) &= \prod_i (\frac{s^2}{\omega_{ni}^2} + \frac{s\xi_i}{\omega_{ni}} s + 1) \omega_{ni}^2
 \end{aligned}$$

Quindi la  $G(s)$  diventa:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \\
 &= \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2 \prod_i (1 + \frac{1}{z_i} s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2 \prod_i (1 + \frac{1}{p_i} s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}
 \end{aligned}$$

Chiamando:

$$\mu = \rho \frac{\prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2} \quad \tau_i = \frac{1}{z_i} \quad T_i = \frac{1}{p_i}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \\
 &= \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2 \prod_i (1 + \frac{1}{z_i} s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2 \prod_i (1 + \frac{1}{p_i} s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})} \\
 &= \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}
 \end{aligned}$$

Da qui una variante un po' più chiara della forma di Bode è:

$$G(s) = \mu \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}^2} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})} \blacksquare$$

In cui:

- $\rho$  costante di trasferimento,  $\mu$  guadagno
- $g$  tipo
- $-z_i$  zeri reali,  $-p_i$  poli reali,  $\tau_i$  e  $T_i$  costanti di tempo
- $\alpha_{ni} > 0$ ,  $\omega_{ni} > 0$  pulsazioni naturali di zeri e poli complessi coniugati
- $\zeta_i, \xi_i$  ( $|\zeta_i| < 1$  e  $|\xi_i| < 1$ ) smorzamenti di zeri e poli complessi coniugati

Esempio sistemi del II ordine:  $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + s\xi\omega_n + \omega_n^2}$

Esempio:  $G(s) = 100 \frac{s+1}{s(s+10)} = \frac{100}{10} \frac{s+1}{s(1+\frac{1}{10}s)} = 10 \frac{s+1}{s(1+\frac{1}{10}s)}$

Quindi si ha:  $\rho = 100$ ,  $z = 1$ ,  $p = 10$ ,  $\mu = 10$ ,  $\tau = 1$  e  $T = \frac{1}{10}$

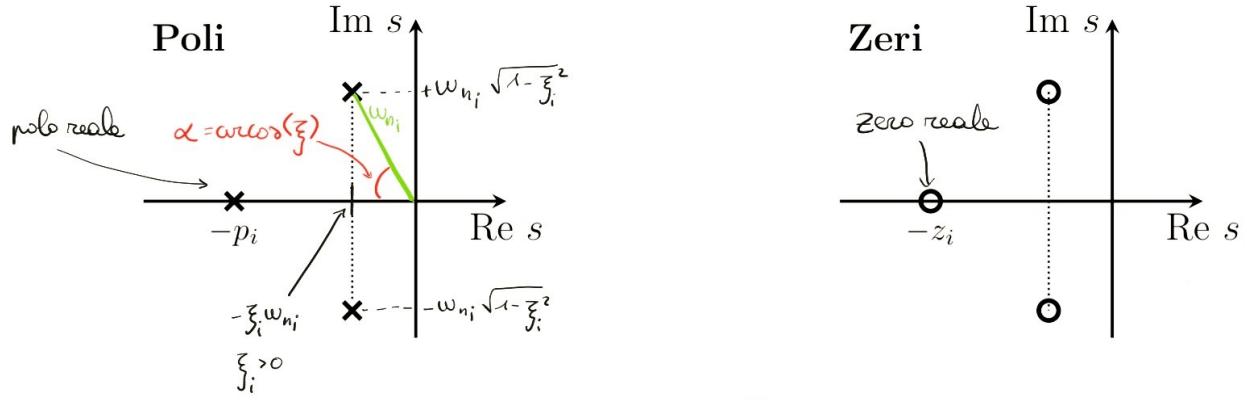


Figure 1: Rappresentazione dei poli e degli zeri sul piano complesso

### Esempio 1

Dato il sistema:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$y = x_2$$

Allora

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

### Esempio 2

Dato il sistema:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = 4x_2$$

$$y = x_1$$

Trasformando entrambi i membri:

$$sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) - 2X_2(s) + U(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = 4X_2(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

In alternativa calcolandola con  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  si ha  $G(s) = \frac{s-4}{(s-4)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$

## ANTITRAFORMAZIONE DI LAPLACE

Ricordiamo che la trasformata della risposta di un SLTI SISO è data da:  $Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$  con  $C(sI - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Inoltre sappiamo che si può far vedere che gli elementi di  $C(sI - A)^{-1}$  sono rapporti di polinomi. Quindi ora si può scrivere:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con  $N(s)$  e  $D(s)$  polinomi opportuni.

Ora si ricorda che per  $x(0) = 0$  (cioè in risposta forzata) si ha:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

E applicando a quest'ultima una delta di Dirac  $u(t) = \delta(t)$  (che ha traformata  $U(s) = 1$ ) si arriva ad avere:

$$Y(s) = G(s)$$

Indi per cui per la risposta all'impulso le radici di  $D(s)$  sono i poli della funzione di traferimento.

### Esempio di antitrasformazione tramite sviluppo di Heaviside

Data la risposta:

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)}$$

e mettiamo di volerla scrivere come:

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+5}$$

con  $r_1, r_2$  coefficienti.

Calcolando l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+5}\right] \quad \text{per linearità della trasformata} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_2}{s+5}\right] \\ &= r_1\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + r_2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] \quad \text{ricordando le trasformate fondamentali} \\ &= r_1e^{-t}1(t) + r_2e^{-5t}1(t) \end{aligned}$$

Ma come calcolare  $r_1$  e  $r_2$ ?

Si sceglie un polo e si calcola la  $Y(s)$  moltiplicata per il fatto che corrisponde al polo per la  $s \rightarrow \text{polo}$ . Nel nostro caso scegliamo  $(s+1)$  quindi  $\text{polo} = -1$ :

$$\begin{aligned} (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} &= (s+1)\frac{10(s+2)}{(s+1)(s+5)}\Big|_{s=-1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} &= (s+1)\frac{r_1}{s+1} + (s+1)\frac{r_2}{s+5}\Big|_{s=-1} = r_1 \end{aligned}$$

Allora

$$r_1 = (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{10(s+2)}{s+5}\Big|_{s=-1} = \frac{5}{2}$$

Si fa lo stesso per  $r_2$  e risulta:

$$r_2 = (s+5)Y(s)\Big|_{s=-5} = \frac{10(s+2)}{s+1}\Big|_{s=-5} = \frac{15}{2}$$

Riassumendo:

$$Y(s) = \frac{5}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{15}{2} \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{5}{2} e^{-t} 1(t) + \frac{15}{2} e^{-5t} 1(t)$$

## SVILUPPO DI HEAVISIDE O IN FRATTI SEMPLICI

**Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)**

Si può scrivere  $Y(s)$  come:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s+p_i}$$

Gli  $r_i$  sono detti **residui**.

Consideriamo:

$$(s+p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{r_j(s+p_i)}{s+p_j} \Big|_{s=-p_i} + r_i$$

Quindi ciascun residuo  $r_i$  può essere calcolato come

$$r_i = (s+p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Infine, antitrasformando:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s+p_i}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n r_i \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+p_i}\right] = \sum_{i=1}^n r_i e^{-p_i t} 1(t)$$

**Osservazione:**  $r_i$  reali se associati a poli reali,  $r_i$  complessi coniugati se associati a poli complessi coniugati.

È interessante notare, inoltre, la forma reale dei poli complessi coniugati trovati col procedimento precedente, quindi consideriamo la coppia di poli complessi coniugati seguente:

$$p_{i,1} = \sigma_i + j\omega_i \quad p_{i,2} = \sigma_i - j\omega_i$$

E i residui associati sono:

$$r_{i,1} = M_i e^{-j\varphi_i} \quad r_{i,2} = M_i e^{j\varphi_i}$$

Quindi l'antitrasformata dei due termini associati è data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{r_{i,2}}{s+p_{i,2}}\right] &= M_i e^{-j\varphi_i} e^{-p_{i,1} t} 1(t) + M_i e^{j\varphi_i} e^{-p_{i,2} t} 1(t) \\ &= M_i e^{-j\varphi_i} e^{-(\sigma_i + j\omega_i)t} 1(t) + M_i e^{j\varphi_i} e^{-(\sigma_i - j\omega_i)t} 1(t) \\ &= M_i e^{-\sigma_i t} (e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} + e^{j(\omega_i t + \varphi_i)}) 1(t) \\ &= 2M_i e^{-\sigma_i t} \frac{(e^{-j(\omega_i t + \varphi_i)} + e^{j(\omega_i t + \varphi_i)})}{2} 1(t) \\ &= 2M_i e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) 1(t) \end{aligned}$$

Da cui valgono le regole di divergenza e convergenza viste per i modi naturali:

- $-\sigma_i > 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  diverge
- $-\sigma_i = 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  rimane costante
- $-\sigma_i < 0 \implies e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$  converge

## Caso 2: poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

Si può scrivere  $Y(s)$  come:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{r_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

con  $r_{i,h}$ ,  $h = 1, \dots, n_i$ , residui del polo  $-p_i$ .

Si consideri:

$$\begin{aligned} (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} &= \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_j} \frac{r_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i-h} r_{i,h} \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_j} \frac{r_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i-1} (s + p_i)^{n_i-h} r_{i,h} + r_{i,n_i} \end{aligned}$$

Quindi il residuo  $r_{i,n_i}$  è dato da:

$$r_{i,n_i} = (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Derivando  $(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}$  si calcolano gli altri residui come:

$$r_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \frac{d^{n_i-h}}{ds^{n_i-h}} \left[ (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \Big|_{s=-p_i}$$

Antitrasformando la  $Y(s)$  sviluppata in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{r_{i,h}}{(s + p_i)^h} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} r_{i,h} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s + p_i)^h} \right] \\ &\quad \text{ricordando le regole di antitrasformazione} \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} r_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t) \end{aligned}$$

Si può dimostrare che per una coppia di poli complessi coniugati

$$\sigma_i + j\omega_i \quad \text{e} \quad \sigma_i - j\omega_i$$

con molteplicità  $n_i$ , il contributo elementare associato è dato da:

$$\sum_{h=1}^{n_i} 2M_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$

I modi naturali per un polo reale (multiplo)  $-p_i$  è dato da:

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t)$$

Mentre per una coppia di poli complessi coniugati (multipli)  $-(\sigma_i + j\omega_1)$  e  $-(\sigma_i - j\omega_1)$  è dato da:

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$

Da qui le regole di convergenza sono le stesse viste per i modi naturali con molteplicità algebrica maggiore di quella geometrica.

**Esempio di antitrasformazione tramite sviluppo di Heaviside: caso 2**

Data la funzione:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2}$$

Si vuole scrivere come:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_{2,1}}{s+2} + \frac{r_{2,2}}{(s+2)^2}$$

Si calcola  $r_1$ :

$$r_1 = s \frac{s+1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

Si procede calcolando  $Y(s)(s+2)^2 \Big|_{s=-2}$ :

$$Y(s)(s+2)^2 \Big|_{s=-2} = \begin{cases} (s+2)^2 \frac{s+1}{s(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} \\ (s+2)^2 \frac{r_1}{s} + (s+2)^2 \frac{r_{2,1}}{s+2} + (s+2)^2 \frac{r_{2,2}}{(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = r_{2,2} \end{cases} \implies r_{2,2} = \frac{1}{2}$$