Grundbegriffe Mengenlehre und Logik

Analysis

für

Informatiker und Lehramt Mathematik MS/GS/FS

WS 2015/2016

Agnes Radl

Mengen

Georg Cantor (1895)
„Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Notation

- $m \in M$ oder $M \ni m$, falls m ein Element der Menge M ist.
- $m \notin M$ oder $M \not\ni m$, falls m kein Element der Menge M ist.

Beispiel

- $M = \{1, 2, 3, 5\}$; dann $5 \in M$, $4 \notin M$;
  beachte: $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$
- $\mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen);
- $\{m \in \mathbb{N} : m \text{ gerade}\}$

leere Menge

$\emptyset$ oder $\{\}$

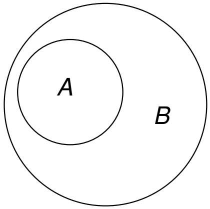
Menge, die kein Element enthält.

Teilmenge, Obermenge

Seien A und B Mengen.

$$A \subseteq B,$$

falls für alle $x \in A$ auch $x \in B$ gilt.



- A ist eine *Teilmenge* von B bzw.
- B ist eine *Obermenge* von A.

Beispiel

- $\{1, 4\} \subseteq \{1, 2, 4, 5\}$
- $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$

Bemerkung

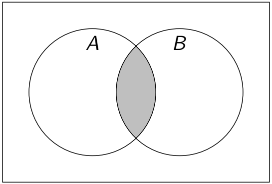
- Für jede Menge A gilt:
  $\emptyset \subseteq A, \;\; A \subseteq A.$
- $A = B$ bedeutet $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Durchschnitt

Seien A und B Mengen.

Durchschnitt von A und B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$



Beispiel

- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $A \cap B =$ $\{1, 5\}$
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4\}$, $A \cap B =$ $\emptyset$
- $A = \emptyset$, B beliebige Menge: $A \cap B =$ $\emptyset$
- Ist $A \subseteq B$, dann ist $A \cap B =$ A.
- $A \cap A =$ A

Bemerkung

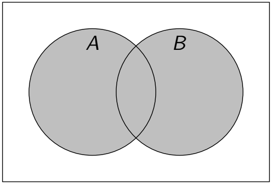
- A und B heißen *disjunkt*, falls $A \cap B = \emptyset$.
  Notation: $A \dot{\cup} B$

Vereinigung

Seien A und B Mengen.

Vereinigung von A und B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$



Beispiel

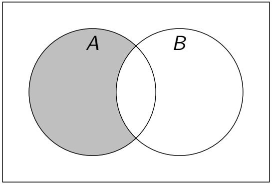
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $\quad A \cup B = \{1, 2, 5, 12\}$
- $A = \emptyset$, B beliebige Menge: $\quad A \cup B = B$
- $A \cup A = A$

Differenz

Seien A und B Mengen.

Differenz von A und B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

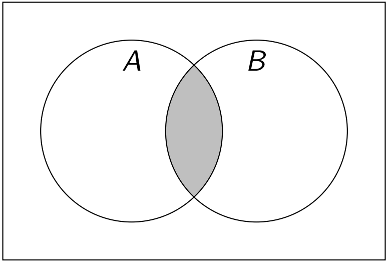


Beispiel

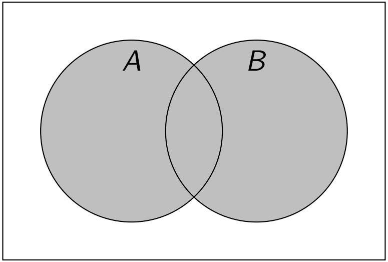
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $\quad A \setminus B = \{2\}$
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\quad A \setminus B = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus A = \emptyset$

Veranschaulichung durch Venn[1]-Diagramme

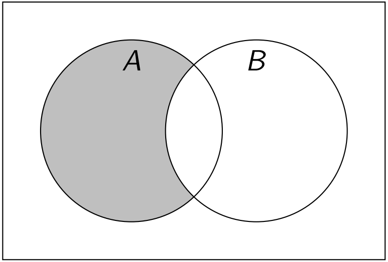
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



[1] John Venn (1834–1923), englischer Mathematiker

Potenzmenge

Sei A eine Menge.

Potenzmenge von A:

$$\mathbb{P}(A) = \{M : M \subseteq A\}$$

„Menge aller Teilmengen von A“

Beispiel

- $A = \{2, 5\}, \quad \mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\{1, 3, 7\} \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$, $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$

kartesisches Produkt

Seien A und B Mengen.

Kartesisches[1] *Produkt* von A und B:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Beispiel

- $A = \{2, 5\}, \quad B = \{1, 2, 3\},$
  $A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$
- $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$: $\quad A \times B = \emptyset$

[1] René Descartes (1596–1650); französischer Mathematiker

Bemerkung

- $\cap$ und $\cup$ kann man auch für endlich viele Mengen $A_1, \dots, A_n$ definieren:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{x : x \in A_1 \text{ und } \dots \text{ und } x \in A_n\},$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \text{ oder } \dots \text{ oder } x \in A_n\},$$

- ebenso das kartesische Produkt:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}.$$

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Eine mathematische Aussage A beschreibt einen mathematischen Sachverhalt, dem ein Wahrheitswert *wahr* (w) oder *falsch* (f) zugeordnet werden kann.

Beispiel

- „2 ist eine gerade Zahl.“ (w)
- „2 ist eine ungerade Zahl.“ (f)

Aus mathematischen Aussagen A und B kann man folgendermaßen neue mathematische Aussagen bilden.

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Negation: $\neg A$
„A gilt nicht."

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiel
A: „2 ist eine gerade Zahl."   (w)
$\neg A$: „Es gilt nicht, dass 2 eine gerade Zahl ist."   (f)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Konjunktion (und): $A \wedge B$
„Sowohl A gilt als auch B."

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel
A: „2 ist eine gerade Zahl." (w)
B: „3 ist eine gerade Zahl." (f)
$A \wedge B$: „2 ist eine gerade Zahl und 3 ist eine gerade Zahl." (f)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Disjunktion (oder): $A \vee B$
„A gilt oder B gilt.“
Beachte: Dies ist kein ausschließendes „oder“.
Auch beide dürfen gelten.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel
A: „2 ist eine gerade Zahl.“ (w)
B: „3 ist eine gerade Zahl.“ (f)
$A \vee B$: „2 ist eine gerade Zahl oder 3 ist eine gerade Zahl.“ (w)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Desweiteren

Implikation: $A \Rightarrow B$
„Wenn A, dann B."
„Aus A folgt B."
„A ist hinreichend für B."
„B ist notwendig für A."

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$

$A \Leftrightarrow B$ bedeutet $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

„A genau dann, wenn B."

„A ist notwendig und hinreichend für B."

„A und B sind äquivalent."

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Quantoren

Ist M eine Menge und $A(m)$ eine Aussage über m, so schreibt man

- $\forall m \in M : A(m)$
  „Für alle Elemente m der Menge M gilt $A(m)$."
- $\exists m \in M : A(m)$
  „Es gibt (mindestens) ein Element m in der Menge M, für das $A(m)$ gilt."

(Der Doppelpunkt wird manchmal weggelassen.)

$\forall$ „Allquantor"
$\exists$ „Existenzquantor"

Quantoren

Beispiel
$A(m)$: „m ist durch 2 teilbar.“

$M = \{2, 8, 10, 11\}$.

- $\forall m \in M : A(m)$ (falsch)
  „Jedes $m \in M$ ist durch 2 teilbar.“,
- $\exists m \in M : A(m)$ (wahr)
  „Es gibt ein $m \in M$, das durch 2 teilbar ist.“

$\tilde{M} = \{2, 8, 10\}$

- $\forall m \in \tilde{M} : A(m)$ (wahr)
  „Jedes $m \in \tilde{M}$ ist durch 2 teilbar.“,
- $\exists m \in \tilde{M} : A(m)$ (wahr)
  „Es gibt ein $m \in \tilde{M}$, das durch 2 teilbar ist.“

Quantoren

Beispiel

$M = \{2, 8, 10, 11\}$.

$A(m)$: „m ist durch 2 teilbar.“

- Negation von $\forall m \in M : A(m)$
  $\exists m \in M : \neg A(m)$ (wahr)
  „Es gibt ein $m \in M$, welches nicht durch 2 teilbar ist.“
- Negation von $\exists m \in M : A(m)$
  $\forall m \in M : \neg A(m)$ (falsch)
  „Für jedes $m \in M$ gilt, dass es nicht durch 2 teilbar ist.“
  „Kein $m \in M$ ist durch 2 teilbar.“

Allgemein

Negation von $\forall m \in M : A(m)$

$$\exists m \in M : \neg A(m)$$

Negation von $\exists m \in M : A(m)$

$$\forall m \in M : \neg A(m)$$

Literatur

C. Tretter, *Analysis I*, Birkhäuser, 2013.