Übungen zur Vorlesung
Analysis für Informatiker und Lehramt
Abgabe: Mi. 04.11.2015 (direkt im Anschluss an die Vorlesung oder davor bis 8:40 Uhr, Zimmer A 514, Postfach Radl)

Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Agnes Radl

Blatt 3

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $4n^3 - n$ ohne Rest durch 3 teilbar.

(b) Stimmt folgende Behauptung? Falls nein, erklären Sie den Fehler im Beweis!

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Sind $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max\{a, b\} = n$, so ist $a = b$.
Beweis: IA: $n = 1$: Da $a, b \in \mathbb{N}$, gilt $a \geq 1$ und $b \geq 1$. Ist $\max\{a, b\} = 1$, so ist $a \leq 1$ und $b \leq 1$. Insgesamt also $1 \leq a \leq 1$ und $1 \leq b \leq 1$ und somit $a = b = 1$.

IS: $n \to n + 1$:
(Wir zeigen: Falls die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt sie auch für $n + 1$.)
Angenommen, die Behauptung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. (IV)
Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max\{a, b\} = n + 1$.
Dann ist $\max\{a - 1, b - 1\} = \max\{a, b\} - 1 = n$.
Nach (IV) ist $a - 1 = b - 1$, und somit $a = b$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie nachfolgende Aussagen für beliebige reelle Zahlen x und y.

(a) $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$,

(b) $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Aufgabe 3 (*umgekehrte Dreiecksungleichung*)

Seien x und y reelle Zahlen. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\big| |x| - |y| \big| \leq |x - y| .$$

Aufgabe 4

Geben Sie für folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ jeweils - falls vorhanden - das Supremum, das Infimum, das Maximum sowie das Minimum an:

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 \leq 4\}$,

(b) $M_2 := \{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$,

(c) $M_3 := \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$,

(d) $M_4 := \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.