Universität Leipzig
Institut für Mathematik
Institut für Informatik
Wintersemester 2015/16

PD Dr. Stefan Milius
Raj Dahya, Doreen Heusel,
Frank Loebe, Hannes Straß,
Matthias Waack

Aufgaben zur Lehrveranstaltung

Diskrete Strukturen

Serie 2

Hinweis: Bitte beachten Sie die Hausaufgaben ab Seite 3, die bis 03.11.2015 abzugeben sind.

Seminaraufgabe 2.1

Es seien die folgenden Mengen gegeben:

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3,4,5,6\} \\ B &= \{3,4,5\} \\ C &= \{1,2,3\} \\ D &= \{6\} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(a) $B \cup (A \cap C)$

(b) $B \cap C$

(c) $(A \setminus B) \setminus C$

(d) $A \setminus (B \setminus C)$

Seminaraufgabe 2.2

Gegeben ist eine zweielementige Menge $M = \{a, b\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jede Antwort kurz!

(a) $\emptyset \in M$

(b) $\emptyset \subseteq M$

(c) $\{a\} \in M$

(d) $\{a\} \subseteq M$

Seminaraufgabe 2.3

Seien A und B Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Aus $x \in A$ folgt stets $\{x\} \in A$.

(b) Aus $x \in A$ folgt stets $\{x\} \subseteq A$.

(c) Aus $\{x\} \in A$ folgt stets $x \in A$.

(d) Aus $\{x\} \subseteq A$ folgt stets $x \in A$.

(e) Aus $x \in A$ und $A \subseteq B$ folgt stets $x \in B$.

(f) Aus $x \in B$ und $A \subseteq B$ folgt stets $x \in A$.

(g) Aus $x \notin A$ und $A \subseteq B$ folgt stets $x \notin B$.

(h) Aus $x \notin B$ und $A \subseteq B$ folgt stets $x \notin A$.

Seminaraufgabe 2.4

Seien A, B Mengen. Beweisen Sie das folgende Absorptionsgesetz für Mengen, ohne die Absorptionsgesetze der Aussagenlogik zu verwenden:

$$A = A \cap (A \cup B)$$

Seminaraufgabe 2.5

Seien A, B Mengen. Die *symmetrische Mengendifferenz* $A \bigtriangleup B$ ist definiert durch:

$$A \bigtriangleup B = \big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big)$$

(a) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm, welches $A \bigtriangleup B$ veranschaulicht.

(b) Beweisen Sie folgende Aussagen:

  (i) $A \bigtriangleup B = \big(A \cup B\big) \setminus \big(A \cap B\big)$

  (ii) $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$

  (iii) $A \bigtriangleup \emptyset = A$ und $A \bigtriangleup A = \emptyset$

(c) Beweisen Sie: $A = B$ genau dann, wenn $A \bigtriangleup B = \emptyset$.
Sie können dabei die Aussagen aus Teilaufgabe (b) verwenden.

Seminaraufgabe 2.6

Gegeben seien die Mengen aller Objekte O und aller Tage T. Des Weiteren sind folgende Prädikate gegeben:

- $\mathit{Halloween}(x)$ drückt aus, dass der mit x bezeichnete Tag ein Halloween-Tag ist,
- $\mathit{Gespenst}(y)$ drückt aus, dass das mit y bezeichnete Objekt ein Gespenst ist,
- $\mathit{Person}(z)$ drückt aus, dass das mit z bezeichnete Objekt eine Person ist,
- $\mathit{Erschreckt}(y, z, x)$ drückt aus, dass Objekt y Objekt z an Tag x erschreckt.

Formalisieren Sie folgende Aussagen/Aussageschablonen:

(a) Jedes Halloween gibt es eine Person, die erschreckt wird.

(b) Jedes Halloween gibt es ein Gespenst, das alle erschreckt.

(c) Es gibt ein Halloween, zu dem sich niemand erschreckt hat.

(d) An keinem Halloween wird jemand von allen erschreckt.

Hausaufgabe 2.1 (3 Punkte)

Seien $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{b, d\}$ Teilmengen der Grundmenge $M = \{a, b, c, d, e\}$. Berechnen Sie die folgenden Mengen und geben Sie sie durch Aufzählung ihrer Elemente an.

(a) $E_1 = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

(b) $E_2 = M \setminus (A^c \cup B)$

(c) $E_3 = (A \cup B)^c \cap (A^c \cup B^c)$

Hausaufgabe 2.2 (7 Punkte)

Es seien A, B, C Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt stets $A \subseteq C$.

(b) Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt stets $A \subseteq C$.

(c) $A = B$ folgt stets aus $A \cap C = B \cap C$.

(d) Aus $A \cap B = A \cup B$ folgt stets $A \setminus B = B \setminus A$.

(e) $((A \setminus B) \cup B^c)^c \cup A^c = (A \setminus B)^c$.

Hausaufgabe 2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie die Gleichheit der folgenden beiden Mengen A und B.
Hinweis: Kontraposition kann in einer Richtung hilfreich sein.

- $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k + 1\}$
- $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists l \in \mathbb{Z} : 4l = (1 + n)(n - 1)\}$

Hausaufgabe 2.4 (6 Punkte)

Gegeben seien wieder die Mengen aller Objekte O und die Menge aller Tage T sowie die folgenden Prädikate:

- $Etappe(x)$ bedeutet, dass am mit x bezeichneten Tag eine Etappe (der Tour de France) gefahren wird,
- $Fahrer(y)$ bedeutet, dass das mit y bezeichnete Objekt ein Fahrer ist,
- $Kontrolleur(z)$ bedeutet, dass das mit z bezeichnete Objekt ein Kontrolleur ist,
- $Gedopt(y, x)$ bedeutet, dass Objekt y am Tag x gedopt ist,
- $Erwischt(z, y, x)$ bedeutet, dass Objekt z Objekt y an Tag x erwischt.

Geben Sie zu jeder der hier formalisierten Aussagen jeweils einen natürlichsprachlichen Satz an, der die Aussage wiedergibt:

(a) $(\exists x \in T, \exists y \in O).\Big(Etappe(x) \wedge Fahrer(y) \wedge Gedopt(y, x)\Big)$

(b) $(\forall x \in T).\Big(Etappe(x) \rightarrow \neg(\forall y \in O).(Fahrer(y) \wedge Gedopt(y, x))\Big)$

(c) $\neg(\exists x \in T).\Big(Etappe(x) \wedge \neg(\exists y \in O).(Fahrer(y) \wedge Gedopt(y, x))\Big)$

(d) $(\exists z \in O).\Big(Kontrolleur(z) \wedge (\forall x \in T, \exists y \in O).(Gedopt(y, x) \rightarrow Erwischt(z, y, x))\Big)$

(e) $\neg(\exists y \in O).\Big(Fahrer(y) \wedge \neg(\exists x \in T).(Etappe(x) \rightarrow Gedopt(y, x))\Big)$

(f) $(\exists x \in T, \forall y \in O).\Big(Fahrer(y) \rightarrow \neg(\exists z \in O).(Erwischt(z, y, x))\Big)$

Termine:

- Die Seminaraufgaben werden in den Übungen vom 26.10. bis 30.10.2015 besprochen.
- Die Hausaufgaben müssen **spätestens bis zum Anfang der Vorlesung am 03.11.2015** abgegeben werden. Beschriften Sie bitte **jedes** Lösungsblatt mit **Namen** und **Matrikelnummer** und **Übungsgruppe**!