Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Agnes Radl

Blatt 2

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie folgende Behauptungen mit Hilfe vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^n \geq n+1.$$

(b) Sei x eine reelle Zahl und $x \neq 1$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Aufgabe 3 (*Bernoullische Ungleichung*)

Sei x eine reelle Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:
Falls $x \geq -1$ ist, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

An welcher Stelle haben Sie die Voraussetzung $x \geq -1$ verwendet?

Aufgabe 4

Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie nachfolgende Aussagen.

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq |x|$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|-x| = |x|$.