Körperaxiome

Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften.

(K1)	$x + (y + z) = (x + y) + z$,	(*Assoziativität*)
(K2)	$x + y = y + x$,	(*Kommutativität*)
(K3)	Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so dass $x + 0 = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$),	(*Existenz der Null*)
(K4)	Es gibt ein $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$,	(*Existenz additiver Inverser*)
(K5)	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,	(*Assoziativität*)
(K6)	$x \cdot y = y \cdot x$,	(*Kommutativität*)
(K7)	Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, so dass $x \cdot 1 = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$),	(*Existenz der Eins*)
(K8)	Falls $x \neq 0$, dann existiert ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$, so dass $x \cdot x^{-1}=1$,	(*Existenz multiplikativer Inverser*)
(K9)	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,	(*Distributivität*)

Folgerungen

- 0 und 1 sind eindeutig bestimmt, ebenso additive und multiplikative Inverse.
  (abkürzende Notation: $\frac{y}{x} := x^{-1} \cdot y$)
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- $x \cdot 0 = 0$,
- $-x = (-1) \cdot x$,
- $-(-x) = x$, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
- $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.
- Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $a + x = b$ eindeutig lösbar.
  Falls $a \neq 0$, dann ist auch $ax = b$ eindeutig lösbar.
- $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, falls $x \neq 0$,
- $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$, falls $x \neq 0, y \neq 0$.

Ordnungsaxiome

Desweiteren sind in $\mathbb{R}$ gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet.
Notation: > 0

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten folgende Eigenschaften.

(O1) Es gilt immer genau eine der drei Beziehungen
$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0.$ (*Trichotomie*)

(O2) Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$.

Definition

Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiert man

- $x - y := x + (-y)$,
- $x > y$, falls $x - y > 0$,
- $x < y$, falls $y > x$,
- $x \geq y$, falls $x > y$ oder $x = y$,
- $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$.

Folgerungen

Es ergeben sich nun zum Beispiel folgende Regeln, wobei $x, y, a, b \in \mathbb{R}$:

- Für x, y gilt immer genau eine der Relationen
$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$
- Falls $x < y$ und $y < z$, dann ist $x < z$. (*Transitivität*)
- Falls $x < y$, dann ist $a + x < a + y$.
- Falls $x < y$, dann ist $-x > -y$.
- Falls $x < y$ und $a < b$, dann ist $x + a < y + b$.
- Falls $x < y$ und $a > 0$, dann ist $ax < ay$.
- Falls $x < y$ und $a < 0$, dann ist $ax > ay$.
- Falls $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$, dann ist $ax < by$.
- $x > 0$ genau dann, wenn $x^{-1} > 0$.
- Falls $0 < x < y$, dann ist $x^{-1} > y^{-1}$.

Bemerkung

Notation:

- Statt $x \cdot y$ schreibt man meistens nur xy.

Archimedisches Axiom

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt Folgendes.

(A) Sind $x, y > 0$, so existiert eine natürliche Zahl n mit $n \cdot x > y$.

Folgerung
Zu jedem $\epsilon > 0$ exisitert eine natürliche Zahl $n > 0$ mit

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

(nimm $x = \epsilon, y = 1$ in (A))

Intervalle

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann definiere

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, (abgeschlossenes Intervall)
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, (offenes Intervall)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, (nach rechts halboffenes Intervall)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, (nach links halboffenes Intervall)

a und b sind die *Randpunkte* des Intervalls I und $|I| := b - a$ ist die *Länge* des Intervalls I.

Uneigentliche Intervalle

Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann definiere

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,
- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Intervallschachtelung

Definition

Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots$ mit den Eigenschaften

1. $I_{n+1} \subseteq I_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
2. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit $|I_n| < \epsilon$.

Notation: $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (I_n).

Intervallschachtelungsprinzip

(IP) Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gibt es genau eine reelle Zahl, die allen ihren Intervallen angehört.

Literatur

- O. Forster, *Analysis 1*, Vieweg, 2008.
- K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, 2004.