Diskrete Strukturen in der Informatik

Naive Mengenlehre & Relationen

PD Dr. Stefan Milius

WS 2015/2016

Organisatorisches

Modulabschluss

- erfolgreiches Lösen der Hausaufgaben !
- $\geq$ 50% Punkte als Prüfungsvoraussetzung; gewertet werden die 6 besten Abgaben
- 60-/90-minütige benotete Abschlussklausur ergibt Modulnote
- maximal 15% Bonuspunkte durch Hausaufgaben

Hausaufgaben

- Abgabe der Hausaufgaben vor der Vorlesung
- im Notfall im Briefkasten im Raum A 514 bis 17:30 Uhr
- Übungsserien werden ab jetzt voraussichtl. Freitag Nachmittag/Abend veröffentlicht

Überblick

Inhalt

Vorlesungsziele

heutige Vorlesung

1. Verallgemeinerung Vereinigung und Schnitt
2. Produkt und Summe von Mengen
3. Vollständige Induktion
4. Potenzmenge

Bitte Fragen direkt stellen!

Notation

notationelle Varianten

- sind natürlich akzeptabel

$\rightarrow$ es muss aber eindeutig verständlich bleiben

Beispiele

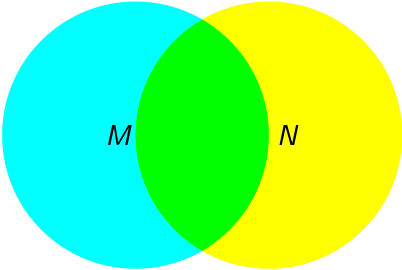
- $(\forall x \in X).(\exists y \in Y).(x \leq y)$
- $\forall x \exists y \colon (x \in X \wedge y \in Y) \rightarrow (x \leq y)$
- $(\forall x \in X)(\exists y \in Y) \colon (x \leq y)$
- ...

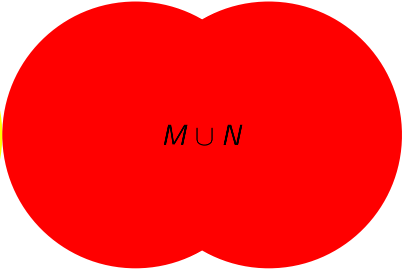
Rückblick: Mengen und Operationen

Mengenlehre – Wiederholung

Notation

- $x \in X$ heißt "x ist Element der Menge X" Negation: $x \notin X$
- Teilmenge $M \subseteq N$ gdw. $(\forall x \in M).(x \in N)$
- Mengeneinschränkung $\{x \in X \mid F\}$
- Vereinigung $M \cup N$, Schnitt $M \cap N$, Differenz $M \setminus N$

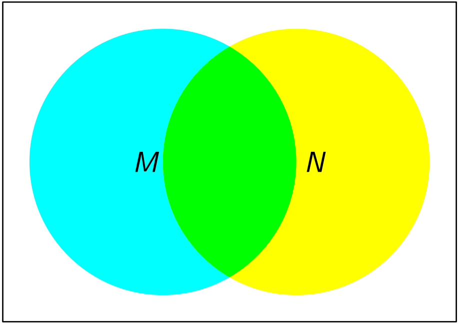


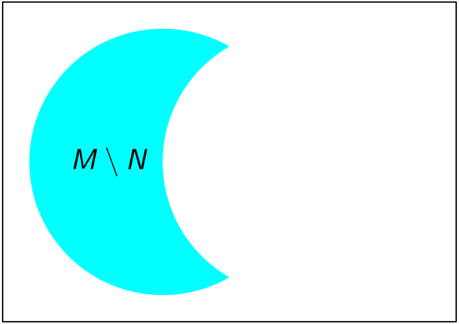


Mengenlehre – Rechenregeln

Vorsicht

- Differenz '$\setminus$' entspricht nicht der logischen Implikation '$\rightarrow$'
- $A \rightarrow B$ gdw. $\neg A \vee B$
- wir betrachten also $M^c \cup N$





§3.1 Theorem

Seien M, N und U Mengen, so dass $M \subseteq U$ und $N \subseteq U$. Dann gilt: (gemeinsame Grundmenge U)

$$M \setminus N = (M^{c} \cup N)^{c}$$

Beweis.

Wir wissen bereits: $(M^{c} \cup N)^{c} = (M^{c})^{c} \cap N^{c} = M \cap N^{c}$. Es bleibt *zu zeigen* (z.zg.): $M \setminus N = M \cap N^{c}$.

$$\begin{aligned} M \setminus N &= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin N)\} \\ &= \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N^{c})\} \\ &= M \cap N^{c} \end{aligned}$$

□

Mengenlehre – weitere Eigenschaften

Grundmenge U

klassische Tautologien	weitere Eigenschaften
$A \vee \neg A$	$A \cup A^c = U$
$((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C)) \to C$	
$(A \wedge (A \to B)) \to B$	
$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$	$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \to (A \subseteq C)$
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	$(A \subseteq B)$ gdw. $(B^c \subseteq A^c)$
$((A \to B) \wedge (A \to \neg B)) \to \neg A$	
$(A \wedge B) \to A$	$(A \cap B) \subseteq A$
$A \to (A \vee B)$	$A \subseteq (A \cup B)$

Mengenlehre – weitere Eigenschaften

Notizen

- Jede Tautologie liefert die Grundmenge U
  beim Umschreiben von $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (nutze $A \to B$ gdw. $\neg A \vee B$)
  - Tautologie: $(A \wedge (A \to B)) \to B$ gdw. $\neg(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee B$
  - für Mengen:

$$
\begin{aligned}
(A \cap (A^c \cup B))^c \cup B &= A^c \cup (A^c \cup B)^c \cup B \\
&= A^c \cup (A \cap B^c) \cup B \\
&= ((A^c \cup A) \cap (A^c \cup B^c)) \cup B \\
&= (U \cap (A^c \cup B^c)) \cup B \\
&= A^c \cup B^c \cup B \\
&= U
\end{aligned}
$$

- Jede unerfüllbare Formel liefert die leere Menge $\emptyset$

Mengenlehre – weitere Eigenschaften

§3.2 Theorem (Monotonie)

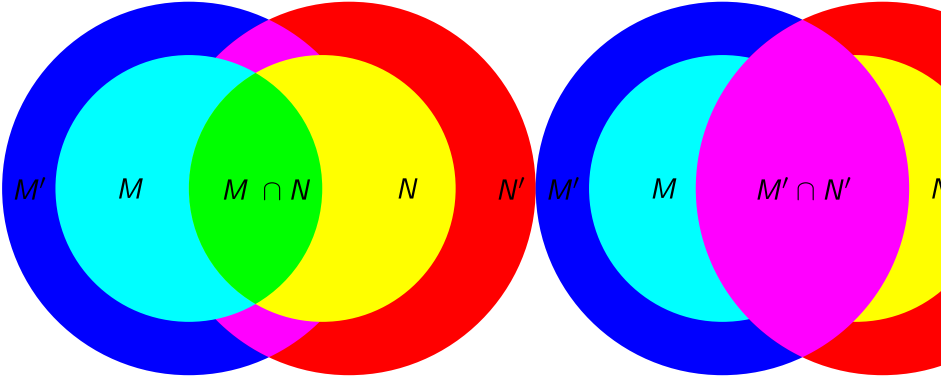
Seien $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$. Dann gelten

$$(M \cap N) \subseteq (M' \cap N') \qquad \text{und} \qquad (M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$$

Beweis.

- zu $(M \cap N) \subseteq (M' \cap N')$:
  Sei $x \in (M \cap N)$. Dann $x \in M$ und $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgen $x \in M'$ und $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cap N')$.
- zu $(M \cup N) \subseteq (M' \cup N')$:
  Sei $x \in (M \cup N)$. Dann $x \in M$ oder $x \in N$. Da $M \subseteq M'$ und $N \subseteq N'$ folgt $x \in M'$ oder $x \in N'$. Folglich $x \in (M' \cup N')$. $\square$

Mengenlehre – weitere Eigenschaften



Mengenlehre – weitere Eigenschaften

§3.3 Theorem

Für alle Mengen M und N sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $M \subseteq N$
2. $M \cap N = M$
3. $M \cup N = N$

Beweis.

Durch Äquivalenz zu 1: 1 $\leftrightarrow$ 2 und 1 $\leftrightarrow$ 3

- zu 1 $\rightarrow$ 2 und 1 $\rightarrow$ 3: Da $M \subseteq N$ folgt durch Monotonie

$$M = M \cap M \subseteq M \cap N \quad \text{und} \quad M \cup N \subseteq N \cup N = N \qquad (\S 3.2)$$

  Trivialerweise $M \cap N \subseteq M$ und $N \subseteq M \cup N$.

- zu 2 $\rightarrow$ 1 und 3 $\rightarrow$ 1:

$$M = M \cap N \subseteq N \qquad \text{und} \qquad M \subseteq M \cup N = N \qquad \square$$

Verallgemeinerung: Vereinigung und Schnitt

Mengenlehre – Relation zu Quantoren

Bemerkungen

- Vereinigung und Schnitt bisher nur zweistellig (zwei Argumente)

$\rightarrow$ Verallgemeinerung für beliebig viele Argumente

§3.4 Definition

Sei I eine Menge und M_i eine Menge für jedes $i \in I$

- $\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{es existiert } i \in I \text{, so dass } x \in M_i\}$
  $= \{x \mid (\exists i \in I).(x \in M_i)\}$
- $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i\}$
  $= \{x \mid (\forall i \in I).(x \in M_i)\}$

Mengenlehre – Relation zu Quantoren

Beispiele

- für jede Menge M gilt: $M = \bigcup_{m \in M} \{m\}$
- geschlossenes Interval $[u, o]$ für $u, o \in \mathbb{R}$ mit $u \leq o$

$$[u, o] = \{r \in \mathbb{R} \mid u \leq r \leq o\}$$

- es gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$

Beweis.

Durch Ringinklusion: $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$

- zu $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$: Sei $r \in \mathbb{R}$ und $n = \lceil |r| \rceil$ (aufrunden; i.e., $|r| \leq n$). Dann gilt $-n \leq r \leq n$ und damit $r \in [-n, n]$. Also auch $r \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.
- zu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r]$: trivial, da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$
- zu $\bigcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$: $[-r, r] \subseteq \mathbb{R}$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\square$

Mengenlehre – Relation zu Quantoren

Beispiel

- Sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine reelle Zahl. Dann ist

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [r - x, r + x] = \{r\}$$

Beweis.

Durch beidseitige Inklusion.

„$\supseteq$“: $\{r\} \subseteq [r - x, r + x]$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

„$\subseteq$“: Zeige durch Kontraposition:
für alle $y \in \bigcap_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [r - x, r + x]$ gilt $y \in \{r\}$ (gdw. $y = r$).
Es sei $y \neq r$. Wähle x mit $0 < x < |y - r|$.
Dann gilt $y \notin [r - x, r + x]$ und daher $y \notin \bigcap_{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [r - x, r + x]$.

$\square$

Mengenlehre – Relation zu Quantoren

§3.4 Notationsvarianten

- $\bigcup_{i=u}^{o} M_i = \bigcup_{i \in I} M_i$ und $\bigcap_{i=u}^{o} M_i = \bigcap_{i \in I} M_i$
  für $I = \{u, u+1, \ldots, o\} \subseteq \mathbb{N}$ (bekannt von $\sum$ und $\prod$)
- $\bigcup \{M_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} M_i$ und $\bigcap \{M_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} M_i$

Sonderfälle

- $\bigcup_{i \in \emptyset} M_i = \emptyset$
- $\bigcap_{i \in \emptyset} M_i = U$ für Universum U (oder undefiniert)

Beispiele

- $\bigcup \big\{\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\big\} = \{1, 2, 3, 5\}$
- $\bigcap \big\{\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\big\} = \{3\}$

Mengenlehre – Relation zu Quantoren

gleiche Mengen		Bezeichnung
$M \cap \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$	$\bigcup_{i\in I}(M \cap M_i)$	Distributivität von $\cap$
$M \cup \left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)$	$\bigcap_{i\in I}(M \cup M_i)$	Distributivität von $\cup$
$\bigcap_{i\in I} A$	A	Idempotenz von $\bigcap$; $I \neq \emptyset$
$\bigcup_{i\in I} A$	A	Idempotenz von $\bigcup$; $I \neq \emptyset$
$\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)^{\mathsf{c}}$	$\bigcup_{i\in I} M_i^{\mathsf{c}}$	deMorgan-Gesetz für $\bigcap$
$\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)^{\mathsf{c}}$	$\bigcap_{i\in I} M_i^{\mathsf{c}}$	deMorgan-Gesetz für $\bigcup$

Produkt und Summe von Mengen

Mengenprodukt

§3.5 Definition (Mengenprodukt)

Es seien M und N Mengen sowie $m \in M, n \in N$.
Das geordnete Paar aus m und n ist die Menge

$$(m, n) = \{\{m\}, \{m, n\}\} \ ,$$

Das (kartesische) Produkt $M \times N$ ist definiert durch

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M, \ n \in N\} \ ,$$

die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus M und N.

Notizen

- $\{m, n\}$ $(\neq (m, n))$ heißt auch *ungeordnetes Paar* aus m und n
- Reihenfolge relevant; $(m, n) \neq (n, m)$, falls $m \neq n$
- Aber: $\{m, n\} = \{n, m\}$

Mengenprodukt

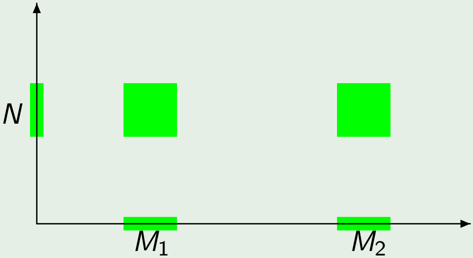
Beispiele

- sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{1, 3\}$

$$M \times N = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

- seien $M_1 = [2,3]$, $M_2 = [6,7]$ und $N = [2,3]$

$(M_1 \cup M_2) \times N =$



- sei F die Menge der FACEBOOK-Nutzer

$$\{(x, y) \in F \times F \mid x \text{ ist FACEBOOK-Freund von } y\}$$

Mengenlehre – Disjunktheit

§3.6 Definition

Zwei Mengen M und N heißen disjunkt gdw. $M \cap N = \emptyset$.

Beispiele

- $\{1, 2, 3\}$ und $\{2, 4, 6\}$ sind nicht disjunkt
- $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ sind disjunkt
- Man kann zwei Mengen M und N immer „disjunkt machen“:

§3.7 Theorem

Für beliebige Mengen M und N sind $M \times \{1\}$ und $N \times \{2\}$ disjunkt.

Beispiel

Für $\{a, b\}$ und $\{b, c\}$ sind disjunkt:

$$\{a, b\} \times \{1\} = \{(a, 1), (b, 1)\} \quad \text{und} \quad \{b, c\} \times \{2\} = \{(b, 2), (c, 2)\}$$

Mengenlehre – Disjunktheit

§3.7 Theorem

Für beliebige Mengen M und N sind $M \times \{1\}$ und $N \times \{2\}$ disjunkt.

Beweis.

Zu zeigen: $\quad M \times \{1\} \cap N \times \{2\} = \emptyset$.

Sei $m \in M$. Dann gilt $(m, 1) \in M \times \{1\}$ aber $(m, 1) \notin N \times \{2\}$.

Also ist liegt kein Element von $M \times \{1\}$ in $N \times \{2\}$.

Analog liegt kein Element von $N \times \{2\}$ in $M \times \{1\}$. $\square$

Mengenlehre – Disjunkte Vereinigung

§3.8 Definition

Die disjunkte Vereinigung zweier Mengen M und N ist die Menge

$$M \uplus N = (M \times \{1\}) \cup (N \times \{2\}).$$

(Notation auch: $M + N$.)

Beispiel

Für $M = \{a, b, c\}$ und $N = \{b, c, d\}$ gilt

$$M \uplus N = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 2)\}.$$

Notiz

Die disjunkte Vereinigung liegt in einer anderen Grundmenge.

Wenn $M, N \subseteq U$ wobei U Grundmenge dann

$$M \times \{1\}, N \times \{2\}, M \uplus N \subseteq U \times \{1, 2\}.$$

Mengenlehre – Kardinalität

§3.9 Definition (naive Kardinalität)

Eine Menge M ist endlich, falls sie endlich viele Elemente hat.

- Falls M endlich ist, dann ist $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente
- Falls M unendlich (nicht endlich) ist,
  dann schreiben wir $|M| \geq \infty$ (zunächst)

Rechenregeln

Es gelten:

- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}| = 3$???
- $|M \times N| = |M| \cdot |N|$
- $|M \uplus N| = |M| + |N|$
- $M \subseteq N \implies |M| \leq |N|$

§3.10 Theorem

Für alle endlichen Mengen M und N gilt

$$\max(|M|, |N|) \leq |M \cup N| \overset{(\ddagger)}{\leq} |M| + |N| \ ,$$

mit Gleichheit bei ($\ddagger$) gdw. M und N disjunkt sind.

Beweis.

1. Da $M \subseteq M \cup N$ und $N \subseteq M \cup N$ gelten $|M| \leq |M \cup N|$ und $|N| \leq |M \cup N|$; also auch $\max(|M|, |N|) \leq |M \cup N|$.
2. Es gilt: $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N| \leq |M| + |N|$.
3. Wenn $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $|M \cap N| = 0$. Also $|M \cup N| = |M| + |N|$.

□

Zwischenfrage

Frage

Formulieren Sie das entsprechende Resultat für den Schnitt!

$$\cdots \leq |M \cap N| \leq \cdots$$

$$0 \leq |M \cap N| \leq \min(|M|, |N|)$$

Vollständige Induktion

Mengenlehre – Vollständige Induktion

§3.11 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten

1. Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und
2. Induktionsschritt (IS): $F(n) \to F(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

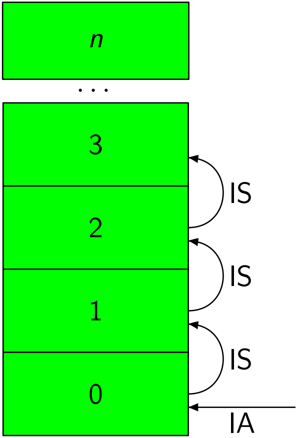
   $(\forall n \in \mathbb{N}).(F(n) \to F(n+1))$

dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $(\forall x \in \mathbb{N}).F(x)$

Notizen

- $F(0)$ gilt offensichtlich gem. Induktionsanfang IA
- daraus folgt gem. Induktionsschritt dann $F(1)$ IS
- woraus gem. Induktionsschritt $F(2)$ folgt, etc. IS
- im Induktionsschritt (IS) heißen:
  - $F(n)$ die Induktionshypothese (IH) oder -voraussetzung
  - $F(n+1)$ die Induktionsbehauptung (IB)

Mengenlehre – Vollständige Induktion



Mengenlehre – Vollständige Induktion

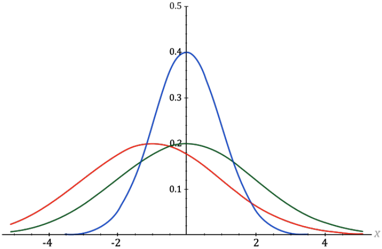
Beispiel (Summenformel von Gauss)

- Aussage: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Induktionsanfang: $\sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- Induktionshypothese: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- Induktionsbehauptung: zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \qquad \text{(IH)} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Carl Friedrich Gauss (* 1777; † 1855)

- dtsch. Mathematiker, Astronom und Physiker
- Integralsätze & Glockenkurve
- Formel zur Berechnung von Ostern



Manchmal reicht im Induktionsschritt die Induktionshypothese $F(n)$ nicht aus, um die Induktionsbehauptung $F(n+1)$ zu beweisen.

§3.12 Theorem (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $F(x)$ eine Aussagenschablone mit einer Variable x. Gelten

1. Induktionsanfang (IA): $F(0)$ und
2. Induktionsschritt (IS): für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   wenn $F(k)$ für alle $k < n$ gilt, dann gilt auch $F(n)$.

   $(\forall n \in \mathbb{N}).\,(\forall(k < n).F(k)) \to F(n))$

dann gilt $F(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. $(\forall x \in \mathbb{N}).F(x)$

Mengenlehre – Starke Induktion

Notizen

- Im Vergleich zur „normalen“ vollständigen Induktion hat die Implikation im Induktionsschritt eine stärkere Voraussetzung: statt nur $F(n)$ hat man $F(0), F(1), F(2), \ldots F(n)$ zur Verfügung
- Eine ähnliche Überlegung wie vorher zeigt, dass dies ein korrektes Beweisprinzip ist:
  - $F(0)$ gilt gemäß Induktionsanfang
  - daraus folgt gemäß Induktionschritt $F(1)$
  - aus $F(0)$ und $F(1)$ folgt gemäß Induktionsschritt $F(2)$
  - aus $F(0), F(1), F(2)$ folgt gemäß Induktionsschritt $F(3)$
  - usw.

Mengenlehre – Starke Induktion

Beispiel

Aussage: Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben. $F(x) = x + 2$ ist Produkt von Primzahlen

Beweis.

Durch starke Induktion:

1. Induktionsanfang: $n = 2$ ist Primzahl (ein Produkt mit einem Faktor)
2. Induktionsschritt: Sei $n > 2$.

   1. Fall: n Primzahl. Dann fertig, denn n ist Produkt mit einem Faktor.

   2. Fall: n nicht Primzahl. Dann ist $n = a \cdot b$ mit $a, b < n$.

   Wegen Induktionsvoraussetzung gilt:

   $$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \quad \text{und} \quad b = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_\ell.$$

   mit Primzahlen $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$.

   Dann ist $\quad n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_\ell \quad$ Produkt von Primzahlen. $\square$

Mengenlehre – Vollständige Induktion

Grund für die Wirksamkeit dieses Beweisprinzips:
Induktiver Aufbau der Menge $\mathbb{N}$ durch die Definition:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $n + 1 \in \mathbb{N}$.
3. Außer den Elementen gemäß 1. und 2. enthält $\mathbb{N}$ keine weiteren Elemente.
   (Drittens wird im Folgenden nicht explizit angegeben!)

Definition legt Erzeugungsmechanismus für alle Elemente von $\mathbb{N}$ fest, der bei einem Induktionsbeweis der Aussage

„$F(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$“

widergespiegelt wird.

Mengenlehre – Strukturelle Induktion

- auch andere Mengen M sind induktiv definierbar
- **Schema:**
  1. Explizite Angabe von einigen Elementen von M
  2. Regeln zur Erzeugung weiterer Elemente $y \in M$ aus vorhandenen $x_1, ..., x_k \in M$.

Mengenlehre – Strukturelle Induktion

Beispiel 1

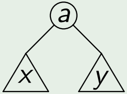
Induktive Definition einer Menge $N \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

1. $(0, 0) \in N$ und $(1, 1) \in N$.
2. Falls $(m, n) \in N$, so $(m + 2, n) \in N$.
3. Falls $(m, n) \in N$, so $(m, n + 2) \in N$.

Beispiel 2

Sei M eine Menge. Induktive Definition der Menge $M^{\triangle}$ der Binärbäume mit Knotenmarkierungen in M:

1. $a \in M^{\triangle}$ für alle a aus M (liefert Bäume a)
2. Falls $a \in M$ und $x, y \in M^{\triangle}$, so $(a, x, y) \in M^{\triangle}$:



Mengenlehre – Strukturelle Induktion

Mathematische Beweismethode, die eine Aussage für alle Elemente einer induktiv definierten Menge M beweist.
(*Verallgemeinerung* der vollständigen Induktion.)

Prinzip:

- Gegeben: Aussagenschablone $F(x)$ mit Variable x
  informell: $F(x)$ ist eine Eigenschaft von Elementen von M
- Um $(\forall x \in M).F(x)$ für alle $x \in M$ zu beweisen:
  1. **Induktionsanfang:** beweise $F(m)$ gilt für alle (in der induktiven Definition on M) explizit angegebenen Elemente $m \in M$.
  2. **Induktionsschritt:** beweise für jede Regel, mit der $n \in M$ aus $m_1, \dots, m_k$ erzeugt werden kann:

     falls $F(m_1), \dots, F(m_k)$ gelten, so gilt auch $F(n)$.

  3. **Induktionsschluss:** aus den Punkten 1. und 2. folgt, dass $F(m)$ für alle $m \in M$ gilt.

Mengenlehre – Strukturelle Induktion

Beispiel

- Induktive Definition einer Menge $N \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  1. $(0, 0) \in N$ und $(1, 1) \in N$.
  2. Falls $(m, n) \in N$, so $(m + 2, n) \in N$.
  3. Falls $(m, n) \in N$, so $(m, n + 2) \in N$.

- Behauptung: Für alle $(m, n) \in N$ gilt:

$$m + n \text{ ist durch 2 teilbar.}$$

Beweis.

Durch strukturelle Induktion:

1. **Induktionsanfang:**
   Element $(0,0) \in N$: $0 + 0 = 0$ durch 2 teilbar.
   Element $(1,1) \in N$: $1 + 1 = 2$ durch 2 teilbar.

2. **Induktionsschritt:**
   Induktionsvoraussetzung:
   für $(m,n) \in N$ sei $m + n$ durch 2 teilbar.

   Dann gilt für
   Element $(m+2,n) \in N$:
   Es ist $(m+2)+n = (m+n)+2$ durch 2 teilbar.
   Element $(m,n+2) \in N$:
   Es ist $m+(n+2) = (m+n)+2$ durch 2 teilbar. □

Mengenlehre – Strukturelle Induktion

Beispiel

Man betrachte die Mengen $M^{\triangle}$ der Binärbäume über M.

Für $t \in M^{\triangle}$ seien

- $\#t$ die Anzahl der Knoten von t und
- $h(t)$ die Höhe des Baumes t.

Aussage: Für alle Binärbäume $t \in M^{\triangle}$ gilt: $\#t \leq 2^{h(t)+1} - 1$.

Mengenlehre – Strukturelle Induktion

Aussage: Für alle Binärbäume $t \in M^{\triangle}$ gilt: $\#t \leq 2^{h(t)+1} - 1$.

Beweis.

Durch strukturelle Induktion:

1. Induktionsanfang: Sei $a \in M \subseteq M^{\triangle}$.

   Dann gelten: $\#a = 1$ und $h(a) = 0$.

   Also gilt: $\#a = 1 = 2 - 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{h(m)+1}$.

2. Induktionsschritt: Seien $a \in M$ und $s, t \in M^{\triangle}$. Dann gelten:

   $$\#(a, s, t) = 1 + \#s + \#t \quad \text{und} \quad h(a, s, t) = 1 + \max\{h(s), h(t)\}.$$

   Setze $k = \max\{h(s), h(t)\}$. Dann gilt:

   $$\begin{aligned} \#(a, s, t) &= 1 + \#s + \#t \leq 1 + (2^{h(s)+1} - 1) + (2^{h(t)+1} - 1) \\ &\leq 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{(1+k)+1} - 1 = 2^{h(a,s,t)+1} - 1. \end{aligned}$$

$\square$

Potenzmenge

Mengenlehre – Potenzmenge

§3.13 Definition (Potenzmenge)

Sei M eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge

$$\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$$

aller Teilmengen von M

Beispiele

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ ist die Menge

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Zwischenfrage

Was ist $\mathcal{P}(\{a, \{b, c\}\})$?

Mengenlehre – Potenzmenge

§3.14 Theorem

Sei M eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

per vollständiger Induktion über $|M|$:

IA: Die einzige Menge M mit $|M| = 0$ ist $M = \emptyset$. Zusätzlich $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, also gilt $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$.

IS: Sei M eine Menge, so dass $|M| = n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Wähle $x \in M$ beliebig. Dann ist

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M \setminus \{x\}) \cup \{N \cup \{x\} \mid N \in \mathcal{P}(M \setminus \{x\})\}$$

weil

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M \setminus \{x\}) &= \{N \subseteq M \mid x \notin M\}, \\ \{N \cup \{x\} \mid N \in \mathcal{P}(M \setminus \{x\})\} &= \{N \subseteq M \mid x \in N\}. \end{aligned}$$

Wegen der Disjunktheit der beiden „Summanden“ gilt

$$|\mathcal{P}(M)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(M \setminus \{x\})| = 2 \cdot 2^{|M|-1} = 2^{|M|} \quad ,$$

wobei $|\mathcal{P}(M \setminus \{x\})| = 2^{|M|-1}$ per Induktionshypothese. $\square$

Mengenlehre – Potenzmenge

§3.15 Theorem

Es gelten die folgenden Mengenbeziehungen:

1. $\mathcal{P}(M \cap N) = \mathcal{P}(M) \cap \mathcal{P}(N)$
2. $\mathcal{P}(M) \cup \mathcal{P}(N) \subseteq \mathcal{P}(M \cup N)$ („$\supseteq$“ gilt im Allg. nicht!)

Beweis.

1. Durch Äquivalenzkette:

$$\begin{array}{lll} S \in \mathcal{P}(M \cap N) & \text{gdw.} & S \subseteq M \cap N \\ & \text{gdw.} & S \subseteq M \text{ und } S \subseteq N \\ & \text{gdw.} & S \in \mathcal{P}(M) \text{ und } S \in \mathcal{P}(N) \\ & \text{gdw.} & S \in \mathcal{P}(M) \cap \mathcal{P}(N) \end{array}$$

2. Schlusskette (mit Äquivalenzen):

$$\begin{array}{lll} S \in \mathcal{P}(M) \cup \mathcal{P}(N)) & \text{gdw.} & S \in \mathcal{P}(M) \text{ oder } S \in \mathcal{P}(N) \\ & \text{gdw.} & S \subseteq M \text{ oder } S \subseteq N \\ & \text{impliziert} & S \subseteq M \cup N \\ & \text{gdw.} & S \in \mathcal{P}(M \cup N) \end{array}$$

□

Gegenbeispiel

Die Mengenbeziehung $\mathcal{P}(M \cup N) \subseteq \mathcal{P}(M) \cup \mathcal{P}(N)$ gilt nicht!

Betrachte $M = \{a, b\}$ und $N = \{b, c\}$.

Dann gilt $\{a, c\} \subseteq M \cup N$; also $\{a, c\} \in \mathcal{P}(M \cup N)$ gilt.

Aber weder $\{a, c\} \subseteq M$ noch $\{a, c\} \subseteq N$ gelten.

Also $\{a, c\} \notin \mathcal{P}(M) \cup \mathcal{P}(N)$.

Zusammenfassung

- Verallgemeinerung Vereinigung und Schnitt
- Produkte und Summen von Mengen
- Vollständige Induktion
- Potenzmenge

Zweite Übungsserie ist bereits im OLAT.