Analysis für Informatiker

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Crashkurs Mengenlehre Logik

- siehe Präsentation

1.2 Häufige Beweise

Mathematische Sätze sind oft von der Form A $\to B$.
Es gibt verschiedene Methoden zu zeigen, dass A $\to$ B wahr ist.

Direkter Beweis:

Setze A voraus und folgere B.

Satz2.1:
Falls n $\in \mathbb{N}$ gerade ist dann ist n^2 gerade.

Beweis:
Sei n $\in \mathbb{N}$ gerade. Dann existiert $m \in \mathbb{N}$ so dass n = 2m. Damit erhalten wir $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2 * 2m^2$($\to$ gerade da vielfaches von 2) Somit ist n^2 gerade. qed

Kontraposition:

Zeige $\neg B \to \neg A$

Satz2.2:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis:
Wir zeigen die Behauptung, in dem wir zeigen falls n nicht gerade ist dann ist n^2 nicht gerade. Sei also n nicht gerade, d.h. n ist ungerade. Dann existiert ein m $\in \mathbb{N}$, so dass $n = 2m - 1$ ist. Wir berechnen $n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1$ Somit ist n^2 nicht gerade.

Widerspruchsbeweis:

Nimm an, dass A und $\neg B$ gilt und führe dies auf einen Widerspruch.

Satz2.3: ($\sqrt{2}$ ist nicht rational)
Falls p und q teilerfremde natürliche Zahlen sind($\to$ A), dann gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2(\to B)$.

Beweis:
Wir nehmen an, dass p und q teilerfremde natürliche Zahlen sind und das $(\frac{p}{q})^2 = 2$ gilt. Dann ist $p^2 = 2 * q^2$ (*), also p^2 gerade. Nach Satz2.2 ist p gerade. Es existiert als ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $p = 2m$ gilt.
Setzt man dies in (*) ein, so erhält man $4m^2 = 2q^2$ und nach Kürzung mit 2 $2m^2 = q^2$ also q^2 gerade. Nach Satz2.2 ist q gerade also existiert $k \in \mathbb{N}$, so dass q=2k gilt. Somit besitzen p und q den gemeinsamen Teiler 2 im Widerspruch zu deren Teilerfremdheit. qed

1.3 Vollständige Induktion

Als bekannt Vorausgesetzt wird die Menge der natürlichen Zahlen (ohne Null). Notation $N_0 := N \bigcup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Charakterisierung der natürlichen Zahlen durch die Peano-Axiome.(siehe Folien)

Problem: Sei A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage. Wie zeigt man, dass A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist?
Dazu genügt es, folgende zwei Aussagen zu zeigen.

- A(1) ist wahr. „Induktionsanfang“ (IA)
- Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N} gilt$: Falls A(n) wahr ist (Induktionsvoraussetzung (IV)), dann ist auch A(n+1) wahr (Induktionsschritt (IS)).

→ Beweisprinzip der vollständigen Induktion
Bemerkung:
Das Prinzip funktioniert auch für andere Startwerte als IA. Die Behauptung wird dann für alle natürlichen Zahlen größer gleich dem Startwerte gezeigt.

Satz 3.1 → Beweis der Gausformel (siehe Propädeutikum)
Satz 3.2:
Sei n ∈ ℕ.
Dann enthält $\mathbb{R}(1, ..., n)$ genau 2^n Elemente.

Beweis:
IA:
n = 1 (zu zeigen ℝ({1}) enthält 2^1 Elemente.
P({1}) = { ∅,{1} }
p({1}) hat 2 Elemente also stimmt die Behauptung für n = 1.

IS: n $\rightarrow n + 1$
Angenommen für ein n ∈ ℕ enthält P({1,...,n}) genau 2^n Elemente. P({1,...,n,n+1}) ist die disjunkte Vereinigung von P({1,...,n}) und allen Teilmengen von {1,...,n+1}, die n+1 enthält also P({1,...,n+1}) = P({1,...,n}) $\bigcup$ { $\mathcal{M}$∪ {n+1}; M ∈ P({1,...,n})}.
Somit enthält P({1,...,n+1}) genau $2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$ Elemente. qed.

<u>Induktive Definition:</u>

Sei n ∈ $\mathbb{N}_0$. Ordne jedem n ∈ $\mathbb{N}_0$ mit $n \geq \mathbb{N}_0$ ein Element f(n) einer Menge X folgendermaßen zu:

1. gib f(n_0) an
2. Für n ≥ n_0 gib eine Vorschrift an, wie man f(n+1) aus f(n_0),...,f(n) berechnet

Beispiel:
Potenzen: Sei x eine reelle Zahl.

1. $x^0 := 1$

2. $x^{n+1} := x * x^n$ n $\in \mathbb{N}$

Summen- und Produktzeichen:

Sei a_k für jedes k $\in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl.
Informell definiert:
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$
$\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 * a_2 * ... * a_n$

1.4 Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen R ist für uns eine Menge, auf der eine Addition +, eine Multiplikation * sowie eine Ordnungsrelation < definiert ist mit den nachfolgend vorgestellten Eigenschaften.

Eigenschaften siehe Folien

andere Eigenschaften

Archimedisches Axiom: für x,y $\in \mathbb{R}$ gilt

Sind x und y > 0 mit$n : x > y$

Folgerung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Bemerkung:
Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllt ebenfalls diese Eigenschaften (außer IP).

Offenes Intervall runde klammern

Intervallschachtelung

abgeschlossener

Eigenschaften:
$I_{n+1}c - I_n$ für alle n $\in \mathbb{N}$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_p mit $|I_n| < \varepsilon$

IP
Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gibt es genau eine reelle Zahl, die allen ihren Intervall angehört. ($\rightarrow$ Intervallschachtelungsprinzip)

Bemerkung:

- man kann zeigen das es so eine Menge gibt die diese Eigenschaften besitzt
- $\mathbb{R}$ enthält $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ (:={0;1;-1;2;-2;...}), Q(:={m/n:m $\in \mathbb{Z}$, n $\in \mathbb{N}$ })
- (IP) gilt nicht in $\mathbb{Q}$

Definition3.2.:
Sei x $\in \mathbb{R}$.
Der Absolutbetrag von x ist |x| := {x, falls x > 0 oder -x, falls x < 0}

Bemerkung:
Aus der Definition folgt unmittelbar:

- |-x| = |x|
- |xy| = |x| |y|
- |x| $\geq$ x
- |x| $\geq$ 0
- |x| = 0 genau dann wenn x = 0

Satz3.3.:
"Dreiecksungleichung"

Für alle x,y $\in \mathbb{R}$ gilt: |x+y| $\leq$ |x| + |y|

Beweis: Da x $\leq$ |x| und y $\leq$ |y| folgt x+y $\leq$ |x|+|y| (*)
Des weiteren gelten -x $\leq$ |-x| = |x| und -y $\leq$ |-y| = |y| und deshalb auch -(x+y)= -x+(-y) $\leq$ |x| + |y| (**)

Aus (*) und (**) folgt nun |x+y| $\leq$ |x| + |y| qed

Satz3.4.: "Bernoulische Ungleichung"

Sei x $\in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann gilt für alle n $\in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geq 1+nx$

Beweis:
siehe Übungsaufgabe

Satz3.5.:
Sei y $\in \mathbb{R}$.
(a) Ist y >1 so existiert zu jedem k $\in \mathbb{R}$ ein n $\in \mathbb{N}$ so dass y^n > K
(b) ist 0 < y < 1 so gibt es zu jedem ε > 0 ein n $\in \mathbb{N}$ sodass $y^n = \varepsilon$

Beweis:
(a) setze x : = y-1
Da y > 1 ist und x >0
Nach (A) gibt es ein n $\in \mathbb{N}$ mit n*x > K-1
$y^n = (1+x)^n \geq$ 1+nx > 1+k - 1 = k

(b) Sei 0 < y <1. Da $\tilde{y} := \frac{1}{y}$ >1 gibt es nach (a) zu K := $\frac{1}{2}$ ein n $\in \mathbb{N}$ mit $\tilde{y}^n > \frac{1}{\varepsilon} = k.$
Es folgt $\varepsilon > \frac{1}{y^n} = y^n$. qed.

Satz 3.6:
"$\mathbb{Q}$ liegt nicht in $\mathbb{R}$"

Seien x,y $\in \mathbb{R}$ mit x<y Dann existiert ein q $\in \mathbb{Q}$ mit x $<$ q $<$ y
Beweis:

1. Fall: x $>$ 0 Nach (A) gibt es ein n $\in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n}$ $<$ y-x M := { k $\in \mathbb{N}$ k-$\frac{1}{n}$ $>$ x}
   Sei m die kleinste Zahl in M, also x $<$ $\frac{m}{n}$ und x $\geq m - \frac{1}{n}$ Für q $=$ $\frac{m}{n}$ gilt x $<$ q $=$ $\frac{m}{n}$ $=$ m-$\frac{1}{n}$ ($\leq$ x) + $\frac{1}{n}$ ($<$ y-x)
2. Fall: x $\leq$ 0 Es existiert n $\in \mathbb{N}$ so dass x+n $>$0 Nach Fall 1 existiert $\tilde{q} \in \mathbb{Q}$ mit x+n $<$ $\tilde{q}$ $<$ y+n und somit x$<$ $\tilde{q}$ -n ($\in \mathbb{Q}$) $<$y qed.

Wir haben gesehen, dass es in $\mathbb{Q}$ keine Zahl x gibt mit $y^2 = 2$. Mit Hilfe von (IP) können wir zeigen, dass in $\mathbb{R}$ ein solches y existiert.

Satz 3.7:
Ëxistenz von Wurzeln "

Zu jedem x $\in \mathbb{R}$ mit x $>$ 0 und jedem k $\in \mathbb{N}$ genau eine reelle Zahl y $>$ 0 so das y^k $=$ x.

Notation y $=$ kte Wurzel aus x oder y $=$ $x^{\frac{1}{k}}$

Eindeutigkeit:
Seinen y, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, y $>$ 0, $\tilde{y}$ $>$ 0 und y^k $=$ x $=$ $\tilde{y}^k$.
Falls y ungleich $\tilde{y}$ dann ist entweder y $>$ $\tilde{y}$ und somit y^k $>$ $\tilde{y}^k$ oder y $<$ $\tilde{y}$ und somit y^k $<$ $\tilde{y}^k$.
Da aber y^k $=$ $\tilde{y}^k$ muss y $=$ $\tilde{y}$ gelten.
Existenz:
1. Fall x $=$ y (1^k $=$ 1 für jedes k $\in \mathbb{N}$)
2. x $>$ 1

Betrachte die intervallschachtelung ([a_n,b_n])n $\in \mathbb{N}$ mit:
1. $[a_1, b_1]$ $=$ [1,x],
2. $[m_{n+1},\ b_{n+1}]$ $=$ [a_n,m] falls m^k $\geq$ x, n $\in \mathbb{N}$ [m,b_n] sonst
wobei m $=$ $\frac{1}{2}$ (a_n+b_n).

Sei y nach (IP) in allen Intervallen liegende Zahl.
Es gilt also a_n $\leq$ y $\leq$ b_n für alle n $\in \mathbb{N}$.
Dann folgt a_n^k $\leq$ y^k $\leq$ b_n^k für alle n $\in \mathbb{N}$ (*)
Nach Konstruktion der Inrervallschachtelung ist auch a_n^k $\leq$ x $\leq$ b_n^k für alle n $\in \mathbb{N}$ (**)
Da ([a_n,b_n])n $\in \mathbb{N}$ ebenfalls eine Intervallschachtelung ist. (ÜA) ist die Zahl die in allen diesen Intervallen liegt nach (IP) eindeutig, also nach (*) und (**) x $=$ y^k

3. Fall x $<$ 1
Betrachte $\tilde{x}$ $=$ $\frac{1}{x}$
Da $\tilde{x}$ $>$ 1 existiert nach Falls 2 ein $\tilde{y}$ mit $\tilde{y}$k $=$ $\tilde{x}$. Für y= $\frac{1}{y}$ gilt dann y^k $=$ $(\frac{1}{k})^k$ =x qed.

Definition 3.8:
Ein M $\subset \mathbb{R}$ heißt nach oben bzw.. unten beschränkt, wenn es ein s $\in \mathbb{R}$ gibt sodass für jedes x $\in$ M gilt $x \leq s$ bzw $s \leq x$ s heißt dann eine obere bzw untere Schranke für M.

Ist M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt so heißt M beschränkt.

Beispiele:

- (0,1) $\rightarrow$ nach oben und unten beschränkt sup = 1
- ([0,1]= $\rightarrow$ nach oben und unten beschränkt sup = 1 = max
- $\{1\}$ $\rightarrow$ nach oben und unten beschränkt
- ([3, ∞]) $\rightarrow$ nach unten beschränkt
- $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ weder nach oben noch nach unten beschränkt

Definition 3.9:
Eine Zahl s $\in \mathbb{R}$ heißt Supremum bzw Infimum der Menge M Teilmenge von R falls s die kleinste obere bzw größte untere Schranke von M ist, d.h. Falls:

1. s ist eine obere bzw untere Schwanke für M und
2. jede Zahl s' mit s' $<$ s bzw s' $>$ s ist keine obere bzw untere Schranke für M

Notation s = sup M bzw s = inf M
Gilt s $\in$ M so heißt s Maximum bzw Minimum s = max M bzw s= min M

Satz3.10.:
„Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$“

Jede nach oben/unten beschränkte, nicht leere Teilmenge M $\subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum / Infimum.

Beweis:
1. Fall Leere Menge ungleich M in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt
Sei b_1 eine obere Schranke und a_1 keine obere Schranke für M (z.B. wähle x $\in$ M und dann a_1 = x-1).
- I1 = [a_1,b_1]
- für n $\in \mathbb{N}$ I_{n+1} := [a_{n+1},b_{n+1}] := { [a_n,m] falls ober Schranke für M; sonst [m,b_n] } wobei m = $\frac{1}{2}$ (a_n+b_n)

Beobachtung:
(i) ist Intervallschachtelung für jedes n $\in \mathbb{N}$
(ii) b_n eine ober Schranke für M
(iii) a_n keine obere Schranke für M
Nach (IP) gibt es eine allen Intervallen angehörende Zahl

Behauptung1: s ist keine obere Schranke für M
Beweis: Angenommen s ist keine obere Schranke für M. Dann ex. X $\in$ M mit x $>$ s und I_n mit $|I_n|$<x-s
Es folgt $b_n - s \leq b_n - a_n = |I_n| <$ x-s also $b_n <$ x (BLITZ) Widerspruch zu (ii) qed

Behauptung2: s ist die kleinste obere Schranke für M
Beweis: Angenommen s' ist eine Obere Schranke für M und s' $<$ s
es existiert I_n mit $|I_n| <$ s-s'

s-$a_n \leq b_n - a_n$ also s' $< a_n$
Damit ist auch a_n eine obere Schranke für M (BLITZ) zu (iii) qed

2. Fall: Leere Menge ungleich M nach unten beschränkt geht ähnlich
Bemerkung: Falls [a_n,b_n] eine Intervallschachtelung ist und x $\in$[a_n,b_n] für alle n $\in \mathbb{N}$, so gilt x= sep { a_n; n $\in \mathbb{N}$ } / inf { b_n; n $\in \mathbb{N}$ }
ÜA $\rightarrow$ formales aufschreiben

Die Supremumeigenschaft gilt nicht in $\mathbb{Q}$
Bsp.: Sei ([a_n,b_n]) die Intervallschachtelung aus Satz 3.7 für Wurzel 2.
Dann ist M := { a_n; n $\in \mathbb{N}$ } $\subseteq$ W, aber m besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

1.5 Abbildungen

Definition4.1:
Seien A und B Mengen
Eine Abbildungen oder Funktion von A nach B ist eine Vorschrift f, die jedem x $\in$ A genau ein Element f(x) $\in$ B zuordnet.
Notation f: A $\rightarrow$ B, x $\longmapsto$ f(x)
A ist der Definitionsbereich von f
B die Zielmenge und f(A) = { f(x) : x $\in$ A } $\subseteq$ B ist der Bildbereich von f
Die Menge G(f) = {x,f(x); x $\in$ A} $\subseteq$ AxB heißt der Graph von f

Bemerkung:
Funktionen kann man durch Angabe einer Abbildungsvorschrift definieren
Bsp.: f: $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ x $\longmapsto 4x^2 + 7x + 10$ oder f $\mathbb{R} \rightarrow$ {0,1} x $\longmapsto$ { 1, x $\in \mathbb{Q}$; 0, x $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ }

Definition4.2.:

Sind f: A $\rightarrow$ B und g: C $\rightarrow$ D Funktionen mit f(a) $\subseteq$ C so ist g komposition f: A $\rightarrow$D, x $\longmapsto$ g(f(x)) die Komposition von g und f

Bsp:
f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ x $\longmapsto x^2$
g: [0,∞) $\rightarrow \mathbb{R}$ x $\longmapsto \sqrt{x}$

$g^\circ f$ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x $\longmapsto \sqrt{x^2}$ = |x|

Definition4.3:
Seien f,g A $\rightarrow$ R beliebige Funktionen und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind f+g A $\rightarrow \mathbb{R}$, αf A $\rightarrow \mathbb{R}$, f*g A $\rightarrow$ R definiert durch:
(f+g)(x) = f(x) + g(x), (αf)(x) = α f(x), (f_g)(x)= f(x) g(x)-
Sei A' = { x $\in$ A, g(x) = 0} Dann ist f/g A' $\rightarrow \mathbb{R}$, x $\longmapsto$ f(x)/ g(x)

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen und Konvergenz

Definition1.1.:

Sei X eine Menge. Eine Folge in X ist eine Abbildung f: N $\rightarrow$ X
Notation: Falls x_n = f(n), n $\in \mathbb{N}$, so schreibt man für die Folge auch $(x_n)n \in \mathbb{N} \subseteq$ X / $(x_n) \subseteq$ X / $(x_1, x_2, x_3,...) \subseteq$ X.

Beispiele:

1. $x_n = \frac{1}{n}n \in \mathbb{N}$ $(x_n) = (1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4},....)$
2. x $\in \mathbb{R}$ und x_n = x für alle n $\in \mathbb{N}$ (x_n) = (x,x,x,...) $\rightarrow$ Konstante Folge
3. $x_n = -1^n$ n $\in \mathbb{N}$ (x_n) = (-1,1,-1,1,...)
4. x_n = n n $\in \mathbb{N}$ (x_n) = (1,2,3,4,5,....)
5. $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_{n+1} = x_n - x_{n-1}$ für n > 2 (x_n) = (1,1,2,3,5,8,...) $\rightarrow$ Fibonacci Folge

Definition1.2
Eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt konvergent gegen einen Grenzwert oder Limes x $\in \mathbb{R}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein N $\in \mathbb{N}$ so dass $|x_n$-x$| < \varepsilon$ für alle n $\geq$ N
Notation: $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \rightarrow$ x n $\rightarrow \infty$
Die folge heißt divergent falls sie nicht konvergiert.
Bemerkung n hängt von ε ab.

Erinnerung:
$(x_n) \subseteq$ (heißt in) $\mathbb{R}$ konvergiert x $\in \mathbb{R}$ falls für alle $\varepsilon > 0$ und mindestens N $\in \mathbb{N}$ für alle n $\geq$ N $|x_n$-x$| < \varepsilon$

Satz 1.4.:
Eindeutigkeit des Limes
Der Grenzwert einer konvergenten Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien x und x' Grenzwerte von (x_n) Annahme x $\neq$ x' Sei $\varepsilon = \dfrac{|x - x'|}{2}$ Da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$ existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so das $|x_n$-x$| < \varepsilon$ für alle n $\geq N_1$ Sowie $|x_n -$ x'$| < \varepsilon$ für alle n $\geq N_2$ Falls n $\geq$ max$\{N_1, N_2\}$ so gilt |x-x'| = |(x-x_n)+(x_n-x')| $\leq$(dreiecks ungl) |x-x_n| + $|x_n$-x'$| < 2\varepsilon$ = |x-x'| (BLITZ) Widerspruch qed

Beispiele(1.2):

1. $(\dfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben Nach (A) existiert eine natürliche Zahl N $\in \mathbb{N}$ sodass $(\dfrac{1}{n})$ $< \varepsilon$ Für n $>$ N folgt $|(\dfrac{1}{n})$ - 0$| = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ somit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
2. x_n = x ; x $\in \mathbb{R}$ fest gewählt Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben $|x_n$-x| = |x-x| = 0 $< \varepsilon$ für alle n $\in \mathbb{N}$ somit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

3. $(x_n) = (-1)^n$ Angenommen (x_n) konvergiert gegen ein x $\in \mathbb{R}$

4. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann ein N $\in \mathbb{N}$ so dass für alle n $\geq$ N gilt $|x_n$-x$| < \varepsilon$ für n $\geq$ N folgt nun $2 = |x_{n+1} - x_n| = |x_{n+1} - x + x - x_n| \leq |x_n + 1 - x| + |x - x_n| < 2$ (BLITZ) Widerspruch

Definition1.5
Eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt beschränkt wenn es eine Konstante M $\in \mathbb{R}$ gibt sodass $|x_n|$ C: M für alle n $\in \mathbb{N}$

Bemerkung:
Die Folgen aus Bsp 1.2 (1), (2), (3) sind beschränkt, (4) und (5) sind nicht beschränkt.

Satz1.6.:
Jede konvergente Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.
Beweis:
Sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ Es gibt ein N $\in \mathbb{N}$ so dass für alle n $\geq$ N gilt $|x_n$-x$| < 1$ Für n $\geq$ N folgt nun
$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$
Sei M: $\max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n-1}, 1 + |x|\}$.
Dann gilt $|x_n| <$ M für alle n $\in \mathbb{N}$ qed

Bemerkung:

- Die Fibonacci Folge und (1,2,3,4,5,...) sind nicht konvergent, da sie nicht beschränkt sind .
- Die Umkehrung der Aussage (also „Beschränkte Folgen sind konvergent“) gilt nicht siehe Bsp. 1.2 3

Satz1.7.:
Rechenregel"
Seien (x_n),(y_n) $\subseteq \mathbb{R}$ konvergente Folgen mit $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ und $y = \lim_{n \to \infty} y_n$
Dann gelten:
(a) $\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = x + y$ (b) $\lim_{n \to \infty} (x_n * y_n) = x * y$ (c) ist y $\neq 0$ so gibt es ein N $\in \mathbb{N}$ so das $y_1 \neq 0$ für alle $n \geq N$ Für die Folge $(\dfrac{x_N + n}{y_N + n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt $\lim_{n \to \infty} \dfrac{x_N + n}{y_N + n} = \dfrac{x}{y}$
(a) ÜA
(b) Nach Satz 1.6 existiert M $>$ 0 so dass für alle n $\in \mathbb{N}$ gilt $|x_n| \leq M$ und $|y_n| \leq M$ und $|y| \leq M$
Desweiteren existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0 N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so dass
$|x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ für alle n $\geq N_1$ und $|y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ für alle n $\geq N_2$
Für alle n $\geq max\{N_1, N_2\}$ ist dann $|x_n * y_n - xy| = |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \leq |x_n||y_n - n| + |x_n - x||y| < \varepsilon$
(c) siehe literatur

Folgerung:
Falls $(x_n) \leq \mathbb{R}$ mit $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ dann konvergiert auch $(\alpha x_n) \subseteq \mathbb{R}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\lim n \to \infty \; \alpha x_n = \alpha x$

Satz1.8
Sein $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergente Folgen und $x = \lim_{n \to \infty} x_n; y = \lim_{n \to \infty} y_n$

(a) Falls $x_n \leq y_n$ für alle n $\in \mathbb{N}$ dann ist auch x<y
(b) $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle n $\in \mathbb{N}$ und ist x=y so konvergiert auch (z_n) und $\lim_{n\to\infty} z_n = x$

Beweis :
(a) Angenommen y<x. Dann ist $\varepsilon = \dfrac{x-y}{2} > 0$ und es existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle n $\geq N_1$ und $|y_n - y| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$ Für $n \geq max\{N_1, N_2\}$ gilt $x - \varepsilon < x_n \leq y_n < y + \varepsilon$ bzw. nach Umfomung $\dfrac{x-y}{2} < \varepsilon$ (BLITZ)
(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert N $\in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - x| < \varepsilon$ und $|y_n - y| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$
Für $N \geq N$ gilt $|z_n - x| \leq |z_n - x_n| + |x_n - x| = t_n - x_n \leq y_n - x_n = |y_n - x_n| \leq |y_n - x| + |x - x_n|$
$|z_n - x| \leq |y_n - x| + |x - x_n| + |x_n - x| < \varepsilon$ qed

Definition1.9:
Eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt
(a) monoton wachsend, wenn $x_n \leq x_{n+1}$ für alle n $\in \mathbb{N}$
(b) monoton fallend wenn $x_n \geq x_{n+1}$ für alle n $\in \mathbb{N}$
Bespiele aus Bsp 1.2

1. monoton fallend
2. beides (fallend und wachsend)
3. weder fallend noch wachsend
4. wachsend
5. wachsend

Satz1.10:
Jede beschränkte monotone Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert und zwar
(a) gegen $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ falls (x_n) monoton wachsend
(b) gegen $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ falls (x_n) monoton fallend

Beweis:
(a) sei s = $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu $\varepsilon > 0$ existiert also ein N $\in \mathbb{N}$ dass $s - x_n < \varepsilon$ Für $n \geq N$ folgt $|s - x_n| = s - x_n \leq s - x_n < \varepsilon$
(b) ähnlich

Bemerkung zu Satz 1.10

Sei $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung und x die in allen Intervallen liegende Zahl. Dann ist (a_n) monoton wachsend, b_n monoton fallend und der

$$\lim_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = x = inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} b_n$$

2.2 Der Satz von Bolzano – Weierstraß

Definition 2.1:
Sei (x_n) eine Folge und sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge $(also n_1 < n_2 < n_3 < ......)$. Dann heißt die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...)$ Teilfolge (TF) der Folge (x_n).

Bsp.:
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ...) \to (x_1, x_3, x_6, ...) n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 6$

Bemerkung:
Ist $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergent mit $\lim x_n = x$, so konvergiert auch jede Teilfolge von (x_n) gegen x.

Satz 2.2.:
"Bolzano-Weierstraß"
Jede beschränkte Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:
Da (x_n) beschränkt, existieren $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ so dass $a_1 \leq x_n \leq b_1$ für alle n $\in \mathbb{N}$.
Definiere Intervallschachtelung $I_1 := [a_1, b_1]$
$n \geq 1 : I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}] := \{[a_n, m]$, unendlich viele Folgenglieder enthält; $[m, b_n], sonst.\}$
wobei $m = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ (Intervallmitte)
Da die Intervalle jeweils unendlich viele Folgenglieder haben, kann man aus ihnen für jedes k $\in \mathbb{N}$ ein Folgenglied $x_{n_k} \in I_k$ auswählen, so dass $n_{k+1} > n_k$. Sei x die nach (IP) in allen Intervallen liegende Zahl. Da $a_k \leq x_{n_k} < b_k$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = x = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$ (Bem. Zu Satz 1.10) folgt mit Satz 1.8(b), dass $(x_{n_k})k \in \mathbb{N}$ konvergiert und $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. qed

Bemerkung:
Der Grenzwert einer konvergenten TF heißt auch Häufungspunkt (HP) von (x_n).

Bsp.:
(-1,1,-1,1,.....) : HP 1 und -1
$(1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, ...)$: ist nicht Beschränkt, besitzt trotzdem HP nämlich 0

Folgerung aus Satz 2.2:
Besitzt eine beschränkte Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ nur einen HP x, so konvergiert die Folge gegen x.

Beweis:
Angenommen (x_n) konvergiert nicht gegen x. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n) so dass $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon$ für alle k$\in \mathbb{N}$ einen HP x* $\neq$ x.
x* ist auch ein HP von (x_n) im Widerspruch zu der Annahme dass (x_n) nur einen HP besitzt. qed

2.3 Cauchyfolgen und Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Definition 3.1
Eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge (CF), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N $\in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Satz 3.2:
Jede konvergente Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist eine CF.
Beweis: Angenommen $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert und $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (x_n) konvergiert, existiert N $\in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Für alle $n, m \geq N$ gilt dann $|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. qed

Satz 3.3:
Jede Cauchy-Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Beweis:
Sei $\varepsilon = 1$ und N $\in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - x_m| < \varepsilon = 1$ für alle $n, m \geq N$.
Für $n \geq N$ gilt $|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_n| + |x_N| < 1 + |x_N|$
Somit ist für n $\in \mathbb{N}$ $|x_n| \leq max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|, 1 + |x_n|\}$ ged

Satz 3.4:
"Vollständigkeit von $\mathbb{R}$"

Jede CF $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

Beweis:
Sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine CF.
Nach Satz 3.3 ist (x_n) beschränkt und nach Satz 2.2 besitzt (x_n) eine konvergente TF $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.
Sei $x = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
(1) Sei $N \in \mathbb{N}$ so , dass $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$.
(2) Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $k \geq N$ und $|x_{n_k} - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Dann folgt für $n \geq N |x - x_n| = -x_{n_k} + x_{n_k} - x_n| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ qed

Bemerkung:
Die Behauptung gilt nicht für $\mathbb{Q}$ statt $\mathbb{R}$.
Bsp: Sei $([a_n, b_n])$ die Intervallschachtelung aus Satz I.3.7 für $\sqrt{2}$. Dann sind $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{Q}$ und CF (da konvergent nach Bem. Zu Satz 1.10), aber $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.4 Abzählbarkeit

Definition4.1.:
Eine Menge M heißt abzählbar, falls eine Folge (x_n) in M gibt, so dass $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = M$. Ansonsten heißt M überabzählbar.
Beispiel 1:

1. Endliche Menge M=$\{m_1, m_2, m_3, ..., m_l\}$ $(x_n) = (m_1, m_2, m_3, ..., m_l, m_l, m_l, ...)$,M abzählbar

2. $(x_n) =$ (1,2,3,4,5,.....) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}, \mathbb{N}$ abzählbar

3. $(x_n) =$ (0,1,-1,2,-2,3,-3,....) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ abzählbar

4. $(x_n) = (\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, ...)\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}$ abzählbar

5. M_1 und M_2 abzählbar und $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = M_1, \{y_n : n \in M\} = M_2$ $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ...)$ $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = M_1 \cup M_2$

Satz2.4: R ist nicht abzählbar

Beweis:
Angenommen, es gibt eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ so dass $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = R$.

Definiere Intervallschachtelung durch:
$I_1 := [x_1 + 1, x_1 + 2]$
$n \geq 1$: Unterteile I_n in 3 gleich große abgeschlossene Intervalle und wähle daraus I_{n+1} so aus, dass $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.
Nach (IP) existiert ein s $\in \mathbb{R}$, so dass s $\in I_n$ für alle n $\in \mathbb{N}$ (*)
Es gibt ein k $\in \mathbb{N}$, so dass $x_k = s$ (da $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} =$ R) Nach Konstruktion der Intervallschachtelung ist aber $x_k \in I_k$ BLITZ zu (*) qed

2.5 Reihen und Konvergenz

Definition5.1:
Sei $x_k \in \mathbb{R}$ für jedes k $\in \mathbb{R}$ und definiere $sn = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n, n \in \mathbb{N}$ Die Folge (sn) $\subseteq \mathbb{R}$ heißt (unendliche) Reihe (sn) $= (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, ...)$
Notation für (sn): $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$
Falls (sn) konvergiert, so bezeichnet $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ auch den Grenzwert der Folge (sn), also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \lim\limits_{n\to\infty} sn$.
Man sagt, die Reihe Konvergiert. Sie divergiert, falls sie nicht konvergiert.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ heißt absolut konvergent falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergiert.

Bemerkung:
Entsprechend bezeichnet für m $\in \mathbb{N}_0$ $\sum\limits_{k=m}^{\infty} x_k$ die Folge $(x_m, x_m + x_{m+1}, x_m + x_{m+1} + x_{m+2}, ...)$ bzw. deren Grenzwert.

Beispiel5.2:
(1) Geometrische Reihe:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, wobei q $\in \mathbb{R}$
$sn := \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$.
Ist |q|<1 so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ und mit Satz1.7 $\lim\limits_{n\to\infty} sn = s - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$
Somit konvergiert die Reihe und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$
(2) Harmonische Reihe:
$sn := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$
Sei $n = 2^l$ für ein l $\in \mathbb{N}$
Dann gilt:
$s_2^l = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2}^{l-1} + 1 + ... + \frac{1}{2}^{l}) \geq 1 + \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{4} + 4 * \frac{1}{8} + ... + 2^{l-1} + \frac{1}{2}^{l} = 1 + l * \frac{1}{2}$
Somit (sn) unbeschränkt also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ divergiert.

Bemerkung:
Konvergieren die unendlichen Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, so konvergieren nach Satz1.7 auch die

Riehen $\sum k=1^{\infty} x_k + y_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha x_k$ für jedes x $\in \mathbb{R}$.

Es gilt dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k + y_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha x_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$

Satz5.3.:
(„Cauchy-Kriterium“)
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N $\in \mathbb{N}$ gibt so dass für $n > m \geq N$ gilt $\sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k < \varepsilon$.

Beweis:
$sn := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ das Kriterium bedeutet, dass (sn) eine CF ist. Mit hilfe von Satz3.2 und 3.4 folgt die Beobachtung. qed

Satz5.4.:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ kann nur dann konvergieren wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_k = 0$

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz5.3 gibt es ein N $\in \mathbb{N}$ so dass für alle $n > m \geq N$ gilt $|\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k| < \varepsilon$. Insbesondere für $m \geq N$ und $n = m+1$ folgt $\varepsilon > |\sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k| = |\sum\limits_{k=n}^{n} x_k| = |x_n|$ somit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, qed

Satz5.5.:
Majorantenkriterium"
Ist für alle k $\in \mathbb{N} |x_k| \leq y_k$ und konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, so konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ und es gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ heißt Majorante von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ bzw. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Beweis:
Nach Satz5.3. gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N $\in \mathbb{N}$, so dass: $|\sum\limits_{k=m+1}^{n} y_k| = \sum\limits_{k=m+1}^{n} y_k < \varepsilon$ für alle $n > m \geq N$. Für $n > m \geq N$ folgt nun:
$|\sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} |x_k| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} y_k < \varepsilon$.
Nach Satz5.3. konvergiert also $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ bzw. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$. Da $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$, folgt aus Satz1.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sum k = 1^n y_k$.

Bemerkung:

1. Falls $y_k \geq x_k \geq 0$ für alle k$\in \mathbb{N}$ dann gilt: Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ divergent, so ist auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ divergent. (Minorantenkriterium)

2. Falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergiert, dann auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

3. Ist $|x_k| \leq y_k$ bzw. $0 \leq x_k \leq y_k$ bis auf endlich viele k $\in \mathbb{N}$ erfüllt, so ist das Majoranten- bzw. Minorantenkriterium immer noch anwendbar. (Die Abschätzung für den Limes gilt jedoch nicht mehr.

Beispiele:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^l}, l \in \mathbb{N} l \geq 2$ Für alle k $\in \mathbb{N}$ gilt $2 * k^2 \geq k^2 + k = k * (k+1)$
$\frac{2}{k*(k+1)} \geq \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^l}, l \geq 2$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k*(k+1)} = 2 * \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k*(k+1} = 2*(1 - \frac{1}{n+1})$
Also ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k*(k+1)}$ konvergent und eine Majorante für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^l}$. Nach Satz5.5. konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^l}$ für $l \geq 2$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^l} \leq 2$.

Satz5.6.:
"Quotientenkriterium"

Falls es ein N $\in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_k \neq 0$ für alle $k \geq N$ und falls $q = \lim\limits_{k\to\infty} |\frac{x_{k+1}}{x_k}|$ existiert, so gilt:

(a) ist q <1 so konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$

(b) ist q $>$ 1 so divergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$

Beweis:
(a)
Sei $\tilde{q} \in$ (q,1).
Es existiert $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, so dass $|\frac{x_{k+1}}{x_k}| \leq \tilde{q}$ für alle $k \geq \tilde{N} \geq N$.
Da das Abändern endlich vieler Summanden das Konvergenzverhalten nicht ändert, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen, dass für alle k $\in \mathbb{N}$ gilt $|\frac{x_{k+1}}{x_k}| \leq \tilde{q}$.
Es folgt induktiv $|x_{k+1}| \leq \tilde{q}|x_k| \leq \tilde{q}^2|x_{k-1}| \leq \ldots.. \leq \tilde{q}^k|x_1|$; k $\in \mathbb{N}$.
Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k|x_1|$ konvergiert (geom. Reihe), konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ nach dem Majorantenkriterium.

(b)
Ist q >1, so gibt es $\tilde{q} \in$ (1,q) und N $\in \mathbb{N}$ so dass $|\frac{x_{k+1}}{x_k}| \geq \tilde{q}$ für alle k $\in \mathbb{N}$. Dann bildet aber (x_k) keine Nullfolge und somit kann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ nicht konvergieren. Qed

Bemerkung:
Bei q = 1 ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiel:
(1) Harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (divergent) Also q = 1 im Quotientenkriterium

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k*(k+1)} = 1$ (konvergent, ÜA 2.1) $|\frac{\frac{1}{(k+1)*(k+2)}}{\frac{1}{k*(k+1)}}| = \frac{k}{k+2} = \frac{k}{k*(1+\frac{1}{k}} \to 1, k \to \infty$

Satz5.7.:
Wurzelkriterium

Falls es ein N $\in \mathbb{N}$ gibt und ein q $\in$ [0,1), so dass k-te$\sqrt{(|x_k|)} \leq q$ für alle $k \geq N$ dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Beweis k-tewurzel($|x_k| \leq q$ heißt das $|x_k| \leq q^k$. Nach den Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ qed

Beispiel:

$x_k = (\frac{1}{2})^k$, falls k gerade ; $(\frac{1}{3})^2$, falls k ungerade Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ ungerade $|\frac{\frac{1}{2}^{k_0} + 1}{\frac{1}{3^{k_0}}}| = \frac{1}{2} * \frac{1}{3}^{k_0}$.

Somit existiert $\lim_{k\to\infty} |\frac{x_{k+1}}{x_k}|$ nicht. Quotientenkriterium nicht anwendbar.

K-tewurzel $(|x_k|) \leq \frac{1}{2} < 1$ für alle k $\in \mathbb{N}$.

Nach Wurzelkriterium konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Satz5.8.:
Leibnitz-Kriterium
Sei $(x_k)_k \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ monoton fallend wobei $x_k \geq 0$ für alle k $\in \mathbb{N}$ und sei $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k * x_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} * x_k$.

Beweis:
Siehe Königsberger Abschnitt 6.2

Bemerkung:
(1) demnach konvergiert die alternierende Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \check{} \frac{1}{4} + ...$

Sie konvergiert aber nicht absolut, denn $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k + 1\frac{1}{k}|$ divergiert siehe Beispiel5.2.

(2) Achtung: Es kommt hier auf die Reihenfolge bei der Summation an! Summiert man beispielsweise: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}(+\frac{1}{5} + \frac{1}{7}) - \frac{1}{6} + (\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}) - \frac{1}{8} + ...$
so divergiert diese Reihe (siehe O. Forster Abschnitt 7) obwohl es die gleichen Summanden sind wie in (1) sind. Bei absolut Konvergenten Reihen spielt die Reihenfolge der summation hingegen keine Rolle.

Satz5.9.:
Cauchy-Produkt
Seien $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ absolut konvergente Reihen und $c_n := \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} * y_k = x_n * y_0 + x_{n-1} * y_1 + ... + x_0 * y_n$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k * \sum_{k=0}^{\infty} y_k$

Beweis: siehe O Foster Abschnitt 8

2.6 Potenzreihen

Definition6.1:
Für alle z $\in \mathbb{R}$ definiere:
$exp(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} * z^k$ Ëxponentialreihe"
$sin(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k * \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ Sinusreihe"
$cos(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k * \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ "Kosinusreihe"

Bemerkung:

1. Die Reihen konvergieren für jedes z $\in \mathbb{R}$ absolut $x_k : \frac{1}{k!} * z^k$
   $|\frac{x_{k+1}}{x_k}| = |\frac{\frac{1}{(k+1)!} * z^{k+1}}{\frac{1}{k!} * z^k}| = |z| * \frac{k!}{(k+1)!} = |z| * \frac{1}{k+1}$ Nach dem Quotientenkriterium konvergiert exp(z) absolut.
2. Exp(0)=1, sin(0) = 0, cos(0) = 1
3. $cos(-z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k * \frac{-z^{2k}}{(2k)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k * \frac{z^{2k}}{2k)!} = cos(z)$
   $sin(-z) = (-1)^k * \frac{-z^{2k+1}}{(2k+1)!}$
   $= \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k * (-1)^{2k+1} * \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k * \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -sin(z)$
4. exp(1) heißt Eulerische Zahl und wird mit e bezeichnet

Definition6.2:
Für k,n $\in \mathbb{N}, k \leq n$ heißt
$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! * (n-k)!}$

Binominalkoeffizient:

Bemerkung:
Es gelten (siehe ÜA 5.1)
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{2} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

Satz6.3.:
Binomischer Lehrsatz

Seien n $\in \mathbb{N}$ und a,b $\in \mathbb{R}$
Dann gilt:
$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$ (*)

Beweis: (durch vollständige Induktion)
IA: n=1
$\sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} * a^{1-k} * b^k = \binom{1}{0} * a^{1-0} * b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b = (a+b)^1$
Aussage stimmt für n=1

IS:
n= n+1
Angenommen (*) gilt für ein n $\in \mathbb{N}$ (IV) Zeige dass auch $(a+b)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} * a^{n+1-k} b^k$ gilt:
$(a+b)^{n+1} = (a+b) * (a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n$
(iv)
$= a * \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k + b * \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$
$= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n+1-k} * b^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^{k+1}$
$\rightarrow$ Umbenennung $k = l$ $\rightarrow$Indexverschiebung $k + 1 = l$
$= \sum\limits_{l=0}^{n} \binom{n}{l} * a^{n+1-l} * b^l + \sum\limits_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l+1} a^{n+1-l} b^l$
$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum\limits_{l=1}^{n} [\binom{n}{l} + \binom{n}{l+1}] * a^{n+1-l} * b^l + \binom{n}{n} a^0 * b^{n+1}$
$= \binom{n+1}{0}$ $\quad = \binom{n+1}{l}$ $\quad = \binom{n+1}{n+1}$
$= \sum\limits_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} * a^{n+1-l} * b^l$ qed

Satz6.4.:
Funktionalgleichung der Exp.fnkt
Seien a,b $\in \mathbb{R}$ dann gilt exp(a+b) = exp(a)*exp(b)

Beweis:
Da die Exponentialreihe für jede reelle Zahl absolut konvergiert ist exp(a)*exp(b) durch das Cauchy-Prdukt gegeben $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ gegeben wobei
$$c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} * \frac{b^k}{k!} = \frac{1}{n!}$$
$\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} * b^k = 17n!(a+b)^n$ (Binomischer Lehrsatz)
Also gilt $exp(a) * exp(b) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(a+b)^n = exp(a+b)$ qed

Folgerung:

1. Wegen 1 = exp(0) = exp(z+(-z)) = exp(z) * exp(-z)gilt für alle z $\in \mathbb{R} exp(-z) = \frac{1}{exp(z)}$

2. Falls $z \geq 0$, so ist $exp(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \geq 1 > 0$

   Ist z < 0 so ist -z > 0, also $exp(-z) > 0$ und damit $exp(z) = \frac{1}{exp(-z)} > 0$ Insgesamt exp(z) > 0 für alle z $\in \mathbb{R}$

Satz6.5.:
Seien a,b $\in \mathbb{R}$. Dann gelten:
(1) cos(a+b) = cos(a) * cos(b) - sin(a) * sin(b)
(2) sin(a+b) = sin(a) * cos(b) + cos(a) * sin(b)

Beweis:
Nachrechnen mit Cauchy-Produkt.

Folgerung:
$(cos(a))^2 + (sin(a))^2 = cos(a) * cos(-a) - sin(a) * sin(-a) = cos(a + (-a)) = cos(0) = 1$

Definition6.6.:
Seien $a_k \in \mathbb{R}$ für k $\in N_0$ und sei $z_0 \in \mathbb{R}$.
Dann heißt: $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k * (z - z_0)^k, z \in \mathbb{R}$ Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt z_0 und dem Koeffizienten a_k.

Beispiele:

1. gesamte Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k (z_0 = 0, a_k = 1)$

2. exponential Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k (z_0 = 0; a_k = \frac{1}{k!})$

3. Sinusreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0 * z^0 + \frac{1}{1!} * z^1 + 0 * z^2 + \frac{1}{3!} * z^3 ...$

   ($z_0 = 0$; a_k{ 0, k gerade; $\frac{1}{k!}, k = 4m + 1$ für ein m $\in N_0$; $-\frac{1}{k!}, k = 4m + 3$ für ein m $\in N_0$}

4. Kosinusreihe: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k * \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ ähnlich der Sinusreihe

5. $\sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^k (z_0 = -1; a_k = 1)$

Satz6.7.:
Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe konvergiert P(z*) für ein z* $\in \mathbb{R}$, $z* \neq z_0$, so konvergiert P(z) absolut für jedes z $\in \mathbb{R}$ mit $|z - z_0| < |z * -z_0|$.

Beweis:
Konvergiert P(z*) so ist die Folge $(|a_k(z * -z_0)^k|)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, also insbesondere beschränkt (Satz1.6.). Es existiert also M > 0, so dass $|a_k(z * -z_0)^k| \leq M$ für alle k $\in N_0$. Falls $|z - z_0| < |z * -z_0|$ so ist $q = \frac{|z - z_0|}{z * -z_0} < 1$ und $|a_k * (z - z_0)^k| = |a_k (z * -z_0)^k| * |\frac{z - z_0}{z * -z_0}|^k \leq M * q^k$
Da $\sum_{k=0}^{\infty} M * q^k$ konvergiert, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium. qed

Definition6.8.:
Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe.
Definiere:
$\varrho(P) := \{\infty$, falls P(z) für alle z $\in \mathbb{R}$ konvergiert/ sup $\{|z-z_0| P(z)$ konvergiert $\}$
$\varrho(P)$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Bemerkung:
P(z) konvergiert absolut für alle z $\in \mathbb{R}$ mit $|z-z_0| < \varrho(P)$ und divergiert für alle z $\in \mathbb{R}$ mit $|z-z_0| > \varrho(P)$.
Falls $|z-z_0| = \varrho(P)$, so ist keine allgemeine Aussage möglich, siehe Beispiel unten.
Beachte auch $\varrho(P) = 0$ kann vorkommen falls P(z) nur für $z = z_0$ konvergiert.

Beispiele:

1. $\varrho(exp) = \infty, \varrho(sin) = \infty, \varrho(cos) = \infty$
2. $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ geometrische Reihe $\varrho(P) = 1$
3. $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (z+1)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (z-(-1))^k \varrho(P) = 1$
4. $P(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$
   P(1) divergiert also: $\varrho(P) \leq 1$
   P(-1) konvergiert also: $\varrho(P) \geq 1$
   aus beidem folgt insgesamt: $\varrho(P) = 1$

Bemerkung:
Eine Folge $a_n \subseteq \mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw $-\infty$) wenn es zu jedem k $\in \mathbb{R}$ ein N $\in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n > k$ (bzw. $a_n < k$) für alle $n \geq N$.
Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Satz6.9.:
Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe und $a_k \neq 0$ für alle k $\in \mathbb{N}$ (bzw. für alle $k \geq N$)

1. Falls die Folge $(|\frac{a_{k+1}}{a_k}|)$ konvergiert oder $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \infty$, dann ist $\varrho(P) = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|}$
2. Falls die Folge $\sqrt[k]{a_k}$ konvergiert oder $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ dann ist $\varrho(P) = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$, wobei

   jeweils $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$

Beweis:
(1) ÜA
(2) Angenommen $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert und ist weder 0 oder $+\infty$.
Sei $|z-z_0| < \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$. Dann ist $1 > \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}(z-z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|}$(*)

Die Bedingungen aus dem Wurzelkriterium ist erfüllt also konvergiert P(z).
Falls $|z-z_0| > \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$ ist, dann ist $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} > 1$ für alle k $\in\geq N$. Die Summanden von P(z) bilden keine Nullfolge, also divergiert P(z).
Somit $\varrho(P) = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$.
Falls $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = 0$, dann ist (*) für jedes z $\in \mathbb{R}$ erfüllt, also konvergiert P(z) nach Wurzelkriterium und $\varrho(P) = \infty$.
Falls $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ und $z \neq z_0$ dann ist die Folge $(a_k(z-z_0)^k)$ keine Nullfolge also divergiert P(z). $P(z_0)$ konvergiert somit $\varrho(P) = 0$ qed

2.7 Dezimaldarstellung der reellen Zahlen

Vorüberlegung:

Sei $a_k \in \{0,1,2,...,9\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{10})^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 9 * (\frac{1}{10})^k = 9 * \sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{10})^k$
Konvergiert: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(\frac{1}{10})^k$ gegen eine reelle Zahl.

Definition7.1.:
Ein unendlicher Dezimalbruch ist eine reelle Zahl der Form: $z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\frac{1}{10})^k$, wobei $z \in \mathbb{Z}$ und $a_k \in \{0,1,...,9\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.
Andere Notation: $z, a_1, a_2, a_3, ...$
Frage: Lässt sich umgekehrt jede reelle Zahl als unendlicher Dezimalbruch schreiben?
Überlegung: Sei $x \in \mathbb{R}$.

- z:= $\max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$
- a:= $\max\{a \in \{0,...,9\} : z + a * \frac{1}{10} \leq x\}$
- $a_{n+1} := max\{a \in \{0,...,9\} : z + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(\frac{1}{10})^k + a * (\frac{1}{10})^{n+1} \leq x\}$

nach Konstruktion gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:
$z + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(\frac{1}{10})^k \leq z + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k * (\frac{1}{10})^k + (\frac{1}{10})^n$
Nach Satz 1.8 gilt:
$x = z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k * (\frac{1}{10})^k$
Antwort: Ja!
Bemerkung:

1. Die Dezimaldarstellung ist nicht eindeutig.
   Beispiel: 1,00000000 = 1
   0,99999= $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 9 * (\frac{1}{10})^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 9 * (\frac{1}{10})^k + 9 * (\frac{1}{10})^0 - 9 * (\frac{1}{10})^0 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 9 * (\frac{1}{10})^k - 9 = 9 * \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 9 = 10 - 9 = 1$

Fordert man, dass unendlich viele der a_k von 9 verschieden sind, so ist die Darstellung eindeutig (ohne Beweis).

2. Ähnlich kann man zeigen, dass jede reelle Zahl eine Darstellung der Form:
   $z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k * (\frac{1}{b})^k$
   mit b $\in \mathbb{N}, b \geq 2, a_k \in \{0, 1, ..., b-1\}, z \in \mathbb{Z}$, besitzt.

3 Stetigkeit

3.1 Grundlagen

Definition1.1.:
Sei D $\subseteq \mathbb{R}$ und f:$D \to \mathbb{R}$.
f heißt stetig im Punkt $a \in D$, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiele:

1. Sei $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$.
   Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jede Konvergente Folge $(a_n) \leq \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c = f(a)$.
   Somit ist f stetig.

2. $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$.
   Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jede konvergente Folge $(x_n) \leq \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a = f(a)$. Somit ist f stetig.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$.
   Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, dass $\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a| = f(a)$.
   Somit ist f stetig.

4. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \{1, x > \sqrt{2}; 0, x < \sqrt{2}\}$
   Sei $a \in \mathbb{Q}, a < \sqrt{2}$ und sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
   Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < \sqrt{2}$ für alle $n \geq N$.
   Für alle $n \geq \mathbb{N}$ ist dann $f(x_n) = 0$, also ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(a)$.
   Somit ist f stetig in a.

Satz1.2.:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$ und f,g: $D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in a stetig sind. Dann sind auch die Funktionen:

- $f + g : D \to \mathbb{R}$
- $f - g : D \to \mathbb{R}$
- $f * g : D \to \mathbb{R}$
- für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig in a

Ist g(a) $\neq 0$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g} : \{x \in D : g(a) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Beweis:
Falls $x_n \to a, n \to \infty$, dann gilt wegen der Stetigkeit von f und g, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$.
Aus Satz II.1.7 folgt dann $\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$ usw. qed

Folgerung:

1. Polynomfunktion, d.h. Funktionen der Form P: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + ... + a_1 * x + a_0$ wobei $n \in \mathbb{N}, a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sind stetig.
2. Alle rationalen Funktionen, das heißt Funktionen der Form: $\frac{p}{q} : \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynome sind, sind stetig.

Satz1.3.:
Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit f(D) $\subseteq E$.
Falls f in $a \in D$ stetig ist und g in f(a) stetig ist, dann ist auch $g^\circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Beweis:
Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Also aus der Stetigkeit von f in a folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ und aus der Stetigkeit von g folgt: $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = (g^\circ f)(a)$ qed

Satz1.4.:
$\varepsilon - \delta-$Stetigkeit
Sei $D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$ und f: D $\to \mathbb{R}$.
f ist genau dann in a stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x $\in D$ gilt:
Falls $|x - a| < \delta$, dann ist $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. (*)
Bemerkung:

1. δ hängt von ε und a ab
2. Mit Quantoren $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$
   $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Beweis:
"$\Rightarrow$Ängenommen, (*) gilt nicht, das heißt $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D-(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$.
Es existiert also ein $\varepsilon > 0$, so dass man zu jedem $\delta > 0$ ein x$\in$D findet, so dass $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es also ein $x_n \in D$, so dass $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.
Daraus folgt (x_n) konvergiert gegen a, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen f(a), also ist f nicht stetig in a.
"$\Leftarrow$ SSei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und sei $(x_n) \subseteq D$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, so das $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. (**)
Da x_n gegen a konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x - a| < \delta$.
Für $n \geq N$ ist dann wegen (**) $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$.
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, das

heißt aber gerade, dass $f(x_n)$ gegen f(a) konvergiert. qed

Definition1.5.:
Sei D$\subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion f: $D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x,x' $\in D$ gilt:
Falls $|x - x'| < \delta$, dann ist $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Bemerkung:

1. δ hängt nur noch von ε ab
2. Mit Quantoren: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \; \forall x' \in D(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$
3. Eine gleichmäßig stetige Funktion ist stetig

Beispiel:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto |x|$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $\delta = \varepsilon$ gilt nun:
   Falls $|f(x) - f(x')| = ||x| - |x'|| \leq |x - x'| < \delta = \varepsilon$
   Also ist f gleichmäßig stetig.
2. $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ist stetig. Angenommen f ist gleichmäßig stetig.
   Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x, x' \in (0, 1]$ mit $|x - x'| < \delta$.
   Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\dfrac{1}{2n} < \delta$.
   Es sind $x = \dfrac{1}{n}$ und $x' = \dfrac{1}{2n}$ in (0,1] und $|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n}| = \dfrac{1}{2n} < \delta$ aber $|f(\dfrac{1}{n}) - f(\dfrac{1}{2n})| = |n - 2n| = n \geq 1 = \varepsilon$ (WIEDERSPRUCH)

Satz1.6.:
Jede auf einem abgeschlossenem Intervall [a,b] stetige Funktion f:$[a, b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis:
Angenommen f ist stetig, jedoch nicht gleichmäßig stetig.
Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, x'_n \in [a, b]$ mit $|x_n - x'_n| < \dfrac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ (*)
Nach dem Satz von Bolzano.-Weierstraß (Satz II.2.1.) besitzt die beschränkte Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.
Sei $x* = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$
Wegen $|x'_{n_k} - x*| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x*|$ konvergiert auch $(x_{n'_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x*.
Es ist x* $\in [a, b]$, da $a \leq x_{n_k} \leq b$ für alle k $\in \mathbb{N}$.
Da f stetig ist, folgt $0 = f(x*) - f(x*) = \lim\limits_{n \to \infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}))$.
Das widerspricht (*)

3.2 Der Zwischenwertsatz und der Satz vom Maximum und Minimum

Satz2.1.:
Zwischenwertsatz (ZWS)
Sei f:$[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f(a) $<$ 0 und f(b) $>$0 (bzw. f(a) $>$ 0 und f(b) $<$ 0). Dann existiert ein P $\in [a,b]$, so dass f(P)=0.

Beweis:

1. Fall: f(a) $<$ 0 und f(b) $>$ 0
   Betrachte die Intervallschachtelung
   $[a,b] = [a,b]$
   Für $n \in \mathbb{N}$ $[a_{n+1}, b_{n+1}] = \{[a_n, m]$, falls $f(m) \geq 0; [m, b_n]$, falls f(m)<0, wobei $m = \frac{1}{2}(a_n, b_n)\}$
   Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(a_n) \leq 0 und f(b_n) \geq 0$.
   Sei P die nach dem Intervallschachtelungsprinzip in allen Intervallen liegende Zahl.
   Da $\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} b_n$ und f stetig ist, folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(P) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ somit f(P)=0

2. Fall: f(a) $>$ 0 und f(b) $<$ 0
   zeigt man Analog

Bemerkung:

1. Falls $c \in \mathbb{R}$ und f(a)<c<f(b) (bzw. f(b)<c<f(a)), dann existiert ein Punkt P in [a,b] mit f(P) = c.
   Wende den ZWS auf die Funktion $g : [a,b] \to R, x \longmapsto f(x) - c$ an

2. Der Satz gilt nicht für stetige Funktionen $f : [a,b] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$
   Bsp.: Die stetige Fnkt. $F : [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 - 2$ besitzt keine Nullstelle obwohl f(0) = -2 $<$ 0 und f(2) = 2 $>$ 0

Definition 2.2.:
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt falls die Menge $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ beschränkt ist im Sinne von Definition I.3.8 Dies ist gleichbedeutend damit, dass eine Konstante C existiert, so dass für alle x$\in D$ gilt $|f(x)| \leq C$.

Satz2.3.:
„Satz vom Maximum und Minimum“
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sein f beschränkt und besitzt ein Maximum und ein Minimum, dass heißt es existieren $p, q \in [a,b]$ so dass $f(p) = sup f([a,b]) = sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $f(q) = inf f([a,b]) = inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Beweis:
(nur für Maximum)
Angenommen f ist stetig und f([a,b]) ist nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es zu jedem n $\in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ so dass $f(x_n) \geq n$. (*)
Da sie Folge (X_n) beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz II.2.2) eine konvergente Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$.
Da f in $\bar{x}$ stetig ist, folgt $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$
Da konvergente Folgen beschränkt sind (Satz II.1.6), ist die Folge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt im

Widerspruch zu (*).
Somit ist f([a,b]) doch nach oben beschränkt und besitzt nach Satz I.3.10. Ein Supremum. S = sup f([a,b]).
Es gibt eine Folge $(y_n) \subseteq [a,b]$ mit $\lim n \to \infty f(y_n) = S$.
Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $p = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in [a,b]$.
Da f stetig ist, folgt $S = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(p)$

Entsprechend zeigt man, dass f([a,b]) nach unten beschränkt ist und das Infimum in einem Punkt $q \in [a,b]$ angenommen wird. Qed

Bemerkung:

1. Für die Gültigkeit des Satzes ist es entscheidend, dass der Definitionsbereich der Funktion ein abgeschlossenes Intervall ist.
   Bsp.: $f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \longmapsto x$ ist beschränkt nimmt aber weder das Infimum 0 noch das Supremum 1 an.
   $F : (0,1] \to \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x}$ ist stetig aber nicht beschränkt
2. Zusammen mit ZWS folgt, dass stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle [a,b] wieder auf abgeschlossene Intervalle [f(p),f(q)] abbilden.

3.3 Funktionenfolgen und -reihen

Definition 3.1.
Sei D $\subseteq \mathbb{R}$ und sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ für jedes n $\in \mathbb{N}$ eine Funktion. (f_n) heißt dann eine Funktionenfolge auf D.
(1) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls für jedes x $\in D$ die reelle Folge $(f_n(x)) \subseteq \mathbb{R}$ gegen f(x) konvergiert.
(2) Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so dass für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Bemerkung:
(1) Bei gleichmäßiger Konvergenz hängt N nur von ε ab nicht aber von x. (2) Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt immer punktweise Konvergenz aber nicht umgekehrt Bsp.: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}(f_n)$ konvergiert punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \longmapsto 0$ Die konvergenz ist aber nicht gleichmäßig denn für alle $n \in \mathbb{N}|f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n})| = |1 - 0| = 1$

Satz 3.2.:
Sei D $\subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$. Falls die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ dann ist auch f stetig.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und sei a $\in D$. Wir zeigen das ein $\delta > 0$ existiert , so dass für alle x $\in$ D mit $|x - a| < \delta$ folgt, dass $|f(a) \breve{} f(x)| < \varepsilon$.
Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert existiert ein N $\in \mathbb{N}$, so dass $|f_N(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $t \in D$ (1)
Da f_N stetig in a ist (nach Voraussetzung), existiert ein $\delta > 0$ so dass $|f_N(a) \breve{} f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle x $\in$ D mit $|x - a| < \delta$ (2)
Für alle x $\in$ D mit $|x - a| < \delta$ gilt nun:

$|f(a)-f(x)| \leq |f(a)-f_N(a)| + |f_N(a)-f_N(x)| + |f_N(x)-f(x)|$
$< \frac{\varepsilon}{3}(1) \qquad < \frac{\varepsilon}{3}(2) \qquad < \frac{\varepsilon}{3}(1)$ qed

Bemerkung:
Die Aussage gilt im allgemeinen nicht, wenn nur punktweise Konvergenz vorliegt. Bsp.: $f_n : [0,1] \to [0,1], x \longmapsto x^n$ ist für jedes n $\in \mathbb{N}$ stetig. (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : [0,1] \to [0,1]x \longmapsto \{0, x \in [0,1)/1, x = 1\}$ f ist aber nicht stetig.

Definition3.3.:
Sei D $\subseteq \mathbb{R}$ und f: D $\to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion dann ist$||f|| := sup\{|f(x)| : x \in D\}$ die Supremumsnorm von f

Satz3.4.:
Sei D $\subseteq \mathbb{R}$ und $f_k : D \to \mathbb{R}$ für jedes k $\in \mathbb{N}_0$ eine beschränkte Funktion. Außerdem konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||f_k||$

(a) Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für jedes x $\in D$ absolut

(b) Sei $F_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$. Die Funktionsfolge $(F_n) = (f_0, f_0 + f_1, f_0 + f_1 + f_2, ...)$ konvergiert dann gleichmäßig gegen eine Funktion F: $D \to \mathbb{R}$

Beweis:
(a)
Sei x$\in$D.
Da $|f_k(x)| \leq ||f_k||$ konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ absolut nach dem Majorantenkriterium.

(b)
Definiere F: D $\to \mathbb{R}, x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||f_k||$ konvergiert existiert ein N $\in \mathbb{N}$ so dass $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} ||f_k|| = |\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||f_k|| - \sum\limits_{k=0}^{n} ||f_k||| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ Dann gilt für alle $n \geq N$ und alle x$\in D |F(x) - F_n(x)| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x) \check{} \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)| = |\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} ||f_k|| < \varepsilon$.
Qed

Satz3.5.:
Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für k $\in \mathbb{N}_0$ und sei$z_0 \in \mathbb{R}$. Die Potenzreihe $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k * (z - z_0)^k$ haben den Konvergenzradius $\varrho(P) > 0$. Dann ist (falls $\varrho(P) < \infty$)
P:$(z_0 - \varrho(P), z_0 + \varrho(P)) \to \mathbb{R}, z \longmapsto P(z)$ bzw (falls $\varrho(P) = \infty$) P: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \longmapsto P(z)$ stetig.

Beweis:
Sei r $\in (0, \varrho(P))$ Dann ist $f_k : [z_0 - r, z_0 + r] \to \mathbb{R}$, z $\longmapsto a_k(z - z_0)^k$ für jedes k $\in \mathbb{N}_0$ beschränkt und stetig.
Außerdem ist $||f_k|| = |a_k| * r^k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ konvergiert (siehe II.6.7 und II.6.8) Aus Satz 3.4 folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $(F_n) = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k)$ gegen eine Funktion F: $[z_0 - r, z_0 + r] \to \mathbb{R}$. Aus Satz 3.2 folgt die Stetigkeit von F. Qed

Folgerung:
$exp\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$
$sin\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$cos\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\to$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$

3.4 Umkehrfunktion

Definition4.1.:
Seien A und B Mengen. Eine Funktion f: A $\to$ B heißt:

- injektiv, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt
- surjektiv, wenn für alle $y \in B$ ein $x \in A$ gibt mit y = f(x)
- bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv

f besitzt dann eine Umkehrfunktion oder inverse $f^{-1} : B \to$ A
wobei $f^{-1}(y) = x$ genau dann wenn f(x) =y
Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto 4x$.
Angenommen $f(x_1) = f(x_2)$ also $4x_1 = 4x_2$ dann $x_1 = x_2$ f ist injektiv.
Sei y $\in \mathbb{R}$ dann ist $f(\frac{1}{4}y) = y$ f ist surjektiv.
Insgesamt ist f bijektiv.

Umkehrfunktion:
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{4}x$
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$
f(1) = f(-1) f nicht injektiv.
$f(x) \geq 0$ für alle x. Falls y $<$ 0 kann es kein x $\in \mathbb{R}$ geben mit f(x) = y. Also f nicht surjektiv.
f: $\mathbb{R} \to [0, \infty), x \longmapsto x^2$ nicht injektiv aber surjektiv zu $y \in [0, \infty)$ ist $f(\sqrt{y}) = y$
f: $[0, \infty) \to [0, \infty), x \to x^2$ injektiv und surjektiv
$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), x \longmapsto \sqrt{x}$

Definition4.2.:
Sei I ein Intervall und f: I $\to \mathbb{R}$
f heißt (streng) monoton wachsend auf I falls aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw $f(x_1) < f(x_2)$)

f heißt (streng) monoton fallend auf I falls aus $x_1, x_2 \in I$ mit $y_1 < y_2$ folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw $f(x_1) > f(x_2)$)

Beispiele:

1. $[0, \infty) \to \mathbb{R}, x \longmapsto x^m m \in \mathbb{N}$ ist streng monoton wachsend
2. exp $\mathbb{R} \to (0, \infty) x \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$
   sei $x_1 < x_2$

$exp(x_1) = exp(x_2 + x_1 - x_2)exp(x_2)exp(x_1 - x_2) < exp(x_2)$
also streng monoton wachsend

Satz4.3.:
Ist f: [a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, so ist f eine bijektive Abbildung von [a,b] auf [f(a),f(b)]. Die Umkehrfunktion $f^{-1}[f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend. Entsprechendes gilt für streng monoton fallende stetige Funktionen.

Beweis: siehe Literatur

Satz4.4.:
Sei k $\in \mathbb{N}; k \geq 2$
Dann ist $f : [0, \infty) \rightarrow [o, \infty), x \longmapsto x^k$ streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1}[0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \longmapsto$ kte wurzel aus x ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Beweis: siehe Literautur Forster

Satz + Definition4.5.:
exp $\mathbb{R} \rightarrow (0; \infty)$ $x \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion $ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt natürlicher Logarithmus und ist stetig und streng monoton wachsend. Darüber hinaus gilt für alle $x, y \in (0, \infty)$ $ln(x * y) = ln(x) + ln(y)$.

Beweis: siehe Literatur Forster

Bemerkung:
Falls k $\in \mathbb{N}$, dann ist mit Satz II.6.4.
$a^k = exp(ln(a)) * .... * exp(ln(a)) = exp(ln(a) + ... + ln(a) = exp(k * ln(a))$ und $exp(\frac{1}{k} * ln(a)) * ... * exp(\frac{1}{k} * ln(a)) = exp(k * \frac{1}{k} * ln(a)) = a$ das heißt $exp(\frac{1}{k} * ln(a)) = a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$

Definition4.6.:
Seien x $\in \mathbb{R}$ und a $\in (0, \infty)$.
Definiere $a^x = exp(x * ln(a))$.

Erinnerung:

1. $cos(x + y) = cos(x) * cos(y) - sin(x) * sin(y)$
2. $sin(x + y) = sin(x) * cos(y) + cos(x) * sin(y)$
3. $(sin(x))^2 * (cos(x))^2 = 1$
4. $cos(x) = cos(-x)$
5. $sin(-x) = sin(x)$
6. sin,cos sind stetig (satz3.5)

Da die Absolutbeträge der Summanden der Sinus und Kosinusreihe eine streng monoton fallende nullfolge bilden (für x >0):

Lemma4.7.:
Für x $\in (0,2]$ gelten: $1-\frac{x^2}{2} < cos(x) < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ und
$x-\frac{x^3}{6} < sin(x) < x$

Folgerung:
(i) sin(x) >0 in (0,2] (ii) cos streng monoton fallend in [0,2]
x,y $\in$ [0,2] und x > y
$cos(x)-cos(y) = ... = -2sin(\frac{1}{2}(x+y))*sin(\frac{1}{2}(x-y)) < 0$ (iii)$cos(0) = 1 cos(2) < 1-2+\frac{16}{24} < 0$
Nach ZWS besitzt cos eine Nullstelle (NS) z_0 in [0,2]. Wegen der strengen Monotonie ist dies die einzige NS in [0,2]

Defintion4.8.:
Sei z_0 die NS von cos in [0,2]. Die zahl $\pi := 2 * z_0$ heißt PI

Bemerkung:
(i) Da cos $(\frac{\pi}{2}) = 0$ folgt mit (3) (Erinnerung) , dass sin$(\frac{\pi}{2}) = 1$ oder -1 . Da sin(x) > 0 in (0,2] folgt sin$(\frac{\pi}{2}) = 1$
(ii) cos(π) = cos $(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})^{2\smile} sin(\frac{\pi}{2})^2 = 0-1 = -1$ und wegen (3) sin(π) = 0. usw.

Insgesamt erhält man mit (1), (2) ,(3)

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3*\pi}{2}$	$2*\pi$
cos	1	0	-1	0	1
sin	0	1	0	-1	0

(iii) Ebenfalls mit (1) und (2) folgen für alle x $\in \mathbb{R}$:
$sin(x+\frac{\pi}{2}) = cos(x)$
$cos(x+\frac{\pi}{2}) = -sin(x)$
$cos(x+2\pi) = cos(x)$
$sin(x+2\pi) = sin(x)$
(iv) cos ist streng monoton fallend auf $[\frac{\pi}{2},\pi]$ denn falls $x_1, x_2 \in [\frac{\pi}{2},\pi][\frac{\pi}{2},\pi], x_1 < x_2$ dann $cos(x_1+\frac{\pi}{2}) = -cos(\frac{\pi}{2}-x_1)... > cos(x_2+\frac{\pi}{2})$
Insgesamt ist cos streng monoton fallend auf [0,π].

Satz 4.9.:
Die Menge $\{\frac{\pi}{2}+k*\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ enthält genau die Nullstellen des Kosinus und $\{k*\pi k \in \mathbb{Z}\}$ genau die Nullstellen des Sinus.

Beweis:
siehe Königsberger

Definition4.10.:
tan: $\mathbb{R}\ \frac{\pi}{2}+k*\pi : k \in \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{sin(x)}{cos(x)}$ heist Tangens (und ist stetig nach Satz 1.2)

Bemerkung und Definition4.10.:
Die Funktionen cos $[0,\pi] \to [-1,1], sin[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1] tan(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ sind streng monoton und stetig Ihre Umkehrfunktionen.

4 Differenzialberechnung

4.1 Grundlagen

Definition1.1.:
Seien D $\subseteq \mathbb{R}$, h: D $\to \mathbb{R}$ und a $\in \mathbb{R}$, so dass es eine konvergente Folge $(x_n) \subseteq D\backslash\{a\}$ gibt mit $\lim_{x_n\to\infty} x_n = a$.
h besitzt den Grenzwert c für x $\to \infty$, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D\backslash\{a\}$ gilt:
$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = c.$
Notation: $\lim_{x\to\infty} h(x) = c$ oder h(x)$\to$ c für x $\to$ a.

Beispiel:
(1) h: [-1,1] $\to \mathbb{R}$, x $\longmapsto \{1, x = 0; 0$, sonst$\}$ $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0 \neq h(0)(x_n \neq 0$ für alle n $\in \mathbb{N}$, dann h(x_n) = 0 für alle n$\in \mathbb{N}$
(2) h: $(0,\infty) \to \mathbb{R}$, x $\longmapsto x * sin(\frac{1}{x})$. $0 \notin (0,\infty)$; h(x) = x*sin$(\frac{1}{x}) \to 0$, für x $\to$ 0 (vergl ÜA 7.4)
$\lim_{x\to 0} h(x) = 0$

Bemerkung: h ist genau dann stetig in a $\in$ D, wenn $\lim_{x\to a} h(x) = h(a)$.

Definition1.2.:
Sei D $\subseteq \mathbb{R}$ und sei f: D $\to \mathbb{R}$. f heißt in a $\in$ D differenzierbar, falls der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert.
In diesem Fall wird der Grenzwert mit f'(a) oder $\frac{df}{dx}$ a bezeichnet und heißt die Ableitung von f im Punkt a. f heißt differenzierbar in D, falls f in jedem Punkt a $\in$ D differenzierbar ist.

Bemerkung:

1. Äquvalent dazu kann man fordern, dass $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert. Für jede Folge (h_n) mit $h_n \neq 0$ für alle n $\in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ ist $a + h_n \in F$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$ existiert und stimmt mit f'(a) überein.
2. Das f in a differenzierbar ist, bedeutet, dass die Funktion $h_a : D \to \mathbb{R}; x \longmapsto \{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, x \neq a / f'(a), x = a\}$ stetig in a ist.
3. Für a $\neq x \in D$ heißt $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Differenzialquotient und gibt die Steigung der Sekante es Graphen von f durch (x,f(x)) und (a,f(a)) an. Falls f'(a) existiert, so ist f'(a) die Steigung der Tangente im Punkt (a,f(a))

Beispiele:

1. Sei c $\in \mathbb{R}$ beliebig. F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto c \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = 0 = f'(a)$ für jedes a $\in \mathbb{R}$

2. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto c * x$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{cx-ca}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{c*(x-a)}{x-a} = c = f'(a)$

3. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(2a+h)}{h} = 2a = f'(a)$

Satz1.3.:
Ist f: D $\to \mathbb{R}$ in a $\in$ D differenzierbar, so ist f in a auch stetig.

Beweis:
Sei $(x_n) \subseteq D\backslash\{a\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Dann ist $f(x_n) = \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} * (x_n-a) + f(a) \to f(a)$, n $\to \infty$. Qed

Bemerkung:
Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht.
Bsp.: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto |x|$ stetig in = 0.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}-0} = lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(-\frac{1}{n})-f(0)}{-\frac{1}{n}-0} = lim \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1$ existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht.

Somit ist f nicht in 0 differenzierbar.

Satz1.4.:
Sei f,g: D $\to \mathbb{R}$ in a $\in$ D differenzierbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch f+g: D $\to \mathbb{R}\lambda$
f: D $\to \mathbb{R}$, f*g: D $\to \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit:
(f+g)'(a) = f(a) +g'(a)
$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
(f*g)'(a) = f'(a) g(a) +f(a)g'(a) Produktregel
ist g(x) $\neq$ 0 für alle x $\in$ D so ist auch $\frac{f}{g}$ D $\to \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$
Quotientenregel

Beweis:
Produktregel:
$\frac{(f*g)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)f(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} * g(x) + \frac{f(a)*g(x)-g(a)}{x-a} \to f'(a)g(a)+f(a)g'(a), x \to a$

Quotientenregel
$\frac{1}{x-a} * \frac{f(x)}{g(x)} \breve{} \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{1}{g(x)g(a)} * \frac{f(x)-f(a)}{x-a} * \frac{g(x)\check{} f(x)g(x)-g(a)}{x-a}, x \to a$
Restliche aussagen klar

Beispiele:
1) $f_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} x \longmapsto x^n; n \in \mathbb{N}$ $f_n'(x) = n * x^{n-1}$ (Beweis mit vollst. Induktion)
2) $f_n \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{1}{x^n}; n \in \mathbb{N}$ $f_n'(x) = \frac{0 - n(x^{n-1)}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$

Satz1.5.:
Differentiation von Potenzreihen
Seien $z_0, a_k \in \mathbb{R}$ und sei P(z) = $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_o)^k$ eine Potentzreihe mit Konvergenzradius $\varrho(P) \neq 0$
Dann ist P auf dem offenen Konvergenzintervall $(z_0 - \varrho(P), u_0 + \varrho(P))$ bzw auf $\mathbb{R}$ (falls $\varrho(P) = \infty$) differenzierbar und $P'(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)k^{-1}p'(z)$ hat ebenfalls de Konvergenzradius $\varrho(P)$ (Potenzreihen dürfen gliedweise Differenziert werden)

Beweis: später

Bsp.:
1) exp(z) = $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$
$exp'(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k-1} z^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = exp(z)$
2) sin(z) = ... = cos(z)
3) cos(z)=.....= -sin(z)

Satz1.6.:
Sei I $\subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, f: I $\to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton mit Umkehrfunktion f^{-1}: J $\to$ J wobei J = f(I).
Ist f in x $\in$ I differenzierbar mit f'(x) $\neq$ 0, so istf^{-1} in y:= f(x) differenzierbar und $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.
Beweis:
Sei $(y_n) \subseteq I\backslash\{y\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.
Definiere: $x_n := f^{-1}(y_n)$.
Da f^{-1} stetig ist (Satz III.4.3), konvergiert (x_n) gegen $f^{-1}(y) = x$.
$$\frac{F^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{(x_n) - x}} \to \frac{1}{f'(x)}, n \to \infty.$$

Beispiele:

1. ln: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von exp $\mathbb{R} \to (0, \infty)$. Somit für $y \in (0, \infty)$: ln'(y) $= \frac{1}{exp(ln(y))} = \frac{1}{exp(ln(y))} = \frac{1}{y}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}$ n* $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} ln(1 + \frac{1}{n})\check{} \frac{ln(1)}{1 + \frac{1}{n}} - 1 = ln'1 = 1$

   $e = exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} exp(n * ln(1 + \frac{1}{n})) = \lim\limits_{n\to\infty} exp(ln(1 + \frac{1}{n})^n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n})^n$
3. arcsin: (-1,1) $\to (\frac{-PI}{2}, \frac{PI}{2})$
   $arcsin'(y) = \frac{1}{sin'(arcsin(y))} = \frac{1}{cos(arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (sin(arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

4. arccos: (-1,1) $\rightarrow$(0,PI) arccos'(y)=....= - $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

5. arctan: $\mathbb{R} \rightarrow (\dfrac{-PI}{2}, \dfrac{PI}{2})$
   arctan'(y) =....= $\dfrac{1}{1-y^2}$

Satz 1.7.:
Kettenregel

Seien D,E $\subseteq \mathbb{R}$ und f: D $\rightarrow \mathbb{R}$ und g: E $\rightarrow \mathbb{R}$ funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Falls f in a $\in$ D differenzierbar ist und g in b= f(a), dann ist $g^\circ f D \rightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit $(g^\circ f) = g'(f(a)) * f'(a)$

Beweis:
h: E $\rightarrow \mathbb{R}; y \longmapsto \{\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}, y \neq b; g'(b), y = b\}$
Da h in b stetig ist, folgt $\lim\limits_{y \to b} h(y) = h(b) = g'(b)$.
Falls x $\neq$ a , so ist $\dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = h(f(x) * f(x) - \dfrac{f(a)}{x-a} \rightarrow g'(f(a)) * f'(a)$

Beispiel:
r $\in \mathbb{R}$ f:$(0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto r * ln(x)$ g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto exp(x)$
$(g^\circ f)(x) = exp(r * ln(x)) = x^r$
$(g^\circ f)'(x) = g'(f(x)) * f'(x) = exp(f(x)) * r * \dfrac{1}{x} = exp(r * ln(x)) * r * \dfrac{1}{x} = r * x^{r-1}$

Bemerkung1.8.:
Sei D $\subseteq \mathbb{R}$. F: D $\rightarrow \mathbb{R}$ ist in a $\in$ D von rechts (bzw. von links) differenzierbar, falls ein c $\in \mathbb{R}$ existiert so dass jede Folge $(x_n) \subseteq D\backslash\{a\}$ mit $x_n > a$ (bzw. $x_n < a$) für alle n $\in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt:
$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = c$
Notation c = $\lim\limits_{x \downarrow a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a)$
bzw. $c = \lim\limits_{x \uparrow a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_-(a)$
. f ist genau dann in a differenzierbar, wenn f von rechts und von links in a differenzierbar ist und$F'_+(a) = f'_-(a)$ gilt.

Beispiel:
f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto |x|$
$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$
f nicht differenzierbar in 0

4.2 Der Mittelwertsatz und Extrema

Definition2.1.:
Seien D $\subseteq \mathbb{R}$ und f: D $\rightarrow \mathbb{R}$. F hat in $x_0 \in$D
ein globales Maximum (Minimum), wenn $f(x) \leq f(x_0)(f(x) \geq f(x_0)$ für alle x $\in$D
ein lokales Maximum (Minimum), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt so dass $f(x) \leq f(x_0)(f(x) \geq f(x_0))$ für alle x $\in$ D mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

Satz2.2.:
Seien (a,b) $\in \mathbb{R}$, a $<$ b und f:$(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$. Falls f in x_0 ein lokales extremum besitzt und x_0 differenzierbar ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis:
Für das Maximum:
Angenommen, es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x $\in$ (a,b) mit $|x - x_0| < \varepsilon$.
Dann ist $f'(x_0) = \underset{\leq 0}{\lim\limits_{x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underset{\geq 0}{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
somit $f'(x_0) = 0$

Bemerkung:
1) Die Umkehrung der Aussage gilt im Allgemeinen nicht.
Beispiel: $f(x) = x^3$
f'(x) = $3x^2$ f'(0) = 0 da keine extrema (in 0 sattelpunkt)
2) Kandidaten für Extremstellen einer Fkt: f:[a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ sind:
1. $\{x \in$(a,b) f'(x) =0$\}$
2. Randpunkte a und b
3. $\{x \in (a,b)$ f nicht differenzierbar in x$\}$

Satz2.3.:
Satz von Rolle
Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a,b) differenzierbar und f(a) = f(b). Dann exsitiert ein $\xi \in (a, b)$ mit f'(ξ) = 0:

Beweis:

1. Fall: f konstant (nichts zu zeigen)
2. Fall: f nicht konstant.
   f besitzt auf [a,b] ein Maximum und ein Minimum (Satz III.2.3.). Da f nicht konstant ist, stimmt mindestens einer der Werte nicht mit f(a) = f(b) überein. f besitzt also ein Extremum in einem Punkt $\xi \in (a, b)$. Nach Satz 2.2 ist f'(ξ) = 0 qed

Satz2.4.:
Mittelwertsatz (MWS)
Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar.
Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so das $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

Beweis:
Definiere $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Eigenschaften von F:

- stetig in [a,b]
- differenzierbar in [a,b]
- F(a) = f(a) = F(b)

Nach Satz 2.3 existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit F'(ξ)= 0, also $0 = F(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. qed

Korollar2.5.:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar mit f'(x) = 0 für alle $x \in (a, b)$ Dann ist f konstant.

Beweis:
Für alle $x \in (a, b]$ gilt nach dem MWS:
$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$, also f(x) = f(a). qed

Satz2.6.:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar.
Ist für alle $x \in (a, b)$:

- $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$), dann ist f in (a.b) monoton wachsend (bzw fallend)
- f'(x) > 0 (bzw. f'(x) < 0), dann ist f in [a,b] streng monoton wachsend (bzw. fallend)

Beweis:
Sei f'(x) > 0 für alle $x \in (a, b)$.
Angenommen f ist nicht streng monoton wachsend. Dann existieren $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, so dass $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Nach dem MWS existiert ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$ Widerspruch zu f'(ξ) = 0
Die anderen Fälle zeigt man entsprechend. Qed

Satz2.7.:
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und in einem $x_0 \in (a, b)$ zweimal differenzierbar (d.h.: $f' : (a, b) \to \mathbb{R}, x \longmapsto f'(x)$ ist in x_0 ebenfalls differenzierbar) und $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$) Dann besitzt f in x_0 ein lokalses Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

Beweis:
Sei $f''(x_0) > 0$.
Da $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$ für alle x in $\{x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon\}$.
Da $f'(x_0) = 0$, folgt daraus:
f'(x) < 0 ,falls $x_0 - \varepsilon < x < x_0$
f'(x) > 0,falls $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

Mit Satz2.6. Folgt das f in $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng monoton fallend und in $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton wachsend ist.
Somit hat f in x_0 ein lokales Minimum.
Entsprechend zeigt man die Aussage für das Maximum. Qed

Bemerkung:

1. Das Extremum ist isoliert, dass heißt es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$) für alle x mit $0 < |x - x_0| < \varepsilon$.

2. Falls f' in x_0 das Vorzeichen von $+$ auf $-$ wechselt (bzw. von $-$ auf $+$), dann liegt ein lokales Maximum (bzw. Minimum) vor.

Satz2.8.:
Verallgemeinerter MWS
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in (a,b) differenzierbar und $g'(x) \neq 0$. für alle $x \in (a, b)$.
Dann ist $g(b) \neq g(a)$, und es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Beweis:
Angenommen g(b) = g(a). Dann existiert nach Satz2.3. ein $\xi \in (a, b)$ mit g'(ξ) = 0. Widerspruch zu $g'(x) \neq 0$ für alle x $\in (a, b)$.
Definiere F(x) := $f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$.
Dann ist F(b) = f(a) = F(a), und nach 2.3. existiert ein $\xi \in$ (a,b) mit F'(ξ) = 0.
$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} + g'(\xi)$. Qed

Satz2.9.:
Regeln von de l'Hospital
(a) Seien I ein Intervall, $x_0 \in$ I und $f, g : I\ \{x_0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle x $\in$ I $\backslash\{x_0\}$.
Falls:
1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = lim(x \to x_0)g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$
2) $\lim x \to x_0 \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(b) falls f,g auf einem Intervall $[a, \infty)$ differenzierbar sind und falls
1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0 oder \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$
2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert dann existiert auch $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Beweis:
Fall 1: $\lim\limits_{x \to x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
Setze f,g auf I fort, durch $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
f,g: $I \to \mathbb{R}$ sind stetig in I und I$\backslash\{x_0\}$ differenzierbar.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da L := $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|L - \frac{f(x)}{g(x)}| < \varepsilon$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$. (*)
Für x $\in$ I mit $0 < |x - x_0| < \delta$ ist dann nach Satz2.8 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
(**) für ein ξ zwischen x_0 und x, also $0 < |\xi - x_0| < |x - x_0| < \delta$.
Damit folgt:
$|\frac{f(x)}{g(x)} - L|$ =(nach (**)) $|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L|$ <(nach (*))ε.
Rest geht ähnlich. qed

Beispiel:

1. $f(x) = x, g(x) = exp(x)$
   $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
   $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{exp(x)} = 0$
   Somit $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{exp(x)} = 0$
   Induktiv folgt $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{exp(x)} = 0$ für jedes n $\in \mathbb{N}$

2. f(x) = ln (x), g(x) = x^n
   f'(x) = $\frac{1}{x}$, g'(x) = $n * x^{n-1}$
   $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n * x^n} = 0$
   Somit $\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0$ für alle n$\in \mathbb{N}$.

3. f(x) = sin(x), g(x) = x
   $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{1} = 1.$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} \neq \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$ (vor ungleich das geht gegen -4)

4.3 Taylorreihen

Notation:
Sei I ein Intervall und f: I$\to \mathbb{R}$ (n+1)-mal differenzierbar.
Für $0 \leq k \leq n$ definiert man $f^{(0)} := f;\ f^{(k+1)} := (f^{(k)})'$

Definition3.1.:
Sei I ein Intervall und f:I$\to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und $x_0 \in$ I.
Dann heißt T_{n,f,x_0} mit $T_{n,f,x_0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} * (x - x_0)^k$, x$\in$I, Taylorpolynom n-ten Grades von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Bemerkung:
Für k = 0,1,....,n gilt $f^{(k)}(x_0) = T^{(k)}_{n,f,x_0}(x_0)$.

Satz3.2.:
Satz von Taylor
Sei I ein Intervall und f:I$\to \mathbb{R}$ (n+1)-mal differenzierbar. Falls x_0,x $\in$ I, dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x derart, dass:
f(x) = $T_{n,f,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} * (x - x_0)^{n+1}$. (zweiter summand = $R_n(x)$) (Lagransches Restgleid)

Beweis:
Definiere für t $\in$ I:
F(t) := $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(x - t)^k$, G(t) = $(x - t)^{n+1}$.
Dann haben wir:

- F'(t) = ... = $\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$
- G'(t) = $-(n+1)*(x-t)^n$
- F(x) = $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(x-x)^k = \frac{1}{0!}f^{(0)}(x)*1 = f(x)$
- G(x) = 0
- F(x_0) = $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$
- G(x_0) = $(x-x_0)^{n+1}$

Nach Satz 2.8 mit a =x_0 und b= x falls $x_0 < x$ (oder a=x und b = x_0 falls x<x_0) existiert ein $\xi \in$ (a,b), so dass:
$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$
$\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{0-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)*(x-\xi)^n}{-(n+1)*(n-\xi)^n}$
Somit $f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$. qed

Bemerkung:

1. Das Taylorpolynom ist eine lokale Approximation an f mit dem Fehler R_n, so dass $f^{(k)}(x_0) = T_{n,f,x_0}(x_0)$ für k =0,...,n.
2. Ist $f^{(n+1)}$ auf I durch eine Konstante M beschränkt, so gilt $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$.
3. Für n = 0 erhält man den Mittelwertsatz.

Beispiel:

1. $T_{n,exp,0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k$
2. f: $(-1,\infty) \to \mathbb{R}, x \longmapsto ln(1+x)$
   Für x > -1 ist:
   $f^{(0)}(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$
   $f^{(2)}(x) = -1*(1+x)^{-2}$
   $f^{(3)}(x) = 2*(1+x)^{-3}$
   bzw mit vollständiger Induktion zeigt man $f^{(k)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, k \in \mathbb{N}$
   Dann ist $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$
   $ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}*(k-1)!*x^k + R_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(-1)^{k-1}x^k + \frac{(-1)^n}{n+1}*\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} =$
   $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}*x^3 - .... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_n(x)$

Definition3.3.:
Sei I ein Intervall. Ist f: I $\to$ $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und x_0 $\in$I so heißt T_{f,x_0} mit $T_{f,x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} * f^{(k)}(x_0) * (x-x_0)^k$ Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Bemerkung:
Der Konvergenzradius von T_{f,x_0} ist nicht unbedingt $>$0.

Satz3.4.:
Ist I ein Intervall, $x_0 \in I$ und f: I $\to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für alle x$\in$I, so ist $f(x) = T_{f,x_0}(x)$.

Bemerkung:

1. Ist eine Funktion über eine Potenzreihe definiert so stimmt ihre Taylorreihe mit der ursprünglichen Funktion überein. (Bsp.: exp,sin,cos)

2. Für f:[0,1] $\to \mathbb{R}, x \longmapsto ln(1+x)$ gilt:
   $|R_n(x)| = |\frac{(-1)^n}{n+1} * \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}| \leq \frac{1}{n+1} \to 0, n \to \infty$
   Somit ln(1+x) $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} * (-1)^{k-1} * x^k,\ x \in [0,1]$.
   Insbesondere ist ln(2) $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^{k-1}$ (alternierende Harmonische Reihe)

3. Achtung: T_{f,x_0} muss nicht auf dem ganzen Konvergenzintervall mit f übereinstimmen!
   Beispiel: f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \{exp(-\frac{1}{x}, x > 0; 0, x \leq 0\}$
   f ist beliebig oft differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n$\in$ $\mathbb{N}_0$, siehe Königsberger §9.6.
   Somit $T_{f,0} = 0$ für alle x$\in$ $\mathbb{R}$, also $T_{f,0} \neq f$.

4.4 Das Newtonverfahren

Gegeben: Funktion f: D$\to$ $\mathbb{R}$
Gesucht: Nullstelle von f, also p$\in$D mit f(p)=0
Newtonverfahren: Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstellen von f.
Idee: Startwert x_0 gegeben. Tangente an Graph von f in $(x_0, f(x_0))$: f(x_0)+f'(x_0)*(x-x_0)= $T_{1,f,x_0}(x)$

Berechne Nullstelle x_1 von T_{1,f,x_0}: $f(x_1) + f'(x_0) * (x - x_0) = 0$(null setzen)
Umformung ergibt $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, f'(x_0) \neq 0$
Die Tangente T_{1,f,x_0} an den Graph von f in $(x_1, f(x_1))$ schneidet die x-Achse in $x_2 = ... = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ bzw. allgemein schneidet T_{1,f,x_0} die x-Achse in $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N}_0$

Problem:

1. x_{n+1} ist nicht notwendig im Definitionsbereich von f.

2. Newtonverfahren konvergiert nicht.

Satz4.1.:
Sei f: [a,b]$\to$ $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, wobei:

- f(a) <0, f(b)>0
- f'(x)>0 für alle x $\in$(a,b)
- f"(x) > 0 für alle x$\in$(a,b)

Dann gilt:

i Es genau ein p$\in$(a,b) mit f(p)=0.

ii Ist x_0 $\in$[a,b] mit f(x_0)$\geq$0, so ist für jedes n$\in \mathbb{N}_0$
$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \in [a,b]$

iii (x_n) ist monoton fallend

iv $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$

Entsprechende Aussagen gelten für die Fälle:
siehe foto

Graphen.jpg

Abbildung 1: Graphen

Beweis:

i Nach ZWS existiert mindestens eine Nullstelle p$\in$(a,b). Da f streng monoton wachsend nach Satz2.6., existiert maximal eine Nullstelle

ii,iii Definiere $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}, x \in [a,b]$
Für x$\in$ (p,b] ist $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)*f'(x) - f(x)*f''(x)}{f'(x)*f'(x)} = \dfrac{f(x)*f''(x)}{(f'(x))^2} > 0$, also φ streng monoton wachsend in [p,b] (nach Satz2.6.).
Außerdem ist $\varphi(p) = p$
Insgesamt also $p = \varphi(p) \leq \varphi(x)$ für alle x$\in$[p,b]. (*)
Des weiteren ist für $p \leq x \leq b$ $x - \varphi(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)} \geq 0$ also $\varphi(x) \leq x$.(**)
(*) und (**) ergeben $p \leq \varphi \leq x$ für alle x$\in$[p,b]. Damit ist $x_{n+1} = \varphi(x_n) \in [p,b]$, falls $x_n \in$ [p,b].n

iv Nach Satz II.1.10 existiert x* := $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
$x* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \varphi(x*) = x * - \dfrac{f(x*)}{f'(x)}$. Somit f(x*) = 0. Da die Nullstelle eindeutig ist nach (i), folgt x* = p. qed

Beispiel:
c $>$0, c $\neq$0, b = max $\{1, c\}$
f(x= $x^2 - c$, x$\in$[a,b]
f(b) = $b^2 - c$ $>$0
f(0) = -c $<$ 0
f'(x) = 2x $>$ 0, x$\in$(0,b)
f''(x) = 2 $>$0, x$\in$(0,b)

<u>Newton-Iterationsschema</u>:
$x_0 := b$
$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^2 - x}{2x_n} = x_n - \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{c}{2x_n} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{c}{x_n}$
Konvergenz nach Satz 4.1.

4.5 Partielle Ableitungen

Definition5.1.:

1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} * \mathbb{R} * .... * \mathbb{R}$
2. Sei U $\subseteq \mathbb{R}^n$ und f: U$\to$ $\mathbb{R}$ eine Funktion.
   f heißt im Punkt a := $(a_1, ..., a_n) \in U$ partiell differenzierbar nach der i-ten Variablen, falls $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a - i) - f(a_1, ..., a_n)}{h}$
   existiert. Notation für den Grenzwert: $D_i f(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_b}(a), ...$
3. f heißt partiell differenzierbar, falls $D_i f(a)$ für alle a$\in$U und i=1,...,n existiert.

Bemerkung:

1. Die partielle Ableitung bezüglich der i-ten Variablen im Punkt a = $(a_i, ..., a_n)$ kann man als gewöhnliche Ableitung der Funktion
   $f_i : z \longmapsto f_i(z) = (a_1, ..., a_{i-1}, z, a_{i+1}, ..., a_n)$ erfassen.
2. Partielle Ableitungen spielen z.B. bei Extremwertproblemen von Funktionen mit mehreren Variablen eine Rolle

Beispiel:

1. f: $\mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + x_2^2$
   a$= (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$
   $D_1 f(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(a_1 + h)^2 + a_2^2 - (a_1^2 + a_2^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a_1^2 + 2a_1 * h + h^2 + a_2^2}{h}$
   $\lim\limits_{h \to 0} /2a_1 + h) = 2a_1$
   $D_2 f(a) = 2a_2$

2. f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1.x_2) \longmapsto x_1^2 * sin(x_1 x_2)$.
   a$= (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$
   $D_1 f(a) = 2a_1 * sin(a_1 a_2) + a_1^2 * cos(a_1 a_2) * a_2$
   $D_2 f(a) = a_1^2 cos(a_1 a_2) * a_1$

5 Integration

Vorgehen:

1. Definiere zunächst das Ïntegralfür Treppenfunktion"φ mit Hilfe des Flächeninhalts

2. Konvergiert eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen gleichmäßig gegen f, dann $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x)dx$.

5.1 Regelfunktionen

Definition1.1.:
Eine Zerlegung Z des Intervalls [a,b] sind endlich viele Punkte $x_0, ..., x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
Eine Zerlegung Z': $a = x'_0 < x'_1 < .... < x'_m = b$ heißt Verfeinerung von Z, wenn $\{x'_0, x'_1, ..., x'_m\} \geq \{x_0, x_1, ..., x_n\}$

Beobachtung:
Zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 von [a,b] besitzen stets eine gemeinsame Verfeinerung.

Definition1.2.:

1. $\varphi[a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion zur Zerlegung Z: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ von [a,b], wenn es Zahlen $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(x) = c_k$ für alle x$\in (X_{k-1}, X_k), k = 1, ..., n$.

2. T[a,b] $= \{\varphi[a, b] \to \mathbb{R}, \varphi$ Treppenfunktion$\}$

Bemerkung:

1. Eine Treppenfunktion zu einer Zerlegung Z von [a,b] ist auch Treppenfunktion zu jeder Verfeinerung dieser Zerlegung.

2. f,g $\in$ T[a,b]. Dann ist f+g $\in$ T[a,b]. $\lambda \in \mathbb{R}$ dann ist $\lambda f \in T[a, b]$.

Definition1.3.:

1. Eine beschränkte Funktion f: [a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, wenn es eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen $\varphi_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert also $\lim\limits_{n\to\infty} ||\varphi_n - f||_\infty = 0$ (sup $\{|\varphi_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\}$
2. R[a,b] = $\{f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ f Regelfunktion $\}$

Erinnerung:
Falls f:[a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist $||f||_\infty$= sup $\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$.
Es gilt:

1. $||f||_\infty \geq 0$, $||f||_\infty = 0$ genau dann, wenn f(x) = 0 für alle x$\in$ [a,b]
2. $||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $||f + g||_\infty \leq ||f||\infty + ||g||_\infty$, falls g: [a,b]$\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

Satz1.4.:
Sind f,g $\in$ R[a,b] (Regelfunktionen) und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch:

i f+g

ii λ f

iii |f|

iv f*g

in R[a,b].
Beweis:

i Seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||\varphi_n f||_\infty = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} ||\psi_n - g||_\infty = 0$. Da $\varphi_n + \psi_n \in$ T[a,b] für alle n$\in \mathbb{N}$ und $||f + g - (\varphi_n + \psi_n)||_\infty \leq ||f + \varphi_n||_\infty + ||g + \psi_n||_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
Somit f+g $\in$ R[a.b]

ii,iii,iv ähnlich qed

Satz1.5.:
Konvergiert eine Folge $(f_n) \subseteq$ R[a,b] (d.h. $f_n \in$ R[a,b] für alle n$\in \mathbb{N}$) gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion f: [a,b]$\rightarrow \mathbb{R}$, dann ist auch f$\in$ R[a,b].

Beweis:
Zu jedem n$\in \mathbb{N}$ gibt es ein $\varphi_n \in$ T[a,b] mit $||f_n - \varphi_n||_\infty < \frac{1}{n}$.
Wegen $||f - \varphi_n||_\infty \leq ||f - f_n||_\infty + ||f_n - \varphi_n||_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ist f$\in$ R[a,b]. qed

Satz1.6.:
Jede stetige Funktion f: [a,b]$\rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.

Beweis:
Sei m$\in \mathbb{N}$. Da f nach SatzIII.1.6 gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dann für all e s,t$\in$ [a,b] mit $|s - t| < \delta$ gilt: $|f(s) - f(t)| < \frac{1}{m}$.
Sei n so gewählt, dass h:= $\frac{b-a}{h} < \delta$ ist und definiere $x_k := a + hk$, k=0,...,n und $\varphi_m : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_m(x) := \{f(x_k), x_k \leq x < x_{k+1};\ f(b), x = x_n\}$

Es gilt nun $\varphi_m \in$ T[a,b] und $||f - \varphi_m||_\infty < \frac{1}{m}$.

Satz1.7.:
Jede monotone Funktion f:[a,b]$\to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.

Beweis:

1. Fall: f monoton wachsend.
   h:= $\frac{f(b) - f(a)}{n}$; $y_k := f(a) + k * h$
   $x_1 = a$; $x_k :=$ sup $\{x \in [a, b] : f(x \leq y_k\}$, k=1,...,n
   Es gilt a $= x_0 \leq x_1 \leq .... \leq x_n = b$. Für die Treppenfunktion $\varphi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_n(x) = \{y_k, x \in [x_{k-1}, x_k]; y_0, x = a\}$ (wobei $(x_{k-1}, x_k = \varnothing$, falls $x_{k-1} = x_k)$ gilt nun $||d - \varphi_n||_\infty \leq \frac{f(b) - f(a)}{n} \to 0, n \to \infty$
   qed.

Bemerkung:
Man kann zeigen, dass f$\in$ R[a,b] genau dann, wenn:

i für alle $x_0 \in [a, b)$ existiert $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} f(x)$ und

ii für alle $x_0 \in (a, b]$ existiert $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < 0}} f(x)$.

5.2 Das Integral von Regelfunktionen

Definition2.1.:
Sei φ[a,b] $\to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion zur Zerlegung Z: a:$= x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ und seien $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(x) = c_k, x \in (x_{k-1}, x_k)$.
Dann definiere:
I(z,φ) $= \sum\limits_{k=1}^{n} C_k * (x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}) * (x : k - x_{k-1})$ (Bruch = Mittelpunkt des Intervalls)

Bemerkung: Ist φ eine Treppenfunktion zu einer weiteren Zerlegung Z' von [a,b] so ist I(Z,φ) = I(Z',φ). Deswegen ist die Zerlegung Z in der Notation überflüssig.
Neue Notation $\int\limits_a^b \varphi(x)dx := I(Z, \varphi)$

Satz2.2.:
Sind $\varphi, \psi \in$ T[a,b] und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

i $\int\limits_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx + \int\limits_a^b \psi(x)dx$

ii $\int\limits_a^b (\lambda\varphi)(x)dx = \lambda * \int\limits_a^b \varphi(x)dx$

iii Ist $\varphi(x) \geq \psi(x)$ für alle x$\in$ [a,b], so ist $\int\limits_a^b \varphi(x)dx \geq \int\limits_a^b$
$psi(x)dx$

iv $|\int\limits_a^b \varphi(x)dx| \leq \int\limits_a^b |\varphi(x)|dx \leq (b-a)||\varphi||_\infty$

Beweis:
von iv $|\int\limits_a^b \varphi(x)dx| = \sum\limits_{k=1}^n \varphi(\frac{x_k + x_{k-1}}{2} * (x_k - x_{k-1}| \leq \sum\limits_{k=1}^n |\varphi(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}||x_k - x_{k-1}| \leq \sum\limits_{k=1}^n ||\varphi||_\infty (x_k - x_{k-1} = (b-a)||\varphi||_\infty$. qed.

Satz2.3.:
Seien $\varphi_n, \psi_n \in$ T[a,b] und f $\in$ R[a,b] mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||\varphi_n - f||_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} ||\psi_n - f||_\infty = 0$.

Dann existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \psi_n(x)dx$ und stimmen überein.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert N$\in \mathbb{N}$ so dass $||\varphi_n - f||_{\infty]} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für alle n $\geq$ N. Für n,m $\geq$ NN ist dann:
$|\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx - \int\limits_a^b \varphi_m(x)dx| = |\int\limits_a^b (\varphi_n - \varphi_M)(x)dx| \leq (b-a)||\varphi_n - \varphi_m||_\infty \leq (b-a)\{||\varphi_n - f||_\infty + ||\varphi_m - f||_\infty < \varepsilon$.
Daher bildet $(\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen $C_\varphi \in \mathbb{R}$ (Satz II.3.4).

Entsprechend zeigt man, dass die Folge $(\int\limits_a^b \psi_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $C_\psi \in \mathbb{R}$ konvergiert. Da

$|C_\varphi - C_\psi| \geq |C_\varphi - \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx| + |\int\limits_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))dx| + |\int\limits_a^b \psi_n(x)dx - C_\psi|$ gilt folgt $C_\varphi = C_\psi$.
qed

Bemerkung:
Der Grenzwert hängt also nicht von der gewählten Folge von Treppenfunktionen ab. Deshalb ist folgende Definition möglich:

Definition2.4.:
Das Integral von f $\in R[a,b]$ über [a,b] ist $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx$, wobei (φ_n) eine Folge m T[a,b] ist mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||\varphi_n - f||_\infty = 0$.

Kurznotation $\int\limits_a^b f$.

Beispiel:
f: [0,1] $\to \mathbb{R}, x \longmapsto x$
f $\in$ R[a,b], da f stetig. f kann durch die Treppenfunktionen aus dem Beweis von Satz1.6. approximiert werden. Sei m $\in \mathbb{N}$. Falss $\varepsilon = \frac{1}{m} = \delta$, dann ist für alle x,y $\in$ [0,1] mit $|x-y| < \delta$ auch $|f(x) - f(y)| = |x-y| < \delta = \varepsilon$. h:$= \frac{1}{2m} < \delta$, $x_k := h * k, k = 0, ..., 2m$
$\varphi_m : [0,1] \to \mathbb{R}, \varphi_m(x)\{x_k, x_k \leq x < x_{k+1}, k = 0, ..., 2m-1;\ 1, x = 1.\}$ Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - \varphi_m||_\infty = 0$ (nach Beweis von Satz1.6.).
$\int\limits_0^1 \varphi_m(xx)dx = \sum\limits_{k=1}^{2m} x_{k-1}(x_k - x_{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2m} (\frac{1}{2m})^2 * (k-1) = \frac{1}{(2m)^2} \sum\limits_{k=1}^{2m} (k-1) = \frac{1}{(2m)^2} * \frac{2m*(2m-1)}{2} = \frac{2m-1}{4m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4m}$
$\int\limits_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_0^1 \varphi_m(x)dx = \frac{1}{2}$

Satz2.5.:
Sind f,g $\in$ R[a,b] und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gelten:

i $\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$

ii $\int\limits_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx$

iii Ist $f(x) \geq g(x)$ für alle x$\in$ [a,b], so ist $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$

iv $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)||f||_\infty$

Beweis:
Folgt aus Satz2.2. und den Eigenschaften des Limes. qed

Satz2.6.:
Seien $f_n, f \in$ R[a,b], n$\in \mathbb{N}$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$
Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f8x)dx.(= \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx)$ (d.h. lim und $\int$ können in diesem Fall vertauscht werden.)

Beweis:
$|\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b f_n(x)dx| \leq (b-a)||f_n - f||_\infty \to =, n \to \infty$. qed

Bemerkung:
Der Satz gilt im Allgemeinen nicht bei punktweiser Konvergenz.
Beispiel: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x)\{4n^2x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2n};\ 4n - 4n^2x, \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n};\ 0, \frac{1}{n} < x \leq 1\}$
f_n konvergiert punktweise gegen die Funktion f: [0,1] $\to \mathbb{R}, x \longmapsto 0$
$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = ... = \frac{1}{2} * \frac{1}{n} * 2n = 1 \neq \int\limits_a^b f(x)dx = 0.$

Satz2.7.:
Ist f $\in$ R[a,b] und a<c<b, so ist $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Beweis:

Bemerkung:
Ist f $\in$ R[a,b] und a $\leq \beta < \alpha \leq b$, so setzt man $\int\limits_a^\beta f(x)dx = -\int\limits_\beta^\alpha f(x)dx,\ \int\limits_\alpha^\alpha f(x)dx = 0.$

5.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition3.1.:
Eine differenzierbare Funktion F: [a,b]$\rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion der Funktion f: [a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$, falls F' $=$ f ist.
Bsp.: F[a,b] $\rightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{n}x^n, n \in \mathbb{N}$ ist eine Stammfunktion von f:[a,b] $\rightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^{n-1}$. Ebenso ist $x \longmapsto \frac{1}{n}x^n + c, c \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f.

Satz3.2.:
Hauptsatz Der Differential- und Integralrechnung
Ist F.[a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Regelfunktion f:[a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$, so ist $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.
Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei φ eine Treppenfunktion zur Zerlegung Z: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ mit $||f - \varphi||_\infty < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Nach MWS existieren $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, k $=$ 1,..,n so dass F(b)-F(a) $=$ $\sum\limits_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}F'(\xi_k) = \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\xi_k)$.
Außerdem Gilt $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\varphi(\xi_k)$ und somit $|\int\limits_a^b \varphi(x)dx - (F(b) - F(a))|| \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})(\varphi(\xi_k) - f(\xi_k))| \leq \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})|\varphi(\xi_k) - f(\xi_k)| \leq \sum\limits_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})||\varphi - f||_\infty = ||\varphi - f||_\infty(b - a) < \frac{\varepsilon}{b-a} * (b-a) = \varepsilon$
Andererseits ist $|\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b \varphi(x)dx| \leq ||f - \varphi||_\infty < (b-a) * \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$
Zusammen ergibt sich: $|\int\limits_a^b f(x)dx - (F(b) - F(a))| \leq |\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b \varphi(x)dx| + |\int\limits_a^b \varphi(x)dx - (F(b) - F(a))| < 2\varepsilon$.
Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt, dass $\int\limits_a^b f(x)dx - (F(b) - F(a)) = 0$. qed

Beispiele:

- $\int\limits_a^b x^n dx = [\frac{1}{n+1} * x^{n+1}]_a^b = \frac{1}{n+1}b^{n+1} - \frac{1}{n+1}a^{n+1}$ Insbesondere für a=0, b=1, n=1: =.....= $\frac{1}{2}$

- f:[1,2] $\to \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x} \int\limits_1^2 = ... = ln(2)$

Satz3.3.:
Seien f∈ R[a,b] und F: [a,b] $\to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int\limits_a^x f(t)dt.$
Dann gelten:

i F ist stetig

ii Ist f stetig, dann ist F differenzierbar und es gilt F'=f, d.h. F ist eine Stammfunktion von f.

iii Ist F differenzierbar, so ist f stetig

Beweis:

i $|F(x_2) - F(x_1)| = |\int\limits_a^{x_1} f(t)d(t) - \int\limits_a^{x_2} f(t)dt| = |\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt| \leq |x_2 - x_1| * ||f||_\infty.$
Somit F Lipschitz-stetig und nach ÜA8.1 stetig.

ii Sei $\varepsilon > 0$ und δ so, dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, falls $|x - x'| < \delta$. (Stetigkeit von f)
$|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| = |\frac{1}{x - x_0} * \int\limits_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^x f(x_0)d(t)| = |\frac{1}{x - x_0} * \int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \int\limits_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \leq \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \delta$.
Somit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$

iii siehe z.b. Barner-Flohr §10

Bemerkung:

1. Sind F und G Stammfunktionen von f: [a,b] $\to \mathbb{R}$, so ist F = G+c für ein c∈ $\mathbb{R}$ ((F-G)' = f-f = 0 $\Rightarrow$ F-G konstant.) Umgekehrt ist mit F auch F+c für jedes c∈ $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.

2. Besitzt f∈ R[a,b] eine Stammfunktion $\tilde{F}$, so usr auch F: n[a,n]$\to \mathbb{R}, x \longmapsto \int\limits_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion, dann F(x) = $\int\limits_a^x f(t)dt = \tilde{F}(x) - \tilde{F}(a)$ Der Satz zeigt: f∈R[a,b] besitzt genau dann eine Stammfunktion, wenn f stetig ist. D.h. Satz3.2 gilt genau für die Stetigen Regelfunktionen.

Satz3.4.:
partielle Integration
Seien f,g: [a,b]$\to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass f' und g' stetig sind.
Dann ist

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beweis:
Nach der Produktregel (Satz IV.1.4) ist (f*g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).
Da (f*g)' stetig ist, folgt mit Satz3.2. und 3.3 nach Integration beider Seiten $\int\limits_a^b (f*g)'(x)dx = \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx + \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$. qed

Satz3.5.:
Substitutionsregel
Sei f: [a,b]$\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und g: [a,b]$\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar so dass g' stetig ist. Dann ist:

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int\limits_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

Beweis:
Nach Satz3.3. besitzt f eine Stammfunktion F: [a,b]$\rightarrow \mathbb{R}$. Nach der Kettenregel (Satz IV.1.7.) ist (F$\circ$g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t). Mit Satz3.2. und 3.3. folgt $\int\limits_a^b f(g(t))g'(t)dt = [(F \circ g)(t)]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$. qed

Beispiele:

1. $\int\limits_3^5 \frac{2t-4}{t^2-4t+4}dt$, f(t)= $\frac{1}{t}$, g(t) = t^2-4t+4, g'(t) = 2t-4
   $\int\limits_3^5 \frac{2t-4}{t^2-4t+4}dt = \int\limits_3^5 f(g(t))g'(t)dt = \int\limits_{g(3)}^{g(5)} f(x)dx = \int\limits_1^9 \frac{1}{x}dx = [ln(x)]_1^9 = ln(9) - ln(1) = ln(9)$ (substitution)

2. $\int\limits_0^1 x*exp(x)dx = [x*exp(x)]_0^1 - \int\limits_0^1 exp(x)dx = 1*exp(1) - 0 - [exp(x)]_0^1 = exp(1) - (exp(x) - exp(1)) = 1$ (partielle Integration)

3. $\int\limits_a^b exp(x)*sin(x)dx = [exp(x)*(-cos(x))]_a^b + \int\limits_a^b exp(x)*cos(x)dx = [-exp(x)*cos(x)]_a^b + [exp(x)*sin(x)]_a^b - \int\limits_a^b exp(x)*sin(x)dx = 2*\int\limits_a^b exp(x)*sin(x)dx = [exp(x)*(sin(x) - cos(x))]_a^b = \int\limits_a^b exp(x)*sin(x)dx = \frac{1}{2}[exp(x)*(sin(x)-cos(x))]_a^b$ (partielle Integration)

4. $\int\limits_a^b t*cos(t^2)dt$, g(t) = t^2, g'(t) = 2t, f(t)= cos(t)
   $\int\limits_a^b t*cos(t^2)dt = \int\limits_a^b f(g(t))*g'(t)*\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} cos(x)dx = \frac{1}{2}[sin(x)]_{a^2}^{b^2}$(Nach ummodeln des Terms Substitution)

5. Berechnung am Einheitskreis $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$ =?, f(t) = $\sqrt{1-t^2}$, g(t) = cos(t), g'(t) = -sin(t)

$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} = \int\limits_{\pi}^{0} f(g(t)) * g'(t)dt = \int\limits_{\pi}^{0} \sqrt{1-(cos(t))^2} * sin(t)dt = -\int\limits_{\pi}^{0}(sin(t))^2 dt = \int\limits_{0}^{\pi}(sin(t))^2 dt =$
$[-sin(t) * cos(t)]_0^\pi + \int\limits_{0}^{\pi} cos(t) * cos(t)dt = \int\limits_{0}^{\pi}(1-(sin(t))^2 dt = \int 0^\pi 1dt - \int\limits_{0}^{\pi}(sin(t))^2 dt$
$\int\limits_{0}^{\pi}(sin(t))^2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} dt = \frac{1}{2}[t]_0^\pi = \frac{1}{2}(\pi - 0) = \frac{1}{2}\pi$ (erst Substitution, dann partielle Integration)

Satz3.6.:
Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f_n' stetig für jedes n$\in \mathbb{N}$.
Angenommen die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion f:[a,b] $\to \mathbb{R}$ und (f_n') konvergiert gleichmäßig gegen g:[a,b]$\to \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und f'=g.

Beweis:
g ist stetig nach SatzIII.3.2.. Für $x_0 \in [a,b]$ ist nach Satz3.2. $f_n = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)$. Für n$\to \infty$ erhält man mit Satz2.6..
$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)dt.$
G ist differenzierbar nach Satz3.3., also ist f differenzierbar und f'(x) = g(x). qed

Bemerkung:
Damit kann man nun SatzIV.1.5. über die gliedweise Differentiation von Potenzreihen beweisen.
Wende dazu den Satz auf die Funktionen f_n mit $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ an.

Satz3.7.:
Integraldarstellung des Restglieds
Sei I ein Intervall und f:I$\to \mathbb{R}$ (n+1)-mal differenzierbar, so dass $f^{(n+1)}$ stetig ist. Dann gilt für R_n aus SatzIV.3.2. $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$

Beweis:
durch vollständige Induktion
IA: n = 0 $f(x) = f(x_0)t * \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt$. Andererseits ist nach SatzIV.3.2. f(x) = $T_{0,f,x_0}(x) + R_n(x)$.
Somit $R_n(x)? \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt = \frac{1}{0!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^0 f^{0+1}(t)dt$. Behauptung stimmt für n=0.
IS: n$\to$ n+1: Angenommen für jede (n+1)-mal differenzierbare Funktion f gilt:
$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ (IV)
Ist f (n+2)-mal differenzierbar, so erhält man mit partieller Integration:
$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = [-\frac{1}{(n+1)!} * (x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)]_{x_0}^{x} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{n+2}(t)dt =$
$0 + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$
Somit einerseits: f(x) = $T_{n+1,f,x_0}(x) + R_{n+1}(x)$ und andererseits
f(x) = $T_{n,f,x_0}(x) + R_n(x) = T_{n,f,x_0}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt.$
Vergleich der beiden letzten Zeilen liefert tatsächlich $R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt.$
qed

5.4 Uneigentliche Integrale

2 Fälle:

1. Eine oder beide Integrationsgrenzen ünendlich"
2. Der Integrand ist an einer Integrationsgerenze nicht definiert

Definition4.1.:
Sei f:[a,∞) → ℝ.
Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\mathbb{R}\to\infty}\int\limits_a^{\mathbb{R}} f(x)dx$
existiert, dann heißt f über [a,∞) im uneigentlichen Sinn integrierbar.
Notation: $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\mathbb{R}\to\infty}\int\limits_a^{\mathbb{R}} f(x)dx.$
Entsprechend definiert man $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ für f: (-∞,a]→ ℝ und damit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\mathbb{R}\to\infty}\int\limits_{-\mathbb{R}}^{a} f(x)dx +$ $\lim\limits_{\mathbb{R}\to\infty}\int\limits_a^{\mathbb{R}} f(x)dx$ für f: ℝ → ℝ.

Beispiel:

1. $\int\limits_0^{\infty} exp(-x))dx$
   $\int\limits_0^{\mathbb{R}} exp(-x)dx = [-exp(-x)]_0^{\mathbb{R}} = -exp(-\mathbb{R}) + 1$
   $\int\limits_0^{\infty} exp(-x)dx = \lim\limits_{\mathbb{R}\to\infty}\int\limits_0^{\mathbb{R}} exp(-x)dx = \lim\limits_{\mathbb{R}\to\infty}(1 - exp(-\mathbb{R}) = 1$
2. $\int\limits_0^{\infty} cos(x)dx$
   $\int\limits_0^{\mathbb{R}} cos(x)dx = [sin(x)]_0^{\mathbb{R}} = sin(\mathbb{R})$
   $\lim\limits_{\mathbb{R}\to\infty} sin(\mathbb{R})$ existiert nicht. Somit $\int\limits_0^{\infty} cos(x)dx$ existiert nicht.
3. Sei $\alpha > 1$ und $\mathbb{R} > 1$. $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$
   $\int\limits_1^{\mathbb{R}}\frac{1}{x^\alpha}dx = [\frac{1}{1-\alpha} * x^{1-\alpha}]_1^{\mathbb{R}} = \frac{1}{1-\alpha} * \frac{1}{\mathbb{R}^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}; \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}$

Definition4.2.:
f: (a,b] → ℝ bzw. f: [a,b) → ℝ heißt über [a,b] im uneigentlichen Sinne integrierbar, wenn $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>\infty}}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ bzw. $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>\infty}}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ existiert.
Notation für den Grenzwert: $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Beispiel:

1. f: [0,1) $\rightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int\limits_0^{1-\varepsilon} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [arcsin(x)]_1^{1-\varepsilon} = arcsin(1-\varepsilon)-arcsin(0) \rightarrow arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2},\ \int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \dfrac{\pi}{2}$

Satz4.3.:
Majorantenkriterium

a Falls |f(x)| $\leq$ g(x) für alle x $\geq$ a, und falls $\int\limits_a^b g(x)dx$ existiert, dann existiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)dx$

b Falls |f(x)| leq g(x) für alle x$\in$ (a,b] bzw. x$\in$ [a,b) und falls $\int\limits_a^b g(x)dx$ existiert, dann existiert auch $\int\limits_a^b f(x)dx$

Beweis:

a Wegen: $0 \leq |\int\limits_a^\mathbb{R} f(x)dx| \leq \int\limits_a^\mathbb{R} |f(x)|dx \leq \int\limits_a^\mathbb{R} g(x)dx \leq \int\limits_a^\infty g(x)dx$ existiert $\int\limits_a^\infty f(x)dx.$

Desweiteren ist $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2 * |f(x)Y \leq 2 * g(x)$ und somit $0 \leq \int\limits_a^\mathbb{R}(f(x) + |(f(x))dx \leq 2 * \int\limits_a^\mathbb{R} g(x)dx = 2 * \int\limits_a^\infty g(x)dx.$

Daher existiert auch $\int\limits_a^\infty(f(x)+|f(x)|)dx$ und somit existiert auch $\lim\limits_{\mathbb{R}\rightarrow\infty} \int\limits_a^\mathbb{R}(f(x)+|(f(x))dx - \int\limits_a^\mathbb{R} |f(x)|dx.$

b ähnlich qed

Beispiel:
f: $[1,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, x$\longmapsto \dfrac{sin(x)}{x}$
$\int\limits_1^\mathbb{R} \dfrac{sin(x)}{dx}$ = [-$\dfrac{cos(x)}{x}]_1^\mathbb{R} - \int\limits_1^\mathbb{R} \dfrac{cos(x)}{x^2}dx = -\dfrac{cos(\mathbb{R}}{\mathbb{R}} + \dfrac{cos(1)}{1} - \int\limits_1^\mathbb{R} \dfrac{cos(x)}{x^2}dx$ Da $|\dfrac{cos(x)}{x^2}| \leq \dfrac{1}{x^2}$ für alle x$\in [1,\infty)$ und $\int\limits_1^\infty \dfrac{1}{x^2}dx$ existiert, existiert auch $\int\limits_1^\infty \dfrac{sin(x)}{x}dx.$

5.5 Numerischer Integration

Ziel: näherungsweise Integration
Idee: Integriere nicht f, sondern Näherung von f.
z.B.: integriere statt f die Funktion P mit P(x) = f(a)+ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} * (x-a)$. (Es ist P(a) = f(a) und P(b) = f(b))

$\int\limits_a^b P(x)dx = [f(a)x + \dfrac{1}{2} * \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)^2]_a^b = ... = \dfrac{1}{2} * (f(a)+f(b))(b-a)$ (letzteres = Tr[f,a,b])

Trapezregel: $\int\limits_a^b f(x)dx \approx Tr[f,a,b]$

Lemma5.1.:
Mittelwertsatz der Integralrechnung
Seien f:[a,b] $\to \mathbb{R}$, $\varphi : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig.
Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Bemerkung: Für den Spezialfall, dass $\varphi(x) = 1$ für alle x$\in$ $[a,b]$, erhält man $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Beweis:
Definiere m:= min f([a,b]), M:= max f([a,b]). Dann ist für alle x$\in$ [a,b] m$\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$ und nach Satz 2.5. $m\int\limits_a^b \varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ bzw. $m \leq \frac{1}{\int\limits_a^b \varphi(x)dx}\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M$, falls $\int\limits_a^b \varphi(x)dx \neq 0$.

Nach ZWS existiert ein $\xi \in$ [a,b] mit $f(\xi) = \frac{1}{\int\limits_a^b \varphi(x)dx}\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx$. qed

Satz5.2.:
Fehlerabschätzung Trapetzregel
Sei f: [a,b] $\to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f" stetig und M := max $\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$. Dann gilt $|\int\limits_a^b f(x)dx - T_r[f,a,b]| \leq \frac{(b-a)^3}{12} * M$.

Beweis:
Definiere $\varphi[a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)(b-x)$ Dann ist $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(a+b) - x$, $\varphi''(x) = -1$.

$\int\limits_a^b \varphi(x)f''(x)dx = [\varphi(x) * f(x)]_a^b - \int\limits_a^b \varphi'(x)f'(x)dx = -[\varphi'(x) * f'(x)]_a^b + \int\limits_a^b \varphi''(x)f(x)dx = -\{f(b)\frac{1}{2(a-b) - f(a)\frac{1}{2}(b-a)}\} - \int\limits_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(n-a)\{f(a) + f(b)\} - \int\limits_a^b bf(x)dx.$

Andererseits existiert nach Lemmma5.1. ein $\xi \in [a,b]$, so dass $\int\limits_a^b \varphi(x)f''(x)dx = f''(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)dx =$
$... = f''(\xi)\frac{1}{12}(b-a)^3$

Damit folgt $|\int\limits_a^b f(x)dx - T - r[f,a,b]| = |f''(\xi)|\frac{1}{12}(b-a)^3$ qed

Bemerkung:
Unterteile [a,b] in $x_k = a + k * \frac{b-a}{n}, k = 0, ..., n$ und wende Trapetzregel auf jedes Teilintervall an. $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{k=1}^n T_r[f, x_{k-1}, x_k]$

$|\int\limits_a^b f(x)dx - \sum\limits_{k=1}^n T_r[f, x_{k-1} m x_k| = |\sum\limits_{k=1}^n (\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - T_r[f, x_{k-1}, x_k])| \leq \sum\limits_{k=1}^n |\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - T_r[f, x_{k-1}, x_k]| \leq$

$\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{b-a}{n})^3 * \frac{1}{12} * M = n * (\frac{(b_a)^3}{n}) * \frac{1}{12} * M = \frac{(b-a)^3}{n^2} * \frac{1}{12} * M.$

5.6 Anwendung: Differentialgleichungen

Beispiel:
Wachstum von Bakterien
N(t) = Anzahl der zum Zeitpunkt t vorhandenen Bakterien.
Zunahme der Bakterien proportional zu N(t) und zu der verstrichenen Zeitspanne $\triangle t$ mit Proportionalitätsfaktor $\alpha > 0$.
$N(t+\triangle t) - N(t) \approx \alpha N(t) * \triangle t$
$\frac{N(t+\triangle t) - N(t)}{\triangle t} \approx \alpha N(t)$
Beschreibung ist umso genauer, je kleiner $\triangle t$. Führt auf eine Differentialgleichung (DGL)
$\lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{N(t+\triangle t) - N(t)}{\triangle t} = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \alpha N(t)$
D.h., die zeitliche Entwicklung der Bakterienzahl wird durch eine Funktion N beschrieben, welche N'(t) = α N(t) erfüllt.
Frage:
1. Gibt es überhaupt eine solche Funktion? $N(t) = e^{\alpha t}$
2. Wenn ja, wie viele solcher Funktionen gibt es (Eindeutigkeit)?

Anfangswertproblem (AWP) fpr die homogene lineare DGL erster Ordnung.
Sei I ein Intervall und a: I$\rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in$ I, $u_0 \in \mathbb{R}$.
Gesucht: differenzierbare Funktion u: $I \rightarrow \mathbb{R}$ mit (*) $\{u'(t) = a(t)u(t); u(t_0) = u_0\}$.
Idee: Annahme $u_0 > 0$; dann ist auch u(t) > 0, falls t nahe genug an t_0 (stetigkeit von u). a(t) = $\frac{u'(t)}{u(t)}$
Integration : $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{u(s)} ds$
Substitution auf rechter Seite f(s) = $\frac{1}{s}$, g(s) = a(s)
$\int\limits_{f}(g(s))g'(s)ds = \int\limits_{g(t_0)}^{g(t)} f8x)dx = \int\limits_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{1}{x}dx = [ln(x)]_{u(t_0)}^{u(t)} = ln(u(t)) - ln(u(t_0)) = ln(\frac{u(t)}{u(t_0)})$
Exponentiation: $exp(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds) = exp(ln(\frac{u(t)}{u(t_0)})) = \frac{u(t)}{u(t_0)}$ bzw. u(t) = u(t_0) * exp($\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds$).

Satz1.6.:
Das AWP (*) besitzt genau eine Lösung auf dem Intervall I, nämlich u(t)) = $u_0 exp(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds)$.

Beweis:
(a) f(t) = $u_0 exp(A(t))$.
$f(t_0) = u_0 exp(A(t_0)) = u_0$
f'(t) = $u_0 exp(A(t)) * A'(t) = a(t) * u_0 exp(A(t)) = a(t) * f(t)$
Somit ist f eine Lösung des AWP.
(b) Sei v: I$\rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP.
Definiere w(t) := v(t) * exp(-A(t)).
Dann ist w differenzierbar und w'(t) = v'(t) * exp(-A(t)) + v(t) * exp(-A(t))*(-a(t)) = exp(-A(t))* (v'(t) - a(t)*v(t)) = 0.
Nach Korollar IV.2.5. ist w konstant, also w(t)= w(t_0) = v(t_0) * exp(-A(t_0)) = u_0 und somit

v(t)=u_0*exp(A(t)). qed

Beispiel:
auslaufende Becher

Aus Physik: beschreibende DGL lautet: $h'(t) = -c\sqrt{h(t)}$ mit einer von $\mathbb{R}$ und ϱ abhängigen Konstante c > 0.
AWP : $\{h'(t) = -c\sqrt{h(t)};\ h(0) = h_0 > 0\}$

Idee: $-c = \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}}$; Integration: $-\int_0^t cds = \int_0^t \frac{h'(s)}{\sqrt{h(s)}}ds$
Substitution auf rechter Seite: f(s) = $\frac{1}{\sqrt{s}}$, g(s) = h(s)

$\int_0^t f(g(s))g'(s)ds = \int_{g(0)}^{g(t)} f(x)dx = [2\sqrt{x}]_{h(0)}^{h(t)} = 2 * \sqrt{h(t)} - 2 * \sqrt{h_0}$

Somit -ct =$2 * \sqrt{h(t)} - 2 * \sqrt{h_0}$. Auflösen nach h(t) $\sqrt{h(t)} = \frac{1}{2}(2 * \sqrt{h_0} - ct) = \sqrt{h_0} - \frac{ct}{2}$, t < $\frac{2 * \sqrt{h_0}}{c}$.
h(t) = $(\sqrt{h_0} - \frac{ct}{2})^2$; prüfe nach, dass die eine Lösung des AWP ist.

AWP für die DGL mit getrennten Variablen
Seienn I, J Intervalle, a: I $\to \mathbb{R}$, b: J$\to \mathbb{R}$, stetig, $t_0 < I, u_0 \in J$.
Gesucht: differenzierbare Funktion u:$I_0 \to \mathbb{R}$, wobei $I_0 \subseteq I, t_0 \in I_0$ mit (**)$\{u'(t) = a(t)b(u(t)), t \in I_0;\ u(t_0) = u_0\}$

Satz6.2.: Sei b(s) $\neq$ 0 für alle s$\in$J. Definiere A: I $\to \mathbb{R}$, A(t) = $\int_{T_0}^t a(s)ds$ und B: J$\to \mathbb{R}$, B(x) := $\int_{u_0}^x \frac{1}{b(s)}ds$
Sei $I_0 \subseteq I$ ein Intervall mit $t_0 \in I_0$ und $A(I_0) \subseteq B(J)$. Dann besitzt das AWP (**) genau eine Lösung u: $I_0 \to \mathbb{R}$, wobei gilt u(t) = B^{-1}(A(t)) für alle t$\in I_0$

Lösungsverfahren für (**)
Schritt1: Bestimme die Stammfunktion A von a und B von $\frac{1}{b}$ mit Satz6.2.
Schritt2: Bestimme das Intervall I_0 so, dass A(I_0) $\subseteq$ N(J).
Schritt3: Bestimme die Umkehrfunktion B^{-1}: B(J) $\to$ J von B und erhalte als Lösung u(t) = $B^{-1}(A(t))$.

Beispiel:

$\{u'(t) = 2t(u(t))^2;\ u(0) = u_0 > 0\}$
Hier a: $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto 2t,\ b : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ s \longmapsto s^2\ b(s) \neq 0$ für alle s$\in (0, \infty)$ DGL lautet also u'(t) = a(t)b(u(t)), also von der Form (**).
Schritt1: A(t) = $\int_0^t a(s)ds = \int_0^t 2sds = [s^2]_0^t = t^2$
B(x) = $\int_{u_0}^x \frac{1}{b(s)ds = \int_{u_0}^x \frac{1}{s^2} = [-\frac{1}{s}]_{u_0}^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{u_0}}$

Schritt2: B(J) = B((0,∞)) = $(-\infty, \frac{1}{u_0})$

Für welche t ∈ I ist A(t) ∈ $(-\infty, \frac{1}{u_0}$?

$-\infty < A(t) = t^2 < \frac{1}{u_0} \Longleftrightarrow |t| < \frac{1}{\sqrt{u_0}} \Longleftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{u_0}} < t < \frac{1}{\sqrt{u_0}}$ also $I_0 = (-\frac{1}{\sqrt{u_0}}, \frac{1}{\sqrt{u_0}})$

Schritt 3: Bestimmungen von B^{-1} y= $\frac{1}{x} + \frac{1}{u_0}$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{u_0} - y$, x= $\frac{1}{\frac{1}{u_0} - y} = \frac{u_0}{1 - u_0 - y}$

$B^{-1}(y) = \frac{u_0}{1 - u_0 y}$

Somit u(t) = $B^{-1}(A(t)) = \frac{u_0}{1 - u_0 A(t)} = \frac{1}{1 - u_0 t^2}$, $t \in I_0$ Lösung von (**)