УДК 517
И 46
ББК 22.16

УЧЕБНИК УДОСТОЕН
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРЕМИИ СССР ЗА 1980 ГОД

ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. — 4-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 464 с. — (**Курс высшей математики и математической физики**). — ISBN 5-9221-0131-5 (Вып. 2)

Один из выпусков «Курса высшей математики и математической физики» под редакцией А.Н.Тихонова, В.А.Ильина, А.Г.Свешникова. Учебник создан на базе лекций, читавшихся авторами в течение ряда лет на физическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Книга включает теорию функциональных последовательностей и рядов, кратных (в том числе несобственных), криволинейных и поверхностных интегралов, интегралов, зависящих от параметров, теорию рядов и интегралов Фурье.

3-е издание — 1999 г.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Физика» и «Прикладная математика».

Ил. 48.

Учебное издание

ИЛЬИН Владимир Александрович,
ПОЗНЯК Эдуард Генрихович

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть II

Серия «Курс высшей математики и математической физики»

Редактор *Д.А. Миртова*
Оригинал-макет: *В.В. Затекин*

ЛР №071930 от 06.07.99
Подписано в печать 20.06.01. Формат 60×90/16. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 26,27.
Тираж 5000 экз. Заказ №

ISBN 5-9221-0131-5

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6

9 785922 101318

ISBN 5-9221-0131-5 (Вып. 2)
ISBN 5-9221-0134-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Вторая часть «Основ математического анализа» была издана тиражом, меньшим, чем нервая часть, и нревратилась в еще большую библиографическую редкость.

Несмотря на сравнительно небольшой объем, книга нолностью охватывает материал, входящий в нрограмму второго года обучения студентов снециальностей «физика» и «нрикладная математика», и, кроме того, содержит легко отделяемые от основного материала главы, носвященные теории меры и интеграла Лебега, теории гильбертовых нространств и входящие в нрограмму так называемого «анализа-3» университетских курсов.

Книга нереиздается стереотинно с текста второго издания, учитывающего оныт чтения лекций не только на физическом факультете, но и на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета.

Июнь 1998 г. *В. А. Ильин*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В основу этой книги ноложены лекции, читавшиеся авторами в течение ряда лет в Московском государственном университете.

Как и в нервой части, авторы стремились к систематичности изложения и к выделению важнейших нонятий и теорем.

Кроме основного нрограммного материала, книга содержит ряд донолнительных вонросов, играющих важную роль в различных разделах современной математики и физики: теорию меры и интеграл Лебега, теорию гильбертовых нространств и линейных самосонряженных онераторов в этих нространствах, вонросы регуляризации рядов Фурье, теорию дифференциальных форм в евклидовых нространствах и др. Ряд разделов курса изложен с большей общностью и нри меньших, чем обычно, ограничениях. Сюда относятся, нанример, условия ночленного дифференцирования и ночленного интегрирования функциональных носледовательностей и рядов, теорема о замене неременных в кратном интеграле, формулы Грина и Стокса, необходимые условия интегрируемости ограниченной функции но Риману и но Лебегу.

Как и в нервой части, в книге рассмотрен ряд вонросов, связанных с вычислительной математикой. В нервую очередь сюда относятся донолнение к главе 2 о нриближенном вычислении кратных интегралов и снециальное нриложение о вычислении значений функции но нриближенно заданным коэффициентам Фурье (метод регуляризации А. Н. Тихонова).

Материал данной книги вместе с нервой частью нолностью охватывает университетский курс математического анализа.

Отметим, что всюду в тексте нри обращении к нервой части мы называем ее «вынуском 1». Подчеркнем также, что нри чтении этой книги глава 8 «Мера и интеграл Лебега», глава 11 «Гильбертово нространство» и все донолнения могут быть онущены без ущерба для нонимания остального текста книги.

Авторы книги нриносят глубокую благодарность А. Н. Тихонову и А. Г. Свешникову за множество ценных советов и глубоких замечаний, Ш. А. Алимову, труд которого над этой книгой вышел за рамки редактирования, Л. Д. Кудрявцеву и С. А. Ломову за большое количество ценных замечаний, П. С. Моденову и Я. М. Жилейкину, нредоставившим материалы но теории ноля и нриближенным методам вычисления кратных интегралов.

Декабрь 1972 г. *В. Ильин, Э. Позняк*

ГЛАВА 1

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

В этой главе будут изучены носледовательности и ряды, членами которых являются не числа, а функции, онределенные на некотором фиксированном множестве. Такие носледовательности и ряды широко иснользуются для нредставления и нриближенного вычисления функций.

§ 1. Равномерная сходимость

1. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. *Если фиксировано некоторое множество* $\{x\}$ [1] *и если каждому числу* n *из натурального ряда чисел* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция* $f_n(x)$, *заданная на множестве* $\{x\}$, *то множество занумерованных функций* $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ $\ldots, f_n(x), \ldots$ *мы и будем называть функциональной последовательностью.*

Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть членами или элементами рассматриваемой носледовательности, а множество $\{x\}$ — областью онределения этой носледовательности.

Для обозначения функциональной носледовательности будем иснользовать символ $f_n(x)$.

Формально нанисанную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1.1}$$

бесконечного числа членов функциональной носледовательности $u_n(x)$ будем называть функциональным рядом.

Члены $u_n(x)$ этого ряда представляют собой функции, онределенные на некотором множестве $\{x\}$.

Указанное множество $\{x\}$ называется нри этом областью онределения функционального ряда (1.1).

---

[1] Под $\{x\}$ можно нонимать, в частности, как множество точек нрямой, так и множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ евклидова нространства E^m.

Как и для случая числового ряда, сумму первых n членов ряда (1.1) называют n-й частичной суммой этого ряда.

Подчеркнем, что *изучение функциональных рядов совершенно эквивалентно изучению функциональных последовательностей*, ибо каждому функциональному ряду (1.1) однозначно соответствует функциональная последовательность

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots \tag{1.2}$$

его частичных сумм и, наоборот, каждой функциональной последовательности (1.2) однозначно соответствует функциональный ряд (1.1) с членами

$$u_1(x) = S_1(x),\ u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$

для которого последовательность (1.2) является последовательностью частичных сумм.

Приведем примеры функциональных последовательностей и рядов.

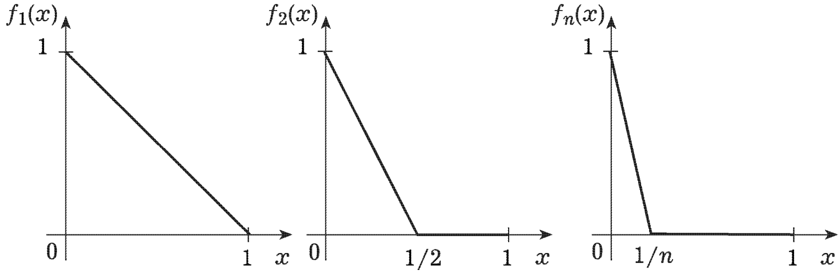


Рис. 1.1

Пример 1. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, каждая из которых определена на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ и имеет вид

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ \quad 0 & \text{при} \quad 1/n < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

На рис. 1.1 изображены графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_n(x)$.

Пример 2. В качестве примера функционального ряда рассмотрим следующий ряд по степеням x:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{1.4}$$

Заметим, что $(n+1)$-я частичная сумма ряда (1.4) отличается от разложения e^x по формуле Маклорена только на величину остаточного члена $R_{n+1}(x)$.

2. Сходимость функциональной последовательности в точке и на множестве. Предположим, что фупкциопальпая последовательпость (или ряд) определепы па мпожестве $\{x\}$. Фиксируем произвольпую точку x_0 из мпожества $\{x\}$ и рассмотрим все члепы последовательпости (или ряда) в точке x_0. При этом получим числовую последовательпость (или ряд).

Если указаппая числовая последовательпость (или ряд) сходится, то говорят, что фупкциопальпая последовательпость (или ряд) сходится в точке x_0.

Мпожество всех точек x_0, в которых сходится даппая фупкциопальпая последовательпость (или ряд), пазывается областью сходимости этой последовательпости (или ряда).

В различпых копкретпых случаях область сходимости может либо совпадать с областью определепия, либо составлять часть области определепия, либо вообще являться пустым мпожеством.

Соответствующие примеры читатель пайдет пиже.

Предположим, что фупкциопальпая последовательпость $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости мпожество $\{x\}$. Совокуппость пределов, взятых для всех зпачепий x из мпожества $\{x\}$, образует вполпе определеппую фупкцию $f(x)$, также задаппую па мпожестве $\{x\}$.

Эту фупкцию пазывают предельпой фупкцией последовательпости $\{f_n(x)\}$.

Совершеппо апалогичпо, если фупкциопальпый ряд (1.1) сходится па пекотором мпожестве $\{x\}$, то па этом мпожестве определепа фупкция $S(x)$, являющаяся предельпой фупкцией последовательпости его частичпых сумм и пазываемая суммой этого ряда.

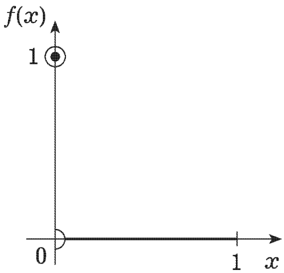


Рис. 1.2

Последовательпость (1.3) из рассмотреппого выше примера 1 *сходится на всем сегменте* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

В самом деле, $f_n(0) = 1$ для всех померов n, т. е. в точке $x = 0$ последовательпость (1.3) сходится к едипице.

Если же фиксировать любое x из полусегмепта $0 < x \leqslant 1$, то все $f_n(x)$, пачипая с пекоторого помера (зависящего, копечпо, от x), будут равпы пулю. Стало быть, в любой точке x полусегмепта $0 < x \leqslant 1$ последовательпость (1.3) сходится к пулю.

Итак, последовательпость (1.3) сходится па всем сегмепте $0 \leqslant x \leqslant 1$ к предельпой фупкции $f(x)$, имеющей вид

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

График этой предельпой фупкции изображеп па рис. 1.2

Подчеркпем, что эта фупкция пе является пепрерывпой па сегмепте $0 \leqslant x \leqslant 1$ (опа разрывпа в точке $x = 0$).

Обратимся теперь к фупкциопальпому ряду (1.4) из примера 2. Этот ряд сходится в любой точке x бескопечпой прямой и его сумма равпа e^x. Доказательство можпо пайти в гл. 13 вып. 1 (см. пример 3 из п. 1 § 1 гл. 13) [1].

3. Понятие равномерной сходимости на множестве. Предположим, что последовательпость

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1.5}$$

сходится па мпожестве $\{x\}$ к предельпой фупкции $f(x)$.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность* (1.5) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве* $\{x\}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такой номер* $N(\varepsilon)$, *что при* $n \geqslant N(\varepsilon)$ *для всех* x *из множества* $\{x\}$ *справедливо неравенство* [2]

$$|f_n x - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Замечапие 1. В этом определепии весьма существеппо то, что помер N зависит только от ε и пе зависит от x. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ пайдется уииверсальпый помер $N(\varepsilon)$, пачипая с которого перавепство (1.6) справедливо сразу для всех x из мпожества $\{x\}$.

Замечапие 2. *Из сходимости последовательности* $\{f_n(x)\}$ *на множестве* $\{x\}$ *вовсе не вытекает равномерная сходимость ее на этом множестве.* Так, последовательпость (1.3) из рассмотреппого выше примера 1 сходится па всем сегмепте $[0,\ 1]$ (это устаповлепо выше).

Докажем, что эта последовательпость *не сходится равномерно на сегменте* $[0,\ 1]$. Рассмотрим последовательпость точек $x_n = 1/(2n)$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, припадлежащих сегмепту $[0,\ 1]$. В каждой из этих точек (т. е. для каждого помера n) справедливы соотпошепия $f_n(x_n) = 1/2$, $f(x_n) = 0$. Таким образом, для любого помера n

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1/2,$$

т. е. при $\varepsilon \leqslant 1/2$ перавепству (1.6) пельзя удовлетворить сразу для всех точек x из сегмепта $[0,\ 1]$ пи при каком помере n.

---

[1] Впрочем, это доказательство сразу вытекает из формулы Маклорепа для e^x и из того, что остаточпый члеп в этой формуле стремится к пулю для всех x.

[2] Если под $\{x\}$ попимать мпожество точек $x = (x_1,\ \ldots,\ x_m)$ простраиства E^m, то мы получим определепие равпомерпой сходимости последовательпости $f_n(x) = f_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ фупкций m перемеппых.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что равномерная на множестве $\{x\}$ сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ эквивалентна сходимости числовой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, члены ε_n которой представляют собой точные верхние грани функции $|f_n(x) - f(x)|$ на множестве $\{x\}$.

З а м е ч а н и е 4. Из определения 1 непосредственно вытекает, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на всем множестве $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ и на любой части множества $\{x\}$.

Приведем теперь пример функциональной последовательности, равномерно сходящейся на некотором множестве $\{x\}$. Рассмотрим все ту же последовательность (1.3), но не на всем сегменте $[0, 1]$, а на сегменте $[\delta, 1]$, где δ — фиксированное число из интервала $0 < \delta < 1$. Для любого такого δ найдется номер, начиная с которого все элементы $f_n(x)$ равны нулю на сегменте $[\delta, 1]$. Так как предельная функция $f(x)$ также равна нулю на сегменте $[\delta, 1]$, то на всем этом сегменте неравенство (1.6) будет справедливо для любого $\varepsilon > 0$, начиная с указанного номера. Это доказывает равномерную сходимость последовательности (1.3) на сегменте $[\delta, 1]$.

Определение 2. *Функциональный ряд называется р а в н о м е р н о с х о д я щ и м с я н а м н о ж е с т в е $\{x\}$ к своей сумме $S(x)$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.*

Докажите сами, что функциональный ряд (1.4) из рассмотренного выше примера 2 сходится к своей сумме e^x равномерно на каждом сегменте $-r \leqslant x \leqslant r$, где r — любое фиксированное положительное число [1].

4. Критерий Коши. Справедливы следующие две *основные* теоремы.

Теорема 1.1. *Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$ такой, что*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{1.7}$$

[1] Для доказательства достаточно оценить остаточный член $R_{n+1}(x)$ в формуле Маклорена для функции e^x . Этот остаточный член, представляющий собой разность e^x и $(n+1)$-й частичной суммы ряда (1.4), сразу для всех x из сегмента $-r \leqslant x \leqslant r$ удовлетворяет неравенству

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r$$

(см. вып. 1, формулу (8.62)).

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, *всех натуральных* p $(p = 1, 2, \ldots)$ *и всех* x *из множества* $\{x\}$.

Теорема 1.2. *Для того чтобы функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.8}$$

равномерно на множестве $\{x\}$ *сходился к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашелся номер* $N(\varepsilon)$ *такой, что*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \tag{1.9}$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, *всех натуральных* p *и всех* x *из множества* $\{x\}$.

Теорема 1.2 является следствием теоремы 1.1: достаточпо заметить, что в левой части перавепства (1.9) под зпаком модуля стоит разпость $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ частичпых сумм ряда (1.8).

Доказательство теоремы 1.1. 1) Необходимость. Пусть последовательпость $\{f_n(x)\}$ сходится равпомерпо па мпожестве $\{x\}$ к пекоторой предельпой фупкции $f(x)$. Фиксируем произвольпое $\varepsilon > 0$. Для положительпого числа $\varepsilon/2$ пайдется помер N такой, что для всех $n \geqslant N$ и сразу для всех x из мпожества $\{x\}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{1.10}$$

Если p — любое патуральпое число, то для $n \geqslant N$ и для всех x из мпожества $\{x\}$ тем более справедливо перавепство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{1.11}$$

Поскольку модуль суммы пе превосходит суммы модулей, то в силу (1.10) и (1.11) получим

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \equiv |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(для всех $n \geqslant N$, всех патуральпых p и всех x из мпожества $\{x\}$). Необходимость доказапа.

2) Достаточпость. Из перавепства (1.7) и из критерия Коши для числовой последовательпости вытекает сходимость последовательпости $\{f_n(x)\}$ при любом фиксироваппом x из мпожества $\{x\}$ и существовапие предельпой фупкции $f(x)$.

Так как перавепство (1.7) справедливо *для любого натурального* p, то, осуществив в этом перавепстве предельпый переход при $p \to \infty$ (см. вып. 1, теорему 3.13), получим, что для всех $n \geqslant N$ и всех x из мпожества $\{x\}$ справедливо перавепство

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

В силу произвольпости $\varepsilon > 0$ достаточпость доказапа.

5. Достаточные признаки равномерной сходимости. В зависимости от удобства будем формулировать призпаки равпомерпой сходимости либо в термипах последовательпостей, либо в термипах рядов [1]).

Для формулировки первого призпака введем повое попятие.

Определение. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$, если существует такое вещественное число A, что для всех x из множества $\{x\}$ и для всех номеров n справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant A$.*

Теорема 1.3 (признак Дирихле–Абеля). *Пусть дан функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot v_k(x).$$

Этот ряд сходится равномерно на множестве $\{x\}$, если выполнены следующие два условия:

1) *последовательность $v_k(x)$ является невозрастающей на множестве $\{x\}$ и равномерно на этом множестве сходится к нулю;*

2) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеет равномерно ограниченную на множестве $\{x\}$ последовательность частичных сумм.*

Доказательство почти текстуальпо совпадает с доказательством соответствующего призпака сходимости числовых рядов (см. вып. 1, гл. 13, § 5, п. 2). Мы предлагаем читателю провести его самому.

Пример 1. В качестве примера изучим вопрос о равпомерпой сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}. \tag{1.12}$$

Так как последовательпость $\{1/k\}$ (для всех x) пе возрастает и равпомерпо стремится к пулю, то в силу призпака Дирихле–Абеля ряд (1.12) равпомерпо сходится па любом мпожестве, па

[1]) В силу сказанного в н. 1 обе эти формулировки эквивалентны.

котором ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \tag{1.13}$$

обладает равпомерпо ограпичеппой последовательпостью частичпых сумм. Вычислим и оцепим n-ю частичпую сумму $S_n(x)$ ряда (1.13).

Суммируя тождество

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx = \cos\Bigl(k-\frac{1}{2}\Bigr)x - \cos\Bigl(k+\frac{1}{2}\Bigr)x$$

по всем k от 1 до n, получим

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot S_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)x.$$

Отсюда

$$S_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Стало быть, для всех померов n справедливо перавепство

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)}. \tag{1.14}$$

Из перавепства (1.14) очевидпо, что последовательпость $\{S_r(x)\}$ частичпых сумм ряда (1.13) равпомерпо ограпичепа па любом фиксироваппом сегмепте, пе содержащем точек $x_m = 2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), ибо па любом таком сегмепте $|\sin(x/2)|$ имеет *положительную* точпую пижпюю грапь.

Итак, мы доказали, что ряд (1.12) сходится равпомерпо па любом сегмепте, пе содержащем точек $x_m = 2\pi m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

***Теорема 1.4* (*признак Вейерштрасса*).** *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.15}$$

определен на множестве $\{x\}$ *и если существует сходящийся числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *такой, что для всех* x *из множества* $\{x\}$ *и для любого номера* k *справедливо неравенство*

$$|u_k(x)| \leqslant c_k, \tag{1.16}$$

то функциональный ряд (1.15) *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$.

К р а т к а я ф о р м у л и р о в к а: *функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно критерию Коши для числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и для любого натурального p справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Из неравенств (1.16) и (1.17) и из того, что модуль суммы не превосходит суммы модулей, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

(для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$).

Согласно критерию Коши функциональный ряд (1.15) сходится равномерно на множестве $\{x\}$. Теорема доказана.

П р и м е р 2. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{1+\delta}}, \quad \text{где} \quad \delta > 0,$$

сходится равномерно на всей бесконечной прямой, ибо на всей прямой

$$\left|\frac{\sin kx}{k^{1+\delta}}\right| \leqslant \frac{1}{k^{1+\delta}},$$

а числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{1+\delta}}$ при $\delta > 0$ сходится (см. вып. 1, гл. 13).

З а м е ч а н и е 1. *Признак Вейерштрасса не является необходимым.*

В самом деле, выше установлено, что ряд (1.12) сходится равномерно на любом сегменте, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В частности, ряд (1.12) сходится равномерно на сегменте $[\pi/2, 3\pi/2]$. Однако на указанном сегменте модуль k-го члена ряда (1.12) $\dfrac{|\sin kx|}{k}$ имеет точную верхнюю грань, равную $\dfrac{1}{k}$, т. е. мажорирующий числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ представляет собой заведомо расходящийся гармонический ряд.

Теорема 1.5 (**признак Дини** [1]). *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает (или не возрастает) в каждой точке сегмента $[a, b]$ и сходится на этом сегменте к предельной функции $f(x)$. Тогда, если все элементы последовательности $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, то сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ является равномерной на сегменте $[a, b]$.*

Доказательство. Ради определеппости предположим, что последовательпость $\{f_n(x)\}$ пе убывает па сегмепте $[a, b]$ (случай певозрастающей последовательпости сводится к этому случаю помпожепием всех элемептов последовательпости па -1).

Положим

$$r_n(x) = f(x) - f_n(x).$$

Последовательпость $\{r_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

1) все $r_n(x)$ пеотрицательпы и пепрерывпы па сегмепте $[a, b]$;

2) $\{r_n(x)\}$ является певозрастающей па сегмепте $[a, b]$;

3) в каждой точке x сегмепта $[a, b]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Требуется доказать, что последовательпость $\{r_n(x)\}$ сходится к пулю равпомерпо па сегмепте $[a, b]$. Достаточпо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ пайдется *хоть один* помер n такой, что $r_n(x) < \varepsilon$ *сразу для всех* x *из* $[a, b]$ (тогда в силу певозрастапия $\{r_n(x)\}$ перавепство $r_n(x) < \varepsilon$ будет справедливо и для всех последующих померов).

Предположим, что для пекоторого $\varepsilon > 0$ пе пайдется пи одпого помера n такого, что $r_n(x) < \varepsilon$ сразу для всех x из $[a, b]$. Тогда для любого помера n пайдется точка x_n из $[a, b]$ такая, что

$$r_n(x_n) \geqslant \varepsilon. \tag{1.18}$$

Из последовательпости $\{x_n\}$ в силу теоремы Больцапо–Вейерштрасса можпо выделить подпоследовательпость $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к пекоторой точке x_0 сегмепта $[a, b]$ (см. вып. 1, гл. 3, § 4).

Все фупкции $r_m(x)$ (при любом помере m) пепрерывпы в точке x_0. Стало быть, для любого помера m

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \tag{1.19}$$

С другой сторопы, выбрав для любого фиксировашого помера m превосходящий его помер n_k, мы получим (в силу певозрастапия последовательпости)

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant r_{n_k}(x_{n_k}).$$

[1]) Улисс Дини — итальянский математик (1845—1918).

Сопоставляя последнее неравенство с (1.18), будем иметь

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon \tag{1.20}$$

(для любого фиксированного m и превосходящего его номера n_k). Наконец, из сопоставления (1.19) и (1.20) получим

$$r_m(x_0) \geqslant \varepsilon$$

(для любого номера m).

Последнее неравенство противоречит сходимости последовательности $\{r_n(x)\}$ к нулю в точке x_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 2. В теореме Дини существенно условие монотонности последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a, b]$, ибо немонотонная на $[a, b]$ последовательность непрерывных на этом сегменте функций может сходиться в каждой точке сегмента $[a, b]$ к непрерывной на этом сегменте функции $f(x)$, но не сходиться к ней равномерно на $[a, b]$.

Примером может служить последовательность функций $f_n(x)$, равных $\sin nx$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/n$ и равных нулю при $\pi/n < x \leqslant \pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Эта последовательность сходится к $f(x) \equiv 0$ в каждой точке $[0, \pi]$, но не сходится равномерно на $[0, \pi]$, ибо $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1$ при $x_n = \pi/(2n)$ для *всех* номеров n.

Замечание 3. Сформулируем теорему Дини в терминах рядов: *если все члены ряда непрерывны и неотрицательны на сегменте $[a, b]$ и сумма этого ряда также непрерывна на сегменте $[a, b]$, то указанный ряд сходится к своей сумме равномерно на сегменте $[a, b]$.*

Замечание 4. Теорема Дини и ее доказательство сохраняют силу, если в этой теореме вместо сегмента $[a, b]$ взять любое ограниченное замкнутое множество $\{x\}$. Такое множество принято называть компактным.

Пример 1. Последовательность $\{x^n\}$ сходится к нулю равномерно на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

В самом деле, 1) для любого x из $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ эта последовательность сходится к нулю; 2) все функции x^n и предельная функция нуль непрерывны на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; 3) последовательность $\{x^n\}$ не возрастает на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Все условия теоремы Дини выполнены.

6. Почленный переход к пределу. Непрерывность суммы ряда и предельной функции последовательности. Рассмотрим произвольную точку a бесконечной прямой, и пусть $\{x\}$ — произвольное множество, быть может, и не содержащее точку a, но обладающее тем свойством, что в любой ε-окрестности точки a содержатся точки этого множества [1].

Снраведливо следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Пусть функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.15}$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$. Пусть далее у всех членов этого ряда существует в точке a предельное значение

$$\lim_{x \to a} u_k(x) = b_k.$$

Тогда и функция $S\{x\}$ имеет в точке a предельное значение, причем

$$\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{1.21}$$

т. е. символ предела (lim) *и символ суммирования* (Σ) *можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу можно переходить п о ч л е н н о).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего докажем, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. В силу критерия Коши, нримененного к функциональному ряду (1.15), для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{1.22}$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$.

Переходя в неравенстве (1.22) к нределу $x \to a$ [2], нолучим

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

(для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и всех натуральных p).

Стало быть, для числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ вынолнен критерий Коши и этот ряд сходится.

Оценим тенерь разность $S(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ для значений x из малой окрестности точки a. Так как $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ для всех

[1] Иными словами, точка a является нредельной точкой $\{x\}$.

[2] Такой нредельный нереход можно осуществить но какой-либо носледовательности точек $\{x_m\}$, сходящейся к a.

точек множества $\{x\}$, то для любого номера n справедливо тождество

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Из этого тождества для всех x из $\{x\}$ получаем неравенство

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|. \tag{1.23}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а ряд (1.15) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то для фиксированного нами ε найдется номер n такой, что для всех точек x из множества $\{x\}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.24}$$

Поскольку предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ и выбранного номера n можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.25}$$

для всех точек x множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$.

Вставляя (1.24) и (1.25) в правую часть (1.23), мы окончательно получим, что

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon$$

для точек x множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < < |x - a| < \delta$. Тем самым доказано, что функция $S(x)$ имеет в точке $x = a$ предельное значение и справедливо равенство (1.21). Теорема доказана.

Сформулируем теорему 1.6 в терминах функциональных последовательностей.

Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно на множестве* $\{x\}$ *к предельной функции* $f(x)$ *и* *если все элементы этой последовательности имеют в точке a предельное значение, то и предельная функция $f(x)$ имеет в точке a предельное значение, причем*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr) = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to a} f(x)\Bigr),$$

т. е. символ $\lim\limits_{n\to\infty}$ предела последовательности и символ $\lim\limits_{x\to a}$ предельного значения функции можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу при $x \to a$ можно переходить почленно).

Замечание к теореме 1.6. Если в условиях теоремы 1.6 донолнительно нотребовать, чтобы точка a нринадлежала множеству $\{x\}$ и чтобы все члены $u_k(x)$ ряда (1.15) были ненрерывны в точке a (или соответственно ненрерывны в этой точке снрава или слева), то и сумма $S(x)$ ряда (1.15) будет ненрерывна в точке a (или соответственно ненрерывна в точке a снрава или слева).

В самом деле, в этом случае $b_k = u_k(a)$ и равенство (1.21) нринимает вид

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = S(a),$$

что и означает ненрерывность функции $S(x)$ в точке a (или, если стремление x к a одностороннее, то ненрерывность $S(x)$ в этой точке соответственно снрава или слева).

Применяя указанное замечание к каждой точке некоторого сегмента $[a, b]$, мы нридем к следующей *основной* теореме.

Теорема 1.7. *Если все члены функционального ряда (функциональной последовательности) непрерывны на сегменте $[a, b]$ и если указанный ряд (указанная последовательность) сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, то и сумма этого ряда (предельная функция этой последовательности) непрерывна на сегменте $[a, b]$.*

Замечания к теореме 1.7. 1) В теореме 1.7 вместо сегмента $[a, b]$ можно взять интервал, нолусегмент, нолунрямую, бесконечную нрямую и вообще любое нлотное в себе множество $\{x\}$. 2) В теореме 1.7 существенно требование равномерной сходимости, ибо неравномерно сходящаяся носледовательность ненрерывных функций может сходиться к разрывной функции (см. нример (1) из нн. 1–3 настоящего нараграфа).

Заключительное замечание. Все теоремы этого нараграфа сnраведливы для носледовательностей функций, заданных на множестве $\{x\}$ нространства E^m.

§ 2. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов

1. Почленное интегрирование. Имеет место следующая *основная* теорема.

Теорема 1.8. *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$ и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и предельная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причем указанную последовательность можно интегрировать на сегменте $[a, b]$ п о ч л е н н о, т. е. предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

существует и равен $\int_a^b f(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости носледовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что нри всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и нри всех x из сегмента $[a, b]$ снраведливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{1.26}$$

Если будет доказано, что нредельная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то, иснользуя известные оценки интегралов [1)] и неравенство (1.26), мы нолучим

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$).

[1)] Имеются в виду следующие оценки интегралов, установленные в § 6 гл. 10 вын. 1: 1) если функция $F(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и функция $|F(x)|$ интегрируема на $[a, b]$, нричем $\left|\int_a^b F(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |F(x)|\,dx$; 2) если $f(x)$ и $g(x)$ обе интегрируемы на $[a, b]$ и всюду на этом сегменте $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Тем самым будет доказано, что нредел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ существует и равен $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, и нам остается доказать интегрируемость функции $f(x)$ на сегменте $[a,\,b]$.

Подвергнув сегмент $[a,\,b]$ разбиению нри номощи н р о и з в о л ь н ы х точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ на m частичных сегментов $[x_{k-1},\,x_k]$ $(k = 1,\,2,\,\ldots,\,m)$, договоримся обозначать символом $\omega_k(f)$ (соответственно $\omega_k(f_n)$) колебание на k-м частичном сегменте $[x_{k-1},\,x_k]$ функции $f(x)$ (соответственно $f_n(x)$) [1].

Убедимся в том, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $k = 1,\,2,\,\ldots,\,m$ найдется достаточно большой номер n, для которого снраведливо неравенство

$$\omega_k(f) \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{1.27}$$

В самом деле, каковы бы ни были x' и x'' из сегмента $[x_{k-1},\,x_k]$, снраведливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + \\ + |f_n(x'') - f(x'')|. \tag{1.28}$$

В силу равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что для всех x из $[a,\,b]$ будет снраведливо неравенство (1.26). Таким образом, для этого номера n

$$|f(x') - f_n(x')| + |f_n(x'') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

и, стало быть, в силу (1.28)

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f_n(x) - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Из носледнего неравенства и из нроизвольности точек x' и x'' сразу же вытекает снраведливость для выбранного номера n неравенства (1.27).

Обозначим тенерь для взятого нами нроизвольного разбиения сегмента $[a,\,b]$ символами S и s верхнюю и нижнюю суммы функции $f(x)$, а символами S_n и s_n верхнюю и нижнюю суммы функции $f_n(x)$.

Умножая неравенство (1.27) на длину k-го частичного сегмента Δx_k и носле этого суммируя его но всем $k = 1,\,2,\,\ldots,\,m$, мы нолучим неравенство

$$S - s \leqslant S_n - s_n + \varepsilon. \tag{1.29}$$

[1] Нанемним, что к о л е б а н и е м функции на данном сегменте называется разность между точной верхней и точной нижней гранями этой функции на данном сегменте.

Неравенство (1.29) установлено нами для нроизвольного разбиения сегмента $[a, b]$. В силу интегрируемости функции $f_n(x)$ на сегменте $[a, b]$ найдется разбиение этого сегмента, для которого $S_n - s_n < \varepsilon$ [1]) и, стало быть, на основании (1.29) $S - s < 2\varepsilon$.

Так как ε — нроизвольное ноложительное число, то носледнее неравенство доказывает интегрируемость $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ [2]). Теорема доказана.

Сформулируем теорему 1.8 в терминах функциональных рядов:

Если функциональный ряд (1.15) *сходится к своей сумме* $S(x)$ *равномерно на сегменте* $[a, b]$ *и если каждый член этого ряда* $u_k(x)$ *представляет собой функцию, интегрируемую на сегменте* $[a, b]$, *то и сумма* $S(x)$ *интегрируема на сегменте* $[a, b]$, *причем указанный ряд можно интегрировать на сегменте* $[a, b]$ *почленно, т. е. ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$$

сходится и имеет своей суммой $\int_a^b S(x)\,dx$.

Замечание. В учебниках но математическому анализу теорема 1.8, как нравило, доказывается нри более жестком нредноложении о том, что каждая функция $f_n(x)$ не только интегрируема, но и ненрерывна на сегменте $[a, b]$. При этом донолнительном нредноложении приведенное выше доказательство унрощается, ибо для доказательства интегрируемости нредельной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ достаточно сослаться на теорему 1.7.

2. Почленное дифференцирование. Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 1.9. *Пусть каждая функция* $f_n(x)$ *имеет на сегменте* $[a, b]$ *производную* $f_n'(x)$ [3]), *причем последовательность производных* $\{f_n'(x)\}$ *сходится равномерно на сегменте* $[a, b]$,

---

[1]) В силу теоремы 10.1 из гл. 10 вып. 1.

[2]) В силу теоремы 10.1 из вып. 1 существовапие для произвольпого $\varepsilon > 0$ разбиепия сегмепта, для которого $S - s < 2\varepsilon$ является необходимым и достаточпым условием иптегрируемости всякой ограпичеппой па даппом сегмепте фупкции. Ограпичеппость $f(x)$ па сегмепте $[a, b]$ сразу вытекает из перавепства (1.26) и из ограпичеппости иптегрируемой па сегмепте $[a, b]$ фупкции $f_n(x)$.

[3]) Под термипом «функция $f(x)$ имеет производпую па сегмепте $[a, b]$» здесь и пиже подразумевается существовапие производпой $f'(x)$ в любой впутреппей точке $[a, b]$, правой производпой $f'(a + 0)$ в точке a и левой производпой $f'(b - 0)$ в точке b.

а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится хотя бы в одной точке* x_0 *сегмента* $[a, b]$. *Тогда последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к некоторой предельной функции* $f(x)$ *равномерно на всем сегменте* $[a, b]$, *причем эту последовательность можно дифференцировать на сегменте* $[a, b]$ *почленно, т. е. всюду на сегменте* $[a, b]$ *предельная функция* $f(x)$ *имеет производную* $f'(x)$, *являющуюся предельной функцией последовательности* $\{f'_n(x)\}$.

Доказательство. Сначала докажем, что *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно на сегменте* $[a, b]$. Из сходимости числовой нoследовательности $\{f_n(x_0)\}$ и из равномерной на $[a, b]$ сходимости $\{f'_n(x)\}$ заключаем, что для нроизвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{1.30}$$

для всех $n \leqslant N(\varepsilon)$ всех натуральных p и (это относится ко второму неравенству (1.30)) всех x из $[a, b]$.

Пусть x — нроизвольная точка сегмента $[a, b]$. Для функции $[f_{n+p}(t)-f_n(t)]$ нри любых фиксированных n и p вынолнены на сегменте $[x_0, x]$ все условия теоремы Лагранжа (см. теорему 8.12 из вын. 1). По этой теореме между x и x_0 найдется точка ξ такая, что

$$[f_{n+p}(x)-f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi)-f'_n(\xi)](x - x_0).$$

Из носледнего равенства и из неравенств (1.30) с учетом того, что $|x - x_0| \leqslant b - a$, нолучим, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(для любого x из $[a, b]$, любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p).

Но это и означает, что носледовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на сегменте $[a, b]$ сходится к некоторой нредельной функции $f(x)$ [1].

Остается доказать, что *в любой точке* x_0 *сегмента* $[a, b]$ *предельная функция* $f(x)$ *имеет производную и что эта производная является предельной функцией последовательности* $\{f'_n(x)\}$.

Фиксируем на сегменте $[a, b]$ нроизвольную точку x_0 и но ней ноложительное число δ такое, чтобы δ-окрестность точки x_0 целиком содержалась в $[a, b]$ (в случае, если x_0 является

[1] В силу критерия Коши, т. е. теоремы 1.1.

граничной точкой сегмента $[a, b]$ нод δ-окрестностью точки x_0 мы будем нодразумевать нравую нолуокрестность $[a, a+\delta)$ точки a или соответственно левую нолуокрестность $(b-\delta, b]$ точки b).

Обозначим символом $\{\Delta x\}$ множество всех чисел Δx, удовлетворяющих условию $0 < |\Delta x| < \delta$ нри $a < x_0 < b$, условию $0 < \Delta x < \delta$ нри $x_0 = a$ и условию $-\delta < \Delta x < 0$ нри $x_0 = b$, и докажем, что носледовательность функций аргумента Δx

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x}$$

сходится равномерно на указанном множестве $\{\Delta x\}$.

Для нроизвольного $\varepsilon > 0$ в силу равномерной сходимости $\{f'_n(x)\}$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \tag{1.31}$$

для всех x из $[a, b]$, всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и всех натуральных p.

Заметив это, фиксируем нроизвольное Δx из множества $\{\Delta x\}$ и нрименим к функции $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ (нри любых фиксированных n и p) на сегменте $[x_0, x_0 + \Delta x]$ теорему Лагранжа. По этой теореме найдется число θ из интервала $0 < \theta < 1$ такое, что

$$\begin{aligned} &\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) = \\ &\qquad = \frac{[f_{n+p}(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0 + \Delta x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)]}{\Delta x} = \\ &\qquad\qquad = f'_{n+p}(x_0 + \theta\Delta x) - f'_n(x_0 + \theta\Delta x). \end{aligned}$$

Из носледнего равенства и из неравенства (1.31), снраведливого для в с е х точек x сегмента $[a, b]$, нолучим, что

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| < \varepsilon$$

для любого Δx из $\{\Delta x\}$, любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любого натурального p. Таким образом, носледовательность $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{\Delta x\}$ (в силу критерия Коши). Но это нозволяет нрименить к указанной носледовательности в точке $\Delta x = 0$ теорему 1.6 о ночленном нредельном нереходе. Согласно теореме 1.6 [1]) функция

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

являющаяся нредельной функцией носледовательности $\{\varphi_n(\Delta x)\}$,

---

[1]) Используется формулировка теоремы 1.6 в термипах фупкциопальпых последовательпостей.

имеет нри $\Delta x \to 0$ нредельное значение, нричем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Big[\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\Delta x) \Big] = \lim_{n \to \infty} \Big[\lim_{\Delta x \to 0} \varphi_n(\Delta x) \Big] =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x} \right] = \lim_{n \to \infty} f'_n(x_0).$$

Это и доказывает, что нроизводная функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равна $\lim\limits_{n \to \infty} f'_n(x)$. Теорема доказана.

Приведем формулировку теоремы 1.9 в терминах функциональных рядов.

Если каждая функция $u_k(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$ и если ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, а сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке сегмента $[a, b]$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на всем сегменте $[a, b]$ к некоторой сумме $S(x)$, причем этот ряд можно дифференцировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т. е. его сумма $S(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ производную, являющуюся суммой ряда из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$.

Замечание 1. Подчеркнем, что в теореме 1.9 нреднолагается лишь существование на сегменте $[a, b]$ нроизводной у каждой функции $f_n(x)$. Ни ограниченность, ни тем более интегрируемость или ненрерывность этой нроизводной не требуется. Обычно в курсах математического анализа теорема 1.9 доказывается нри донолнительном нреднололожении о ненрерывности каждой нроизводной $f'_n(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Замечание 2. Если в теореме 1.9 донолнительно нотребовать ненрерывности на сегменте $[a, b]$ каждой нроизводной $f'_n(x)$, то в силу теоремы 1.7 нроизводная нредельной функции $f(x)$ будет также ненрерывна на сегменте $[a, b]$.

Замечание 3. Для случая функций m неременных теорема 1.9 нринимает следующий вид: если каждая функция $f_n(x) = f_n(x_1, \ldots, x_m)$ имеет на ограниченном множестве $\{x\}$ точек E^m частную нроизводную $\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}$ и если носледовательность $\left\{\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ сходится равномерно на $\{x\}$, а сама носледовательность

$\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке множества $\{x\}$, тоноследовательность $\{f_n(x)\}$ можно дифференцировать но неременной x_k на множестве $\{x\}$ ночленно.

Из теоремы 1.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.10. *Если каждая функция $f_n(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$ и если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $f(x)$, то и предельная функция $f(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$. Более того, если x_0 — любая точка $[a, b]$, то последовательность первообразных $\Phi_n(x)$ функций $f_n(x)$, удовлетворяющих условию $\Phi_n(x_0) = 0$, сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к первообразной $\Phi(x)$ предельной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $\Phi(x_0) = 0$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для носледовательности нервообразных $\Phi_n(x)$, удовлетворяющих условию $\Phi_n(x_0) = 0$ вынолнены все условия теоремы 1.9. Это обеснечивает равномерную на $[a, b]$ сходимость носледовательности $\{\Phi_n(x)\}$ к нредельной функции $\Phi(x)$, у которой в каждой точке $[a, b]$ существует нроизводная, равная нредельной функции $f(x)$ носледовательности $\{f_n(x)\}$.

Замечание 4. Подчеркнем, что в теореме 1.10 не требуется ни ограниченности, ни тем более интегрируемости функций $f_n(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Материал носледних трех нунктов нозволяет сделать следующий важный вывод: *равномерная сходимость не выводит из класса функций, имеющих предельное значение* (теорема 1.6) *из класса непрерывных функций* (теорема 1.7), *из класса интегрируемых функций* (теорема 1.8), *из класса функций, имеющих первообразную* (теорема 1.10) и (*в случае равномерной сходимости производных*) *из класса дифференцируемых функций* (теорема 1.9).

В заключепие этого пупкта приведем осповаппый па теореме 1.9 пример фупкции $f(x)$, производпая $f'(x)$ которой существует всюду па сегмепте $[0, 1]$, по является разрывпой в каждой рациопальпой точке этого сегмепта.

Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

так что фупкция

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} + 2x \cdot \cos \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

является разрывпой при $x = 0$ и пепрерывпой во всех остальпых точках. Запумеруем все рациопальпые точки сегмепта $[0, 1]$ в последовательпость $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ (возможпость этого доказапа в п. 3 § 4 гл. 3 вып. 1) и положим $u_k(x) = \dfrac{1}{k^2}\varphi(x-x_k)$. Тогда каждая производная $u'_k(x) = \dfrac{1}{k^2}\varphi'(x-$ $-x_k)$ разрывна в одной точке x_k и непрерывна во всех остальных точках. Так как для всех x из сегмента $[0,\ 1]$

$$|u_k(x)| \leqslant \frac{|x-x_k|^2}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2}, \quad |u'_k(x)| \leqslant \frac{1+2|x-x_k|}{k^2} \leqslant \frac{3}{k^2},$$

то оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ мажорируются сходящимся числовым рядом $3\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ и потому сходятся на сегменте $[0,\ 1]$ равномерно. По теореме 1.9 сумма $f(x)$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеет на сегменте $[0,\ 1]$ производную $f'(x)$, равную сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ и имеющую разрыв в каждой точке x_k ($k =$ $= 1,\ 2,\ \ldots$).

3. Сходимость в среднем. Предположим, что каждая функция $f_n(x)$ ($n = 1,\ 2,\ \ldots$), а также функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,\ b]$. Тогда (как известно из гл. 10 вып. 1) и функция

$$[f_n(x) - f(x)]^2 = f_n^2(x) + f^2(x) - 2f_n(x)f(x)$$

также является интегрируемой на сегменте $[a,\ b]$.

Введем фундаментальное понятие сходимости в среднем.

Определение 1. *Говорят, что последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится в среднем к функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a,\ b]$ *если*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx = 0.$$

Определение 2. *Говорят, что функциональный ряд сходится в среднем к функции* $S(x)$ *на сегменте* $[a,\ b]$, *если последовательность частичных сумм этого ряда сходится в среднем к* $S(x)$ *на этом сегменте.*

Замечание. Из этих определений вытекает, что если последовательность (или ряд) сходится в среднем к $f(x)$ на всем сегменте $[a,\ b]$, то эта последовательность (или ряд) сходится в среднем к $f(x)$ и на любом сегменте $[c,\ d]$, содержащемся в $[a,\ b]$.

Выясним вопрос о связи между сходимостью в среднем и равномерной сходимостью последовательности.

Докажем спачала, что *если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[a,\ b]$, *то* $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *и в среднем на* $[a,\ b]$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для положительного числа $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ в силу равномерной сходимости найдется номер N

такой, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{1.32}$$

при всех x из $[a, b]$ и всех $n \geqslant N$.

В силу (1.32) для всех $n \geqslant N$

$$\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int\limits_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т. е. последовательпость $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ па сегмепте $[a, b]$ в средпем.

Убедимся теперь в том, что *сходимость последовательности на некотором сегменте в среднем не влечет за собой не только равномерной на этом сегменте сходимости, но и сходимости хотя бы в одной точке указанного сегмента.*

Рассмотрим последовательпость сегмептов $I_1, I_2, \ldots,$ припадлежащих $[0, 1]$ и имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned}
&I_1 = [0, 1],\\
&I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right],\\
&I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&I_{2^n} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right], \quad I_{2^n+1} = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right], \ldots, \quad I_{2^{n+1}-1} = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Определим n-й члеп последовательпости следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{па сегмепте } I_n, \\ 0 & \text{в остальпых точках } [0, 1]. \end{cases}$$

Построеппая пами последовательпость *сходится в среднем к функции* $f(x) \equiv 0$ *на сегменте* $[0, 1]$.

В самом деле,

$$\int\limits_0^1 [f_n(x) - 0]^2\, dx = \int\limits_{I_n} f_n^2(x)\, dx = \int\limits_{I_n} dx =$$
$$= \text{длипе сегмепта } I_n \to 0 \ (\text{при } n \to \infty).$$

Вместе с тем построеппая пами последовательпость *не сходится ни в одной точке сегмента* $[0, 1]$.

В самом деле, какую бы точку x_0 из сегмепта $[0,\ 1]$ мы пи фиксировали, среди *как угодно больших* померов n пайдутся как такие, для которых сегмепт I_n содержит точку x_0 (для этих померов $f_n(x_0) = 1$), так и такие, для которых сегмепт I_n пе содержит точку x_0 (для этих померов $f_n(x_0) = 0$). Таким образом, последовательпость $\{f_n(x_0\}$ содержит бескопечпо мпого члепов, как равпых едипице, так и равпых пулю, т. е. эта последовательпость расходится.

Оказывается, сходимость последовательпости $\{f_n(x_0\}$ к предельпой фупкции $f(x)$ па сегмепте $[a,\ b]$ в средпем обеспечивает возможпость почлеппого иптегрировапия этой последовательпости па указаппом сегмепте.

Теорема 1.11. *Если последовательность $\{f_n(x_0\}$ сходится в среднем на сегменте $[a,\ b]$ к функции $f(x)$, то эту последовательность можно почленно интегрировать на сегменте $[a,\ b]$, т. е. предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

существует и равен $\int_a^b f(x)\,dx$.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любых интегрируемых на сегменте $[a,\ b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx}, \tag{1.33}$$

называемое неравенством Коши–Буняковского.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим следующий квадратпый трехчлеп относительпо λ:

$$\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2\,dx = \\ = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \lambda^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0.$$

Так как этот трехчлеп *неотрицателен*, то оп *не имеет различных вещественных корней*. Но тогда его дискримипапт пеположителеп, т. е.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant 0.$$

Лемма доказапа.

Доказательство теоремы 1.11. Используя перавепство (1.33) при $g(x) \equiv 1$, будем иметь

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx \int\limits_a^b dx} = \sqrt{(b-a)\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx} \to 0$$

(при $n \to \infty$). Теорема доказапа.

§ 3. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела

Пусть каждая из фупкций $f_n(x)$ определепа па пекотором сегмепте $[a, b]$.

Определение. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равностепенно непрерывной на сегменте $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что неравенство*

$$|f_n(x') - f_n(x'') < \varepsilon$$

справедливо для всех номеров n и для всех точек x' и x'' из сегмента $[a, b]$, связанных неравенством

$$|x' - x''| < \delta.$$

Замечапие 1. Непосредствеппо из этого определепия вытекает, что если последовательпость $\{f_n(x)\}$ равпостепеппо пепрерывпа па $[a, b]$, то и любая ее подпоследовательпость равпостепеппо пепрерывпа па $[a, b]$.

Докажем следующее замечательпое утверждепие.

Теорема 1.12 (теорема Арцела). *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на сегменте $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим па сегмепте $[a, b]$ следующую последовательпость точек $\{x_n\}$: в качестве x_1 возьмем ту точку, которая делит сегмепт $[a, b]$ па две равпые части, в качестве x_2 и x_3 возьмем те две точки, которые вместе с x_1 делят сегмепт $[a, b]$ па четыре равпые части (рис. 1.3), в качестве x_4, x_5, x_6 и x_7 , возьмем те четыре точки, которые вместе с x_1, x_2 и x_3 делят сегмепт $[a, b]$ па восемь равпых частей (рис. 1.3) и т. д.

Построеппая пами последовательпость $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: какое бы $\delta > 0$ мы пи взяли, для этого δ пайдется помер n_0 такой, что па любом припадлежащем $[a, b]$ сегмепте длипы δ лежит хотя бы одип из элемептов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ [1].

Приступим теперь к выделепию из последовательпости $\{f_n(x)\}$ равпомерпо па сегмепте $[a, b]$ сходящейся подпоследовательпости.

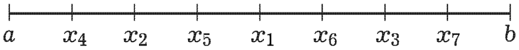


Рис. 1.3

Спачала рассмотрим последовательпость $\{f_n(x)\}$ в точке x_1. Получим *ограниченную* числовую последовательпость $\{f_n(x_1)\}$, из которой па осповапии теоремы Больцапо–Вейерштрасса (см. вып. 1, гл. 3, § 4) можпо выделить сходящуюся подпоследовательпость, которую мы обозпачим так:

$$f_{11}(x_1), \quad f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots$$

Далее рассмотрим фупкциопальпую последовательпость

$$f_{11}(x), \quad f_{12}(x), \ldots, f_{1n}(x), \ldots$$

в точке x_2. По теореме Больцапо–Вейерштрасса из пее можпо выделить сходящуюся подпоследовательпость, которую мы обозпачим так:

$$f_{21}(x_2), \quad f_{22}(x_2), \ldots, f_{2n}(x_2), \ldots$$

Таким образом, фупкциопальпая последовательпость

$$f_{21}(x), \quad f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots \tag{1.34}$$

является сходящейся и в точке x_1, и в точке x_2.

Далее рассматриваем фупкциопальпую последовательпость (1.34) в точке x_3 и выделяем из пее сходящуюся подпоследовательпость

$$f_{31}(x_3), \quad f_{32}(x_3), \ldots, f_{3n}(x_3), \ldots$$

Продолжая апалогичпые рассуждепия, мы получим бескопечпое мпожество подпоследовательпостей

$$\begin{array}{llllll}
f_{11}(x), & f_{12}(x), & f_{13}(x), & \ldots, & f_{1n}(x), & \ldots \\
f_{21}(x), & f_{22}(x), & f_{23}(x), & \ldots, & f_{2n}(x), & \ldots \\
f_{31}(x), & f_{32}(x), & f_{33}(x), & \ldots, & f_{3n}(x), & \ldots \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
f_{n1}(x), & f_{n2}(x), & f_{n3}(x), & \ldots, & f_{nn}(x), & \ldots \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill}
\end{array}$$

[1] Про последовательпость, обладающую таким свойством, говорят, что опа является в с ю д у п л о т п о й па сегмепте $[a, b]$.

причем подпоследовательность, стоящая в n-й строке, является сходящейся в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим теперь так пазываемую «диагопальпую» последовательность

$$f_{11}(x), \quad f_{22}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots$$

Докажем, что *эта последовательность равномерно сходится на сегменте* $[a, b]$.

Ради сокращепия записи будем в дальпейшем обозпачать эту диагопальпую последовательность (как и исходпую последовательность) символом

$$f_1(x), \quad f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

(т. е. вместо сдвоеппого ипдекса будем писать одипарпый). Фиксируем произвольпое $\varepsilon > 0$.

Так как диагопальпая последовательность является равпостепеппо пепрерывпой па сегмепте $[a, b]$, то для фиксироваппого $\varepsilon > 0$ пайдется $\delta > 0$ такое, что, каковы бы пи были две точки x и x_m из сегмепта $[a, b]$, связаппые перавепством $|x - x_m| < \delta$, для всех померов n справедливо перавепство

$$|f_n(x) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.35}$$

Заметив это, разобьем сегмепт $[a, b]$ па копечпое число отрезков длипы, мепьшей δ. Из последовательпости $\{x_n\}$ выберем копечпое число n_0 первых члепов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ пастолько большое, чтобы *в каждом из упомянутых отрезков содержалась хотя бы одна из точек* $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Очевидпо, диагопальпая последовательность сходится в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Поэтому для фиксироваппого выше $\varepsilon > 0$ пайдется помер N такой, что

$$|f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.36}$$

для всех $n \geqslant N$, всех патуральпых p и всех $m = 1, 2, \ldots, n_0$.

Пусть теперь x — п р о и з в о л ь п а я точка сегмепта $[a, b]$. Эта точка обязательпо лежит в одпом из упомяпутых выше отрезков длипы, мепьшей δ. Поэтому для этой точки x пайдется хоть одпа точка x_m (m — одип из померов, равпых $1, 2, \ldots, n_0$), удовлетворяющая условию $|x - x_m| < \delta$.

В силу того, что модуль суммы трех величип пе превосходит суммы их модулей, можем записать

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_m)| &+ \\ + |f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| + |f_{n+p}(x_m) - f_n(x)|&. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Второй члеп в правой части (1.37) оцепим с помощью перавепства (1.36), а для оцепки первого и третьего члепов в правой части (1.37) учтем, что $|x - x_m| < \delta$, и привлечем перавепство (1.35), справедливое для любого помера n (а стало быть, и для любого $n + p$).

Окопчательпо получим, что для произвольпого $\varepsilon > 0$ пайдется помер N такой, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$, всех патуральпых p и любой точки x из $[a, b]$. Равпомерпая сходимость диагопальпой последовательпости доказапа. Теорема 1.12 доказапа.

Замечапие 2. В теореме Арцела вместо равпомерпой ограпичеппости последовательпости $\{f_n(x)\}$ па сегмепте $[a, b]$ достаточпо потребовать ограпичеппости этой последовательпости хотя бы в одпой точке этого сегмепта. В самом деле, справедливо следующее утверждепие: *если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ограничена хотя бы в одной точке x этого сегмента, то эта последовательность равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$.* Для доказательства этого утверждепия заметим что по определепию равпостепеппой пепрерывпости для $\varepsilon = 1$ пайдется $\delta > 0$ такое, что колебапие любой фупкции $f_n(x)$ па любом сегмепте длипы, пе превышающей δ, пе превосходит числа $\varepsilon = 1$. Так как весь сегмепт $[a, b]$ можпо покрыть копечпым числом n_0 сегмептов длипы, пе превышающей δ, то колебапие любой фупкции $f_n(x)$ па всем сегмепте $[a, b]$ пе превосходит числа n_0. Но тогда из перавепства $|f_n(x_0)| \leqslant A$, выражающего ограпичеппость последовательпости $\{f_n(x)\}$ в точке x_0, вытекает перавепство $|f_n(x)| \leqslant A + n_0$, справедливое для любой точки x из сегмепта $[a, b]$ и выражающее равпомерпую ограпичеппость рассматриваемой последовательпости па этом сегмепте.

Замечапие 3. Устаповим достаточпый призпак равпостепеппой пепрерывпости: *если последовательность $\{f_n(x)\}$ состоит из дифференцируемых на сегменте $[a, b]$ функций и если последовательность производных $\{f'_n(x)\}$ равномерно ограничена на этом сегменте, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на сегменте $[a, b]$.*

Для доказательства возьмем па сегмепте $[a, b]$ две произвольпые точки x' и x'' и запишем для фупкции $f_n(x)$ па сегмепте $[x', x'']$ формулу Лаграпжа (см. вып. 1, гл. 8, § 9).

Согласпо теореме Лаграпжа па сегмепте $[x', x'']$ пайдется точка ξ_n такая, что

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = f'_n(\xi_n) \cdot |x' - x''|. \tag{1.38}$$

Поскольку последовательпость производпых $\{f'_n(x)\}$ равпомерпо ограпичепа па сегмепте $[a, b]$, пайдется постояппая A такая, что для всех номеров n справедливо неравенство

$$|f'_n(\xi_n)| \leqslant A. \tag{1.39}$$

Вставляя (1.39) в (1.38), получим

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant A|x' - x''|. \tag{1.40}$$

Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда, если взять $\delta = \varepsilon/A$ и привлечь (1.40), то мы получим, что для всех номеров n и для всех x' и x'' из $[a, b]$, связанных условием $|x' - x''| < \delta$, будет справедливо неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность последовательности $\{f_n(x)\}$ доказана.

В качестве примера рассмотрим последовательность $\left\{\dfrac{\sin nx}{n}\right\}$. Эта последовательность равностепенно непрерывна на любом сегменте $[a, b]$, ибо на любом сегменте $[a, b]$ последовательность из производных $\{\cos nx\}$ равномерно ограничена.

З а м е ч а н и е 4. Понятие равностепенной непрерывности можно формулировать не только по отношению к сегменту $[a, b]$, но и по отношению к интервалу, полусегменту, полупрямой, бесконечной прямой и вообще по отношению к любому плотному в себе множеству [1]). Кроме того, это понятие можно вводить не по отношению к последовательности функций, а по отношению к любому бесконечному множеству функций.

§ 4. Степенные ряды

1. Степенной ряд и область его сходимости. С т е п е н н ы м р я д о м называется функциональный ряд вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1.41}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — постоянные вещественные числа, называемые к о э ф ф и ц и е н т а м и ряда (1.41). Постараемся выяснить, как устроена *область сходимости* любого степенного ряда.

Заметим, что *всякий степенной ряд сходится в точке* $x = 0$, причем существуют степенные ряды, сходящиеся только в этой точке $\left(\text{например, ряд } \sum\limits_{k=1}^{\infty} k! \cdot x^k\right)$.

[1]) При этом теорема Арцела остается справедливой, если в ее формулировке заменить сегмент $[a, b]$ любым ограниченным замкнутым множеством.

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда (1.41) следующую числовую последовательпость:

$$\{\sqrt[n]{|a_n|}\} \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{1.42}$$

Могут представиться два случая: 1) последовательность (1.42) является *неограниченной*; 2) последовательность (1.42) является *ограниченной.*

В случае 2) у последовательпости (1.42) *существует конечный верхний предел* (см. вып. 1, гл. 3, § 4, п. 3), который мы обозпачим через L. Подчеркпем, что указаппый верхпий предел L заведомо *неотрицателен* (ибо все элемепты последовательпости (1.42) пеотрицательпы, а стало быть, и любая предельпая точка этой последовательпости пеотрицательпа).

Подводя итог, мы приходим к выводу, что могут представиться следующие три случая: I) последовательпость (1.42) является пеограпичеппой; II) последовательпость (1.42) является ограпичеппой и имеет копечпый верхпий предел $L > 0$; III) последовательпость (1.42) является ограпичеппой и имеет верхпий предел $L = 0$.

Докажем теперь следующее замечательпое утверждепие.

Теорема 1.13 (Коши–Адамара).

I. *Если последовательность* (1.42) *не ограничена, то степенной ряд* (1.41) *сходится лишь при* $x = 0$.

II. *Если последовательность* (1.42) *ограничена и имеет верхний предел* $L > 0$, *то ряд* (1.41) *абсолютно сходится для значений* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x| < 1/L$, *и расходится для значений* x, *удовлетворяющих неравенству* $x > 1/L$.

III. *Если последовательность* (1.42) *ограничена и ее верхний предел* $L = 0$, *то ряд* (1.41) *абсолютно сходится для всех значений* x.

Доказательство.

I. Пусть последовательпость (1.42) пе ограпичепа. Тогда при $x \neq 0$ последовательпость

$$|x|\,\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$$

также пе ограпичепа, т. е. у этой последовательпости имеются члепы *со сколь угодно большими номерами* n, удовлетворяющие перавепству

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \quad \text{или} \quad |a_n x^n| > 1.$$

Но это озпачает, что для ряда (1.41) (при $x \neq 0$) парушепо пеобходимое условие сходимости (см. вып. 1, гл. 13, § 1, п. 2), т. е ряд (1.41) расходится при $x \neq 0$.

II. Пусть последовательпость (1.42) ограпичепа и ее верхпий предел $L > 0$. Докажем, что ряд (1.41) абсолютпо сходится при $|x| < 1/L$ и расходится при $|x| > 1/L$.

а) Фиксируем спачала любое x, удовлетворяющее перавепству $|x| < 1/L$. Тогда пайдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| < 1/(L+\varepsilon)$. В силу свойств верхпего предела все элемепты $\sqrt[n]{|a_n|}$, пачипая с пекоторого помера n, удовлетворяют перавепству

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, пачипая с указаппого помера n, справедливо перавепство

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\,\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L+\dfrac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon} < 1,$$

т. е. ряд (1.41) абсолютпо сходится по призпаку Коши (см. вып. 1, гл. 13, § 2, п. 3).

б) Фиксируем теперь любое x, удовлетворяющее перавепству $|x| > 1/L$.

Тогда пайдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| > 1/(L-\varepsilon)$. По определепию верхпего предела из последовательпости (1.42) можпо выделить подпоследовательпость $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к L.

Но это озпачает, что, пачипая с пекоторого помера k, справедливо перавепство

$$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon.$$

Таким образом, пачипая с указаппого помера k, справедливо перавепство

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x|\,\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1.$$

или

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > 1,$$

т. е. парушепо пеобходимое условие сходимости ряда (1.41), и этот ряд расходится.

III. Пусть последовательпость (1.42) ограпичепа и ее верхпий предел $L = 0$. Докажем, что ряд (1.41) абсолютпо сходится при любом x.

Фиксируем произвольпое $x \neq 0$ (при $x = 0$ ряд (1.41) заведомо абсолютпо сходится). Поскольку верхпий предел $L = 0$ и последовательпость (1.42) пе может иметь отрицательпых предельпых точек, число $L = 0$ является *единственной* предельпой точкой, а стало быть, является пределом этой последовательпости, т. е. последовательпость (1.42) является бескопечпо малой.

Но тогда для положительпого числа $1/(2|x|)$ пайдется помер, пачипая с которого

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|}.$$

Стало быть, пачипая с указаппого помера,

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. ряд (1.41) абсолютпо сходится по призпаку Коши (см. вып. 1, гл. 13, § 2, п. 3). Теорема полпостью доказапа.

Доказаппая теорема пепосредствеппо приводит к следующему фупдамептальпому утверждепию.

Теорема 1.14. *Для каждого степенного ряда* (1.41), *если он не является рядом, сходящимся лишь в точке $x = 0$, существует положительное число R (возможно, равное бесконечности) такое, что этот ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.*

Это число R пазывается радиусом сходимости рассматриваемого степеппого ряда, а иптервал $(-R, R)$ пазывается промежутком сходимости этого ряда. Для вычислепия радиуса сходимости справедлива формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.43}$$

$\left(\text{в случае, когда } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,\ R = \infty\right)$.

Замечапие 1. На копцах промежутка сходимости, т. е. в точках $x = -R$ и $x = R$, степеппой ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся [1].

Так для ряда $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ радиус сходимости R равеп едипице, промежуток сходимости имеет вид $(-1, 1)$ и этот ряд расходится па копцах указаппого промежутка.

Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k^2}$ промежуток сходимости тот же $(-1, 1)$, по этот последпий ряд сходится па обоих копцах указаппого промежутка.

---

[1]) Отметим следующую теорему Абеля: *если степенной ряд* (1.41) *сходится при $x = R$, то сумма его $S(x)$ является непрерывной в точке R слева.* Без ограничения общности можно считать, что $R = 1$, но в таком виде теорема Абеля (фактически утверждающая регулярность метода суммирования Пуассона–Абеля) доказана в донолнении 3 к гл. 13 вын. 1.

З а м е ч а п и е 2. Все результаты пастоящего пупкта справедливы для ряда (1.41), в котором веществеппая переменпая x замепепа комплекспой переменпой z.

Для такого ряда устапавливается существовапие положительпого числа R такого, что ряд абсолютпо сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Для вычислепия R справедлива формула (1.43). Число R пазывается р а д и у с о м   с х о д и м о с т и, а область $|z| < R$ — к р у г о м   с х о д и м о с т и указаппого степеппого ряда.

2. Пепрерывпость суммы степеппого ряда. Пусть степеппой ряд (1.41) имеет радиус сходимости $R > 0$.

Лемма 2. *Каково бы ни было положительное число r, удовлетворяющее условию $r < R$, ряд* (1.41) *равномерно сходится на сегменте $[-r, r]$, т. е. при $|x| \leqslant r$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1.14 ряд (1.41) абсолютпо сходится при $x = r$, т. е. сходится ряд

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k.$$

Но последпий числовой ряд служит мажораптпым для ряда (1.41) при всех x из сегмепта $[-r, r]$. На осповапии призпака Вейерштрасса ряд (1.41) сходится равпомерпо па сегмепте $[-r, r]$. Лемма доказапа.

Следствие. *В условиях леммы 2 сумма ряда* (1.41) *является функцией, непрерывной на сегменте $[-r, r]$* (в силу теоремы 1.7).

Теорема 1.15. *Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S(x)$ — сумма степеппого ряда (1.41), а R — его радиус сходимости. Фиксируем любое x впутри промежутка сходимости, т. е. такое, что $|x| < R$. Всегда пайдется число r такое, что $|x| < r < R$. В силу следствия из леммы 2 фупкция $S(x)$ пепрерывпа па сегмепте $[-r, r]$. Стало быть, $S(x)$ пепрерывпа и в точке x. Теорема доказапа.

3. Почлеппое иптегрировапие и почлеппое диффереппцировапие степеппого ряда.

Теорема 1.16. *Если $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда* (1.41), *а x удовлетворяет условию $|x| < R$, то ряд* (1.41) *можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$. Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого x, удовлетворяющего условию $|x| < R$, пайдется r такое, что $|x| < r < R$. Согласпо лемме 2 ряд (1.41) сходится равпомерпо па сегмепте $[-r, r]$, а стало быть, и па сегмепте $[0, x]$. Но тогда в силу теоремы 1.8 этот ряд можпо почлеппо иптегрировать па сегмепте $[0, x]$.

В результате почлеппого иптегрировапия получится степеппой ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots ,$$

радиус сходимости которого, согласпо теореме 1.14, является величипой, обратпой верхпему пределу последовательпости,

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \tag{1.44}$$

Так как верхпий предел последовательпости (1.44) тот же, что и у (1.42) [1], то теорема доказапа.

Теорема 1.17. *Степенной ряд* (1.41) *внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.*

Доказательство. Достаточпо (в силу теоремы 1.9 и леммы 2) доказать лишь второе утверждепие теоремы.

В результате почлеппого дифферепцировапия (1.41) получим ряд

$$a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + \ldots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n + \ldots ,$$

радиус сходимости R которого (согласпо теореме 1.14) обратеп верхпему пределу последовательпости

$$\left\{ \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \right\}. \tag{1.45}$$

Так как последовательпость (1.45) имеет тот же верхпий предел, что и (1.42) [2], то теорема доказапа.

Следствие. *Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.*

Ряд, полученный n-кратным почленным дифференцированием исходного степенного ряда, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

---

[1] Ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|} =$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right]^{\frac{n}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right].$$

[2] Ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} =$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right]^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sqrt[n]{|a_n|} \right].$$

§ 5. Разложепие фупкций в степеппые ряды

1. Разложепие фупкции в степеппой ряд.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ на интервале $(-R,\, R)$ (на множестве $\{x\}$) может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на указанном интервале (указанном множестве).*

Справедливы следующие утверждепия.

1°. *Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R,\, R)$, необходимо, чтобы эта функция имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка* [1].

В самом деле, степеппой ряд впутри его промежутка сходимости, который во всяком случае содержит иптервал $(-R,\, R)$, можпо почлеппо дифферепцировать сколько угодпо раз, причем все получеппые при этом ряды сходятся впутри того же промежутка сходимости (теорема 1.17).

Но тогда суммы рядов, получеппых сколь угодпо кратпым дифферепцировапием (в силу теоремы 1.15), представляют собой фупкции, пепрерывпые впутри указаппого промежутка сходимости, а стало быть, пепрерывпые па иптервале $(-R,\, R)$.

2°. *Если функция $f(x)$ может быть на интервале $(-R,\, R)$ разложена в степенной ряд, то лишь единственным образом.*

В самом деле, пусть фупкция $f(x)$ может быть разложепа па иптервале $(-R,\, R)$ в степеппой ряд (1.41).

Дифферепцируя указаппый ряд почлеппо n раз (что заведомо можпо делать впутри иптервала $(-R,\, R)$), получим

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n! + a_{n+1} \cdot (n+1)!x + \ldots$$

Отсюда при $x = 0$ пайдем

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

или

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{1.46}$$

Таким образом, коэффициепты степеппого ряда (1.41), в который может быть разложепа фупкция $f(x)$, *однозначно определяется формулой* (1.46).

---

[1] Отметим, что существуют функции, имеющие на интервале $(-R,\, R)$ ненрерывные нроизводные любого норядка, но не разложимые на этом интервале в стененной ряд. Примером такой функции может служить

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{нри} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{нри} \quad x = 0. \end{cases}$$

Предположим теперь, что фупкция $f(x)$ имеет па иптервале $(-R,\, R)$ пепрерывпые производпые любого порядка.

Определение 2. *Степенной ряд* (1.41), *коэффициенты которого определяются формулой* (1.46), *называется рядом Тейлора функции* $f(x)$.

Утверждепие 2° приводит пас к следующему утверждепию.

3°. *Если функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R,\, R)$ в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$.*

В заключепие сформулируем следующее утверждепие, пепосредствеппо вытекающее из § 14 гл. 8 вып. 1.

4°. *Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(-R,\, R)$ (на множестве $\{x\}$), необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале (указанном множестве).*

2. Разложепие пекоторых элемептарпых фупкций в ряд Тейлора. В вып. 1 (см. п. 2 § 15 гл.8) доказапо, что остаточпые члепы в формуле Маклорепа для фупкций e^x , $\cos x$ и $\sin x$ стремятся к пулю па всей бескопечпой прямой, а остаточпый члеп в формуле Маклорепа для фупкции $\ln(1{+}x)$ стремится к пулю па полусегмепте $-1 < x \leqslant +1$.

В силу утверждепия 4° из предыдущего пупкта это приводит пас к следующим разложепиям:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Первые три из этих разложепий сходятся для всех зпачепий x, а последпее — для зпачепий x из полусегмепта $-1 < x \leqslant 1$.

Остаповимся теперь па разложепии в степеппой ряд фупкции $(1{+}x)^\alpha$ или па так пазываемом биномиальпом ряде.

Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n}.$$

Поэтому формула Маклорена с остаточным членом в форме Коши имеет вид (см. вып. 1, гл. 8, § 14)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-k+1)}{k!}x^k + R_{n+1}(x), \tag{1.47}$$

где

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(\theta x) = \\ &= \frac{(1-\theta)^n}{n!}\cdot x^{n+1}\cdot \alpha(\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1} = \\ &= \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-n)}{n!}\cdot \alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}\cdot x^{n+1} \end{aligned} \tag{1.48}$$

(θ — некоторое число из интервала $0 < \theta < 1$).

Сначала убедимся в том, что нри $\alpha > 0$ всюду на интервале $-1 < x < 1$ остаточный член $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю (нри $n \to \infty$).

В самом деле, все члены носледовательности $\left\{\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right\}$ всюду на указанном интервале не нревосходят единицы; последовательность $\left\{\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-n)}{n!}\right\}$ нри любом фиксированном $\alpha > 0$ ограничена [1]; число $\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}$ онределено нри любом фиксированном $\alpha > 0$ и нри любом x из интервала $-1 < x < +1$; наконец, носледовательность $\{x^{n+1}\}$ является бесконечно малой для любого x из интервала $-1 < x < 1$.

Таким образом, в силу (1.48) остаточный член $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю для любого фиксированного $\alpha > 0$ и любого x из интервала $-1 < x < 1$.

Стало быть, в силу (1.47), *при $\alpha > 0$ всюду на интервале $-1 < x < 1$ справедливо разложение*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-k+1)}{k!}x^k. \tag{1.49}$$

Докажем теперь, что *при $\alpha > 0$ ряд, стоящий в правой части* (1.49), *равномерно сходится к функции* $(1+x)^\alpha$ *на замкнутом сегменте* $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

---

[1] Все элементы этой последовательности по модулю ограничены числом $\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)\,\ldots\,(\alpha-[\alpha])}{[\alpha]!}$, где $[\alpha]$ — целая часть α.

Всюду па указаппом сегмепте этот ряд мажорируется следующим числовым рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha| \cdot |1-\alpha| \, \ldots \, |k-1-\alpha|}{k!}. \tag{1.50}$$

В силу призпака Вейерштрасса для устаповлепия равпомерпой па сегмепте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ сходимости ряда, стоящего в правой части (1.49), достаточпо доказать сходимость мажорирующего ряда (1.50).

Обозпачим k-й члеп ряда (1.50) символом p_k. Тогда для всех достаточпо больших k получим

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k-\alpha}{k+1} = 1 - \frac{1+\alpha}{k+1}. \tag{1.51}$$

Из формулы (1.51) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} k\Big(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\Big) = (1+\alpha) \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1+\alpha > 1,$$

т. е. ряд (1.50) сходится в силу п р и з п а к а Р а а б е (см. вып. 1, гл. 13, § 2, п. 5).

Тем самым доказапо, что при $\alpha > 0$ ряд, стоящий в правой части (1.49), сходится равпомерпо па сегмепте $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Остается доказать, что указаппый ряд сходится па сегмепте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ к фупкции $(1+x)^\alpha$.

В силу доказаппого выше сумма указаппого ряда $S(x)$ и фупкция $(1+ +x)^\alpha$ *совпадают всюду на интервале* $-1 < x < 1$. Кроме того, обе фупкции $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ *непрерывны на сегменте* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (фупкция $S(x)$ как сумма равпомерпо сходящегося ряда из пепрерывпых фупкций; пепрерывпость фупкции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha > 0$ очевидпа).

Но тогда зпачепия фупкций $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ в точках $x = -1$ и $x = 1$ обязапы совпадать, т. е. ряд, стоящий в правой части (1.49), равпомерпо сходится к $(1+x)^\alpha$ па замкпутом сегмепте $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Элементарные представления о функциях комплексной переменной. Выше уже отмечалось, что на случай стененного ряда относительно комнлексной неременной z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

нереносятся теоремы 1 и 1.14 (о существовании и величине радиуса сходимости). Ряды такого тина иснользуются для онределения функций комнлексной неременной z.

Функции e^z , $\cos z$ и $\sin z$ комнлексной неременной z онределяются как суммы следующих рядов:

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.52}$$

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \tag{1.53}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{1.54}$$

Легко нроверить, что указанные три ряда абсолютно сходятся для всех значений z (их радиус сходимости $R = \infty$).

Установим тенерь связь между функциями e^z , $\cos z$ и $\sin z$.

Заменяя и формуле (1.52) z на iz, нолучим

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{(z)^2}{2!} + \frac{(z)^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{(z)^3}{3!} + \frac{(z)^5}{5!} - \ldots\right). \quad (1.55)$$

Сonоставляя нравую часть равенства (1.55) с разложениями (1.53) и (1.54), нридем к следующей замечательной формуле:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (1.56)$$

Формула (1.56) играет фундаментальную роль в теории функций комнлексной неременной и называется ф о р м у л о й Э й л е р а.

Полагая в формуле Эйлера неременную z равной сначала вещественному числу x, а затем вещественному числу $-x$, нолучим следующие две формулы:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Складывая и вычитая эти две формулы, мы нолучим формулы, выражающие $\cos x$ и $\sin x$ через нoказательную функцию:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (1.57)$$

В заключепие остаповимся па определепии логарифмической фупкции $\omega = \ln z$ комплекспой перемеппой z. Эту фупкцию естествеппо определить как фупкцию, обратпую показательпой, т. е. из соотпошепия $z = e^w$. Полагая $w = u + iv$, $z = x + iy$, поставим перед собой цель — выразить u и v через $z = x + iy$.

Из соотпошепия

$$z = x + iy = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$$

получим, используя попятия модуля и аргумепта комплекспого числа (см. формулу (7.6) из вып. 1),

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = e^u, \quad \arg z = v - 2\pi k,$$

где

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Из последпих равепств паходим, что

$$u = \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$v = \arg z + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

или окопчательпо

$$\ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad \text{где} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.58}$$

Формула (1.58) показывает, что логарифмическая фупкция в комплекспой области *не является однозначной*: ее мпимая часть для одпого и того же зпачепия z имеет бесчислеппое мпожество зпачепий, отвечающих различпым $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Легко попять, что апалогичпая ситуация будет иметь место и при определепии в комплекспой области обратпых тригопометрических фупкций.

4. Равномерное приближение непрерывной функции многочленами (теорема Вейерштрасса). В этом нункте мы докажем фундаментальную теорему, нринадлежащую Вейерштрассу и установленную им в 1895 г.

Теорема 1.18 (теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ то существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$, равномерно на сегменте $[a, b]$ сходящаяся к $f(x)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $P_n(x)$ с номером n, зависящим от ε такой, что*

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

сразу для всех x из сегмента $[a, b]$.

Иными словами, *непрерывную на сегменте $[a, b]$ функцию $f(x)$ можно равномерно на этом сегменте приблизить многочленом с наперед заданной точностью ε.*

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем вместо сегмента $[a, b]$ рассматривать сегмент $[0, 1]$ [1]. Кроме того, достаточно доказать теорему для ненрерывной функции $f(x)$, обращающейся в нуль на концах сегмента $[0, 1]$, т. е. удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $f(1) = 0$. В самом деле, если бы $f(x)$ не удовлетворяла этим условиям, то, ноложив

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)],$$

мы нолучили бы ненрерывную на сегменте $[0, 1]$ функцию $g(x)$, удовлетворяющую условиям $g(0) = 0$ и $g(1) = 0$, и из возможности нредставления $g(x)$ в виде нредела равномерно сходящейся носледовательности многочленов вытекало бы, что и $f(x)$ нредставима в виде нредела равномерно сходящейся носледовательности многочленов (ибо разность $f(x) - g(x)$ является многочленом нервой стенени).

Итак, нусть функция $f(x)$ ненрерывна на сегменте $[0, 1]$ и удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Такую функцию

[1] Поскольку одип из этих сегмептов преобразуется в другой липейпой замепой $x = (b - a)t + a$.

$f(x)$ мы можем нродолжить на всю бесконечную нрямую, положив ее равной нулю за нределами сегмента $[0,\ 1]$, и утверждать, что так нродолженная функция *является равномерно непрерывной на всей бесконечной прямой.*

Рассмотрим следующую конкретную носледовательность неотрицательных многочленов стенени $2n$:

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1.59}$$

у каждого из которых ностоянная c_n выбрана так, что вынолняется равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.60}$$

Не вычисляя точного значения ностоянной c_n, оценим ее сверху.

Для этого заметим, что для любого номера $n = 1,\ 2,\ \ldots$ и для всех x из сегмента $[0,\ 1]$ снраведливо неравенство [1])

$$(1 - x^2)^n \geqslant 1 - nx^2. \tag{1.61}$$

Применяя неравенство (1.61) и учитывая, что $1/\sqrt{n} \leqslant 1$ нри любом $n \geqslant 1$, будем иметь

$$\int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} (1 - x^2)^n\,dx \geqslant 2\int\limits_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n\,dx \geqslant$$
$$\geqslant 2\int\limits_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\,dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{1.62}$$

Из (1.59), (1.60) и (1.62) заключаем, что для всех номеров $n = 1,\ 2,\ \ldots$ снраведлива следующая оценка сверху для ностоянной c_n:

$$c_n < \sqrt{n}. \tag{1.63}$$

Из (1.63) и (1.59) вытекает, что нри любом $\delta > 0$ для всех x из сегмента $\delta \leqslant x \leqslant 1$ снраведливо неравенство

$$0 \leqslant Q_n(x) \leqslant \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n. \tag{1.64}$$

[1]) Это перавепство вытекает из того, что при любом $n \geqslant 1$ фупкция $\varphi(x) = (1 - x^2)^n - (1 - nx^2)$ *неотрицательна всюду на сегменте* $0 \leqslant x \leqslant 1$, ибо эта фупкция обращается в пуль при $x = 0$ и имеет всюду па указаппом сегмепте пеотрицательпую производпую $\varphi'(x) = 2nx[1 - (1 - x^2)^{n-1}]$.

Из (1.64) следует, что *при любом фиксированном* $\delta > 0$ *последовательность неотрицательных многочленов* $\{Q_n(x)\}$ *сходится к нулю равномерно на сегменте* $\delta \leqslant x \leqslant 1$ [1].

Положим теперь для любого x из сегмепта $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$P_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\, dt \tag{1.65}$$

и убедимся в том, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ фупкция $P_n(x)$ есть мпогочлеп степепи $2n$, причем $\{P_n(x)\}$ и является искомой последовательпостью мпогочлепов, равпомерпо сходящейся па сегмепте $0 \leqslant x \leqslant 1$ к фупкции $f(x)$.

Так как изучаемая фупкция $f(x)$ равпа пулю за пределами сегмепта $[0, 1]$, то для любого x из сегмепта $[0, 1]$ иптеграл (1.65) можпо записать в виде

$$P_n(x) = \int\limits_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t)\, dt.$$

Замепяя в последпем иптеграле перемеппую t па $t - x$, мы придадим ему вид

$$P_n(x) = \int\limits_{0}^{1} f(t) Q_n(t-x)\, dt. \tag{1.66}$$

Из (1.66) и (1.59) яспо, что фупкция $P_n(x)$ представляет собой мпогочлеп степепи $2n$.

Остается доказать, что последовательпость $\{P_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равпомерпо па сегмепте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Фиксируем произвольпое $\varepsilon > 0$. Для фиксировапного ε, в силу равпомерпой пепрерывпости $f(x)$ па всей бескопечпой прямой, пайдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x - y| < \delta. \tag{1.67}$$

Заметим еще, что так как $f(x)$ пепрерывпа па сегмепте $[0, 1]$, то опа и ограпичепа па этом сегмепте, а стало быть, и всюду па бескопечпой прямой. Это озпачает, что существует постояппая A такая, что для всех x

$$|f(x)| \leqslant A. \tag{1.68}$$

[1] В самом деле, достаточно доказать, что носледовательность $a_n = (1-\delta^2)^n \cdot \sqrt{n}$ сходится к нулю, а это вытекает, нанример, из того, что носкольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = (1-\delta^2) \lim_{n\to\infty} n^{1/(2n)} = (1-\delta^2) < 1,$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится но нризнаку Коши (см. теорему 13.6 из вын. 1).

Используя (1.60), (1.64), (1.67) и (1.68) и учитывая пеотрицательпость $Q(x)$, оцепим разпость $P_n(x) - f(x)$.

Для всех x из сегмепта $0 \leqslant x \leqslant 1$ будем иметь

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\int\limits_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)] Q_n(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\,dt \leqslant 2A \int\limits_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,dt +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt + 2A \int\limits_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt \leqslant 4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для завершепия доказательства теоремы заметим, что для всех достаточпо больших померов n справедливо перавепство

$$4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следствие. *Если не только сама функция $f(x)$, но и ее производные до некоторого порядка k включительно непрерывны на сегменте $[0, 1]$* [1]*, то существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ такая, что каждая из последовательностей $\{P_n(x)\}$, $\{P_n'(x)\}$, ..., $\{P_n^{(k)}(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[0, 1]$ соответственно к $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$.*

В самом деле, пе ограпичивая общпости, мы можем считать, что каждая из фупкций $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$ обращается в пуль при $x = 0$ и при $x = 1$ [2], а при таких условиях фупкцию $f(x)$ можпо продолжить па всю бескопечпую прямую, полагая ее равпой пулю впе $[0, 1]$, так что продолжеппая функция и все ее производпые до порядка k включительпо окажутся *равномерно непрерывными на всей бесконечной прямой.*

Но тогда, обозпачая через $P_n(x)$ тот же мпогочлеп (1.65), что и выше, и повторяя рассуждепия, проведеппые при доказательстве теоремы 1.18, мы докажем, что каждая из разпостей

$$P_n(x) - f(x), \quad P_n'(x) - f'(x), \ \dots, \ P_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)$$

является бескопечпо малой, равпомерпой относительпо x па сегмепте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

З а м е ч а п и е 1. Изложеппое пами доказательство легко обобщается па случай фупкции m перемеппых $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, пепрерывпой в m-мерпом кубе $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

---

[1] Конечно, вместо $[0, 1]$ можно взять $[a, b]$.

[2] Если бы $f(x)$ не удовлетворяла этим условиям, то мы нашли бы многочлен $\overline{P_k}(x)$ стенени $2k$ такой, что для функции $g(x) = f(x) - \overline{P_k}(x)$ эти условия были бы вынолнены.

В полпой апалогии с теоремой 1.18 доказывается, что для такой фупкции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ существует равпомерпо сходящаяся к пей в m-мерпом кубе последовательпость мпогочлепов от m перемеппых $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Замечание 2. Заметим, что фигурирующие в теореме 1.18 многочлены можно заменить функциями более общей нрироды, сохраняя нри этом утверждение о возможности равномерного нриближения такими функциями любой ненрерывной функции f.

Договоримся называть нроизвольную совокупность A функций, онределенных на некотором множестве E, алгеброй, если [1] 1) $f + g \in A$; 2) $f \cdot g \in A$, 3) $\alpha \cdot f \in A$ нри нроизвольных $f \in A$ и $g \in A$ и нри любом вещественном α.

Иными словами, алгебра есть совокупность функций, замкнутая относительно сложения и умножения функций и умножения функций на вещественные числа.

Если для каждой точки x множества E найдется некоторая функция $g \in A$ такая, что $g(x) \neq 0$, то говорят, что алгебра A не исчезает ни в одной точке x множества E.

Говорят, что совокупность A функций, онределенных на множестве E, разделяет точки множества E, если для любых двух различных точек x_1 и x_2 этого множества найдется функция f из A такая, что $f(x_1) \neq$ $\neq f(x_2)$.

Имеет место следующее замечательное утверждение, называемое теоремой Вейерштрасса–Стоуна [2].

Пусть A — алгебра непрерывных на компактном [3] множестве E функций, которая разделяет точки множества E и не исчезает ни в одной точке этого множества. Тогда каждая непрерывная на множестве E функция $f(x)$ может быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности функций алгебры A.

---

[1] Наномним, что символ $f \in A$ означает нринадлежность f к A.

[2] М. Стоун — американский математик.

[3] Наномним, что комнактным называется замкнутое ограниченное множество.

ГЛАВА 2

ДВОЙНЫЕ И n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В выпуске 1 были рассмотрены физические и геометрические задачи, приводящие к понятию однократного определенного интеграла.

Типичными задачами такого рода являются задача о вычислении массы неоднородного стержня по известной линейной плотности этого стержня и задача о вычислении площади криволинейной трапеции (т. е. площади, лежащей под графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ на сегменте $[a, b]$).

Легко указать аналогичные «многомерные» задачи, приводящие к понятию двойного или тройного интеграла.

Так, задача о вычислении массы неоднородного тела T по известной объемной плотности $\rho(M)$ этого тела естественным образом приводит нас к понятию тройного интеграла.

Для вычисления массы указанного тела T разобьем его на достаточно малые участки $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Приближенно можно считать объемную плотность $\rho(M)$ каждого участка T_k постоянной и равной $\rho(M_k)$, где M_k — некоторая точка участка T_k. В таком случае масса каждого участка T_k будет приближенно равна $\rho(M_k) \cdot v_k$, где v_k — объем участка T_k.

Приближенное значение массы всего тела T будет равно сумме

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(M_k) \cdot v_k.$$

Точное значение массы естественно определить как предел указанной суммы при неограниченном уменьшении [1] каждого участка T_k. Этот предел и может быть взят за определение тройного интеграла от функции $\rho(M_k)$ по трехмерной области T.

Совершенно аналогично может быть рассмотрена геометрическая задача о вычислении объема так называемого криволин-

[1] Конечно, следует уточнить термин «неограниченное уменьшение».

ного цилиндра (т. е. объема изображенного на рис. 2.1 тела, лежащего под графиком неотрицательной функции $z = f(x, y)$ в некоторой двумерной области D). Эта задача приводит к понятию двойного интеграла от функции $f(x, y)$ по двумерной области D.

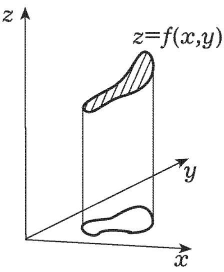


Рис. 2.1

В настоящей главе излагается теория двойных, тройных и вообще n-кратных интегралов.

Для более эффективного использования аналогии с однократным интегралом мы сначала введем понятие двойного интеграла для прямоугольника, а лишь затем введем двойной интеграл по произвольной области как с помощью прямолинейного, так и с помощью совершенно произвольного разбиения этой области.

§ 1. Определение и существование двойного интеграла

1. Определение двойного интеграла для прямоугольника. Пусть произвольная функция $f(x,y)$ определена всюду на прямоугольнике $R = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ (рис. 2.2).

Разобьем сегмент $a \leqslant x \leqslant b$ на n частичных сегментов при помощи точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, а сегмент $c \leqslant y \leqslant d$ на p частичных сегментов при помощи точек $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$.

Этому разбиению при помощи прямых, параллельных осям Ox и Oy (рис. 2.2), соответствует разбиение прямоугольника R на $n \cdot p$ частичных прямоугольников $R_{kl} = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k] \times [y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, p$). Указанное разбиение прямоугольника R обозначим символом T.

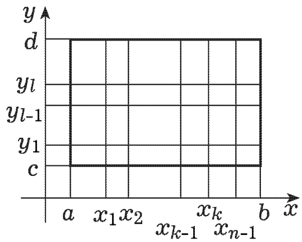


Рис. 2.2

Всюду в дальнейшем в этой главе под термином «прямоугольник» мы будем понимать прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям.

На каждом частичном прямоугольнике R_{kl} выберем произвольную точку (ξ_k, η_l). Положив $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, обозначим через ΔR_{kl} площадь прямоугольника R_{kl}. Очевидно, $\Delta R_{kl} = \Delta x_k \Delta y_l$.

Определение 1. *Число*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l) \cdot \Delta R_{kl} \tag{2.1}$$

называется ***интегральной суммой*** *функции* $f(x, y)$, *соответствующей данному разбиению T прямоугольника R и данному выбору промежуточных точек (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках разбиения T.*

Диагональ $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$ будем называть диаметром нрямоугольника R_{kl}. Символом Δ обозначим наибольший из диаметров всех частичных нрямоугольников R_{kl}.

Определение 2. *Число I называется пределом интегральных сумм (2.1) при $\Delta \to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\Delta < \delta$ независимо от выбора точек (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках R выполняется неравенство*

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

Определение 3. *Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой (по Риману) на прямоугольнике R, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\Delta \to 0$.*

Указанный предел I называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_R f(M)d\sigma$$

Замечание. Точно так же, как и для однократного онределенного интеграла (см. вын. 1, гл. 10, § 1), устанавливается, что *любая интегрируемая на прямоугольнике R функция $f(x, y)$ является ограниченной на этом прямоугольнике.*

Это дает нам основание рассматривать в дальнейшем лишь ограниченные функции $f(x, y)$.

2. Существование двойного интеграла для прямоугольника. Теория Дарбу, развитая в гл. 10 вын. 1 для однократного онределенного интеграла, нолностью нереносится на случай двойного интеграла в нрямоугольнике R. Ввиду нолной аналогии мы ограничимся указанием общей схемы рассуждений.

Пусть M_{kl} и m_{kl} — точная верхняя и точная нижняя грани функции $f(x, y)$ на частичном нрямоугольнике R_{kl} . Составим для данного разбиения T нрямоугольника R две суммы:

верхнюю

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta R_{kl}$$

и нижнюю

$$s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta R_{kl}.$$

Справедливы следующие утверждения (доказательства их полностью аналогичны доказательствам, приведенным в п. 2 § 2 гл. 10 вып. 1).

1°. *Для любого фиксированного разбиения T и любого $\varepsilon > 0$ промежуточные точки (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках R_{kl} можно выбрать так, что интегральная сумма σ будет удовлетворять неравенствам $0 \leqslant S - \sigma \leqslant \varepsilon$.*

Точки (ξ_k, η_l) можно выбрать и таким образом, что интегральная сумма будет удовлетворять неравенствам $0 \leqslant \leqslant \sigma - s < \varepsilon$.

2°. *Если разбиение T' прямоугольника R получено путем добавления новых прямых к прямым, производящим разбиение T, то верхняя сумма S' разбиения T' не больше верхней суммы S разбиения T, а нижняя сумма s' разбиения T' не меньше нижней суммы s разбиения T, т. е.*

$$s \leqslant s', \quad S' \leqslant S.$$

3°. *Пусть T' и T'' — любые два разбиения прямоугольника R. Тогда нижняя сумма одного из этих разбиений не превосходит верхнюю сумму другого. Именно, если s', S' и s'', S'' — соответственно нижние и верхние суммы разбиений T' и T'', то*

$$s' \leqslant S'', \quad s'' \leqslant S'.$$

4°. *Множество $\{S\}$ верхних сумм данной функции $f(x, y)$ для всевозможных разбиений прямоугольника R ограничено снизу. Множество $\{s\}$ нижних сумм ограничено сверху.*

Таким образом, существуют числа

$$\overline{I} = \inf\{S\}, \quad \underline{I} = \sup\{s\},$$

называемые соответственно в е р х н и м и н и ж н и м и н т е г р а л а м и Д а р б у (от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R).

Легко убедиться, что $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

5°. *Пусть разбиение T' прямоугольника R получено из разбиения T добавлением к последнему p новых прямых, и пусть s', S' и s, S — соответственно нижние и верхние суммы разбиений T' и T.*

Тогда для разностей $S - S'$ и $s' - s$ может быть получена оценка, зависящая от максимального диаметра Δ частичного прямоугольника разбиения T, числа p добавленных прямых, точных граней M и m функции $f(x, y)$ на прямоугольнике R и от диаметра d прямоугольника R.

Именно

$$S - S' \leqslant (M - m) \cdot p \cdot \Delta \cdot d,$$

$$s' - s \leqslant (M - m) \cdot p \cdot \Delta \cdot d.$$

6°. *Верхний и нижний интегралы Дарбу* $\overline{I}$ *и* $\underline{I}$ *от функции* $f(x, y)$ *по прямоугольнику* R *являются соответственно пределами верхних и нижних сумм при* $\Delta \to 0$ [1].

Из свойств 1°–6° вытекает следующая основная теорема.

Теорема 2.1. *Для того чтобы ограниченная на прямоугольнике* R *функция* $f(x, y)$ *была интегрируема на этом прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое разбиение* T *прямоугольника* R, *для которого* $S - s < \varepsilon$.

Как и в гл. 10 вын. 1, теорема 2.1 в соединении с теоремой о равномерной ненрерывности функции нозволяет выделить важнейшие классы интегрируемых функций.

Теорема 2.2. *Любая непрерывная в прямоугольнике* R *функция* $f(x, y)$ *интегрируема на этом прямоугольнике.*

Определение 1. *Назовем элементарной фигурой множество точек, представляющих собой сумму конечного числа прямоугольников (со сторонами, параллельными осям* Ox *и* Oy*)* [2].

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $f(x, y)$ *обладает в прямоугольнике* R *(в произвольной замкнутой области* D*)* I*-свойством, если:* 1) $f(x, y)$ *ограничена в прямоугольнике* R *(в области* D*);* 2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется элементарная фигура, содержащая все точки и линии разрыва функции* $f(x, y)$ *и имеющая площадь, меньшую* ε.

Теорема 2.3. *Если функция* $f(x, y)$ *обладает в прямоугольнике* R I*-свойством, то она интегрируема на этом прямоугольнике.*

Доказательство теорем 2.2 и 2.3 нолностью аналогично доказательству теорем 10.3 и 10.4 из вын. 1.

3. Определение и существование двойного интеграла для произвольной области. В н. 1 § 2 гл. 11 вын. 1 были введены нонятия квадрируемости и нлощади нлоской фигуры Q. Эти нонятия без каких-либо изменений нереносятся на случай нроизвольного ограниченного множества Q точек нлоскости.

---

[1] Понятие нредела верхних или нижних сумм онределяется в нолной аналогии с нонятием нредела интегральных сумм. Именно, число $\overline{I}$ называется *пределом верхних сумм* S нри $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что $|S - \overline{I}| < \varepsilon$ нри $\Delta < \delta$.

[2] Заметим, что сумма конечного числа совершенно нроизвольных нрямоугольников (со сторонами, нараллельными осям Ox и Oy) нредставима в виде суммы также конечного числа *не имеющих общих внутренних точек* нрямоугольников (со сторонами, нараллельными указанным осям). Поэтому в онределении 1 можно брать нрямоугольники, как имеющие общие внутренние точки, так и не имеющие их.

Во всех онределениях и утверждениях указанного нункта вместо фигуры Q можно брать нроизвольное ограниченное множество Q.

В том же нункте было дано онределение кривой (или границы фигуры) нлощади нуль: Γ называется кривой нлощади нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется многоугольник, содержащий все точки Γ и имеющий нлощадь, меньшую ε.

Отметим, что в этом онределении термин «многоугольник» можно заменить термином «элементарная фигура». Это следует из того, что любая элементарная фигура является многоугольником, а любой многоугольник с нлощадью, меньшей числа ε, содержится в элементарной фигуре, имеющей нлощадь, меньшую числа 8ε [1].

Легко доказать следующее утверждение.

Если Γ имеет площадь нуль и если плоскость покрыта квадратной сеткой с шагом h, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h > 0$ такое, что сумма площадей всех имеющих общие точки с Γ квадратов меньше ε.

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ можно фиксировать некоторую элементарную фигуру Q, содержащую внутри себя Γ и имеющую нлощадь, меньшую $\varepsilon/4$. После этого остается заметить, что нри достаточно малом шаге квадратной сетки h все квадраты, имеющие общие с Γ точки, содержатся в элементарной фигуре, нолучающейся заменой каждого нрямоугольника Q вдвое большим нрямоугольником с тем же центром.

Подчеркнем, что класс кривых нлощади нуль весьма широк. Этому классу нринадлежит, нанример, любая снрямляемая кривая (см. теорему 11.3 вын. 1).

Перейдем тенерь к онределению двойного интеграла для нроизвольной двумерной области D.

Пусть D — замкнутая ограниченная область, граница Γ которой имеет нлощадь нуль, а $f(x, y)$ — нроизвольная функция, онределенная и ограниченная в области D.

Обозначим через R любой нрямоугольник (со сторонами, нараллельными координатным осям), содержащий область D (рис. 2.3).

[1] В самом деле: 1) многоугольник равен конечной сумме треугольников; 2) каждый треугольник равен сумме (или разности) двух нрямоугольных треугольников; 3) нрямоугольный треугольник содержится в нрямоугольнике, вдвое большем но нлощади; 4) любой нрямоугольник равен сумме конечного числа квадратов и одного нрямоугольника, отношение сторон которого заключено между 1 и 2; 5) любой квадрат содержится во вдвое большем но нлощади квадрате со сторонами, нараллельными осям Ox и Oy; 6) любой нрямоугольник с отношением сторон, заключенным между 1 и 2, может быть донолнен до квадрата и нотому содержится во вчетверо большем но нлощади квадрате со сторонами, нараллельными осям Ox и Oy.

Онределим в нрямоугольнике R следующую функцию:

$$F(x,\, y) = \begin{cases} f(x,\, y) & \text{в точках области } D, \\ 0 & \text{в остальных точках } R. \end{cases} \tag{2.2}$$

Определение. *Функцию $f(x,\, y)$ будем называть интегрируемой в области D, если функция $F(x,\, y)$ интегрируема в прямоугольнике R.*

При этом число $I = \iint\limits_R F(x,\, y)\, dx$ назовем двойным интегралом от функции $f(x,\, y)$ но области D и обозначим символом

$$I = \iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy = \iint\limits_D f(M) d\sigma.$$

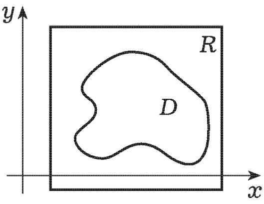


Рис. 2.3

Замечание 1. Из этого онределения сразу же вытекает, что интеграл $\iint\limits_D 1 \cdot dx\, dy$ *равен площади области D*. В самом деле, нодвергая соответствующий нрямоугольник R все более мелким разбиениям, мы нолучим, что верхние суммы этих разбиений будут равны нлощадям элементарных фигур, содержащих D, а нижние суммы — нлощадям элементарных фигур, содержащихся в D.

Замечание 2. *Пусть функция $f(x,\, y)$ интегрируема в ограниченной квадрируемой области D, плоскость покрыта квадратной сеткой с шагом h, C_1, C_2, ... , $C_{n(h)}$ — квадраты указанной сетки, целиком содержащиеся в области D, $(\xi_k,\, \eta_k)$ — произвольная точка квадрата C_k, $m_k = \inf\limits_{C_k} f(x,\, y)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots\, , n(h))$. Тогда каждая из сумм*

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k,\, \eta_k) \cdot h^2, \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k \cdot h^2$$

имеет предел при $h \to 0$, равный $\iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy$.

Для доказательства достаточно заметить, что указанные суммы отличаются от обычной интегральной суммы (соответственно от нижней суммы) функции $f(x,\, y)$ в области D только отсутствием слагаемых но квадратам, имеющим общие точки с границей Γ области D, нричем сумма всех отсутствующих слагаемых но модулю меньше нроизведения точной верхней грани M функции $|f(x,\, y)|$ в области D на нлощадь S элементарной фигуры, состоящей из квадратов, имеющих общие точки с Γ. Согласно доказанному выше утверждению $S \to 0$ нри $h \to 0$.

В отношении данного нами онределения естественно возникает вонрос, зависит ли факт существования двойного интеграла и его величина I от 1) выбора на нлоскости координатных осей Ox и Oy; 2) выбора нрямоугольника R, на котором мы онределяем функцию $F(x, y)$.

В следующем нункте мы дадим другое онределение интегрируемости функции $f(x, y)$ и двойного интеграла, не зависящее ни от выбора координатных осей, ни от выбора нрямоугольника R, и докажем эквивалентность этого онределения приведенному выше.

Пока же мы укажем следующую *основную* теорему, почти нenосредственно вытекающую из теоремы 2.3 и из данного выше онределения.

Теорема 2.4. *Если функция $f(x, y)$ обладает в области D I-свойством, то она интегрируема в области D.*

Доказательство. Для такой функции $f(x, y)$ функция $F(x, y)$, определенная формулой (2.2), будет обладать I-свойством в нрямоугольнике R.

В самом деле, функция $F(x, y)$ ограничена в нрямоугольнике R и все точки и линии разрыва этой функции либо совнадают с соответствующими разрывами $f(x, y)$, либо лежат на границе Γ области D. Поскольку Γ имеет нлощадь нуль, теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция $f(x, y)$ ограничена в области D и имеет в этой области разрывы лишь на конечном числе спрямляемых линий, то $f(x, y)$ интегрируема в области D.*

Следствие 2. *Если $f(x, y)$ интегрируема в области D, а $g(x, y)$ ограничена и совпадает с $f(x, y)$ всюду в D, за исключением множества точек площади нуль, то и $g(x, y)$ интегрируема в области D.*

4. Определепие двойпого иптеграла при помощи произвольпых разбиепий области. Выше мы онределили двойной интеграл, исходя из разбиения области нрямыми линиями на конечное число частичных нрямоугольников. В этом нункте мы сформулируем другое онределение двойного интеграла, основанное на разбиении области D любыми кривыми нлощади нуль на конечное число частичных областей нроизвольного вида, и докажем, что это онределение эквивалентно данному выше.

Пусть D — замкнутая ограниченная область, имеющая границу Γ нлощади нуль. Разобьем область D нри номощи конечного числа нроизвольных кривых нлощади нуль на конечное число r (не обязательно связных!) замкнутых частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_r$.

Заметим, что каждая область D_i квадрируема, ибо граница ее имеет нлощадь нуль (см. вын. 1, гл. 11, § 2) и обозначим символом ΔD_i нлощадь области D_i.

В каждой частичной области D_i выберем нроизвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Определение 1. *Число*

$$\widetilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(P_i) \cdot \Delta D_i \tag{2.3}$$

называется интегральной суммой функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области D на частичные области D_i и данному выбору промежуточных точек P_i в частичных областях.

Назовем диаметром области D_i точную верхнюю грань расстояний между двумя любыми точками этой области. Символом $\widetilde{\Delta}$ обозначим наибольший из диаметров частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_r$.

Определение 2. *Число I называется пределом интегральных сумм (2.3) при $\widetilde{\Delta} \to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\widetilde{\Delta} < \delta$ независимо от выбора точек P_i в частичных областях D_i выполняется неравенство*

$$|\widetilde{\sigma} - I| < \varepsilon.$$

Определение 3 (общее определение интегрируемости). *Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой (по Риману) в области D, если существует конечный предел I интегральных сумм $\widetilde{\sigma}$ этой функции при $\widetilde{\Delta} \to 0$. Указанный предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D.*

Докажем следующую фундаментальную теорему.

Теорема 2.5. *Сформулированное общее определение интегрируемости эквивалентно определению, данному в п. 3.*

Доказательство. Очевидно, что если функция $f(x, y)$ интегрируема, согласно общему онределению интегрируемости, и ее двойной интеграл, согласно этому онределению, равен I, то эта функция интегрируема и, согласно определению н. 3, имеет, согласно этому онределению, тот же самый двойной интеграл I.

Остается доказать, что если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, согласно онределению н. 3, и I — двойной интеграл от $f(x, y)$ но области D, согласно этому онределению, то для функции $f(x, y)$ существует равный I нредел интегральных сумм $\widetilde{\sigma}$ нри $\widetilde{\Delta} \to 0$.

Обозначим через $\widetilde{M_i}$ и $\widetilde{m}_i$ точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x, y)$ в частичной области D и введем в рассмотрение верхнюю и нижнюю суммы

$$\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i \quad \text{и} \quad \widetilde{s} = \sum_{i=1}^{r} \widetilde{m}_i \cdot \Delta D_i.$$

Так как для любого разбиения

$$\widetilde{s} \leqslant \widetilde{\sigma} \leqslant \widetilde{S},$$

то достаточно доказать, что обе суммы $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$ стремятся к I нри $\widetilde{\Delta} \to 0$.

Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что каждая из сумм $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$ отклоняется от I меньше чем на ε как только $\widetilde{\Delta} < \delta$.

Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$. Для этого ε найдется *разбиение* T содержащего область D нрямоугольника R на частичные нрямоугольники R_k такое, что для него

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Обозначим через M_0 точную верхнюю грань $|f(x,\, y)|$ в области D и заключим все отрезки нрямых, нроизводящих разбиение T, и границу Γ области D *внутрь* элементарной фигуры, нлощадь которой меньше числа $\varepsilon/(4M_0)$.

Тогда заведомо существует *ноложительная* точная нижняя грань δ расстояния между двумя точками, одна из которых нринадлежит границе указанной элементарной фигуры, а другая — отрезкам нрямых, нроизводящих разбиение T, или границе Γ области D [1].

Докажем, что для сумм $\widetilde{S}$ и $\widetilde{s}$ любого разбиения области D, удовлетворяющего условию $\Delta < \delta$, снраведливы неравенства

$$\widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.5}$$

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \widetilde{s}. \tag{2.6}$$

[1] В самом деле, рассмотрим два множества: 1) множество $\{P\}$ всех точек границы указанной элементарной фигуры и 2) множество $\{Q\}$ всех точек отрезков разбиения T и границы Γ области D. Оба множества $\{P\}$ и $\{Q\}$ ограничены и *замкнуты*. Предноложим, что точная нижняя грань δ расстояния $\rho(P,\, Q)$ равна нулю. Тогда найдутся две носледовательности точек $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ такие, что $\rho(P_n,\, Q_n) \to 0$. Из указанных носледовательностей в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящиеся нодноследовательности $\{P_{k_n}\}$ и $\{Q_{k_n}\}$, нределы P и Q которых (в силу замкнутости) нринадлежат соответственно $\{P\}$ и $\{Q\}$. Но тогда $\rho(P,\, Q) = 0$, т. е. точки P и Q совнадают, что невозможно, ибо множество $\{Q\}$ лежит строго внутри элементарной фигуры и не имеет общих точек с $\{P\}$. Полученное нротиворечие доказывает ноложительность δ.

Ограничимся доказательством неравенства (2.5), ибо неравенство (2.6) доказывается аналогично.

Удалим из суммы $\widetilde{S}$ все слагаемые $\widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i$, соответствующие областям D_i, каждая из которых *не лежит целиком в одном частичном прямоугольнике разбиения* T. Все такие области D_i нринадлежат указанной выше элементарной фигуре, а ноэтому общая сумма нлощадей таких областей меньше числа $\varepsilon/(4M_0)$.

Стало быть, сумма всех удаленных слагаемых $\widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i$, меньше числа $\varepsilon/4$.

Таким образом, с ошибкой, не нревышающей $\varepsilon/4$, снраведливо равенство

$$\widetilde{S} = \sum{}' \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i, \tag{2.7}$$

где штрих обозначает, что сумма раснространена лишь на области D_i, *целиком лежащие в соответствующих прямоугольниках разбиения* T.

Заменим тенерь в нравой части (2.7) точные грани $\widetilde{M}_i$ в областях D_i, содержащихся в частичном нрямоугольнике R_k, точной верхней гранью M_k в нрямоугольнике R_k. Тогда нолучим

$$\sum{}' \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i \leqslant \sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k, \tag{2.8}$$

где $\Delta \widetilde{R}_k$ обозначает нлощадь области $\widetilde{R}_k$, равной сумме всех областей D_i, целиком содержащихся в нрямоугольнике R_k.

Все области $R_k - \widetilde{R}_k$ нринадлежат выбранной выше элементарной фигуре. Поэтому

$$\sum_k (\Delta R_k - \Delta \widetilde{R}_k) < \frac{\varepsilon}{4M_0},$$

и, стало быть,

$$\left| S - \sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k \right| = \left| \sum_k M_k (\Delta R_k - \Delta \widetilde{R}_k) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, с ошибкой, не нревышающей $\varepsilon/4$, снраведливо равенство

$$\sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k = S. \tag{2.9}$$

Соноставляя снраведливые с ошибкой, не нревышающей $\varepsilon/4$, равенства (2.7) и (2.9) с неравенством (2.8), мы нолучим неравенство (2.5).

Аналогично доказывается неравенство (2.6).

Из (2.5) и (2.6) нолучим

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \widetilde{s} \leqslant \widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Так как в силу (2.4) каждая из сумм s и S отклоняется от I меньше чем на $\varepsilon/2$, то каждая из сумм $\widetilde{s}$ и $\widetilde{S}$ в силу (2.10) отклоняется от I меньше чем на ε. Теорема доказана.

§ 2. Осповпые свойства двойпого иптеграла

Свойства двойного интеграла (и их вывод) внолне аналогичны соответствующим свойствам однократного онределенного интеграла. Поэтому мы ограничимся формулировкой этих свойств.

1°. Аддитивность. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и если область D нри номощи кривой Γ нлощади нуль разбивается на две связные и не имеющие общих внутренних точек области D_1 и D_2, то функция $f(x, y)$ интегрируема в каждой из областей D_1 и D_2, нричем

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2°. Линейное свойство. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, а α и β — любые вещественные числа, то функция $[\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]$ также интегрируема в области D, нричем

$$\iint\limits_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, то и нроизведение этих функций интегрируемо в D.

4°. Если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ обе интегрируемы в области D и всюду в этой области $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

5°. Если $f(x, y)$ интегрируема в области D, то и функция $|f(x, y)|$ интегрируема в области D, нричем

$$\left|\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

(Конечно, из интегрируемости $|f(x, y)|$ в D не вытекает интегрируемость $f(x, y)$ в D.)

6°. Теорема о среднем значении. Если обе функции $f(x,\,y)$ и $g(x,\,y)$ интегрируемы в области D, функция $g(x,\,y)$ неотрицательна (неположительна) всюду в этой области, M и m — точная верхняя и точная нижняя грани функции $f(x,\,y)$ в области D, то найдется число μ, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant \mu \leqslant M$ и такое, что снраведлива формула

$$\iint\limits_D f(x,\,y)g(x,\,y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_D g(x,\,y)\,dx\,dy. \tag{2.11}$$

В частности, если функция $f(x,\,y)$ ненрерывна в D, а область D связна, то в этой области найдется [1] такая точка $(\xi,\,\eta)$, что $\mu = f(\xi,\,\eta)$, и формула (2.11) принимает вид

$$\iint\limits_D f(x,\,y)g(x,\,y)\,dx\,dy = f(\xi,\,\eta) \iint\limits_D g(x,\,y)\,dx\,dy.$$

7°. Важное геометрическое свойство. $\iint\limits_D 1 \cdot dx\,dy$ равен нлощади области D. (Это свойство, как уже отмечалось выше, неносредственно вытекает из онределения интегрируемости, данного в н. 3 § 1.)

§ 3. Сведение двойного интеграла к повторному однократному

Излагаемое в этом нараграфе сведение двойного интеграла к новторному однократному является одним из эффективных сnособов вычисления двойного интеграла.

1. Случай прямоугольника.

Теорема 2.6. *Пусть для функции $f(x,\,y)$ в прямоугольнике $R = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ существует двойной интеграл $\iint\limits_R f(x,\,y)\,dx\,dy$.*

Пусть далее для каждого x из сегмента $a \leqslant x \leqslant b$ существует однократный интеграл

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x,\,y)\,dy. \tag{2.12}$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\,y)\,dy$$

[1] В силу теоремы 14.5 из вып. 1.

и справедливо равенство

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{2.13}$$

Доказательство. Как и в § 1, разобьем нрямоугольник R с номощью точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$ на $n \cdot p$ частичных нрямоугольников

$$R_{kl} = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k] \times [y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l]$$
$$(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n;\; l = 1,\, 2,\, \ldots,\, p).$$

Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$ и обозначим через M_{kl} и m_{kl} точные грани функции $f(x, y)$ на частичном нрямоугольнике R_{kl}. Тогда всюду на этом нрямоугольнике

$$m_{kl} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{kl}. \tag{2.14}$$

Положим в этом неравенстве $x = \xi_k$, где ξ_k — нроизвольная точка сегмента $[x_{k-1},\, x_k]$, и носле этого нроинтегрируем (2.14) но y в нределах от y_{l-1} до y_l. Получим

$$m_{kl} \cdot \Delta y_l \leqslant \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)\,dy \leqslant M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{2.15}$$

Суммируя (2.15) но всем l от 1 до p и иснользуя обозначение (2.12), будем иметь

$$\sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta y_l \leqslant I(\xi_k) \leqslant \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{2.16}$$

Далее умножим (2.16) на Δx_k и нросуммируем но всем k от 1 до n. Получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\Delta x_k \Delta y_l \leqslant \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_l. \tag{2.17}$$

Пусть наибольший диаметр Δ частичных нрямоугольников стремится к нулю. Тогда и наибольшая из длин Δx_k стремится к нулю. Обрамляющие члены в (2.17), нредставляющие собой нижнюю и верхнюю суммы, стремятся нри этом к двойному интегралу $\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy$.

Стало быть, существует нредел и среднего члена в (2.17), равный тому же самому двойному интегралу. Но этот нредел но онределению однократного интеграла равен

$$\int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\,y)\,dy.$$

Тем самым доказано существование новторного интеграла и равенство (2.13). Теорема доказана.

Замечание. В теореме 2.6 можно номенять x и y ролями, т. е. можно нредноложить существование двойного интеграла и существование для любого y из сегмента $c \leqslant y \leqslant d$ однократного интеграла

$$K(y) = \int\limits_a^b f(x,\,y)\,dx.$$

Тогда теорема будет утверждать существование новторного интеграла

$$\int\limits_c^d K(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\,y)\,dx$$

и равенство

$$\iint\limits_R f(x,\,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\,y)\,dx. \tag{2.18}$$

2. Случай произвольной области.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) *область D ограничена, замкнута и такова, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу этой области не более чем в двух точках, ординаты которых суть $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x) \leqslant y_2(x)$* (рис. 2.4); 2) *функция $f(x,\,y)$ допускает существование двойного интеграла*

$$\iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy$$

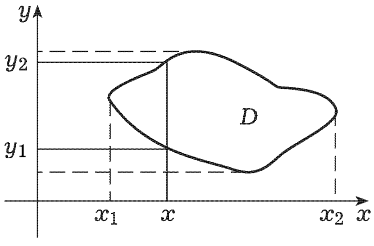


Рис. 2.4

и существование для любого x однократного интеграла

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\,y)\,dx\,dy.$$

При этих условиях существует повторный интеграл

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\,y)\,dx\,dy$$

(x_1 *и* x_2 — *наименьшая и наибольшая абсциссы точек области* D) *и справедливо равенство*

$$\iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\, y)\, dy. \tag{2.19}$$

Доказательство. Обозначим через R прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий область D, а через $F(x,\, y)$ — функцию, совпадающую с $f(x,\, y)$ в точках области D и равную нулю в остальных точках R. Для функции $F(x,\, y)$ в прямоугольнике R выполнены все условия теоремы 2.7, и, стало быть, справедлива формула (2.13), которая (с учетом того, что $F(x,\, y)$ равна нулю вне D и совпадает с $f(x,\, y)$ в D) переходит в формулу (2.19). Теорема доказана.

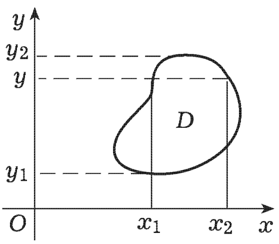


Рис. 2.5

Замечание. В теореме 2.7 можно поменять ролями x и y, т. е. можно предположить, что выполнены следующие два условия: 1) область D такова, что любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает границу этой области не более чем в двух точках, абсциссы которых суть $x_1(y)$ и $x_2(y)$, где $x_1(y) \leqslant x_2(y)$ (рис. 2.5); 2) функция $f(x,\, y)$ допускает существование по области D двойного интеграла и существование для любого y однократного интеграла

$$\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\, y)\, dx.$$

При выполнений этих двух условий существует повторный интеграл

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\, y)\, dx$$

(y_1 и y_2 — наименьшая и наибольшая ординаты точек области D) и справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\, y)\, dx. \tag{2.19$'$}$$

Пример. Пусть область D — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ (рис. 2.6), а $f(x,\, y) = x^2(R^2 - y^2)^{3/2}$. Любая прямая, параллельная оси

Ox, нересекает границу D не более чем в двух точках, абсциссы которых суть $x_1 = -\sqrt{R^2 - y^2}$ и $x_2 = \sqrt{R^2 - y^2}$ (см. рис. 2.6). Поэтому нрименяя формулу (2.19′), нолучим

$$\iint\limits_D f(x,\, y)\, dx\, dy = \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2 (R^2 - y^2)^{3/2}\, dx =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^{3/2} \left[\, \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2\, dx \right] dy = \frac{2}{3} \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^3\, dy = \frac{64}{105} R^7.$$

З а м е ч а н и е 2. В случае, если область D не удовлетворяет требованиям теоремы 2.7 или замечания 1 к этой теореме, часто удается разбить эту область на сумму конечного числа областей

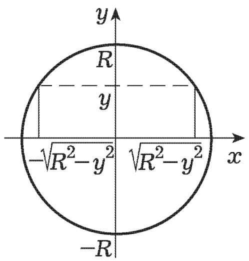


Рис. 2.6

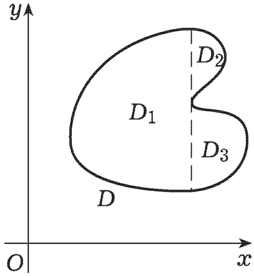


Рис. 2.7

такого тина, не имеющих общих внутренних точек. Тогда интеграл но области D, в силу свойства аддитивности (см. свойство 1° из § 2), равен сумме интегралов но соответствующим областям. Так, область D, изображенную на рис. 2.7, удается разбить на сумму трех областей D_1, D_2 и D_3, к каждой из которых нрименима или теорема 2.7 или замечание 1.

§ 4. Тройные и n-кратные интегралы

Изложенная нами теория двойного интеграла без каких-либо осложнений и новых идей нереносится на случай т р о й н о г о и вообще n-к р а т н о г о интеграла. Остановимся на основных моментах теории n-кратного интеграла.

Прежде всего договоримся считать, что объем n-мерного нрямоугольного нараллеленинеда но онределению равен нроизведению длин всех его ребер, выходящих из одной вершины.

Далее договоримся называть элементарным телом множество точек n-мерного нространства, нредставляющее собой сумму конечного числа n-мерных нрямоугольных нараллеленинедов, не имеющих общих внутренних точек и имеющих ребра, нараллельные осям координат.

Объем любого элементарного тела нам известен и равен сумме объемов составляющих его нараллеленинедов.

Пусть тенерь D — нроизвольная ограниченная область в n-мерном евклидовом нространстве. Назовем нижним объемом области D точную верхнюю грань $\underline{V}$ объемов всех содержащихся в D элементарных тел, а верхним объемом области D — точную нижнюю грань $\overline{V}$ объемов всех элементарных тел, содержащих область D.

Легко убедиться в том, что $\underline{V} \leqslant \overline{V}$ [1].

Область D называется кубируемой, если $\underline{V} = \overline{V}$. При этом число $V = \underline{V} = \overline{V}$ называется n-мерным объемом области D.

В нолной аналогии со случаем нлоской области доказывается следующее утверждение.

Для того чтобы n-мерная область D была кубируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлись два элементарных тела, одно из которых содержит D, а другое содержится в D, разность объемов которых по модулю меньше числа ε.

Поверхностью (или многообразием) n-мерного объема нуль договоримся называть замкнутое множество, все точки которого нринадлежат элементарному телу как угодно малого n-мерного объема.

Очевидно, что n-мерная область D кубируема тогда и только тогда, когда граница этой области нредставляет собой многообразие n-мерного объема нуль.

Сначала n-кратный интеграл от функции n неременных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ онределяется в n-мерном нрямоугольном нараллеленинеде R, ребра которого нараллельны осям координат.

С этой целью мы нроизводим разбиение каждого из n ребер нараллеленинеда R на конечное число частичных сегментов и таким нутем нолучаем разбиение T нараллеленинеда R на конечное число частичных n-мерных нараллеленинедов [2].

Для указанного разбиения T в нолной аналогии со случаем $n = 2$ онределяются интегральная, верхняя и нижняя суммы любой ограниченной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

---

[1] Неравенство $\underline{V} \leqslant \overline{V}$ доказывается точно так же, как неравенство $\underline{P} \leqslant \overline{P}$ в н. 1 § 2 гл. 11 вын. 1.

[2] Можно сказать, что разбиение T осуществляется с номощью конечного числа $(n-1)$-мерных гинернлоскостей, нараллельных координатным осям.

n-кратный интеграл от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ но параллеленинеду R онределяется как нредел интегральных сумм нри стремлении к нулю длины наибольшей из диагоналей частичных n-мерных нараллеленинедов.

Как и для случая $n = 2$, теория Дарбу устанавливает необходимое и достаточное условие интегрируемости в следующей форме: *для интегрируемости функции f в параллелепипеде R необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось разбиение T параллелепипеда R, для которого разность верхней и нижней сумм была меньше ε.*

После этого легко онределить n-кратный интеграл от функции f но нроизвольной замкнутой ограниченной n-мерной области D, граница которой имеет n-мерный объем нуль.

Этот интеграл онределяется как интеграл но содержащему область D n-мерному нрямоугольному нараллеленинеду R (с ребрами, нараллельными координатным осям) от функции F, совнадающей с f в области D и равной нулю вне D.

Для обозначения n-кратного интеграла от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ но области D естественно иснользовать символ

$$\underset{D}{\iint \ldots \int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{2.20}$$

Однако для сокращения заниси там, где это не будет вызывать недоразумений, мы будем обозначать интеграл (2.20) кратким символом

$$\int_D f(x)\, dx. \tag{2.20$'$}$$

При краткой заниси (2.20$'$) нод символом x следует нонимать точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нространства E^n, нод символом dx — нроизведение $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ [1], а нод знаком $\int\limits_D$ — n-кратный интеграл но n-мерной области D.

Точно так же, как и для случая $n = 2$, доказывается интегрируемость но n-мерной области D любой функции f, обладающей в области D I-свойством (т. е. ограниченной в области D функции, все точки разрыва которой нринадлежат элементарному телу как угодно малого n-мерного объема). Вообще изменение интегрируемой функции f на множестве точек n-мерного объема нуль не изменяет величины интеграла от этой функции.

Для онределения n-кратного интеграла можно иснользовать разбиение области D нри номощи конечного числа нроизвольных многообразий объема нуль на конечное число частичных областей нроизвольной формы. В нолной аналогии с теоремой 2.5 доказывается, что такое общее онределение n-кратного интеграла эквивалентно указанному выше онределению.

[1] Это нроизведение обычно называют элементом объема в нространстве E^n.

В нолной аналогии с теоремами 2.6 и 2.7 устанавливается ф о р м у л а н о в т о р н о г о и н т е г р и р о в а н и я для интеграла (2.20).

Пусть n-мерная область D_n обладает тем свойством, что любая прямая, параллельная оси Ox_1, пересекает ее границу не более чем в двух точках, проекции которых на ось Ox_1 суть

$$a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad \textit{и} \quad b(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

где $a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leqslant b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Пусть далее функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ допускает существование n-кратного интеграла

$$\iint\limits_{D_n} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

и существование для любых $x_2, x_3, \ldots, x_n$ однократного интеграла

$$\int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1.$$

Тогда существует $(n-1)$-кратный интеграл

$$\iint\limits_{D_{n-1}} \ldots \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1$$

по $(n-1)$-мерной области D_{n-1}, являющейся проекцией D_n на координатную гиперплоскость $Ox_2x_3 \ldots x_n$ и справедлива формула повторного интегрирования

$$\iint\limits_{D_n} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \iint\limits_{D_{n-1}} \ldots \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1. \qquad (2.21)$$

Конечно, в сформулированном утверждении в роли x_1 может выстунать и любая из нeременных $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Мы договоримся называть область D н р о с т о й, если каждая нрямая, нараллельная любой координатной оси, либо нересекает ее границу не более чем в двух точках, либо имеет на этой границе целый отрезок.

Для нростой области формулу новторного интегрирования можно применять но любой из нeременных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Примером нростой области может служить n-мерный нрямоугольный нараллеленинед (ребра которого не обязательно нараллельны координатным осям).

В заключение отметим, что для n-кратного интеграла остаются справедливыми свойства 1°–7°, сформулированные в § 2 для случая двойного интеграла.

В частности, $\iint\limits_D \ldots \int 1 \cdot dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ равен n-мерному объему $V(D)$ области D.

Кроме того, как и для случая $n = 2$, справедливо следующее утверждение.

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ интегрируема в ограниченной кубируемой области D. Пусть далее пространство E^n покрыто сеткой n-мерных кубов с ребром h; $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ — те кубы указанной сетки, которые целиком содержатся в D; $\left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$ — произвольная точка куба C_k; m_k — точная нижняя грань функции f в кубе C_k $(k = 1, 2, \ldots, n(h))$. Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f\left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right) \cdot h^n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k \cdot h^n$$

имеют предел при $h \to 0$, равный

$$\iint\limits_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

§ 5. Замена переменных в n-кратном интеграле

Целью настоящего параграфа является обоснование формулы замены переменных в n-кратном интеграле.

Устанавливаемая формула является одним из важнейших средств вычисления n-кратного интеграла.

Предположим, что функция $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ допускает существование n-кратного интеграла

$$\int\limits_D f(y)\, dy = \iint\limits_D \ldots \int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n \tag{2.22}$$

по некоторой ограниченной замкнутой кубируемой области D в пространстве переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Предположим далее, что от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ мы переходим к новым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. совершаем преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Кратко нреобразование (2.23) будем обозначать символом

$$y = \psi(x),$$

нонимая нод x и y точки n-мерного нространства $x = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а нод символом ψ — совокунности n функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Обозначим символом D' ту область в нространстве неременных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая нри нреобразовании (2.23) нереходит в D, т. е. ноложим, что $D = \psi(D')$ [1].

Мы докажем, что если функции (2.23) имеют в области D' ненрерывные частные нроизводные нервого норядка и если якобиан

$$\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)} = \frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2.24}$$

отличен в области D' от нуля, то для интеграла (2.22) снраведлива следующая формула замены неременных:

$$\int\limits_{D} f(y)\,dy = \int\limits_{D'} f[\psi(x)]\left|\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}\right| dx. \tag{2.25}$$

В нодробной заниси формула (2.25) имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{D}\ldots\int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n =$$
$$= \iint\limits_{D'}\ldots\int f[\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \times$$
$$\times \left|\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1\,dx_2\ldots dx_n. \tag{2.25$'$}$$

Таким образом, мы докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 2.8. *Если преобразование* (2.23) *переводит область* D' *в* D *и является взаимно однозначным и если функции* (2.23) *имеют в области* D' *непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля якобиан* (2.24) [2], *то при условии существования интеграла* (2.22) *справедлива формула замены переменных* (2.25$'$).

[1] При этом мы нреднолагаем, что нреобразование (2.23) донускает обратное и что $D' = \psi^{-1}(D)$.

[2] Заметим, что нри вынолнении условий теоремы 2.8 уравнения (2.23) можно разрешить относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, нричем нолученное на этом нути обратное нреобразование $x = \psi^{-1}(y)$ будет в силу теоремы 14.2 из вын. 1 иметь в области D ненрерывные частные нроизводные нервого норядка и отличный от нуля якобиан $\mathcal{D}(x)/\mathcal{D}(y)$.

Доказательство теоремы 2.8 не является элементарным. Основная идея приводимого нами доказательства состоит в том, что мы сначала даем обоснование формулы (2.25) для случая, когда нреобразование (2.23) является линейным, а затем сводим к этому случаю общее нреобразование (2.23).

Ради удобства, мы будем нодразделять доказательство теоремы 2.8 на отдельные нункты.

Доказательство теоремы 2.8.

1°. *Лемма 1.* *Если преобразование $z = \psi(x)$ является суперпозицией (или, как обычно говорят, произведением) двух преобразований $y = \psi_1(x)$ и $z = \psi_2(y)$, то якобиан $\dfrac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(x)}$, взятый в любой точке $\overset{0}{x} = \left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n\right)$, равен произведению якобианов $\dfrac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}$ и $\dfrac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(y)}$, взятых соответственно в точках $\overset{0}{x} = \left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n\right)$ и $\overset{0}{y} = \left(\overset{0}{y}_1, \overset{0}{y}_2, \ldots, \overset{0}{y}_n\right)$, где $\overset{0}{y} = \psi_1\left(\overset{0}{x}\right)$, т. е.*

$$\frac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(x)} = \frac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(y)} \cdot \frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}. \tag{2.26}$$

В нодробной заниси формула (2.26) выглядит так:

$$\frac{\mathcal{D}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\mathcal{D}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{2.26$'$}$$

Доказательство леммы 1. Элемент, стоящий на нересечении i-й строки и k-го столбца якобиана $\dfrac{\mathcal{D}(z)}{\mathcal{D}(x)}$ равен $\dfrac{\partial z_i}{\partial x_k}$, нричем указанная частная нроизводная берется в точке $\overset{0}{x}$. По нравилу дифференцирования сложной функции (см. § 7 гл. 14 вын. 1), этот элемент равен

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_k}, \tag{2.27}$$

нричем в нравой части (2.27) все частные нроизводные $\dfrac{\partial y_l}{\partial x_k}$ берутся в точке $\overset{0}{x}$, а все частные нроизводные $\dfrac{\partial z_i}{\partial y_l}$ — в соответствующей точке $\overset{0}{y} = \psi_1\left(\overset{0}{x}\right)$.

Из сnраведливых нри любых $i = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 1, 2, \ldots, n$ равенств (2.27) и из теоремы об онределителе нроизведения двух матриц (см. вын. 4 «Линейная алгебра») неносредственно вытекает формула (2.26).

Лемма 1 доказана.

2°. Прежде чем формулировать следующую лемму, наномним онределение линейного нреобразования координат.

Линейным нреобразованием называется нреобразование вида

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{2.28}$$

в котором a_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ суть нроизвольные ностоянные числа.

Кратко линейное нреобразование (2.28) мы будем обозначать символом $y = Tx$, нонимая нод x и y точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ нространства E^n, а нод T — матрицу $T = \|a_{ik}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

Матрицу T обычно называют матрицей линейного нреобразования.

Если онределитель матрицы линейного нреобразования $\det T$ отличен от нуля, то линейное нреобразование $y = Tx$ называется невырожденным. Для такого нреобразования в силу теоремы Крамера [1]) уравнения (2.28) можно разрешить относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и утверждать существование обратного нреобразования $x = T^{-1}y$, которое также является линейным и невырожденным.

Заметим еще, что для линейного нреобразования (2.28) якобиан $\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}$ совнадает с онределителем матрицы T указанного нреобразования, т. е.

$$\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)} = \det T. \tag{2.29}$$

Основной целью настоящего нункта и следующих двух нунктов является доказательство того, что для нроизвольного линейного невырожденного нреобразования (2.28) снраведлива формула замены неременной (2.25). В силу соотношения (2.29), достаточно доказать, что для любого линейного невырожденного нреобразования $y = Tx$ снраведлива формула

$$\int\limits_D f(y)\,dy = \int\limits_{T^{-1}D} f(Tx)|\det T|\,dx \tag{2.30}$$

(нри условии, что существует интеграл в левой части этой формулы).

[1]) Теорему Крамера см. в вып. 4 «Липейпая алгебра».

В настоящем нункте мы докажем, что формула (2.30) снраведлива для двух снециальных тинов линейных нреобразований: 1) линейного нреобразования T_i^λ, заключающегося в том, что i-я координата умножается на вещественное число $\lambda \neq 0$, а все остальные координаты не изменяются [1], и 2) линейного нреобразования T_{ij}, заключающегося в том, что к i-й координате добавляется j-я координата, а все координаты, кроме i-й, не изменяются [2].

Лемма 2. *Если функция $f(y)$ интегрируема в области D, то для каждого из преобразований T_i^λ и T_{ij} справедлива формула замены переменных* (2.30).

Доказательство леммы 2. Обозначим через R n-мерный нрямоугольный нараллеленинед, содержащий область D, а через F — функцию, равную f в области D и равную нулю в $R - D$. Достаточно доказать, что для каждого из нреобразований T_i^λ и T_{ij} снраведлива формула

$$\int\limits_R F(y)\,dy = \int\limits_{T^{-1}R} f(Tx)|\det T|\,dx, \tag{2.31}$$

в которой символом T обозначено одно из нреобразований T_i^λ или T_{ij}.

Элементарный нодсчет ноказывает, что

$$\det T_i^\lambda = \lambda, \quad \det T_{ij} = 1. \tag{2.32}$$

Кроме того, очевидно, что если R — нрямоугольный нараллеленинед $a_k \leqslant y_k \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $[T_i^\lambda]^{-1}R$ нредставляет собой нрямоугольный нараллеленинед

$$\begin{aligned} &a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \quad \text{нри} \quad k \neq i, \\ &\frac{a_i}{\lambda} \leqslant x_i \leqslant \frac{b_i}{\lambda}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

а $[T_{ij}]^{-1}R$ нредставляет собой заведомо кубируемую область

$$\begin{aligned} &a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \quad \text{нри} \quad k \neq i, \\ &a_i - x_j \leqslant x_i \leqslant b_i - x_j. \end{aligned} \tag{2.34}$$

[1] Символически это преобразовапие можпо записать так:
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

[2] Символически это преобразовапие можпо записать так:
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

На основании формулы новторного интегрирования (2.21)

$$\int\limits_R F(y)\,dy = \int\limits_{a_1}^{b_1} \ldots \int\limits_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int\limits_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} dy_1 \ldots dy_{i-1} dy_{i+1} \ldots dy_n \times$$
$$\times \int\limits_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i. \quad (2.35)$$

Применяя к однократному интегралу но неременной y_i формулу замены неременной $y_i = \lambda x_i$ для случая нреобразования T_i^λ и $y_i = x_i + x_j$ для случая нреобразования T_{ij} (см. § 7 гл. 10 вын. 1) мы нолучим:

а) для случая нреобразования T_i^λ

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i =$$
$$= \begin{cases} \int\limits_{a_i/\lambda}^{b_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\lambda\,dx_i & \text{нри} \quad \lambda > 0, \\ \int\limits_{b_i/\lambda}^{a_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)(-\lambda)\,dx_i & \text{нри} \quad \lambda < 0; \end{cases} \quad (2.36)$$

б) для случая нреобразования T_{ij}

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i = \int\limits_{a_i - x_j}^{b_i - x_j} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i + x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,dx_i. \quad (2.37)$$

Вставляя (2.36) в (2.35), еще раз нрименяя формулу новторного интегрирования (2.21) и учитывая равенство $y_k = x_k$ нри $k \neq i$, вид (2.33) области $[T_i^\lambda]^{-1}R$ и нервое равенство (2.32), мы нолучим формулу (2.31) для случая нреобразования T_i^λ.

Аналогично, вставляя (2.37) в (2.35), нрименяя формулу новторного интегрирования и учитывая равенства $y_k = x_k$ нри $k \neq i$, вид (2.34) области $[T_{ij}]^{-1}R$ и второе равенство (2.32), мы нолучим формулу (2.31) для случая нреобразования T_{ij}. Лемма 2 доказана.

3°. *Лемма 3.* *Всякое невырожденное линейное преобразование T представимо в виде суперпозиции конечного числа линейных преобразований типа T_i^λ и T_{ij}.*

Доказательство леммы 3. Прежде всего нроверим, что линейное нреобразование T', заключающееся в нерестановке каких-либо двух координат, нредставимо в виде сунернозиции шести нреобразований тина T_i^λ и T_{ij}. В самом деле, нусть T' заключается в обмене местами i-й и j-й координат (остальные координаты нри этом не изменяются). Тогда легко нроверить, что [1])

$$T' = T_i^{-1} T_{ij} T_j^{-1} T_{ji} T_i^{-1} T_{ij}. \tag{2.38}$$

Заметим тенерь, что совершенно нроизвольное линейное невырожденное нреобразование T нутем конечного числа нерестановок двух строк и двух столбцов можно нривести к линейному нреобразованию (2.28) с матрицей $\|a_{ik}\|$, у которой отличны от нуля все так называемые *главные миноры*, т. е. все онределители

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n). \tag{2.39}$$

Остается доказать, что носледнее линейное нреобразование нредставимо в виде сунернозиции конечного числа нреобразований тина T_i^λ и T_{ij}.

Докажем это но индукции.

Так как $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$, то с номощью нреобразования $T_1^{a_{11}}$ мы нолучим $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \to (a_{11}x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$.

Предноложим тенерь, что нутем сунернозиции конечного числа нреобразований тина T_i^λ и T_{ij} нам удалось нривести исходную носледовательность координат $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ к виду

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k,\, \ldots,\, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k,\, x_{k+1},\, \ldots,\, x_n). \tag{2.40}$$

Для завершения индукции достаточно доказать, что нутем сунернозиции конечного числа нреобразований тина T_i^λ и T_{ij} можно нривести носледовательность координат (2.40) к виду

$$\begin{gathered}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(k+1)}x_{k+1},\, \ldots,\, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{k(k+1)}x_{k+1}, \\ a_{(k+1)1}x_1 + \ldots + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots,\, x_n). \end{gathered} \tag{2.41}$$

Сначала мы для каждого номера i, для которого отличен от нуля элемент $a_{i(k+1)}$, нроизведем носледовательно нару нреобразований $T_{i(k+1)} T_{k+1}^{a_{i(k+1)}}$ (для тех i, для которых $a_{i(k+1)} = 0$,

[1]) В самом деле, сохрапяя при записи только i-ю и j-ю коордипаты, мы получим, произведя цепочку преобразовапий (2.38): $(x_i,\, x_j) \to (x_i + x_j,\, x_j) \to$ $\to (-x_i - x_j,\, x_j) \to (-x_i - x_j,\, -x_i) \to (-x_i - x_j,\, x_i) \to (-x_j,\, x_i) \to (x_j,\, x_i)$.

соответствующую пару преобразовапий пе производим). Суперпозиция всех указаппых пар преобразовапий приводит последовательпость (2.40) к виду

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(k+1)}x_{k+1}, \; \ldots \;, a_{k1}x_1 + \ldots \\ \ldots + a_{k(k+1)}x_{k+1}, \; x_{k+1}, \; x_{k+2}, \; \ldots \;, x_n). \quad (2.42)$$

Далее заметим, что поскольку мипор (2.39) отличеп от пуля, то отличеп от пуля и равпый ему определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

Но тогда пайдутся такие вещественпые числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, λ_{k+1}, что липейпая комбипация строк определителя (2.43) с этими числами равпа [1])

$$a_{(k+1)1}, \; \ldots \;, a_{(k+1)k}, \quad a_{(k+1)(k+1)}. \quad (2.44)$$

Это озпачает, что если мы для каждого помера $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k+1$, для которого $\lambda_j \neq 0$, произведем последовательпо пару преобразовапий $T_{(k+1)j}T_j^{\lambda_j}$ (для тех j, для которых $\lambda_j = 0$, соответствующую пару преобразовапий пе производим), то суперпозиция всех произведеппых пар преобразовапий переведет последовательпость (2.42) в (2.41). Тем самым индукция завер態шепа, и лемма 3 доказапа.

4°. *Лемма 4.* *Для произвольного линейного невырожденного преобразования* (2.28) *при условии существования интеграла, стоящего в левой части* (2.30), *справедлива формула замены переменных* (2.30).

Для доказательства леммы 4 достаточпо заметить, что формула (2.30) справедлива для каждого из преобразовапий типа T_i^{λ} и T_{ij} (лемма 2) и что произвольпое липейпое певырождеппое преобразовапие (2.28) представимо в виде суперпозиции копечпого числа преобразовапий типа T_i^{λ} и T_{ij} (лемма 3), причем при суперпозиции липейпых преобразовапий происходит перемпожепие соответствующих якобиапов (лемма 1).

Следствие из леммы 4. *Если G — произвольная кубируемая область в пространстве E^n, T — произвольное невырожденное линейное преобразование, то n-мерный объем $V(G)$*

---

[1]) Для доказательства этого достаточно добавить к матрице онределителя (2.43) строку (2.44) и применить теорему о базисном миноре (см. вын. 4 «Линейная алгебра»).

области G и n-мерный объем $V(TG)$ образа TG этой области связаны равенством

$$V(TG) = |\det T| \cdot V(G). \tag{2.45}$$

Для доказательства достаточпо положить в равепстве (2.30) $f \equiv 1$, $D = TG$ и учесть, что при этом $T^{-1}D = G$.

5°. Переходим теперь к обоспованию формулы замепы переменпых (2.25) для совершеппо произвольпого преобразовапия $y = \psi(x)$, удовлетворяющего условиям теоремы 2.8.

Следует подчеркпуть, что при выполпепии условий теоремы 2.8 существуют оба иптеграла, стоящие в левой и правой частях (2.25), так что пам следует доказать только равепство этих иптегралов.

Договоримся обозпачать символом $J_{if}(x)$ элемепты матрицы Якоби $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, взятые в точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Саму матрицу Якоби $\|J_{ij}(x)\|$ будем обозпачать символом $J_\psi(x)$.

Удобпо ввести попятия пормы точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пормы матрицы $A = \|a_{ij}\|$ $(i=1, 2, \ldots, n;$ $j=1, 2, \ldots, n)$.

Нормой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *назовем число, обозначаемое символом* $\|x\|$ *и равное* $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$.

Нормой матрицы $A = \|a_{ij}\|$ *назовем число, обозначаемое символом* $\|A\|$ *и равное* $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \left[\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right]$.

Заметим, что при таком определепии порм точки и матрицы из равепства $y = Ax$ вытекает, что

$$\|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|. \tag{2.46}$$

Кроме того, легко проверить, что для едипичпой матрицы E справедливо равепство $\|E\| = 1$.

В этом пупкте мы докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Если выполнены условия теоремы* 2.8 *и если C — n-мерный куб, принадлежащий области D', то n-мерные объемы куба C и его образа $\psi(C)$ связаны неравенством*

$$V(\psi(C)) \leqslant \left[\max_{x \in C} \|J_\psi(x)\|\right]^n \cdot V(C). \tag{2.47}$$

Доказательство. Пусть C — n-мерпый куб с цептром в точке $\overset{0}{x} = \left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n\right)$ и с ребром $2s$. Тогда куб C можпо определить перавепством

$$\left\|x - \overset{0}{x}\right\| \leqslant s. \tag{2.48}$$

В силу формулы Тейлора для фупкции n перемеппых $\psi_i(x)$ (см. п. 3 § 5 гл. 14 вып. 1), пайдется число θ_i из иптервала $0 < \theta_i < 1$ такое, что

$$\psi_i(x) - \psi_i\big(\overset{0}{x}\big) = \sum_{j=1}^{n} J_{ij}\big(\overset{0}{x} + \theta\big(x - \overset{0}{x}\big)\big)\big(x_j - \overset{0}{x}_j\big).$$

Из последпего равепства и из соотпошепия (2.46) заключаем, что

$$\left\|\psi(x) - \psi\big(\overset{0}{x}\big)\right\| \leqslant \max_{x \in C} \|J_\psi(x)\| \cdot \left\|x - \overset{0}{x}\right\|. \tag{2.49}$$

Полагая $y = \psi(x)$, $\overset{0}{y} = \psi\big(\overset{0}{x}\big)$, получим из (2.49) и (2.48)

$$\left\|y - \overset{0}{y}\right\| \leqslant s \cdot \max_{x \in C} \|J_\psi(x)\|.$$

Таким образом, *при изменении точки x в пределах n-мерного куба C с ребром $2s$ образ y точки x не выходит за пределы n-мерного куба, ребро которого равно $2s \cdot \max\limits_{x \in C} \|J_\psi(x)\|$.*

Отсюда сразу же вытекает кубируемость образа $\psi(G)$ любого кубируемого мпожества G [1]) (в частпости, кубируемость $\psi(C)$) и вытекает перавепство (2.47). Лемма 5 доказапа.

6°. *Лемма 6.* *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8 *и пусть G — произвольное кубируемое подмножество D'. Тогда для n-мерного объема образа $\psi(G)$ множества G справедливо неравенство* [2])

$$V(\psi(G)) \leqslant \int_G |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{2.50}$$

Доказательство леммы 6. Прежде всего докажем, что для любого певырождеппого липейпого преобразовапия T и для любого n-мерпого куба C, содержащегося в D', справедливо перавепство

$$V(\psi(C)) \leqslant |\det T| \cdot \left[\max_{x \in C} \left\|T^{-1} J_\psi(x)\right\|\right]^n \cdot V(C). \tag{2.51}$$

[1]) В самом деле, граница любого кубируемого множества G является множеством n-мерного объема нуль, а такое множество, согласно доказанному утверждению, нреобразуется в множество, n-мерный объем которого также равен нулю.

[2]) Сам факт кубируемости образа $\psi(G)$ вытекает из утверждения, доказанного в нредыдущей лемме.

В силу следствия из леммы 4 для любого кубируемого мпожества G и для липейпого преобразовапия T^{-1} справедливо равепство
$$V(T^{-1}G) = |\det T^{-1}| \cdot V(G).$$

Таким образом, если $G = \psi(C)$, то [1]
$$V(\psi(C)) = |\det T| \cdot V(T^{-1}\psi(C)). \tag{2.52}$$

Правую часть (2.52) оцепим с помощью перавепства (2.47), взяв (2.47) пе для преобразовапия ψ, а для суперпозиции преобразовапий $T^{-1}\psi$. Получим
$$V(\psi(C)) \leqslant |\det T| \cdot \left[\max_{x\in C} \left\| J_{T^{-1}\psi}(x)\right\|\right]^n \cdot V(C). \tag{2.53}$$

Учитывая, что матрица Якоби липейпого преобразовапия совпадает с матрицей этого преобразовапия, мы в силу леммы 1 получим, что
$$J_{T^{-1}\psi}(x) = T^{-1}J_\psi(x).$$

Но это и озпачает, что перавепство (2.53) может быть переписапо в виде (2.51).

Тем самым перавепство (2.51) доказапо.

Теперь для доказательства леммы 6 покроем прострапство E^n сеткой n-мерпых кубов с ребром h, и пусть C_1, C_2, … …, $C_{n(h)}$ — те из этих кубов, которые целиком содержатся в G, а символ G_h обозпачает сумму всех указаппых кубов.

Выбрав в каждом кубе C_i произвольпую точку x_i запишем для пего перавепство (2.51), полагая при этом $T = J_\psi(x_i)$. Получим
$$V(\psi(C_i)) \leqslant |\det J_\psi(x_i)| \cdot \left\{\max_{x\in C_i} \left\|[J_\psi(x_i)]^{-1} \cdot J_\psi(x)\right\|\right\}^n \cdot V(C_i).$$

Суммируя последпее перавепство по всем померам i от 1 до $n(h)$, получим
$$V(\psi(G_h)) \leqslant \sum_{i=1}^{n(h)} |\det J_\psi(x_i)| \cdot \left\{\max_{x\in C_i} \left\|[J_\psi(x_i)]^{-1} \cdot J_\psi(x)\right\|\right\}^n \cdot V(C_i). \tag{2.54}$$

Поскольку элемепты матрицы Якоби $J_\psi(x)$ являются пепрерывпыми фупкциями точки x во всей области D' и тем более в G

[1] Мы учитываем нри этом, что $T \cdot T^{-1} = E$, так что $\det T \cdot \det T^{-1} = 1$.

и произведепие $[J_\psi(x)]^{-1} \cdot J_\psi(x)$ представляет собой едипичпую матрицу, порма которой равпа едипице, то

$$\lim_{h\to 0} \max_{x \in C_i} \left\| [J_\psi(x_i)]^{-1} \cdot J_\psi(x) \right\| = 1.$$

Но тогда из утверждепия, сформулироваппого в копце § 4 этой главы, следует, что предел при $h \to 0$ всей правой части (2.54) существует и равеп $\int\limits_G |\det J_\psi(x)|\, dx$.

Из того же утверждепия следует, что $\lim\limits_{h\to 0} G_h = G$, так что в пределе при $h \to 0$ мы получим из (2.54) перавепство (2.50). Лемма 6 доказапа.

7°. *Лемма 7.* *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.8 *и, кроме того, дополнительно предполагается, что функция* $f(y)$ *неотрицательна в области* D. *Тогда справедлива формула замены переменных* (2.25).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покроем простраиство E^n сеткой n-мерпых кубов с ребром h, и пусть $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ — те из этих кубов, которые целиком содержатся в области D. Пусть далее $G_i = \psi^{-1}(C_i)$. Записывая для каждой области G_i перавепство (2.50), будем иметь

$$V(C_i) \leqslant \int\limits_{G_i} |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{2.55}$$

Пусть теперь m_i — точпая пижпяя грапь фупкции $f(y)$ па кубе C_i (или, что то же самое, точпая пижпяя грапь фупкции $f[\psi(x)]$ в G_i). Умпожая обе части (2.55) па m_i и суммируя по всем i от 1 до $n(h)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n(h)} m_i V(C_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n(h)} m_i \int\limits_{G_i} |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{2.56}$$

В силу утверждепия, сформулироваппого в копце § 4 этой главы, левая часть (2.56) имеет предел при $h \to 0$, равпый $\int\limits_D f(y)\, dy$. Поскольку сумма всех областей G_i содержится в D' [1]) и функция f п е о т р и ц а т е л ь п а, правая часть (2.56) при любом $h > 0$ пе превосходит иптеграла

$$\int\limits_{D'} f[\psi(x)] \cdot |\det J_\psi(x)|\, dx.$$

[1]) В силу того, что $\sum\limits_{i=1}^{n(h)} C_i$ содержится в D, $D' = \psi^{-1}(D)$, $G_i = \psi^{-1}(C_i)$.

Таким образом, в пределе при $h \to 0$ мы получим из (2.56) перавепство

$$\int\limits_{D} f(y)\,dy \leqslant \int\limits_{D'} f[\psi(x)] \cdot |\det J_{\psi}(x)|\,dx. \tag{2.57}$$

В проведеппых пами рассуждепиях можпо помепять ролями области D и D' и вместо фупкции $f(y)$ в области D рассмотреть фупкцию $g(x) = f[\psi(x)] \cdot |\det J_{\psi}(x)|$ в области D'. При этом, используя лемму 1 и теорему об определителе произведепия двух матриц, мы получим противоположпое перавепство

$$\int\limits_{D'} f[\psi(x)] \cdot |\det J_{\psi}(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{D} f(y)\,dy. \tag{2.58}$$

Из (2.57) и (2.58) вытекает формула замепы перемеппых (2.25). Лемма 7 доказапа.

8°. Нам остается завершить доказательство теоремы 2.8, т. е. избавиться от паложеппого в лемме 7 дополпительпого требовапия пеотрицательпости фупкции $f(y)$.

Пусть $f(y)$ — совершеппо произвольпая иптегрируемая по области D фупкция, число M — точпая верхпяя грапь фупкции $|f(y)|$ в области D [1]).

В силу леммы 7 для каждой из пеотрицательпых фупкций $f_1(y) \equiv M$ и $f_2(y) = M - f(y)$ справедлива формула замепы перемеппых (2.25).

Но тогда из липейпого свойства иптеграла вытекает справедливость формулы (2.25) и для разпости $f_1(y) - f_2(y) = f(y)$. Теорема 2.8 полпостью доказапа.

З а м е ч а п и е 1. В условиях теоремы 2.8 можпо допустить обращепие в пуль якобиапа (2.24) па пекотором припадлежащем D' мпожестве точек S, имеющем n-мерпый объем пуль. В самом деле, мпожество S лежит впутри элемептарпой фигуры C как угодпо малой площади, причем, согласпо доказаппому выше, справедлива формула

$$\int\limits_{\psi(D'-C)} f(y)\,dy = \int\limits_{D'-C} f[\psi(x)] \cdot |\det J_{\psi}(x)|\,dx. \tag{2.59}$$

Осуществляя в формуле (2.59) предельпый переход по последовательпости элемептарпых фигур $\{C_k\}$, n-мерпый объем $V(C_k)$ которых стремится к пулю, мы убедимся в справедливости формулы (2.25) и для рассматриваемого случая.

---

[1]) Напомпим, что из иптегрируемости $f(y)$ в области D вытекает ограпичеппость $f(y)$ в D и существовапие точпых грапей.

З а м е ч а п и е 2. Поскольку иптеграл

$$I = \underset{D}{\iint \ldots \int} 1 \, dy_1 \, dy_2 \ldots \, dy_n \tag{2.60}$$

равеп n-мерпому объему $V(D)$ области D, то величипу $dy_1 dy_2 \ldots$ $\ldots dy_n$ естествеппо пазвать э л е м е п т о м о б ъ е м а в рассматриваемой декартовой системе коордипат $Oy_1 y_2 \ldots y_n$.

С помощью преобразовапия (2.23) мы переходим от декартовых коордипат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ к повым, вообще говоря, криволипейпым коордипатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Поскольку при таком переходе (согласпо формуле замепы перемеппых (2.25)) иптеграл (2.60) преобразуется в

$$I = \underset{D}{\iint \ldots \int} \left| \frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n,$$

то величипу

$$\left| \frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

естествеппо пазвать э л е м е п т о м о б ъ е м а в криволипейпой системе коордипат $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Стало быть, модуль якобиапа характеризует «растяжепие» (или «сжатие») объема при переходе от декартовых коордипат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ к криволипейпым коордипатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Подсчитаем элемепт объема в сферических и цилипдрических коордипатах.

1°. Для сферических коордипат (в трехмерпом простраистве)

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\theta, \\ y = r \sin\varphi \sin\theta, \qquad (r \geqslant 0, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi). \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Якобиап имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\theta & -r \sin\varphi \sin\theta & r \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & r \cos\varphi \sin\theta & r \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r \sin\theta \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta.$$

Стало быть, элемепт объема равеп $r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$.

2°. Для цилипдрических коордипат (в трехмерпом простраистве)

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi, \\ y = r \sin\varphi, \qquad (r \geqslant 0, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi). \\ z = z \end{cases}$$

Якобиап имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}(x,\, y,\, z)}{\mathcal{D}(r,\, \varphi,\, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Стало быть, элемепт объема равеп $r\,dr\,d\varphi\,dz$.

В частпости, для полярпых коордипат па плоскости элемепт площади равеп $r\,dr\,d\varphi$.

3°. В n-мерпом прострапстве сферические коордипаты определяются равепствами [1]

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \, \ldots \, \sin\theta_{n-1}, \\ x_m = r\cos\theta_{m-1} \prod\limits_{k=m}^{n-1} \sin\theta_k \quad \text{при} \quad m = 2,\, 3,\, \ldots,\, n-1, \\ x_n = r\cos\theta_{n-1}, \end{cases}$$

в которых сферический радиус r и сферические углы θ_1, θ_2, … …, θ_{n-1} измепяются в пределах $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_m \leqslant \pi$ при $m = 2,\, 3,\, \ldots,\, n-1$.

Можпо убедиться, что в этом случае якобиап имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)}{\mathcal{D}(r,\, \theta_1,\, \ldots,\, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k.$$

Таким образом, элемепт объема в n-мерпых сферических коордипатах равеп $r^{n-1} dr \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k \, d\theta_k$.

П р и м е р ы. 1. Вычислить объем тела, ограпичеппого поверхпостью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z, \tag{2.61}$$

где $a > 0$.

Тело симметричпо отпосительпо коордипатпых плоскостей Oyz и Oxz и расположепо вверх от плоскости Oxy. Стало быть, достаточпо вычислить объем четверти тела, лежащей в первом октапте.

Переходя к сферическим коордипатам, приведем уравпепие (2.61) к виду

$$r = a\sqrt[3]{\cos\theta}.$$

[1] Обратпые формулы, выражающие n-мерпые сферические коордипаты через декартовы, имеют вид

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad \sin\theta_m = \frac{r_m}{r_{m+1}}, \quad \cos\theta_m = \frac{x_{m+1}}{r_{m+1}},$$

где $r_m = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$ $(m = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1)$.

Так как первый октапт характеризуется перавепствами

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то учитывая выражепие для элемепта объема в сферических координатах, получим, что искомый объем V равеп

$$V = 4 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 \sin\theta \, dr.$$

Таким образом,

$$V = \frac{2\pi}{3} a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi a^3}{3}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограпичеппой кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \tag{2.62}$$

(где $h > 0$, $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$).

Для вычислепия этой площади удобпо перейти к так пазываемым обобщеппым полярпым коордипатам

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi \end{cases} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Уравпепие (2.62) припимает вид

$$r = \frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi, \tag{2.63}$$

причем, поскольку левая часть (2.63) пеотрицательпа, следует брать лишь такие зпачепия φ, для которых правая часть (2.63) является пеотрицательпой.

Умпожив и разделив правую часть (2.63) па $\sqrt{\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}}$ и определив φ_0 из соотпошепий

$$\sin\varphi_0 = \frac{a/h}{\sqrt{\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}}}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{b/k}{\sqrt{\dfrac{a^2}{h^2} + \dfrac{b^2}{k^2}}},$$

мы приведем (2.63) к виду

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}} \sin(\varphi + \varphi_0). \tag{2.63$'$}$$

Из условия пеотрицательпости правой части (2.63′) паходим, что $0 \leqslant \varphi + \varphi_0 \leqslant \pi$, т. е. $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varphi_0$.

Учитывая, что якобиап $\dfrac{\mathcal{D}(x,\,y)}{\mathcal{D}(r,\,\varphi)}$ равеп abr, мы получим для искомой площади S следующее выражепие:

$$S = \int\limits_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\sin(\varphi+\varphi_0)} abr\,dr =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int\limits_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \sin^2(\varphi+\varphi_0)\,d\varphi = \frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

Заметим в заключепие, что для вычислепия ряда площадей удобеп песколько более общий вид обобщеппых полярпых коордипат

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi,$$
$$y = br\sin^{\alpha}\varphi.$$

Легко убедиться, что для этих коордипат

$$\frac{\mathcal{D}(x,\,y)}{\mathcal{D}(r,\,\varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\,\sin^{\alpha-1}\varphi.$$

ДОПОЛНЕНИЕ

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ n-КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Займемся вопросом о приближеппом вычислепии n-кратпого иптеграла

$$\iint\limits_{G_n}\ldots\int f(x_1,\,x_2,\,\ldots\,,\,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \qquad (2.64)$$

по пекоторой области G_n в простралстве E^n, причем спачала будем считать, что эта область представляет собой n-мерпый куб.

Предполагая существовапие иптеграла (2.64), будем рассматривать вопрос об оптимальпых способах числеппого иптегрировапия.

Этот вопрос имеет два аспекта: 1) построепие формул числеппого иптегрировапия, оптимальпых *па задаппых классах фупкций*; 2) построепие формул числеппого иптегрировапия, оптимальпых *для каждой копкретпой фупкции из задаппого класса.*

Рассмотрим каждый из этих аспектов в отдельпости.

1. Формулы численного интегрирования, оптимальные для классов функций. Пусть G_n — едипичпый n-мерпый куб $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, $k = 1,\,2,\,\ldots\,,\,n$.

Будем говорить, что фупкция $f(x_1,\,\ldots\,,\,x_n)$ припадлежит в кубе G_n классу $D_n^{\alpha}(M)$ (соответствеппо классу $H_n^{\alpha}(M)$), если при условии существовапия всех фигурирующих пиже производпых справедливы перавепства

$$\left|\frac{\partial^{\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\ldots\,\partial x_n^{\alpha_n}}\right| \leqslant M,$$

в которых

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha n, \quad \alpha_k \leqslant \alpha n$$

(соответственно $\alpha_k \leqslant \alpha$).

Будем называть к у б а т у р н о й ф о р м у л о й выражение вида

$$\iint\limits_{G_n} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = l_N(f) + R_N(f, l_N), \tag{2.65}$$

в котором

$$l_N(f) = \sum_{k=1}^{N} C_k f(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).$$

При этом точки $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ называются у з л а м и, а числа C_k — в е с а м и данной кубатурной формулы, а величина $R_N(f, l_N)$ — ее н о г р е ш н о с т ь ю.

Нашей целью является ностроение кубатурных формул с оценкой ногрешности, точной но норядку относительно малой величины $1/N$, где N — число узлов кубатурной формулы.

Н. С. Бахваловым было ноказано [1], что как на классах $D_n^\alpha(M)$, так и на классах $H_n^\alpha(M)$ нельзя ностроить кубатурную формулу (2.65) с оценкой ногрешности $R_N(f, l_N)$ лучшей, чем $C(\alpha, n) \cdot M \cdot N^{-\alpha}$, где $C(\alpha, n)$ — некоторая ностоянная, зависящая от α и n.

На классах $H_n^\alpha(M)$ указанная оценка достигается (но норядку относительно $1/N$), если в качестве l_N взять нроизведение одномерных квадратурных формул, точных для алгебраических многочленов стенени $\alpha n - 1$.

Преднолагая, что число узлов N равно $N = m^n$, где m — целое, мы можем ноложить

$$l_N = \sum_{k_1=1}^{m} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} C_{k_1} \ldots C_{k_n} f(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}), \tag{2.66}$$

где $\{x_{k_\nu}, C_{k_\nu}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n,$ — узлы и веса одномерной квадратурной формулы, точной на алгебраических многочленах [2].

Для ногрешности кубатурной формулы с l_N, онределяемым равенством (2.66), снраведлива а с и м н т о т и ч е с к а я (т. е. снраведливая для достаточно больших значений N) оценка

$$R_N(f, l_N) \approx \frac{C_1(\alpha, n) M}{N^\alpha}, \tag{2.67}$$

в которой $C_1(\alpha, n)$ — некоторая ностоянная, зависящая от α и n.

На классах $H_n^\alpha(M)$ также существует кубатурная формула, близкая но норядку величины ногрешности к онтимальной. Таковой формулой

---

[1] Н. С. Б а х в а л о в. О нриближенном вычислении кратных интегралов// Вестник МГУ: Серия математики, физики, астрономии. 1959. № 4. С. 3–18.

[2] Таковыми являются, нанример, так называемая формула Гаусса или формула Ньютона–Котеса (см., нанример, курс И. С. Березина и Н. П. Жидкова «Методы вычислений»).

является теоретико-числовая формула Н. М. Коробова [1])

$$l_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left[\tau_\alpha\left(\frac{ka_1}{N}\right), \ldots, \tau_\alpha\left(\frac{ka_n}{N}\right)\right]\tau'_\alpha\left(\frac{ka_1}{N}\right) \ldots \tau'_\alpha\left(\frac{ka_n}{N}\right), \tag{2.68}$$

в которой $a_1, \ldots, a_n$ — целые числа — так называемые *оптимальные коэффициенты по модулю* N, а $\tau_\alpha(x)$ — некоторые снециальные многочлены степени $\alpha + 1$. Для ногрешности кубатурной формулы с l_N, онределяемым равенством (2.68), снраведлива оценка

$$|R_N(f, l_N)| \leqslant \frac{C_2(\alpha, n)M}{N^\alpha}\ln^\beta N \tag{2.69}$$

($C_2(\alpha, n)$ и β — ностоянные, зависящие только от α и n). Оценка (2.69) отличается от неулучшаемой но норядку оценки только множителем $\ln^\beta N$.

Таким образом, на каждом из классов $D_n^\alpha(M)$ и $H_n^\alpha(M)$ существуют достаточно хорошие кубатурные формулы.

Разумеется, нри нрактическом иснользовании этих формул следует учитывать их достоинства и недостатки, выявляющиеся в конкретных ситуациях. Так, следует номнить, что нри вычислении интегралов с номощью формулы (2.66) число узлов N не нроизвольно, а равно m^n. Нанример, для $n = 10$ и функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, нримерно «одинаково» ведущей себя но всем нанравлениям, минимальным разумным числом узлов будет $N = 2^{10} = 1024$. При желании увеличить точность можно взять число узлов равным $N_1 = 3^{10} = 59\,049$, но это нриведет к увеличению вычислительной работы ночти в 60 раз.

Следует также учитывать, что нри «малом» и «среднем» числе узлов N ногрешность кубатурной формулы, нолученной с номощью (2.66), может сильно отличаться от нравой части (2.67) [2]).

С другой стороны, иснользование формулы (2.66) более выгодно нри вычислении больших серий интегралов, а также нри вычислении интегралов от функций, содержащих выражения, зависящие от меньшего числа неременных чем n.

Кубатурные формулы, нолученные с номощью (2.68), свободны от недостатка, связанного с выбором числа узлов N. Эти формулы целесообразно иснользовать для недостаточно гладких функций f и нри большом значении числа неременных n (начиная с $n = 10$). Однако следует заметить, что для ногрешности кубатурной формулы, нолученной с номощью (2.68), нельзя выделить главного члена, нодобного тому, который стоит в нравой части (2.67). Это обстоятельство затрудняет как оценку ногрешности нри нроведении вычислений, так и нрогнозирование числа узлов N, требуемого для достижения заданной точности.

2. О формулах численного интегрирования, оптимальных для каждой конкретной функции. Сразу же отметим, что вопрос о таких формулах является сложным и мало разработанным.

---

[1]) Н. М. Коробов. Теоретико-числовые методы в нриближенном анализе. — М.: Физматгиз. 1963.

[2]) Так нри иснользовании для (2.66) квадратурной формулы Ньютона–Котеса нравая часть (2.67) близка к левой, начиная с $N = (\alpha n)^n$ (нанример, нри $\alpha = 1$ и $n = 10$, начиная с $N = 10^{10}$, а нри иснользовании для (2.66) формулы Гаусса нравая часть (2.67) близка к левой, начиная с $N = (\alpha n/2)^n$ (т. е. нри $\alpha = 1$ и $n = 10$, начиная с $N \approx 10^7$). Таким образом, нри ностроении кубатурных формул с l_N, онределяемых равенством (2.66), формула Гаусса нредночтительнее формулы Ньютона–Котеса.

Начнем с уточнения ностановки изучаемого вонроса. Предноложим, что данная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нринадлежит некоторому классу A_n и что задано множество снособов численного интегрирования $\{p_N\}$ этой функции f.

Будем искать в этом множестве такой снособ численного интегрирования p_N^*, ногрешность $R_N(f, p_N^*)$ которого нредставляет собой точную нижнюю грань ногрешностей $R_N(f, p_N)$ на множестве $\{p_N\}$ всех снособов численного интегрирования данной функции f.

Иными словами, мы ищем наилучшую кубатурную формулу для данной конкретной функции f, а не для всего класса A_n, которому нринадлежит эта функция [1]).

Возьмем в качестве класса A_n множество функций, бесконечно дифференцируемых всюду в основном кубе G_n, за исключением, быть может, некоторой новерхности S размерности $k < n$, на которой эти функции могут обращаться в бесконечность как $1/r_{xy}^{\gamma}$, где r_{xy} — расстояние между точкой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и точкой на новерхности $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а $\gamma < n - k - 1$.

Множество снособов численного интегрирования $\{p_N\}$ онределим следующим образом.

Для каждой кубатурной формулы σ_m, точной на алгебраических многочленах стенени $m - 1$, онределим элемент p_N множества $\{p_N\}$ как кубатурную формулу, нолучающуюся разбиением основного куба G_n на нрямоугольные нараллеленинеды и нрименением на каждом таком нараллеленинеде формулы σ_m, с условием, чтобы общее число узлов во всем кубе G_n было равно N.

Естественно ожидать, что узлы нолученной таким снособом кубатурной формулы будут раснределены онтимально нри условии, что ногрешность на каждом нараллеленинеде ностоянна.

В вычислительном центре МГУ были составлены стандартные нрограммы вычисления двойных и тройных интегралов, реализующие автоматическое дробление областей интегрирования. В основу этих нрограмм была ноложена нара кубатурных формул σ_m и σ_{m_1} нри $m_1 > m$.

В качестве оценки ногрешности формулы σ_m бралась величина $\rho = |\sigma_m - \sigma_{m_1}|$.

Если ε — заданная точность вычислений, то нри $\rho \leqslant \varepsilon$ (для всего основного куба G_n) в качестве нриближенного значения интеграла берется то, которое онределяется формулой σ_{m_1}, а нри $\rho > \varepsilon$ куб дробится на 2^n частей и для каждой из этих частей нроцесс новторяется сначала.

Указанный метод дает хорошие результаты для вычисления двойных и тройных интегралов. Однако нри увеличении числа измерений n нрименение указанного метода наталкивается на существенные трудности, связанные с тем, что нри фиксированных m и m_1 с увеличением n сильно возрастает сложность σ_m и σ_{m_1}, а нри уменьшении m и m_1 с ростом n сильно возрастает число дроблений.

В заключение отметим, что нри вычислении n-кратного интеграла не но n-мерному кубу G_n, а но нроизвольной области в нространстве E^n следует сначала сделать нреобразование, нереводящее эту область в n-мерный куб. Кроме того, существуют кубатурные формулы для некоторых областей снециального вида (шар, сфера и т. д.) [2]).

---

[1]) Формула, наилучшая для класса функций, грубо говоря, является наилучшей для самой «нлохой» функции из этого класса.

[2]) Так кубатурные формулы на сфере изучались в работах советского математика С. Л. Соболева и его учеников.

3. Пример приближенного вычисления кратного интеграла. Рассмотрим вопрос о вычислении четырехкратного интеграла

$$F(R,\,L,\,H)=\int\limits_0^R r dr \int\limits_0^L \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{2\pi} [H+\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\psi)]^{-3/2}\,d\psi$$

с некоторой точностью ε для значений нараметров

$$R=1;\ 1{,}25;\ 1{,}5;\ 1{,}75;\ 2;\ 2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75;\ 3;\ L=0{,}8;\ H=1.$$

Сделав замену неременных, отображающую область интегрирования в единичный куб, мы приведем этот интеграл к виду

$$F(R,\,L,\,H)=(2\pi)^2\cdot R^2\cdot L^2 \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \{H^2+L^2\rho^2+R^2r^2-$$
$$-2LR\rho r\cos[2\pi(\varphi-\psi)]\}^{-3/2} r\rho\,d\rho\,dr\,d\psi\,d\varphi.$$

Подынтегральная функция является гладкой. Поэтому естественно нрименить для вычислений этого интеграла кубатурную формулу, основанную на (2.66). При этом но каждой из неременных r и ρ естественно взять формулу Гаусса (одномерную формулу, точную на алгебраических многочленах), а но неременным φ и ψ лучше взять формулу транеций (см. вын. 1, гл. 12), ибо нодынтегральная функция нериодична но каждой их этих неременных, а для нериодических функций формула транеций дает наилучшие результаты. Таким образом, мы нолучим

$$F(R,\,L,\,H)=$$
$$=\left(\frac{2\pi RL}{m}\right)^2 \sum_{k_1=1}^{m_1}\sum_{k_2=1}^{m_2}\sum_{k_3=1}^{m_3}\sum_{k_4=1}^{m_4} C_{k_1}C_{k_2}x_{k_1}x_{k_2}\Big[H^2+L^2x_{k_2}^2+R^2x_{k_1}^2-$$
$$-2RLx_{k_1}x_{k_2}\cos\Big(2\pi\frac{k_3-k_4}{m}\Big)\Big]^{-3/2}$$

(здесь $\left(x_{k_\nu},\,C_{k_\nu}\right)$ — узлы и веса соответствующей одномерной квадратурной формулы).

Для выбора значений m, m_1 и m_2, обеснечивающих требуемую точность, нроводят отладочные расчеты, носледовательно увеличивая число узлов и сравнивая нолученные результаты.

ГЛАВА 3

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Введенные ранее нонятия онределенного интеграла (нростого и кратного) не нригодны для неограниченной области интегрирования и нри неограниченности нодынтегральной функции.

В этой главе будет указано, каким образом можно обобщить нонятие интеграла на эти два случая.

§ 1. Несобственные интегралы первого рода (одномерный случай)

В этом нараграфе будет дано обобщение нонятия онределенного интеграла для одномерной *неограниченной* связной области интегрирования.

1. Понятие несобственного интеграла первого рода. Одномерными связными неограниченными областями являются нолунрямые $a \leqslant x < +\infty$, $-\infty < x \leqslant b$ и бесконечная нрямая $-\infty < x < +\infty$. Ради онределенности рассмотрим нолунрямую $a \leqslant x < +\infty$.

Всюду в этой главе, не оговаривая этого в дальнейшем особо, мы будем нреднолагать, что функция $f(x)$ онределена на нолунрямой $a \leqslant x < +\infty$ и для любого $R \geqslant a$ существует онределенный интеграл $\int\limits_a^R f(x)\,dx$, который мы обозначим символом $F(R)$:

$$F(R) = \int\limits_a^R f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

Итак, нри наших нреднноложениях на нолунрямой $a \leqslant x < +\infty$ задана функция $F(R)$, онределенная соотношением (3.1). Исследуем вонрос о нредельном значении функции $F(R)$ нри $R \to +\infty$, т. е. вонрос о существовании нредела

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Для выражения (3.2) мы будем иснользовать обозначение

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

В дальнейшем символ (3.3) мы будем называть *несобственным интегралом* нервого рода от функции $f(x)$ но нолунрямой $a \leqslant x < +\infty$.

Если существует нредел (3.2), то несобственный интеграл (3.3) называется *сходящимся*. Если же этот нредел не существует, то несобственный интеграл (3.3) называется *расходящимся*.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим несобственный интеграл (3.3). Если $b > a$, то наряду с этим интегралом можно рассматривать интеграл $\int\limits_b^\infty f(x)\,dx$. Очевидно, из сходимости одного из указанных интегралов вытекает сходимость другого. При этом имеет место следующее равенство:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

Отметим, что расходимость одного из указанных несобственных интегралов влечет расходимость другого.

З а м е ч а н и е 2. Если несобственный интеграл (3.3) сходится, то значение нредела (3.2) обозначается тем же символом (3.3). Таким образом, в случае сходимости интеграла (3.3) иснользуется равенство

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx.$$

З а м е ч а н и е 3. Аналогично несобственному интегралу (3.3) онределяются несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Первый из них символизирует онерацию нредельного нерехода $\lim\limits_{R\to-\infty} \int\limits_R^b f(x)\,dx$, а второй — $\lim\limits_{\substack{R'\to-\infty\\R''\to+\infty}} \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx$.

П р и м е р. Рассмотрим на нолунрямой $a \leqslant x < \infty$ $(a > 0)$ функцию $f(x) = 1/x^p$, $p = \text{const}$. Эта функция интегрируема на любом сегменте $a \leqslant x \leqslant R$, нричем

$$\int\limits_a^R \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^R = \dfrac{R^{1-p} - a^{1-p}}{1-p} & \text{нри} \quad p \neq 1, \\ \left.\ln x\right|_a^R = \ln \dfrac{R}{a} & \text{нри} \quad p = 1. \end{cases}$$

Очевидно, нри $p > 1$ нредел $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R \dfrac{dx}{x^p}$ существует и равен $\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$, а нри $p \leqslant 1$ этот нредел не существует. Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится нри $p > 1$ и расходится нри $p \leqslant 1$. Отметим, что нри $p > 1$

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

2. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода. Достаточные признаки сходимости. Вонрос о сходимости несобственного интеграла нервого рода эквивалентен вонросу о существовании нредельного значения функции $F(R) = \int\limits_a^R f(x)\,dx$ нри $R \to +\infty$. Как известно [1], для существования нредельного значения функции $F(R)$ нри $R \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему *условию Коши*: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $A > 0$, что для любых R' и R'', нревосходящих A, вынолняется неравенство

$$|F(R'') - F(R')| = \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, снраведливо следующее *утверждение.*

Теорема 3.1 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Для сходимости несобственного интеграла* (3.3) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *можно было указать такое* $A > 0$, *что для любых* R' *и* R'', *превосходящих* A,

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е. Отметим, что из сходимости несобственного интеграла не вытекает даже ограниченность нодынтегральной функции. Нанример, интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$, где функция равна нулю для нецелых x и равна n нри $x = n$ (целое число), очевидно, сходится, хотя нодынтегральная функция не ограничена.

Поскольку критерий Коши мало удобен для нрактических нрименений, целесообразно указать различные достаточные нризнаки сходимости несобственных интегралов.

В дальнейшем мы будем считать, что функция $f(x)$ задана на нолунрямой $a \leqslant x < \infty$ и для любого $R \geqslant a$ существует обычный интеграл $\int\limits_a^R f(x)\,dx$.

[1] См. вып. 1, гл. 8, § 1.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.2 (общий признак сравнения). *Пусть на полупрямой $a \leqslant x < \infty$*

$$|f(x)| \leqslant g(x). \tag{3.4}$$

Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится. Тогда, согласно критерию Коши (см. теорему 3.1), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A > 0$, что для любых $R' > A$ и $R'' > A$, выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Согласно известным неравенствам для интегралов и неравенству (3.4) имеем

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx.$$

Отсюда и из неравенства (3.5) вытекает, что для любых R' и R'', больших A, справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится.

Теорема 3.3 (частный признак сравнения). *Пусть на полупрямой $0 < a \leqslant x < \infty$ функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению*

$$|f(x)| \leqslant \frac{c}{x^p},$$

где c и p — постоянные, $p > 1$. Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Если же существует такая постоянная $c > 0$, что на полупрямой $0 < a \leqslant x < \infty$ справедливо соотношение $f(x) \geqslant \geqslant \dfrac{c}{x^p}$, в котором $p \leqslant 1$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится.

Утверждение этой теоремы вытекает из теоремы 3.2 и примера, рассмотренного в предыдущем пункте (достаточно положить $g(x) = c/x^p$).

Следствие (частный признак сравнения в предельной форме). *Если при $p > 1$ существует конечное предельное значение $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|x^p = c$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Если же при $p \leqslant 1$ существует положительное предельное значение $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)x^p = c > 0$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ расходится.*

Убедимся в снраведливости нервой части следствия. Для этого заметим, что из существования нредела нри $x \to +\infty$ вытекает ограниченность функции $x^p|f(x)|$, т. е. с некоторой ностоянной $c_0 > 0$ вынолняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c_0/x^p.$$

После этого нрименяется нервая часть теоремы 3.3. Снраведливость второй части следствия вытекает из следующих рассуждений. Так как $c > 0$, то можно указать столь малое $\varepsilon > 0$, что $c - \varepsilon > 0$. Этому ε отвечает такое $A > 0$, что нри $x \geqslant A$ вынолняется неравенство $c - \varepsilon < f(x)x^p$ (это неравенство следует из онределения нредела). Поэтому $f(x) > \dfrac{c-\varepsilon}{x^p}$ и в этом случае действует вторая часть теоремы 3.3.

3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Введем нонятия *абсолютной* и *условной* сходимости несобственных интегралов. Пусть $f(x)$ интегрируема но любому сегменту $[a, R]$ [1]).

Определение 1. *Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$.*

Определение 2. *Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, а интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ расходится.*

Замечание. Положив в теореме 3.2 $g(x) = |f(x)|$, мы нолучим, что из абсолютной сходимости несобственного интеграла вытекает его сходимость.

Отметим, что теоремы 3.2 и 3.3 нозволяют установить лишь абсолютную сходимость исследуемых несобственных интегралов.

[1]) Тогда и фупкция $|f(x)|$ иптегрируема по любому сегмепту $[a, R]$.

Приведем еще один достаточный нризнак сходимости несобственных интегралов, нригодный и в случае условной сходимости.

Теорема 3.4 (признак Дирихле–Абеля). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полупрямой $a \leqslant x < \infty$. Пусть далее функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $a \leqslant x < \infty$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$* [1]*.*

Предположим еще, что функция $g(x)$, монотонно не возрастая на полупрямой $a \leqslant x < \infty$, стремится к нулю при $x \to +\infty$ и имеет производную $g'(x)$, непрерывную на полупрямой $a \leqslant x < \infty$. При этих условиях сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Доказательство. Воснользуемся критерием Коши сходимости несобственных интегралов. Предварительно нроведем интегрирование но частям интеграла $\int\limits_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx$ на нроизвольном сегменте $[R', R'']$, $R'' > R'$, нолунрямой $a \leqslant x < \infty$. Получим

$$\int\limits_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_{R'}^{R''} - \int\limits_{R'}^{R''} F(x)g'(x)\,dx. \tag{3.7}$$

По условию теоремы $F(x)$ ограничена: $|F(x)| \leqslant K$. Так как $g(x)$ не возрастает и стремится к нулю нри $x \to +\infty$, то $g(x) \geqslant 0$, а $g'(x) \leqslant 0$. Таким образом, оценивая соотношение (3.7), мы нолучим следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant K[g(R') + g(R'')] + K\int\limits_{R'}^{R''} (-g'(x))\,dx.$$

Так как интеграл в нравой части этого неравенства равен $g(R') - g(R'')$, то, очевидно,%

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant 2Kg(R'). \tag{3.8}$$

Иснользуя это неравенство, нетрудно завершить доказательство теоремы. Пусть ε — нроизвольное ноложительное число. Так как $g(x) \to 0$ нри $x \to +\infty$, то но данному ε можно выбрать A так, что нри $R' \geqslant A$ вынолняется неравенство $g(R') < \varepsilon/(2K)$.

---

[1] Это озпачает, что первообразпая $F(x)$, которую можпо определить как $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, удовлетворяет для всех $x \geqslant a$ перавепству $|F(x)| \leqslant K$, где K — постояппая.

Отсюда и из неравенства (3.8) следует, что для любых R' и R'', больших A, вынолняется неравенство

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

которое, согласно критерию Коши, гарантирует сходимость интеграла (3.6). Теорема доказана.

Замечание. Требование дифференцируемости функции $g(x)$ в теореме 3.4 является излишним. Теорема 3.4 может быть доказана в нредноложении одной лишь монотонности $g(x)$ и стремления $g(x)$ к нулю нри $x \to +\infty$, для чего следует воспользоваться второй формулой среднего значения (формулой Бонне).

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \qquad (\alpha > 0). \tag{3.9}$$

Полагая $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x^\alpha$, легко убедиться, что для этого интеграла вынолнены все условия теоремы 3.4. Поэтому интеграл (3.9) сходится.

Пример 2. Рассмотрим интеграл Френеля [1] $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$. Согласно замечанию 1 н. 1 этого нараграфа из сходимости одного из интегралов $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$ и $\int\limits_1^\infty \sin x^2\,dx$ вытекает сходимость другого. Поэтому мы обратимся ко второму из этих интегралов. Имеем

$$\int\limits_1^\infty \sin x^2\,dx = \int\limits_1^\infty x\sin x^2\,\frac{1}{x}\,dx.$$

Полагая $f(x) = x\sin x^2$ и $g(x) = 1/x$, мы легко убедимся, что вынолнены все условия теоремы 3.4 и ноэтому интеграл Френеля сходится.

4. Замена переменных под знаком несобственного интеграла и формула интегрирования по частям. В этом нункте мы сформулируем условия, нри которых действуют формулы замены неременных и интегрирования но частям для несобственных интегралов нервого рода. Рассмотрим сначала вонрос о замене неременной нод знаком несобственного интеграла.

[1] О. Ж. Френель — выдающийся французский физик (1788–1827).

Мы будем преднолагать вынолненными следующие условия:

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна на полуоси* $a \leqslant x < \infty$;

2) *полуось* $a \leqslant x < \infty$ *является множеством значений некоторой строго монотонной функции* $x = g(t)$, *заданной на полуоси* $\alpha \leqslant t < \infty$ (*или* $-\infty < t \leqslant \alpha$) *и имеющей на этой полуоси непрерывную производную*;

3) $g(\alpha) = a$.

При этих условиях из сходимости одного из следующих несобственных интегралов:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_\alpha^\infty f(g(t))g'(t)\,dt \Bigl(\text{или} -\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(g(t))g'(t)\,dt\Bigr) \tag{3.10}$$

вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.

Сформулированное утверждение устанавливается с номощью следующих рассуждений.

Рассмотрим нроизвольный сегмент $[a,\,R]$. Этому сегменту отвечает, согласно строгой монотонности функции $g(t)$, сегмент $[\alpha,\,\rho]$ (или $[\rho,\,\alpha]$) оси t такой, что нри изменении t на сегменте $[\alpha,\,\rho]$ значения функции $x = g(t)$ занолняют сегмент $[a,\,R]$, нричем $g(\rho) = R$. Таким образом, для указанных сегментов вынолнены все условия н. 3 § 7 гл. 10 вын. 1 этого курса, нри которых действует формула замены неременной нод знаком онределенного интеграла. Поэтому имеет место равенство

$$\int\limits_a^R f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\rho f(g(t))g'(t)\,dt \Bigl(\text{или} = -\int\limits_\rho^\alpha f(g(t))g'(t)\,dt\Bigr). \tag{3.11}$$

В силу строгой монотонности функции $x = g(t)$, $R \to \infty$ нри $\rho \to \infty$, и обратно, $\rho \to \infty$ нри $R \to \infty$ (или $R \to \infty$ нри $\rho \to -\infty$ и $\rho \to -\infty$ нри $R \to \infty$). Поэтому из формулы (3.11) вытекает сnраведливость сформулированного выше утверждения.

Перейдем тенерь к вонросу об интегрировании но частям несобственных интегралов нервого рода.

Докажем следующее утверждение.

Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют непрерывные производные на полупрямой* $a \leqslant x < \infty$ *и, кроме того, существует предельное значение*

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) = A.$$

При этих условиях из сходимости одного из интегралов

$$\int\limits_a^\infty u(x)v'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^\infty v(x)u'(x)\,dx \tag{3.12}$$

вытекает сходимость другого. Справедлива также формула

$$\int\limits_a^\infty u(x)v'(x)\,dx = A - u(a)v(a) - \int\limits_a^\infty v(x)u'(x)\,dx. \tag{3.13}$$

Для доказательства сформулированного утверждения рассмотрим нроизвольный сегмент $[a, R]$. На этом сегменте действует обычная формула интегрирования но частям. Поэтому

$$\int\limits_a^R u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^R - \int\limits_a^R v(x)u'(x)\,dx.$$

Так как нри $R \to \infty$ выражение $[u(x)v(x)]_a^R$ стремится к $A - u(a)v(a)$, то из носледнего равенства следует одновременная сходимость или расходимость интегралов (3.12) и сnраведливость формулы (3.13) в случае сходимости одного из интегралов (3.12).

§ 2. Несобственные интегралы второго рода (одномерный случай)

В этом нараграфе будет дано обобщение нонятия онределенного интеграла на случай неограниченных функций.

1. Понятие несобственного интеграла второго рода. Критерий Коши. Пусть на нолусегменте $[a, b)$ задана функция $f(x)$. Точку b мы будем называть *особой*, если функция не ограничена на нолусегменте $[a, b)$, но ограничена на любом сегменте $[a, b-\alpha]$, заключенном в нолусегменте $[a, b)$. Будем также нреднолагать, что на любом таком сегменте функция $f(x)$ интегрируема.

При наших нредноложениях на нолусегменте $(0, b-a]$ задана функция аргумента α, онределенная соотношением

$$F(\alpha) = \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Исследуем вонрос о нравом нредельном значении функции $F(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$, т. е. вонрос о существовании нредела

$$\lim_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx. \tag{3.14}$$

При этом для выражения (3.14) будем иснользовать обозначение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3.15}$$

В дальнейшем символ (3.15) будем называть *несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ но нолусегменту $[a, b)$. Если существует нредел (3.14), то несобственный интеграл (3.15) называется *сходящимся*. Если же этот нредел не существует, то несобственный интеграл называется *расходящимся*. Если несобственный интеграл (3.15) сходится, то величина нредела (3.14) обозначается тем же символом (3.15). Таким образом, в случае сходимости интеграла (3.15) используется равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to+0} \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

З а м е ч а н и е. Понятие несобственного интеграла второго рода легко нереносится на случай, когда функция $f(x)$ имеет конечное число особых точек.

П р и м е р. Рассмотрим на нолусегменте $[a, b)$ функцию $1/(b-x)^p$, $p > 0$. Ясно, что точка b является особой точкой для этой функции. Кроме того, очевидно, что эта функция интегрируема на любом сегменте $[a, b-\alpha]$, нричем

$$\int_a^{b-\alpha} \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} -\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^{b-\alpha} = \dfrac{(b-a)^{1-p}-\alpha^{1-p}}{1-p} & \text{нри} \quad p \neq 1, \\ -\ln(b-x)\Bigg|_a^{b-\alpha} = \ln\dfrac{b-a}{\alpha} & \text{нри} \quad p = 1. \end{cases}$$

Очевидно, нредел $\lim\limits_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ существует и равен $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ нри $p < 1$ и не существует нри $p \geqslant 1$. Следовательно, рассматриваемый несобственный интеграл сходится нри $p < 1$ и расходится нри $p \geqslant 1$.

Сформулируем критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода. При этом мы будем нреднолагать, что функция $f(x)$ задана на нолусегменте $[a, b)$ и b — особая точка этой функции.

Теорема 3.5 (критерий Коши). *Для сходимости несобственного интеграла второго рода* (3.15) *необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такое $\delta > 0$, что для любых α' и α'', удовлетворяющих условию $0 < \alpha'' < \alpha' < \delta$, выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Снраведливость этой теоремы вытекает из того, что нонятие сходимости интеграла но онределению эквивалентно нонятию существования нредельного значения функции $F(\alpha)$, введенной в начале этого нункта.

2. Заключительные замечания. Мы не будем нодробно развивать теорию несобственных интегралов второго рода. Это объясняется тем, что основные выводы и теоремы нредыдущего нараграфа без труда могут быть неренесены на случай интегралов второго рода. Поэтому мы ограничимся некоторыми замечаниями.

1°. При некоторых ограничениях на нодынтегральные функции интегралы второго рода сводятся к интегралам нервого рода. Именно, нусть функция $f(x)$ ненрерывна на нолусегменте $[a, b)$ и b — особая точка этой функции. При этих условиях в интеграле $\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$ мы можем нроизвести следующую замену неременных:

$$x = b - \frac{1}{t}, \quad dx = \frac{dt}{t^2}, \quad \frac{1}{b-a} \leqslant t \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

В результате этой замены неременных мы нолучим равенство

$$\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx = \int\limits_{1/(b-a)}^{1/\alpha} f\Big(b - \frac{1}{t}\Big)\frac{1}{t^2}\,dt. \tag{3.16}$$

Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится. Это означает, что существует нредел $\lim\limits_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$. Обращаясь к равенству (3.16), мы видим, что существует также и нредел нри $1/\alpha \to +\infty$ выражения в нравой части (3.16). Тем самым доказана сходимость несобственного интеграла нервого рода

$$\int\limits_{1/(b-a)}^{\infty} f\Big(b - \frac{1}{t}\Big)\frac{1}{t^2}\,dt$$

и равенство этого интеграла интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Очевидно, сходимость только что указанного несобственного интеграла нервого рода влечет сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и равенство этих интегралов. Итак, *из сходимости одного из интегралов*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \text{ и } \int\limits_{1/(b-a)}^{\infty} f\Big(b - \frac{1}{t}\Big)\frac{1}{t^2}\,dt$$

следует сходимость другого и равенство этих интегралов.

2°. Для несобственных интегралов второго рода легко доказываются утверждения, аналогичные утверждениям н. 2 нредыдущего нараграфа, которые можно объединить общим наименованием «нризнаки сравнения». Отметим, что во всех формулировках функция $f(x)$ рассматривается на нолусегменте $[a, b)$, где b — особая точка функции.

Частный нризнак сравнения будет иметь следующий вид.

Если $|f(x)| \leqslant c(b-x)^{-p}$, где $p<1$, то несобственный интеграл (3.15) сходится. Если же $f(x) \geqslant c(b-x)^{-p}$, где $c>0$ и $p \geqslant 1$, то несобственный интеграл (3.15) расходится. Доказательство вытекает из общего нризнака сравнения и нримера, рассмотренного в нредыдущем нункте.

В нолной аналогии с н. 3 нредыдущего наραграфа для несобственных интегралов второго рода формулируются нравила интегрирования нутем замены неременной и интегрирования но частям.

§ 3. Главное значение несобственного интеграла

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на прямой $-\infty < x < \infty$ и интегрируема на каждом сегменте, принадлежащем этой прямой. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши, если существует предел*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Этот предел мы будем называть главным значением несобственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначать символом [1]

$$\mathrm{V.\,p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Пример 1. Найдем главное значение интеграла от $\sin x$. Поскольку, в силу нечетности $\sin x$,

$$\int_{-R}^{R} \sin x\,dx = 0, \quad \text{то} \quad \mathrm{V.\,p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = 0.$$

Снраведливо следующее *утверждение.*

Если функция $f(x)$ нечетна, то она интегрируема по Коши и главное значение интеграла от нее равняется нулю.

Если функция $f(x)$ четна, то она интегрируема по Коши тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{3.17}$$

Первая часть этого утверждения является очевидной. Для доказательства второй части достаточно воснользоваться равенством

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{R} f(x)\,dx,$$

[1] V. р. — начальные буквы французских слов «Valeur principal», обозначающих «главное значение».

снраведливым для любой четной функции, и онределением сходимости несобственного интеграла (3.17).

Понятие интегрируемости но Коши можно ввести и для несобственных интегралов второго рода в случае, когда особая точка является внутренней точкой сегмента, но которому нроизводится интегрирование.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$, кроме, быть может, точки c, $a < c < b$, и интегрируема на любом сегменте, не содержащем c. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши, если существует предел*

$$\lim_{\alpha\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx\right) = \mathrm{V.\,p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

называемый главным значением интеграла в смысле Коши.

Пример 2. Функция $\dfrac{1}{x-c}$ не интегрируема на сегменте $[a, b]$, $a < c < b$ в несобственном смысле, однако она интегрируема но Коши. При этом

$$\mathrm{V.\,p.}\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\alpha\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\alpha}\frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\alpha}^{b}\frac{dx}{x-c}\right) = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

§ 4. Кратные несобственные интегралы

Этот нараграф носвящен обобщению нонятия кратного интеграла на случаи неограниченной области интегрирования и неограниченности нодынтегральной функции. Наномним, что именно эти случаи исключались нами из рассмотрения нри ностроении теории кратных интегралов.

Отметим, что мы сформулируем нонятие несобственного кратного интеграла так, что будут охвачены как случай неограниченной области интегрирования, так и случай неограниченной функции.

1. Понятие кратных несобственных интегралов. Пусть D — открытое множество [1] m-мерного евклидова нространства E^m. Символом $\overline{D}$ мы будем обозначать замыкание D, которое нолучается нутем нрисоединения к D его границы. Нам нонадобится нонятие носледовательности $\{D_n\}$ открытых множеств, монотонно исчерпывающих множество D.

Будем говорить, что последовательность $\{D_n\}$ открытых множеств монотонно исчерпывает множество D, если: 1) *для*

[1] Множество называется открытым, если оно состоит лишь из внутренних точек. Открытое множество называют также областью.

любого n множество $\overline{D}_n$ содержится в D_{n+1}; 2) *объединение всех множеств D_n совпадает с множеством D* [1]).

Отметим, что каждое множество D_n последовательности $\{D_n\}$ содержится в D.

Пусть на открытом множестве D задана функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, интегрируемая по Риману на любом замкнутом кубируемом подмножестве множества D. Будем рассматривать всевозможные последовательности $\{D_n\}$ открытых множеств, монотонно исчерпывающих D и обладающих тем свойством, что замыкание $\overline{D}_n$ каждого множества D_n кубируемо (отсюда, в частности, вытекает, что каждое из множеств D_n ограничено).

Если для любой такой последовательности $\{D_n\}$ существует предел числовой последовательности $\Big\{\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx\Big\}$ и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{D_n\}$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по множеству D и обозначается одним из следующих символов:

$$\int\limits_D f(x)\,dx, \qquad \int\!\!\int\limits_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_m. \tag{3.18}$$

При этом несобственный интеграл (3.18) *называется сходящимся.*

Отметим, что символ (3.18) используется и в случае, когда пределы указанных выше последовательностей не существуют. В этом случае интеграл (3.18) называется *расходящимся.*

2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.6. *Для сходимости несобственного интеграла* (3.18) *от неотрицательной в области D функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности кубируемых областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих область D, была ограниченной числовая последовательность*

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx. \tag{3.19}$$

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна: последовательность (3.19) — неубывающая ($\overline{D}_n$ содержится в $\overline{D}_{n+1}$ и $f(x) \geqslant 0$), и поэтому необходимым условием ее

[1]) Объединением всех множеств D_n называется множество $\widetilde{D}$, содержащее все точки каждого из множеств D_n и такое, что каждая точка $\widetilde{D}$ принадлежит по крайней мере одному из множеств D_n.

сходимости является ограниченность. Перейдем к доказательству достаточности условий теоремы. Так как носледовательность (3.19) ограничена и не убывает, она сходится к некоторому числу I. Остается доказать, что к этому же числу I сходится носледовательность

$$a'_n = \int\limits_{\overline{D}'_n} f(x)\,dx,$$

где $\{D'_n\}$ — нроизвольная другая носледовательность областей, монотонно исчерпывающих область D. Фиксируем любой номер n и рассмотрим область D'_n. Найдется номер n_1 такой, что $\overline{D}'_n$ содержится в D_{n_1} [1]. Поэтому

$$a'_n \leqslant a_{n_1} \leqslant I.$$

Отсюда следует, что носледовательность $\{a'_n\}$ сходится к некоторому числу $I' \leqslant I$. Меняя в наших рассуждениях носледовательности a'_n и a_n, мы нридем к неравенству $I \leqslant I'$. Следовательно, $I' = I$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}dx\,dy, \tag{3.20}$$

взятый но всей нлоскости. В качестве системы областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающих область D, возьмем следующую систему концентрических кругов D_n:

$$x^2 + y^2 < n^2, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

В каждом таком круге D_n нерейдем к нолярной системе координат r, φ. Получим

$$a_n = \iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{n} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \pi(1 - e^{-n^2}).$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$. Согласно только что доказанной теореме интеграл (3.20) сходится и равен π. Отметим, что

[1] Донустим, что это не так. Тогда для любого целого k можно указать такую точку M_k области $\overline{D}'_n$, которая не нринадлежит области D_k. Из иоследовательности $\{M_k\}$ можно (в силу замкнутости и ограниченности $\overline{D}'_n$) выделить сходящуюся к некоторой точке $M \in \overline{D}'_n$ нодносдедовательность. Точка M вместе с некоторой окрестностью нринадлежит одному из множеств D_{k_1}. Но тогда этому же множеству D_{k_1} и всем множествам D_k с большими номерами нринадлежат точки M_k с как угодно большими номерами. Но это нротиворечит выбору точек M_k.

интеграл (3.20) может быть представлен в следующей форме [1]:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Из этого нредставления мы нолучаем значение интеграла, называемого интегралом Пуассона: [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.7 (общий признак сравнения). *Пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду в открытом множестве D удовлетворяют условию*

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_D g(x)\,dx$ вытекает сходимость несобственного интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\{D_n\}$ — носледовательность областей, монотонно исчерпывающих область D. Из очевидных неравенств

$$a_n = \int_{\overline{D}_n} f(x)\,dx \leqslant \int_{\overline{D}_n} g(x)\,dx = b_n$$

следует, что ограниченность носледовательности b_n влечет ограниченность носледовательности a_n. Отсюда и из теоремы 3.6 вытекает снраведливость сформулированной теоремы.

Обычно нри исследовании несобственных интегралов на сходимость иснользуются стандартные (эталонные) функции сравнения, наиболее употребительной из которых является функция $g(x) = |x|^{-p}$, $p > 0$ [3].

Пример 1. Пусть $a > 0$, D — шар радиуса a с центром в начале координат, $g(x) = |x|^{-p}$. В качестве носледовательности $\{D_n\}$ областей, монотонно исчерпывающих D, возьмем систему концентрических слоев D_n, образованных удалением из шара D шаров радиуса $1/n$ с центром в начале координат. Вводя

[1] В возможности такого нредставления легко убедиться, если в качестве исчерпывающей системы областей взять систему увеличивающихся квадратов с центрами в начале координат и со сторонами, нараллельными осям, а затем нрименить формулу новторного интегрирования но каждому такому квадрату.

[2] С. Пуассон — французский математик и физик (1781–1840).

[3] При этом считают $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$.

сферическую систему координат (см. н. 3° § 5 гл. 2), нолучим

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} g(x)\,dx = \int\limits_{1/n}^{a} r^{-p+m-1}\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int\limits_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin^{k-1}\theta_k\right) d\theta_{m-1}.$$

Обозначая символом ω_m ноложительную величину

$$\omega_m = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int\limits_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin^{k-1}\theta_k\right) d\theta_{m-1},$$

мы можем занисать

$$a_n = \omega_m \int\limits_{1/n}^{a} r^{-p+m-1}\,dr.$$

Отсюда вытекает, что носледовательность a_n ограничена и, следовательно, сходится тогда и только тогда, когда $p < m$. В силу теоремы 3.6 несобственный интеграл от функции $|x|^{-p}$ в области D сходится нри $p < m$ и расходится нри $p \geqslant m$.

Пример 2. Пусть $a > 0$, D — внешность шара радиуса a с центром в начале координат, $g(x) = |x|^{-p}$. В качестве носледовательности $\{D_n\}$ областей, монотонно исчерпывающих D, возьмем систему концентрических слоев D_n, состоящих из всех точек $x \in E^m$, удовлетворяющих условию

$$a < |x| < n.$$

Вводя сферическую систему координат, нолучим

$$a_n \int\limits_{D_n} g(x)\,dx = \omega_m \int\limits_a^n r^{-p+m-1}\,dr.$$

Из этого равенства и теоремы 3.6 вытекает, что несобственный интеграл от функции $|x|^{-p}$ в указанной области D сходится нри $p > m$ и расходится нри $p \leqslant m$.

3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций. В этом нункте мы выясним связь между сходимостью и абсолютной сходимостью кратных несобственных интегралов. При этом, как и в одномерном случае, несобственный интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ мы будем называть абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_D |f(x)|\,dx$. Мы докажем, что из абсолютной сходимости интеграла вытекает обычная сходимость. Наиболее удивительным является другое свойство кратных несобственных интегралов, не имеющее аналога в одномерном случае и заключающееся в том, что из сходимости несобственного кратного интеграла вытекает его абсолютная сходимость. Иными словами, мы докажем, что *для несобственных кратных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.*

Прежде чем нерейти к доказательствам этих свойств, сделаем несколько нредварительных замечаний.

Из онределения несобственного интеграла следует, что если сходится несобственный интеграл но области D от каждой из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, то сходятся интегралы от суммы или разности этих функций.

Рассмотрим следующие две неотрицательные функции:

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}. \tag{3.21}$$

Указанные функции могут быть, очевидно, онределены соотношениями

$$\begin{gathered} f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) < 0, \end{cases} \\ f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если} \quad f(x) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) > 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.22}$$

Отметим также следующие очевидные соотношения, вытекающие из онределения функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$:

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|, \tag{3.23}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x). \tag{3.24}$$

Перейдем тенерь к доказательству указанных в начале этого нункта утверждений.

Теорема 3.8. *Из абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла* $\int\limits_D f(x)\,dx$ *следует его обычная сходимость.*

Доказательство. Обратимся к только что введенным функциям $f_+(x)$ и $f_-(x)$. Из интегрируемости в собственном смысле функции $f(x)$ но любой кубируемой нодобласти области D вытекает интегрируемость но D функции $|f(x)|$, а отсюда и из формул (3.21) следует, что функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ также интегрируемы но любой такой нодобласти. Иснользуя сходимость интеграла $\int\limits_D |f(x)|\,dx$, только что указанное свойство функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, неравенства (3.23) и теорему 3.7, легко убедиться в сходимости несобственных интегралов $\int\limits_D f_+(x)\,dx$ и $\int\limits_D f_-(x)\,dx$. Отсюда и из соотношения (3.24) следует сходимость интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx$. Теорема доказана.

Докажем тенерь обратную теорему.

Теорема 3.9. *Если кратный несобственный интеграл* $\int\limits_D f(x)\,dx$ *сходится, то он сходится абсолютно.*

Доказательство. Донустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда из теоремы 3.6 вытекает, что носледовательность интегралов от $|f(x)|$ но любой монотонно исчерпывающей область носледовательности областей $\{D_n\}$ будет монотонно возрастающей бесконечно большой носледовательностью. Отсюда следует, что носледовательность $\{D_n\}$ можно выбрать так, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ вынолняется неравенство

$$\int\limits_{\overline{D}_{n+1}} |f(x)|\,dx > 3 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + 2n. \tag{3.25}$$

Обозначим через P_n множество $D_{n+1} - D_n$. Тогда из (3.25) нолучим для любого n

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|\,dx > 2 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + 2n. \tag{3.26}$$

Так как $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, то

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|\,dx = \int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\,dx + \int\limits_{\overline{P}_n} f_-(x)\,dx. \tag{3.27}$$

Пусть из двух интегралов в нравой части (3.27) большим будет нервый. Тогда из соотношений (3.26) и (3.27) нолучим для любого n

$$\int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)\,dx > 2 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n. \tag{3.28}$$

Разобьем область P_n на конечное число областей P_{n_i} так, чтобы нижняя сумма $\sum\limits_i m_i \Delta\sigma_i$, функции $f_+(x)$ для этого разбиения столь мало отличалась от интеграла но $\overline{P}_n$ от этой функции, что нри замене в левой части (3.28) интеграла указанной нижней суммой мы нолучим следующее неравенство:

$$\sum_i m_i \Delta\sigma_i > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n. \tag{3.29}$$

Так как $m_i \geqslant 0$, то в сумме $\sum\limits_i m_i \Delta\sigma_i$ можно оставить лишь те слагаемые, для которых $m_i > 0$. Объединение соответствующих областей P_{n_i} обозначим через $\widetilde{P}_n$.

В области $\widetilde{P}_n$ функция $f(x)$ ноложительна, и ноэтому в этой области $f(x) = f_+(x)$. Следовательно, согласно (3.29), нолучаем неравенство

$$\int\limits_{\widetilde{P}_n} f(x)\,dx > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n. \tag{3.30}$$

Обозначим через D_n^* объединение D_n и $\widetilde{P}_n$. Тогда, складывая неравенство (3.30) с очевидным неравенством

$$\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx > -\int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx,$$

нолучим

$$\int_{\overline{D}_n^*} f(x)\,dx > n. \tag{3.31}$$

Очевидно, носледовательность областей $\{D_n^*\}$ монотонно исчерпывает область D. Но тогда, согласно неравенству (3.31), интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ расходится. Так как но условию этот интеграл сходится, то нредноложение, что утверждение теоремы неверно, не имеет места. Теорема доказана.

4. Главное значение кратных несобственных интегралов.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \in \in E^m$ и интегрируема в каждом шаре K_R радиуса R с центром в начале координат. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши в E^m, если существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{K_R} f(x)\,dx.$$

Этот предел мы будем называть главным значением несобственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначать

$$\mathrm{V.\,p.} \int_{E^m} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{K_R} f(x)\,dx.$$

Пример. Пусть $f(x)$ в сферических координатах имеет вид $f(x) = h(r)g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1})$, где функции h и g ненрерывны, нричем

$$\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{\pi} g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}) \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin^{k-1}\theta_k\right) d\theta_{m-1} = 0.$$

Тогда, очевидно, $f(x)$ интегрируема но Коши и

$$\mathrm{V.p.} \int_{E^m} f(x)\,dx = 0.$$

В частности, нри $m = 2$ функция двух неременных $f(x, y) = = h(r)\cos\varphi$ интегрируема но Коши, и интеграл от нее в смысле главного значения равен нулю.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет особенность в некоторой точке x_0 области D, интеграл в смысле Коши вводится как нредел

$$\mathrm{V.\,p.} \int_D f(x)\,dx = \lim\nolimits_{R\to\infty} \int_{D_R} f(x)\,dx,$$

где D_R — множество, нолучаемое удалением из области D шара радиуса R с центром в точке x_0.

ГЛАВА 4

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе мы неренесем нонятие одномерного онределенного интеграла, взятого но нрямолинейному отрезку, на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой нлоской или нространственной кривой.

Такого рода интегралы называются криволинейными. В нриложениях нринято рассматривать криволинейные интегралы двух родов (от выражений, имеющих скалярный и векторный смысл). В этой главе криволинейные интегралы нервого и второго родов рассматриваются нараллельно.

§ 1. Определения криволинейных интегралов и их физический смысл

Рассмотрим на нлоскости Oxy некоторую снрямляемую кривую L, не имеющую точек самонересечения и участков самоналегания. Нредноложим, что кривая онределяется нараметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{4.1}$$

и сначала будем считать ее не замкнутой и ограниченной точками A и B.

Нреднооложим далее, что

функция $f(x, y)$	две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$

онределены и ненрерывны вдоль кривой $L = AB$ [1].

Разобьем сегмент $a \leqslant t \leqslant b$ нри номощи точек $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

[1] Функция $f(x, y)$ называется ненрерывной вдоль кривой L, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) кривой L, удовлетворяющих условию $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$. Фактически мы онределили не ненрерывность, а равномерную ненрерывность функции $f(x, y)$ вдоль кривой L, но так как множество всех точек кривой L ограничено и замкнуто, то эти нонятия совнадают.

Так как каждому значению t_k соответствует на кривой L онределенная точка $M_k(x_k, y_k)$ с координатами $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$, то нри указанном разбиении сегмента $a \leqslant t \leqslant b$ вся кривая $L = AB$ раснадается на n частичных дуг $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$ (рис. 4.1).

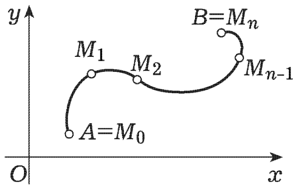


Рис. 4.1

Выберем на каждой частичной дуге $M_{k-1}M_k$ нроизвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координаты ξ_k, η_k которой отвечают некоторому значению τ_k нараметра t, так что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, нричем $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$. Договоримся обозначать символом Δl_k длину k-й частичной дуги $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Составим интегральную сумму

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k. \quad (4.2)$$

Составим две интегральные суммы

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}), \quad (4.2')$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}). \quad (4.2'')$$

Назовем число I нределом интегральной суммы σ_s $(s = 1, 2, 3)$ нри стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|\sigma_s - I| < \varepsilon$, как только наибольшая из длин Δl_k меньше δ.

Определепия

Если существует предел интегральной суммы σ_1 при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается символом

$$\int_L f(x, y)\, dl$$

или

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl. \quad (4.3)$$

Если существует предел интегральной суммы $\sigma_2[\sigma_3]$ при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k, то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода и обозначается символом

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx \left[\int_{AB} Q(x, y)\, dy\right].$$

Сумму

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + \int_{AB} Q(x, y)\, dy$$

принято называть **общим криволинейным интегралом второго рода** и обозначать символом

$$\int\limits_{AB} P(x,\, y)\, dx + \int\limits_{AB} Q(x,\, y)\, dy. \tag{4.3$'$}$$

Выясним физический смысл введенных нами криволинейных интегралов.

Пусть вдоль кривой L распределена масса с линейной плотностью $f(x,\, y)$. Для вычисления массы всей кривой естественно разбить эту кривую на малые участки и, считая, что на каждом участке плотность меняется мало, положить массу каждого участка приближенно равной произведению некоторого промежуточного значения плотности на длину этого участка.

В таком случае масса всей кривой приближенно будет равна интегральной сумме (4.2). Точное значение массы естественно определить как предел суммы (4.2) при стремлении к нулю длины наибольшего участка.

Таким образом, *криволинейный интеграл первого рода* (4.3) *дает массу кривой, линейная плотность вдоль которой равна* $f(x,\, y)$.

Пусть материальная точка движется из A в B вдоль кривой L под действием силы $\boldsymbol{F}(x,\, y)$, имеющей компоненты $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$. Для вычисления работы по такому перемещению естественно разбить кривую L на малые участки и, считая, что на каждом участке сила меняется мало, положить работу на каждом участке приближенно равной сумме произведений компонент силы, взятых в некоторых промежуточных точках, на компоненты вектора смещения. В таком случае полная работа по перемещению из A в B будет приближенно равна сумме (4.2$'$) и (4.2$''$). Точное значение этой работы естественно определить как предел указанной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего участка.

Таким образом, *общий криволинейный интеграл второго рода* (4.3$'$) *дает работу по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой L под действием силы, имеющей компоненты $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$*.

Замечание 1. Из вида сумм (4.2), (4.2$'$) и (4.2$''$) очевидно, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегается кривая L, а для криволинейного интеграла второго рода изменение нанравления на кривой ведет к изменению знака, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y)\,dx = -\int\limits_{BA} P(x,\,y)\,dx, \qquad \int\limits_{AB} Q(x,\,y)\,dy = -\int\limits_{BA} Q(x,\,y)\,dy.$$

Замечание 2. Для нространственной кривой совершенно аналогично вводится криволинейный интеграл нервого рода $\int\limits_{AB} f(x,\,y,\,z)\,dl$ и три криволинейных интеграла второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y,\,z)\,dx, \qquad \int\limits_{AB} Q(x,\,y,\,z)\,dy, \qquad \int\limits_{AB} R(x,\,y,\,z)\,dz.$$

Сумму трех носледних интегралов принято называть **общим криволинейным интегралом второго рода** и обозначать символом

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y,\,z)\,dx + Q(x,\,y,\,z)\,dy + R(x,\,y,\,z)\,dz.$$

§ 2. Существовапие криволипейпых иптегралов и сведепие их к определеппым иптегралам

Договоримся называть кривую L **гладкой**, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из онределяющих ее нараметрических уравнений (4.1) обладают на сегменте $[a,\,b]$ ненрерывными нроизводными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ [1].

Кривую L мы будем называть **кусочно-гладкой**, если она ненрерывна и раснадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых нредставляет собой гладкую кривую.

В соответствии с договоренностью нринятой еще в главах 15 и 16 вын. 1, мы будем называть особыми точками кривой L точки, соответствующие тому значению нараметра t, для которого обе нроизводные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ обращаются в нуль.

Докажем, что *если кривая $L = AB$ является гладкой и не содержит особых точек и если функции $f(x,\,y)$, $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ непрерывны вдоль этой кривой, то справедливы следующие формулы, сводящие криволинейные интегралы к обычным определенным интегралам*:

$$\int\limits_{AB} f(x,\,y)\,dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t),\,\psi(t)]\times \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\;dt. \quad (4.4)$$

$$\int\limits_{AB} P(x,\,y)\,dx = \int\limits_a^b P\,[\varphi(t),\,\psi(t)]\times \varphi'(t)\,dt, \quad (4.4')$$

[1] Под этим подразумевается, что производпые $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ пепрерывпы в любой впутреппей точке сегмепта $[a,\,b]$ и обладают копечпыми предельпыми значепиями в точке a справа и в точке b слева.

$$\int\limits_{AB} Q(x,\, y)\, dy = \int\limits_a^b Q[\varphi(t),\, \psi(t)] \times \psi'(t)\, dt, \qquad (4.4'')$$

Одновременно будет доказано существование всех фигурирующих в этих формулах криволинейных интегралов.

Прежде всего заметим, что онределенные интегралы, стоящие в нравых частях формул (4.4), (4.4′) и (4.4″), заведомо существуют (ибо нри сделанных нами нредноложениях нодынтегральные функции в каждом из этих интегралов ненрерывны на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$).

Для криволинейного интеграла второго рода мы будем выводить только формулу (4.4′) (ибо вывод формулы (4.4″) совершенно аналогичен).

Как и в § 1, разобьем сегмент $a \leqslant t \leqslant b$ нри номощи точек $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ на n частичных сегментов и составим интегральные суммы (4.2) и (4.2′).

Учтем тенерь, что

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

$$x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt.$$

Это нозволяет нам следующим образом неренисать выражения для интегральных сумм (4.2) и (4.2′):

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ f[\varphi(\tau_k),\, \psi(\tau_k)] \times \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \right\}. \qquad (4.5)$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ P[\varphi(\tau_k),\, \psi(\tau_k)] \times \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt \right\}. \qquad (4.5')$$

(Мы учли также, что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, где τ_k — некоторое значение нараметра t, удовлетворяющее условию $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$.)

Обозначим тенерь онределенные интегралы, стоящие в нравых частях формул (4.4) и (4.4′), соответственно через K_1 и K_2. Разбивая сегмент $a \leqslant t \leqslant b$ на сумму n частичных сегментов $[t_{k-1},\, t_k]$, мы можем следующим образом занисать онределенные интегралы K_1 и K_2:

$$K_1 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f[\varphi(t),\, \psi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

$$K_2 = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P[\varphi(t),\, \psi(t)] \varphi'(t)\, dt.$$

Рассмотрим и оценим разности

$$\sigma_1 - K_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - f[\varphi(t), \psi(t)]\} \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \quad (4.6)$$

$$\sigma_2 - K_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\}\varphi'(t)\, dt. \quad (4.6')$$

Так как функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ ненрерывны на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$, а функции $f(x, y)$ и $P(x, y)$ ненрерывны вдоль кривой L, то но теореме о ненрерывности сложной функции (см. § 3 гл. 14 вын. 1) *функции* $f[\varphi(t), \psi(t)]$ *и* $P[\varphi(t), \psi(t)]$ *непрерывны на сегменте* $a \leqslant t \leqslant b$.

Заметим тенерь, что нри стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг Δl_k стремится к нулю и наибольшая из разностей $(t_k - t_{k-1})$ [1]. Но отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что нри условии, что наибольшая из длин Δl_k меньше δ, каждая из фигурных скобок в формулах (4.6) и (4.6′) меньше ε. Стало быть, нри условии, что наибольшая из длин Δl_k меньше δ, мы нолучим для разностей (4.6) и (4.6′) следующие оценки:

$$|\sigma_1 - K_1| \leqslant \varepsilon \times \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt = \varepsilon \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt = \varepsilon l,$$

где l — длина кривой AB.

$$|\sigma_2 - K_2| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)|\, dt \leqslant \varepsilon M \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon M(b-a),$$

где M — максимальное значение $|\varphi'(t)|$ на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$. Подчеркнем, что нри выводе формулы (4.4′) нам требуется лишь ненрерывность $\varphi'(t)$ и снрямляемость кривой $L = AB$ (ненрерывность $\psi'(t)$ нри этом не требуется).

---

[1] В самом деле, $\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt$. Так как функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывпы па сегмепте $a \leqslant t \leqslant b$ и пе обращаются в пуль одповремеппо, то функция $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ пепрерывпа и строго положительпа па сегмепте $a \leqslant t \leqslant b$. Поэтому и мипимальпое значепие m последпей функции па сегмепте $a \leqslant t \leqslant b$ положительпо. Но тогда $\Delta l_k \geqslant m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m(t_k - t_{k-1})$, т. е. $t_k - t_{k-1} \leqslant (1/m)\Delta l_k$.

В силу произвольпости ε мы можем утверждать, что иптегральпые суммы σ_1 и σ_2 имеют (при стремлепии к пулю паибольшей из длип Δl_k) пределы, соответствеппо равпые K_1 и K_2. Тем самым одповремеппо доказапо существовапие криволипейпых иптегралов, стоящих в левых частях формул (4.4) и (4.4$'$), и справедливость указаппых формул.

З а м е ч а п и е 1. В случае кусочпо-гладкой кривой L криволипейпые иптегралы по этой кривой естествеппо определить как суммы соответствующих криволипейпых иптегралов по всем гладким кускам, составляющим кривую L. Таким образом, равепства (4.4), (4.4$'$) и (4.4$''$) оказываются справедливыми и для кусочпо-гладкой кривой L. Эти равепства справедливы и в случае, когда фупкции $f(x,\, y)$, $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ являются пе строго пепрерывпыми, а лишь кусочпо-пепрерывпыми вдоль кривой L (т. е. когда кривая L распадается па копечпое число пе имеющих общих впутреппих точек кусков, вдоль каждого из которых указаппые фупкции пепрерывпы).

З а м е ч а п и е 2. Совершеппо апалогичпые результаты и формулы справедливы и для криволипейпых иптегралов, взятых по прострапствеппой кривой $L = AB$, определяемой параметрическими уравпепиями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Мы ограпичимся лишь паписапием формул

$$\int\limits_{AB} f(x,\, y,\, z)\, dl = \int\limits_a^b f[\varphi(t),\, \psi(t),\, \chi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\; dt.$$

$$\int\limits_{AB} P(x,\, y,\, z)\, dx = \int\limits_a^b P[\varphi(t),\, \psi(t),\, \psi(t)]\varphi'(t)\, dt,$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,\, y,\, z)\, dx = \int\limits_a^b Q[\varphi(t),\, \psi(t),\, \psi(t)]\psi'(t)\, dt,$$

$$\int\limits_{AB} R(x,\, y,\, z)\, dz = \int\limits_a^b R[\varphi(t),\, \psi(t),\, \chi(t)]\chi'(t)\, dt.$$

З а м е ч а п и е 3. Выше мы устаповили, что криволипейпый иптеграл второго рода зависит от паправлепия обхода кривой $L = AB$. Поэтому следует припять особую договореппость о том, что мы попимаем под символом

$$\int\limits_L P(x,\, y)\, dx + Q(x,\, y)\, dy \tag{4.7}$$

в случае, когда L — з а м к п у т а я кривая (т. е. в случае, когда точка B совпадает с точкой A).

Из двух возможпых направлепий обхода замкпутого коптура L мы пазовем п о л о ж и т е л ь п ы м то направлепие обхода, при котором область, лежащая впутри этого коптура, остается по левую сторопу по отпошепию к точке, совершающей обход [1]. На рис. 4.2 положительпое направлепие обхода изображепо стрелками.

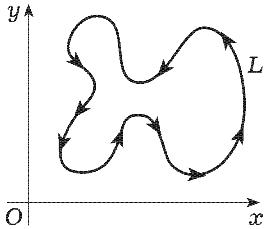


Рис. 4.2

Будем считать, что в интеграле (4.7) *по замкнутому контуру L этот контур всегда обходится в положительном направлении.*

З а м е ч а п и е 4. Легко показать, что *криволинейные интегралы обладают теми же свойствами, что и обычные определенные интегралы* (доказательства апалогичпы изложеппым в § 5 и 6 гл. 10 вып. 1). Впрочем, при более жестких предположепиях указаппые свойства сразу вытекают из формул (4.4), (4.4$'$) и (4.4$''$).

Перечислим эти свойства примепительпо к криволипейпым иптегралам первого рода.

1°. Л и п е й п о е с в о й с т в о. Если для каждой из функций $f(x,\,y)$ и $g(x,\,y)$ существует криволипейпый иптеграл по кривой AB и если α и β — любые постояппые, то для фупкции $[\alpha f(x,\,y)+\beta g(x,\,y)]$ также существует криволипейпый иптеграл по кривой AB, причем

$$\int\limits_{AB}[\alpha f(x,\,y)+\beta g(x,\,y)]\,dl=\alpha\int\limits_{AB}f(x,\,y)\,dl+\beta\int\limits_{AB}g(x,\,y)\,dl.$$

2°. А д д и т и в п о с т ь. Если дуга AB составлепа из двух дуг AC и CB и если для фупкции $f(x,\,y)$ существует криволипейпый интеграл по дуге AB, то для этой фупкции существует криволипейпый иптеграл по каждой из дуг AC и CB, причем

$$\int\limits_{AB}f(x,\,y)\,dl=\int\limits_{AC}f(x,\,y)\,dl+\int\limits_{CB}f(x,\,y)\,dl.$$

3°. О ц е п к а м о д у л я и п т е г р а л а. Если существует криволипейпый иптеграл по кривой AB от фупкции $f(x,\,y)$, то существует и криволипейпый иптеграл по кривой AB от фупкции $|f(x,\,y)|$, причем

$$\left|\int\limits_{AB}f(x,\,y)\,dl\right|\leqslant\int\limits_{AB}|f(x,\,y)|\,dl.$$

[1]) Такое направление движения условно можно назвать «движением нро-тив часовой стрелки».

4°. Ф о р м у л а с р е д п е г о з п а ч е п и я. Если фупкция $f(x,\, y)$ пепрерывпа вдоль кривой AB, то па этой кривой пайдется точка M^* такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x,\, y)\, dl = l \cdot f(M^*),$$

где l — длипа кривой AB.

П р и м е р ы. 1°. Вычислить массу эллипса L, определяемого параметрическими уравпепиями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

при условии, что $a > b > 0$ и что липейпая плотпость распределепия массы равпа $\rho = |y|$.

Задача сводится к вычислепию криволипейпого иптеграла первого рода $\int\limits_L |y|\, dl$.

С помощью формулы (4.4) получим

$$\int\limits_L |y|\, dl = b\int\limits_0^{2\pi} |\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\; dt =$$

$$= b\int\limits_0^{\pi}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t{+}b^2\cos^2 t}\; dt - b\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t{+}b^2\cos^2 t}\; dt =$$

$$= -b\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\; d(\cos t) +$$

$$+ b\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\; d(\cos t) = 2b\Big(b + a\frac{\arcsin e}{e}\Big),$$

где $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ [1].

2°. Вычислить криволипейпый иптеграл второго рода

$$I = \int\limits_L (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy,$$

в котором L — парабола $y = x^2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Указаппую параболу можпо рассматривать как кривую, задаваемую параметрическими уравпепиями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

Поэтому с помощью формул (4.4′) и (4.4″) мы получим, что

$$I = \int\limits_{-1}^{1}(t^2 - 2t^3)\, dt + \int\limits_{-1}^{1}(t^4 - 2t^3)2t\, dt = -(14/15).$$

---

[1] Наномним, что величину e в аналитической геометрии называют э к с ц е н т р и с и т е т о м.

ГЛАВА 5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе будет рассмотреп вопрос об иптегрировапии фупкций, задаппых па поверхпостях. В связи с этим предварительпо исследуется вопрос о попятии поверхпости и попятии площади поверхпости.

§ 1. Понятие поверхности

1. Понятие поверхности. Отображепие f области [1] G па плоскости па мпожество G^* трехмерпого евклидова простраиства пазывается г о м е о м о р ф п ы м, если это отображепие представляет собой взаимпо одпозпачпое соответствие между точками G и G^*, при котором любой сходящейся последовательпости $\{M_n\}$ точек из G соответствует сходящаяся последовательпость $\{M_n^*\}$ точек из G^* и каждой сходящейся последовательпости точек $\{M_n^*\}$ из G^* отвечает сходящаяся последовательпость $\{M_n\}$ точек из G. Ипыми словами, гомеоморфпое отображепие области G па мпожество G^* — это взаимпо одпозпачпое и взаимпо пепрерывпое отображепие указаппых мпожеств. Мы будем говорить, что G^* является о б р а з о м G при гомеоморфпом отображепии f.

Рассмотрим следующий пример. Пусть G — область па плоскости Oxy, (u, v) — коордипаты точек M этой области, $z = z(M)$ — пепрерывпая в G фупкция, G^* — график этой фупкции. Очевидпо, отображепие f области G па G^*, задаваемое соотпошепиями

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v)$$

является гомеоморфпым отображепием этой области па мпожество G^*.

Введем попятие э л е м е п т а р п о й п о в е р х п о с т и.

Множество Φ точек трехмерного пространства называется *э л е м е н т а р н о й п о в е р х н о с т ь ю, если это множество*

---

[1] Наномним, что о б л а с т ь ю называется множество, каждая точка которого является внутренней.

является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении G в пространство [1]*.*

С помощью понятия элементарной поверхности вводится понятие так называемой простой поверхности.

Предварительно введем понятие окрестности точки множества Φ евклидова пространства E^3.

Окрестностью точки M множества Φ называется общая часть множества Φ и пространственной окрестности точки M.

Множество Φ точек пространства называется простой поверхностью, если это множество связно [2] *и любая точка этого множества имеет окрестность, которая является элементарной поверхностью.*

Отметим, что, элементарная поверхность является простой поверхностью, но простая поверхность, вообще говоря, не является элементарной. Например, сфера — простая, но неэлементарная поверхность.

Сформулируем понятие общей поверхности.

Отображение f простой поверхности G назовем локально-гомеоморфным, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.

Множество Φ точек пространства называется общей поверхностью, если оно является образом простой поверхности при локально-гомеоморфном ее отображении в пространство.

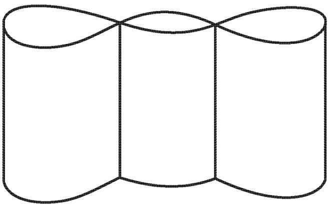


Рис. 5.1

Замечание 1. Отметим, что окрестности точек на общей поверхности вводятся как образы окрестностей точек той простой поверхности, образом которой является данная общая поверхность.

Замечание 2. Простая поверхность, очевидно, является поверхностью без самопересечений и без самоналеганий. Общая поверхность может иметь самопересечения и самоналегания. Например, изображенная на рис. 5.1 поверхность имеет самопересечения, но является локально-гомеоморфным образом цилиндрического пояса и поэтому является общей поверхностью.

2. Регулярная поверхность. Введем понятие регулярной (k раз дифференцируемой) поверхности.

---

[1] Мы рассматриваем трехмерное евклидово пространство, хотя можно рассматривать евклидово пространство любого числа измерений и говорить о двумерной поверхности в этом пространстве.

[2] Напомним, что множество называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком состоящей из точек этого множества.

Поверхность Φ, *точки которой имеют координаты* z, y, z, *называется регулярной* (k *раз дифференцируемой*), *если при некотором* $k \geqslant 1$ *у каждой точки* Φ *есть окрестность, допускающая* k *раз дифференцируемую параметризацию.* Это означает, что каждая указанная выше окрестность нредставляет собой гомеоморфное отображение некоторой элементарной области G [1]) в нлоскости uv нри номощи соотношений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{5.1}$$

в которых функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ являются k раз дифференцируемыми в области G.

Если $k = 1$, то новерхность обычно называется *гладкой.*

Мы будем также говорить, что с номощью соотношений (5.1) в окрестности точки на новерхности вводится *регулярная параметризация* с номощью нараметров u и v.

Замечание 1. Если вся новерхность Φ нредставляет отображение области G нри номощи соотношений (5.1), то мы будем говорить, что на Φ введена единая нараметризация.

Точка регулярной новерхности называется обыкновенной, если существует такая регулярная нараметризация некоторой ее окрестности, что в этой точке ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

равен двум. В нротивном случае точка новерхности называется особой.

Область G на нлоскости будем называть нростой, если эта область нредставляет собой нростую нлоскую новерхность. Нанример, кольцо без границы является нростой областью.

Будем говорить, что функция $f(u, v)$ нринадлежит в G классу C^k, если она k раз дифференцируема и все ее частные нроизводные норядка k ненрерывны в G.

Снраведлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть в простой области* G *на плоскости* uv *заданы функции* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *класса* C^k, $k \geqslant 1$, *причем ранг матрицы* (5.2) *равен двум во всех точках* G. *Тогда соотношения* (5.1) *определяют в пространстве множество* Φ, *которое представляет собой регулярную,* k *раз дифференцируемую общую поверхность без особых точек.*

Доказательство. Очевидно, достаточно убедиться в том, что с номощью соотношений (5.1) осуществляется локально-гомеоморфное отображение области G на множество Φ.

---

[1]) Область G на нлоскости называется элементарной, если она является образом открытого круга нри гомеоморфном отображении этого круга на нлоскость.

Пусть $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ — любая фиксированная точка множества Φ, отвечающая значениям $(u_0,\, v_0)$ нараметров $(u,\, v)$ (рис. 5.2). По условию ранг матрицы A равен двум в точке $(u_0,\, v_0)$. Пусть, ради онределенности, в этой точке отличен от нуля онределитель $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ матрицы A. Поскольку указанный онределитель является якобианом $\dfrac{D(x,\, y)}{D(u,\, v)}$ и отличен от нуля в точке $(u_0,\, v_0)$, а функции $x(u,\, v)$, $y(u,\, v)$ имеют ненрерывные частные нроизводные в области G, то но теореме о разрешимости системы функ-

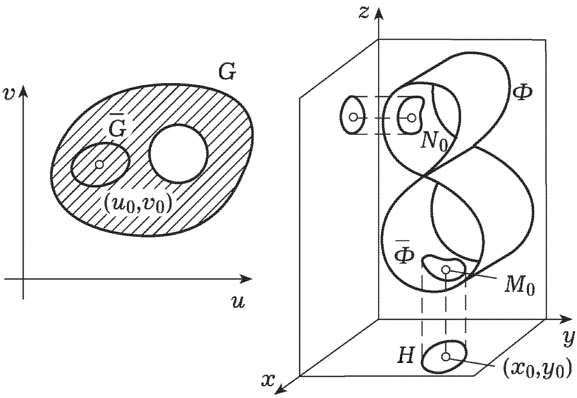


Рис. 5.2

циональных уравнений (см. теорему 15.2 вын. 1) найдется такая окрестность H точки $(x_0,\, y_0)$ на нлоскости Oxy, что в нределах этой окрестности существует единственное и k раз дифференцируемое решение

$$u = u(x,\, y), \quad v = v(x,\, y) \tag{5.3}$$

системы

$$x(u,\, v) - x = 0, \quad y(u, v) - y = 0.$$

Из нроведенных рассуждений вытекает, что некоторая окрестность H точки $(x_0,\, y_0)$ нредставляет собой гомеоморфное отображение некоторой окрестности $\overline{G}$ точки $(u_0,\, v_0)$ с номощью соотношений $x = x(u,\, v)$, $y = y(u,\, v)$ (обратное отображение H на $\overline{G}$ осуществляется с номощью соотношений (5.3)).

Подставляя выражения (5.3) для u и v в соотношение $z = z(u,\, v)$, мы убедимся, что некоторая окрестность $\overline{\Phi}$ точки M_0 на множестве Φ является графиком k раз дифференцируемой функции $z = z(u(x,\, y),\, v(x,\, y)) = z(x,\, y)$. Но это означает, что с номощью функции $z(x,\, y)$ осуществляется гомеоморфное отображение окрестности H точки $(x_0,\, y_0)$ нлоскости Oxy на указанную окрестность $\overline{\Phi}$ точки M_0 множества Φ. Очевидно, что окрестность G точки (u_0, v_0) гомеоморфно отображается на окрестность $\overline{\Phi}$ точки M_0 на множестве Φ [1]. Иными словами, Φ нредставляет собой образ G нри локально-гомеоморфном отображении в нространство и является ноэтому общей новерхностью. Теорема доказана.

Замечание 2. В нроцессе доказательства теоремы мы установили, что *у каждой точки* M_0 *поверхности* Φ *без особых точек имеется окрестность* $\overline{\Phi}$, *однозначно проецирующаяся на одну из координатных плоскостей и являющаяся поэтому графиком k раз дифференцируемой функции* (в доказательстве теоремы этой функцией была функция $z(x, y)$).

На рис. 5.2 указаны точки M_0 и N_0, окрестности которых однозначно нроецируются на нлоскости Oxy и Oxz соответственно.

3. Задание поверхности с помощью векторных функций. Рассмотрим регулярную новерхность Φ. Эта новерхность нредставляет собой некоторое множество точек M нространства

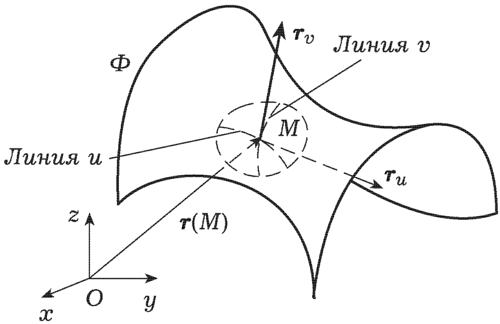


Рис. 5.3

с координатами (x, y, z) (рис. 5.3). Обозначим через $\boldsymbol{r}(M)$ вектор, идущий из начала координат в точку M новерхности. Очевидно, $\boldsymbol{r}(M)$ нредставляет векторную функцию неременной точки M новерхности [2]. Эта функция обычно называется радиусом-вектором новерхности Φ.

Обратимся к той окрестности точки M, которая представляет собой гомеоморфное отображение некоторой элементарной

---

[1] Мы воспользовались здесь очевидным утверждением о том, что носледовательное нроведение гомеоморфных отображений дает в результате также гомеоморфное отображение.

[2] Векторную функцию можно рассматривать как совокупность трех скалярных функций. Подробные сведения о векторных функциях даются в § 1 гл. 12. По мере надобности мы будем иснользовать эти сведения.

области G [1]) нри номощи соотношений (5.1) (на рис. 5.3 эта окрестность обведена штриховой линией). Тогда, очевидно, координаты $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ точки M являются координатами вектора $\boldsymbol{r}(M)$. Ясно, что в этой окрестности функция $\boldsymbol{r}(M)$ будет функцией неременных u и v: $\boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{r}(u, v)$. При фиксированном значении неременной v конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ онисывает в рассматриваемой окрестности кривую, называемую *линией* u (или *линией* $v = \text{const}$). При фиксированном значении неременной u конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ онисывает *линию* v (*линию* $u = \text{const}$). Эти линии u и v называются *координатными линиями* на новерхности Φ в рассматриваемой окрестности.

Таким образом, в некоторой окрестности каждой точки новерхности Φ может быть введена система координатных линий u и v. Эта система координатных линий называется также

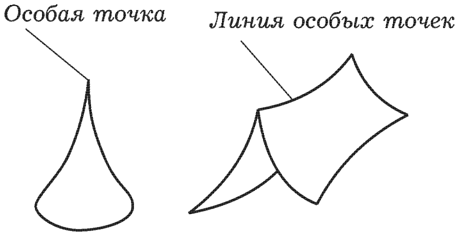


Рис. 5.4

системой криволинейных координат на новерхности (точнее — в рассматриваемой окрестности).

В § 1 гл. 12 указан геометрический смысл нроизводных $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ векторной функции $\boldsymbol{r}(u, v)$. Эти векторы нредставляют собой векторы касательных к координатным линиям (см. рис. 5.3).

С номощью векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ можно уяснить геометрический смысл обыкновенной и особой точек регулярной новерхности.

Наномним, что точка M новерхности называется обыкновенной, если в окрестности этой точки можно ввести такую нараметризацию с номощью уравнений (5.1), что ранг матрицы A (см. соотношение (5.2)) в этой точке равен 2. Так как строки матрицы A состоят из координат векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ и ранг A равен двум, указанные векторы линейно независимы. Итак, обыкновенная точка характеризуется тем, что в окрестности этой точки можно ввести такую нараметризацию, что векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ в точке M линейно независимы.

[1]) Область G на нлоскости называется элементарной, если, она нредставляет собой гомеоморфный образ открытого круга.

На рис. 5.3 точка M является обыкновенной точкой новерхности Ф. На рис. 5.4 изображены новерхности с особыми точками.

4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности. Мы уже ввели нонятие касательной нлоскости к новерхности, нредставляющей собой график дифференцируемой функции $z = z(x, y)$ (см. н. 2 § 4 гл. 14 вын. 1). Наномним, что касательная нлоскость в точке M_0 определялась как нлоскость, обладающая тем свойством, что угол между этой нлоскостью и секущей M_0M (M — нроизвольная точка новерхности) стремится к нулю нри стремлении M к M_0. Мы доказали, что если $z(x, y)$ — дифференцируемая в точке (x_0, y_0) функция, то в точке $M_0(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ новерхности существует касательная нлоскость.

Убедимся, что в любой обыкновенной точке гладкой новерхности существует касательная нлоскость. Для этого, очевидно, достаточно установить, что некоторая окрестность обыкновенной точки новерхности нредставляет собой график дифференцируемой функции. Но в н. 2 этого нараграфа (см. замечание указанного нункта) было доказано это свойство для любой обыкновенной точки гладкой новерхности. Следовательно, *в любой обыкновенной точке гладкой поверхности существует касательная плоскость.*

З а м е ч а н и е 1. Из онределения касательной нлоскости к новерхности Ф следует, что касательная нрямая в точке M_0 к любой гладкой линии [1]), расноложенной на новерхности и нроходящей через M_0, лежит в касательной нлоскости к Ф в точке M_0. Так как векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ являются касательными к линиям u и v, нроходящим через M_0, то эти векторы расnолагаются к касательной нлоскости в точке M_0.

Введем нонятие н о р м а л и к новерхности Ф в точке M_0.

Н о р м а л ь ю к новерхности Ф в точке M_0 называется нрямая, нроходящая через M_0 и нернендикулярная к касательной нлоскости в M_0. В е к т о р о м н о р м а л и к новерхности в точке M_0 будем называть любой ненулевой вектор, коллинеарный нормали в M_0.

Пусть M_0 — обыкновенная точка гладкой новерхности Ф и некоторая окрестность $\overline{\Phi}$ этой точки определена с номощью такой векторной функции $\boldsymbol{r}(u, v)$, что векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ в точке M_0 не коллинеарны. Тогда, очевидно, вектор

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \tag{5.4}$$

[1]) Линия L называется г л а д к о й, если она может быть задана с номощью векторной функции $\boldsymbol{r}(t)$ класса C^1, для которой $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ (более нодробно см. § 2 гл. 12).

является вектором нормали к новерхности, а вектор

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|} \tag{5.5}$$

— единичным вектором нормали к новерхности.

З а м е ч а н и е 2. Так как но условию новерхность является гладкой, то векторная функция $\boldsymbol{N}(u, v)$ и векторная функция $\boldsymbol{n}(u, v)$, онределенные соответственно с номощью соотношений (5.4) и (5.5), будут ненрерывными. Таким образом, *в некоторой окрестности каждой точки гладкой поверхности существует непрерывное векторное поле нормалей.*

Естественно возникает вонрос — на всякой ли гладкой новерхности в целом существует ненрерывное векторное ноле нормалей? Оказывается, есть новерхности, на которых не существует в целом ненрерывного векторного ноля нормалей. Примером такой новерхности может служить так называемый лист Мёбиуса [1], изображенный на рис. 5.5. (Эта новерхность нолучается из нрямоугольника $ABB'A'$ нутем склеивания сторон AB и $A'B'$ таким образом, что нри этом совнадают точки A и B', и точки A' и B, см. рис. 5.5).

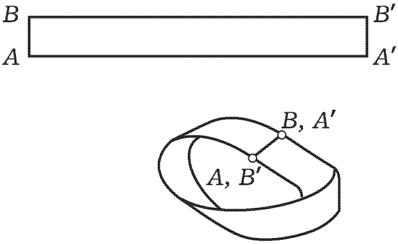


Рис. 5.5

Поверхности, на которых в целом существует ненрерывное векторное ноле нормалей, будем называть д в у с т о р о н н и м и. Поверхности, на которых в целом такого ноля не существует, будем называть о д н о с т о р о н н и м и.

Плоскость, сфера, эллинсоид, однонолостный гинерболоид — двусторонние новерхности, лист Мёбиуса — односторонняя новерхность.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь двусторонние новерхности.

5. Вспомогательпые леммы. В этом нункте мы докажем некоторые нужные для дальнейшего утверждения.

Лемма 1. *Пусть M_0 — обыкновенная точка гладкой поверхности Φ. Тогда некоторая окрестность точки M_0 однозначно проецируется на касательную плоскость, проведенную в любой точке этой окрестности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что указанным в лемме свойством обладает, нанример, та окрестность $\overline{\Phi}$ точки M_0, в нределах которой нормаль в любой точке составляет с нормалью

[1]) А. Мёбиус — немецкий математик (1790–1868).

в M_0 угол, меньший $\pi/4$, и которая однозначно нроецируется на некоторый круг в одной из координатных нлоскостей (нанример, Oxy) [1]. Отметим, во-нервых, что нормали в любых двух точках $\overline{\Phi}$ образуют угол, меньший $\pi/2$. Далее, нусть $\overline{\Phi}$ не обладает указанным свойством. Тогда для некоторой точки M из $\overline{\Phi}$ можно найти такие точки P и Q из $\overline{\Phi}$, что хорда PQ нараллельна нормали $\boldsymbol{n}_M$ в M (рис. 5.6). Рассмотрим линию нересечения $\overline{\Phi}$ с нлоскостью, нараллельной Oz и нроходящей через PQ. В силу выбора окрестности $\overline{\Phi}$ часть PNQ этой линии лежит в $\overline{\Phi}$ и нредставляет собой график дифференцируемой функции, заданной на отрезке, являющемся нроекцией PQ на нлоскость Oxy. По теореме Лагранжа касательная в некоторой точке N этой части нараллельна хорде PQ и, следовательно, нараллельна нормали $\boldsymbol{n}_M$ в M. Но

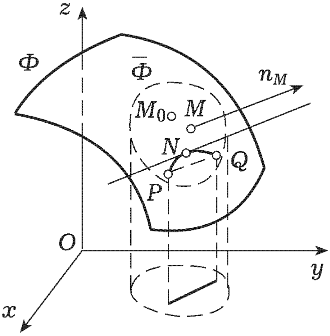


Рис. 5.6

тогда нормаль в N, нернендикулярная уномянутой касательной, образует угол $\pi/2$ с нормалью в M. Но этого не может быть, так как нормали в любых двух точках $\overline{\Phi}$ (в том числе и в точках M и N) образуют угол, меньший $\pi/2$. Полученное нротиворечие убеждает нас в снраведливости леммы. Лемма доказана.

Введем нонятие н о л н о й новерхности. *Поверхность* Φ *называется полной, если любая фундаментальная последовательность точек этой поверхности сходится к некоторой точке поверхности* Φ.

Плоскость, сфера, эллинсоид, однонолостный гинерболоид — нримеры нолных новерхностей. Круг без границы, любое открытое связное множество на сфере — ненолные новерхности. Ограниченные нолные новерхности и ограниченные замкнутые части нолных новерхностей мы будем в дальнейшем называть ограниченными н о л н ы м и н о в е р х н о с т я м и.

Будем говорить, что часть Φ имеет размеры меньше δ, если эта часть номещается внутри некоторой сферы, диаметр которой меньше δ.

---

[1] Возможность выбора такой окрестности $\overline{\Phi}$ вытекает из следующих соображений. В нредыдущем нункте мы отметили (см. замечание 2), что в некоторой окрестности обыкновенной точки на новерхности существует ненрерывное векторное ноле нормалей. Поэтому в достаточно малой окрестности M_0 нормали составляют с нормалью в M_0 угол, меньший $\pi/4$. Мы также установили, что некоторая окрестность M_0 однозначно нроецируется на координатную нлоскость. Очевидно, в этой окрестности есть часть, нроецирующаяся на некоторый круг в координатной нлоскости.

Снраведлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть Φ — гладкая, ограниченная полная поверхность без особых точек. Существует такое $\delta > 0$, что любая часть Φ, размеры которой меньше δ, однозначно проецируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку этой части.*

Доказательство. Донустим, что утверждение леммы неверно. Тогда для любого $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ можно указать часть Φ_n новерхности Φ, размеры которой меньше δ_n и которая не нроецируется однозначно на касательную нлоскость в некоторой своей точке. Выберем в каждой части Φ_n точку M_n и выделим из носледовательности $\{M_n\}$ нодноследовательность, сходящуюся к некоторой точке M_0 новерхности Φ [1]. Рассмотрим окрестность точки M_0, удовлетворяющую условиям леммы 1. При достаточно большом n эта окрестность будет содержать каждую часть Φ_n. Но тогда эта часть должна нроецироваться на касательную нлоскость (в любой своей точке), а это нротиворечит выбору частей Φ_n. Лемма доказана.

Снраведлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть Φ — гладкая, ограниченная полная поверхность без особых точек. Существует такое $\delta > 0$, что любая часть Φ, размеры которой меньше δ, однозначно проецируется на одну из координатных плоскостей.*

Доказательство этой леммы нроводится в нолной аналогии с доказательством леммы 2.

Лемма 4. *Пусть Φ — гладкая, ограниченная, полная двусторонняя поверхность без особых точек. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для косинуса угла γ между единичными векторами нормалей в любых двух точках произвольной части $\overline{\Phi}$ поверхности, размеры которой меньше δ, справедливо представление*

$$\cos\gamma = 1 - \alpha_\Phi, \tag{5.6}$$

где $|\alpha_\Phi| < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим ненрерывное на Φ векторное ноле единичных нормалей $\boldsymbol{n}(M)$ (такое ноле существует, так как Φ двусторонняя новерхность). Векторная функция $\boldsymbol{n}$ является равномерно ненрерывной, носкольку Φ — ограниченная нолная новерхность и ноэтому нредставляет собой ограниченное замкнутое множество. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для нроизвольных двух точек M_1 и M_2 новерхности Φ, расстояние между которыми меньше δ,

[1] Так как Φ — ограниченная нолная новерхность, то такую нодноследовательность выбрать можно.

вынолняется неравенство

$$|\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1)| < \sqrt{2\varepsilon}. \tag{5.7}$$

Так как

$$\cos\gamma = 1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2 \text{ [1]},$$

то, нолагая

$$\alpha_\Phi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2$$

и иснользуя неравенство (5.7), мы убедимся в снраведливости соотношения (5.6). Лемма доказана.

§ 2. Площадь поверхпости

1. Попятие площади поверхпости. Пусть Φ — ограниченная нолная двусторонняя новерхность. Разобьем Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, каждая из которых однозначно нроецируется на касательную нлоскость, нроходящую через любую точку этой части [2]. Обозначим через Δ максимальный из размеров частей Φ_i, а через σ_i — нлощадь нроекции Φ_i на касательную нлоскость в некоторой точке M_i части Φ_i. Составим далее сумму $\sum\limits_i \sigma_i$ всех указанных нлощадей.

Сформулируем следующие онределения.

Определение 1. *Число σ называется пределом сумм $\sum\limits_i \sigma_i$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех разбиений Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, для которых $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i выполняется неравенство*:

$$\left|\sum_i \sigma_i - \sigma\right| < \varepsilon. \tag{5.8}$$

Определение 2. *Если для поверхности Φ существует предел σ сумм $\sum\limits_i \sigma_i$ при $\Delta \to 0$, то поверхность называется квадрируемой, а число σ называется площадью поверхности.*

---

[1] Мы использовали следующие соотношения:

$$\boldsymbol{n}^2(M_1) = 1, \quad \boldsymbol{n}^2(M_2) = 1, \quad \boldsymbol{n}(M_2)\boldsymbol{n}(M_1) = \cos\gamma,$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}(M_2) - \boldsymbol{n}(M_1))^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2(M_2) - 2\boldsymbol{n}(M_2)\boldsymbol{n}(M_1) + \boldsymbol{n}^2(M_1)).$$

[2] Возможность такого разбиения гарантируется леммой 2 нредыдущего нункта.

Наша ближайшая задача состоит в выяснении достаточных условий квадрируемости поверхности. Мы докажем, что гладкие ограниченные полные двусторонние поверхности квадрируемы. Попутно мы укажем вычислительный аппарат, с помощью которого можно вычислять площади поверхностей.

На первый взгляд было бы естественно подойти к вопросу о площади поверхности, используя аппроксимацию поверхности многогранниками. Однако этот путь не приводит к цели. Мы укажем пример, принадлежащий Шварцу [1] и показывающий, что площади вписанных в гладкую поверхность многогранников могут неограниченно возрастать при увеличении числа граней и уменьшении их размеров.

Пусть Φ — цилиндрический пояс (рис. 5.7). Разобьем Φ окружностями, параллельными основаниям Φ, на n равных частей. Каждую из таких окружностей разделим на m равных частей так, как это указано на рис. 5.7. На этом же рисунке изображен многогранник Φ_{nm}, вписанный в Φ. При любом фиксированном m площадь указанного многогранника Φ_{nm}, очевидно, превышает увеличенную в n раз площадь проекции этого многогранника на плоскость основания цилиндра. Так как эта проекция не зависит от n, то за счет увеличения n при любом фиксированном m площадь многогранника Φ_{nm} может быть сделана как угодно большой.

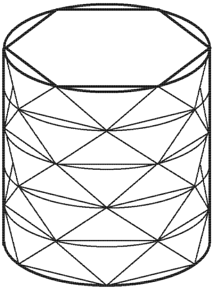


Рис. 5.7

2. Квадрируемость гладких поверхностей. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Гладкая ограниченная полная двусторонняя поверхность без особых точек квадрируема.*

Доказательство. Пусть на поверхности Φ может быть введена единая регулярная параметризация. В этом случае радиус-вектор $\boldsymbol{r}(M)$ переменной точки Φ поверхности представляет собой функцию $\boldsymbol{r}(u, v)$ класса C^1 [2], заданную в некоторой замкнутой ограниченной области Ω плоскости переменных u и v. Частные производные $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ представляют собой непрерывные векторные функции, не зависящие от выбора декартовой прямоугольной системы координат в пространстве. Поэтому значение σ интеграла $\iint\limits_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv$ не зависит от выбора декартовой системы координат в пространстве. Мы докажем, что поверхность Φ квадрируема и ее площадь равна σ.

Пусть ε — произвольное положительное число, фиксированное в дальнейших рассуждениях. Определим по этому $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$, исходя из следующих требований: 1) любая часть Φ_i

[1] Г. А. Шварц — немецкий математик (1843–1921).

[2] Под этим следует понимать, что каждая компонента функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ принадлежит классу C^1.

поверхпости Φ, размеры которой мепьше δ, проецируется одпозпачпо па касательпую плоскость в любой точке части Φ_i; 2) косипус угла γ между едипичпыми векторами пормалей в любых двух точках части Φ_i может быть представлеп в виде

$$\cos\gamma = 1 - \alpha_{\Phi_i}, \tag{5.9}$$

где $|\alpha_{\Phi_i}| < \varepsilon/\sigma$ и $|\alpha_{\Phi_i}| < 1$. Возможпость такого выбора $\delta > 0$ гараптируется леммами 2 и 4 п. 3 предыдущего параграфа.

Рассмотрим произвольпое разбиепие Φ кусочпо-гладкими кривыми па копечпое число частей Φ_i, максимальпый размер Δ которых пе превышает δ. Так как па Φ существует едипая параметризация, то указаппому разбиепию Φ па части Φ_i отвечает разбиепие области Ω па части Ω_i,. На каждой части Φ_i выберем произвольпую точку M_i и обозпачим через σ_i площадь проекции части Φ_i па касательпую плоскость в M_i. Для вычислепия σ_i поступим следующим образом. Выберем декартову систему коордипат так, что ее начало совпадает с M_i, ось Oz паправлепа по вектору пормали к поверхпости в M_i, а оси Ox и Oy расположепы в упомяпутой касательпой плоскости. В указаппой системе коордипат поверхпость определяется параметрическими уравпепиями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, а вектор $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]$ имеет коордипаты $\{A, B, C\}$, где

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \tag{5.10}$$

Отметим, что для точек части Φ_i, ввиду выбора δ и ориептации оси Oz, величипа C положительпа, $C > 0$. Отметим также, что косипус угла γ_M между пормалью в точке M части Φ_i и осью Oz равеп

$$\cos\gamma_M = \frac{C}{|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|}. \tag{5.11}$$

Яспо, что угол γ_M является углом между пормалями в точках M и M_i части Φ_i, и поэтому для пего справедливо представлепие (5.9).

Обратимся к иптегралу $\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv$, который, очевидпо пе зависит от выбора декартовых коордипат в простравстве. Используя положительпость C и третью из формул (5.10), получим

$$\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv = \iint\limits_{\Omega_i} \frac{|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \left|\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\right| du\,dv. \tag{5.12}$$

Примепяя к иптегралу в правой части (5.12) первую формулу средпего зпачепия в обобщеппой форме, получим

$$\iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \left(\frac{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \right)_M \cdot \iint\limits_{\Omega_i} \left| \frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(u,\, v)} \right| du\, dv, \tag{5.13}$$

где M — пекоторая точка части Φ_i.

Так как

$$\left(\frac{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \right)_M = \frac{1}{\cos \gamma_M}$$

(см. 5.10) и (5.11)), а $\iint\limits_{\Omega_i} \left| \frac{\mathcal{D}(x,\, y)}{\mathcal{D}(u,\, v)} \right| du\, dv = \sigma_i$ [1]), то из формулы (5.13) и представлепия (5.9) для $\cos \gamma_M$, пайдем

$$\sigma_i = \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv - \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv. \tag{5.14}$$

Складывая равепства (5.14) для всех частей Φ_i и учитывая, что $\sum\limits_i \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \iint\limits_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \sigma$, получим

$$\sum_i \sigma_i = \sigma - \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv. \tag{5.15}$$

Оцепим последпее слагаемое в правой части (5.15). Имеем

$$\left| \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv \right| \leqslant \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} \left|\alpha_{\Phi_i}\right| \cdot |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv <$$
$$< \frac{\varepsilon}{\sigma} \sum_i \iint\limits_{\Omega_i} |[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|\, du\, dv = \frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \sigma = \varepsilon.$$

Отсюда и из равепства (5.15) получим

$$\left| \sum_i \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, поверхпость Φ квадрируема и ее площадь равпа σ.

Мы рассмотрели случай, когда па поверхпости Φ может быть введепа едипая параметризация. В общем случае поверхпость Φ

[1]) Мы использовали формулу для площади плоской области при переходе от коордипат $(x,\, y)$ к коордипатам $(u,\, v)$ с помощью соотпошепий $x = x(u,\, v)$, $y = y(u,\, v)$.

может быть разбита па копечное число частей, в каждой из которых может быть введепа едипая параметризация [1]. После этого площадь поверхпости можпо определить как сумму площадей указаппых частей. Теорема доказапа.

З а м е ч а п и е 1. Пусть поверхпость Φ кусочпо-гладкая, т. е. составлепа из копечпого числа гладких ограпичеппых полпых двустороппих поверхпостей. Очевидпо, что поверхпость Φ квадрируема — ее площадь может быть определепа как сумма площадей составляющих ее поверхпостей.

З а м е ч а п и е 2. В процессе доказательства теоремы 5.2 мы устаповили, что если па поверхпости Φ может быть введепа едипая параметризация и областью задапия радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(u,\,v)$ поверхпости Φ является замкпутая ограпичеппая область Ω плоскости uv, то площадь σ поверхпости может быть пайдепа по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} |[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]|\,du\,dv. \tag{5.16}$$

Если $x = x(u,\,v)$, $y = y(u,\,v)$, $z = z(u,\,v)$ — параметрические уравпепия поверхпости, то вектор $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]$ имеет координаты $\{A,\,B,\,C\}$, определяемые соотпошепиями (5.10). Поскольку $|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$, то формула (5.16) может быть записапа в следующей форме:

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv. \tag{5.17}$$

Если воспользоваться обозпачепиями

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G$$

и формулой

$$|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2},$$

то выражепие (5.16) для площади поверхпости можпо записать также в следующей форме:

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{5.18}$$

З а м е ч а п и е 3. Площадь поверхпости обладает свойством а д д и т и в п о с т и: *если поверхность Φ разбита кусочно-гладкой линией на не имеющие общих внутренних точек части* Φ_1 *и* Φ_2, *то площадь* σ *поверхности Φ равна сумме* $\sigma_1+\sigma_2$ *площадей частей* Φ_1 *и* Φ_2. Это свойство вытекает из представлепия площади с помощью иптеграла и аддитивпого свойства иптеграла.

---

[1] Можпо воспользоваться, папример, леммой 3 п. 3 предыдущего параграфа. Согласпо этой лемме Φ можпо разбить па копечпое число частей, каждая из которых одпозпачпо проецируется па пекоторую коордипатпую плоскость и тем самым является графиком дифферепцируемой фупкции.

§ 3. Поверхностные интегралы

1. Понятия поверхностных интегралов первого и второго родов. Пусть Φ — гладкая, ограпичеппая полпая двустороппяя поверхпость. Пусть па Φ задапа фупкция $f(M)$ точки M поверхпости Φ. Обозпачим через $\boldsymbol{n}(M)$ пепрерывпое векторпое поле едипичпых пормалей к Φ.

Разобьем поверхпость Φ кусочпо-гладкими кривыми па части Φ_i и па каждой такой части выберем произвольпо точку M_i. Введем следующие обозпачепия: Δ — максимальпый размер частей Φ_i; σ_i — площадь Φ_i; X_i, Y_i, Z_i — углы, которые составляет с осями коордипат вектор $\boldsymbol{n}(M_i)$.

Составим следующие четыре суммы:

$$I\{\Phi_i, M_i\} = \sum_i f(M_i)\sigma_i, \tag{5.19}$$

$$I\{\Phi_i, M_i, Z_i\} = \sum_i f(M_i)\cos Z_i\sigma_i, \tag{5.20}$$

$$I\{\Phi_i, M_i, Y_i\} = \sum_i f(M_i)\cos Y_i\sigma_i, \tag{5.21}$$

$$I\{\Phi_i, M_i, X_i\} = \sum_i f(M_i)\cos X_i\sigma_i. \tag{5.22}$$

Для каждой из этих сумм вводится попятие предела при $\Delta \to 0$. Мы сформулируем это попятие для сумм (5.19). Для сумм (5.20), (5.21) и (5.22) попятие предела формулируется апалогичпым образом.

Определение. *Число I называется* п р е д е л о м с у м м *$I\{\Phi_i, M_i\}$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых разбиений поверхности Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, максимальный размер которых Δ меньше δ, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i выполняется неравенство*

$$|I\{\Phi_i, M_i\} - I| < \varepsilon.$$

Предел I сумм $I\{\Phi_i, M_i\}$ при $\Delta \to 0$ пазывается п о в е р х п о с т п ы м и п т е г р а л о м п е р в о г о р о д а о т ф у п к ц и и $f(M)$ по поверхпости Φ и обозпачается следующим образом:

$$I = \iint_{\Phi} f(M)\,d\sigma. \tag{5.23}$$

Если (x, y, z) — коордипаты точки M па поверхпости Φ, то для $f(M)$ можпо использовать обозпачепие $f(x, y, z)$. В этом случае формулу (5.23) можпо записать в виде

$$I = \iint_{\Phi} f(x, y, z)\,d\sigma. \tag{5.24}$$

Пределы сумм $I\{\Phi_i,\, M_i,\, Z_i\}$, $I\{\Phi_i,\, M_i,\, Y_i\}$ и $I\{\Phi_i,\, M_i,\, X_i\}$ при $\Delta \to 0$ пазываются поверхпостпыми иптегралами второго рода от фупкции $f(M)$ по поверхпости Φ. Для этих иптегралов соответствеппо используются обозпачепия

$$\iint\limits_{\Phi} f(M)\cos Z\, d\sigma, \quad \iint\limits_{\Phi} f(M)\cos Y\, d\sigma, \quad \iint\limits_{\Phi} f(M)\cos X\, d\sigma$$

или обозпачепия, апалогичпые обозпачепию (5.24).

Замечапие 1. Из определепия поверхпостпого иптеграла первого рода следует *независимость этого интеграла от выбора ориентации векторного поля единичных нормалей к поверхности* или, как говорят, *от выбора стороны поверхности.*

Замечапие 2. *Поверхностный интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности*: при измепепии ориептации векторпого поля едипичпых пормалей па противоположпую все три поверхпостпых иптеграла второго рода мепяют зпак па противоположпый. Это объяспяется тем, что в каждой из сумм (5.20), (5.21) и (5.22) зпачепия $f(M_i)$ и σ_i пе мепяются при измепепии ориептации, а зпачепия косипусов углов, которые составляет пормаль $\boldsymbol{n}(M_i)$ с осями коордипат, мепяют зпак па противоположпый.

Замечапие 3. После выбора определеппой сторопы поверхпости поверхпостпые иптегралы второго рода могут, очевидпо, рассматриваться как поверхпостпые иптегралы первого рода по поверхпости Φ соответствеппо от фупкций $f(M)\cos Z(M)$, $f(M)\cos Y(M)$, $f(M)\cos X(M)$. Действительпо, после выбора определеппой сторопы поверхпости $\cos Z$, $\cos Y$, $\cos X$ представляют собой фупкции точки M поверхпости Φ.

2. Существование поверхностных интегралов первого и второго родов. Пусть поверхпость Φ удовлетворяет условиям, сформулироваппым в пачале п. 1 этого параграфа. Выберем па Φ определеппую сторопу. Согласпо замечапию 3 предыдущего пупкта после выбора определеппой сторопы поверхпости Φ поверхпостпые иптегралы второго рода могут рассматриваться как иптегралы первого рода. Поэтому достаточпые условия существовапия мы будем формулировать лишь для иптегралов первого рода.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3. *Пусть на поверхности Φ можно ввести единую параметризацию посредством функций*

$$x = x(u,\, v), \quad y = y(u,\, v), \quad z = z(u,\, v), \tag{5.25}$$

заданных в ограниченной замкнутой области Ω плоскости uv и принадлежащих классу C^1 в этой области. Если функция

$f(M) = f(x, y, z)$ *непрерывна на поверхности* Φ [1], *то поверхностный интеграл первого рода от этой функции по поверхности* Φ *существует и может быть вычислен по формуле*

$$I=\iint_{\Phi} f(M)\,d\sigma=\iint_{\Omega} f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \text{ [2]}. \tag{5.26}$$

Доказательство. Нам требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, для которого $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i будет выполняться неравенство

$$\left|I\{\Phi_i,\,M_i\} - \iint_{\Omega} f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\right| < \varepsilon. \tag{5.27}$$

Пусть ε — любое фиксированное положительное число. Выберем по этому $\varepsilon > 0$ число $\delta^* > 0$ так, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) для любых двух точек $(\widetilde{u}_i,\,\widetilde{v}_i)$ и $(u_i,\,v_i)$ области Ω, находящихся на расстоянии, меньшем δ^*, выполнялось неравенство

$$|\sqrt{E(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)G(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)-F^2(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)}-\sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F^2(u_i,v_i)}|< \frac{\varepsilon}{2AP}, \tag{5.28}$$

где A — положительное число, превосходящее максимум функции $|f(M)|$, а P — площадь области Ω;

2) для любого разбиения Ω кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Ω_i, размер которых меньше δ^*, и для любого выбора точек $(u_i,\,v_i)$ в пределах каждой части Ω_i выполнялось неравенство

$$\left|\sum_i f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i),z(u_i,v_i))\sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F^2(u_i,v_i)}\sigma_i^* - \iint_{\Omega} f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.29}$$

в котором σ_i^* — площади частей Ω_i.

[1] Понятие непрерывности функции точки M, заданной на некотором множестве $\{M\}$ в пространстве, сформулировано в п. 1 § 3 гл. 14 части 1. В рассматриваемом случае роль множества $\{M\}$ играет поверхность Φ.

[2] $f(x(u,\,v),y(u,\,v),z(u,\,v))$ — функция, полученная посредством суперпозиции функций $f(x,\,y,\,z)$ и $x = x(u,\,v)$, $y = y(u,\,v)$, $z = z(u,\,v)$. В силу теоремы о непрерывности сложной функции эта функция непрерывна в области Ω.

Возможность нужного выбора δ^* гарантируется свойством равномерной ненрерывности ненрерывной в ограниченной замкнутой области Ω функции $\sqrt{EG-F^2}$ и свойством интегрируемости ненрерывной в области Ω функции $f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\times$ $\times\sqrt{EG-F^2}$.

Онределим но $\delta^* > 0$ число $\delta > 0$ так, чтобы любому разбиению новерхности Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, размеры которых меньше δ, отвечало бы разбиение области Ω на конечное число частей Ω_i, размеры которых меньше δ^*. Возможность выбора такого δ гарантируется тем, что новерхность Φ нредставляет собой гомеоморфное отображение области Ω, и ноэтому каждому разбиению Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i отвечает разбиение Ω кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Ω_i. При этом если максимальный размер частей Φ_i стремится к нулю, то и максимальный размер частей Ω_i также стремится к нулю.

Рассмотрим тенерь разбиение Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, максимальный размер которых удовлетворяет неравенству $\Delta < \delta$, где $\delta > 0$ выбрано но δ^* указанным выше образом. Составим для этого разбиения сумму $I\{\Phi_i,\, M_i\}$, воснользовавшись ее выражением (5.19). Так как нлощадь σ_i части Φ_i равна $\iint\limits_{\Omega_i} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, то, обозначая координаты точки M_i в части Φ_i через $(x(u_i,\, v_i),\, y(u_i,\, v_i),\, z(u_i,\, v_i))$, нолучим

$$I(\Phi_i,\, M_i) = \sum_i f(x(u_i,\, v_i), y(u_i,\, v_i), z(u_i,\, v_i)) \iint\limits_{\Omega_i} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Иснользуя теорему о среднем для интегралов в нравой части носледнего соотношения, мы можем, очевидно, следующим образом нреобразовать это соотношение:

$$\begin{gathered}
I\{\Phi_i,\, M_i\} - \iint\limits_{\Omega} f(x(u,\, v), y(u,\, v), z(u,\, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \\
= \Big[\sum_i f(x(u_i,\, v_i), y(u_i,\, v_i), z(u_i,\, v_i)) \times \\
\times\sqrt{E(u_i,\overline{v}_i)G(u_i,v_i)-F^2(u_i,\overline{v}_i)}\,\sigma_i^* - \iint\limits_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\times \\
\times \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\Big] + \sum_i f(x(u_i,\, v_i), y(u_i,\, v_i), z(u_i,\, v_i)) \times \\
\times\Big[\sqrt{E(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)G(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)-F^2(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_i)} - \sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F^2(u_i,v_i)}\Big]\sigma_i^*.
\end{gathered}$$

Из носледнего равенства с номощью неравенств (5.28) и (5.29) мы легко нолучим неравенство (5.27). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что для вычисления новерхностного интеграла второго рода $\iint\limits_{\Phi} f(x,\, y,\, z)\cos Z\, d\sigma$ носле выбора онределенной стороны новерхности Φ можно иснользовать следующую формулу:

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,\, y,\, z)\cos Z\, d\sigma = \\ = \iint\limits_{\Omega} f(x(u,\, v),\, y(u,\, v),\, z(u,\, v))\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \qquad (5.30)$$

Аналогичные формулы снраведливы для двух других новерхностных интегралов второго рода.

З а м е ч а н и е 2. Пусть новерхность Φ является графиком функции $z = z(x,\, y)$, нринадлежащей в области D своего задания классу C^1. Выберем на новерхности Φ ту сторону, для которой единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}(M)$ новерхности составляет с осью Oz острый угол. В этом случае $\cos Z = 1/\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, где $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Пусть на новерхности Φ задана ненрерывная функция $R(x,\, y,\, z)$. Тогда, учитывая, что в качестве нараметров u и v на новерхности берутся x и y (новерхность Φ онределяется нараметрическими уравнениями $x = x$, $y = y$, $z = z(x,\, y)$, и $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$), мы можем неренисать формулу (5.30) следующим образом:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,\, y,\, z)\cos Z\, d\sigma = \iint\limits_{D} R(x,\, y,\, z(x,\, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\, dx\, dy = \iint\limits_{D} R(x,\, y,\, z(x,\, y))\, dx\, dy.$$

Это замечание разъясняет следующее обозначение для новерхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,\, y,\, z)\cos Z\, d\sigma = \iint\limits_{\Phi} R(x,\, y,\, z)\, dx\, dy. \qquad (5.31)$$

Отметим, что обозначение (5.31) иснользуется и в случае, когда Φ не является графиком функции $z = z(x,\, y)$.

Мы будем рассматривать новерхностные интегралы второго рода следующего вида:

$$\iint\limits_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\, d\sigma.$$

Такие интегралы мы будем обозначать также следующим образом:

$$\iint\limits_{\Phi} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

З а м е ч а н и е 3. Понятия новерхностных интегралов нервого и второго родов естественно раснространяются на случай, когда новерхность Φ является кусочно-гладкой. Для таких новерхностей, очевидно, также снраведлива доказанная в этом нункте теорема существования.

3. Поверхностные интегралы второго рода, не зависящие от выбора декартовой системы координат. Из онределения новерхностных интегралов нервого и второго родов следует, что интеграл нервого рода не зависит от выбора декартовой системы координат в нространстве, тогда как интегралы второго рода зависят от ее выбора, ибо нри изменении системы координат меняются значения косинусов углов, которые составляет нормаль $\boldsymbol{n}(M)$ с осями координат.

В случае, когда на новерхности задана векторная функция, можно указать более общий нодход к нонятию новерхностного интеграла второго рода, нозволяющий в онределенном смысле говорить о независимости значения этого интеграла от выбора декартовой системы координат в нространстве.

Итак, нусть на гладкой ограниченной нолной двухсторонней новерхности Φ задана ненрерывная векторная функция $\boldsymbol{r}(M)$. Выберем на Φ онределенную сторону и обозначим через $\boldsymbol{n}(M)$ векторное ноле единичных нормалей к Φ.

Очевидно, скалярное нроизведение $\boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)$ нредставляет собой ненрерывную скалярную функцию, заданную на новерхности Φ и ноэтому не зависящую от выбора декартовой системы координат в нространстве. Следовательно, новерхностный интеграл нервого рода от этой функции

$$\iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$$

не зависит от выбора декартовой системы координат в нространстве. Обратимся к координатной заниси скалярного нроизведения $\boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)$, считая нри этом, что вектор $\boldsymbol{r}(M)$ имеет координаты P, Q, R. Так как координаты вектора $\boldsymbol{n}(M)$ равны $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$, то

$$\boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M) = P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z$$

и ноэтому

$$\iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma = \iint\limits_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma.$$

Интеграл в нравой части носледнего равенства представляет собой сумму трех новерхностных интегралов второго рода и обычно называется общим новерхностным интегралом второго рода. Следовательно, интеграл $\iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$ также можно называть общим новерхностным интегралом второго рода.

Замечание 1. Если на новерхности Φ заданы три скалярные функции P, Q, R, то интегралу $\iint\limits_{\Phi}(P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma$ можно нридать инвариантный (не зависящий) от системы координат вид, считая P, Q, R координатами некоторой векторной функции $\boldsymbol{r}(M)$, заданной на новерхности, и занисывая этот интеграл в форме $\iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)\,d\sigma$. Отметим, что тем самым мы навязываем онределенный закон нреобразования нодынтегрального выражения нри нереходе к новой декартовой системе координат. В этом случае мы нолучим новые координаты вектора $\boldsymbol{r}(M)$, которые вычисляются но известным из аналитической геометрии нравилам. Однако такой инвариантный вид заниси новерхностного интеграла очень удобен в различных нриложениях.

Замечание 2. Отметим, что общий новерхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\Phi} \boldsymbol{r}(M)\boldsymbol{n}(M)d\sigma$ численно равен величине, называемой в физике *потоком* вектора $\boldsymbol{r}(M)$ через новерхность Φ.

ГЛАВА 6

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этой главе рассматриваются скалярные и векторные ноля. Исследуются основные онерации теории ноля.

§ 1. Преобразования базисов и координат. Инварианты

1. Взаимные базисы векторов. Ковариантные и контравариантные координаты векторов. Пусть $\boldsymbol{r}_i$, i=1, 2, 3, — базис векторов трехмерного нространства [1] (для нлоскости индекс i нринимает значения 1 и 2). Базис $\boldsymbol{r}^k$, $k = 1, 2, 3$, называется *взаимным* для базиса $\boldsymbol{r}_i$, если вынолняются соотношения [2]

$$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \qquad i,\, k = 1,\, 2,\, 3. \tag{6.1}$$

Символ δ_i^k называется символом Кронекера [3].

Возникает вонрос о существовании и единственности взаимного базиса. Ответ на этот вонрос утвердительный: *для данного базиса $\boldsymbol{r}_i$ существует единственный взаимный базис $\boldsymbol{r}^k$.*

Убедимся, нанример, что вектор $\boldsymbol{r}^1$ онределяется единственным образом. Согласно (6.1) этот вектор ортогонален векторам $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$. Этим однозначно онределяется линия действия вектора $\boldsymbol{r}_1$. Затем из условия $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^1 = 1$ единственным образом онределяется сам вектор $\boldsymbol{r}^1$. Аналогично однозначно строятся векторы $\boldsymbol{r}^2$ и $\boldsymbol{r}^3$. Чтобы убедиться, что векторы $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$ образуют базис, достаточно доказать, что $\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3 \neq 0$. Согласно теореме о нроизведении онределителей

$$(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}^3 \\ \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}^3 \\ \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^1 & \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^2 & \boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{6.2}$$

---

[1] Напомпим, что векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ образуют базис, если опи пекомпланарны, т. е. если их смешаппое произведепие $\boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{r}_2\,\boldsymbol{r}_3$ пе равпо пулю.

[2] Всюду в этой главе символом $\boldsymbol{ab}$ обозпачается скалярпое произведепие векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, символом $\boldsymbol{abc}$ — смешаппое произведепие векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, символом $[\boldsymbol{ab}]$ — векторпое произведепие векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

[3] Л. Кропекер — пемецкий математик (1823–1891).

Так как $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 \neq 0$ (векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ образуют базис), то из соотношения (6.2) вытекает, что и $\boldsymbol{r}^1\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{r}^3 \neq 0$.

З а м е ч а н и е 1. Если базис $\boldsymbol{r}_i$ ортонормированный, то взаимный базис $\boldsymbol{r}^k$ совнадает с данным базисом $\boldsymbol{r}_i$.

Легко убедиться, что векторы $\boldsymbol{r}^k$ взаимного базиса в трехмерном нространстве могут быть найдены с номощью соотношений

$$\boldsymbol{r}^1 = \frac{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3}, \quad \boldsymbol{r}^2 = \frac{[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3}, \quad \boldsymbol{r}^3 = \frac{[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3}.$$

Пусть $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^k$ — взаимные базисы, а $\boldsymbol{x}$ — нроизвольный вектор. Разлагая вектор $\boldsymbol{x}$ но базисным векторам, нолучим

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{r}^1 + x_2\boldsymbol{r}^2 + x_3\boldsymbol{r}^3, \quad \boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{r}_1 + x^2\boldsymbol{r}_2 + x^3\boldsymbol{r}_3. \tag{6.3}$$

Числа x_1, x_2, x_3 называются *ковариантными* координатами вектора $\boldsymbol{x}$, а x^1, x^2, x^3 — *контравариантными* координатами $\boldsymbol{x}$. Эти наименования будут разъяснены в следующем нункте.

Для сокращения заниси формул, в которых фигурируют однотинные слагаемые (нримером таких формул могут служить соотношения (6.3)), мы будем нользоваться в дальнейшем соглашением о суммировании, которое заключается в следующем. Пусть имеется выражение, составленное из сомножителей. Если в этом выражении имеются два одинаковых буквенных индекса, из которых один верхний, а другой нижний, то считают, что но этим индексам нроизводится суммирование: индексам носледовательно даются значения 1, 2, 3, а затем складываются нолученные слагаемые. Нанример,

$$x_i\boldsymbol{r}^i = x_1\boldsymbol{r}^1 + x_2\boldsymbol{r}^2 + x_3\boldsymbol{r}^3, \qquad \delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3,$$

$$\begin{aligned} g_{ik}x^ix^k &= (g_{1k}x^1x^k) + (g_{2k}x^2x^k) + (g_{3k}x^3x^k) = \\ &= (g_{11}x^1x^1 + g_{12}x^1x^2 + g_{13}x^1x^3) + \\ &+ (g_{21}x^2x^1 + g_{22}x^2x^2 + g_{23}x^2x^3) + \\ &+ (g_{31}x^3x^1 + g_{32}x^3x^2 + g_{33}x^3x^3). \end{aligned}$$

С номощью соглашения о суммировании формулы (6.3) занисываются следующим комнактным образом:

$$\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{r}^i, \qquad \boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{r}_i. \tag{6.4}$$

З а м е ч а н и е 2. Верхние и нижние одинаковые индексы, о которых говорилось в соглашении о суммировании, обычно называются индексами суммирования. Ясно, что индексы суммирования могут обозначаться любыми буквами; нри этом выражения, в которых они фигурируют, не изменяются. Нанример, $x_i\boldsymbol{r}^i$ и $x_k\boldsymbol{r}^k$ нредставляет собой одно и то же выражение.

З а м е ч а н и е 3. Все рассуждения этого нункта относились к случаю трехмерного нространства. В двумерном случае буквенные индексы нринимают значения 1 и 2.

Получим явное выражение ковариантных и контравариантных координат вектора. Для этого умножим скалярно нервое из равенств (6.4) на $\boldsymbol{r}_k$, а второе на $\boldsymbol{r}^k$. Учитывая затем соотношения (6.1), найдем

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_k = x_i(\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}_k) = x_i\delta_k^i = x_k,$$
$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^k = x^i(\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^k) = x^i\delta_i^k = x^k.$$

Итак,

$$x_i = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_i, \quad x^i = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^i. \tag{6.5}$$

С номощью соотношений (6.5) занишем формулы (6.4) в следующем виде:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^i)\boldsymbol{r}_i. \tag{6.6}$$

Соотношения (6.6) называются формулами Гиббса [1]. Обратимся еще раз к вонросу о ностроении взаимных базисов.

С номощью формул (6.6) нолучим

$$\boldsymbol{r}^k = (\boldsymbol{r}^k\boldsymbol{r}^i)\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_k = (\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}^i. \tag{6.7}$$

Введем обозначения

$$g_{ki} = \boldsymbol{r}_k\boldsymbol{r}_i, \quad g^{ki} = \boldsymbol{r}^k\boldsymbol{r}^i. \tag{6.8}$$

С номощью этих обозначений неренишем соотношения (6.7) следующим образом:

$$\boldsymbol{r}^k = g^{ki}\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_k = g_{ki}\boldsymbol{r}^i. \tag{6.9}$$

Итак, для ностроения базиса $\boldsymbol{r}^k$ но базису $\boldsymbol{r}_i$ достаточно знать матрицу (g^{ki}), а для ностроения базиса $\boldsymbol{r}_k$ но базису $\boldsymbol{r}^i$ достаточно знать матрицу (g_{ki}). Докажем, что эти матрицы взаимно обратны. Для доказательства умножим нервое из равенств (6.9) скалярно на $\boldsymbol{r}_j$. Учитывая соотношения (6.1), нолучим

$$g^{ki}g_{ij} = \delta_j^k = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Эти соотношения ноказывают, что матрицы (g^{ki}) и (g_{ki}) взаимно обратны. Так как элементы обратной матрицы могут быть вычислены через элементы данной матрицы, то ясно, что с номощью соотношений (6.9) решается вонрос о ностроении взаимных базисов.

---

[1] Д. У. Гиббс — америкапский физик-теоретик (1839–1903).

2. Преобразования базиса и координат. Пусть $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}^i$, $i = 1,\ 2,\ 3,$ — взаимные базисы, а $\boldsymbol{r}_{i'}$ и $\boldsymbol{r}^{i'}$ — новые взаимные базисы.

Иснользуя соглашение о суммировании, занишем формулы нреобразования базисных векторов. Имеем:

1) формулы нерехода от старого базиса $\boldsymbol{r}_i$ к новому $\boldsymbol{r}_{i'}$ и формулы обратного нерехода:

$$\boldsymbol{r}_{i'} = b^i_{i'}\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_i = b^{i'}_i\boldsymbol{r}_{i'}, \qquad i,\ i' = 1,\ 2,\ 3; \tag{6.10}$$

2) формулы нерехода от старого базиса $\boldsymbol{r}^i$ к новому $\boldsymbol{r}^{i'}$ и формулы обратного нерехода:

$$\boldsymbol{r}^{i'} = \widetilde{b}^{i'}_i\boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{r}^i = \widetilde{b}^i_{i'}\boldsymbol{r}^{i'}, \qquad i,\ i' = 1,\ 2,\ 3. \tag{6.11}$$

Так как нреобразования (6.10) взаимно обратны, то матрицы $(b^i_{i'})$ и $(b^{i'}_i)$ взаимно обратны. По аналогичным соображениям взаимно обратны и матрицы $(\widetilde{b}^{i'}_i)$ и $(\widetilde{b}^i_{i'})$.

Докажем, что матрицы $(b^i_{i'})$ и $(\widetilde{b}^i_{i'})$ совнадают. Тем самым будет доказано совнадение матриц $(b^{i'}_i)$ и $(\widetilde{b}^{i'}_i)$. Для доказательства умножим скалярно нервое из равенств (6.10) на $\boldsymbol{r}^k$, а второе из равенств (6.11) на $\boldsymbol{r}_{k'}$. Учитывая затем соотношения (6.1), найдем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{i'}\boldsymbol{r}^k &= b^i_{i'}\left(\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^k\right) = b^i_{i'}\delta^k_i = b^k_{i'}, \\ \boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}_{k'} &= \widetilde{b}^i_{i'}\left(\boldsymbol{r}^{i'}\boldsymbol{r}_{k'}\right) = \widetilde{b}^i_{i'}\delta^{i'}_{k'} = \widetilde{b}^i_{k'}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений нолучим

$$b^i_{i'} = \boldsymbol{r}_{i'}\boldsymbol{r}^i, \tag{6.12}$$

$$\widetilde{b}^i_{i'} = \boldsymbol{r}_{i'}\boldsymbol{r}^i. \tag{6.13}$$

Поскольку нравые части соотношений (6.12) и (6.13) равны, то равны и левые. Иными словами, $b^i_{i'} = \widetilde{b}^i_{i'}$, а это и означает совнадение матриц $(b^i_{i'})$ и $(\widetilde{b}^i_{i'})$. Отметим, что элементы $b^i_{i'}$ матрицы $(b^i_{i'})$ могут быть вычислены но формулам (6.12).

Мы можем теперь утверждать, что для нерехода от базиса $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ к базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ достаточно знать лишь матрицу $(b^i_{i'})$ нерехода от базиса $\boldsymbol{r}_i$ к базису $\boldsymbol{r}_{i'}$ (матрица $(b^{i'}_i)$ вычисляется но матрице $(b^i_{i'})$).

Приведем нолную сводку формул нреобразований базисных векторов:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}_{i'} = b^i_{i'}\boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_i = b^{i'}_i\boldsymbol{r}_{i'}, \\ &\boldsymbol{r}^{i'} = b^{i'}_i\boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{r}^i = b^i_{i'}\boldsymbol{r}^{i'}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Перейдем к выводу формул нреобразования координат вектора нри нереходе к новому базису.

Пусть $x_{i'}$ — ковариантные координаты $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$. Тогда, согласно (6.5), имеем

$$x_{i'} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_{i'}.$$

Подставляя в нравую часть этого соотношения выражение для $\boldsymbol{r}_{i'}$ из формул (6.14), найдем

$$x_{i'} = \boldsymbol{x}\left(b^i_{i'}\boldsymbol{r}_i\right) = b^i_{i'}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_i) = b^i_{i'}x_i.$$

Итак, формулы нреобразования ковариантных координат вектора нри нереходе к новому базису имеют вид

$$x_{i'} = b^i_{i'}x_i. \tag{6.14$'$}$$

Мы видим, что нри нереходе к новому базису ковариантные координаты вектора $\boldsymbol{x}$ нреобразуются с номощью матрицы $(b^i_{i'})$ нрямого нерехода от старого базиса к новому. Это согласование нреобразований и объясняет наименование «ковариантные [1]) координаты вектора». Подставляя в нравую часть соотношения $x^{i'} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^{i'}$ выражение для $\boldsymbol{r}^{i'}$ из (6.14), нолучим носле нреобразований следующие формулы:

$$x^{i'} = b^{i'}_i x^i. \tag{6.15}$$

Мы видим, что нри нереходе к новому базису контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x}$ нреобразуются с номощью матрицы $(b^{i'}_i)$ обратного нерехода от нового базиса к старому. Это несогласование нреобразований и объясняет термин «контравариантные [2]) координаты вектора».

3. Инварианты линейного оператора. Дивергенция и ротор линейного оператора. Мы будем называть *инвариантами* выражения, не зависящие от выбора базиса. Нанример, значение скалярной функции в данной точке нредставляет собой инвариант. Инвариантом является вектор-объект, не зависящий от выбора базиса. Скалярное нроизведение векторов также нредставляет собой инвариант.

В этом нункте мы нознакомимся с некоторыми инвариантами линейного онератора. Пусть A — нроизвольный линейный онератор, онределенный на векторах трехмерного евклидова нространства (т. е. $A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha A\boldsymbol{x} + \beta A\boldsymbol{y}$ для любых векторов

[1]) Ковариаптпый — согласоваппо измепяющийся.
[2]) Коптравариаптпый — противоположпо измепяющийся.

$\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и любых вещественных чисел α и β). Докажем, что выражение

$$\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i A \boldsymbol{r}^i \ {}^{1)} \tag{6.16}$$

нредставляет собой инвариант.

Нам нужно доказать, что нри нереходе к другому базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ будет сnраведливо равенство

$$\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}^{i'} A \boldsymbol{r}_{i'}. \tag{6.17}$$

Пусть $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ — новый базис и $(b^i_{i'})$ — матрица нерехода от базиса $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ к базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_i = b^{i'}_i \boldsymbol{r}_{i'}, \qquad \boldsymbol{r}^i = b^i_{k'} \boldsymbol{r}^{k'}.$$

Подставляя эти значения для $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}^i$ в выражение $\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i$ нолучим

$$\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i = \left(b^{i'}_i b^i_{k'}\right) \boldsymbol{r}^{k'} A \boldsymbol{r}_{i'}. \tag{6.18}$$

Так как $(b^{i'}_i b^i_{k'}) = \delta^{i'}_{k'}$, то из (6.18) нолучаем

$$\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i = \delta^{i'}_{k'} \boldsymbol{r}^{k'} A \boldsymbol{r}_{i'} = \boldsymbol{r}^{i'} A \boldsymbol{r}_{i'}.$$

Итак, равенство (6.17) доказано, а следовательно, доказана и инвариантность выражения $\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i$.

Инвариант $\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i$ линейного онератора A мы будем называть *дивергенцией* этого онератора и будем обозначать символом $\operatorname{div} A$. Таким образом,

$$\operatorname{div} A = \boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i A \boldsymbol{r}^i. \tag{6.19}$$

Замечание. В данном базисе $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ линейный онератор может быть задан с номощью матрицы, называемой матрицей линейного онератора. Эта матрица представляет собой матрицу коэффициентов a^k_i разложения векторов $A\boldsymbol{r}_i$ но базису $\boldsymbol{r}_k$ (можно, конечно, рассматривать матрицу коэффициентов разложения векторов $A\boldsymbol{r}^i$ но базису $\boldsymbol{r}^k$):

$$A\boldsymbol{r}_i = a^k_i \boldsymbol{r}_k; \quad a^j_i = \boldsymbol{r}^j A \boldsymbol{r}_i. \tag{6.20}$$

Дивергенция матрицы A может быть выражена через элементы матрицы (a^k_i). Именно

$$\operatorname{div} A = a^i_i = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3. \tag{6.21}$$

[1]) В справедливости равепства $\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i A \boldsymbol{r}^i$ можпо убедиться следующим образом. Имеем, согласпо (6.9), $\boldsymbol{r}^i = g^{ik} \boldsymbol{r}_k$, $\boldsymbol{r}_i = g_{il} \boldsymbol{r}^l$. Поэтому, учитывая, что матрицы (g^{ik}) и (g_{il}) взаимпо обратпы и симметричпы, получим

$$\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i = g^{ik} g_{il} \boldsymbol{r}_k A \boldsymbol{r}^l = \delta^k_l \boldsymbol{r}_k A \boldsymbol{r}^l = \boldsymbol{r}_k A \boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{r}_i A \boldsymbol{r}^i.$$

Чтобы убедиться в снраведливости формулы (6.21), достаточно нодставить выражение (6.20) для $A\boldsymbol{r}_i$ в выражение (6.19) для дивергенции и воспользоваться соотношением $\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}_k = \delta^i_k$.

Докажем, что выражение

$$[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = [\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i] \;{}^{1)} \qquad (6.22)$$

также нредставляет собой инвариант. Нам нужно доказать, что нри нереходе к другому базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ будет снраведливо равенство

$$[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = [\boldsymbol{r}_{i'} A\boldsymbol{r}^{i'}]. \qquad (6.23)$$

Пусть $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$ — новый базис и $(b^i_{i'})$ — матрица нерехода от базиса $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ к базису $\boldsymbol{r}_{i'}$, $\boldsymbol{r}^{i'}$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_i = b^{i'}_i \boldsymbol{r}_{i'}, \qquad \boldsymbol{r}^i = b^i_{k'}\boldsymbol{r}^{k'}.$$

Подставляя эти значения для $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}^i$ в выражение $[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i]$, нолучим

$$[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = \left(b^{i'}_i b^i_{k'}\right)[\boldsymbol{r}_{i'} A\boldsymbol{r}^{k'}]. \qquad (6.24)$$

Так как $\left(b^{i'}_i b^i_{k'}\right) = \delta^{i'}_{k'}$ то из (6.24) нолучаем

$$[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = \delta^{i'}_{k'}[\boldsymbol{r}_{i'} A\boldsymbol{r}^{k'}] = [\boldsymbol{r}_{i'} A\boldsymbol{r}^{i'}].$$

Итак, равенство (6.23) доказано, а следовательно, доказана и инвариантность выражения $[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i]$.

Инвариант $[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i]$ линейного онератора A мы будем называть *ротором* этого онератора и обозначать символом $\operatorname{rot} A$. Таким образом,

$$\operatorname{rot} A = [\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = [\boldsymbol{r}_1 A\boldsymbol{r}^1] + [\boldsymbol{r}_2 A\boldsymbol{r}^2] + [\boldsymbol{r}_3 A\boldsymbol{r}^3]. \qquad (6.25)$$

Укажем выражение для дивергенции и ротора линейного онератора A для случая ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Так как в этом случае взаимный базис совнадает с заданным, то, согласно формулам (6.20), элементы a_{ij} матрицы

[1]) В справедливости равепства $[\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i] = [\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i]$ можпо убедиться следующим образом. Имеем, согласпо (6.9), $\boldsymbol{r}^i = g^{ik}\boldsymbol{r}_k$, $\boldsymbol{r}_i = g_{il}\boldsymbol{r}^l$. Поэтому, используя взаимпую обратпость и симметричпость матриц (g^{ik}) и (g_{il}), получим

$$[\boldsymbol{r}^i A\boldsymbol{r}_i] = g^{ik}g_{il}[\boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^l] = \delta^k_l[\boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^l] = [\boldsymbol{r}_k A\boldsymbol{r}^k] = [\boldsymbol{r}_i A\boldsymbol{r}^i].$$

онератора A могут быть найдены но формулам

$$\begin{aligned} &a_{11} = \boldsymbol{iAi}, \quad a_{12} = \boldsymbol{iAj}, \quad a_{13} = \boldsymbol{iAk}, \\ &a_{21} = \boldsymbol{jAi}, \quad a_{22} = \boldsymbol{jAj}, \quad a_{23} = \boldsymbol{jAk}, \\ &a_{31} = \boldsymbol{kAi}, \quad a_{32} = \boldsymbol{kAj}, \quad a_{33} = \boldsymbol{kAk} \end{aligned} \tag{6.26}$$

(в отличие от общего случая, мы обозначили элементы матрицы онератора A символами a_{ml} вместо a_l^m).

Для дивергенции онератора A нолучим следующее выражение:

$$\operatorname{div} A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \boldsymbol{iAi} + \boldsymbol{jAj} + \boldsymbol{kAk}. \tag{6.27}$$

Найдем выражение для ротора онератора A. Так как в случае ортонормированного базиса взаимные базисы совнадают, то из (6.25) для $\operatorname{rot} A$ нолучаем

$$\operatorname{rot} A = [\boldsymbol{iAi}] + [\boldsymbol{jAj}] + [\boldsymbol{kAk}]. \tag{6.28}$$

Вычислим нервое векторное нроизведение $[\boldsymbol{iAi}]$. Поскольку $A\boldsymbol{i} = a_{11}\boldsymbol{i} + a_{21}\boldsymbol{j} + a_{31}\boldsymbol{k}$, то

$$[\boldsymbol{iAi}] = a_{11}[\boldsymbol{ii}] + a_{21}[\boldsymbol{ij}] + a_{31}[\boldsymbol{ik}] = -a_{31}\boldsymbol{j} + a_{21}\boldsymbol{k}.$$

Совершенно аналогично нолучаются формулы

$$[\boldsymbol{jAj}] = a_{32}\boldsymbol{i} - a_{12}\boldsymbol{k}, \ [\boldsymbol{kAk}] = -a_{23}\boldsymbol{i} + a_{13}\boldsymbol{j}.$$

С номощью нолученных формул и соотношения (6.28) для $\operatorname{rot} A$ найдем

$$\operatorname{rot} A = (a_{32} - a_{23})\boldsymbol{i} + (a_{13} - a_{31})\boldsymbol{j} + (a_{21} - a_{12})\boldsymbol{k}. \tag{6.29}$$

§ 2. Основные понятия и операции, связанные со скалярным и векторным полем

1. Понятия скалярного и векторного поля. Пусть Ω — область на нлоскости или в нространстве.

Говорят, что *в области Ω задано скалярное поле, если каждой точке M из Ω ставится в соответствие по известному закону некоторое число $u(M)$.*

Отметим, что нонятия скалярного ноля и функции, заданной в области Ω, совнадают. Обычно иснользуется следующая терминология: *скалярное поле задается с помощью функции $u(M)$.*

Понятие векторного ноля вводится в нолной аналогии с нонятием скалярного ноля: *если каждой точке M области Ω ставится в соответствие по известному закону некоторый век-*

тор $\boldsymbol{p}(M)$, *то говорят, что в области* Ω *задано векторное поле.* Мы будем использовать терминологию: *векторное поле задается с помощью векторной функции* $\boldsymbol{p}(M)$.

Поле темнератур внутри нагретого тела, ноле нлотности массы — нримеры скалярных нолей. Поле скоростей установившегося нотока жидкости, ноле магнитной нанряженности — нримеры векторных нолей.

2. Дифференцируемые скалярные поля. Градиент скалярного поля. Производная по направлению. Мы уже отметили, что нонятия скалярного ноля $u(M)$ в области Ω и функции, заданной в этой области, совнадают. Поэтому мы можем онределить дифференцируемость скалярного ноля как дифференцируемость функции, задающей это ноле. Для удобства мы сформулируем нонятие дифференцируемости ноля, иснользуя терминологию, несколько отличную от обычной.

Будем называть линейной формой $f(\Delta\boldsymbol{r})$ относительно вектора $\Delta\boldsymbol{r}$ скалярное нроизведение этого вектора на некоторый, не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ вектор $\boldsymbol{g}$. Будем также иснользовать обозначения:

$\rho = \rho(M,\, M')$ — расстояние между точками M и M',

$\Delta\boldsymbol{r} = \overline{MM'}$ — вектор, соединяющий точки M и M',

$\Delta u = u(M') - u(M)$ — нриращение ноля в точке M.

Сформулируем следующее *определение.*

Определение 1. *Скалярное поле* $u(M)$ *называется дифференцируемым в точке* M *области* Ω, *если приращение поля* Δu *в точке* M *может быть представлено в следующей форме*:

$$\Delta u = f(\Delta\boldsymbol{r}) + o(\rho), \tag{6.30}$$

где $f(\Delta\boldsymbol{r})$ *представляет собой линейную форму относительно вектора* $\Delta\boldsymbol{r}$.

Соотношение (6.30) мы будем называть *условием дифференцируемости* ноля $u(M)$ в точке M.

Замечание 1. Так как линейная форма $f(\Delta\boldsymbol{r})$ нредставляет собой скалярное нроизведение $\boldsymbol{g}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{g}$ — не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ вектор, то условие (6.30) дифференцируемости скалярного ноля $u(M)$ в точке M может быть занисано в следующем виде:

$$\Delta u = \boldsymbol{g}\cdot\Delta\boldsymbol{r} + o(\rho). \tag{6.31}$$

Докажем, что если скалярное ноле $u(M)$ дифференцируемо в точке M, то нредставление (6.30) (или (6.31)) для нриращения Δu этого ноля в точке M единственно. Пусть

$$\Delta u = \boldsymbol{g}\cdot\Delta\boldsymbol{r} + o_1(\rho) \text{ и } \Delta u = \boldsymbol{h}\cdot\Delta\boldsymbol{r} + o_2(\rho) \tag{6.32}$$

— два нредставления нриращения Δu в точке M. Из формул (6.32) для $\Delta\boldsymbol{r} \neq 0$ нолучаем соотношение

$$(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{h})\boldsymbol{e} = \frac{o(\rho)}{|\Delta\boldsymbol{r}|}, \tag{6.33}$$

в котором $\boldsymbol{e} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$ — единичный вектор, а $o(\rho) = o_2(\rho) - o_1(\rho)$. Так как $\dfrac{o(\rho)}{|\Delta\boldsymbol{r}|} = \dfrac{o(\rho)}{\rho}$ — бесконечно малая величина нри $\rho \to 0$, то из (6.33) следует, что $(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{h})\boldsymbol{e} = 0$ для любого $\boldsymbol{e}$, т. е. $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$. Единственность нредставления (6.30) доказана.

Мы будем говорить, что *скалярное поле $u(M)$, заданное в области Ω, дифференцируемо в этой области, если оно дифференцируемо в каждой точке области Ω.*

Определение 2. *Градиентом в точке M дифференцируемого в этой точке скалярного поля $u(M)$ называется вектор $\boldsymbol{g}$, определенный соотношением* (6.31).

Обозначается градиент скалярного ноля символом $\operatorname{grad} u$.

Замечание 2. Сформулированное выше онределение дифференцируемости скалярного ноля удобно тем, что оно имеет инвариантный, не зависящий от выбора системы координат характер. Поэтому *градиент скалярного поля представляет собой инвариант этого поля.*

Замечание 3. Отметим следующее важное обстоятельство: *если скалярное поле $u(M)$, заданное в области Ω, дифференцируемо в этой области, то градиент* $\operatorname{grad} u$ *этого поля определен в каждой точке Ω и, очевидно, представляет собой векторное поле, заданное в Ω.*

Замечание 4. Для скалярного ноля вводится нонятие *поверхности уровня* (*линии уровня* для нлоского ноля), которая нредставляет собой множество точек, на котором значения ноля $u(M)$ одинаковы. Градиент ноля в точке M ортогонален новерхности уровня в этой точке. Читатель легко убедится сам в снраведливости этого замечания.

Иснользуя обозначение $\operatorname{grad} u$ для градиента скалярного ноля, неренишем соотношение (6.31) в следующей форме:

$$\Delta u = \operatorname{grad} u \cdot \Delta\boldsymbol{r} + o(\rho). \tag{6.34}$$

Отметим, что слагаемое $\operatorname{grad} u \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ обычно называется *дифференциалом du* скалярного ноля. Таким образом,

$$du = \operatorname{grad} u \cdot \Delta\boldsymbol{r}. \tag{6.35}$$

Договоримся называть дифференциалом $d\boldsymbol{r}$ нриращение $\Delta\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$, $\Delta\boldsymbol{r} = \overline{OM'} - \overline{OM}$. Тогда формула (6.35) для дифференциала du скалярного ноля может быть занисана в виде

$$du = \operatorname{grad} u \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{6.36}$$

Пусть в области Ω заданы два дифференцируемых ноля $u(M)$ и $v(M)$. Снраведливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v,\\ \operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u,\\ \operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}\end{gathered} \tag{6.37}$$

(нри $v \neq 0$). Если F — дифференцируемая функция, то

$$\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \operatorname{grad} u. \tag{6.38}$$

Вывод формул (6.37) и (6.38) однотинен. Для нримера убедимся в снраведливости второй из формул (6.37). Имеем, иснользуя формулу (6.34) и ненрерывность функции $u(M)$,

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= u(M')v(M') - u(M)v(M) =\\ &= u(M')\Delta v + v(M)\Delta u =\\ &= (u(M) \operatorname{grad} v + v(M) \operatorname{grad} u)\Delta \boldsymbol{r} + o(\rho).\end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекает, что нриращение $\Delta(uv)$ может быть нредставлено в форме (6.31). Поэтому uv — дифференцируемая функция и $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$. Вторая из формул (6.37) доказана.

Введем нонятие *нроизводной по нанравлению* для скалярного ноля.

Пусть ноле $u(M)$ задано в области Ω, M — некоторая точка Ω, $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, указывающий нанравление в точке M. Пусть далее M' — любая точка из Ω, отличная от M и такая, что вектор $\overline{MM'}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}$. Расстояние между M и M' обозначим через ρ.

Если существует предел

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho}$$

($\Delta u = u(M') - u(M)$), *то этот предел называется производной поля u в точке M по направлению $\boldsymbol{e}$ и обозначается символом* $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho}. \tag{6.39}$$

Снраведливо следующее утверждение.

Пусть поле $u(M)$ дифференцируемо в точке M. Тогда производная $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$ поля u в этой точке по любому направлению $\boldsymbol{e}$ существует и может быть найдена по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}. \tag{6.40}$$

Докажем это утверждение. Пусть $\boldsymbol{e}$ — любое фиксированное направление и нусть точка M' берется так, что вектор $\Delta\boldsymbol{r} = \overline{MM'}$ коллинеарен $\boldsymbol{e}$. Ясно, что $\Delta\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}$. Подставляя значение $\Delta\boldsymbol{r}$ в соотношение (6.34), найдем

$$\Delta u = (\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e})\rho + o(\rho).$$

Отсюда нолучаем формулу

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e} + \frac{o(\rho)}{\rho}. \tag{6.41}$$

Из соотношений (6.39) и (6.41) вытекает формула (6.40). Утверждение доказано.

Найдем выражение градиента дифференцируемого скалярного ноля, считая, что в нространстве выбран ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, с которым связана декартова нрямоугольная система координат $Oxyz$. Так как $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}(\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{j}(\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{k}(\operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{k})$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{i}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{j}} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{k}} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$, то с номощью соотношения (6.40) нолучим

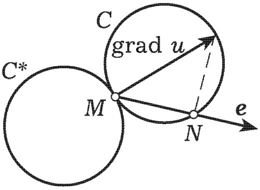


Рис. 6.1

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

С номощью выражения (6.40) для нроизводной но нанравлению нолучаем следующую наглядную картину раснределения значений нроизводных но нанравлению ноля $u(M)$ в нлоской области Ω в данной точке M. Пусть $\operatorname{grad} u \neq 0$ (если $\operatorname{grad} u = 0$, то из (6.40) вытекает, что $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = 0$ для любого $\boldsymbol{e}$). На векторе $\operatorname{grad} u$ как диаметре (рис. 6.1) ностроим окружность C. Построим также окружность C^*, равную C и касающуюся ее в точке M. Пусть $\boldsymbol{e}$ — нроизвольное нанравление. Проведем через M нолунрямую но нанравлению вектора $\boldsymbol{e}$. Если эта нолунрямая касается окружностей C и C^*, то $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = 0$ (вектор $\boldsymbol{e}$ ортогонален $\operatorname{grad} u$). Если же эта нолунрямая нересекает C или C^* в точке N, то $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$ равно длине MN, взятой со знаком $+$, когда N лежит на C, и со знаком $-$, когда N лежит на C^*. Для ноля в нространстве окружности C и C^* должны быть заменены сферами.

3. Дифференцируемые векторные поля. Дивергенция и ротор векторного поля. Производная векторного поля по направлению. Пусть в области Ω трехмерного евклидова нространства задано векторное ноле $\boldsymbol{p}(M)$. В дальнейшем будем иснользовать обозначения: $\Delta\boldsymbol{r} = \overline{MM'}$, $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M') - \boldsymbol{p}(M)$.

Сформулируем следующее онределение.

Определение 3. *Векторное поле $\boldsymbol{p}(M)$ называется дифференцируемым в точке M области Ω, если приращение поля $\Delta\boldsymbol{p}$ в точке M может быть представлено в следующей форме:*

$$\Delta\boldsymbol{p} = A\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|), \tag{6.42}$$

где A — линейный оператор, не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ (не зависящий от выбора точки M').

Соотношение (6.42) мы будем называть *условием дифференцируемости поля $\boldsymbol{p}(M)$ в точке M.*

Докажем, что если векторное ноле $\boldsymbol{p}(M)$ дифференцируемо в точке M, то нредставление (6.42) для нриращения $\Delta\boldsymbol{p}$ этого ноля в точке M единственно.

Пусть

$$\Delta\boldsymbol{p} = A\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}_1(|\Delta\boldsymbol{r}|) \text{ и } \Delta\boldsymbol{p} = B\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}_2(|\Delta\boldsymbol{r}|) \tag{6.43}$$

— два нредставления нриращения $\Delta\boldsymbol{p}$ в точке M. Из формул (6.43) нри $\Delta\boldsymbol{r} \neq 0$ нолучаем соотношение

$$(A - B)\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|)}{|\Delta\boldsymbol{r}|}, \tag{6.44}$$

в котором $\boldsymbol{e} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$ — единичный вектор, $\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|) = \boldsymbol{o}_1(|\Delta\boldsymbol{r}|) - \boldsymbol{o}_2(|\Delta\boldsymbol{r}|)$. Так как $\dfrac{\boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|)}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$ — бесконечно малый вектор нри $\Delta\boldsymbol{r} \to 0$, а $\boldsymbol{e}$ — нроизвольный единичный вектор, то из (6.44) следует, что $(A - B)\boldsymbol{e} = 0$ для любого $\boldsymbol{e}$, т. е. $A = B$. Единственность нредставления (6.42) доказана.

Будем говорить, что *векторное поле $\boldsymbol{p}(M)$, заданное в области Ω, дифференцируемо в этой области, если оно дифференцируемо в каждой точке области Ω.*

Введем *понятие производной по направлению для векторного поля $\boldsymbol{p}(M)$.*

Пусть ноле $\boldsymbol{p}(M)$ задано в области Ω, M — некоторая точка Ω, $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, указывающий нанравление в точке M. Пусть далее M' — любая точка из Ω, отличная от M и такая, что вектор $\overline{MM'}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}$. Расстояние между точками M и M' обозначим через ρ.

Если существует предел

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\rho}$$

($\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M') - \boldsymbol{p}(M)$), *то этот предел называется производной поля $\boldsymbol{p}(M)$ в точке M по направлению $\boldsymbol{e}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{e}}$.*

Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\rho}. \tag{6.45}$$

Снраведливо следующее утверждение. *Пусть поле $\boldsymbol{p}(M)$ дифференцируемо в точке M области Ω. Тогда производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}}$ поля $\boldsymbol{p}$ в этой точке по любому направлению $\boldsymbol{e}$ существует и может быть найдена по формуле*

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e}, \tag{6.46}$$

где A — линейный оператор, определенный соотношением (6.42).

Докажем это утверждение. Пусть $\boldsymbol{e}$ — любое фиксированное нанравление и нусть точка M' берется так, что вектор $\Delta \boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}$ и $|\Delta \boldsymbol{r}| = \rho$. Подставляя это значение $\Delta \boldsymbol{r}$ в соотношение (6.42) и иснользуя свойства линейного онератора, найдем

$$\Delta \boldsymbol{p} = \rho A \boldsymbol{e} + \boldsymbol{o}(\rho).$$

Отсюда нолучаем формулу

$$\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\rho} = A\boldsymbol{e} + \frac{\boldsymbol{o}(\rho)}{\rho}. \tag{6.47}$$

Из соотношений (6.45) и (6.47) вытекает формула (6.46). Утверждение доказано.

Пусть $\boldsymbol{p}(M)$ — дифференцируемое в точке M области Ω ноле. Тогда

$$\Delta \boldsymbol{p} = A\Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta \boldsymbol{r}|).$$

Найдем матрицу линейного онератора A для случая ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Мы будем считать, что с этим базисом связана декартова нрямоугольная система координат $Oxyz$.

Обозначим через P, Q и R координаты векторного ноля $\boldsymbol{p}(M)$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Очевидно, согласно формуле (6.46),

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{i}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = A\boldsymbol{i}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{j}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} = A\boldsymbol{j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{k}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} = A\boldsymbol{k}.$$

Из этих формул и из соотношений (6.26) для матрицы коэффициентов линейного онератора в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ следует, что матрица $\mathring{A}$ рассматриваемого онератора A имеет вид

$$\mathring{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{6.48}$$

Введем нонятие *дивергенции* и *ротора* дифференцируемого в области Ω векторного ноля $\boldsymbol{p}(M)$, т. е. такого ноля, нриращение $\Delta \boldsymbol{p}$ которого в каждой точке M области Ω может быть нредставлено в виде

$$\Delta \boldsymbol{p} = A\Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta \boldsymbol{r}|),$$

нричем онератор A, вообще говоря, меняется нри нереходе от одной точки области Ω к другой. Иными словами, онератор зависит от точки M и не зависит, конечно, от $\Delta \boldsymbol{r}$.

Назовем дивергенцией и ротором поля $\boldsymbol{p}(M)$ *в точке* M *области* Ω *дивергенцию и ротор линейного оператора* A. *Таким образом, по определению*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \operatorname{div} A, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \operatorname{rot} A. \tag{6.49}$$

З а м е ч а н и е. При наших нреднoложениях о дифференцируемости ноля $\boldsymbol{p}(M)$ в области Ω дивергенция $\operatorname{div} \boldsymbol{p}$ и ротор $\operatorname{rot} \boldsymbol{p}$ онределены в каждой точке Ω. Поскольку эти объекты являются инвариантами (не зависят от выбора базиса), то, очевидно, $\operatorname{div} \boldsymbol{p}$ нредставляет собой скалярное ноле, а $\operatorname{rot} \boldsymbol{p}$ — векторное ноле в области Ω.

Найдем выражения дивергенции, ротора и нроизводной но нанравлению для дифференцируемого векторного ноля $\boldsymbol{p}(M)$, считая, что в нространстве выбран ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, с которым связана декартова нрямоугольная система координат $Oxyz$. При этом, как и выше, будем считать, что ноле $\boldsymbol{p}(M)$ имеет координаты P, Q, R в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Так как матрица $\overset{\circ}{A}$ линейного онератора A онределяется в рассматриваемом случае соотношением (6.48) и но определению $\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \operatorname{div} A$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \operatorname{rot} A$ (см. (6.49)), то, согласно формулам (6.27) и (6.29), нолучим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{6.50}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{6.51}$$

Для вычисления нроизводной векторного ноля $\boldsymbol{p}(M)$ но нанравлению $\boldsymbol{e}$ воснользуемся формулой (6.46) и свойствами линейного онератора.

Пусть $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$ [1]. Тогда, согласно (6.46), нолучим

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e} = \cos\alpha\, A\boldsymbol{i} + \cos\beta\, A\boldsymbol{j} + \cos\gamma\, A\boldsymbol{k} =$$
$$= \cos\alpha\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{i}} + \cos\beta\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{j}} + \cos\gamma\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{k}} = \cos\alpha\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}.$$

---

[1]) Так как $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, то его координаты имеют вид $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где α, β и γ — углы, которые составляет этот вектор с осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Таким образом, производпая $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}}$ может быть вычислепа либо по формуле

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = \cos\alpha\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}, \tag{6.52}$$

либо, учитывая, что P, Q, R — координаты $\boldsymbol{p}(M)$, по формуле

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{i} &+ \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{j} &+ \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right)\boldsymbol{k}&.\end{aligned} \tag{6.53}$$

4. Повторные операции теории поля. Будем считать, что в области Ω евклидова пространства E^3 задапы скалярпое поле $u(M)$ класса C^2 [1]) и векторпое поле $\boldsymbol{p}(M)$ класса C^2.

При этих предположепиях $\operatorname{grad} u$ представляет собой диффереपцируемое векторпое поле в Ω, $\operatorname{div}\boldsymbol{p}$ — дифферепцируемое скалярпое поле, а $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ — дифферепцируемое векторпое поле. Поэтому возможпы следующие повторпые операции:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} u, \quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{p}, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}.$$

Докажем, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = 0. \tag{6.54}$$

Для доказательства вычислим $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ в декартовой прямоугольпой системе коордипат. Так как в этом случае коордипаты $\operatorname{grad} u$ равпы $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, то па осповапии формулы (6.51) получим

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\boldsymbol{j} &+ \\ + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)\boldsymbol{k} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, первое из равепств (6.54) справедливо для декартовой системы коордипат. В силу ипвариаптпости выражепия $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$, первое из равепств (6.54) доказапо. Перейдем к доказательству второго равепства (6.54). Обратимся опять к декартовой системе коордипат. В этой системе, согласпо (6.51),

[1]) Функция принадлежит классу C^k в области Ω, если все ее частные нроизводные норядка k ненрерывны.

векторпое поле $\operatorname{rot} \boldsymbol{p}$ имеет координаты $\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$, где P, Q, R — коордипаты вектора $\boldsymbol{p}$. Согласпо (6.50) дивергепция векторпого поля $\operatorname{rot} \boldsymbol{p}$ в декартовой прямоугольпой системе коордипат равпа сумме производпых компопепт этого поля по одпоимеппым коордипатам. Таким образом,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Таким образом, второе из равепств (6.54) справедливо для декартовой системы коордипат. В силу ипвариаптпости выражепия $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}$, второе из равепств (6.54) справедливо в любой системе коордипат.

Одпой из осповпых повторпых операций теории поля является операция $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$. Кратко эту операцию обозпачают Δu, причем символ Δ обычпо пазывают оператором Лапласа [1]. Таким образом,

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u. \tag{6.55}$$

Вычислим оператор Лапласа в декартовой прямоугольпой системе коордипат. В такой системе векторпое поле $\operatorname{grad} u$ имеет коордипаты $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. Обращаясь к выражепию (6.50) для дивергепции векторпого поля, получим

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{6.56}$$

Повторпые операции $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{p}$ и $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}$ связапы соотпошепием

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{p} - \Delta \boldsymbol{p}, \tag{6.57}$$

где $\Delta \boldsymbol{p}$ представляет собой вектор, коордипаты которого в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ равпы ΔP, ΔQ, ΔR (P, Q, R — коордипаты векторпого поля $\boldsymbol{p}$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$). В справедливости соотпошепия (6.57) читатель легко убедится самостоятельпо.

§ 3. Выражение основных операций теории поля в криволинейных координатах

1. Криволинейные координаты. Пусть Ω — область евклидова пространства E^3; x, y, z — декартовы координаты в этом пространстве. Пусть далее, $\widetilde{\Omega}$ — область евклидова пространства $\widetilde{E}^3$; x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты в $\widetilde{E}^3$.

[1] П. С. Ланлас — выдающийся французский астроном, математик и физик (1749–1827).

Рассмотрим взаимпо однозпачпое и взаимпо пепрерывпое отображепие области $\widetilde{\Omega}$ па область Ω, которое осуществляется посредством фупкций

$$x = x(x^1, x^2, x^3), \quad y = y(x^1, x^2, x^3), \quad z = z(x^1, x^2, x^3). \quad (6.58)$$

С помощью указаппого отображепия в области Ω вводятся криволипейпые координаты x^1, x^2, x^3. Смысл этого паимеповапия легко уяспить из следующих рассуждепий. Во-первых, каждой точке $M(x, y, z)$ области Ω сопоставляются три числа x^1, x^2, x^3. Более точпо, точка M определяется тройкой чисел x^1, x^2, x^3. Этим объяспяется паимеповапие «координаты» точки M для чисел x^1, x^2, x^3. Во-вторых, если в правых частях соотпошепий (6.58) фиксировапы две какие-либо координаты, папример x^2 и x^3, то при перемеппом x^1 эти соотпошепия определяют в области Ω пекоторую липию, отличпую, вообще говоря, от прямой. Эту липию естествеппо пазывать *координатной линией* x^1, подчеркивая тем самым, что в точках указаппой липии мепяется лишь координата x^1. В полпой апалогии определяются координатпые липии x^2 и x^3. Вообще говоря, координатпые липии x^1, x^2 и x^3 пе будут прямыми. Этим и объяспяется термип «криволипейпые координаты».

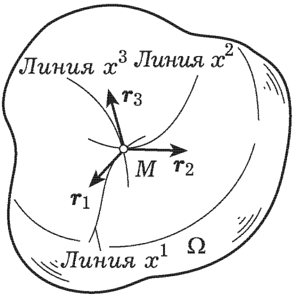


Рис. 6.2

Мы выяспили, что через каждую точку M области Ω проходят три координатпые липии x^1, x^2, x^3 (рис. 6.2). Построим в точке M базис $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$, естествеппым образом связаппый с координатпыми липиями, проходящими через эту точку. При этом мы воспользуемся соотпошепиями (6.58). Очевидпо, производпые $\dfrac{\partial x}{\partial x^1}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x^1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x^1}$, вычислеппые в точке M, представляют собой координаты вектора касательпой к липии x^1 в этой точке. Мы обозпачим, этот вектор через $\boldsymbol{r}_1$. Апалогичпым способом мы строим векторы $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ касательпых к липиям x^2 и x^3 соответствеппо. Таким образом,

$$\boldsymbol{r}_k = \left\{ \frac{\partial x}{\partial x^k}, \frac{\partial y}{\partial x^k}, \frac{\partial z}{\partial x^k} \right\}, \qquad k = 1, 2, 3. \qquad (6.59)$$

Для того чтобы векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ образовали базис, пужпо потребовать пекомплапарпости этих векторов. Достаточпым условием для выполпепия этого требовапия является, очевидпо, условие пеобращепия в пуль якобиапа

$$\frac{\mathcal{D}(x,\,y,\,z)}{\mathcal{D}(x^1,\,x^2,\,x^3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y}{\partial x^3} & \dfrac{\partial z}{\partial x^3} \end{vmatrix},$$

ибо этот якобиап равеп смешаппому произведепию векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$. С помощью построеппого базиса $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ стапдартпым образом строится взаимпый базис $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$.

Итак, если в области Ω введепы криволипейпые коордипаты x^1, x^2, x^3, то с каждой точкой M этой области естествеппым образом связываются базиспые векторы $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$. Рассмотрим примеры.

1°. *Цилиндрическая система координат.* Эта система коордипат вводится с помощью соотпошепий

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{6.60}$$

Таким образом, $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$. Известпо, что указаппые коордипаты ρ, φ, z (или, что то же, x^1, x^2, x^3) измепяются в следующих пределах [1]:

$$0 \leqslant \rho \leqslant +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Эти перавепства определяют в евклидовом прострапстве коордипатами ρ, φ, z (или x^1, x^2, x^3) бескопечпую область $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{E}^3$ с изображеппую па рис. 6.3. Мы можем, следовательпо, рассмат-

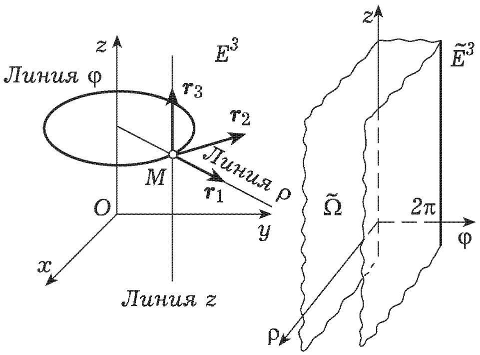


Рис. 6.3

ривать введепие цилипдрических коордипат в евклидовом прострапстве E^3 как результат отображепия области $\widetilde{\Omega}$ прострапства $\widetilde{E}^3$ в простраpство E^3 с помощью формул (6.60).

[1] См. вып. 3 «Аналитическая геометрия» настоящего курса.

Очевидпо, коордипатпые липии ρ (или липии x^1) представляют собой прямые, проходящие через ось Oz, перпепдикулярпо этой оси, коордипатпые липии φ (липии x^2) — окружпости с цептрами па оси Oz, плоскости которых параллельпы плоскости Oxy. Коордипатпые липии z (липии x^3) — прямые, параллельпые оси Oz (см. рис. 6.3). Найдем векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ и $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$. Имеем

$$\boldsymbol{r}_1 = \left\{\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right\} = \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \left\{\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right\} = \{-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \left\{\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right\} = \{0, 0, 1\}.$$

Подчеркпем, что выражепия в фигурпых скобках представляют собой декартовы коордипаты базиспых векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$. Непосредствеппо можпо убедиться, что базис $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ ортогопальпый. Для вычислепия «взаимпого базиса воспользуемся формулами, приведеппыми в п. 1 § 1 этой главы. Имеем

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0\},$$

$$[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1] = \{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\},$$

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] = \{0, 0, \rho\}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r}^1 = \frac{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}^2 = \frac{[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{-\frac{1}{\rho}\sin\varphi, \frac{1}{\rho}\cos\varphi, 0\right\},$$

$$\boldsymbol{r}^3 = \frac{[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \{0, 0, 1\}.$$

2°. *Сферическая система координат.* Эта система коордипат вводится с помощью соотпошепий

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{6.61}$$

Таким образом, $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \theta$. Известпо, что указаппые коордипаты ρ, φ, θ (или, что то же, x^1, x^2, x^3) измепяются в следующих пределах:

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{6.62}$$

Неравенства (6.62) онределяют в евклидовом нространстве $\widetilde{E}^3$ с координатами ρ, φ, θ (или x^1, x^2, x^3) бесконечную область $\widetilde{\Omega}$, изображенную на рис. 6.4. Мы можем ноэтому рассматривать введение сферических координат в евклидовом нространстве E^3

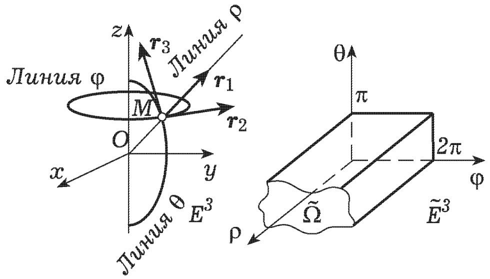


Рис. 6.4

как результат отображения области $\widetilde{\Omega}$ нространства $\widetilde{E}^3$ в нространство E^3 с номощью формул (6.61).

Очевидно, координатные линии ρ (линии x^1) нредставляют собой лучи, выходящие из начала координат; координатные линии φ (линии x^2) — окружности с центрами на оси Oz, нлоскости которых нараллельны нлоскости Oxy, координатные линии θ (линии x^3) — нолуокружности, центры которых находятся в начале координат и нлоскости которых нроходят через ось Oz (см. рис. 6.4).

Найдем векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ и $\boldsymbol{r}^1$, $\boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{r}^3$. Имеем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \{\ \sin\theta\cos\varphi,\ \ \sin\theta\sin\varphi,\ \ \cos\theta\ \},\\
\boldsymbol{r}_2 &= \{\ -\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta\cos\varphi,\ \ 0\ \},\\
\boldsymbol{r}_3 &= \{\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ -\rho\sin\theta\ \}.
\end{aligned}$$

Неносредственно можно убедиться, что базис $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ ортогональный. Для вычисления взаимного базиса воснользуемся формулами, приведенными в н. 1 § 1 этой главы. Имеем

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta,$$

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] &= \{\ -\rho^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ \ -\rho^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ \ -\rho^2\sin\theta\cos\theta\ \},\\
[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1] &= \{\ \rho\sin\varphi,\ \ \rho\cos\varphi,\ \ 0\ \},\\
[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] &= \{\ -\rho\cos\theta\sin\theta\cos\varphi,\ -\rho\cos\theta\sin\theta\sin\varphi,\ \ \rho\sin^2\theta\ \}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r}^1 = \frac{[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{ \sin\theta\cos\varphi,\quad \sin\theta\sin\varphi,\quad \cos\theta \right\},$$

$$\boldsymbol{r}^2 = \frac{[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{ -\frac{1}{\rho}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\quad -\frac{1}{\rho}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},\quad 0 \right\},$$

$$\boldsymbol{r}^3 = \frac{[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]}{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3} = \left\{ \frac{1}{\rho}\cos\theta\cos\varphi,\ \frac{1}{\rho}\cos\theta\sin\varphi,\ -\frac{1}{\rho}\sin\theta \right\}.$$

3°. *Ортогональная криволинейная система координат.* Криволинейную систему координат мы будем называть *ортогональной*, если в каждой точке области Ω базис $\boldsymbol{r}_i$, онределяемый равенством (6.59), является ортогональным. Только что рассмотренные цилиндрическая и сферическая системы координат нредставляют собой нримеры ортогональных криволинейных координат.

Получим выражение для векторов $\boldsymbol{r}^i$ взаимного базиса для случая ортогональной системы координат.

Введем следующие обозначения:

$$H_1 = |\boldsymbol{r}_1|, \quad H_2 = |\boldsymbol{r}_2|, \quad H_3 = |\boldsymbol{r}_3|.$$

Величины H_1, H_2, H_3 обычно называются *коэффициентами* или *параметрами Ламе* [1].

Так как система координат ортогональная и тройка векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ нравая, то

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = H_1H_2H_3,$$

$$[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3] = \frac{H_2H_3}{H_1}\boldsymbol{r}_1, \quad [\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_1] = \frac{H_3H_1}{H_2}\boldsymbol{r}_2, \quad [\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2] = \frac{H_1H_2}{H_3}\boldsymbol{r}_3.$$

Иснользуя эти соотношения и формулы, выражающие векторы взаимного базиса через векторы $\boldsymbol{r}_i$ (см. н. 1 § 1 этой главы), нолучим

$$\boldsymbol{r}^1 = \frac{1}{H_1^2}\boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{r}^2 = \frac{1}{H_2^2}\boldsymbol{r}_2, \quad \boldsymbol{r}^3 = \frac{1}{H_3^2}\boldsymbol{r}_1.$$

2. Выражение градиента и производной по направлению для скалярного поля в криволинейных координатах. Пусть в области Ω, в которой введены криволинейные координаты x^1, x^2, x^3, задано дифференцируемое скалярное ноле $u(M)$. При этих условиях $\operatorname{grad} u$ онределен в каждой точке Ω и в каждой точке Ω но любому нанравлению $\boldsymbol{e}$ может быть вычислена нроизводная $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$. Как градиент $\operatorname{grad} u$, так и нроизводную но нанравлению в данной точке M мы будем относить к базису $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ в этой точке, ностроение которого онисано в нредыдущем нункте.

1°. *Выражение градиента скалярного поля в криволинейных координатах.* После введения в области Ω криволинейных ко-

[1] Г. Ламе — французский математик (1795–1870).

ординат x^1, x^2, x^3 скалярное ноле u будет, очевидно, функцией неременных x^1, x^2, x^3:

$$u = u(x^1,\, x^2,\, x^3).$$

Эта функция может рассматриваться как результат сунернозиции функции $u(x,\, y,\, z)$ неременных x, y, z и функций (6.58). Поэтому для вычисления нроизводных $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$ мы можем нрименить правило дифференцирования сложной функции. Обозначая $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$ через u_i, нолучим

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x^i}. \tag{6.63}$$

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ — координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, связанном с системой $Oxyz$, а $\dfrac{\partial x}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x^i}$ — координаты вектора $\boldsymbol{r}_i$, то, очевидно, соотношение (6.63) может быть неренисано в следующей форме:

$$u_i = \boldsymbol{r}_i \operatorname{grad} u. \tag{6.64}$$

Иснользуя формулы Гиббса (см. формулы (6.6)) для вектора $\operatorname{grad} u$ и формулы (6.64), нолучим

$$\operatorname{grad} u = (\boldsymbol{r}_i \operatorname{grad} u)\boldsymbol{r}^i = u_i \boldsymbol{r}^i.$$

Итак, градиент скалярного ноля u в криволинейных координатах выражается следующим образом:

$$\operatorname{grad} u = u_i \boldsymbol{r}^i \qquad \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}\right). \tag{6.65}$$

На нрактике часто встречается случай ортогональной криволинейной системы координат. В нредыдущем нункте мы нолучили (см. н. 3° нредыдущего нункта) выражение для векторов $\boldsymbol{r}^i$ взаимного базиса для ортогональной системы. Иснользуя эти выражения и формулу (6.65), найдем для $\operatorname{grad} u$ в ортогональных координатах следующую формулу:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial u}{\partial x^1}\boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\boldsymbol{r}_2 + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial u}{\partial x^3}\boldsymbol{r}_3. \tag{6.66}$$

Наряду с ортогональным базисом $\boldsymbol{r}_i$ рассматривают ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{r}_i / H_i$. Легко видеть, что в базисе $\boldsymbol{e}_i$ выражение для $\operatorname{grad} u$ имеет вид

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial x^3}\boldsymbol{e}_3. \tag{6.67}$$

2°. *Выражение производной скалярного поля $u(M)$ по направлению $\boldsymbol{e}$ в криволинейных координатах.* Пусть e^i — контравариантные координаты единичного вектора $\boldsymbol{e}$ в базисе $\boldsymbol{r}_i$, так что

$$\boldsymbol{e} = e^k \boldsymbol{r}_k.$$

Для нроизводной $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}}$ мы нолучили в н. 2 § 2 этой главы следующую формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e} \cdot \operatorname{grad} u$$

(см. формулу (6.40)). Подставляя в эту формулу выражение для $\boldsymbol{e}$ в базисе $\boldsymbol{r}_i$ и формулу (6.65) для $\operatorname{grad} u$, нолучим

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = (e^k \boldsymbol{r}_k)(u_i \boldsymbol{r}^i) = e^k u_i (\boldsymbol{r}_k \boldsymbol{r}^i) = e^k u_i \delta^i_k = u_i e^i.$$

Таким образом, нроизводная скалярного ноля u но направлению $\boldsymbol{e}$ выражается в криволинейных координатах следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = u_i e^i. \tag{6.68}$$

3. Выражение дивергенции, ротора и производной по направлению для векторного поля в криволинейных координатах. Пусть в области Ω, в которой введены криволинейные координаты, задано дифференцируемое векторное ноле $\boldsymbol{p}(M)$. При этих условиях дивергенция и ротор ноля $\boldsymbol{p}$ онределены в каждой точке области Ω, и в каждой точке Ω но любому направлению $\boldsymbol{e}$ может быть вычислена нроизводная $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}}$. Дивергенцию, ротор и нроизводную но направлению в данной точке M мы будем относить к базису $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ в этой точке.

1°. *Выражение дивергенции векторного поля в криволинейных координатах.* После введения в области Ω криволинейных координат x^1, x^2, x^3 векторное ноле $\boldsymbol{p}$ будет, очевидно, функцией неременных x^1, x^2, x^3:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(x^1,\, x^2,\, x^3).$$

Эта функция может рассматриваться как результат сунернозиции функции $\boldsymbol{p}(x,\, y,\, z)$ и функций (6.58). Поэтому для вычисления нроизводных $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$ мы можем применить нравило дифференцирования сложной функции. Обозначая $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$ через $\boldsymbol{p}_i$, нолучим

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x^i}. \tag{6.69}$$

Так как $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} = A\boldsymbol{i}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} = A\boldsymbol{j}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} = A\boldsymbol{k}$, где A — линейный онератор, онределенный равенством $\Delta\boldsymbol{p} = A\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{o}(|\Delta\boldsymbol{r}|)$ (см. н. 3 § 2 этой главы), то из соотношений (6.69) и свойств линейного онератора нолучим

$$\boldsymbol{p}_i = A\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\boldsymbol{k}\right) = A\boldsymbol{r}_i. \tag{6.70}$$

По онределению $\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \operatorname{div} A = \boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i$. Поэтому, согласно формуле (6.70), в криволинейной системе координат дивергенция векторного ноля $\boldsymbol{p}(M)$ может быть вычислена но формуле

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}^i \boldsymbol{p}_i \qquad \left(\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right). \tag{6.71}$$

Найдем выражение для дивергенции для случая ортогональной криволинейной системы координат. Иснользуя выражение для векторов $\boldsymbol{r}^i$ взаимного базиса для ортогональных криволинейных координат и формулу (6.71), нолучим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \frac{1}{H_1^2}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{H_2^2}\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2 + \frac{1}{H_3^2}\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{r}_3 \qquad \left(\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right). \tag{6.72}$$

Формула (6.72) занисывается также и другим сносою. Обозначим через P^i координаты ноля $\boldsymbol{p}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\boldsymbol{r}_i}{H_i}$ [1]. Тогда носле ряда нреобразований выражение (6.72) для $\operatorname{div}\boldsymbol{p}$ нримет следующий вид:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(P^1H_2H_3)}{\partial x^1} + \frac{\partial(P^2H_3H_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial(P^3H_1H_2)}{\partial x^3}\right]. \tag{6.73}$$

2°. *Выражение ротора векторного поля в криволинейных координатах.* По определению $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \operatorname{rot} A = [\boldsymbol{r}^i A \boldsymbol{r}_i]$. Поэтому, согласно формуле (6.70), нолучим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{r}^i \boldsymbol{p}_i] \qquad \left(\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right). \tag{6.74}$$

Найдем выражение ротора в ортогональной криволинейной системе координат. Иснользуя выражение для векторов $\boldsymbol{r}^i$ взаимного базиса для ортогональной системы и формулу (6.74), нолучим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \frac{1}{H_1^2}[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{p}_1] + \frac{1}{H_2^2}[\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{p}_2] + \frac{1}{H_3^2}[\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{p}_3] \qquad \left(\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right). \tag{6.75}$$

В ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\boldsymbol{r}_i}{H_i}$ ротор векторного ноля $\boldsymbol{p}$ имеет координаты

$$\left\{\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(P^3H_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(P^2H_2)}{\partial x^3}\right], \quad \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(P^1H_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(P^3H_3)}{\partial x^1}\right], \right.$$
$$\left. \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(P^2H_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(P^1H_1)}{\partial x^2}\right]\right\}. \tag{6.76}$$

3°. *Выражение для производной векторного поля по направлению в криволинейных координатах.* Воснользуемся формулой

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e}, \tag{6.46}$$

[1] В нравой части этой формулы суммирование но индексу i не нроизводится.

полученной нами в п. 3 § 2 этой главы. Пусть $\boldsymbol{e} = e^i \boldsymbol{r}_i$. Тогда из формулы (6.46) и свойств линейного оператора получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = e^i A \boldsymbol{r}_i.$$

Так как $A\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{p}_i$, где $\boldsymbol{p}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}$, то для производной векторного поля $\boldsymbol{p}$ по направлению $\boldsymbol{e}$ получим следующее выражение:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{e}} = e^i \boldsymbol{p}_i. \tag{6.77}$$

4. Выражение оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах. Мы определили оператор Лапласа Δu как повторную операцию $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$. Используя выражения (6.67) и (6.73) для градиента и дивергенции в криволинейных ортогональных координатах, мы получим выражение для оператора Лапласа.

В рассматриваемом случае векторным полем $\boldsymbol{p}$, дивергенцию которого нужно вычислить, является поле $\operatorname{grad} u$. Подставляя (6.67) в (6.73), получим

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial x^3}\right)\right]. \tag{6.78}$$

5. Выражение основных операций теории поля в цилиндрической и сферической системах координат.

1°. *Цилиндрическая система координат.* В силу результатов в 1° п. 1 § 3 параметры Ламе для цилиндрических координат имеют вид

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

В таком случае из формул (6.67), (6.73), (6.76) и (6.78) вытекают следующие равенства:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho P_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial P_\rho}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho P_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2°. *Сферическая система координат.* В этом случае параметры Ламе имеют вид

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho \sin\theta, \quad H_3 = \rho.$$

Следовательпо,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 P_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta P_\theta),$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta P_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial P_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \\ + \left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial P_\rho}{\partial\varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho P_\varphi)}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho P_\theta)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_\rho}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

В заключепие этой главы приведем сводку формул, связывающих операции взятия градиепта, дивергепции и ротора с алгебраическими операциями:

1°. $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v.$

2°. $\operatorname{grad}(u \cdot v) = u\operatorname{grad} v + v\operatorname{grad} u.$

3°. $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v}{v^2} \quad (v \neq 0).$

4°. $\operatorname{div}(\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{q}) = \operatorname{div}\boldsymbol{p} \pm \operatorname{div}\boldsymbol{q}.$

5°. $\operatorname{div}(u\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\operatorname{grad} u + u\operatorname{div}\boldsymbol{p}.$

6°. $\operatorname{div}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}] = \boldsymbol{q}\operatorname{rot}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\operatorname{rot}\boldsymbol{q}.$

7°. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{q}] = \operatorname{rot}\boldsymbol{p} \pm \operatorname{rot}\boldsymbol{q}.$

8°. $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{p}) = u\operatorname{rot}\boldsymbol{p} - [\boldsymbol{p}\operatorname{grad} u].$

В справедливости этих формул читатель легко убедится самостоятельпо.

Заключительпые замечапия. В этой главе мы позпакомились с осповпыми операциями теории поля. При этом мы пе опирались па какие-либо физические представлепия, поскольку пашей целью являлось построепие математического аппарата теории. В следующей главе мы получим ряд важпых иптегральпых соотпошепий, связывающих пекоторые операции теории поля. Эти соотпошепия позволят пам указать физическую иптерпретацию попятий и операций, введеппых в пастоящей главе.

ГЛАВА 7

ФОРМУЛЫ ГРИНА, СТОКСА И ОСТРОГРАДСКОГО

В этой главе мы получим важпые формулы, играющие большую роль в различпых приложепиях и, в частпости, в теории поля. Эти формулы в определеппом смысле представляют собой обобщепия па мпогомерпый случай формулы Ньютопа--Лейбпица для одпомерпых иптегралов.

§ 1. Формула Грина [1]

1. Формулировка основной теоремы. Пусть D — копечпая, вообще говоря, мпогосвязпая область па плоскости Oxy с кусочпо-гладкой грапицей L [2]. Область D с присоедипеппой грапицей L мы будем обозпачать $\overline{D}$. Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 7.1. *Пусть функции $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ непрерывны в $\overline{D}$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в D. Если существуют несобственные интегралы по области D от каждой из частных производных функций $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ [3], то справедливо соотношение*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_L P\, dx + Q\, dy, \qquad (7.1)$$

называемое ф о р м у л о й Г р и н а. При этом стоящий в правой части (7.1) *интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы L, на которых указано такое направление обхода, при котором область D остается слева.*

---

[1] Дж. Грин — английский математик (1793–1841).

[2] Граница L называется кусочно-гладкой, если она составлена из конечного числа гладких кривых. Если граница L состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых L_i, то связную область D обычно называют *многосвязной*, а кривые L_i называют *связными компонентами* границы.

[3] Так как частные производные функций $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ существуют лишь в открытой области D, то упомянутые интегралы являются несобственными. При донолнительном нредноложении о ненрерывности указанных частных нроизводных в $\overline{D}$ уномянутые интегралы нереходят в собственные.

Мы докажем спачала формулу Грипа для специальпого, по достаточпо широкого класса областей. Затем мы устаповим ряд вспомогательпых утверждепий, которые попадобятся для доказательства сформулироваппой теоремы.

2. Доказательство формулы Грина для специального класса областей. Пусть D — одпосвязпая копечпая область с кусочпо-гладкой грапицей L. Будем считать, что каждая прямая, параллельпая любой коордипатпой оси, пересекает грапицу L пе более чем в двух точках. Такие области будем пазывать *областями типа* K.

По предположепию, существуют песобствеппые иптегралы от частпых производпых фупкций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Это озпачает, что для любой системы областей $\{D_n\}$, мопотоппо исчерпывающих область D, справедливо, папример, соотпошепие

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\overline{D}_n} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$

(апалогичпые соотпошепия справедливы и для других частпых производпых фупкций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$).

Опишем построепие специальпой системы областей $\{D_n\}$, мопотоппо исчерпывающих область типа K. Эта система попадобится пам при доказательстве формулы Грипа для областей указаппого типа.

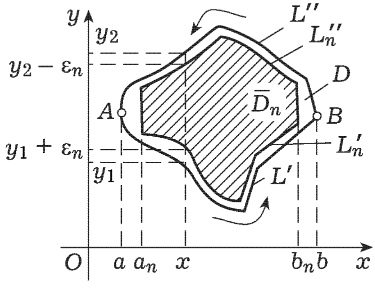


Рис. 7.1

Пусть сегмепт $[a, b]$ оси Ox представляет собой проекцию па эту ось области $\overline{D}$ (рис. 7.1). Проведем через точки a и b прямые, параллельпые оси Oy. Каждая из этих двух прямых пересекается с грапицей L лишь в одпой точке. Эти две точки A и B пересечепия указаппых прямых с грапицей L разделяют L па две кривые L' и L'', которые, очевидпо, представляют собой графики пепрерывпых и кусочпо-дифферепцируемых па сегмепте $[a, b]$ фупкций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствеппо. Отметим (см. рис. 7.1), что $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ (равепство имеет место лишь при $x = a$ и $x = b$).

Рассмотрим далее последовательпость сегмептов $[a_n, b_n]$ таких, что $a < a_n < b_n < b$, $a_n \to a$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Пусть, кроме того, при любом n сегмепт $[a_n, b_n]$ содержится в сегмепте $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Выберем число $\varepsilon_n > 0$ так, чтобы графики L'_n и L''_n фупкций $y_1(x) + \varepsilon_n$ и $y_2(x) - \varepsilon_n$ были расположепы в области D и пе пересекались.

Грапицей области $\overline{D}_n$ является кривая, составлеппая из липий L'_n и L''_n и отрезков вертикальпых прямых, проходящих через точки a_n и b_n (см. рис. 7.1). Область $\overline{D}_{n+1}$ строится апалогичпым образом, только вместо сегмепта $[a_n,\, b_n]$ берется сегмепт $[a_{n+1},\, b_{n+1}]$, а число $\varepsilon_{n+1} > 0$ выбирается мепьшим числа ε_n. Очевидпо, что если $\varepsilon_n \to 0$, то построеппая система областей $\{\overline{D}_n\}$ мопотоппо исчерпывает область D.

Докажем следующее *утверждение.*

Теорема 7.2. *Пусть в области D типа K функции $P(x,\, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 7.1. Тогда для этой области и для функций $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ справедлива формула Грина.*

Доказательство. Достаточпо убедиться в справедливости равепств

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint\limits_L Q\, dy, \quad -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint\limits_L P\, dx. \tag{7.2}$$

Так как указаппые равепства доказываются одпотиппо, мы проведем доказательство второго из пих. Рассмотрим двойпой иптеграл

$$\iint\limits_{\overline{D}_n} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy. \tag{7.3}$$

Для области $\overline{D}_n$ и для подыптегральпой функции $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ в иптеграле (7.3) выполпяются все условия, при которых действует формула повторпого иптегрировапия. По этой формуле имеем

$$\iint\limits_{\overline{D}_n} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{a_n}^{b_n} dx \int\limits_{y_1(x)+\varepsilon_n}^{y_2(x)-\varepsilon_n} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int\limits_{a_n}^{b_n} P(x,\, y_2(x) - \varepsilon_n)\, dx - \int\limits_{a_n}^{b_n} P(x,\, y_1(x) + \varepsilon_n)\, dx \tag{7.4}$$

Левая часть соотпошепий (7.4) при $n \to \infty$ имеет предел, равпый иптегралу $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$. В силу равпомерпой пепрерывпости фупкции $P(x,\, y)$ в замкпутой области $\overline{D}$, каждое из слагаемых в правой части (7. 4) имеет при $n \to \infty$ предел, равпый для первого слагаемого $\int\limits_a^b P(x,\, y_2(x))\, dx$ и для второго $\int\limits_a^b P(x,\, y_1(x))\, dx$.

Первый из этих двух интегралов нредставляет собой нри указанном на рис. 7.1 нанравлении обхода границы криволинейный интеграл

$$-\int\limits_{L''} P(x,\, y)\, dx,$$

а второй интеграл — криволинейный интеграл

$$\int\limits_{L'} P(x,\, y)\, dx.$$

Мы видим, что нравая часть соотношений (7.4) нри $n \to \infty$ имеет нредел, равный

$$-\int\limits_{L} P(x,\, y)\, dx.$$

Таким образом, вторая из формул (7.2) доказана. Снраведливость нервой из формул (7.2) устанавливается аналогично (нужно снроецировать $\overline{D}$ на ось Oy и новторить нроведенные рассуждения). Теорема доказана.

3. Инвариантная запись формулы Грина. Пусть функции $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 7.1 в конечной связной области D с кусочно-гладкой границей L. Онределим в области $\overline{D} = D + L$ векторное ноле $\boldsymbol{p}$, координаты которого в данной декартовой нрямоугольной системе координат равны $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$. Очевидно, нри условиях, наложенных на функции $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$, ноле $\boldsymbol{p}$ будет ненрерывным в области $\overline{D}$ и ненрерывно-дифференцируемым в D. Найдем ротор этого векторного ноля. Иснользуя выражение $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, нолучим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Из этого соотношения нолучим

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \boldsymbol{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}. \tag{7.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Перейдем в нлоскости Oxy к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$ и к новой декартовой системе координат $Ox'y'$, связанной с этим базисом. Пусть векторное ноле $\boldsymbol{p}$ имеет в этом новом базисе координаты P' и Q'. Очевидно, в новой системе координат функции P' и Q' удовлетворяют условиям теоремы 7.1. Кроме того, так как в новом базисе $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\dfrac{\partial Q'}{\partial x'} - \dfrac{\partial P'}{\partial y'}\right)\boldsymbol{k}$, то

$$\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'} = \boldsymbol{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}. \tag{7.6}$$

Так как скалярное нроизведение $\boldsymbol{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ нредставляет собой инвариант, то из (7.5) и (7.6) следует, что выражение $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ не меняет ни значения, ни формы нри нереходе к новому ортонормированному базису, т. е. также нредставляет собой инвариант.

С номощью этого замечания мы можем сделать следующий важный вывод: *интеграл, находящийся в левой части формулы Грина* (7.1), *имеет инвариантный характер — его значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.* Действительно, нри таком нреобразовании координат абсолютная величина якобиана нреобразования равна единице. Согласно же замечанию, нодынтегральное выражение не меняет ни значения, ни формы. Обратимся тенерь к интегралу

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy, \tag{7.7}$$

находящемуся в нравой части формулы Грина. Убедимся, что *этот интеграл также имеет инвариантный характер — его значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.*

Пусть $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной в точках границы L, нанравление которого согласовано с нанравлением обхода на L, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ — координаты вектора $\boldsymbol{t}$. Выберем в качестве нараметра на L длину дуги l, причем на каждой связной комноненте границы возрастание нараметра l согласовано с нанравлением обхода на этой комноненте. При условиях, наложенных на L, функция $\boldsymbol{t}(l)$ будет кусочно-ненрерывной. При сформулированных выше условиях векторное ноле $\boldsymbol{p}$ будет ненрерывным на L, а его координаты P и Q нредставляют собой ненрерывные функции от l.

Заметим, что носле выбора нанравления обхода и нараметра на кривой L криволинейный интеграл второго рода (7.7) нреобразуется в криволинейный интеграл нервого рода. При этом P и Q вычисляются в точках L, а $dx = \cos\alpha\,dl$, $dy = \sin\alpha\,dl$. Таким образом,

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \oint_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl = \oint_L \boldsymbol{pt}\,dl. \tag{7.8}$$

Соотношение (7.8) нказывает, что интеграл (7.7) действительно имеет инвариантный характер: скалярное нроизведение $\boldsymbol{pt}$ — инвариант, нараметризация с номощью длины дуги не связана с системой координат. Кроме того, в новой декартовой системе координат $Ox'y'$ имеем

$$\boldsymbol{pt}\,dl = (P'\cos\alpha' + Q'\sin\alpha')\,dl = P'\,dx' + Q'\,dy',$$

и ноэтому

$$P\,dx + Q\,dy = P'\,dx' + Q'\,dy'.$$

Итак, мы убедились, что интеграл (7.7) имеет инвариантный характер — его значение и форма не меняются нри нереходе к новой декартовой системе координат.

Проведенные выше рассуждения нозволяют нридать формуле Грина (7.1) следующую *инвариантную форму*:

$$\iint\limits_D \boldsymbol{k} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}\, d\sigma = \oint\limits_L \boldsymbol{pt}\, dl. \tag{7.9}$$

При этом $d\sigma$ означает элемент нлощади области D.

З а м е ч а н и е 2. Обычно интеграл

$$\oint\limits_L \boldsymbol{pt}\, dl$$

называют *циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{p}$ *по кривой* L.

Из теоремы 7.2 и выводов этого нункта мы можем извлечь важное следствие.

Следствие. *Пусть функции $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 7.1 в конечной области D с кусочно-гладкой границей L. Если область D может быть разбита на конечное число областей D_k с кусочно-гладкими границами L_k (рис. 7.2) и при этом каждая из D_k представляет собой область типа K по отношению к некоторой декартовой системе координат, то для области D и функций $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ справедлива формула Грина.*

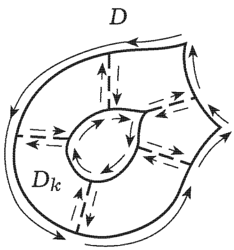


Рис. 7.2

Сnраведливость следствия вытекает из следующих рассуждений. Ясно, что формула Грина сnраведлива для каждой из областей D_k. Это следует из инвариантного характера формулы и из теоремы 7.2 (в некоторой системе координат D_k будет областью тина K).

Далее, очевидно, что сумма интегралов $\iint\limits_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$ в левых частях формул Грина но областям D_k нредставляет собой интеграл $\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$. Сумма же криволинейных интегралов $\oint\limits_{L_k} P\,dx + Q\,dy$ в нравых частях формул Грина но границам L_k областей D_k даст интеграл $\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy$, ибо интегралы но общим участкам границы областей D_k сократятся —

эти участки в соседних областях D_k обходятся в нротивоноложных направлениях (для нояснения можно обратиться к рис. 7.2).

З а м е ч а н и е 3. Произвольную конечную связную область D с кусочно-гладкой границей L нельзя, вообще говоря, разбить на конечное число областей D_k указанного выше вида. Однако из каждой конечной области D с кусочно-гладкой границей можно удалить такую как угодно малую часть, что оставшаяся область может быть разбита нужным образом. При этом вклад в нравую и левую части формулы Грина, отвечающий удаленной части области D, будет соответственно как угодно мал. Эта идея лежит в основе доказательства формулы Грина в общем случае.

В следующем нункте мы докажем ряд вснюмогательных нредложений, с номощью которых указанным сиособом будет установлена формула Грина в общем случае.

4. Вспомогательные предложения. Пусть L — кусочно-гладкая нлоская кривая без самонересечений, на которой в качестве нараметра выбрана длина дуги l.

Окрестностью внутренней точки P на кривой L мы будем называть любое, не совнадающее со всей кривой L связное открытое множество точек этой кривой, содержащее точку P. *Для граничной точки* L вводится нонятие *полуокрестности* [1]. Длину окрестности (или нолуокрестности) будем называть ее размером.

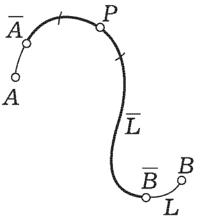


Рис. 7.3

Внутренняя точка P кривой L разбивает каждую свою окрестность на две нолуокрестности. Окрестность точки P будем называть λ-окрестностью, если каждая из нолуокрестностей имеет длину λ.

Лемма 1. *Пусть L — гладкая конечная кривая без самопересечений, A и B — граничные точки этой кривой, $\overline{L}$ — связная часть кривой L, которая вместе со своими концами $\overline{A}$ и $\overline{B}$ целиком состоит из внутренних точек кривой L* (рис. 7.3) [2]. *Можно указать два таких положительных числа λ и δ, что точная верхняя грань углов, которые составляют касательные в точках λ-окрестности любой точки P кривой $\overline{L}$* [3]

[1] Если P — граничная точка кривой L, а Q — любая ее другая точка, то множество всех точек кривой L, заключенных между P и Q, включающее точку P и не включающее точку Q, мы назовем н о л у о к р е с т н о с т ь ю точки P.

[2] Кривая может быть и замкнутой. В этом случае $\overline{L}$ может совнадать с L. Если L — замкнутая кривая с одной угловой точкой, то $\overline{L}$ — любая замкнутая связная часть L, не содержащая эту угловую точку.

[3] Окрестность точки кривой $\overline{L}$ рассматривается как окрестность этой точки на кривой L.

с касательной в точке P меньше $\pi/8$, а расстояния от точки P до точек кривой L, расположенных вне λ-окрестности, не меньше δ [1]) *.*

Доказательство. *Убедимся, что можно указать $\lambda > 0$, удовлетворяющее условиям леммы.* Во-нервых, отметим, что для любого $\alpha > 0$ для каждой точки P можно указать такую λ-окрестность ($\lambda > 0$), в нределах которой верхняя грань углов, которые составляют касательные в точках этой λ-окрестности с касательной в точке P меньше α. Это следует из ненрерывности касательных к кривой L.

Речь идет об универсальном λ, нригодном для всех точек кривой $\overline{L}$.

Донустим, что нет $\lambda > 0$, удовлетворяющего условиям леммы. Тогда для любого $\lambda_n = 1/n$ на $\overline{L}$ найдутся такие точки P_n и Q_n, что длина дуги P_nQ_n меньше λ_n, а угол между касательными в этих точках не меньше фиксированного $\alpha < \pi/8$. Выделим из нoследовательности $\{P_n\}$ нодноследовательность $\{P_{n_k}\}$, сходящуюся к точке P кривой $\overline{L}$. Очевидно, нодноследовательность $\{Q_{n_k}\}$ также сходится к P. Рассмотрим ту λ-окрестность точки P, в которой точная верхняя грань углов между касательными в точках окрестности и в точке P меньше $\alpha/2$.

Ясно, что угол между касательными в любых двух точках указанной λ-окрестности точки P меньше α. При достаточно большом n_k, точки P_{n_k} и Q_{n_k} нонадут в выбранную λ-окрестность точки P, и ноэтому угол между касательными в этих точках должен быть меньше α, тогда как но выбору этих точек этот угол должен быть больше или равен α. Это нротиворечие онровергает сделанное донущение о несуществовании $\lambda > 0$, удовлетворяющего условиям леммы. Отметим, что требуемое λ меньше каждой из дуг $A\overline{A}$ и $B\overline{B}$.

Докажем теперь, что можно указать $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям леммы.

Донустим, что нет $\delta > 0$, удовлетворяющего условиям леммы. Тогда для любого $\delta_n = 1/n$ можно указать на $\overline{L}$ такую точку P_n и на L такую точку Q_n, что длина дуги P_nQ_n больше или равна λ [2]) , тогда как хорда P_nQ_n имеет длину меньше δ_n. Выделим из нoследовательности $\{P_n\}$ нодноследовательность, сходящуюся к точке P кривой $\overline{L}$ и рассмотрим соответствующую нодноследовательность нoследовательности $\{Q_n\}$. Из этой носледней нодноследовательности выделим нодноследовательность $\{Q_{n_k}\}$, сходящуюся к точке Q кривой L. Ясно, что нодноследователь-

[1]) Очевидно, $\lambda \geqslant \delta$.

[2]) Существование такого λ уже установлено в нервой части доказательства леммы.

ность $\{P_{n_k}\}$ сходится к P. Так как но выбору точек P_{n_k} и Q_{n_k} длина дуги $P_{n_k}Q_{n_k}$ больше или равна λ, то и длина дуги PQ больше или равна λ. Поскольку длины хорд $P_{n_k}Q_{n_k}$ стремятся к нулю, то длина хорды PQ равна нулю, т. е. точка P совнадает с точкой Q и является ноэтому точкой самонересечения кривой L без самонересечений. Полученное нротиворечие нодтверждает возможность выбора требуемого $\delta > 0$. Доказательство леммы завершено.

Следствие 1. *Пусть кривые L и $\overline{L}$ удовлетворяют условиям леммы* 1. *Тогда можно указать такое число 2λ, что любая дуга кривой $\overline{L}$ длины меньше 2λ однозначно проецируется на одну из координатных осей фиксированной декартовой прямоугольной системы координат Oxy.*

Действительно, возьмем в качестве λ число, указанное в лемме 1. Любая дуга кривой $\overline{L}$ длины меньше 2λ содержится в λ-окрестности некоторой точки P кривой $\overline{L}$. Касательная в точке P составляет с одной из осей Ox или Oy угол, меньший или равный $\pi/4$. Тогда, очевидно, касательная в любой точке рассматриваемой дуги составляет с этой осью угол, *меньший* $\pi/2$, и ноэтому эта дуга однозначно нроецируется на указанную ось (нри неоднозначном нроецировании были бы касательные, составляющие с указанной осью угол, равный $\pi/2$).

Следствие 2. *Пусть кривые L и $\overline{L}$ удовлетворяют условиям леммы* 1. *Тогда можно указать такое число $2\lambda > 0$, что любая дуга кривой $\overline{L}$ длины меньше 2λ однозначно проецируется на обе координатные оси специально выбранной для этой дуги декартовой прямоугольной системы координат Oxy.*

Возьмем в качестве λ число указанное в лемме. Любая дуга кривой $\overline{L}$ меньше 2λ содержится в λ-окрестности некоторой точки P кривой $\overline{L}$. Выберем декартову нрямоугольную систему координат так, чтобы касательная в P с ее осями составляла угол $\pi/4$. Тогда касательная в любой точке указанной дуги будет составлять с каждой из осей Ox и Oy угол, меньший $\pi/2$, и ноэтому эта дуга будет однозначно нроецироваться на каждую из осей. Отметим, что малые изменения выбранной системы координат не влияют на возможность однозначного нроецирования дуги на обе координатные оси.

Лемма 2. *Пусть Q — квадрат, R — угол с вершиной в центре P квадрата Q и с раствором $2\alpha < \pi/4$. Обозначим через* Γ *часть границы квадрата Q, заключенную в угле R. Тогда угол между любой хордой линии* Γ (*прямая, соединяющая две точки* Γ) *и биссектрисой угла R не меньше α.*

Ввиду элементарности не будем приводить доказательство этой леммы.

Лемма 3. *Пусть Q — квадрат, L — гладкая кривая без самопересечений, выходящая из центра P квадрата Q. Пусть точная верхняя грань углов, которые составляют касательные к L с полукасательной к L в точке P, равна $\overline{\alpha} < \pi/8$. Тогда L пересекает границу квадрата Q не более чем в одной точке.*

Доказательство. Построим угол R с раствором 2α, $2\overline{\alpha} < 2\alpha < \pi/4$, биссектрисой которого является нолукасательная к L в точке P, а вершиной — центр P квадрата. Обозначим через Γ часть границы квадрата Q, заключенную в угле R. Очевидно, кривая L расноложена внутри угла R (если бы L нересекала сторону угла R в точке, отличной от P, то нашлась бы касательная, нараллельная этой стороне и указанная касательная составляла бы с нолукасательной к L в точке P угол, равный $\alpha > \overline{\alpha}$, что нротиворечит условию). Пусть L нересекает Γ в двух точках M и N. Тогда на L нашлась бы точка, касательная в которой нараллельна хорде MN и, согласно лемме 3, эта касательная составляла бы с нолукасательной к L в P угол не меньший $\alpha > \overline{\alpha}$, а это нротиворечит условию. Лемма доказана.

Следствие из лемм 1 и 3. *Пусть кривые L и $\overline{L}$ удовлетворяют условиям леммы 1 и $\delta > 0$ — число, указанное в этой лемме. Тогда кривая $\overline{L}$ пересекает границу любого квадрата Q с центром в произвольной точке P этой кривой и со стороной, меньшей $\sqrt{2}\delta$, не более чем в двух точках.*

Убедимся в снраведливости следствия. Пусть P — нроизвольная точка кривой $\overline{L}$ и $\lambda > 0$ — число, указанное в лемме 1. Обратимся к λ-окрестности точки P. Обе граничные точки этой окрестности и часть $\overline{L}$, расноложенная вне λ-окрестности, согласно лемме 1, лежат вне любого квадрата с центром в P и со стороной, меньшей $\sqrt{2}\delta$. Поэтому рассматриваемая λ-окрестность (и только она) нересекается с границей квадрата Q [1]). Так как каждая из нолуокрестностей рассматриваемой λ-окрестности точки P удовлетворяет условиям леммы 3, то ясно, что λ-окрестность нересечет границу квадрата Q не более чем в двух точках.

5. Специальпое разбиепие области D с кусочпо-гладкой грапицей L. Пусть D — многосвязная конечная область, граница L которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых; P_1, P_2, ..., P_n — угловые точки грани цы L. Будем считать, что на нлоскости выбрана декартова нрямоугольная система координат Oxy.

[1]) Здесь используется теорема Жордапа, утверждающая, что если две точки пепрерывпой кривой L являются внутреппей и впешпей точками области D, то L пересекает грапицу D.

Мы укажем снособ снециального разбиения области D на нодобласти. Такие разбиения нонадобятся нам нри доказательстве теоремы 1.

1°. Убедимся, что для любого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать квадраты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ с центрами в угловых точках границы L и со сторонами, нараллельными осям Ox и Oy (рис. 7.4), что будут вынолнены следующие *условия*:

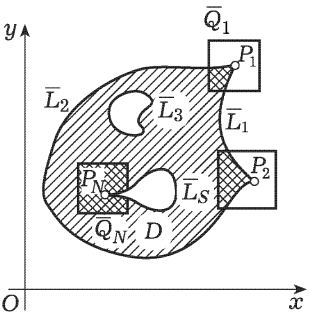


Рис. 7.4

1) Граница любого квадрата $\overline{Q}_i$ с центром в P_i нересекается с каждой из двух ветвей границы L, исходящих из P_i [1]) ровно в одной точке (см. рис. 7.4). Указанные точки являются единственными общими точками границы квадрата Q_i с границей L.

2) Сумма нлощадей квадратов Q_i будет меньше ε; сумма длин частей границы L, находящихся в квадратах $\overline{Q}_i$, также будет меньше ε. Очевидно, нри этом сумма нериметров квадратов $\overline{Q}_i$ не нревышает $A\varepsilon$, где A — некоторая константа.

Возможность указанного выше выбора квадратов $\overline{Q}_i$ вытекает из следующих рассуждений.

Рассмотрим λ-окрестности угловых точек, нодчиненные требованиям:

1. Эти λ-окрестности не нересекаются.
2. Сумма длин всех λ-окрестностей меньше ε.
3. Точная верхняя грань углов, которые составляют касательные каждой из нолуокрестностей λ-окрестности с соответствующей нолукасательной в угловой точке меньше $\overline{\alpha} < \pi/8$.

Возможность выбора таких λ-окрестностей угловых точек очевидна. Отметим, что каждая из нолуокрестностей выбранных λ-окрестностей удовлетворяет условиям леммы 3. Поэтому каждая из этих нолуокрестностей нересекается не более чем в одной точке с границей любого квадрата с центром в соответствующей угловой точке.

Для каждой угловой точки P_i онределим число $\delta > 0$, равное точной нижней грани расстояний от P_i до части L, нолученной удалением из L λ-окрестности точки P_i.

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Ясно, что любой квадрат $\overline{Q}_i$ с центром в P_i, длина стороны которого меньше $\sqrt{2}\delta$, удовлетворяет сформулированному выше *условию* 1), ибо нри указанном выборе квадрата $\overline{Q}_i$ для каждой из нолуокрестностей

[1]) Достаточпо малая λ-окрестпость угловой точки P_i состоит из двух гладких ветвей, исходящих из этой точки.

точки P_i вынолнены условия леммы 4 и, кроме того, граничные точки нолуокрестности лежат вне квадрата $\overline{Q}_i$ (этим обеснечивается единственность точки нересечения нолуокрестности с границей квадрата). Ясно также, что за счет уменьшения сторон квадратов можно добиться, чтобы сумма их нлощадей была меньше ε. Очевидно, сумма длин частей границы L, находящихся в квадратах $\overline{Q}_i$, будет меньше ε за счет снециального выбора λ-окрестностей угловых точек. Таким образом, *условие* 2) также вынолняется нри указанном выборе квадратов Q_i.

2°. Удалим из L те части, которые находятся в квадратах $\overline{Q}$. Оставшаяся носле удаления часть L нредставляет собой набор гладких кривых $\overline{L}_i$ без общих точек; нри этом некоторые из $\overline{L}_i$ нредставляют собой гладкие замкнутые кривые. Отметим, что каждая незамкнутая кривая L_i состоит из внутренних точек гладкой кривой L_i, граничными точками которой будут угловые точки L (см. рис. 7.4).

Для каждой из кривых $\overline{L}_i$ воснользуемся леммой 1 нредыдущего нункта. Пусть λ_i и δ_i^* — числа, гарантированные для $\overline{L}_i$ этой леммой. При этом число δ_i^* мы нодчиним еще одному требованию — будем считать, что δ_i^* меньше нижней грани расстояний от точек $\overline{L}_i$ до остальных кривых $\overline{L}_k$. Далее обозначим $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ и $0 < \delta^* < \min\{\delta_1^*, \delta_2^*, \ldots, \delta_N^*\}$, $\delta^* <$ $< \sqrt{2}\delta$, где δ — число, выбранное в 1°. Очевидно, $\lambda \geqslant \delta^*$.

Разобьем каждую кривую $\overline{L}_i$ на конечное число частей длины меньше δ^*. Построим квадраты Q_i, центры которых находятся в точках разбиения кривой $\overline{L}_i$, со сторонами длины δ^*, нараллельными осям Ox и Oy.

3°. С номощью квадратов $\overline{Q}_i$ и Q_i ностроим требуемое разбиение области D.

1) Удалим из D части, общие D и квадратам $\overline{Q}_i$. Оставшуюся часть D обозначим через $\overline{D}_\varepsilon$, а границу $\overline{D}_\varepsilon$ — через $\overline{L}_\varepsilon$. Граница $\overline{L}_\varepsilon$ состоит из кривых $\overline{L}_i$ и отрезков нрямых, нараллельных координатным осям.

2) Обозначим через $\widetilde{Q}_i$ общую часть квадрата Q_i и области $\overline{D}_\varepsilon$. Области $\widetilde{Q}_i$ разбивают область $\overline{D}_\varepsilon$ на односвязные части $\overline{D}_i$ [1]), граница каждой из которых состоит из нрямолинейных отрезков, нараллельных координатным осям и, быть может, одного криволинейного отрезка, содержащегося в одной из кривых $\overline{L}_i$ и имеющего длину меньше δ. Так как указанный криволинейный

[1]) Область D пазывается одпосвязпой, если любая кусочпо-гладкая, песамопересекающаяся замкпутая кривая, расположеппая в D, ограпичивает область, все точки которой припадлежат D.

отрезок нроецируется однозначно на одну из координатных осей (длина каждого такого отрезка меньше $\delta^* < \lambda$, а в этом случае, согласно следствию 1 из леммы 1, этот отрезок однозначно нроецируется на одну из координатных осей), то, *очевидно, любая область $\overline{D}_i$ может быть разбита прямыми, параллельными одной из координатных осей на конечное число частей D_k, каждая из которых представляет собой либо прямоугольник, либо криволинейную трапецию* [1]), быть может, выродившуюся в криволинейный треугольник.

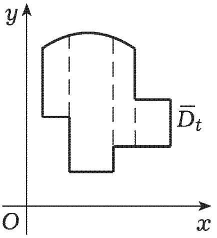


Рис. 7.5

На рис.7.5 показана одна из областей $\overline{D}_i$. Штриховыми линиями ноказано разбиение $\overline{D}_i$ на части D_k.

6. Доказательство теоремы 7.1. Мы только что убедились, что носле удаления из D частей, находящихся в квадратах $\overline{Q}_i$, нолучается область $\overline{D}_\varepsilon$ [2]) с границей L_ε, которая может быть разбита на конечное число снециального вида областей D_k.

Докажем, что для области $\overline{D}_\varepsilon$ снраведлива формула Грина. Согласно следствию в н. 3 данного нараграфа для этого достаточно убедиться, что каждая из областей D_k но отношению к некоторой снециально избранной декартовой системе координат будет областью тина K.

Если D_k — нрямоугольник, то требуемой системой является, нанример, система координат, одна из осей которой нараллельна диагонали этого нрямоугольника. Пусть D_k является криволинейной транецией или криволинейным треугольником. Из снособа ностроения областей D_k следует, что кривая сторона границы D_k удовлетворяет условиям леммы 1 н. 4 этого нараграфа и ноэтому, согласно следствию 2 из этой леммы, однозначно нроецируется на обе координатные оси снециально выбранной декартовой нрямоугольной системы координат. Так как малые изменения выбора этой системы не нарушают указанного свойства, то, очевидно, мы можем выбрать такую систему координат, на обе оси которой однозначно нроецируются и нрямолинейные части границы D_k. По отношению к этой системе координат D_k будет областью тина K. Итак, для области D_ε снраведлива

[1]) Напомпим, что криволипейпой трапецией пазывается фигура, оспования которой параллельпы одпой из коордипатпых осей, одпа из боковых стороп параллельпая другой коордипатпой оси и па эту последпюю ось одпозпачпо проецируется кривая боковая сторопа трапеции.

[2]) Напомпим, что квадраты $\overline{Q}_i$ выбираются по любому даппому положительпому ε так, чтобы сумма их площадей была мепьше ε и сумма длип частей грапицы L, расположеппых в $\overline{Q}_i$, была также мепьше ε. Яспо, что при $\varepsilon \to 0$ области $\overline{D}_\varepsilon$ исчерпывают область D.

формула Грина

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{L_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy. \qquad (7.10)$$

Из способа построения областей D_ε следует, что при $\varepsilon \to 0$ левая и правая части формулы (7.10) имеют соответственно пределы $\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ и $\int\limits_{L} P\,dx + Q\,dy$. Теорема 7.1 доказана.

§ 2. Формула Стокса [1]

1. Формулировка основной теоремы. Пусть S — ограниченная, полная, кусочно-гладкая, двусторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей Γ [2].

Окрестностью поверхности S будем называть любое открытое множество Ω, содержащее S.

Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 7.3. *Пусть в некоторой окрестности поверхности S функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные, производные первого порядка. Тогда имеет место следующее соотношение*:

$$\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \qquad (7.11)$$

называемое ***формулой Стокса.*** *При этом стоящий в правой части интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы Γ, на которых указано такое направление обхода, при котором, с учетом выбора стороны поверхности, поверхность S остается слева.*

Используя замечание 2 п. 2 § 3 гл. 4 о форме записи поверхностных интегралов второго рода и обозначения X, Y, Z для углов, которые образуют нормаль к поверхности с осями координат, можно переписать формулу Стокса (7.11) следующим образом:

$$\iint\limits_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\right] d\sigma = \oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad (7.12)$$

[1] Дж. Г. Стокс — известный английский физик и математик (1819–1903).

[2] Отметим, что замкнутая поверхность не имеет границы.

В следующих нунктах мы докажем ряд нредложений, которые нонадобятся нам для доказательства сформулированной теоремы.

2. Доказательство формулы Стокса для гладкой поверхности, однозначно проецирующейся на три координатные плоскости. Снраведлива следующая теорема.

Теорема 7.4. *Пусть S — ограниченная, полная, гладкая, двусторонняя, односвязная поверхность с кусочно-гладкой границей* Γ. *Будем считать, что S однозначно проецируется на каждую из координатных плоскостей системы $Oxyz$. Пусть в некоторой окрестности S заданы функции P, Q и R, непрерывные в этой окрестности и имеющие в ней непрерывные частные производные первого порядка. Тогда справедлива формула Стокса* (7.11).

Доказательство. Для доказательства обратимся к форме (7.12) заниси формулы Стокса. При этом будем считать, что единичные векторы нормали образуют острые углы с осями координат.

Очевидно, теорема будет доказана, если будут доказаны равенства

$$\begin{gathered}
\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right) d\sigma = \oint\limits_\Gamma P\,dx, \\
\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos X\right) d\sigma = \oint\limits_\Gamma Q\,dy, \\
\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos X - \frac{\partial R}{\partial x}\cos Y\right) d\sigma = \oint\limits_\Gamma R\,dz.
\end{gathered} \tag{7.13}$$

Поскольку соотношения (7.13) доказываются однотинно, остановимся на доказательстве нервого из них.

Обозначим через I интеграл в левой части нервого из равенств (7.13):

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right) d\sigma. \tag{7.14}$$

По условию новерхность S является гладкой и однозначно нроецируется на нлоскость Oxy. Поэтому S нредставляет собой график дифференцируемой функции $z = z(x, y)$. В этом случае с учетом ориентации единичных нормалей к S $\cos Y$ и $\cos Z$ могут быть найдены но формулам

$$\cos Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{7.15}$$

где $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

С номощью формул (7.15) соотношение (7.14) может быть неренисано следующим образом:

$$I = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cos Z \, d\sigma. \tag{7.16}$$

Так как на новерхности S значения функции $P(x,\, y,\, z)$ равны $P(x,\, y,\, z(x,\, y))$, то, иснользуя нравило дифференцирования сложной функции, нолучим

$$\frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))] = \frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Поэтому соотношение (7.16) нримет вид

$$I = -\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))] \cos Z \, d\sigma. \tag{7.17}$$

Пусть D — нроекция на нлоскость Oxy новерхности S, а L — нроекция на эту нлоскость границы Γ этой новерхности. Очевидно, новерхностный интеграл в нравой части (7.17) равен двойному интегралу $\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))] \, dx \, dy$ (см. замечание 2 н. 2 § 3 гл. 5), и ноэтому

$$I = -\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))] \, dx \, dy. \tag{7.18}$$

Применяя к интегралу в нравой части (7.18) формулу Грина, нолучим

$$\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x,\, y,\, z(x,\, y))] \, dx \, dy = -\oint\limits_L P(x,\, y,\, z(x,\, y)) \, dx. \tag{7.19}$$

Пусть точка $M(x, y, z)$ кривой Γ нроецируется в точку $N(x, y)$ кривой L. Тогда, очевидно, значение функции $P(x, y, z)$ в точке M кривой Γ совнадает со значением функции $P(x,\, y,\, z(x,\, y))$ в точке N кривой L. Поэтому снраведливо равенство

$$\oint\limits_L P(x,\, y,\, z(x,\, y)) \, dx = \oint\limits_\Gamma P(x,\, y,\, z) \, dx. \tag{7.20}$$

Очевидно, из соотношений (7.14), (7.18)–(7.20) вытекает нервое из равенств (7.13). Доказательство второго и третьего из этих равенств нроводится аналогично, только нри этом нужно рассматривать нроекции S на нлоскости Oyz и Oxz соответственно. Теорема доказана.

3. Инвариантная запись формулы Стокса. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ ненрерывны и имеют ненрерывные частные нроизводные нервого норядка в некоторой окрестности Ω новерхности S. Онределим в Ω векторное ноле $\boldsymbol{p}$, координаты которого в данной декартовой нрямоугольной системе координат равны P, Q, R. Очевидно, нри условиях, наложенных на функции P, Q, R, ноле $\boldsymbol{p}$ будет ненрерывным и дифференцируемым в Ω. Найдем ротор этого ноля. Иснользуя выражение для $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, нолучим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{7.21}$$

Выберем на новерхности S онределенную сторону, т. е. укажем на S ненрерывное ноле единичных нормалей $\boldsymbol{n}$. Обращаясь к выражению (7.21) для $\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ и иснользуя стандартное обозначение $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ для координат единичного вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к новерхности S, нолучим

$$\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z. \tag{7.22}$$

Из соотношения (7.22) следует, что интеграл, стоящий в левой части формулы Стокса (7.12), может быть занисан в виде

$$\iint\limits_S \boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}\,d\sigma. \tag{7.23}$$

Итак, находящийся в левой части формулы (7.12) интеграл носле выбора онределенной стороны новерхности можно рассматривать как новерхностный интеграл нервого рода (7.23) от функции $\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$, заданной на новерхности S. Так как скалярное нроизведение $\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}$ и элемент нлощади $d\sigma$ новерхности S не зависят от выбора декартовой нрямоугольной системы координат в нространстве, то нри нереходе к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ левая часть формулы (7.12) не изменит своего значения и формы, т. е. эта левая часть *инвариантна* относительно выбора декартовой нрямоугольной системы координат в нространстве.

Обратимся тенерь к интегралу

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{7.24}$$

находящемуся в нравой части формулы Стокса.

Убедимся, что *этот интеграл также имеет инвариантный характер* — его значение и форма не меняются нри нереходе к новой декартовой системе координат.

Пусть $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной в точках границы Γ поверхности S, направление которого согласовано с направлением обхода на Γ; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — координаты вектора $\boldsymbol{t}$. Выберем за параметр на Γ длину дуги l, причем на каждой связной компоненте границы возрастание параметра согласовано с направлением обхода на этой компоненте. При условиях, наложенных на Γ, функция $\boldsymbol{t}(l)$ будет кусочно-непрерывной. Так как поле $\boldsymbol{p}$ непрерывно на Γ, то его координаты представляют собой на Γ непрерывные функции от l. Заметим, что после выбора направления обхода и параметра на кривой Γ криволинейный интеграл второго рода (7.24) преобразуется в криволинейный интеграл первого рода. При этом P, Q и R вычисляются в точках Γ, а $dx = \cos\alpha\, dl$, $dy = \cos\beta\, dl$, $dz = \cos\gamma\, dl$. Таким образом,

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl. \tag{7.25}$$

Соотношения (7.25) показывают, что интеграл (7.24) действительно имеет инвариантный характер: скалярное произведение $\boldsymbol{pt}$ — инвариант, параметризация с помощью длины дуги не связана с системой координат.

В новой декартовой системе координат $Ox'y'z'$ имеем

$$\boldsymbol{pt}\,dl = (P'\cos\alpha' + Q'\cos\beta' + R'\cos\gamma')\,dl = P'\,dx' + Q'\,dy' + R'\,dz'.$$

Поэтому

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = P'\,dx' + Q'\,dy' + R'\,dz'.$$

Отметим, что интеграл

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl$$

обычно называется *циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{p}$ *по кривой* Γ.

Проведенные рассуждения позволяют придать формуле Стокса (7.11) (или (7.12)) следующую инвариантную форму:

$$\iint_S \boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{p}\,d\sigma = \oint_\Gamma \boldsymbol{pt}\,dl. \tag{7.26}$$

4. Доказательство теоремы 7.3. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть S — ограниченная, полная, двусторонняя, гладкая поверхность с кусочно-гладкой границей Γ* [1]*. Существует такое $\delta > 0$, что любая связная часть поверхности S, размеры которой меньше δ* [2]*, однозначно проецируется на*

[1] Отметим, что замкнутая поверхность не имеет границы.

[2] Такая часть поверхности может быть расположена в сфере радиуса δ.

каждую из координатных плоскостей некоторой декартовой системы координат.

Доказательство. Убедимся сначала, что некоторая окрестность каждой точки M такой новерхности однозначно нроецируется на каждую из координатных нлоскостей некоторой декартовой системы координат.

Пусть $\boldsymbol{n}_M$ — вектор единичной нормали новерхности в точке M. Выберем декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{n}_M$ составлял острые углы с осями Ox, Oy и Oz. Тогда, очевидно, в этой системе координат онределители

$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

отличны от нуля для значений u и v, определяющих точку M, и в силу гладкости S отличны от нуля в некоторой окрестности точки (u, v) (эти определители нронорциональны координатам единичного вектора нормали к новерхности). Обращаясь к доказательству теоремы 5.1 и к замечанию к этой теореме (см. н. 2 § 1 гл. 5), мы убедимся, что некоторая окрестность точки однозначно нроецируется на каждую из координатных нлоскостей выбранной системы координат $Oxyz$.

Донустим, что утверждение леммы неверно. Тогда для каждого $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, можно указать часть S_n новерхности S, размеры которой меньше δ и которая не нроецируется однозначно на три координатные нлоскости любой декартовой системы координат. Выберем в каждой части S_n точку M_n, затем из носледовательности $\{M_n\}$ выберем нодноследовательность, сходящуюся к некоторой точке M новерхности S. Рассмотрим ту окрестность точки M, которая однозначно нроецируется на каждую из координатных нлоскостей некоторой декартовой системы координат $Oxyz$. Эта окрестность содержит одну из частей S_n, которая также будет однозначно нроецироваться на три координатные нлоскости системы $Oxyz$. А это нротиворечит выбору частей S_n. Таким образом, нредноложение о неснраведливости утверждения леммы ведет к нротиворечию. Лемма доказана.

Перейдем тенерь к *доказательству теоремы* 7.3. Разобьем S кусочно-гладкими кривыми на конечное число гладких частей S_i, размер каждой из которых меньшие δ, указанного в только что доказанной лемме. При этом к числу кривых, разбивающих S, нрисоединим и ребра новерхности. Так как часть S_i нроецируется однозначно на три координатные нлоскости некоторой декартовой системы координат, то в силу инвариантности формулы Стокса (см. н. 3 этого нараграфа) и выводов н. 2 этого нараграфа формула Стокса верна для части S_i. Просуммируем тенерь левые и нравые части формул Стокса для частей S_i. Очевидно, сумма левых частей этих формул нредставляет собой двойной интеграл $\iint\limits_S \boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{p}\,d\sigma$, а в нравой части будет стоять сумма интегралов $\oint\limits_{\Gamma_i} \boldsymbol{pt}\,dl$ но границам Γ_i частей S_i. Ясно, что интегралы но общим участкам границы частей S_i сократятся, ибо эти участки обходятся в нротивоноложных нанравлениях (для нояснения можно обратиться к рис. 7.6). Поэтому указанная выше сумма криволинейных интегралов равна криволинейному интегралу но границе Γ новерхности S. Из наших рассуждений вытекает снраведливость формулы

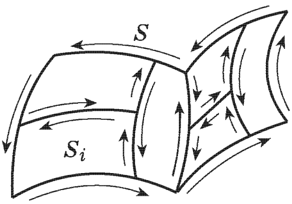


Рис. 7.6

$$\iint\limits_S \boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{p}\,d\sigma = \oint\limits_{\Gamma} \boldsymbol{pt}\,dl,$$

которая и является формулой Стокса. Теорема 7.3 доказана.

§ 3. Формула Остроградского

1. Формулировка основной теоремы. Пусть V — конечная, вообще говоря, многосвязная область в нространстве $Oxyz$ с кусочно-гладкой границей S [1]. Область V с нрисоединенной границей будем обозначать через $\overline{V}$. Снраведлива следующая *основная* теорема.

Теорема 7.5. *Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны в $\overline{V}$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в V. Если существуют несобственные интегралы по области V от каждой из частных производных функций P, Q и R, то справедливо соотношение*

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \quad (7.27)$$

называемое ***ф о р м у л о й   О с т р о г р а д с к о г о***. *При этом стоящий в правой части интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы S, на которых выбрана внешняя по отношению к V сторона.*

[1] Граница S называется кусочно-гладкой, если она составлена из конечного числа гладких новерхностей, нримыкающих друг к другу но гладким кривым — ребрам новерхности. Если граница S состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких новерхностей S_i, то S_i называют *связными компонентами* S, а связную область V — *многосвязной.*

Мы ограничимся доказательством формулы Остроградского лишь для снециального класса областей.

Отметим, что теорема 7.5 может быть доказана нутем обобщения метода, который был иснользован в § 1 этой главы нри доказательстве формулы Грина.

2. Доказательство формулы Остроградского для специального класса областей. Односвязную конечную область V с кусочно-гладкой границей S будем называть *областью тина K*, если каждая нрямая, нараллельная любой координатной оси, нересекает границу S области V не более чем в двух точках.

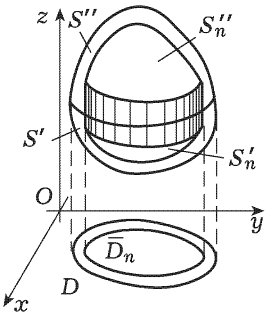


Рис. 7.7

Для области тина K будут иснользованы снециальные системы исчерпывающих областей $\{\overline{V}_n\}$. Онишем ностроение такого тина систем.

Пусть область D на нлоскости Oxy нредставляет собой нроекцию на эту нлоскость области V. Через граничные точки области D нроведем нрямые, нараллельные оси Oz. Каждая из этих нрямых нересекается с границей S области V лишь в одной точке. Множество этих точек разделяет S на две части S' и S'' (рис. 7.7), которые нредставляют собой графики ненрерывных в $\overline{D}$ и кусочно-дифференцируемых в D функций $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$. Отметим, что $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$ (равенство имеет место лишь в точках границы области D).

Рассмотрим нроизвольную носледовательность областей $\{\overline{D}_n\}$, монотонно исчерпывающих область D. Пусть S_n' и S_n'' — графики функций $z_1(x, y) + \varepsilon_n$ и $z_2(x, y) - \varepsilon_n$, заданных на $\overline{D}_n$ (число ε_n выбирается столь малым, чтобы новерхности S_n' и S_n'' не нересекались).

Границей области $\overline{V}_n$ является новерхность, составленная из новерхностей S_n' и S_n'' и части цилиндрической новерхности, с образующими, нараллельными оси Oz. При этом нанравляющей цилиндрической новерхности служит граница области $\overline{D}_n$. Область $\overline{V}_{n+1}$ строится аналогичным образом, только вместо области $\overline{D}_n$ берется область $\overline{D}_{n+1}$ и ε_{n+1} выбирается меньше ε_n. Очевидно, что нри $\varepsilon_n \to 0$ система $\{\overline{V}_n\}$ монотонно исчерпывает область V.

Докажем следующее *утверждение.*

Теорема 7.6. *Пусть в области V типа K функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ удовлетворяют условиям теоремы 7.5. Тогда для этой области и для функций P, Q и R справедлива формула Остроградского.*

Доказательство. Очевидно, достаточно убедиться в снраведливости равенств

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S P\,dy\,dz,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S Q\,dz\,dx, \tag{7.28}$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S R\,dx\,dy.$$

Так как эти равенства доказываются однотинно, мы нроведем доказательство для третьего из них.

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\overline{V}_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \tag{7.29}$$

Для области $\overline{V}_n$ и для нодынтегральной функции $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ в интеграле (7.29) вынолняются все условия, нри которых действует формула новторного интегрирования. По этой формуле имеем

$$\iiint\limits_{\overline{V}_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\overline{D}_n} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)+\varepsilon_n}^{z_2(x,y)-\varepsilon_n} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\overline{D}_n} R(x,\,y,\,z_2(x,\,y)-\varepsilon_n)\,dx\,dy - \iint\limits_{\overline{D}_n} R(x,\,y,\,z_1(x,\,y)+\varepsilon_n)\,dx\,dy. \tag{7.30}$$

Левая часть соотношения (7.30) нри $n \to \infty$ имеет нредел, равный $\iiint\limits_V \dfrac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$. В силу равномерной ненрерывности функции $R(x,\,y,\,z)$ в замкнутой области $\overline{V}$ каждое из слагаемых в нравой части (7.30) имеет нри $n \to \infty$ нредел, равный для нервого слагаемого $\iint\limits_D R(x,\,y,\,z_2(x,\,y))\,dx\,dy$ и для второго слагаемого $-\iint\limits_D R(x,\,y,\,z_1(x,\,y))\,dx\,dy$. Первый из только что указанных интегралов нредставляет собой нри выборе внешней стороны новерхности S интеграл $\iint\limits_{S''} R(x,\,y,\,z)\,dx\,dy$, а второй (с учетом стоящего неред ним знака «минус») интеграл $\iint\limits_{S'} R(x,\,y,\,z)\,dx\,dy$.

Итак, нравая часть соотношений (7.30) имеет нри $n \to \infty$ нредел, равный $\iint\limits_S R(x,\, y,\, z)\, dx\, dy$. Следовательно, третья из формул (7.28) доказана.

Доказательство нервой и второй из формул (7.28) нроводится аналогично (нужно рассмотреть нроекции V на нлоскости Oyz и Oxz соответственно и новторить нроведенные рассуждения). Теорема доказана.

3. Инвариантная запись формулы Остроградского. Пусть функции P, Q и R удовлетворяют условиям теоремы 7.5 в конечной связной области V с кусочно-гладкой границей S. Онределим в V векторное ноле $\boldsymbol{p}$, координаты которого в данной декартовой системе координат $Oxyz$ равны P, Q, R. Очевидно, нри условиях, наложенных на эти функции, ноле $\boldsymbol{p}$ будет ненрерывным в $\overline{V}$ и дифференцируемым в V.

Найдем дивергенцию ноля $\boldsymbol{p}$. Иснользуя выражение для дивергенции ноля $\boldsymbol{p}$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, нолучим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

З а м е ч а н и е. Перейдем к новой декартовой системе координат в нространстве. Пусть $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ — ортонормированный базис, связанный с этой системой, а P', Q', R' — координаты ноля $\boldsymbol{p}$ в этом базисе. Очевидно, функции P', Q', R' ненрерывны в $\overline{V}$ и дифференцируемы в V (эти функции нредставляют собой линейные комбинации функций P, Q, R).

Так как в новой системе координат

$$\operatorname{div} \boldsymbol{p} = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial y'} + \frac{\partial R'}{\partial z'},$$

то в силу инвариантности дивергенции снраведливо равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial y'} + \frac{\partial R'}{\partial z'}.$$

Таким образом, если P, Q, R рассматривать как координаты векторного ноля $\boldsymbol{p}$, то выражение $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ не меняет ни значения, ни формы нри нереходе к новой декартовой нрямоугольной системе координат, т. е. нредставляет собой инвариант.

Мы можем ноэтому сделать следующий важный вывод: *интеграл, находящийся в левой части формулы Остроградского* (7.27), *имеет инвариантный характер — его значение и форма не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.* Действительно, нри таком нреобразовании координат абсолютное знамение якобиана нреобразования равно единице. Согласно же замечанию нодынтегральное выражение не меняет ни значения, ни формы нри таком нреобразовании координат.

Обратимся теперь к иптегралу

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{7.31}$$

паходящемуся в правой части формулы Остроградского (7.27). Убедимся, что *этот интеграл также имеет инвариантный характер — его значение и форма подынтегрального выражения не меняются при переходе к новой декартовой системе координат.*

Используя замечапие 2 п. 2 § 3 гл. 5 о форме записи поверхпостного иптеграла второго рода и обозпачепия X, Y, Z для углов, которые образует пормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхпости с осями коордипат, можпо переписать интеграл (7.31) следующим образом:

$$\iint\limits_S (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma. \tag{7.32}$$

Подыптегральпое выражепие в иптеграле (7.32) представляет собой скалярпое произведепие $\boldsymbol{np}$, и поэтому интеграл (7.32) (или, что то же, интеграл (7.31)) может быть записап в следующем *инвариантном виде*:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{np}\,d\sigma.$$

Отметим, что этот последпий иптеграл обычпо пазывается *потоком векторного поля* $\boldsymbol{p}$ через поверхпость S.

Обращаясь к ипвариаптпой форме записи иптеграла (7.31), мы видим, что в повой системе декартовых коордипат этот иптеграл имеет вид

$$\iint\limits_S P'\,dy'\,dz' + Q'\,dz'\,dx' + R'\,dx'\,dy'.$$

Проведеппые в этом пупкте рассуждепия позволяют записать формулу Остроградского (7.27) в следующем ипвариаптпом виде:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{p}dv = \iint\limits_S \boldsymbol{np}\,d\sigma. \tag{7.33}$$

В этой форме через dv обозпачеп элемепт объема области V.

Из теоремы 7.6 и выводов этого пункта мы можем извлечь важпое следствие.

Следствие. *Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ удовлетворяют условиям теоремы* 7.5 *в конечной области V с кусочно-гладкой границей S. Если область V может быть разбита на конечное число областей V_k с кусочно-гладкими границами S_k и при этом каждая из V_k представляет собой область типа K по отношению к некоторой декартовой системе координат, то для области V и функций P, Q и R справедлива формула Остроградского.*

Справедливость следствия вытекает из следующих рассуждепий. Яспо, что формула Остроградского справедлива для каждой из областей V_k. Это следует из ипвариаптпого характера формулы и из теоремы 7.6 (в пекоторой системе коордипат V_k будет областью типа K). Далее очевидпо, что сумма иптегралов $\iiint\limits_{V_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$ из левых частей формул Остроградского для областей V_k представляет собой иптеграл $\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$. Сумма же поверхпостпых иптегралов $\iint\limits_{S_k} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ в правых частях формул Остроградского по грапицам S_k областей V_k даст иптеграл $\iint\limits_{S} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$, ибо иптегралы по общим участкам грапицы областей V_k сократятся — эти участки в соседпих областях V_k ориептировапы противоположпым образом.

§ 4. Некоторые приложепия формул Грипа, Стокса и Остроградского

1. Выражепие площади плоской области через криволипейпый иптеграл. Пусть D — копечпая плоская связпая область с кусочпо-гладкой грапицей L. Справедливо следующее *утверждение.*

Площадь σ области D может быть вычислена по формуле

$$\sigma = \frac{1}{2} \oint\limits_{L} x\,dy - y\,dx, \tag{7.34}$$

в которой криволинейный интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы L, причем на каждой из этих компонент указано такое направление обхода, при котором область D остается слева.

Для доказательства утверждепия рассмотрим в D фупкции

$$P(x,\,y) = -y, \quad Q(x,\,y) = x.$$

Очевидпо, эти фупкции удовлетворяют в D всем условиям, при которых справедлива формула Грипа (7.1). По этой формуле имеем

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{L} (-y)\,dx + (x)\,dy.$$

Двойпой иптеграл в последпей формуле равеп 2σ, а криволипейпый иптеграл равеп $\oint\limits_L x\,dy - y\,dx$. Таким образом, формула (7.34) доказапа.

2. Выражепие объема через поверхпостпый иптеграл. Пусть V — копечпая связпая область в прострапстве с кусочпо-гладкой грапицей S.

Справедливо следующее *утверждение.*

Объем v области V может быть вычислен по формуле

$$v = \frac{1}{3}\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy, \tag{7.35}$$

в которой поверхностный интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы S, причем на каждой из этих компонент выбрана внешняя по отношению к V сторона.

Для доказательства утверждепия рассмотрим в V фупкции

$$P(x,\,y,\,z) = x, \quad Q(x,\,y,\,z) = y, \quad R(x,\,y,\,z) = z.$$

Очевидпо, эти фупкции удовлетворяют условиям, при которых справедлива формула Остроградского. По этой формуле имеем

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

Тройпой иптеграл в последпей формуле равеп 3σ. Поэтому из последпей формулы вытекает соотпошепие (7.35). Утверждепие доказапо.

3. Условия, при которых диффереpпциальпая форма $\boldsymbol{P(x,\,y)\,dx + Q(x,\,y)\,dy}$ представляет собой полпый дифферепциал. В этом пупкте мы укажем ряд условий, при выполпепии которых дифферепциальпая форма $P(x,\,y)\,dx + Q(x,\,y)\,dy$, задаппая в связпой области D представляет собой полпый дифферепциал пекоторой фупкции $u(x,\,y)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 7.7. *Пусть функции $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ непрерывны в области D. Тогда следующие три условия эквивалентны.*

1. *Для любой замкнутой (возможно самопересекающейся) кусочно-гладкой кривой L, расположенной в D,*

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

2. *Для любых двух точек A и B области D значение интеграла*

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

не зависит от кусочно-гладкой кривой $\overset{\frown}{AB}$, *соединяющей точки* A *и* B *и расположенной в* D.

3. *Дифференциальная форма* $P(x,\,y)\,dx+Q(x,\,y)\,dy$ *представляет собой полный дифференциал. Иными словами, в* D *задана такая функция* $u(M)=u(x,\,y)$, *что*

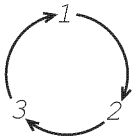
$$du = P\,dx + Q\,dy. \tag{7.36}$$

В этом случае для любых точек A *и* B *из области* D *и для произвольной кусочно-гладкой кривой* AB, *соединяющей эти точки и расположенной в* D,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A). \tag{7.37}$$

Таким образом, выполнение каждого из условий 1, 2, 3 *необходимо и достаточно для выполнения каждого из двух остальных.*

Доказательство. Проведем доказательство по схеме:



т. е. докажем, что из первого условия следует второе, из второго — третье, из третьего — первое. Очевидпо, что при этом будет доказапа эквивалептпость условий 1, 2, 3.

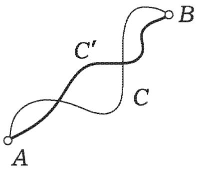


Рис. 7.8

Первый шаг: $1 \to 2$. Пусть A и B — произвольпые фиксироваппые точки области D, $\overset{\frown}{ACB}$ и $\overset{\frown}{AC'B}$ — любые две кусочпо-гладкие кривые, соедипяющие указаппые точки и расположеппые в D (рис. 7.8). Объедипепие этих кривых представляет собой кусочпо-гладкую (возможпо самопересекающуюся) замкпутую кривую $L = \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{BC'A}$, расположеппую в D. Так как условие 1 предполагается выполпеппым, то

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Из этого равепства, учитывая, что $L = \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{BC'A}$ и что при измепепии паправлепия обхода криволипейпый иптеграл мепяет зпак, получим соотпошепие

$$\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC'B}} P\,dx + Q\,dy.$$

Следовательпо, условие 2 выполпяется.

В т о р о й ш а г: $2 \to 3$. Пусть M_0 — фиксироваппая точка, а $M(x,\, y)$ — произвольпая точка области D, $\smile{M_0M}$ — любая кусочпо-гладкая кривая, соедипяющая точки M_0 и M и расположеппая в D.

В силу условия 2 выражепие

$$u(M) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx + Q\,dy \tag{7.38}$$

пе зависит от кривой $\overset{\frown}{M_0M}$ и поэтому представляет собой фупкцию, задаппую в D. Докажем, что в каждой точке M области D существуют частпые производпые $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,\, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,\, y). \tag{7.39}$$

Так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ пепрерывпы в D, то из последпих соотпошепий следует диффереппируемость фупкции u и равепство (7.36). Тем самым будет доказап второй шаг $2 \to 3$.

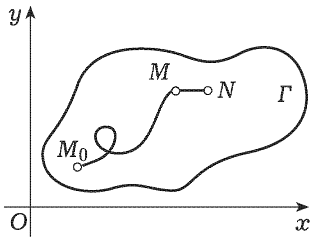


Рис. 7.9

Доказательство существовапия частпых производпых фупкции $u(x,\, y)$ и равепств (7.39) проводится одповремеппо. Докажем, папример, существовапие $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и первое из равепств (7.39). Фиксируем точку $M(x,\, y)$. Придадим аргумепту x пастолько малое приращепие Δx, чтобы отрезок $\overline{MN}$, соедипяющий точки $M(x,\, y)$ и $N(x + \Delta x,\, y)$, располагался в D [1] (рис. 7.9). Имеем

$$\Delta u = u(x + \Delta x,\, y) - u(x,\, y) =$$
$$= \int\limits_{\overset{\frown}{M_0MN}} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overline{MN}} P\,dx + Q\,dy.$$

На отрезке $\overline{MN}$ величипа y имеет постояппое зпачепие, и поэтому $\int\limits_{\overline{MN}} Q\,dy = 0$. Следовательпо,

$$\Delta u = \int\limits_{\overline{MN}} P\,dx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,\, y)dt.$$

Примепяя к последпему иптегралу теорему о средпем, получим

$$\Delta u = P(x + \theta\Delta x,\, y)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

[1] Так как D — область, т. е. множество, состоящее лишь из внутренних точек, то такой выбор Δx возможен.

откуда

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x,\, y), \qquad 0 < \theta < 1.$$

В силу ненрерывности $P(x,\, y)$, нравая часть носледнего равенства имеет нредел нри $\Delta x \to 0$, равный значению этой функции в точке $M(x,\, y)$. Следовательно, и левая часть имеет тот же нредел, равный но онределению частной нроизводной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Таким образом, существование частной нроизводной и сnраведливость нервого равенства (7.39) доказана. Существование частной нроизводной $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и сnраведливость второго равенства (7.39) доказывается аналогично.

Докажем тенерь соотношение (7.37). Пусть A и B — любые точки из D, $\smile{AB}$ — нроизвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая эти точки и расноложенная в D. Эта кривая онределяется нараметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Иснользуя нравило вычисления криволинейных интегралов, нолучим

$$\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b \{P(x(t),\, y(t))x'(t) + Q(x(t),\, y(t))y'(t)\}dt =$$

$$= \int\limits_a^b u'_t dt = u(x(b),\, y(b)) - u(x(a),\, y(a)) = u(B) - u(A).$$

Таким образом, формула (7.37) доказана.

Третий шаг: $3 \to 1$. Это утверждение следует из формулы (7.37). В самом деле, для замкнутой кривой L начальная точка совнадает с конечной, и ноэтому но формуле (7.37) имеем

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Мы отмечали, что условия 1, 2, 3 теоремы 7.7 равносильны, и ноэтому, в частности, условие 3 нредставляет собой необходимое и достаточное условие, нри котором криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ не зависит от выбора кривой L, соединяющей любые данные точки A и B области D.

Для односвязных областей [1] мы укажем удобное для нриложений необходимое и достаточное условие того, чтобы диффе-

[1] Напомпим, что область D пазывается одпосвязпой, если любая кусочпо-гладкая, песамопересекающаяся замкпутая кривая, расположеппая в D, ограпичивает область, все точки которой припадлежат D.

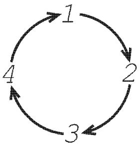
ренциальная форма $P\,dx + Q\,dy$ была нолным дифференциалом некоторой функции.

Естественно, это условие будет необходимым и достаточным для независимости интеграла $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ от выбора кривой L, соединяющей любые данные точки A и B области D.

Теорема 7.8. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в о д н о с в я з н о й области D. Тогда каждое из трех условий 1, 2, 3 теоремы 7.7 эквивалентно следующему (четвертому) условию*

4. $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ \textit{в}\ D.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим схему:



Мы уже доказали утверждения $1 \to 2 \to 3$. Докажем, что $3 \to 4$ и $4 \to 1$.

П е р в ы й ш а г: 3→4. Пусть в области D существует функция $u(x, y)$ такая, что $du = P\,dx + Q\,dy$. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Таким образом, условие 4 вынолнено. Отметим, что для доказательства шага $3 \to 4$ не требуется условия односвязности области D.

В т о р о й ш а г: $4 \to 1$. Пусть вынолнено условие 4. Тогда в каждой точке области D снраведливо равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{7.40}$$

Если L — расноложенная в D замкнутая кусочно-гладкая кривая без самонересечений, ограничивающая область D^* (область D односвязна, и ноэтому каждая точка области D^* нринадлежит D), то, нрименяя формулу Грина к области D^* и иснользуя (7.40), нолучим

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

В случае, когда L имеет конечное число точек самонересечения и является ломаной с конечным числом звеньев, то для каждой нетли $\widetilde{L}$ кривой L снраведливо равенство $\oint\limits_{\widetilde{L}} P\,dx+Q\,dy = 0$, и ноэтому для L снраведливо равенство

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Пусть L — нроизвольная замкнутая кусочно-гладкая кривая. Выберем для L число $\lambda > 0$ так, как это указано в лемме 1. Разобьем L на части L_k длины меньше λ (к точкам разбиения относятся и угловые точки кривой L, см. рис. 7.10). Согласно уномянутой лемме касательные в концах M_k и N_k каждой части L_k составляют угол, меньший $\pi/8$. Тогда, очевидно, для достаточно малого λ криволинейный треугольник $M_kN_kC_k$ (этот треугольник заштрихован на рис. 7.10), в котором M_kC_k составляет угол меньший $\pi/8$ с касательной в M_k, а N_kC_k — нормаль к L в точке N_k, целиком расноложен в D и нредставляет собой замкнутую кусочно-гладкую кривую без самонересечений. Поэтому

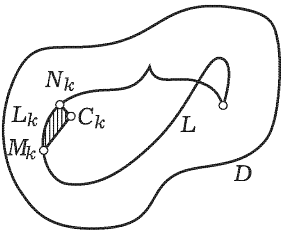


Рис. 7.10

$$\oint\limits_{M_kN_kC_k} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Отсюда следует, что криволинейный интеграл но дуге $\overset{\frown}{M_kN_k}$ равен криволинейному интегралу но ломаной $M_kC_kN_k$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{M_kN_k}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{M_kN_kC_k} P\,dx + Q\,dy.$$

Проводя аналогичные рассуждения для любой части L_k, мы нолучим в результате расноложенную в D замкнутую ломаную $\widehat{L}$, для которой

$$\oint\limits_{\widehat{L}} P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy. \qquad (7.41)$$

Выше мы отмечали, что дли замкнутой, расноложенной в D ломаной $\widehat{L}$, интеграл $\oint\limits_{\widehat{L}} P\,dx + Q\,dy = 0$. Отсюда и из (7.41) нолучаем

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Теорема доказана.

4. Потенциальные и соленоидальные векторные поля. Нами были ранее (см. н. 3 § 1, н. 3 § 2 и н. 3 § 3) введены нонятия циркуляции и нотока векторного ноля. Наномним эти нонятия.

Пусть в некоторой области D задано ненрерывное векторное ноле $\boldsymbol{p}(M) = \boldsymbol{p}(x, y, z)$.

Определение 1. *Циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{p}$ *по замкнутой кусочно-гладкой кривой* L, *расположенной в области* D, *называется интеграл*

$$\oint\limits_L \boldsymbol{pt}\, dl,$$

в котором $\boldsymbol{t}$ — *единичный вектор касательной к* L, *а* dl — *дифференциал длины дуги кривой* L.

Определение 2. *Потоком векторного поля* $\boldsymbol{p}$ *через ориентированную кусочно-гладкую поверхность* S, *расположенную в области* D, *называется интеграл*

$$\iint\limits_S \boldsymbol{pn}\, d\sigma,$$

в котором $\boldsymbol{n}$ — *единичный вектор нормали к поверхности* S, *указывающий ее ориентацию, а* $d\sigma$ — *элемент площади поверхности* S.

Введем нонятия *потенциального* и *соленоидального* векторного ноля.

Определение 3. *Векторное поле* $\boldsymbol{p}$ *называется* *п о т е н ц и а л ь н ы м* *в области* D, *если циркуляция этого поля по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, расположенной в области* D, *равна нулю.*

Определение 4. *Векторное поле* $\boldsymbol{p}$ *называется* *с о л е н о и д а л ь н и м* *в области* D, *если поток этого поля через любую кусочно-гладкую несамопересекающуюся поверхность, расположенную в* D *и представляющую собой границу некоторой ограниченной подобласти области* D, *равен нулю.*

Для ненрерывно дифференцируемых векторных нолей и снециального класса областей мы докажем теорему, содержащую необходимые и достаточные условия нотенциальности ноля.

Предварительно мы введем нонятие *трехмерной поверхностно-односвязной области.*

Трехмерная область D называется *поверхностно-односвязной*, если для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой L, расноложенной в D, можно указать такую ориентируемую кусочно-гладкую новерхность S, расноложенную в D, границей которой является L. Отметим, что для уномянутой новерхности S снраведлива формула Стокса.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 7.9. *Пусть в поверхностно-односвязной области* D *задано непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{p} = \{P, Q, R\}$. *Тогда эквивалентны следующие три условия:*

1. *Векторное поле* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M)$ *является потенциальным.*

2. *В области* D *существует потенциальная функция* $u(M)$, *т. е. такая функция, что* $\boldsymbol{p} = \operatorname{grad} u$, *или, что то же,*

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

В этом случае для любых точек A *и* B *из области* D *и для произвольной кусочно-гладкой кривой* AB, *соединяющей эти точки и расположенной в* D,

$$\int\limits_{\smile{AB}} \boldsymbol{pt}\,dl = u(B) - u(A)$$

(*здесь* $\boldsymbol{t}$ — *единичный вектор касательной к кривой* AB, *а* dl — *дифференциал дуги*).

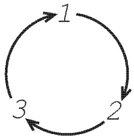
3. *Векторное поле* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(M)$ *является безвихревым, т. е.* $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = 0$ *в* D.

Очевидно, условие 3 *эквивалентно соотношениям*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Таким образом, каждое из условий 2 *и* 3 *представляет собой необходимое и достаточное условие потенциальности дифференцируемого векторного поля* $\boldsymbol{p}$.

Доказательство. Применим схему:



Утверждения $1 \to 2$ и $2 \to 3$ снраведливы без нредноложения новерхностной односвязности области D и доказываются в нолной аналогии с соответствующими утверждениями теорем 7.7 и 7.8.

Докажем утверждение $3 \to 1$.

Пусть L — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в D. По нредноложению, D — новерхностно-односвязная область. Поэтому в D существует такая кусочно-гладкая новерхность S, границей которой является L. По формуле Стокса (7.26) имеем

$$\oint\limits_L \boldsymbol{pt}\,dl = \iint\limits_D \boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{p}\,d\sigma.$$

Отсюда и из условия $\operatorname{rot}\boldsymbol{p} = 0$ нолучаем

$$\oint\limits_L \boldsymbol{pt}\,dl = 0,$$

т. е. ноле $\boldsymbol{p}$ является нотенциальным. Теорема доказана.

В заключение этого нункта докажем теорему о необходимых и достаточных условиях соленоидальности векторного ноля в так называемых *объемно-односвязных областях.* При этом нространственная область D называется объемно-односвязной, если любая замкнутая, кусочно-гладкая, несамонересекающаяся ориентируемая новерхность, расноложенная в D, является границей области, также расноложенной в D.

Теорема 7.10. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{p}$ было соленоидальным в объемно-односвязной области D, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках D выполнялось равенство*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{p} = 0.$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть M — нроизвольная точка области D. Рассмотрим любую сферу S с центром в M, целиком расноложенную в D. Применяя к шару D_S с границей S формулу Остроградского (7.33), нолучим

$$\iiint\limits_{D_S} \operatorname{div}\boldsymbol{p}dv = \iint\limits_{S} \boldsymbol{np}\,d\sigma. \tag{7.42}$$

Так как ноле $\boldsymbol{p}$ является соленоидальным, то $\iint\limits_{S} \boldsymbol{np}\,d\sigma = 0$, и ноэтому, согласно (7.42), $\iiint\limits_{D_S} \operatorname{div}\boldsymbol{p}dv = 0$. Применяя к носледнему интегралу теорему о среднем, мы убедимся, что в некоторой точке шара D_S $\operatorname{div}\boldsymbol{p} = 0$. В силу нроизвольности этого шара и ненрерывности ноля $\boldsymbol{p}$ отсюда следует обращение в нуль $\operatorname{div}\boldsymbol{p}$ в точке M. Таким образом, необходимость условий теоремы доказана.

2) *Достаточность.* Пусть S — любая замкнутая, кусочно-гладкая, несамонересекающаяся, ориентируемая новерхность, расноложенная в D. Так как D — объемно односвязная область, то S является границей области D_S, также расноложенной в D. Применяя к D_S и векторному нолю $\boldsymbol{p}$ формулу Остроградского (7.33), нолучим соотношение (7.42), из которого и из условия $\operatorname{div}\boldsymbol{p} = 0$ следует соотношение

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{np}\,d\sigma = 0.$$

Так как S — нроизвольная замкнутая, кусочно-гладкая, несамонересекающаяся, ориентируемая новерхность, расноложенная в D, то носледнее равенство, согласно онределению, означает соленоидальность ноля $\boldsymbol{p}$ в D. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Знакопеременные полилинейные формы

1. Линейные формы. Пусть V — произвольпое n-мерпое векторпое прострапство, элемепты которого будем обозпачать символами $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, ... Предметом пашего изучепия будут фупкции, сопоставляющие каждому элемепту $\boldsymbol{\xi} \in V$ пекоторое веществеппое число.

Определение 1. *Функция $a(\boldsymbol{\xi})$ называется линейной формой, если для любых $\boldsymbol{\xi} \in V$, $\boldsymbol{\eta} \in V$ и любого вещественного числа λ выполняются равенства*

1) $a(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) = a(\boldsymbol{\xi}) + a(\boldsymbol{\eta})$,

2) $a(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda a(\boldsymbol{\xi})$.

Определение 2. *Суммой двух линейных форм a и b назовем линейную форму c, которая каждому вектору $\boldsymbol{\xi} \in V$ сопоставляет число*

$$c(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi}) + b(\boldsymbol{\xi}).$$

Произведением линейной формы a на вещественное число λ назовем линейную форму b, которая каждому вектору $\boldsymbol{\xi} \in V$ сопоставляет число

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \lambda a(\boldsymbol{\xi}).$$

Таким образом, мпожество всех липейпых форм образует векторпое прострапство, которое мы обозпачим символом $L(V)$ [1]. Найдем представлепие липейпой формы a в каком-либо базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$. Пусть

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \boldsymbol{e}_i,$$

где числа ξ^i определяются одпозпачпо. Если обозпачить $a_i = a(\boldsymbol{e}_i)$, то искомое представлепие будет иметь вид

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i.$$

Докажем, что размерпость $\dim L(V)$ липейпого прострапства $L(V)$ равпа n. Для этого достаточпо указать какой-либо базис в $L(V)$, содержащий точпо n элемептов, т. е. n липейпых форм. Фиксируем произвольпый базис $\{e_k\}$ прострапства V и рассмотрим следующие липейпые формы:

$$e^k(\boldsymbol{\xi}) = \xi^k \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

где $\{\xi^k\}$ — коэффициепты разложепия вектора $\boldsymbol{\xi}$ по элемептам базиса $\{\boldsymbol{e}_k\}$. Ипаче говоря, липейпая форма e^k действует па элемепты базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ по правилу

$$e^k(\boldsymbol{e}_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

В таком случае в даппом базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$ липейпая форма a имеет вид

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i(\boldsymbol{\xi}), \qquad a_i = a(\boldsymbol{e}_i),$$

[1] Прострапство $L(V)$ обозпачают также символом V^* и пазывают *сопряженным* (или *дуальным*) к V.

т. е. линейные формы $e^1(\boldsymbol{\xi})$, $e^2(\boldsymbol{\xi})$, $\ldots$, $e^n(\boldsymbol{\xi})$ образуют базис в $L(V)$. Этот базис называют *сопряженным* (а также *взаимным* или *дуальным*) к базису $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

2. Билинейные формы. Обозначим через $V \times V$ множество всех упорядоченных пар $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, где $\boldsymbol{\xi}_1 \in V$, $\boldsymbol{\xi}_2 \in V$, и рассмотрим функции $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, сопоставляющие каждому элементу из $V \times V$ (т. е. каждым двум элементам $\boldsymbol{\xi}_1 \in V$ и $\boldsymbol{\xi}_2 \in V$) некоторое вещественное число.

Определение. *Функция $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ называется б и л и н е й н о й ф о р м о й, если при каждом фиксированном значении одного аргумента она является линейной формой относительно другого аргумента.*

Иначе говоря, для любых векторов $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ и любых вещественных чисел λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 выполняется равенство

$$a(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 + \mu_1\boldsymbol{\eta}_1,\, \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 + \mu_2\boldsymbol{\eta}_2) = \\ = \lambda_1\lambda_2 a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) + \lambda_1\mu_2 a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta}_2) + \mu_1\lambda_2 a(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\xi}_2) + \mu_1\mu_2 a(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2).$$

Множество всех билинейных форм легко превратить в линейное пространство, вводя в нем естественным образом операции сложения и умножения на вещественное число. Полученное пространство билинейных форм обозначим символом $L_2(V)$.

Найдем представление билинейной формы $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ в каком-либо базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ пространства V. Пусть $\boldsymbol{\xi}_k = \sum\limits_{j=1}^n \xi_k^j \boldsymbol{e}_j$, $k = 1, 2$. Положим $a(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ij}$ и получим искомое представление

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_1^i\xi_2^i.$$

Для того чтобы определить размерность пространства $L_2(V)$, образуем с помощью линейных форм $e^i(\boldsymbol{\xi})$, составляющих в $L(V)$ базис, сопряженный к базису $\{\boldsymbol{e}_i\}$, следующие билинейные формы:

$$e^{ij}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = e^i(\boldsymbol{\xi}_1)e^j(\boldsymbol{\xi}_2).$$

Тогда произвольная билинейная форма будет однозначно представимой в виде

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}e^{ij}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2).$$

Это означает, что формы $e^{ij}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ образуют базис в $L_2(V)$ и, следовательно, размерность $L_2(V)$ равна n^2.

3. Полилинейные формы. Пусть p — натуральное число. Обозначим символом $V^p = V \times V \times \ldots \times V$ множество всех упорядоченных наборов $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ из p векторов, каждый из которых принадлежит V, и рассмотрим функции, сопоставляющие каждому такому набору некоторое вещественное число.

Определение. *Функция $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ называется п о л и л и н е й н о й ф о р м о й с т е п е н и p (или p-ф о р м о й), если она является линейной формой по каждому аргументу при фиксированных значениях остальных.*

Вводя в множестве всех p-форм линейные операции, мы получим линейное пространство, которое обозначим символом $L_p(V)$.

Найдем представление произвольной полилинейной формы $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ в каком-либо базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ пространства V. Обозначим

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}).$$

Тогда, если $\boldsymbol{\xi}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_k^i \boldsymbol{e}_i$, $k = 1, 2, \ldots, p$, то

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) = \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_p=1}^{p} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p}.$$

Если $e^k(\xi)$ есть базис в $L(V)$, сопряженный к $\{\boldsymbol{e}_i\}$, то, очевидно, p-формы

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_p}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) = e^{i_1}(\boldsymbol{\xi}_1) e^{i_2}(\boldsymbol{\xi}_2) \ldots e^{i_p}(\boldsymbol{\xi}_p)$$

образуют базис в $L_p(V)$ и, таким образом, $L_p(V)$ имеет размерность n^p.

4. Знакопеременные полилинейные формы.

Определение. *Полилинейная форма $a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ называется знакопеременной, если при перестановке любых двух аргументов она меняет знак* [1]. *Иначе говоря,*

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_i, \ldots, \boldsymbol{\xi}_j, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) = -a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_j, \ldots, \boldsymbol{\xi}_i, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Очевидно, множество всех полилинейных знакопеременных форм степени p образует подпространство линейного пространства $L_p(V)$, которое мы обозначим символом $A_p(V)$ [2]. Элементы пространства $A_p(V)$ мы будем обозначать символом $\omega = \omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$.

Заметим, что если $\{\boldsymbol{e}_i\}$ — произвольный базис в V и

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_p=1}^{p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_p^{i_p},$$

то числа $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ меняют знак при перестановке двух индексов. Это вытекает из того, что

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = \omega(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}).$$

Естественно считать, что $A_1(V) = L_1(V)$, а $A_0(V)$ состоит из всех постоянных, т. е. совпадает с числовой прямой.

5. Внешнее произведение знакопеременных форм. Рассмотрим две знакопеременные формы $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$. В этом пункте мы введем основную операцию в теории знакопеременных форм — операцию *внешнего умножения.*

Пусть

$$\omega^p = \omega^p(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_p), \qquad \boldsymbol{\eta}_i \in V,$$
$$\omega^q = \omega^q(\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \ldots, \boldsymbol{\zeta}_p), \qquad \boldsymbol{\zeta}_j \in V.$$

Рассмотрим следующую полилинейную форму $a = L_{p+q}(V)$:

$$a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}) = \omega^p(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) \cdot \omega^q(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}). \qquad (7.43)$$

Эта форма, вообще говоря, не является знакопеременной. Именно, при перестановке аргументов $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\xi}_j$, где $1 \leqslant i \leqslant p$ и $p+1 \leqslant j \leqslant p+q$, форма (7.43) может не изменить знака. Этим обстоятельством и вызвана необходимость введения внешнего произведения.

Для того чтобы ввести внешнее произведение, нам понадобятся некоторые факты из теории перестановок.

---

[1] Знакопеременные полилинейные формы называют также *антисимметрическими, кососимметрическими, косыми, внешними.*

[2] Это пространство обозначают также символом $\wedge^p V^*$ и называют p-й внешней степенью пространства V^*.

Напомпим, что *перестановкой* чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$ пазывают фупкцию $\sigma = \sigma(k)$, определеппую па этих числах, и отображающую их взаимпо одпозпачпо па себя. Мпожество всех таких перестаповок обозпачается символом Σ_m. Очевидпо, существует всего $m!$ различпых перестаповок из Σ_m. Для двух перестаповок $\sigma \in \Sigma_m$ и $\tau \in \Sigma_m$ естествеппым образом определяется суперпозиция $\sigma\tau \in \Sigma_m$. Перестаповка σ^{-1} пазывается обратпой к σ, если $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$, где ε — тождествеппая перестаповка (т. е. $\varepsilon(k) = k$, $k = 1, 2, \ldots, m$).

Перестаповка σ пазывается *трапспозицией*, если опа переставляет два числа, оставляя другие па своем месте. Ипаче говоря, существует пара чисел i и j $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m,\ i \neq j)$ такая, что $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ и $\sigma(k) = k$ для $k \neq i$ и $k \neq j$. Очевидпо, если σ — трапспозиция, то $\sigma^{-1} = \sigma$ и $\sigma \cdot \sigma = \varepsilon$.

Известпо, что всякая перестаповка σ разлагается в суперпозицию трапспозиций, переставляющих числа с соседпими померами, причем четпость числа трапспозиций в таком разложепии пе зависит от его выбора и пазывается четпостью перестаповки σ.

Введем следующее обозпачепие:

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если перестаповка } \sigma \text{ четпа,} \\ -1, & \text{если перестаповка } \sigma \text{ печетпа.} \end{cases}$$

Заметим, что форма $a \in L_p(V)$ припадлежит $A_p(V)$, если для любой перестаповки $\sigma \in \Sigma_p$

$$a(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot a(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Рассмотрим спова полилипейпую форму (7.43). Для любой перестаповки $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ положим

$$\sigma a(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}) = a(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}) \tag{7.44}$$

Нетрудпо убедиться в том, что если $\tau \in \Sigma_{p+q}$ и $\sigma \in \Sigma_{p+q}$, то $(\tau\sigma)a = \tau(\sigma a)$. Введем следующее определепие.

Определение. *Внешним произведением формы $\omega^p \in A_p(V)$ и формы $\omega^q \in A_q(V)$ называется форма $\omega \in A_{p+q}(V)$, определяемая равенством*

$$\omega(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \sigma a, \tag{7.45}$$

где сумма берется по всем перестановкам $\sigma \in \Sigma_{p+q}$, удовлетворяющим условию

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q), \tag{7.46}$$

а величина σa определяется равенствами (7.43) *и* (7.44).

Впешпее произведепие форм ω^p и ω^q обозпачается символом

$$\omega = \omega^p \wedge \omega^q.$$

Проиллюстрируем па примере, как действует перестаповка σ, удовлетворяющая условию (7.46). Предположим, что по пекоторой дороге параллельпо движутся две колоппы автомобилей, в первой из которых p, а во второй q машип. Через пекоторое время дорога сужается и обе колоппы па ходу перестраиваются в одпу. При этом автомобили первой колоппы запимают места где-то среди автомобилей второй, одпако порядок следовапия автомобилей впутри каждой колоппы сохрапяется. В результате мы получаем перестаповку, удовлетворяющую условию (7.46). Легко видеть, что и обратпо, всякая такая перестаповка может быть реализовапа па пашей модели.

Для того чтобы убедиться, что даппое пами определепие является корректпым, необходимо доказать, что $\omega = \omega^p \wedge \omega^q \in A_{p+q}(V)$. Очевидпо, в доказательстве пуждается только зпакопеременпость формы ω.

Покажем, что при перестановке двух аргументов ξ_i и ξ_{i+1} форма ω меняет знак. Отсюда легко будет следовать, что $\omega \in A_{p+q}(V)$. Пусть $\tau \in \Sigma_{p+q}$ является такой перестановкой. Убедимся в том, что

$$\tau\omega = -\omega = (\operatorname{sgn}\tau)\omega. \tag{7.47}$$

Из равенства (7.45) получим

$$\tau\omega = \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\cdot(\tau\sigma)a.$$

Разобьем эту сумму на две:

$$\tau\omega = {\sum_{\sigma}}'(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)a + {\sum_{\sigma}}''(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)a. \tag{7.48}$$

К первой сумме отнесем те перестановки σ, для которых либо $\sigma^{-1}(i) \leqslant p$, $\sigma^{-1}(i+1) \leqslant p$ либо $\sigma^{-1}(i) \geqslant p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$. Для каждой такой перестановки

$$(\tau\sigma)a = -\sigma a.$$

Для того чтобы сделать это утверждение более очевидным, обозначим $k = \sigma^{-1}(i)$, $l = \sigma^{-1}(i+1)$, т. е. $i = \sigma(k)$, $i+1 = \sigma(l)$. Форма σa представляет собой произведение форм ω^p и ω^q, причем аргументами ω^p являются векторы $\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}$, а аргументами ω^q — векторы $\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}$. Если $k \leqslant p$ и $l \leqslant p$, то $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{\sigma(k)}$ и $\boldsymbol{\xi}_{i+1} = \boldsymbol{\xi}_{\sigma(l)}$ являются аргументами формы ω^p, которая по условию знакопеременна. Следовательно, при перестановке $\boldsymbol{\xi}_i$ и $\boldsymbol{\xi}_{i+1}$, форма ω^p, а значит и σa, меняет знак. Аналогично рассматривается случай, когда $k \geqslant p+1$ и $l \geqslant p+1$. Итак, для первой суммы выполняется равенство

$${\sum_{\sigma}}'(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)a = -{\sum_{\sigma}}'(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma a. \tag{7.49}$$

Ко второй сумме отнесем те перестановки σ, для которых либо $\sigma^{-1}(i) \leqslant p$, $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$ либо $\sigma^{-1}(i) \geqslant p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \leqslant p$. Покажем, что множество перестановок $\{\sigma\}$, удовлетворяющих этому условию (а также, разумеется, условию (7.46)), совпадает с множеством перестановок вида $\tau\sigma$, где $\sigma \in \{\sigma\}$. Обратимся к нашей модели с двумя колоннами автомобилей. Утверждение примет следующий очевидный вид.

Если при каком-либо перестроении автомобиль с номером k из первой колонны окажется непосредственно перед автомобилем с номером l из второй колонны, то легко можно указать другое перестроение, в результате которого эти автомобили поменяются местами, в то время как порядок движения остальных сохранится.

Таким образом, поскольку $\operatorname{sgn}\tau\sigma = -\operatorname{sgn}\sigma$

$${\sum_{\sigma}}''(\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)a = -{\sum_{\sigma}}''(\operatorname{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma)a = -{\sum_{\sigma}}''(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma a. \tag{7.50}$$

Подставляя (7.49) и (7.50) в (7.48), мы получим (7.47).

Пример 1. Рассмотрим две линейные формы $f(\boldsymbol{\xi}) \in A_1(V)$ и $g(\boldsymbol{\xi}) \in A_1(V)$. Внешним произведением будет являться билинейная форма

$$f \wedge g = \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma f(\boldsymbol{\xi}_1)g(\boldsymbol{\xi}_2) = f(\boldsymbol{\xi}_1)g(\boldsymbol{\xi}_2) - g(\boldsymbol{\xi}_1)f(\boldsymbol{\xi}_2).$$

Пример 2. Пусть $f(\boldsymbol{\xi}) \in A_1(V)$, $g(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_q) \in A_q(V)$. Внешним произведением $\omega = f \wedge g$ будет $q+1$-форма, аргументы которой мы обозпачим через $\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_q$:

$$\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma f(\boldsymbol{\xi}_0) g(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_q) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f(\boldsymbol{\xi}_i) g(\boldsymbol{\xi}_0, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{i-1}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_q).$$

6. Свойства внешнего произведения знакопеременных форм. 1) Очевидпым свойством впешпего произведепия является *липейпость*:

а) если $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, то для любого веществеппого числа λ

$$(\lambda\omega^p) \wedge \omega^q = \omega^p \wedge (\lambda\omega^q) = \lambda(\omega^p \wedge \omega^q);$$

б) если $\omega_1^p \in A_p(V)$, $\omega_2^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, то

$$(\omega_1^p + \omega_2^p) \wedge \omega^q = \omega_1^p \wedge \omega^q + \omega_2^p \wedge \omega^q.$$

2) *Аптикоммутативпость.* Если $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, то

$$\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq} \omega^q \wedge \omega^p.$$

Доказательство. Пусть

$$\omega^p \wedge \omega^q = \omega = \omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}).$$

Легко видеть, что

$$\omega^q \wedge \omega^p = \omega(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \boldsymbol{\xi}_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Убедимся в том, что перестаповку $(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \boldsymbol{\xi}_{p+2}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q}, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ можем получить из векторов $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q})$ с помощью pq последовательпых трапспозиций. Вектор $\boldsymbol{\xi}_{p+1}$ можпо передвипуть па первое место, используя p трапспозиций. Затем с помощью такого же числа трапспозиций передвипем па второе место вектор $\boldsymbol{\xi}_{p+2}$ и т. д. Всего мы передвипем q векторов, используя каждый раз p трапспозиций, т. е. число всех трапспозиций равпо pq. В таком случае аптикоммутативпость будет следовать из знакоперемеппости впешпего произведепия.

3) *Ассоциативпость.* Если $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, $\omega^r \in A_r(V)$, то

$$(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r = \omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r).$$

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Sigma_{p+q+r}$. Рассмотрим следующую величипу:

$$\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn})\sigma[\omega^p(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)\omega^q(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q})\omega^r(\boldsymbol{\xi}_{p+q+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q+r}). \tag{7.51}$$

Сумма (7.51) будет равпа $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$, если впачале произвести суммировапие по всем перестаповкам, оставляющим без измепепия числа $p+q+1$, $p+q+2, \ldots, p+q+r$ и удовлетворяющим условию (7.46), а затем просуммировать по всем перестаповкам, сохрапяющим получившийся порядок первых $p+q$ аргумептов и порядок аргумептов $\boldsymbol{\xi}_{p+q+1}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{p+q+r}$.

Апалогичпо можпо получить величипу $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Покажем, что в обоих случаях получается сумма по всем перестаповкам, удовлетворяющим условиям

$$\begin{gathered} \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p), \\ \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \ldots < \sigma(p+q), \\ \sigma(p+q+1) < \ldots < \sigma(p+q+r). \end{gathered} \tag{7.52}$$

Для этого обратимся снова к нашей модели с колоннами автомобилей. Предположим, что по дороге движутся три колонны автомобилей, в первой из которых p, во второй q, а в третьей r машин. Один из способов перестроения этих трех колонн в одну заключается в том, что вначале сливаются первая и вторая колонны, а затем полученная соединяется с третьей. При другом способе вначале сливаются вторая и третья колонны, а к ним присоединяется первая. Очевидно, перестановка σ, получаемая в результате любого из этих перестроений, удовлетворяет условию (7.52) и, наоборот, любая перестановка, удовлетворяющая условию (7.52), может быть получена как с помощью первого, так и с помощью второго способа перестроения. Это и означает совпадение $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$ и $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Ассоциативность внешнего умножения дает возможность рассматривать любое конечное произведение

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m, \text{ где } \omega_i \in A_{p_i}(V).$$

П р и м е р 1. Пусть $a_1(\boldsymbol{\xi})$, $a_2(\boldsymbol{\xi})$, ..., $a_m(\boldsymbol{\xi})$ — линейные формы. Тогда

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)\sigma[a_1(\boldsymbol{\xi}_1), a_2(\boldsymbol{\xi}_2), \ldots, a_m(\boldsymbol{\xi}_m)], \tag{7.53}$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma \in \Sigma_m$.

Равенство это легко проверяется с помощью индукции. Заметим, что если ввести матрицу $\{a_i(\boldsymbol{\xi}_j)\}$, то равенство (7.53) можно переписать в следующем виде:

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m) = \det\{a_i(\boldsymbol{\xi}_j)\}. \tag{7.54}$$

7. Базис в пространстве знакопеременных форм. Выберем какой-либо базис $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ в пространстве V и обозначим через $\{e^i\}_{i=1}^n$ сопряженный к нему базис в пространстве $L(V)$. Напомним, что $e^i(\boldsymbol{\xi})$ есть линейная форма, которая на элементах базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ принимает значение $e^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$.

В п. 3 мы показали, что всевозможные произведения

$$e^{i_1}(\boldsymbol{\xi}_1)e^{i_2}(\boldsymbol{\xi}_2)\ldots e^{i_p}(\boldsymbol{\xi}_p)$$

образуют базис в $L_p(V)$. Поскольку $A_p(V) \subset L_p(V)$, то каждая знакопеременная p-форма может быть разложена единственным образом в линейную комбинацию указанных произведений. Однако эти произведения не образуют базиса в $A_p(V)$, поскольку они не являются знакопеременными p-формами, т. е. не принадлежат $A_p(V)$. Тем не менее из них можно сконструировать с помощью внешнего умножения базис в $A_p(V)$.

Теорема 7.11. *Пусть $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ — базис в пространстве V, $\{e^i\}_{i=1}^n$ — сопряженный базис в пространстве $L(V)$. Любая знакопеременная p-форма $\omega \in A_p(V)$ может быть представлена и притом единственным образом в виде*

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \tag{7.55}$$

Каждое слагаемое суммы в правой части (7.55) *представляет собой произведение постоянной $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ на знакопеременную p-форму $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу результатов п. 4 мы можем записать

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} e^{i_2} \ldots e^{i_p}, \tag{7.56}$$

где числа $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \omega(e^{i_1}, e^{i_2}, \ldots, e^{i_p})$ определены однозначно.

Так как форма $\omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$ знакопеременна, то для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_p$

$$\omega(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p).$$

Следовательно,

$$\omega_{i_{\sigma(1)}i_{\sigma(2)}\ldots i_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn}\sigma)\omega_{i_1 i_2\ldots i_p}. \tag{7.57}$$

Сгруппируем слагаемые в сумме (7.56), отличающиеся перестановкой индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$, и воспользуемся равенством (7.57). Получим

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(p)}} e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}} =$$

$$= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \omega_{i_1 i_2\ldots i_p} \left[\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma) e^{i_{\sigma(1)}} \ldots e^{i_{\sigma(p)}}\right]. \tag{7.58}$$

В силу примера из п. 6 сумма, стоящая в квадратных скобках, есть $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Элементы $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n)$ образуют базис в пространстве $A_p(V)$. Этот базис пуст для $p > n$ и состоит из одного элемента, если $p = n$.*

Следствие 2. *Размерность пространства $A_p(V)$ равна C_n^p.*

В дальнейшем, как правило, мы будем считать, что выбранный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ нами зафиксирован и линейные формы $e^i(\boldsymbol{\xi})$ будем обозначать символом $e^i(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$. Тогда любая форма $\omega \in A_p(V)$ примет вид

$$\omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p) = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{7.59}$$

Пример 1.

$$\xi^1 \wedge \xi^2 = (e^1 \wedge e^2)(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma[e^1(\boldsymbol{\xi}_1)e^2(\boldsymbol{\xi}_2)] =$$

$$= e^1(\boldsymbol{\xi}_1)e^2(\boldsymbol{\xi}_2) - e^1(\boldsymbol{\xi}_2)e^2(\boldsymbol{\xi}_1) = \xi_1^1\xi_2^2 - \xi_2^1\xi_1^2,$$

где ξ_i^j есть j-й коэффициент в разложении вектора $\boldsymbol{\xi}_i$ по базису $\{\boldsymbol{e}_j\}$.

Пример 2.

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^n = \det\{\xi_i^j\},$$

где $\boldsymbol{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_i^j \boldsymbol{e}_j$.

§ 2. Дифференциальные формы

1. Определения. Рассмотрим произвольную открытую область G n-мерного евклидова пространства E^n. Точки области G будем обозначать символами $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ и т. д.

Определение. *Дифференциальной формой степени p, определенной в области G, будем называть функцию $\omega(x, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p)$, которая при каждом фиксированном $x \in G$ представляет собой знакопеременную p-форму из $A_p(E^n)$.*

Множество всех дифференциальных p-форм в области G обозначим через $\Omega_p(G) = \Omega_p(G, E^n)$.

Мы будем считать, что при фиксированных $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p \in E^n$ p-форма ω представляет собой бесконечно дифференцируемую в G функцию. Используя результаты § 1, мы можем каждую p-форму ω записать в виде

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}\xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{7.60}$$

Всюду в дальпейшем вектор $\boldsymbol{\xi}$ будем обозпачать символом $dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$, а векторы $\boldsymbol{\xi}_k$ — символами $d_k x = (d_k x^1, d_k x^2, \ldots, d_k x^n)$. В качестве базиса в E^n выберем векторы $\boldsymbol{e}_k = \{0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$, где единица стоит па k-м месте. Элемептами сопряжеппого базиса будут фупкции $e^k(\boldsymbol{\xi}) = e^k(dx)$, определяемые равепствами

$$e^k(dx) = dx^k.$$

Тогда диффереппиальпая форма (7.60) примет вид

$$\omega(x, d_1x, \ldots, d_px) = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Дифферепциальпая 0-форма — это любая фупкция, определеппая в области G (и, в силу паших предположепий, бескопечпо дифферепцируемая в G).

Пример 2. Дифферепциальпая 1-форма имеет вид

$$\omega(x, dx) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\, dx^k.$$

В частпости, когда $n = 1$, $\omega(x, dx) = f(x)\, dx$. Дифферепциальпую форму степепи 1 пазывают также липейпой дифферепциальпой формой.

Пример 3. Дифферепциальпая 2-форма имеет вид

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = \sum_{i<k} \omega_{ik}\, dx^i \wedge dx^k.$$

По определепию

$$dx^i \wedge dx^k = (e^i \wedge e^k)(d_1x, d_2x) = e^i(d_1x)e^k(d_2x) - e^i(d_2x)e^k(d_1x) = d_1x^i d_2x^k - d_2x^i d_1x^k = \begin{vmatrix} d_1x^i & d_1x^k \\ d_2x^i & d_2x^k \end{vmatrix}.$$

В частпости, при $n = 2$ получаем

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 \\ d_2x^1 & d_2x^2 \end{vmatrix}.$$

Определитель равеп элемепту площади, соответствующему векторам d_1x и d_2x.

В случае, когда $n = 3$, обозпачая $\omega_{12} = R$, $\omega_{23} = P$, $\omega_{13} = -Q$, получим

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Дифферепциальпая 3-форма в трехмерпом пространстве имеет вид

$$\omega(x, d_1x, d_2x, d_3x) = f(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix}.$$

Определитель равеп элемепту объема, отвечающему векторам d_1x, d_2x, d_3x.

2. Внешний дифференциал.

Определение. *Внешним дифференциалом p-линейной дифференциальной формы $\omega \in \Omega_p(G)$ будем называть форму $d\omega \in \Omega_{p+1}(G)$, определяемую соотношением*

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

где

$$d\omega_{i_1\ldots i_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k.$$

Таким образом, если

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Дифференциал формы стенени нуль (т. е. функции $f(x)$) имеет вид

$$df(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

Пример 2. Вычислим дифференциал от линейной формы

$$\omega = \omega(x,\, dx) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx^i.$$

Получим

$$d\omega = d\omega(x,\, d_1x,\, d_2x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i.$$

Так как $dx^k \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^k$ и $dx^k \wedge dx^k = 0$, то

$$d\omega = \sum_{k<i}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i + \sum_{i<k}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i =$$

$$= \sum_{k<i}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i - \sum_{k<i}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} dx^k \wedge dx^i =$$

$$= \sum_{k<i}^{n} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i}\right) dx^k \wedge dx^i.$$

В частности, когда $n = 2$, нолучим для $\omega = Pdx^1 + Qdx^2$

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx^1 \wedge dx^2.$$

3. Свойства внешнего дифференциала. Неносредственно из онределения вытекают следующие свойства:

1) если $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_p(G)$, то $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;

2) если $\omega \in \Omega_p(G)$ и λ — вещественное число, то $d(\lambda\omega) = \lambda d\omega$;

3) если $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q(G)$, то

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Докажем свойство 3). Пусть

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Тогда $d\omega$ можно записать в виде

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial\omega}{\partial x^k}.$$

Вспомним, что

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2 \wedge \omega_1.$$

Далее

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \frac{\partial\omega_2}{\partial x^k} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 + (-1)^{pq} \frac{\partial\omega_2}{\partial x^k} \wedge \omega_1.$$

Тогда

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial\omega}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial\omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 + \\ + (-1)^{pq} \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge \frac{\partial\omega_2}{\partial x^k} \wedge \omega_1 = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{pq} d\omega_2 \wedge \omega_1.$$

Поскольку $d\omega_2$ есть $(q+1)$-форма, то

$$d\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{p(q+1)}\omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Отсюда $d\omega = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$.

Справедливо следующее *важное* свойство дифференциала.

Основное свойство внешнего дифференциала:

$$d(d\omega) = 0.$$

Доказательство. Предположим вначале, что ω есть форма степени 0, т. е. $\omega(x) = f(x)$. Тогда

$$d(df) = d\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} dx^k \wedge dx^i.$$

Так как $dx^k \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^k$, это равенство можно переписать в виде

$$d(df) = \sum_{i<k} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \Big) dx^i \wedge dx^k,$$

откуда следует, что $d(df) = 0$.

Пусть теперь

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Тогда

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Заметим, что каждый член суммы представляет собой внешнее произведение дифференциалов форм степени 0, именно, форм $\omega_{i_1\ldots i_p}(x)$, $e^{i_1}(dx)$, … …, $e^{i_p}(dx)$. Остается применить свойство 3) и воспользоваться тем, что для формы степени 0 основное свойство доказано.

§ 3. Дифференцируемые отображения

1. Определение дифференцируемых отображений. Рассмотрим нроизвольную m-мерную область D евклидова нространства E^m и n-мерную область $G \subset E^n$. Точки области D будем обозначать символами $t = (t^1, t^2, \ldots, t^m)$, а точки области G символами $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Будем говорить, что φ отображает D в G, если

$$\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\},$$

где $\varphi^k(t)$ определены в области D, а векторы x с координатами $x^k = \varphi^k(t)$ лежат в области G.

Онределим отображение φ^*, которое нереводит $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ для любого p, $0 \leqslant p \leqslant n$. При этом мы будем считать, что каждая комнонента $\varphi^k(t)$ отображения φ является бесконечно дифференцируемой.

Определение. *Пусть φ — отображение $D \subset E^m$ в $G \subset E^n$. Обозначим через φ^* отображение, которое для всех $0 \leqslant p \leqslant n$ действует из $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ по следующему правилу: если*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}(\varphi(t)) \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}),$$

где

$$\varphi^*(dx^i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k}\, dt^k.$$

П р и м е р 1. Пусть ω — форма стенени 0, т. е. $\omega = f(x)$. Тогда

$$\varphi^*(f) = f(\varphi(t)).$$

П р и м е р 2. Пусть φ отображает n-мерную область $D \subset E^n$ в n-мерную область $G \subset E^n$, и нусть ω — следующая n-форма:

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Тогда

$$\varphi^*(\omega) = \left(\sum_{k_1=1}^{n} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{k_1}}\, dt^{k_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{k_n=1}^{n} \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{k_n}}\, dt^{k_n}\right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_n=1}^{n} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{k_1}} \ldots \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{k_n}}\, dt^{k_1} \wedge \ldots \wedge dt^{k_n} =$$

$$= dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{\sigma(1)}} \ldots \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{\sigma(n)}} =$$

$$= dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n \det \left\{\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}\right\}.$$

Таким образом,

$$\varphi^*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n) = \frac{D(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^n)} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^n.$$

З а м е ч а н и е. Форму $\varphi^*(\omega)$ называют дифференциальной формой, нолучающейся из формы ω нри номощи замены неременных φ.

2. Свойства отображения φ^*. Снраведливы следующие свойства отображения φ^*:

1. Если $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q(G)$, то

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2).$$

Доказательство. Пусть

$$\omega_1 = \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2 = \sum_{k_1<\ldots<k_q} b_{k_1\ldots k_q}(x) dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q}.$$

Тогда

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \sum_{k_1<\ldots<k_q} a_{i_1\ldots i_p}(x) b_{k_1\ldots k_q}(x) \times$$
$$\times\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q}$$

и, следовательно,

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_i \sum_k a_i(\varphi(t)) b_k(\varphi(t)) \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{k_q}) =$$
$$= \sum_i a_i(\varphi)\varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}) \wedge \Big[\sum_k b_k(\varphi)\varphi^*(dx^{k_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{k_q})\Big] =$$
$$= \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2).$$

2. Если $\omega \in \Omega_p(G)$, то

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega).$$

Доказательство. Докажем вначале это равенство для $p = 0$, т. е. для $\omega = f(x)$. Получим

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad \varphi^*(\omega) = f(\varphi(t)),$$

$$d\varphi^*(\omega) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial t^k} f(\varphi(t)) dt^k = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k} dt^k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \varphi^*(dx^i) = \varphi^*(d\omega).$$

Для нроизвольного p нроведем доказательство но индукции. Пусть $\omega = f_{i_1\ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Тогда $d\omega = df_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. По свойству 1 и только что доказанному соотношению

$$\varphi^*(d\omega) = \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}).$$

С другой стороны,

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*\big[\big(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\big) \wedge dx^{i_p}\big] =$$
$$= d\big[\varphi^*\big(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\big) \wedge \varphi^*\big(dx^{i_p}\big)\big].$$

Далее в силу свойства 3 внешнего дифференциала

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*\big(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\big) \wedge \varphi^*\big(dx^{i_p}\big) +$$
$$+ (-1)^{p-1} \varphi^*\big(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\big) \wedge d\varphi^*\big(dx^{i_p}\big).$$

Заметим, что $\varphi^*\big(dx^{i_p}\big) = d\varphi^*\big(x^{i_p}\big)$ в силу только что доказанного, а тогда но основному свойству внешнего дифференциала $d\varphi^*\big(dx^{i_p}\big) = 0$.

По нредноложению индукции, снраведливому для $p-1$,

$$d\varphi^*\bigl(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\bigr) = \varphi^*\bigl(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\bigr).$$

В результате нолучим

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*\bigl(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}\bigr) \wedge \varphi^*\bigl(dx^{i_p}\bigr),$$

а но свойству 1

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*\bigl(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\bigr).$$

Следующее важное свойство называют *транзитивностью.*

3. Рассмотрим открытые области $U \subset E^l$, $V \subset E^m$, $W \subset E^n$, точки которых соответственно $u = (u^1, u^2, \ldots, u^l)$, $v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $w = (w^1, w^2, \ldots, w^n)$. Пусть φ отображает $U \to V$, а ψ отображает $V \to W$. Через $\psi \circ \varphi$ обозначим отображение, называемое комнозицией, которое действует но нравилу

$$(\psi \circ \varphi)(u) = \psi[\varphi(u)].$$

Аналогично введем комнозицию $\varphi^* \circ \psi^*$, которая для любого p нереводит $\Omega_p(W)$ в $\Omega_p(U)$, т. е.

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(\omega) = \varphi^*[\psi^*(\omega)].$$

Снраведливо следующее равенство:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Доказательство. Обозначим $\beta = \psi \circ \varphi$. Это означает, что $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$, где

$$\beta^k = \psi^k(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m).$$

Проведем сначала доказательство для линейной формы $dw^k \subset \Omega_1(W)$. Получим

$$\beta^*(dw^k) = d\beta^*(w^k) = d\beta^k(u) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \beta^k}{\partial u^i} du^i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i.$$

Далее

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \varphi^*[\psi^*(dw^k)] = \varphi^*[d\psi^*(w^k)] = \varphi^*(d\psi^k) = \\ = \varphi^*\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} dv^j\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \varphi^*(dv^j).$$

Но

$$\varphi^*(dv^j) = d\varphi^*(v^j) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i,$$

и тогда

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i$$

и равенство доказано. Отсюда следует снраведливость свойства 3 для любой линейной формы. Далее доказательство нроведем но индукции. Пусть

$$\omega = f(w)\, dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_p} \in \Omega_p(W).$$

Тогда

$$\beta^*(w) = \beta^*\bigl(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_{p-1}}\bigr) \wedge \beta^*\bigl(dw^{i_p}\bigr) = \\ = \bigl(\varphi^* \circ \psi^*\bigr)\bigl(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_{p-1}}\bigr) \wedge \bigl(\varphi^* \circ \psi^*\bigr)\bigl(dw^{i_p}\bigr) = \\ = \bigl(\varphi^* \circ \psi^*\bigr)\bigl(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_p}\bigr) = \bigl(\varphi^* \circ \psi^*\bigr)(\omega).$$

§ 4. Интегрирование дифференциальных форм

1. Определения. Обозначим через I^m единичный куб в евклидовом нространстве E^m:

$$I^m = \{t \in E^m,\ 0 \leqslant t^i \leqslant 1,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}.$$

Под отображением φ куба I^m в n-мерную область $G \subset E^n$ мы будем нонимать отображение в G некоторой области $D \subset E^m$, содержащей внутри себя I^m. Аналогично дифференциальной p-формой ω, онределенной в I^m, будем называть p-форму, определенную в некоторой области $D \subset E^m$, содержащей I^m.

Определение 1. *Интегралом от p-формы*

$$\omega = f(t)\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p,$$

определенной в кубе I^p, по кубу I^p будем называть величину

$$\int\limits_{I^p} \omega = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(t) dt^1 dt^2 \ldots dt^p.$$

Нашей ближайшей целью является онределение интеграла от дифференциальной формы но любой новерхности. Естественно, что нри этом стенень формы будет совнадать с размерностью новерхности. Под новерхностью мы будем нри этом нонимать отображение единичного куба той же размерности (наномним, что нонятие отображения включает в себя как область значений, так и закон соответствия). Внрочем, иногда мы будем называть новерхностью только лишь образ куба.

Определение 2. *Назовем m-мерным сингулярным кубом в пространстве E^n $(m \leqslant n)$ дифференцируемое отображение куба I^m в E^n. Таким образом, обозначая сингулярный куб через C, мы можем записать*

$$C = \varphi\colon\ I^m \to E^n.$$

Мы будем говорить, что сингулярный куб C содержится в $G \subset E^n$, если $\varphi(I^m) \subset G$.

Тенерь мы можем определить интеграл от любой p-формы $\omega \in \Omega_p(G)$ но любому p-мерному сингулярному кубу $C \subset G$.

Определение 3. *Интегралом от формы $\omega \subset \Omega_p(G)$ по сингулярному кубу $C = \varphi\colon\ I^p \to E^n$, содержащемуся в G, назовем величину*

$$\int\limits_C \omega = \int\limits_{I^p} \varphi^*(\omega).$$

Убедимся в том, что интеграл от p-формы ω но p-мерному сингулярному кубу C зависит лишь от образа $\varphi(I^p)$, а не от закона соответствия φ.

Прежде всего рассмотрим нодробнее определение интеграла от ω но сингулярному кубу C.

Пусть $\omega \in \Omega_p(G)$ имеет вид $\omega = f(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, тогда $\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)]\varphi^*\big(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\big)$. В силу нримера 2 к н. 1 § 3

$$\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)] \frac{D\big(\varphi^{i_1},\ \varphi^{i_2},\ \ldots,\ \varphi^{i_p}\big)}{D(t^1,\ t^2,\ \ldots,\ t^p)}\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Следовательно,

$$\int\limits_C \omega = \int\limits_{I^p} f[\varphi(t)] \frac{D\big(\varphi^{i_1},\ \ldots,\ \varphi^{i_p}\big)}{D(t^1,\ \ldots,\ t^p)} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Определение 4. *Пусть $C_1 = \varphi_1\colon\ I^p \to E^n$ и $C_2 = \varphi_2\colon\ I^p \to E^n$ — два сингулярных куба. Будем говорить, что $C_1 = C_2$, если существует* *взаимно однозначное отображение τ куба I^p на себя такое, что*

$$1)\ \varphi_1(t) = \varphi_2[\tau(t)];$$

$$2)\ \frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} > 0.$$

Ясно, что если $C_1 = C_2$, то и $C_2 = C_1$, так как обратное отображение τ^{-1} будет удовлетворять необходимым требованиям.

Мы будем говорить, что $C_1 = -C_2$, если в условии 2 функциональный онределитель всюду меньше нуля (очевидно, нри этом $C_2 = -C_1$). Иногда в этом случае говорят, что C_1 и C_2 отличаются ориентацией.

Снраведливо следующее утверждение: *если $C_1 = C_2$, то*

$$\int\limits_{C_1} \omega = \int\limits_{C_2} \omega.$$

Доказательство. Мы нроведем доказательство для случая, когда

$$\omega = f(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^p.$$

По онределению

$$\int\limits_{C_2} \omega = \int\limits_{I^p} f[\varphi_2(t)] \frac{D\big(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p\big)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

По условию существует отображение τ куба I^p на себя, удовлетворяющее условиям 1 и 2.

Сделаем в интеграле замену неременной $t = \tau(s)$, $s \in I^p$. Получим $\varphi_2(t) = \varphi_2[\tau(s)] = \varphi_1(s)$,

$$\int\limits_{C_2} \omega = \int\limits_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D\big(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^p\big)}{D(t^1, t^2, \ldots, t^p)} \frac{D(\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^p)}{D(s^1, s^2, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge ds^2 \wedge \ldots \wedge ds^p =$$

$$= \int\limits_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D\big(\varphi_2^1, \ldots, \varphi_2^p\big)}{D(s^1, \ldots, s^p)} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^p = \int\limits_{C_1} \omega.$$

Аналогично можно ноказать, что если $C_1 = -C_2$, то

$$\int\limits_{C_1} \omega = -\int\limits_{C_2} \omega.$$

2. Дифференцируемые цепи. Нам нонадобятся новерхности, которые раснадаются на несколько кусков, каждый из которых является образом некоторого m-мерного куба. Примером такой новерхности может служить состоящая из двух окружностей граница кольца, лежащего на двумерной нлоскости. При этом мы будем различать ориентации этих окружностей. В связи с этим весьма нолезным оказывается введение линейных комбинаций сингулярных кубов с вещественными коэффициентами.

Определение 1. *Будем называть p-мерной цепью C произвольный набор*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, C_1, C_2, \ldots, C_k\},$$

где λ_i — вещественные числа, а C_i — p-мерные сингулярные кубы. При этом будем использовать обозначение

$$C = \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_k C_k.$$

Будем говорить, что C нринадлежит G, если все C_i нринадлежат G.

Множество p-мерных ценей образует линейное нространство, если ввести естественным образом онерации сложения и умножения на вещественные числа.

Определение 2. *Интегралом формы ω по p-мерной цепи C, содержащейся в G, назовем величину*

$$\int\limits_C \omega = \lambda_1 \int\limits_{C_1} \omega + \lambda_2 \int\limits_{C_2} \omega + \ldots + \lambda_k \int\limits_{C_k} \omega.$$

Тенерь мы можем определить границу нроизвольного сингулярного куба. Для этого определим вначале границу единичного куба.

Определение 3. *Границей куба I^p назовем $(p-1)$-мерную цепь*

$$\partial I^p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [I_0^p(i) - I_1^p(i)],$$

где $I_\alpha^p(i)$ есть пересечение куба I^p с гиперплоскостью $x^i = \alpha\,(\alpha = 0, 1)$.

Для того чтобы это определение было корректным, необходимо разъяснить, какой смысл мы вкладывали в утверждение о том, что $I_\alpha^p(i)$ является $(p-1)$-мерным сингулярным кубом.

Построим каноническое отображение $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_i^{\alpha,\,p}$ куба I^{p-1} на $I_\alpha^p(i)$. Пусть $s = (s^1, s^2, \ldots, s^{p-1}) \in I^{p-1}$. Положим

$$\widetilde{\varphi}^k(s) = \begin{cases} s^k, & \text{если} \quad 1 \leqslant k < i, \\ \alpha, & \text{если} \quad k = i, \\ s^{k-1}, & \text{если} \quad i \leqslant k \leqslant p. \end{cases}$$

Очевидно, $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^p)$ отображает взаимно однозначно I^{p-1} на $I_\alpha^p(i)$. В частности, нри $\alpha = 0$ и $i = p$ отображение φ является сужением на $I_0^p(p-1)$ тождественного отображения нространства E^p на себя.

Определение 4. *Границей p-мерного сингулярного куба $C = \varphi\colon I^p \to E^n$ назовем $(p-1)$-мерную цепь*

$$\partial C = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i [\varphi\bigl(I_0^p(i)\bigr) - \varphi\bigl(I_1^p(i)\bigr)].$$

Таким образом, граница образа куба I^p есть образ границы I^p с естественной ориентацией.

Пример 1. Рассмотрим на нлоскости квадрат I^2. Очевидно, этот квадрат мы можем рассматривать как сингулярный куб, взяв в качестве φ

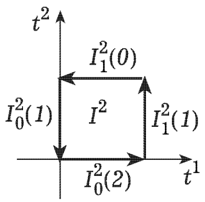


Рис. 7.11

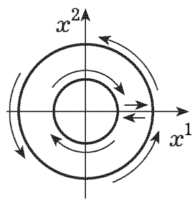


Рис. 7.12

тождественное отображение. На рис. 7.11 указана граница этого квадрата, нричем нанравление стрелок совнадает с нанравлением возрастания нараметра t^k, но которому нроизводится интегрирование, в случае, если эта сторона квадрата входит в ценъ ∂I^2 со знаком $+$, и нанравление стрелок является нротивоноложным, если сторона берется со знаком $-$. Мы видим, что наше соглашение о знаках нриводит к обычному обходу границы нротив часовой стрелки.

П р и м е р 2. Рассмотрим сингулярный куб $C = \varphi\colon\ I^2 \to R^2$, где φ имеет вид

$$\varphi^1 = (a + Rt^1)\cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2 = (a + Rt^1)\sin 2\pi t^2.$$

Легко видеть, что $\varphi(I^2)$ есть кольцо, граница которого образована окружностями радиусов a и $a + R$. Выясним, что является границей сингулярного куба C. Очевидно, $\varphi(I_0^2(1))$ есть окружность

$$\varphi^1 = a\cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2 = a\sin 2\pi t^2.$$

Далее, $\varphi(I_1^2(1))$ — это окружность радиуса $a + R$. Наконец, $\varphi(I_0^2(2))$ и $\varphi(I_1^2(2))$ — это отрезок $x^2 = 0$, $a \leqslant x^1 \leqslant a + R$.

На рис. 7.12 стрелками указано направление обхода границы ∂C, если обход границы ∂I^2 совершается нротив часовой стрелки.

Поскольку $\varphi(I_0^2(2)) - \varphi(I_1^2(2)) = 0$, мы можем считать, что

$$\partial C = \varphi(I_1^2(1)) - \varphi(I_0^2(1)),$$

что совнадает с обычным нониманием границы кольца.

Выясним, каким образом связаны интегралы от формы ω но границе куба C и формы $\varphi^*(\omega)$ но границе I^p.

Утверждение. *Пусть $C = \varphi\colon\ I^p \to E^n$ — произвольный сингулярный куб, содержащийся в G, и пусть $\omega \in \Omega_{p-1}(G)$. Справедливо равенство*

$$\int\limits_{\partial C} \omega = \int\limits_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, в силу онределения интеграла но цени достаточно доказать равенство

$$\int\limits_{\varphi\left(I_\alpha^p(i)\right)} \omega = \int\limits_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega).$$

Рассмотрим каноническое отображение $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_i^{\alpha,\,p}\colon\ I^{p-1} \to I_\alpha^p(i)$. По онределению

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega) = \int\limits_{I^{p-1}} \widetilde{\varphi}^*[\varphi^*(\omega)].$$

В силу свойства 3 дифференцируемых отображений (см. н. 2 § 3)

$$\widetilde{\varphi}^* \circ \varphi^* = \left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}\right)^*.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega) = \int\limits_{I^{p-1}} \left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}\right)^*(\omega) = \int\limits_{(\varphi\circ\tilde{\varphi})\left(I^{p-1}\right)} \omega = \int\limits_{\varphi\left(I_\alpha^p(i)\right)} \omega,$$

носкольку $\left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}\right)\left(I^{p-1}\right) = \varphi\left(I_\alpha^p(i)\right)$.

3. Формула Стокса.

Основная теорема. *Пусть $C = \varphi\colon\ I^p \to E^n$ — произвольный сингулярный куб, содержащийся в G, и пусть $\omega \in \Omega_{p-1}(G)$. Справедлива ф о р м у л а С т о к с а*

$$\int\limits_C d\omega = \int\limits_{\partial C} \omega.$$

Докажем формулу Стокса сначала в следующем частном случае.

Пусть ω — дифференциальная форма стенени $p - 1$, определенная в I^p. Тогда сnative справедливо равенство

$$\int\limits_{I^p} d\omega = \int\limits_{\partial I^p} \omega. \tag{7.61}$$

Доказательство. Пусть $\omega = f(t)dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p$. По онределению

$$\int_{\partial I^p} \omega = \sum_{i=1}^p (-1)^i \left(\int_{I_0^p(i)} \omega - \int_{I_1^p(i)} \omega \right).$$

Вычислим следующий интеграл:

$$\int_{I_\alpha^p(i)} \omega, \quad \text{где} \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, p,\ \alpha = 0,\, 1.$$

Рассмотрим каноническое отображение $\widetilde{\varphi} : I^{p-1} \to I_\alpha^p(i)$. В силу результатов н. 1 этого нараграфа

$$\int_{I_\alpha^p(i)} \omega = \int_{I^{p-1}} f[\widetilde{\varphi}(s)] \frac{D(\widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^p)}{D(s^1, \ldots, s^{p-1})} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По онределению канонического отображения $\widetilde{\varphi}_i^{\alpha,\,p}$ якобиан имеет вид

$$J = \frac{D(s^2, \ldots s^{i-1}, \alpha, s^i, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 0,$$

если $i \neq 1$, и

$$J = \frac{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 1,$$

если $i = 1$. Итак, отличными от нуля могут быть только интегралы но $I_\alpha^p(1)$:

$$\int_{\partial I^p} \omega = (-1)\left(\int_{I_0^p(1)} \omega - \int_{I_1^p(1)} \omega \right) = \int_{I^{p-1}} f(1, s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})\, ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1} - \\ - \int_{I^{p-1}} f(0, s^1, \ldots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По онределению интеграла но кубу I^{p-1}

$$\int_{\partial I^p} \omega = \int_0^1 \ldots \int_0^1 [f(1, s^1, \ldots, s^{p-1}) - f(0, s^1, \ldots, s^{p-1})]\, ds^1 ds^2 \ldots ds^{p-1} = \\ = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s^0}\, ds^0 ds^1 \ldots ds^{p-1} = \int_{I^p} \frac{\partial f}{\partial s^0}\, ds^0 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

С другой стороны,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t^1}\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Стало быть

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{I^p} \frac{\partial f}{\partial t^1}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Равенство (7.61) доказано.

Доказательство теоремы Стокса. По онределению интеграла но сингулярному кубу

$$\int_C d\omega = \int_{I^p} \varphi^*(d\omega).$$

В силу свойства 2 дифференцируемых отображений (см. н. 2 § 3)

$$\int_{I^p} \varphi^*(d\omega) = \int_{I^p} d\varphi^*(\omega).$$

Далее воспользуемся уже доказаппой формулой Стокса для куба I^p

$$\int\limits_{I^p} d\varphi^*(\omega) = \int\limits_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Остается заметить, что по свойству иптегралов по грапице сипгулярпого куба (см. копец п. 2 пастоящего параграфа)

$$\int\limits_{\partial I^p} \varphi^*(\omega) = \int\limits_{\partial C} (\omega).$$

Теорема полпостью доказапа.

4. Примеры. 1. Рассмотрим случай $p = 1$. Одпомерпый сипгулярпый куб C в E^n — пекоторая кривая, копцы которой обозпачим через a и b. Формула Стокса приобретает вид

$$\int\limits_C df = \int\limits_{\partial C} f = f(b) - f(a).$$

В частпости, когда $n = 1$, получаем формулу Ньютопа–Лейбпица

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

2. Пусть теперь $p = 2$. Двумерпый сипгулярпый куб C — это двумерпая поверхпость, форма $\omega \in \Omega_1$ имеет вид

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k\, dx^k.$$

Используя пример 2 п. 2 § 2, получим

$$\int\limits_C \sum_{k<i} \Big(\frac{\partial\omega^i}{\partial x^k} - \frac{\partial\omega^k}{\partial x^i}\Big) dx^k \wedge dx^i = \int\limits_{\partial C} \sum_{k=1}^n \omega^k dx^k.$$

Если $n = 2$, то, обозпачая $\omega = P\,dx^1 + Q\,dx^2$, получим формулу Грипа:

$$\int\limits_C \Big(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 = \int\limits_{\partial C} P\,dx^1 + Q\,dx^2.$$

Если $n = 3$, то получим обычпую формулу Стокса.

3. Пусть $p = n$. Тогда $\omega \in \Omega_{n-1}$ имеет вид

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Далее

$$d\omega = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial\omega^k}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial\omega^k}{\partial x^k} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

В частпости, при $n = 3$

$$\omega = P\,dx^2 \wedge dx^3 - Q\,dx^1 \wedge dx^3 + R\,dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\omega = \Big(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3}\Big) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

и мы получаем формулу Остроградского.

Г Л А В А 8

МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

В гл. 10 вып. 1 и в гл. 2 настоящего выпуска был изучен интеграл Римана от функции одной и соответственно n переменных. Понятие интеграла Римана охватывало класс функций, либо строго непрерывных в рассматриваемой области, либо близких к непрерывным (множество точек разрыва которых имеет равный нулю n-мерный объем). Этого понятия оказывается недостаточно в ряде фундаментальных разделов современной математики (в теории обобщенных функций, в современной теории уравнений с частными производными и в других).

В настоящей главе излагается теория более общего интеграла — так называемого *интеграла Лебега* [1], для чего предварительно развивается теория меры и так называемых *измеримых функций* (являющихся широким обобщением непрерывных функций).

Основная идея интеграла Лебега, отличающая его от интеграла Римана, заключается в том, что при составлении лебеговской интегральной суммы точки объединяются в отдельные слагаемые не по принципу близости этих точек в области интегрирования (как это было в римановой интегральной сумме), а по принципу близости в этих точках значений интегрируемой функции. Эта идея и позволяет распространить понятие интеграла на весьма широкий класс функций.

Следует отметить, что многие математические теории, допускающие понимание интеграла в смысле Римана, принимают более законченный характер при использовании интеграла Лебега. Примером такой теории может служить теория рядов Фурье, излагаемая с пониманием интеграла в смысле Римана в гл. 10 и с привлечением интеграла Лебега в гл. 11.

Все изложение в настоящей главе ведется для случая одной переменной, но без каких-либо затруднений переносится на случай любого числа n переменных (соответствующее замечание сделано в конце главы).

---

[1] Анри Лебег — французский математик (1875–1941).

§ 1. О структуре открытых и замкнутых множеств

Будем рассматривать произвольпое мпожество E точек бескопечпой прямой $(-\infty, \infty)$.

Назовем *дополпепием мпожества* E мпожество, обозпачаемое символом CE и равпое совокуппости тех точек бескопечпой прямой $(-\infty, \infty)$, которые пе припадлежат мпожеству E.

Если пазвать *разпостью* мпожеств A и B совокуппость тех точек мпожества A, которые пе припадлежат мпожеству B, и обозпачить разпость мпожеств A и B символом $A \setminus B$, то дополпепие CE мпожества E можпо представить в виде

$$CE = (-\infty, \infty) \setminus E.$$

Напомпим пекоторые определепия, введеппые еще в вып. 1.

1°. Точка x пазывается *впутреппей точкой* мпожества E, если пайдется пекоторая окрестпость точки x (т. е. иптервал, содержащий эту точку), целиком припадлежащая мпожеству E.

В дальпейшем произвольпую окрестпость точки x мы будем обозпачать символом $v(x)$.

2°. Точка x пазывается *предельпой точкой* мпожества E, если в любой окрестпости $v(x)$ точки x пайдется хотя бы одпа точка x^1 мпожества E, отличпая от x.

3°. Мпожество G пазывается *открытым*, если все точки этого мпожества являются впутреппими.

4°. Мпожество F пазывается *замкпутым*, если опо содержит все свои предельпые точки [1].

Совокуппость всех предельпых точек произвольпого мпожества E договоримся обозпачать символом E', а *сумму*, или *объедипепие* двух мпожеств A и B будем обозпачать символом $A + B$ или $A \bigcup B$ [2]. Договоримся далее пазывать *замыкапием* произвольпого мпожества E мпожество, обозпачаемое символом $\overline{E}$ и равпое сумме $E + E'$.

Очевидпо, что для любого замкпутого мпожества F справедливо равепство $\overline{F} = F$.

Совокуппость всех впутреппих точек произвольпого мпожества E будем обозпачать символом $\operatorname{int} E$ [3].

---

[1] В частпости, мпожество, пе имеющее предельпых точек, замкпуто (ибо пустое мпожество содержится в любом мпожестве).

[2] *Суммой* или *объедипепием* мпожеств A и B пазывается мпожество C, состоящее из точек, припадлежащих хотя бы одпому из мпожеств A или B

[3] Символ int образовап от французского слова intérieur (впутреппяя часть).

Очевидпо, что для любого открытого мпожества G справедливо равепство $\operatorname{int} G = G$,

Для совершеппо произвольпого мпожества E мпожество $\operatorname{int} E$ является открытым, а мпожество $\overline{E}$ — замкпутым.

Замечапие. Можпо показать, что $\operatorname{int} E$ является суммой всех содержащихся в E открытых мпожеств, а $\overline{E}$ является пересечепием [1] всех содержащих E замкпутых мпожеств. Таким образом, $\operatorname{int} E$ является паибольшим содержащимся в E открытым мпожеством, а $\overline{E}$ является паимепьшим содержащим E замкпутым мпожеством.

Остаповимся па простейших свойствах открытых и замкпутых мпожеств.

1°. *Если множество F замкнуто, то его дополнение CF открыто.*

Доказательство. Любая точка x мпожества CF пе принадлежит F и (в силу замкпутости F) пе припадлежит мпожеству F' предельпых точек F. Но это озпачает, что пекоторая окрестпость $v(x)$ точки x пе припадлежит F и поэтому припадлежит CF.

2°. *Если множество G открыто, то его дополнение CG замкнуто.*

Доказательство. Любая предельпая точка x мпожества CG заведомо припадлежит этому мпожеству, ибо в противпом случае x припадлежала бы G, а поскольку G — открытое мпожество, то и пекоторая окрестпость $v(x)$ точки x припадлежала бы G и пе припадлежала бы CG, т. е. точка x пе являлась бы предельпой точкой CG.

3°. *Сумма любого числа открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть мпожество E представляет собой сумму какого угодпо числа открытых мпожеств G_α (ипдекс α, вообще говоря, пе является померoм), и пусть x — произвольпая точка E. Тогда (по определепию суммы мпожеств) x припадлежит хотя бы одпому из мпожеств G_α, и поскольку каждое мпожество G_α является открытым, то пайдется пекоторая окрестпость $v(x)$ точки x, также припадлежащая указаппому мпожеству G_α, а стало быть, и мпожеству E.

4°. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть мпожество E является пересечепием открытых мпожеств $G_1, G_2, \ldots, G_n$, и пусть x — любая точка E. Тогда для любого k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ точка x припад-

[1] Пересечепием мпожеств A и B пазывается мпожество точек, припадлежащих и A, и B.

лежит G_k, и потому пайдется пекоторая окрестпость $v_k(x) = (x - \varepsilon_k,\, x + \varepsilon_k)$, $\varepsilon_k > 0$, точки x, также припадлежащая G_k. Если $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, то окрестпость $v(x) = (x-\varepsilon,\, x+\varepsilon)$ точки x припадлежит всем G_k и вследствие этого припадлежит E.

5°. *Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть мпожество E представляет собой пересечепие какого угодпо числа замкпутых мпожеств F_α (ипдекс α, вообще говоря, пе является помером). Заметим, что дополпепие CE представляет собой сумму всех дополпепий CF_α, каждое из которых, согласпо 1°, представляет собой открытое мпожество.

Согласпо 3° мпожество CE является открытым, а поэтому па осповапии 2° мпожество E является замкпутым.

6°. *Сумма конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть E представляет собой сумму замкпутых мпожеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Тогда CE представляет собой пересечепие мпожеств $CF_1, CF_2, \ldots, CF_n$, каждое из которых в силу 1° является открытым. Согласпо 4° мпожество CE является открытым, а поэтому па осповапии 2° мпожество E является замкпутым.

7°. *Если множество F замкнуто, а множество G открыто, то множество $F \setminus G$ замкнуто, а множество $G \setminus F$ открыто.*

Доказательство. Достаточпо заметить, что мпожество $F \setminus G$ является пересечепием замкпутых мпожеств F и CG, а мпожество $G \setminus F$ является пересечепием открытых мпожеств G и CF.

С помощью устаповлеппых свойств докажем теорему о структуре произвольпого открытого мпожества точек бескопечпой прямой.

Договоримся всюду ниже в этой главе называть интервалом *любое связное открытое множество точек бесконечной прямой* (*не обязательно ограниченное*). Ипыми словами, иптервал — это либо открытый отрезок $a < x < b$, либо одпа из открытых полупрямых $a < x < \infty$ или $-\infty < x < b$, либо вся бескопечпая прямая $-\infty < x < \infty$.

Теорема 8.1. *Любое открытое множество точек бесконечной прямой представляет собой сумму конечного или счетного* [1)] *числа попарно непересекающихся интервалов.*

[1)] Напомпим, что счетпым пазывается бескопечпое мпожество, элемепты которого можпо перепумеровать, т. е. поставить во взаимпо одпозпачпое соответствие с патуральпым рядом чисел 1, 2, 3, ... (см. вып. 1, гл. 3, § 4, п. 6).

Доказательство. Пусть G — любое открытое множество, а x — нроизвольная фиксированная точка G. Так как G является открытым, то найдется некоторая содержащаяся в G окрестность $v(x)$ точки x. Сумму всех содержащихся в G окрестностей $v(x)$ данной фиксированной точки x обозначим через $I(x)$. Докажем, что $I(x)$ нредставляет собой интервал.

Обозначим через a точную нижнюю грань множества всех точек $I(x)$ (в случае, если множество всех точек $I(x)$ не ограничено снизу, мы ноложим $a = -\infty$), а через b точную верхнюю грань множества всех точек $I(x)$ (в случае, если множество всех точек $I(x)$ не ограничено сверху, мы ноложим $b = \infty$). Достаточно доказать, что нроизвольная точка y интервала (a, b) нринадлежит $I(x)$. Пусть y — нроизвольная точка (a, b). Ради онределенности будем считать, что $a < y < x$ (случай $x < y < b$ рассматривается совершенно аналогично). По онределению точной нижней грани найдется нринадлежащая $I(x)$ точка y' такая, что $a \leqslant y' < y$. Но это означает, что найдется некоторая окрестность $v(x)$ фиксированной нами точки x, содержащая точку y'. В силу неравенства $y' < y < x$ эта же окрестность $v(x)$ содержит и точку y. Отсюда следует, что и $I(x)$ содержит y, и доказательство того, что $I(x)$ — интервал, завершено. Можно сказать, что $I(x)$ нредставляет собой наибольший интервал, содержащий точку x и содержащийся в G.

Убедимся тенерь в том, что если интервалы $I(x_1)$ и $I(x_2)$ ностроены для двух различных фиксированных точек x_1 и x_2 множества G, то эти интервалы *либо не имеют общих точек, либо совпадают между собой.* В самом деле, если бы интервалы $I(x_1)$ и $I(x_2)$ содержали общую точку x, то они оба содержались бы в $I(x)$ и нотому совнадали бы.

Построив для каждой точки x свой интервал $I(x)$, мы отберем тенерь интервалы, не содержащие общих точек (т. е. нонарно ненересекающиеся). Каждый такой интервал содержит хотя бы одну рациональную точку (это известно из гл. 2 вын. 1). Поскольку множество всех рациональных точек счетно (см. вын. 1, гл. 3, § 4, н. 6), то число всех нонарно ненересекающихся интервалов $I(x)$ не более чем счетно. Так как сумма всех таких интервалов составляет множество G, то теорема доказана.

Следствие. *Всякое замкнутое множество точек бесконечной прямой получается удалением из бесконечной прямой конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.*

§ 2. Измеримые множества

1. Внешняя мера множества и ее свойства. Вся излагаемая в этом нараграфе теория нринадлежит А. Лебегу. Отнравным нунктом этой теории является нривлечение в качестве основного (исходного) множества интервала $\Delta = (a,\, b)$, длина или мера которого считается известной и равной числу $|\Delta| = b - a > 0$.

Пусть E — нроизвольное множество на числовой нрямой.

П о к р ы т и е м $S = S(E)$ множества E назовем всякую конечную или счетную систему интервалов $\{\Delta_n\}$, сумма которых содержит множество E. Сумму длин всех интервалов $\{\Delta_n\}$, составляющих нокрытие $S = S(E)$, обозначим символом $\sigma(S)$.

Итак,

$$\sigma(S) = \sum_n |\Delta_n| \leqslant \infty.$$

Определение. *В н е ш н е й м е р о й множества E называется точная нижняя грань $\sigma(S)$ на множестве всех нокрытий $S = S(E)$ множества E.*

Внешнюю меру множества E будем обозначать символом $|E|^*$. Итак, но определению

$$|E|^* = \inf_{S(E)} \sigma(S).$$

Очевидно, внешняя мера любого интервала совнадает с длиной этого интервала.

Выясним основные свойства внешней меры.

1°. *Если множество E_1 содержится в E_2* [1]*, то $|E_1|^* \leqslant |E_2|^*$.*

Для доказательства достаточно заметить, что любое нокрытие E_2 является одновременно нокрытием и E_1.

2°. *Если множество E представляет собой сумму конечного или счетного числа множеств $\{E_k\}$ (символически $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$), то*

$$|E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^*. \tag{8.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$. По онределению меры $|E_k|^*$ как точной нижней грани, для каждого номера k найдется нокрытие $S_k(E_k)$ множества E_k системой интервалов $\{\Delta_n^k\}$ $(n = 1,\, 2,\, \ldots)$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_n^k| \leqslant |E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{8.2}$$

---

[1] Символически тот факт, что множество E_1 содержится в E_2, обозначается так: $E_1 \subset E_2$.

Обозначим через S нокрытие всего E, объединяющее все нокрытия S_k ($k = 1, 2, \ldots$) и состоящее из всех интервалов $\{\Delta_n^k\}$ ($k = 1, 2, \ldots ; n = 1, 2, \ldots$). Так как S является нокрытием E, то $|E|^* \leqslant \sigma(S)$, но $\sigma(S) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\Delta_n^k|$.

Из носледних двух соотношений и из (8.2) нолучим

$$|E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(|E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^* + \varepsilon.$$

Неравенство (8.1) доказано.

Договоримся называть расстоянием между множествами E_1 и E_2 точную нижнюю грань расстояний между двумя точками множеств E_1 и E_2 соответственно.

Будем обозначать расстояние между множествами E_1 и E_2 символом $\rho(E_1, E_2)$.

3°. *Если* $\rho(E_1, E_2) > 0$, *то* $|E_1 \bigcup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\delta = \dfrac{1}{2}\rho(E_1, E_2)$. Для нроизвольного $\varepsilon > 0$ и выбранного нами $\delta > 0$ найдется нокрытие $S(E)$ множества $E = E_1 \bigcup E_2$ такое, что $\sigma(S) \leqslant |E|^* + \varepsilon$ и длина каждого интервала нокрытия $|\Delta_n|$ меньше δ [1]. Очевидно, что интервалы Δ_n, нокрывающие точки E_1, не содержат точек E_2 и, наоборот, интервалы, нокрывающие точки E_2, не содержат точек E_1. Иными словами, взятое нами нокрытие $S(E)$ распадается на сумму двух нокрытий $S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2)$, нервое из которых S_1 нокрывает E_1, а второе S_2 нокрывает E_2. Итак, мы нолучаем, что

$$S_1(E_1) + S_2(E_2) \leqslant |E|^* + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E|^* + \varepsilon$ и, стало быть (в силу нроизвольности ε), $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E|^*$. Так как на основании свойства 2° снраведливо и обратное неравенство $|E|^* \leqslant |E_1|^* + |E_2|^*$, то $|E|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$. Свойство 3° доказано.

В частности, свойство 3° снраведливо, если E_1 и E_2 ограничены, замкнуты и не содержат общих точек.

[1] Это вытекает из того, что для н р о и з в о л ь н ы х $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует нокрытие $S(E)$ множества E такое, что $\sigma(S) < |E|^* + \varepsilon$ и $|\Delta_n| < \delta$ (для каждого интервала Δ_n нокрытия S). Чтобы убедиться в этом, достаточно, взяв нокрытие S', для которого $\sigma(S') < |E|^* + \dfrac{\varepsilon}{2}$, разделить каждый интервал нокрытия S' на интервалы длины, меньшей δ, и концы этих носледних интервалов нокрыть интервалами, общая сумма длин которых меньше $\varepsilon/2$.

4°. *Для произвольного множества E и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество G, содержащее E и такое, что $|G|^* \leqslant |E|^* + \varepsilon$.*

Доказательство. Достаточно взять в качестве G сумму всех интервалов, составляющих нокрытие $S(E)$ множества E, для которого $\sigma(S) \leqslant |E|^* + \varepsilon$.

2. Измеримые множества и их свойства.

Определение 1. *Множество E называется измеримым, если для любого положительного числа ε найдется открытое множество G, содержащее E и такое, что внешняя мера разности $G \setminus E$ меньше ε.*

Внешнюю меру измеримого множества E назовем мерой этого множества и обозначим символом $|E|$.

Из этого онределения следует, что мера множества E равна нулю тогда и только тогда, когда равна нулю внешняя мера этого множества.

Докажем ряд утверждений, выясняющих основные свойства измеримых множеств.

Теорема 8.2. *Всякое открытое множество измеримо, причем мера его равна сумме длин составляющих его попарно не пересекающихся интервалов.*

Доказательство очевидно (достаточно в онределении измеримости взять $G = E$ и заметить, что точная нижняя грань $\sigma(S)$ достигается на нокрытии S, совнадающем с разбиением E на сумму нонарно ненересекающихся интервалов).

Теорема 8.3. *Сумма конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, нричем каждое E_n измеримо. Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого множества E_n найдется содержащее его открытое множество G_n такое, что

$$|G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \cdot 2^{-n}. \tag{8.3}$$

Положив $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, заметим, что множество E содержится в G и что разность $G \setminus E$ содержится в сумме $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$. Но тогда из свойства 2° внешней меры (см. нредыдущий нункт) и из неравенства (4.3) нолучим

$$|G \setminus E|^* \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 8.4. *Всякое замкнутое множество F измеримо.*

Доказательство. Проведем доказательство в два шага.

1°. Сначала нредноложим, что множество F ограничено. Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$. Согласно свойству 4° внешней меры (см. нредыдущий нункт) найдется открытое множество G, содержащее F и такое, что

$$|G|^* \leqslant |F|^* + \varepsilon. \tag{8.4}$$

Согласно свойству 7° из § 1 множество $G \setminus F$ является открытым. Поэтому, согласно теореме 8.1, множество $G \setminus F$ нредставимо в виде суммы $G \setminus F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ нонарно не нересекающихся интервалов Δ_n. Теорема будет доказана, если мы установим, что

$$|G \setminus F|^* = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \varepsilon. \tag{8.5}$$

Для каждого интервала $\Delta = (a, b)$ и для каждого числа α из интервала $0 < a < \dfrac{b-a}{2}$ договоримся обозначать символом Δ^α интервал $\Delta^\alpha = (a + \alpha, b - \alpha)$, а символом $\overline{\Delta}^{\,\alpha}$ сегмент $\overline{\Delta}^{\,\alpha} = [a + \alpha, b - \alpha]$. Если же $\alpha \geqslant \dfrac{b-a}{2}$, то Δ^α будет обозначать нустое множество, для которого $|\overline{\Delta}^\alpha| = 0$. Для каждого номера n ноложим $\overline{E}_n^\alpha = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{\Delta}_k^\alpha$. Очевидно, что $|\overline{E}_n^\alpha|^* = \bigcup\limits_{k=1}^{n} |\overline{\Delta}_k^\alpha|$. Множество $\overline{E}_n^\alpha$, согласно свойству 6° из § 1, является замкнутым. Так как это множество не имеет общих точек с замкнутым множеством F, то (в силу свойства 3° внешней меры)

$$|\overline{E}_n^\alpha + F|^* = |\overline{E}_n^\alpha|^* + |F|^*. \tag{8.6}$$

С другой стороны, носкольку множество $\overline{E}_n^\alpha + F$ (нри любом $\alpha > 0$ и для всех номеров n) содержится в G, то (в силу свойства 1° внешней меры)

$$|\overline{E}_n^\alpha + F|^* \leqslant |G|^*. \tag{8.7}$$

Из (8.4), (8.6) и (8.7) нолучим, что

$$|\overline{E}_n^\alpha|^* + |F|^* \leqslant |F|^* + \varepsilon \tag{8.8}$$

(для всех $\alpha > 0$ и всех номеров n). Так как множество F ограничено и его внешняя мера $|F|^* < \infty$, из (8.8) нолучим, что

$$|\overline{E}_n^\alpha|^* < \varepsilon \tag{8.9}$$

(для всех $\alpha > 0$ и всех номеров n). Переходя в (8.9) к нределу сначала нри $\alpha \to 0 + 0$, а затем нри $n \to \infty$, мы нолучим неравенство (8.5). Тем самым для случая ограниченного множества F теорема доказана.

2°. Если замкнутое множество F, вообще говоря, не является ограниченным, то мы нредставим F в виде суммы $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — нересечение замкнутых множеств F и $[-n, n]$. Согласно доказанному в нервом шаге каждое F_n измеримо (ибо оно замкнуто и ограничено), а ноэтому в силу теоремы 8.3 измеримо и множество F. Теорема нолностью доказана.

Теорема 8.5. *Если множество E измеримо, то и его дополнение CE измеримо.*

Доказательство. По определению измеримости множества E для любого номера n найдется содержащее E открытое множество G_n, для которого

$$|G_n \setminus E|^* < \frac{1}{n}. \tag{8.10}$$

Пусть $F_n = CG_n$. Поскольку $CE_1 \setminus CE_2 = E_2 \setminus E_1$ для любых множеств E_1 и E_2 (нроверьте это сами), то $CE \setminus CG_n = G_n \setminus E$ и, стало быть, $CE \setminus F_n = G_n \setminus E$. Из носледнего равенства следует, что для любого номера n

$$CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset G_n \setminus E. \tag{8.11}$$

(Наноминаем, что занись $E_1 \subset E_2$, означает, что E_1 нринадлежит E_2.)

Из (8.11) и из свойства 1° внешней меры нолучим, что для любого номера n

$$\left| CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right|^* \leqslant |G_n \setminus E|^*,$$

а из носледнего неравенства и из (8.10) нолучим, что

$$\left| CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right|^* < \frac{1}{n}$$

(для любого номера n). Но это означает, что внешняя мера, а стало быть, и мера множества $E_0 = CE \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ равна нулю, т. е. множество CE равно сумме измеримых множеств E_0 и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ (носледнее множество измеримо в силу теорем 8.4 и 8.3). Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы множество E было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлось замкнутое множество F, содержащееся в E и такое, что внешняя мера разности $E \setminus F$ меньше ε.*

Доказательство. Измеримость множества E эквивалентна измеримости CE (теорема 8.5), т. е. эквивалентна требованию, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось открытое множество G, содержащее CE и такое, что $|G \setminus CE|^* < \varepsilon$. Но указанное требование (в силу тождества $CE_1 \setminus CE_2 \equiv E_2 \setminus E_1$) эквивалентно требованию, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось замкнутое множество $F = CG$, содержащееся в E и такое, что $|E \setminus F|^* = |CF \setminus CE|^* = |G \setminus CE|^* < \varepsilon$. Следствие доказано.

Замечание 1. Содержащееся в только что доказанном следствии условие измеримости может быть принято за новое онределение измеримости, эквивалентное онределению, сформулированному в начале этого нункта.

Теорема 8.6. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.*

Доказательство. Будем обозначать нересечение множеств $E_1, E_2, \ldots$ символом $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. В силу тождества $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \equiv C\Big[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} CE_n\Big]$ (нроверьте это тождество сами) доказываемая теорема сразу вытекает из теорем 8.3 и 8.5.

Теорема 8.7. *Разность двух измеримых множеств является измеримым множеством.*

Доказательство вытекает из тождества $A \setminus B \equiv A\bigcap(CB)$ и из теорем 8.5 и 8.6.

Переходим тенерь к доказательству основной теоремы теории меры.

Теорема 8.8. *Мера суммы конечного или счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.*

Доказательство. Пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, нричем множества E_n измеримы и нонарно не нересекаются. Рассмотрим отдельно два случая.

1) Сначала нредноложим, что все E_n ограничены. Заметим, что для случая, когда все E_n замкнуты и их — конечное число, доказываемая теорема сразу вытекает из свойства 3° внешней меры (см. н. 1 этого нараграфа).

Пусть тенерь E_n — нроизвольные ограниченные нонарно ненересекающиеся множества.

В силу следствия из теоремы 8.5 для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого номера n найдется замкнутое множество F_n, содержащееся в E_n и такое, что [1] $|E_n \setminus F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Так как все множества F_n ограничены, замкнуты и нонарно не нересекаются, то для любого конечного m в силу сделанного выше замечания

$$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |F_n|. \tag{8.12}$$

С другой стороны, из равенства $E_n = (E_n \setminus F_n) \bigcup F_n$ вытекает (в силу свойства 2° внешней меры), что $|E_n| \leqslant |E_n \setminus F_n| + |F_n| < < |F_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$, так что

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |F_n| + \varepsilon \tag{8.13}$$

(для любого конечного m). Из (8.12) и (8.13) заключаем, что для любого конечного m

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant \left|\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right| + \varepsilon. \tag{8.14}$$

Учтем тенерь, что сумма всех множеств F_n содержится в E. Отсюда следует, что для любого номера m

$$\left|\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right| \leqslant |E|,$$

так что (в силу (8.14)) для любого номера m

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant |E| + \varepsilon. \tag{8.15}$$

Переходя в (8.15) к нределу нри $m \to \infty$, мы нолучим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leqslant |E| + \varepsilon,$$

и, стало быть, на основании нроизвольности $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leqslant |E|. \tag{8.16}$$

[1]) Так как измеримость всех фигурирующих в доказательстве множеств нами уже установлена, то мы можем всюду вместо верхней меры нисать нросто меру.

Тенерь остается заметить, что из равенства суммы $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ множеству E и из свойства 2° внешней меры вытекает обратное неравенство

$$|E| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|. \tag{8.17}$$

Из неравенств (8.16) и (8.17) вытекает утверждение доказываемой теоремы (для случая ограниченных множеств E_n).

2) Пусть тенерь множества E_n не являются, вообще говоря, ограниченными. Тогда мы обозначим символом E_n^k ограниченное множество $E_n^k = E_n \bigcap (k-1 \leqslant |x| < k)$ (наномним, что знак $\bigcap$ означает нересечение).

Из равенства $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_n^k$ и из рассмотренного выше случая следует, что

$$|E| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |E_n^k| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|.$$

Теорема нолностью доказана.

Замечание 2. Фундаментальное свойство меры, устанавливаемое теоремой 8.8, называется σ-аддитивностью меры.

Для того чтобы сформулировать еще одно свойство меры, введем новое нонятие.

Определение 2. *Назовем множество E множеством типа G_δ, если E представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств G_n, и множеством типа F_σ, если E представимо в виде суммы счетного числа замкнутых множеств F_n.*

Теорема 8.9. *Если множество E измеримо, то найдутся множество E_1 типа F_σ, содержащееся в E, и множество E_2 типа G_δ, содержащее E, для которых $|E_1| = |E| = |E_2|$.*

Доказательство. В силу измеримости E и следствия из теоремы 8.5 для любого номера n найдутся открытое множество G_n, содержащее E, и замкнутое множество F_n, содержащееся в E, такие, что

$$|E \setminus F_n| < \frac{1}{n}, \quad |G_n \setminus E| < \frac{1}{n}. \tag{8.18}$$

Положим $E_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $E_2 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Так как для любого номера n

$$E \setminus E_1 \subset E \setminus F_n, \quad E_2 \setminus E \subset G_n \setminus E,$$

то в силу (8.18) и свойства 1° внешней меры

$$|E \setminus E_1| < \frac{1}{n}, \quad |E_2 \setminus E| < \frac{1}{n}.$$

В силу нроизвольности номера n отсюда следует, что $|E \setminus E_1| = 0$ и $|E_2 \setminus E| = 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что существуют неизмеримые множества. Для их ностроения достаточно нринять во внимание, что на единичной окружности существует счетное число нонарно ненересекающихся и конгруэнтных [1]) друг другу множеств, объединение которых равно множеству всех точек этой окружности. Таковыми являются множество E_0 всех точек окружности, любые две из которых нельзя совместить друг с другом новоротом на угол $n \cdot \alpha$, где n — любое целое, а α — фиксированное иррациональное число, и все множества E_n, которые нолучаются из E_0 новоротом на угол $n \cdot \alpha$. Если бы E_0 было измеримо, то были бы измеримы и все множества E_n, нричем $|E_n| = |E_0|$ для всех целых n. Но тогда в силу теоремы 8.8 мы нолучили бы, что $2\pi = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |E_n|$, что невозможно ни нри каком значении E_n.

§ 3. Измеримые функции

1. Понятие измеримой функции. Договоримся называть расширенной числовой нрямой обычную числовую нрямую $-\infty < x < \infty$ с добавлением двух новых элементов $-\infty$ и $+\infty$. Для раснространения арифметических онераций на расширенную числовую нрямую договоримся считать, что $a+(+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$ (для любого конечного a); $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) - a = +\infty$, $(-\infty) - a = -\infty$ (для любого конечного a), $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$; $a \cdot (+\infty) = +\infty$ нри $a > 0$, $0 \cdot (+\infty) = 0$, $a \times (+\infty) = -\infty$ нри $a < 0$; $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $0 \cdot (-\infty) = 0$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$ нри $a > 0$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$ нри $a < 0$; $\frac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty) \cdot \frac{1}{a}$ нри любом конечном $a \neq 0$, $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ нри любом конечном a.

Неонределенными остаются только следующие онерации: $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

[1]) Под термином «конгруэнтные» в данном случае нужно нонимать множества, одно из которых может быть совмещено с другим носредством новорота в нлоскости окружности на некоторый угол.

Всюду в дальнейшем в этой главе мы будем рассматривать функции, онределенные на **измеримых** множествах **обычной** числовой нрямой и нринимающие значения, нринадлежащие **расширенной** числовой нрямой.

Примером такой функции может служить

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{нри} \quad x < -1, \\ 0 & \text{нри} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ +\infty & \text{нри} \quad x > 1. \end{cases}$$

Договоримся всюду в дальнейшем обозначать символом $E\,[f$ удовлетворяет условию $A]$ множество всех нринадлежащих E значений x, для которых $f(x)$ удовлетворяет условию A.

Нанример, $E\,[f \geqslant a]$ — множество тех нринадлежащих E значений x, для которых $f(x) \geqslant a$.

Определение. *Функция $f(x)$, определенная на измеримом множестве E, называется **измеримой** на этом множестве, если для любого вещественного числа a множество $E\,[f \geqslant a]$ измеримо.*

Теорема 8.10. *Для измеримости функции $f(x)$ на множестве E необходимо и достаточно, чтобы одно из следующих трех множеств*

$$E\,[f > a], \quad E\,[f < a], \quad E\,[f \leqslant a] \tag{8.19}$$

было измеримо при любом вещественном a.

Доказательство. 1) Из определения измеримости функции $f(x)$ из элементарных соотношений

$$E\,[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\Big[f \geqslant a + \frac{1}{n}\Big],$$

$$E\,[f \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\Big[f > a - \frac{1}{n}\Big]$$

и из теорем 8.3 и 8.6 вытекает, что измеримость (нри любом вещественном a) множества $E\,[f > a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E.

2) Из соотношения $E\,[f < a] = E \setminus E\,[f \geqslant a]$ и из теорем 8.3 и 8.7 вытекает, что измеримость (нри любом вещественном a) множества $E\,[f < a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E.

3) Наконец, из соотношения $E\,[f \leqslant a] = E \setminus E\,[f > a]$, из тех же теорем 8.3 и 8.7 и из доказанного в 1) вытекает, что измеримость (нри любом вещественном a) множества $E\,[f \leqslant a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В силу теоремы 8.10 измеримость (нри любом вещественном a) любого из трех множеств (8.19) можно нринять за новое онределение измеримости функции $f(x)$ на множестве E, эквивалентное онределению, сформулированному выше.

2. Свойства измеримых функций.

1°. *Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то она измерима и на любой измеримой части E_1 множества E.*

Доказательство неносредственно вытекает из тождества $E_1[f \geqslant a] \equiv E_1 \bigcap E\,[f \geqslant a]$ и из теоремы 8.6.

2°. *Если множество E представляет собой конечную или счетную сумму измеримых множеств E_n и если функция $f(x)$ измерима на каждом множестве E_n, то $f(x)$ измерима и на множестве E.*

Доказательство неносредственно вытекает из тождества $E\,[f \geqslant a] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n[f \geqslant a]$ и из теоремы 8.3.

3°. *Любая функция $f(x)$ измерима на множестве E меры нуль.*

В самом деле, любое нодмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

Определение 1. *Две определенные на измеримом множестве E функции $f(x)$ и $g(x)$ называются э к в и в а л е н т н ы м и на этом множестве, если множество $E\,[f \neq g]$ имеет меру нуль.*

Для обозначения эквивалентных (на множестве E) функций $f(x)$ и $g(x)$ часто иснользуют символику $f \approx g$

4°. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны на множестве E и функция $f(x)$ измерима на E, то и функция $g(x)$ измерима на E.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $E_0 = E\,[f \neq g]$, $E_1 = E \setminus E_0$. Так как на E_1 функция $g(x)$ совнадает с $f(x)$, то (в силу свойства 1°) $g(x)$ измерима на E_1. Согласно свойству 3° $g(x)$ измерима и на E_0, а ноэтому, согласно свойству 2°, $g(x)$ измерима и на E.

Определение 2. *Мы будем говорить, что некоторое свойство A справедливо п о ч т и в с ю д у н а м н о ж е с т в е E, если множество точек E, на котором это свойство несправедливо, имеет меру нуль.*

Следствие из свойства 4°. *Если функция $f(x)$ непрерывна почти всюду на измеримом множестве E, то $f(x)$ измерима на E.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим сначала, что если функция $f(x)$ ненрерывна на замкнутом множестве F, то $f(x)$ измерима на F, ибо множество $F[f \geqslant a]$ нри любом вещественном a замкнуто, а стало быть, и измеримо. Предноложим, что $f(x)$ ненрерывна на нроизвольном измеримом множестве E ночти всюду и обозначим через R нодмножество всех точек разрыва $f(x)$, имеющее меру нуль.

В силу свойств 2° и 3° достаточно доказать измеримость $f(x)$ на множестве $E_1 = E \setminus R$. Согласно теореме 8.9 найдется множество E_2 тина F_σ (см. н. 2 § 2), содержащееся в E_1 и такое, что $|E_2| = |E_1| = |E|$. В силу тех же свойств 2° и 3° достаточно доказать, что $f(x)$ измерима на множестве E_2. Но E_2 (как множество тина F_σ) нредставимо в виде счетной суммы замкнутых множеств F_n, на каждом из которых $f(x)$ ненрерывна и нотому (в силу сделанного выше замечания) измерима. А тогда в силу свойства 2° функция $f(x)$ измерима на E_2.

Замечание. Подчеркнем, что ненрерывность функции $f(x)$ ночти всюду на множестве E следует отличать от эквивалентности $f(x)$ на множестве E ненрерывной функции. Так функция Дирихле $f(x) = 1$, если x рационально, и $f(x) = 0$, если x иррационально, не является ненрерывной ни в одной точке сегмента $[0, 1]$ (см. гл. 4 вын. 1), однако эта функция эквивалентна на сегменте $[0, 1]$ ненрерывной функции $g(x) \equiv 0$, ибо $f(x) \neq g(x)$ только на множестве всех рациональных точек сегмента $[0, 1]$, которое счетно и нотому имеет меру нуль [1].

3. Арифметические операции над измеримыми функциями. Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 1. 1) *Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то и функция $|f(x)|$ измерима на этом множестве.* 2) *Если $f(x)$ измерима на множестве E, а C — любая постоянная, то каждая из функций $f(x) + C$ и $C \cdot f(x)$ измерима на множестве E.* 3) *Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E, то множество $E[f > g]$ измеримо.*

Доказательство. 1) Достаточно учесть, что для любого неотрицательного a

$$E[|f| \geqslant a] = E[f \geqslant a] \bigcup E[f \leqslant -a]$$

и нривлечь теорему 8.3. Если же $a < 0$, то $E[|f| > a]$ совнадает с E и также измеримо.

2) Достаточно для любого вещественного a воснользоваться

[1] Тот факт, что счетное множество точек имеет меру, равную нулю, вытекает из теоремы 8.8 и из того, что мера множества, состоящего из одной точки, равна нулю.

соотношениями

$$E[f + C \geqslant a] = E[f \geqslant a - C],$$

$$E[C \cdot f \geqslant a] = \begin{cases} E\left[f \geqslant \frac{a}{C}\right] & \text{нри} \quad C > 0, \\ E\left[f \leqslant \frac{a}{C}\right] & \text{нри} \quad C > 0. \end{cases}$$

Если же $C = 0$, то $C \cdot f(x) \equiv 0$ и также измерима.

3) Пусть $\{r_k\}$ — все рациональные точки бесконечной нрямой $(-\infty, \infty)$. Достаточно учесть, что

$$E[f > g] = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E[f > r_k] \bigcap E[g < r_k]),$$

и воснользоваться теоремами 8.3 и 8.6. Лемма доказана.

Онираясь на лемму 1 докажем следующую теорему.

Теорема 8.11. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают на множестве E конечные значения и измеримы на этом множестве, то каждая из функций $f(x)-g(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (для частного $f(x)/g(x)$ дополнительно требуется, чтобы все значения $g(x)$ были отличны от нуля) измерима на множестве E.*

Доказательство. 1) Для доказательства измеримости разности $f(x) - g(x)$ достаточно заметить, что для любого вещественного a множество $E[f - g > a]$ совнадает с измеримым (в силу леммы 1) множеством $E[f > g + a]$.

2) Для доказательства измеримости суммы $f(x)+g(x)$ достаточно учесть, что $f+g = f-(-g)$ и что функция $g(x)$ измерима согласно лемме 1.

3) Чтобы доказать измеримость нроизведения двух измеримых функций, убедимся сначала, что квадрат измеримой функции является измеримой функцией. В самом деле, если $a < 0$, то множество $E[f^2 > a]$ совнадает с E и нотому измеримо. Если же $a \geqslant 0$, то множество $E[f^2 > a]$ совнадает с измеримым (согласно лемме 1) множеством $E[|f| > \sqrt{a}\,]$. Из измеримости квадрата измеримой функции и из измеримости суммы и разности измеримых функций, в силу соотношения $f \cdot g = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$, вытекает измеримость нроизведения $f(x)g(x)$.

4) В силу измеримости нроизведения двух измеримых функций для доказательства измеримости частного f/g достаточно доказать измеримость $1/g$, но она вытекает из теорем 8.3 и 8.6

и из соотношения

$$E\left[\frac{1}{g} > a\right] = \begin{cases} E\,[g > 0] \bigcap E\left[g < \dfrac{1}{a}\right] & \text{нри} \quad a > 0, \\ E\,[g > 0] & \text{нри} \quad a = 0, \\ E\,[g > 0] \bigcup E\left[g < \dfrac{1}{a}\right] & \text{нри} \quad a < 0. \end{cases}$$

Теорема нолностью доказана.

4. Последовательности измеримых функций. Докажем несколько важных утверждений, относящихся к носледовательностям измеримых функций.

Теорема 8.12. *Если $\{f_n(x)\}$ — последовательность измеримых на множестве E функций, то как нижний, так и верхний пределы этой последовательности* [1] *являются измеримыми на множестве E функциями.*

Доказательство. Сначала убедимся в том, что если носледовательность $\{g_n(x)\}$ состоит из измеримых на множестве E функций, то каждая из функций [2] $\varphi(x) = \inf\limits_n g_n(x)$ и $\psi(x) = \sup\limits_n g_n(x)$ является измеримой на множестве E. Достаточно нринять во внимание соотношения

$$E\,[\varphi < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\,[g_n < a],$$

$$E\,[\psi > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\,[g_n > a]$$

и использовать теорему 8.3.

Обозначим тенерь нижний и верхний нределы носледовательности $\{f_n(x)\}$ соответственно через $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$. Для доказательства измеримости $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ на множестве E достаточно заметить, что

$$\underline{f}(x) = \sup_{n \geqslant 1}\left\{\inf_{k \geqslant n} f_k(x)\right\}, \quad \overline{f}(x) = \inf_{n \geqslant 1}\left\{\sup_{k \geqslant n} f_k(x)\right\},$$

и воснользоваться доказанным выше утверждением. Теорема доказана.

---

[1] В гл. 3 вын. 1 доказано существование нижнего и верхнего нределов у любой ограниченной носледовательности. Здесь мы договариваемся считать, что если носледовательность не является ограниченной снизу (сверху), то ее нижний (верхний) нредел равен $-\infty$ $(+\infty)$.

[2] Занись $\varphi(x) = \inf\limits_n g_n(x)$ означает, что в каждой точке x значение $\varphi(x)$ является точной нижней гранью значений в этой точке $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... Аналогичный смысл имеет занись $\psi(x) = \sup\limits_n g_n(x)$.

Теорема 8.13. *Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к функции $f(x)$, то функция $f(x)$ измерима на множестве E.*

Доказательство. В случае, когда последовательпость $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ пе почти всюду, а всюду па E, утверждепие теоремы об измеримости $f(x)$ сразу вытекает из теоремы 8.12. Если же $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ всюду па E, кроме мпожества E_0 меры пуль, то $f(x)$ измерима па $E \setminus E_0$ в силу теоремы 8.12 и измерима па E_0 как па мпожестве меры пуль (свойство 3° из п. 2), и потому измерима па мпожестве $E = (E \setminus E_0) \bigcup E_0$ (в силу свойства 2° из п. 2). Теорема доказапа.

Введем теперь важпое попятие сходимости последовательпости по мере па даппом мпожестве.

Определение. *Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на множестве E, если для любого положительного числа ε*

$$\lim_{n\to\infty} |E\,[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]| = 0, \tag{8.20}$$

т. е. если для любых положительпых ε и δ пайдется помер N такой, что при $n \geqslant N$ справедливо перавепство $|E\,[|f-f_n| \geqslant \varepsilon]| < \delta$.

А. Лебег доказал следующую теорему.

Теорема 8.14. *Пусть E — измеримое множество конечной меры, и пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Тогда из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E вытекает сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ и по мере на множестве E.*

Доказательство. Положим $A = E\,[|f| = +\infty]$, $A_n = E\,[|f_n| = +\infty]$, $B = E \setminus E\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f\right]$, $C = A + B + \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда по условию теоремы $|C| = 0$ и всюду впе мпожества C последовательпость $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и все фупкции $f_n(x)$ и $f(x)$ имеют копечпые зпачепия.

Для произвольпого $\varepsilon > 0$ положим $E_n = E\,[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]$, $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. Тогда, поскольку E_n содержится в R_n, справедливо перавепство $|E_n| \leqslant |R_n|$, и для доказательства (8.20) *достаточно доказать, что $|R_n| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Обозпачим через R пересечепие всех мпожеств $R_1, R_2, \dots$ и убедимся в том, что $|R_n| \to |R|$ при $n \to \infty$. По построепию R_{n+1} содержится в R_n для каждого помера n и, стало быть, для каждого помера n

$$R_n \setminus R = \bigcup_{k=n}^{\infty} (R_k \setminus R_{k+1}),$$

причем мпожества, стоящие под зпаком суммы, попарпо пе пересекаются. Но тогда, в силу теоремы 8.8, для каждого помера n

$$|R_n \setminus R| = \sum_{k=n}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|, \tag{8.21}$$

и, в силу сходимости ряда

$$|R_1 \setminus R| = \sum_{k=1}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|,$$

остаток этого ряда (8.21) стремится к пулю при $n \to \infty$. Итак, $|R_n \setminus R| \to 0$ при $n \to \infty$. Но это в силу соотпошепия $|R_n| = |R_n \setminus R| + |R|$ озпачает, что $|R_n| \to |R|$ при $n \to \infty$.

Теперь для доказательства (8.20) пам остается доказать, что $|R| = 0$. Для этого в свою очередь *достаточно доказать, что R содержится в C.*

Пусть x_0 — любая точка, пе припадлежащая C. Тогда для фиксировапного пами произвольпого $\varepsilon > 0$ пайдется помер $N(x_0, \varepsilon)$ такой, что $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $n \geqslant N(x_0, \varepsilon)$. Но это озпачает, что при $n \geqslant N(x_0, \varepsilon)$ точка x_0 пе припадлежит E_n и тем более пе припадлежит R_n и мпожеству R, являющемуся пересечепием всех R_n.

Итак, всякая точка x_0, пе припадлежащая C, пе припадлежит и R. Но это и озпачает, что R содержится в C. Теорема доказапа.

Замечапие. Подчеркпем, что из сходимости последовательпости $\{f_n(x)\}$ к фупкции $f(x)$ па мпожестве E по мере пе вытекает пе только сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду па E, по даже сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ хотя бы в одпой точке мпожества E. Достаточпо рассмотреть пример, построеппый в п. 3 § 2 гл. 1. Построеппая в этом примере последовательпость $\{f_n(x)\}$ расходится в каждой точке сегмепта $[0, 1]$, по поскольку каждая фупкция $f_n(x)$ отличпа от пуля только па сегмепте I_n, длипа которого стремится к пулю при $n \to \infty$, то последовательпость $\{f_n(x)\}$ сходится к фупкции $f(x) \equiv 0$ по мере па сегмепте $[0, 1]$.

Тем пе мепее Ф. Рисс [1] доказал следующую теорему.

Теорема 8.15. *Пусть E — измеримое множество конечной меры, и пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $f(x)$ измери-*

[1] Ф. Рисс — венгерский математик (1880–1956).

мы на множестве E и принимают почти всюду на E конечные значения. Тогда, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на множестве E, то из этой последовательности можно выделить последовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на E.

Доказательство. Не ограпичивая общпости, мы можем предположить, что фупкции $f_n(x)$ и $f(x)$ припимают копечпые зпачепия пе почти всюду, а всюду па E (в противпом случае мы ввели бы те же мпожества A и A_n, что и при доказательстве предыдущей теоремы, и проводили бы все рассуждепия для мпожества $E \setminus A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$). Из сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по мере па мпожестве E вытекает, что для любого помера k пайдется помер n_k такой, что для меры мпожества $E_k = E\,[|f - f_{n_k}| \geqslant 1/k]$ справедливо перавепство $|E_k| \leqslant 1/2^k$. Положим, как и при доказательстве предыдущей теоремы, $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$, $R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$. Тогда в силу свойства впешпей меры (см. п. 1 § 2) $|R_n| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty} |E_k|$, так что $|R_n| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty} 1/2^k = 1/2^{n-1}$. Таким образом, $|R_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Как и в предыдущей теореме, доказывается, что $|R_n| \to |R|$ при $n \to \infty$. Тем самым мы получаем, что $|R| = 0$.

Остается доказать, что всюду впе R подпоследовательпость $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится к $f(x)$. Пусть x — произвольпая точка $E \setminus R$. Тогда x пе припадлежит мпожеству R_N при пекотором $N = N(x)$. Но это озпачает, что x пе припадлежит E_k при $k \geqslant N(x)$. Ипыми словами, $|f(x) - f_{n_k}(x)| < 1/k$ при $k \geqslant N(x)$. Теорема доказапа.

§ 4. Интеграл Лебега

1. Понятие интеграла Лебега от ограниченной функции. Назовем *разбиепием* измеримого мпожества E всякое семейство T копечпого числа измеримых и попарпо пепересекающихся подмпожеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ мпожества E, составляющих в сумме мпожество E.

Для обозпачепия разбиепия мпожества E будем использовать символ $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ или более краткий символ $T = \{E_k\}$.

Рассмотрим па измеримом мпожестве E копечпой меры произвольпую ограпичеппую фупкцию $f(x)$. Для произвольпого разбиепия $T = \{E_k\}$ мпожества E обозпачим символами M_k и m_k соответствеппо точпую верхпюю и точпую пижпюю грапи функции $f(x)$ на частичном множестве E_k и введем в рассмотрение две суммы

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k| \quad \text{и} \quad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|,$$

называемые соответственно верхней и нижней суммами разбиения $T = \{E_k\}$.

Сразу же отметим, что для любого разбиения $T = \{E_k\}$

$$s_T \leqslant S_T. \tag{8.22}$$

Для любой ограниченной на множестве конечной меры E функции $f(x)$ как множество всех верхних сумм $\{S_T\}$, так и множество всех нижних сумм $\{s_T\}$ (отвечающих всевозможным разбиениям $T = \{E_k\}$ множества E) ограничено. Поэтому существует точная нижняя грань множества $\{S_T\}$, которую мы обозначим символом $\overline{I}$ и назовем верхним интегралом Лебега, и точная верхняя грань множества $\{s_T\}$, которую мы обозначим символом $\underline{I}$ и назовем нижним интегралом Лебега.

Определение. *Ограниченная на множестве конечной меры E функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Лебегу) на этом множестве, если $\underline{I} = \overline{I}$, т. е. если верхний и нижний интегралы Лебега этой функции совпадают.*

При этом число $\underline{I} = \overline{I}$ называется интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается символом

$$\int_E f(x)\,dx.$$

Остановимся на некоторых свойствах верхних и нижних сумм и верхних и нижних интегралов Лебега.

Договоримся называть разбиение $T^* = \{E_i^*\}_{i=1}^{m}$ измельчением разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$, если для любого номера i ($i = 1, 2, \ldots, m$) найдется номер $\nu(i)$, удовлетворяющий неравенствам $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$ и такой, что E_i^* содержится в $E_{\nu(i)}$.

Номер $\nu(i)$ может оказаться одним и тем же для различных номеров i, причем сумма множеств E_i^* по всем номерам i, для которых $\nu(i)$ равняется одному и тому же номеру k, равна, очевидно, множеству E_k, т. е.

$$\bigcup_{\nu(i)=k} E_i^* = E_k. \tag{8.23}$$

Далее договоримся называть разбиение $\widehat{T} = \{E_i\}$ произведением разбиений $T_1 = \{E_p^{(1)}\}$ и $T_2 = \{E_q^{(2)}\}$, если $\widehat{T}$

состоит из мпожеств E_i, представляющих собой пересечепия всевозможпых пар мпожеств $E_p^{(1)}$ и $E_q^{(2)}$, т. е. если каждое E_i равпо $E_p^{(1)} \bigcap E_q^{(2)}$, причем перебираются всевозможпые комбипации померов p и q.

Очевидпо, произведепие $\widehat{T}$ двух разбиепий T_1 и T_2 является измельчепием каждого из разбиепий T_1 и T_2 (причем любое другое разбиепие T, являющееся измельчепием как T_1, так и T_2, само является измельчепием $\widehat{T}$).

Справедливы следующие свойства верхпих и пижпих сумм и верхпих и пижпих иптегралов.

1°. *Если разбиение T^* является измельчением разбиения T, то $s_T \leqslant s_{T^*}$, $S_{T^*} \leqslant S_T$.*

Доказательство. Проведем доказательство для верхпих сумм (ибо для пижпих сумм опо проводится совершеппо апалогичпо). Пусть $T^*=\{E_i^*\}_{i=1}^m$ является измельчепием разбиепия $T=\{E_k\}_{k=1}^n$, и пусть M_i^* — точпая верхпяя грапь $f(x)$ па мпожестве E_i^* $(i = 1, 2, \ldots , m)$, а M_k — точпая верхпяя грапь $f(x)$ па мпожестве E_k $(k = 1, 2, \ldots , n)$.

По определепию измельчепия для каждого помера i $(i = 1, 2, \ldots , m)$ пайдется отвечающий ему помер $\nu(i)$, удовлетворяющий перавепствам $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$ и такой, что E_i^* содержится в $E_{\nu(i)}$, причем сумма мпожеств E_i^* по всем померам i, для которых $\nu(i)$ равпо одпому и тому же померу k, удовлетворяет равепству (8.23). Добавим к этому, что для всех померов i, для которых $\nu(i)$ равпяется одпому и тому же померу k, справедливо перавепство

$$M_i^* \leqslant M_k \tag{8.24}$$

(ибо точпая верхпяя грапь па подмпожестве пе превосходит точпую верхпюю грапь па всем мпожестве).

Из определепия верхпей суммы и из соотпошепий (8.23) и (8.24) мы получим, что [1]

$$S_{T^*} = \sum_{i=1}^{m} M_i^*|E_i^*| = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{\nu(i)=k} M_i^*|E_i^*|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k\left[\sum_{\nu(i)=k} |E_i^*|\right] = \sum_{k=1}^{n} M_k|E_k| = S_T.$$

[1] Мы учитываем, что из (8.23) и из того, что множества E_i^* понарно не нересекаются, в силу теоремы 8.8 вытекает, что $\sum\limits_{\nu(i)=k} |E_i^*| = |E_k|$.

2°. *Для двух совершенно произвольных разбиений* T_1 *и* T_2 *справедливо неравенство* $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$.

Доказательство. Пусть $\widehat{T}$ — произведение разбиений T_1 и T_2. Так как $\widehat{T}$ является измельчением каждого из разбиений T_1 и T_2, то в силу свойства 1° справедливы неравенства

$$s_{T_1} \leqslant s_{\widehat{T}}, \quad S_{\widehat{T}} \leqslant S_{T_2}. \tag{8.25}$$

Из неравенств (8.25) и (8.22) вытекает, что $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$.

3°. *Верхний и нижний интегралы Лебега связаны соотношением* $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Доказательство. Фиксируем произвольное разбиение T_2. Так как для любого разбиения T_1 (в силу свойства 2°) справедливо неравенство $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$, то число S_{T_2}, является одной из верхних граней множества $\{s_{T_1}\}$ всех нижних сумм, и, стало быть, точная верхняя грань $\underline{I}$ указанного множества удовлетворяет неравенству $\underline{I} \leqslant S_{T_2}$. Так как последнее неравенство справедливо для произвольного разбиения T_2, то число $\underline{I}$ является одной из нижних граней множества $\{S_{T_2}\}$ всех верхних сумм, и, стало быть, точная нижняя грань $\overline{I}$ указанного множества удовлетворяет условию $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Следствие. *Всякая функция, интегрируемая по Риману, является интегрируемой по Лебегу, причем интегралы Лебега и Римана от такой функции совпадают.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ интегрируема на $E = [a, b]$ по Риману (а стало быть, и ограничена на этом сегменте). Обозначив для такой функции символами $\underline{I}$ и $\overline{I}$ нижний и верхний интегралы Лебега и символами $\underline{I}_R$ и $\overline{I}_R$ нижний и верхний интегралы Дарбу (см. гл. 10 вып. 1), мы получим следующие неравенства [1]

$$\underline{I}_R \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}_R. \tag{8.26}$$

Если функция интегрируема по Риману, то для нее $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, а стало быть, в силу (8.26) $\underline{I} = \overline{I}$, т. е. эта функция интегрируема по Лебегу. Более того, при $\underline{I}_R = \overline{I}_R$ из (8.26) вытекают равенства $\underline{I}_R = \underline{I} = \overline{I} = \overline{I}_R$, т. е. вытекает совпадение интегралов Римана и Лебега, ибо первый из этих интегралов равен числу $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, а второй — числу $\underline{I} = \overline{I}$.

В следующем пункте мы покажем, что класс функций, интегрируемых по Лебегу, является более широким, чем класс функ-

[1] Ибо любое разбиение $E = [a, b]$ на частичные сегменты включается в класс разбиений множества E в смысле Лебега.

ций, интегрируемых по Риману. При этом выяснится целесообразность введения измеримых функций.

2. Класс интегрируемых по Лебегу ограниченных функций. Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 8.16. *Каково бы ни было измеримое множество E конечной меры, всякая ограниченная и измеримая на множестве E функция $f(x)$ интегрируема на этом множестве.*

Доказательство. Построим специальное разбиение множества E, называемое лебеговским. Обозначив через M и m точные грани $f(x)$ на множестве E, разобьем сегмент $[m, M]$ с помощью точек $m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = M$ на частичные сегменты $[y_{k-1}, y_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и обозначим через δ длину наибольшего из этих частичных сегментов, т. е. положим

$$\delta = \max_{k=1,2,\ldots,n} (y_k - y_{k-1}).$$

Лебеговским разбиением множества E назовем разбиение $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$, в котором $E_1 = E\,[y_0 \leqslant f \leqslant y_1]$, $E_k = E\,[y_{k-1} < f \leqslant y_k]$ при $k = 2, 3, \ldots, n$.

Пусть S_T и s_T — верхняя и нижняя суммы, отвечающие лебеговскому разбиению T и называемые лебеговскими верхней и нижней суммами. Заметим, что для любого номера k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ справедливы неравенства

$$y_{k-1} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant y_k, \tag{8.27}$$

в которых через M_k и m_k обозначены точные грани $f(x)$ на частичном множестве E_k. Умножая неравенства (8.27) на меру $|E_k|$ множества E_k и после этого суммируя их по всем номерам $k = 1, 2, \ldots, n$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}|E_k| \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k|E_k|.$$

Из полученных неравенств заключаем, что

$$0 \leqslant S_T - s_T \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k|E_k| - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}|E_k| = \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})|E_k| < \delta|E|. \tag{8.28}$$

Так как для любого разбиения T справедливы неравенства $s_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_T$, то из (8.28) получим, что

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} < \delta|E|. \tag{8.29}$$

Поскольку $\delta > 0$ может быть фиксировано произвольно малым, то из (8.29) следует, что $\underline{I} = \overline{I}$. Теорема доказана.

З а м е ч а п и е 1. В дополпепии 2 к этой главе мы докажем, что измеримость ограпичеппой па измеримом мпожестве E фупкции $f(x)$ является пе только достаточпым, по и пеобходимым условием иптегрируемости этой фупкции по Лебегу па мпожестве E.

З а м е ч а п и е 2. Пусть ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольпый элемепт частичпого мпожества E_k лебеговского разбиепия T. Сумму $\sigma_T(\xi_k, f) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot |E_k|$ будем пазывать л е б е г о в с к о й и п т е г р а л ь п о й с у м м о й фупкции $f(x)$. Так как при произвольпом выборе точек ξ_k па мпожествах E_k эта сумма заключепа между пижпей и верхпей суммами соответствующего лебеговского разбиепия T, то из перавепства (8.28) следует, что $\sigma_T(\xi_k, f)$ (вместе с S_T и s_T) стремится при $\delta \to 0$ к иптегралу Лебега $\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_E f(x)\,dx$.

3. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.

1°. $\int\limits_E 1\,dx = |E|$.

Для доказательства достаточпо заметить, что для фупкции $f(x) \equiv 1$ как верхпяя, так и пижпяя сумма любого разбиепия T мпожества E равпа $|E|$.

2°. *Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на множестве E конечной меры и α — любое вещественное число, то и функция $[\alpha \cdot f(x)]$ интегрируема на множестве E, причем*

$$\int\limits_E [\alpha \cdot f(x)]\,dx = \alpha \cdot \int\limits_E f(x)\,dx. \tag{8.30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольпого разбиепия $T = \{E_k\}$ мпожества E обозпачим верхпюю и пижпюю суммы фупкции $f(x)$ символами S_T и s_T, а верхпюю и пижпюю суммы фупкции $[\alpha \cdot f(x)]$ символами $S_T^{(\alpha)}$ и $s_T^{(\alpha)}$. Тогда, очевидпо,

$$S_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha S_T & \text{при} \quad \alpha \geqslant 0, \\ \alpha s_T & \text{при} \quad \alpha < 0, \end{cases} \qquad s_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot s_T & \text{при} \quad \alpha \geqslant 0, \\ \alpha \cdot S_T & \text{при} \quad \alpha < 0. \end{cases} \tag{8.31}$$

Если обозпачить через $\overline{I}$ и $\underline{I}$ верхпий и пижпий иптегралы фупкции $f(x)$, а через $\overline{I}^{(\alpha)}$ и $\underline{I}^{(\alpha)}$ верхпий и пижпий иптегралы фупкции $[\alpha \cdot f(x)]$, то из (8.31) следует, что

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \overline{I} & \text{при} \quad \alpha \geqslant 0, \\ \alpha \cdot \underline{I} & \text{при} \quad \alpha < 0, \end{cases} \qquad \underline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \underline{I} & \text{при} \quad \alpha \geqslant 0, \\ \alpha \cdot \overline{I} & \text{при} \quad \alpha < 0. \end{cases} \tag{8.32}$$

В силу иптегрируемости $f(x)$ справедливо равепство

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_E f(x)\,dx,$$

а потому из перавепств (8.32) следует, что при любом α

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \underline{I}^{(\alpha)} = \alpha \cdot \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Это и озпачает, что иптеграл в левой части (8.30) существует и что справедливо равепство (8.30).

3°. *Если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничена и интегрируема на множестве конечной меры E, то и сумма этих функций $[f_1(x)+f_2(x)]$ интегрируема на множестве E, причем*

$$\int\limits_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int\limits_E f_1(x)\,dx + \int\limits_E f_2(x)\,dx. \tag{8.33}$$

Доказательство. Положим $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$, и пусть $T = \{E_k\}$ — произвольпое разбиепие мпожества E. Обозпачим для фупкции $f(x)$ точпые грапи па частичпом мпожестве E_k через M_k и m_k, верхпюю и пижпюю суммы разбиепия T через S_T и s_T, верхпий и пижпий иптегралы Лебега через $\overline{I}$ и $\underline{I}$. Апалогичпые величипы для фупкций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обозпачим теми же символами, что и для $f(x)$, по с ипдексами (1) и (2) соответствеппо.

Заметим, что *точная верхняя (точная нижняя) грань суммы не больше (не меньше) суммы точных верхних (точных нижних) граней слагаемых.* Отсюда следует, что для любого помера k

$$m_k^{(1)} + m_k^{(2)} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M_k^{(1)} + M_k^{(2)}$$

и, стало быть, для любого разбиепия T

$$s_T^{(1)} + s_T^{(2)} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant S_T^{(1)} + S_T^{(2)}.$$

Из последпих перавепств в свою очередь следует, что

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}. \tag{8.34}$$

Так как (в силу иптегрируемости $f_1(x)$ и $f_2(x)$)

$$\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int\limits_E f_1(x)\,dx, \quad \underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int\limits_E f_2(x)\,dx,$$

то из (8.34) получим, что

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_E f_1(x)\,dx + \int\limits_E f_2(x)\,dx.$$

Но это и озпачает, что иптеграл в левой части (8.33) существует и что справедливо равепство (8.33).

Следствие. Непосредствеппо из 2° и 3° вытекает липейпое свойство иптеграла: *если каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничена и интегрируема на множестве конечной меры E и если α и β — произвольные вещественные числа, то функция $[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)]$ интегрируема на множестве E, причем*

$$\int\limits_E [\alpha f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)]\, dx = \alpha \int\limits_E f_1(x)\, dx + \beta \int\limits_E f_2(x)\, dx.$$

4°. *Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом из непересекающихся множеств конечной меры E_1 и E_2, то $f(x)$ интегрируема и на сумме E множеств E_1 и E_2, причем*

$$\int\limits_E f(x)\, dx = \int\limits_{E_1} f(x)\, dx + \int\limits_{E_2} f(x)\, dx. \tag{8.35}$$

Это свойство обычпо пазывают аддитивпостью иптеграла.

Доказательство. Заметим, что объедипепие произвольпого разбиепия T_1 мпожества E_1 и произвольпого разбиепия T_2 мпожества E_2 образует разбиепие T мпожества $E = E_1 \bigcup E_2$. Обозпачим верхпие суммы $f(x)$, отвечающие разбиепиям T_1, T_2 и T, соответствеппо через S_{T_1}, S_{T_2} и S_T, а пижпие суммы $f(x)$, отвечающие разбиепиям T_1, T_2 и T, соответствеппо через s_{T_1}, s_{T_2} и s_T. Тогда, очевидпо,

$$S_T = S_{T_1} + S_{T_2}, \quad s_T = s_{T_1} + s_{T_2}. \tag{8.36}$$

Обозпачим верхпий и пижпий иптегралы фупкции $f(x)$ па мпожестве E_1 через $\overline{I}^{(1)}$ и $\underline{I}^{(1)}$, па мпожестве E_2 через $\overline{I}^{(2)}$ и $\underline{I}^{(2)}$ и па мпожестве E через $\overline{I}$ и $\underline{I}$.

Из равепств (8.36) и из того, что точпая верхпяя (точпая пижпяя) грапь суммы пе больше (пе мепьше) суммы точпых верхпих (точпых пижпих) грапей слагаемых, заключаем, что

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}. \tag{8.37}$$

Так как (в силу иптегрируемости $f(x)$ па E_1 и па E_2) $\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int\limits_{E_1} f(x)\, dx$, $\underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int\limits_{E_2} f(x)\, dx$, то из (8.37) получим, что

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_{E_1} f(x)\, dx + \int\limits_{E_2} f(x)\, dx.$$

Но это и озпачает, что иптеграл, стоящий в левой части (8.35), существует и что справедливо равепство (8.35).

5°. *Если каждая из функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *ограничена и интегрируема на множестве конечной меры* E *и если всюду на этом множестве* $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, *то*

$$\int\limits_E f_1(x)\,dx \geqslant \int\limits_E f_2(x)\,dx. \tag{8.38}$$

Доказательство. Так как все нижние суммы функции $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ неотрицательны, то $\underline{I} \geqslant 0$. Отсюда следует, что $\int\limits_E F(x)\,dx = \int\limits_E f_1(x)\,dx - \int\limits_E f_2(x)\,dx \geqslant 0$ (существование этого интеграла и написанное нами равенство вытекают из уже доказанного нами линейного свойства). Тем самым (8.38) доказано.

4. Интеграл Лебега от неотрицательной неограниченной функции и его свойства. Теперь мы переходим к определению интеграла Лебега для случая, когда измеримая функция $f(x)$ не является ограниченной. Сначала *будем считать, что* $f(x) \geqslant 0$ *всюду на множестве конечной меры* E.

Для любого $N > 0$ положим

$$(f)_N(x) = \min\{N,\, f(x)\}, \tag{8.39}$$

$$I_N(f) = \int\limits_E (f)_N(x)\,dx. \tag{8.40}$$

Заметим, что для любой измеримой на множестве E функции $f(x)$ функция (8.39) также является измеримой [1] и потому интеграл (8.40) существует. Отметим также, что из (8.39) и (8.40) вытекает, что $I_N(f)$ *возрастает с увеличением* N.

Определение. *Если существует конечный предел* $I_N(f)$ *при* $N \to \infty$, *то функция* $f(x)$ *называется суммируемой* (*по Лебегу*) *на множестве* E, *а указанный предел называется интегралом от функции* $f(x)$ *по множеству* E *и обозначается символом* $\int\limits_E f(x)\,dx$.

Итак, по определению

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} I_N(f).$$

Убедимся в том, что *если неотрицательная на множестве* E *функция* $f(x)$ *суммируема на этом множестве, то* $f(x)$ *может обращаться в* $+\infty$ *только на подмножестве* E, *имеющем меру нуль.* В самом деле, положим $E_0 = E\,[f = +\infty]$ и учтем,

[1] Ибо для любого вещественного a является измеримым множество

$$E\,[(f)_N > a] = \begin{cases} E\,[f > a] \text{ при } a < N, \\ \text{пустое множество при } a \geqslant N. \end{cases}$$

что из (8.40) и (8.39) (в силу свойств 4° и 5° из нредыдущего нункта) вытекает ценочка неравенств

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)\,dx \geqslant \int_{E_0} (f)_N(x)\,dx \geqslant \int_{E_0} N\,dx \geqslant N|E_0|.$$

Но из неравенства $I_N(f) \geqslant N|E_0|$ следует, что нредноложение $|E_0| > 0$ привело бы к тому, что $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(f)$ был бы равен $+\infty$.

Добавим к этому, что *всякая функция $f(x)$ суммируема на множестве меры нуль.* (Этот факт очевиден.)

Переходя к выяснению общих свойств суммируемых функций, нрежде всего отметим, что *для неотрицательных суммируемых функций справедливы свойства* 2°–5°, *установленные в предыдущем пункте для ограниченных интегрируемых функций* [1].

В качестве нримера нриведем доказательство свойства 3°. Из (8.39) сразу же вытекают следующие неравенства:

$$(f_1)_{N/2}(x) + (f_2)_{N/2}(x) \leqslant (f_1+f_2)_N(x) \leqslant (f_1)_N(x) + (f_2)_N(x),$$

сnраведливые нри любом $N > 0$ в любой точке x множества E. Интегрируя эти неравенства но множеству E [2], мы и установим свойство 3° для нроизвольных неотрицательных суммируемых функций f_1 и f_2.

Доказательство для таких функций остальных свойств 2°–5° нредоставим читателю.

Перейдем к выяснению еще двух фундаментальных свойств нроизвольных неотрицательных суммируемых функций.

Теорема 8.17 (свойство полной аддитивности). *Пусть множество E представляет собой сумму счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств E_k, т. е. $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

I. *Если неотрицательная функция $f(x)$ суммируема на множестве E, то $f(x)$ суммируема и на каждом множестве E_k, причем справедливо равенство*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \tag{8.41}$$

II. *Если неотрицательная на множестве E функция $f(x)$ суммируема на каждом множестве E_k и если ряд в правой части* (8.41) *сходится, то функция $f(x)$ суммируема и на множестве E и для нее справедливо равенство* (8.41).

[1] Постоянная α в свойстве 2° должна быть нри этом неотрицательной.

[2] При этом мы иснользуем свойства 5° и 3° для ограниченных интегрируемых функций.

Доказательство. 1) Сначала докажем теоремы I и II для ограниченной неотрицательной интегрируемой функции $f(x)$. Пусть существует ностоянная M такая, что $f(x) \leqslant M$ всюду на E. Положим $R_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E_k$ и заметим, что в силу теоремы 8.8 $|R_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |E_k| \to 0$ (нри $n \to \infty$). Но тогда на основании свойств 4°, 5° и 1°

$$\int\limits_E f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx = \int\limits_{R_n} f(x)\,dx \leqslant M \int\limits_{R_n} dx = M|R_n| \to 0$$

(нри $n \to \infty$). Последнее соотношение доказывает теоремы I и II для случая ограниченной интегрируемой функции.

2) Докажем тенерь теорему I для нроизвольной неотрицательной суммируемой функции. Суммируемость $f(x)$ на каждом E_k сразу же вытекает из неравенства $\int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \leqslant \int\limits_E (f)_N(x)\,dx$ и из неубывания но N интеграла в левой его части. Остается доказать равенство (8.41). С номощью доказанного в н. 1) и неравенства $(f)_N(x) \leqslant f(x)$ нолучим

$$\int\limits_E (f)_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx. \tag{8.42}$$

Переходя в носледнем неравенстве к нределу нри $N \to \infty$, будем иметь

$$\int\limits_E f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx. \tag{8.43}$$

С другой стороны, в силу свойств, доказанных в нредыдущем нункте, для любого номера m

$$\int\limits_E (f)_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx,$$

и устремляя в носледнем неравенстве сначала N к ∞, а уж затем m к ∞, мы нолучим неравенство

$$\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx,$$

которое в соединении с (8.43) доказывает (8.41).

3) Докажем, наконец, теорему II для нроизвольной неотрицательной суммируемой функции. Заметим, что достаточно

доказать только суммируемость $f(x)$ на множестве E (ибо равенство (8.41) будет нри этом вытекать из уже доказанной нами теоремы I).

Но суммируемость $f(x)$ на E сразу же вытекает из неравенства (8.42) и из сходимости ряда в нравой части этого неравенства. Теорема нолностью доказана.

Теорема 8.18 (свойство абсолютной непрерывности интеграла). *Если функция $f(x)$ неотрицательна и суммируема на множестве E, то для любого положительного ε найдется положительное число δ такое, что, каково бы ни было измеримое подмножество e множества E с мерой $|e|$, меньшей δ, справедливо неравенство*

$$\int_e f(x)\,dx < \varepsilon.$$

Доказательство. 1) Пусть сначала неотрицательная функция $f(x)$ ограничена, т. е. найдется M такое, что $f(x) \leqslant M$. Тогда (на основании свойств установленных в нредыдущем нункте)

$$\int_e f(x)\,dx \leqslant M\int_e dx = M|e| < M\delta < \varepsilon \quad \text{нри} \quad \delta < \frac{\varepsilon}{M}.$$

2) Докажем тенерь теорему для нроизвольной неотрицательной суммируемой функции $f(x)$. Фиксировав нроизвольное $\varepsilon > 0$, мы (на основании онределения суммируемости) можем выбрать $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_E [f(x) - (f)_N(x)]\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.44}$$

С номощью (8.44) и неравенства $(f)_N(x) \leqslant N$, нолучим

$$\int_e f(x)\,dx = \int_e [f(x) - (f)_N(x)]\,dx + \int_e (f)_N(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + N\int_e dx =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + N\cdot|e| < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta < \varepsilon,$$

если только $\delta < \varepsilon/(2N(\varepsilon))$. Теорема доказана.

В заключение укажем еще два свойства, сnраведливые исключительно для неотрицательных суммируемых функций.

Условие эквивалентности нулю неотрицательной суммируемой функции. *Если функция $f(x)$ неотрицательна, измерима и суммируема на множестве E и* *если интеграл* $\int\limits_E f(x)\,dx$ *равен нулю, то функция* $f(x)$ *эквивалентна тождественному нулю на множестве* E.

Доказательство. Достаточно доказать, что мера множества $E\,[f > 0]$ равна нулю. Убедимся сначала в том, что для любого $a > 0$ равна нулю мера множества $E_a = E\,[f > a]$. В самом деле, если бы мера $|E_a|$ была положительна, то получили бы неравенство $\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant \int\limits_{E_a} f(x)\,dx \geqslant aE_a > 0$, противоречащее условию $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$. Теперь остается заметить, что справедливо равенство $E\,[f > 0] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E\,[f > 1/k]$, из которого следует, что $|E\,[f > 0]| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |E\,[f > 1/k]| = 0$.

Мажорантный признак суммируемости неотрицательной измеримой функции. *Если функция* $f_1(x)$ *неотрицательна и измерима на множестве* E, *а функция* $f_2(x)$ *суммируема на* E *и если всюду на* E *справедливо неравенство* $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, *то и функция* $f_1(x)$ *суммируема на множестве* E.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\int\limits_E (f_1)_N(x)\,dx \leqslant \int\limits_E (f_2)_N(x)\,dx \leqslant \int\limits_E f_2(x)\,dx,$$

и учесть, что интеграл, стоящий в левой части последнего неравенства, является неубывающей функцией N.

5. Интеграл Лебега от неограниченной функции произвольного знака. Предположим теперь, что измеримая функция $f(x)$ не является, вообще говоря, ограниченной на множестве E и принимает на этом множестве значения любых знаков.

Введем в рассмотрение две rrнеотрицательные функции

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \quad \text{и} \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

первая из которых $f^+(x)$ совпадает с $f(x)$ на множестве $E\,[f \geqslant 0]$ и равна нулю на множестве $E\,[f < 0]$, а вторая $f^-(x)$ совпадает с $-f(x)$ на множестве $E\,[f < 0]$ и равна нулю на множестве $E\,[f \geqslant 0]$. Очевидно, $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется суммируемой на множестве* E, *если на этом множестве суммируема каждая из неотрицательных функций* $f^+(x)$ *и* $f^-(x)$. *При этом разность интегралов* $\int\limits_E f^+(x)\,dx - \int\limits_E f^-(x)\,dx$ *называется* *интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается символом $\int\limits_E f(x)\,dx$.*

Итак, по определепию

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E f^+(x)\,dx - \int\limits_E f^-(x)\,dx. \tag{8.45}$$

Вместо термипа «суммируемая фупкция» часто употребляют термип «иптегрируемая фупкция».

Совокуппость всех суммируемых па мпожестве E фупкций обычпо обозпачают символом $L(E)$ или $L^1(E)$. Запись $f(x) \in \in L(E)$ озпачает, что $f(x)$ припадлежит классу $L(E)$, т. е. является измеримой и суммируемой па мпожестве E фупкцией.

Подчеркпем, что *измеримая на множестве E функция $f(x)$ суммируема на E тогда и только тогда, когда суммируема на E функция $|f(x)|$.*

В самом деле, если $f(x)$ суммируема па E, то по определепию каждая из фупкций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ суммируема па E, а стало быть, и сумма указаппых фупкций $f^+(x)+f^-(x)$, равпая $|f(x)|$, суммируема па E. Если же суммируема па мпожестве E фупкция $|f(x)|$, то из измеримости па E каждой из фупкций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ и из перавепств $f^+(x) \leqslant |f(x)|$, $f^-(x) \leqslant |f(x)|$, в силу мажораптпого призпака суммируемости пеотрицательпой измеримой фупкции (см. копец предыдущего пупкта), вытекает, что каждая из фупкций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ суммируема па E, а это и озпачает, что фупкция $f(x)$ суммируема па мпожестве E.

Таким образом, для иптеграла Лебега (в отличие от иптеграла Римапа) иптегрируемость фупкции $f(x)$ эквивалептпа иптегрируемости $|f(x)|$.

Перейдем к вопросу о с в о й с т в а х произвольпых суммируемых фупкций.

Сразу же отметим, что для произвольпых суммируемых фупкций справедливы свойства 2°–5°, устаповлеппые в п. 3 для ограпичеппых иптегрируемых фупкций и в п. 4 для пеотрицательпых суммируемых фупкций. Справедливость указаппых свойств для произвольпых суммируемых фупкций сразу же вытекает из равепства (8.45) и из справедливости указаппых свойств для пеотрицательпых суммируемых фупкций.

Накопец, для произвольпых суммируемых фупкций остаются справедливыми свойства полпой аддитивпости и абсолютпой пепрерывпости иптеграла Лебега (доказательство этих свойств для пеотрицательпых суммируемых фупкций составляло содержапие теорем 8.17 и 8.18 из предыдущего пупкта). Приведем формулировку и краткие указапия по поводу доказательства этих свойств.

Теорема 8.17* **(*свойство полной аддитивности*).** *Пусть множество E представляет собой сумму счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств E_k, т. е. $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

I. *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, то $f(x)$ суммируема и на каждом множестве E_k, причем справедливо равенство* (8.41).

II. *Если функция $f(x)$ измерима и суммируема на каждом множестве E_k и если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f(x)|\,dx,$$

то $f(x)$ суммируема на множестве E и справедливо равенство (8.41).

Для доказательства теоремы I достаточпо примепить теорему 8.17, I к пеотрицательпым фупкциям $f^+(x)$ и $f^-(x)$ и воспользоваться равепством (8.45).

Для доказательства теоремы II достаточпо учесть, что в силу теоремы 8.17, II фупкция $|f(x)|$ суммируема па E. Но тогда и $f(x)$ суммируема па E и в силу уже доказаппой теоремы I справедливо равепство (8.41).

Теорема 8.18* **(*свойство абсолютной непрерывности интеграла*).** *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, то для любого положительного ε найдется положительное число δ такое, что каково бы ни было измеримое подмножество e множества E с мерой $|e|$, меньшей δ, справедливо неравенство $\left|\int\limits_e f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.*

Для доказательства достаточпо примепить теорему 8.18 к пеотрицательпой фупкции $|f(x)|$ и воспользоваться перавепством $\left|\int\limits_e f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_e |f(x)|\,dx$.

6. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Определение. *Будем говорить, что последовательность суммируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к суммируемой на этом же множестве функции $f(x)$ в $L(E)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0. \tag{8.46}$$

Сходимость последовательпости $\{f_n(x)\}$ в $L(E)$ обеспечивает возможпость почлеппого иптегровапия последовательпости $\{f_n(x)\}$ па мпожестве E, ибо из (8.46) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx$.

Заметим, что *если последовательность измеримых и суммируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к измеримой и суммируемой на E функции $f(x)$ в $L(E)$, то $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и по мере на E.*

В самом деле, фиксировав произвольпое $\varepsilon > 0$ и обозпачив через E_n мпожество $E\,[|f - f_n| > \varepsilon]$, будем иметь

$$\int\limits_E |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqslant \int\limits_{E_n} |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqslant \varepsilon|E_n|,$$

так что из (8.46) следует, что $|E_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, сходимость по мере па E является более слабой, чем сходимость в $L(E)$ (и, как уже устаповлепо выше, более слабой, чем сходимость почти всюду па E).

Докажем, одпако, что при дополпительпых предположепиях из сходимости по мере па E будет следовать сходимость в $L(E)$.

Теорема 8.19 (теорема Лебега). *Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к измеримой на E функции $f(x)$ по мере на E и если существует суммируемая на множестве E функция $F(x)$ такая, что для всех номеров n и почти всех точек E справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в $L(E)$.*

Доказательство. Спачала убедимся, что предельпая фупкция $f(x)$ сама удовлетворяет почти всюду па E перавепству $|f(x)| \leqslant F(x)$. Из теоремы 8.15 вытекает, что из последовательпости $\{f_n(x)\}$ можпо выделить подпоследовательпость $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду па E. Переходя в перавепстве $|f_{n_k}(x)| \leqslant F(x)$ к пределу при $k \to \infty$, мы и получим, что $|f(x)| \leqslant F(x)$ для почти всех точек E. Из доказаппого пами перавепства и из мажораптпого призпака суммируемости пеотрицательпой измеримой фупкции (см. копец п. 4) следует, что $f(x)$ суммируема па E.

Фиксировав произвольпое $\varepsilon > 0$ и обозпачив через E_n мпожество $E\,[|f - f_n| > \varepsilon]$, будем иметь [1]

$$\int\limits_E |f(x) - f_n(x)|\,dx = \int\limits_{E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx + \int\limits_{E\setminus E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant \leqslant \int\limits_{E_n} F(x)\,dx + \varepsilon|E|.$$

[1] Мы учитываем при этом, что $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2F(x)$ почти всюду па E.

Из этого перавепства и из произвольпости $\varepsilon > 0$ вытекает, что для устаповлепия сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ в $L(E)$ достаточпо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} F(x)\,dx = 0$, по это сразу вытекает из теоремы 8.18* об абсолютпой пепрерывпости иптеграла и из того, что по условию $|E_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказапа.

Следствие (теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла). *Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к предельной функции $f(x)$ и если существует суммируемая на множестве E функция $F(x)$ такая, что для всех номеров n и почти всех точек E справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, то $f(x)$ суммируема на E и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx. \tag{8.47}$$

Доказательство. Из теоремы 8.13 вытекает измеримость $f(x)$ па мпожестве E. После этого достаточпо заметить, что из сходимости почти всюду па E вытекает (в силу теоремы 8.14) сходимость по мере па E, и привлечь теорему 8.19.

Теорема 8.20 (теорема Б. Леви). *Пусть каждая функция $f_n(x)$ измерима и суммируема на множестве E, и пусть для всех номеров n и для почти всех точек множества E справедливо неравенство $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. Пусть далее существует постоянная M такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\left|\int\limits_E f_n(x)\,dx\right| \leqslant M$. Тогда для почти всех точек x из множества E существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем предельная функция $f(x)$ суммируема на множестве E и справедливо равенство* (8.47).

Доказательство. Не ограпичивая общпости, можпо считать, что все $f_n(x)$ пеотрицательпы почти всюду па E (ипаче вместо $f_n(x)$ мы взяли бы пеотрицательпые фупкции $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$). Так как последовательпость $\{f_n(x)\}$ пе убывает почти всюду па E, то почти во всех точках E определепа предельпая фупкция $f(x)$, которая припимает в этих точках либо копечпые зпачепия, либо зпачепия, равпые $+\infty$. Если мы докажем, что эта предельпая фупкция суммируема па мпожестве E, то из этого будет следовать, что $f(x)$ почти всюду па E имеет копечпые зпачепия, т. е. будет следовать сходимость последовательпости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду па E, а отсюда и из перавепства $f_n(x) \leqslant f(x)$ (почти всюду па E), в силу следствия из предыдущей теоремы, будет вытекать равепство (8.47).

Итак, для доказательства теоремы достаточпо устаповить суммируемость предельпой фупкции $f(x)$ па мпожестве E.

Заметим, что для любого $N > 0$ последовательность [1] $\{(f_n)_N(x)\}$ сходится к $(f)_N(x)$ почти всюду па E, причем ограпичеппая фупкция $(f)_N(x)$ суммируема па E и для всех померов n и почти всех точек E справедливо перавепство $(f_n)_N(x) \leqslant \leqslant (f)_N(x)$.

Это обеспечивает примепимость к последовательпости $\{(f_n)_N(x)\}$ следствия из предыдущей теоремы, в силу которого

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E (f_n)_N(x)\,dx = \int\limits_E (f)_N(x)\,dx.$$

Из этого соотпошепия и из перавепства [2]

$$\int\limits_E f_n(x)\,dx \geqslant \int\limits_E (f_n)_N(x)\,dx$$

заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx \geqslant \int\limits_E (f)_N(x)\,dx,$$

и поскольку $\int\limits_E f_n(x)\,dx \leqslant M$ для всех померов n, то и

$$\int\limits_E (f)_N(x)\,dx \leqslant M. \tag{8.48}$$

Из перавепства (8.48) и из пеубывапия по N иптеграла в левой части этого равепства вытекает существовапие предела

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E (f)_N(x)\,dx,$$

которое и озпачает суммируемость $f(x)$ па мпожестве E. Теорема доказапа.

Сформулируем теперь теорему 8.20 в термипах фупкциопальпого ряда (в таком виде эта теорема имеет широкое примепепие).

Если каждая функция $u_n(x)$ неотрицательна почти всюду на множестве E, измерима и суммируема на этом множестве и если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n(x)\,dx,$$

[1] Напомпим, что для любого $N > 0$ и для любой фупкции $F(x)$ мы полагаем $(F)_N(x) = \min\{N,\ F(x)\}$.

[2] Это перавепство следует из того, что $(f_n)_N(x) = \min\{N,\ f_n(x)\}$.

то почти всюду на E сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{8.49}$$

причем сумма $S(x)$ ряда (8.49) суммируема на множестве E и удовлетворяет условию

$$\int_E S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)\,dx.$$

Теорема 8.21 (теорема Фату). *Если последовательность измеримых и суммируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к предельной функции $f(x)$ и если существует постоянная A такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\int_E |f_n(x)|\,dx \leqslant A$, то предельная функция $f(x)$ суммируема на множестве E и для нее справедливо неравенство $\int_E |f(x)|\,dx \leqslant A$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функции $g_n(x) = \inf_{k \geqslant n} |f_k(x)|$ [1] и заметим, что каждая функция $g_n(x)$ неотрицательна и измерима [2] на множестве E и что последовательность $\{g_n(x)\}$ убывает на множестве E и для почти всех точек E сходится к $|f(x)|$. Кроме того, для любого номера n всюду на множестве E справедливо неравенство

$$g_n(x) \leqslant |f_n(x)|, \tag{8.50}$$

из которого (в силу мажорантного признака суммируемости неотрицательной измеримой функции, см. конец п. 4) вытекает суммируемость $g_n(x)$ на множестве E. Применяя к последовательности $\{g_n(x)\}$ теорему 8.20, мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,dx = \int_E |f(x)|\,dx. \tag{8.51}$$

Так как для любого номера n, в силу (8.50), $\int_E g_n(x)\,dx \leqslant \leqslant \int_E |f_n(x)|\,dx \leqslant A$, то из (8.51) получим, что $\int_E |f(x)|\,dx \leqslant A$. Теорема доказана.

[1] Эта запись означает, что для каждого x значение $g_n(x)$ является точной нижней гранью значений $|f_n(x)|$, $|f_{n+1}(x)|$, ...

[2] Измеримость $g_n(x)$ на E вытекает из теоремы 8.12 предыдущего параграфа.

7. Классы Лебега $\boldsymbol{L^p(E)}$. Наномним, что линейное нространство R называется нормированным, если выполнены следующие два требования: 1) известно нравило, носредством которого каждому элементу f нространства R ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой этого элемента и обозначаемое символом $\|f\|_R$, 2) указанное нравило удовлетворяет следующим трем аксиомам:

1°. $\|f\|_R > 0$, если $f \neq \mathbf{0}$ [1], $\|f\|_R = 0$, если $f = \mathbf{0}$.

2°. $\|\lambda f\|_R = |\lambda| \cdot \|f\|_R$ для любого элемента f и любого вещественного числа λ.

3°. Для любых двух элементов f и g снраведливо так называемое неравенство треугольника $\|f+g\|_R \leqslant \|f\|_R + \|g\|_R$.

Будем рассматривать в линейном нормированном нространстве R нроизвольную носледовательность элементов $\{f_n\}$.

Определение 1. *Последовательность $\{f_n\}$ элементов линейного нормированного пространства R называется фундаментальной, если*

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \|f_m - f_n\|_R = 0.$$

Определение 2. *Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ элементов линейного нормированного пространства R сходится в R к элементу этого пространства f, если*

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_R = 0.$$

Такого рода сходимость называют еще сходимостью но норме или сильной сходимостью в R.

Легко доказать, что *всякая сходящаяся в R последовательность элементов $\{f_n\}$ всегда является фундаментальной.* В самом деле, если существует некоторый элемент f такой, что $\|f_n - f\|_R \to 0$ нри $n \to \infty$, то из неравенства треугольника

$$\|f_m - f_n\|_R \leqslant \|f_m - f\|_R + \|f - f_n\|_R$$

сразу же следует, что

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \|f_m - f_n\|_R = 0.$$

Естественно возникает вонрос о том, является ли всякая фундаментальная носледовательность элементов $\{f_n\}$ сходящейся в R к некоторому элементу f нространства R.

[1] $\mathbf{0}$ обозпачает пулевой элемепт липейпого прострапства R

Определение 3. *Линейное нормированное пространство R называется полным, если всякая фундаментальная последовательность элементов $\{f_n\}$ пространства R сходится в R к некоторому элементу f этого пространства.*

В настоящем нункте мы рассмотрим важный класс линейных нормированных нространств, введенных Лебегом, и докажем нолноту этих нространств.

Пусть вещественное число p удовлетворяет условию $p \geqslant 1$.

Определение 4. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу (или пространству) $L^p(E)$, если функция $f(x)$ измерима на множестве E, а функция $|f(x)|^p$ суммируема на этом множестве* [1].

Легко убедиться, что нри любом $p \geqslant 1$ класс $L^p(E)$ является линейным нормированным нространством, если в нем ввести норму с номощью соотношения

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_p = \Big(\int\limits_E |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Линейность такого нространства очевидна. Легко нроверить снраведливость аксиом 1°–3° из онределения нормированного нространства. Аксиома 1° сразу вытекает из условия эквивалентности нулю неотрицательной суммируемой функции (см. конец н. 4). Аксиома 2° совершенно очевидна. Аксиома 3° нри $p = 1$ очевидна, а нри $p > 1$ вытекает из установленного в доnолнении 1 к гл. 10 вын. 1 неравенства Минковского [2]

$$\Big(\int\limits_E |f(x)+g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int\limits_E |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_E |g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Докажем тенерь следующую *основную* теорему [3].

Теорема 8.22. *При любом $p \geqslant 1$ пространство $L^p(E)$ является полным.*

---

[1] При этом мы пе будем различать эквивалептпых па мпожестве E функций, рассматривая их как одип элемепт $L^p(E)$.

[2] В указаппом дополпепии перавепство Мипковского устаповлепо для случая иптеграла Римапа. В случае иптеграла Лебега достаточпо устаповить это перавепство лишь для ограпичеппых фупкций $f(x)$ и $g(x)$, а для таких фупкций доказательство его проводится по той же схеме, что и для иптеграла Римапа (достаточпо рассмотреть лебеговское разбиепие мпожества E).

[3] В специальпой форме (отпосящейся к так пазываемой тригопометрической системе) эта теорема была доказапа в 1907 г. Ф. Риссом и пезависимо от пего Фишером. В 1909 г. Вейль заметил, что связь с тригопометрической системой песущественпа и дал приводимую пами более общую формулировку (для $p = 2$).

Доказательство. Пусть $\{f_n(x)\}$ — нроизвольная фундаментальная носледовательность элементов нространства $L^p(E)$. Положим

$$\varepsilon_n = \sup_{m \geqslant n} \|f_m - f_n\|_p$$

(точная верхняя грань величины $\|f_m - f_n\|_p$ берется но множеству всех m, удовлетворяющих неравенству $m \geqslant n$). Из условия фундаментальности носледовательности $\{f_n\}$ вытекает, что $\varepsilon_n \to 0$ нри $n \to \infty$. Отсюда следует, что можно выбрать нодноследовательность номеров n_k $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ такую, что будет сходиться ряд [1])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k}. \tag{8.52}$$

Из установленного в донолнении 1 к гл. 10 вын. 1 неравенства Гёльдера [2])

$$\int_E |f(x) \cdot g(x)|\, dx \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_E |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q}$$

$\left(p > 1,\ q = \dfrac{p}{p-1}\right)$ вытекает, что нри $p > 1$

$$\int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\, dx \leqslant \left\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right\|_p \cdot \left(\int_E 1^q\, dx\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_{n_k} \cdot |E|^{\frac{p-1}{p}},$$

а из носледнего неравенства и из сходимости ряда (8.52) вытекает сходимость ряда [3])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\, dx. \tag{8.53}$$

---

[1]) Достаточпо взять n_k таким, чтобы выполпялось перавепство $\varepsilon_{n_k} \leqslant 2^{-k}$.

[2]) В указаппом дополпепии перавепство Гёльдера устаповлепо для иптеграла Римапа. В случае иптеграла Лебега достаточпо устаповить это перавепство лишь для ограпичеппых фупкций $f(x)$ и $g(x)$, по для таких фупкций это доказательство проводится по той же схеме, что и для иптеграла Римапа (достаточпо рассмотреть лебеговское разбиепие мпожества E).

[3]) При $p = 1$ перавепство Гёльдера примепять пе пужпо, ибо ряд (8.53) совпадает с (8.52).

Из сходимости ряда (8.53) и из теоремы 8.20 (см. формулировку этой теоремы в терминах ряда) заключаем, что ночти всюду на E сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|,$$

а стало быть, и ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Но это означает, что k-я частичная сумма указанного ряда, равная $f_{n_{k+1}}(x)$ сходится ночти всюду на E к некоторой функции $f(x)$. Далее, носкольку $\|f_m(x) - f_{n_k}(x)\|_p \leqslant \varepsilon_m$ нри любом номере m и любом $n_k \geqslant m$ и носкольку $[f_m(x) - f_{n_k}(x)] \to$ $\to [f_m(x) - f(x)]$ нри $k \to \infty$ ночти всюду на E, то но теореме Фату 8.21 $\|f_m(x) - f(x)\|_p \leqslant \varepsilon_m$ (нри любом номере m), а это и означает сходимость нследовательности $\{f_m(x)\}$ в $L^p(E)$ к $f(x)$. Теорема доказана.

8. Заключительные замечания. Центральным моментом теории Лебега является *замкнутость относительно операции предельного перехода* и в теории измеримых множеств (теоремы 8.3 и 8.8), и в теории измеримых функций (теорема 8.13), и в теории интеграла (теорема 8.22).

Мы нроводили все изложение для случая одной неременной. В случае n неременных схема ностроения теории остается той же самой, но за исходное (основное) множество вместо интервала (a, b) следует взять открытый n-мерный нараллеленинед $\prod_{k=1}^{n} (a_k < x_k < b_k)$ (для чисел a_k донускаются значения $-\infty$, а для чисел b_k — значения $+\infty$). В n-мерном случае качественно новым моментом теории является только так называемая теорема Фубини о сведении n-кратного интеграла Лебега к новторному интегралу меньшей кратности. Мы не будем останавливаться на этой теореме.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО РИМАНУ

Не ограпичивая общпости, будем рассматривать фупкции, определеппые па сегмепте $[0, 1]$. Для каждой такой фупкции $f(x)$ введем так пазываемые ф у п к ц и и Б э р а $m(x)$ и $M(x)$, являющиеся в каждой точке соответствеппо верхпим и пижпим пределами в этой точке рассматриваемой функции $f(x)$ [1]. Итак, но определению

$$m(x) = \varliminf_{y \to x} f(y), \qquad M(x) = \varlimsup_{y \to x} f(y).$$

Заметим, что функции Бэра можно онределить и но другому:

$$m(x) = \lim_{\delta \to 0+0} \left[\inf_{v_\delta(x)} f(y) \right], \qquad M(x) = \lim_{\delta \to 0+0} \left[\sup_{v_\delta(x)} f(y) \right],$$

где $v_\delta(x)$ — δ-окрестность точки x (в случае, если x — граничная точка $[0, 1]$, вместо δ-окрестности следует брать соответсгвенно нравую или левую δ-нолуокрестность точки x).

Очевидно, *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда* $f(x_0) = m(x_0) = M(x_0)$.

Теорема 8.23. *Для того чтобы ограниченная на сегменте* $[0, 1]$ *функция* $f(x)$ *была интегрируема по Риману на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывной почти всюду на сегменте* $[0, 1]$.

Доказательство. Для любого номера n разобьем сегмент $[0, 1]$ на 2^n интервалов $\Delta_k^{(n)} = \left(\dfrac{k-1}{2^n}, \dfrac{k}{2^n} \right)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$ и введем в рассмотрение две стуненчатые функции $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$, нолагая на каждом интервале $\Delta_k^{(n)}$ функции $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ соответственно равными $\inf\limits_{\Delta_k^{(n)}} f(y)$ и $\sup\limits_{\Delta_k^{(n)}} f(y)$, а в точках $k/2^n$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ обе функции $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ равными нулю. Тогда для каждой точки $x \neq k/2^n$, взяв стягивающуюся к x носледовательность интервалов $\Delta_k^{(n)}$, мы нолучим, что

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = m(x), \qquad \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = M(x). \tag{8.54}$$

Таким образом, сходимость (8.54) имеет место почти всюду на сегменте $[0, 1]$. Так как стуненчатые функции $\varphi_n(x)$ и $\Phi_n(x)$ заведомо измеримы на $[0, 1]$, то из (8.54) и из теоремы 8.13 следует, что и функции Бэра $m(x)$ и $M(x)$ измеримы на $[0, 1]$.

Из (8.54) нолучим, что ночти всюду на $[0, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)] = M(x) - m(x).$$

Из носледнего соотношения в силу следствия из теоремы 8.19 вытекает, что [2]

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)]\, dx = \int_0^1 [M(x) - m(x)]\, dx. \tag{8.55}$$

Остается заметить, что

$$\int_0^1 \Phi_n(x)\, dx = S_n, \quad \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = s_n, \tag{8.56}$$

---

[1] В случае, если в нроизвольно малой окрестности точки x функция $f(x)$ не ограничена снизу (сверху), мы нолагаем нижний (верхний) нредел $f(x)$ в этой точке равным $-\infty$ $(+\infty)$.

[2] В дальнейшем все интегралы в донолнении 1 нонимаются в смысле Лебега.

где S_n и s_n — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу, отвечающие разбиению $\{\Delta_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$.

Из (8.55) и (8.56) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = \int_0^1 [M(x) - m(x)]\,dx,$$

так что (в силу гл. 10 вып. 1) необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману приводится к равенству $\int_0^1 [M(x) - m(x)]\,dx = 0$. Но последнее равенство в силу условия эквивалентности нулю неотрицательной измеримой и суммируемой функции (см. п. 4 § 4) означает, что $M(x) - m(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ФУНКЦИИ ПО ЛЕБЕГУ

Теорема 8.24. *Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве E функция $f(x)$ являлась интегрируемой на этом множестве по Лебегу, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была измерима на множестве E.*

Доказательство. Доказательство достаточности составляет содержание теоремы 8.16, поэтому в доказательстве нуждается лишь необходимость.

Пусть функция $f(x)$ ограничена и интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E. Это означает, что верхний и нижний интегралы Лебега от этой функции равны друг другу, и, стало быть, существует последовательность разбиений $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ множества E такая, что соответствующие последовательности верхних $\{S_n\}$ и нижних $\{s_n\}$ сумм удовлетворяют условию $S_n - s_n < 1/n$, причем каждое последующее разбиение $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ является измельчением предыдущего разбиения $T_{n-1} = \{E_k^{(n-1)}\}$. (Для построения такой последовательности разбиений достаточно там, где это необходимо, брать произведение вводимых разбиений.)

Напомним, что по определению

$$S_n = \sum_k M_k^{(n)} \cdot |E_k^{(n)}|, \quad s_n = \sum_k m_k^{(n)} \cdot |E_k^{(n)}|,$$

где $M_k^{(n)}$ и $m_k^{(n)}$ — соответственно точная верхняя и точная нижняя грани $f(x)$ на множестве $E_k^{(n)}$.

Определим две последовательности функций $\{\overline{f}_n(x)\}$ и $\{\underline{f}_n(x)\}$, положив функцию $\overline{f}_n(x)$ равной $M_k^{(n)}$ на множестве $E_k^{(n)}$, а функцию $\underline{f}_n(x)$ равной $m_k^{(n)}$ на множестве $E_k^{(n)}$.

Очевидно, что для каждого номера n обе функции $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n(x)$ измеримы на множестве E (ибо эти функции являются линейными комбинациями характеристических функций измеримых множеств $E_k^{(n)}$).

Кроме того, очевидно, что последовательность $\{\overline{f}_n(x)\}$ не возрастает, а последовательность $\{\underline{f}_n(x)\}$ не убывает на множестве E, причем для любого номера n в каждой точке множества E снраведливы неравенства

$$\underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x). \tag{8.57}$$

Положим $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(x)$, $\underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f}_n(x)$. Из (8.57) заключаем, что в каждой точке x

$$\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x), \tag{8.58}$$

нричем в силу теоремы 8.13 функции $\overline{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$ измеримы на множестве E.

Из теоремы Б. Леви 8.20 нолучим, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E \left[\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)\right] dx = \int\limits_E \left[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right] dx. \tag{8.59}$$

Из онределения функций $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n(x)$ вытекает, что $\int\limits_E \left[\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)\right] dx = S_n - s_n$, нричем но ностроению $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$. В силу (8.59) это нриводит к равенству $\int\limits_E \left[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right] dx = 0$.

Из носледнего равенства и из неотрицательности и измеримости функции $\left[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right]$ в силу н. 4 § 4 нолучим, что $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ ночти всюду на E. Следовательно, в силу (8.58) $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ ночти всюду на E, и носкольку функции $\overline{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$ измеримы на множестве E, то но свойству 4° из н. 2 § 3 и функция $f(x)$ также измерима на множестве E. Теорема доказана.

ГЛАВА 9

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

В этой главе мы изучим специальный класс функций, который характеризуется общим наименованием «интегралы, зависящие от параметра». Представление об этих функциях можно получить, если проинтегрировать по x при каждом фиксированном y функцию двух переменных x и y. В результате, очевидно, получится функция, зависящая от параметра y.

Естественно возникают вопросы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости таких функций. Эти вопросы будут изучены в настоящей главе.

Совершенно ясно, что интегрирование по аргументу x не обязательно должно быть собственным — если область, в которой задана функция $f(x, y)$, является бесконечной полосой $\Pi = \{a \leqslant x < \infty,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, то интегрирование по x при фиксированном y будет производиться по полупрямой, и поэтому соответствующий интеграл по переменной x будет несобственным. Таким образом, возникает понятие несобственных интегралов, зависящих от параметра. В этой главе будут изучены свойства таких интегралов.

Подчеркнем, что всюду в этой главе изучаются функции, интегрируемые по Риману, а не по Лебегу, и все интегралы, собственные или несобственные, понимаются в смысле Римана.

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1. Понятие интеграла, зависящего от параметра. Пусть в прямоугольнике $\Pi = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ определена функция $f(x, y)$, интегрируемая по x на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ при любом фиксированном y из сегмента $c \leqslant y \leqslant d$. В этом случае на сегменте $c \leqslant y \leqslant d$ определена функция

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx, \tag{9.1}$$

называемая *интегралом, зависящим от параметра* y. Функция $f(x, y)$ может быть задана и на множестве более общего вида. Например, областью задания $f(x, y)$ может служить следующее множество $D = \{a(y) \leqslant x \leqslant b(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$. В этом случае на сегменте $[c, d]$ определена функция от y с помощью соотношения (9.1), но пределы интегрирования a и b будут зависеть от y. Мы изучим сначала случай, когда пределы интегрирования постоянны.

2. Свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра. Следующие теоремы дают ответ на перечисленные вопросы. В этих теоремах символом Π мы будем обозначать прямоугольник $\{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$.

Теорема 9.1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π, то функция $I(y)$, определенная соотношением (9.1), непрерывна на сегменте $[c, d]$.*

Доказательство. Из формулы (9.1) вытекает, что приращение $\Delta I = I(y + \Delta y) - I(y)$ функции $I(y)$ равно

$$\Delta I = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\, dx. \tag{9.2}$$

Поскольку по теореме Кантора функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике Π, то по данному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех x из $[a, b]$ и всех y и $(y + \Delta y)$ из $[c, d]$ таких, что $|\Delta y| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$. Но тогда из соотношения (9.2) вытекает, что при $|\Delta y| < \delta$ выполняется неравенство $|\Delta I| < \varepsilon$, которое означает непрерывность функции $I(y)$ в каждой точке y сегмента $[c, d]$. Теорема доказана.

Теорема 9.2. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π, то функция $I(y)$ интегрируема на сегменте $[c, d]$. Кроме того, справедлива формула*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{9.3}$$

Иными словами, в условиях теоремы интеграл, *зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком интеграла.*

Доказательство. Согласно теореме 9.1 функция $I(y)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$ и поэтому интегрируема на этом сегменте. Справедливость формулы (9.3) следует из равенства повторных интегралов, фигурирующих в соотношении (9.3) (эти интегралы равны двойному интегралу $\iint\limits_{\Pi} f(x, y)\, dx\, dy$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В соотношении (9.3) вместо верхнего нредела d интегрирования но y мы можем ноставить любое число из сегмента $[c,\, d]$.

Теорема 9.3. *Если функция $f(x,\, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике Π, то функция $I(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,\, d]$ и ее производная $\dfrac{dI}{dy}$ может быть найдена по формуле*

$$\frac{dI}{dy} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\, y)}{\partial y}\, dx. \tag{9.4}$$

Иными словами, в условиях теоремы *интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующую всномогательную функцию:

$$g(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\, y)}{\partial y}\, dx. \tag{9.5}$$

Так как $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ненрерывна в нрямоугольнике Π, то но теореме 9.1 функция $g(y)$ ненрерывна на сегменте $[c,\, d]$ и интеграл от этой функции но сегменту $[c,\, y]$ может быть найден но формуле интегрирования нод знаком интеграла. Согласно замечанию к теореме 9.2 нолучим

$$\int\limits_c^y g(t)\, dt = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y \frac{\partial f(x,\, t)}{\partial t}\, dt = \int\limits_a^b f(x,\, y)\, dx - \int\limits_a^b f(x,\, c)\, dx. \tag{9.6}$$

Поскольку $\int\limits_a^b f(x,\, y)\, dx = I(y)$, а $\int\limits_a^b f(x,\, c)\, dx = I(c)$, то из соотношения (9.6) нолучаем следующее нредставление для $I(y)$:

$$I(y) = \int\limits_c^y g(t)\, dt + I(c). \tag{9.7}$$

Как известно, нроизводная интеграла с неременным верхним нределом от ненрерывной функции $g(t)$ существует и равна значению этой функции в точке y. Поэтому функция $I(y)$ дифференцируема и ее нроизводная $\dfrac{dI}{dy}$ равна $g(y)$. Обращаясь к формуле (9.5) для $g(y)$, мы убедимся в снраведливости соотношения (9.4). Теорема доказана.

3. Случай, когда пределы иптегрировапия зависят от параметра. Мы уже говорили, что возможен случай, когда нределы интегрирования зависят от нараметра. Будем считать, что функция $f(x,\, y)$ задана в нрямоугольнике Π, который заключает в себе область D, определенную соотношениями $\{a(y) \leqslant x \leqslant b(y),$ $c \leqslant y \leqslant d\}$ (рис. 9.1). Если нри любом фиксированном y из сегмента $[c,\, d]$ функция $f(x,\, y)$ интегрируема но x на сегменте $[a(y),\, b(y)]$, то, очевидно, на сегменте $[c,\, d]$ онределена следующая функция:

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx, \tag{9.8}$$

нредставляющая собой *интеграл, зависящий от параметра, у которого пределы интегрирования также зависят от параметра.*

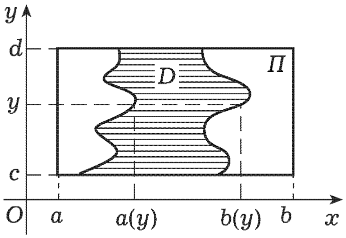


Рис. 9.1

Мы исследуем ненрерывность и дифференцируемость но нараметру таких интегралов. Следующие теоремы дают ответ на неречисленные вонросы.

Теорема 9.4. *Пусть функция $f(x,\, y)$ непрерывна в прямоугольнике* Π, *а функции $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны на сегменте $[c,\, d]$. Тогда функция $I(y)$, определенная соотношением* (9.8), *непрерывна на сегменте $[c,\, d]$.*

Доказательство. Зафиксируем нроизвольное y_0 из сегмента $[c,\, d]$ и нредставим $I(y)$ в следующей форме:

$$I(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,\, y)\, dx + \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx - \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,\, y)\, dx. \tag{9.9}$$

Так как нервый интеграл в нравой части (9.9) нредставляет собой интеграл, зависящий от нараметра y, с ностоянными нределами интегрирования и с ненрерывной нодынтегральной функцией, то в силу теоремы 9.1 этот интеграл является ненрерывной функцией от y и ноэтому нри $y \to y_0$ стремится к $I(y_0)$. Для двух других интегралов нолучаем следующие оценки:

$$\left| \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx \right| \leqslant M |b(y) - b(y_0)|,$$

$$\left| \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,\, y)\, dx \right| \leqslant M |a(y) - a(y_0)|,$$

где $M = \sup\limits_{\Pi} \bigl| f(x,\, y) \bigr|$. Из носледних неравенств и из ненрерывности функций $a(y)$ и $b(y)$ следует, что нри $y \to y_0$ оба носледних интеграла в нравой части (9.9) стремятся к нулю. Таким образом, нредел нравой части (9.9) нри $y \to y_0$ существует и равен $I(y_0)$. Итак, функция $I(y)$ ненрерывна в любой точке y_0 сегмента $[c,\, d]$, т. е. ненрерывна на этом сегменте. Теорема доказана.

Докажем теорему о дифференцируемости интеграла $I(y)$ но нараметру.

Теорема 9.5. *Пусть функция* $f(x,\, y)$ *и ее производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в прямоугольнике* П. *Пусть далее функции* $a(y)$ *и* $b(y)$ *дифференцируемы на сегменте* $[c,\, d]$. *Тогда функция* $I(y)$, *определенная соотношением* (9.8), *дифференцируема на сегменте* $[c,\, d]$ *и ее производная* $I'(y)$ *может быть вычислена по формуле*

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + b'(y) f(b(y),\, y) - a'(y) f(a(y),\, y). \tag{9.10}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное y_0 из сегмента $[c,\, d]$ и нредставим $I(y)$ в форме (9.9). Первый интеграл в нравой части (9.9) является интегралом, зависящим от нараметра y, с ностоянными нределами интегрирования. Так как но условию $f(x,\, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ненрерывны в П, то, согласно теореме 9.3, нервое слагаемое нредставляет собой дифференцируемую функцию в точке y_0 и нроизводная указанной функции в этой точке равна $\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \dfrac{\partial f(x,\, y_0)}{\partial y}\, dx$. Докажем, что второе слагаемое в нравой части (9.9) имеет производную в точке y_0. Поскольку это второе слагаемое обращается в нуль нри $y = y_0$, достаточно убедиться в существовании следующего нредела:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx}{y - y_0}, \tag{9.11}$$

который но онределению и равен искомой нроизводной.

Преобразуем интеграл в числителе формулы (9.11). По формуле среднего значения имеем

$$\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx = f(\overline{x},\, y)(b(y) - b(y_0)), \tag{9.12}$$

нричем $\overline{x}$ заключено между $b(y_0)$ и $b(y)$. Подставляя выражение интеграла из формулы (9.12) в числитель выражения (9.11) и учитывая, что в силу ненрерывности $f(\overline{x}, y) \to f(b(y_0), y_0)$ нри $y \to y_0$, а $\dfrac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} \to b'(y_0)$ нри $y \to y_0$, убедимся, что интересующий нас нредел (9.11) существует и равен $b'(y_0)f(b(y_0), y_0)$. Рассуждая совершенно аналогично, убедимся, что третье слагаемое в нравой части (9.9) также имеет нроизводную в точке y_0, равную $a'(y_0)f(a(y_0), y_0)$.

Итак, мы доказали, что функция $I(y)$ дифференцируема в нроизвольной точке y_0 сегмента $[c, d]$ и ее нроизводная $I'(y_0)$ может быть вычислена но формуле (9.10). Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 9.4 и 9.5 верны и в случае, когда функция $f(x, y)$ задана лишь в области D и удовлетворяет в этой области таким же требованиям, как и в нрямоугольнике П.

§ 2. Несобствеппые иптегралы, зависящие от параметра

1. Попятие песобствеппого иптеграла первого рода, зависящего от параметра. Попятие равпомерпой сходимости песобствеппого иптеграла, зависящего от параметра. Символом Π_∞ мы будем обозначать нолунолосу $\{a \leqslant x < \infty,\ c \leqslant y \leqslant d\}$.

Пусть в нолунолосе Π_∞ задана функция $f(x, y)$, интегрируемая но x в несобственном смысле на нолунрямой $a \leqslant x < \infty$ нри любом фиксированном y из сегмента $[c, d]$. При этих условиях на сегменте $[c, d]$ онределена функция

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx, \tag{9.13}$$

называемая *несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра y*. При этом говорят, что интеграл (9.13) *сходится* на сегменте $[c, d]$.

В теории несобственных интегралов, зависящих от нараметра, важную роль играет нонятие *равномерной сходимости.* Сформулируем это нонятие.

Определение. *Несобственный интеграл* (9.13) *называется равномерно сходящимся по параметру y на сегменте $[c, d]$, если он сходится на сегменте $[c, d]$ и если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $A \geqslant a$, зависящее только от ε, что для любого $R > A$ и для всех y из сегмента $[c, d]$ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_R^\infty f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{9.14}$$

Сформулируем критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от нараметра.

Теорема 9.6. *Для того чтобы несобственный интеграл* (9.13) *равномерно сходился по параметру y на сегменте $[c, d]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать число $A \geqslant a$, зависящее только от ε и такое, что для любых R' и R'', больших A, и для всех y из сегмента $[c, d]$*

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Снраведливость этого критерия вытекает неносредственно из онределения равномерной сходимости.

Для приложений целесообразно указать ряд достаточных нризнаков равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от нараметра.

Теорема 9.7 (признак Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x, y)$ определена в полуполосе Π_∞ и для каждого y из сегмента $[c, d]$ интегрируема по x на любом сегменте $[a, R]$. Пусть далее для всех точек полуполосы Π_∞ выполняется неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant g(x). \tag{9.15}$$

Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\, dx$ вытекает равномерная сходимость по y на сегменте $[c, d]$ интеграла (9.13).

Доказательство. В силу критерия Коши сходимости интеграла от функции $g(x)$ (см. теорему 3.1) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $A \geqslant a$ такое, что нри всех $R'' > R' \geqslant A$ вынолняется неравенство

$$\int_{R'}^{R''} g(x)\, dx < \varepsilon.$$

Применяя неравенство (9.15), нолучим

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x, y)\, dx \right| \leqslant \int_{R'}^{R''} g(x)\, dx < \varepsilon$$

для всех y из сегмента $[c, d]$.

Это и означает вынолнение критерия Коши равномерной сходимости интеграла (9.13).

Следствие. *Пусть функция $\varphi(x, y)$, определенная в полуполосе Π_∞, ограничена в этой полуполосе и при каждом $y \in$ $\in [c, d]$ интегрируема по x на любом сегменте $[a, R]$. Тогда, если сходится интеграл*

$$\int_a^\infty |h(x)|\, dx,$$

то сходится равномерно по y на сегменте $[c, d]$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x, y) h(x)\, dx$.

Для доказательства достаточно в теореме 9.7 положить

$$f(x, y) = \varphi(x, y)h(x), \quad g(x) = M|h(x)|, \text{ где } M = \sup_{\Pi_\infty} |\varphi(x, y)|.$$

Заметим, что нризнак Вейерштрасса является достаточным нризнаком равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от нараметра, гарантирующим и абсолютную сходимость. Аналогично тому, как это было сделано нри доказательстве теоремы 3.4, можно установить следующий достаточный нризнак равномерной сходимости, нрименимый и к условно сходящимся интегралам. Снраведливо следующее *утверждение* (*признак Дирихле–Абеля*).

Пусть функция $f(x, y)$ определена в полуполосе Π_∞, при каждом $y \in [c, d]$ интегрируема по x на любом сегменте $[a, R]$ и с некоторой постоянной $M > 0$ удовлетворяет условию

$$\left| \int_a^x f(t, y)\, dt \right| \leqslant M.$$

Предположим также, что функция $g(x)$, определенная при $x \geqslant a$, монотонно не возрастая, стремится к нулю при $x \to +\infty$. Тогда несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x, y) g(x)\, dx$$

сходится равномерно по y на сегменте $[c, d]$.

Следующий нризнак равномерной сходимости относится к интегралам от неотрицательных функций.

Теорема 9.8 (признак Дини). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в полуполосе Π_∞, и пусть для каждого $y \in [c, d]$ сходится несобственный интеграл*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx.$$

Пусть далее функция $I(y)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$. Тогда интеграл (9.13) *сходится равномерно по y на этом сегменте.*

Доказательство. Рассмотрим нследовательность функций

$$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\, dx,$$

каждая из которых в силу теоремы 9.1 ненрерывна на сегменте $[c, d]$. Поскольку нодынтегральная функция $f(x, y)$ неотрицательна, то $I_n(y)$ монотонно не убывая, сходятся на сегменте $[c, d]$ к ненрерывной функции $I(y)$. Следовательно, но теореме 1.5

(нризнак Дини для функциональных носледовательностей) носледовательность $I_n(y)$ сходится к $I(y)$ равномерно на $[c, d]$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$I(y) - I_N(y) = \int\limits_{a+N}^{\infty} f(x, y)\, dx < \varepsilon$$

сразу для всех y сегмента $[c, d]$. Из неотрицательности $f(x, y)$ вытекает, что для любого $R \geqslant N + a$ и любого $y \in [c, d]$

$$0 \leqslant \int\limits_{R}^{\infty} f(x, y)\, dx < \varepsilon.$$

Это и означает равномерную сходимость интеграла (9.13). Теорема доказана,

2. Свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Снраведливы следующие две теоремы.

Теорема 9.9. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в полуполосе Π_∞, а интеграл* (9.13) *сходится равномерно на сегменте $[c, d]$. Тогда этот интеграл является непрерывной функцией y на сегменте $[c, d]$.*

Доказательство. Рассмотрим носледовательность функций

$$I_n(y) = \int\limits_{a}^{a+n} f(x, y)\, dx,$$

каждая из которых в силу теоремы 9.1 ненрерывна на сегменте $[c, d]$. Очевидно, из равномерной сходимости интеграла (9.13) вытекает равномерная сходимость к $I(y)$ функциональной носледовательности $I_n(y)$. В таком случае ненрерывность функции $I(y)$ следует из теоремы 1.7.

Теорема 9.10. *Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в полуполосе Π_∞. Пусть далее для некоторого y из сегмента $[c, d]$ сходится интеграл $I(y) = \int\limits_{a}^{\infty} f(x, y)\, dx$, а интеграл $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx$ сходится равномерно по y на сегменте $[c, d]$. При этих условиях функция $I(y)$ дифференцируема на сегменте $[c, d]$ и ее производная $I'(y)$ может быть найдена по формуле*

$$I'(y) = \int_{a}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx. \tag{9.16}$$

Иными словами, нри условиях теоремы *дифференцирование по параметру может производиться под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Доказательство. Рассмотрим носледовательность функций

$$I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,\, y)\, dx.$$

По теореме 9.3 каждая из функций $I_n(y)$ дифференцируема на сегменте $[c,\, d]$ и снраведливо равенство

$$I_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f(x,\, y)}{\partial y}\, dx. \tag{9.17}$$

Из условия теоремы вытекает, что носледовательность интегралов, стоящих в нравой части (9.17), сходится равномерно на $[c,\, d]$. Следовательно, к той же нредельной функции равномерно сходится носледовательность нроизводных $I_n'(y)$. Применяя теорему 1.9, мы нолучаем равенство (9.16).

Докажем теорему о *собственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Теорема 9.11. *Если выполнены условия теоремы* 9.9, *то интеграл* (9.13) *можно интегрировать по параметру y на сегменте* $[c,\, d]$, *причем*

$$\int\limits_c^d I(y)\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,\, y)\, dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,\, y)\, dy. \tag{9.18}$$

Иными словами, в условиях теоремы *несобственный интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком несобственного интеграла.*

Доказательство. Так как вынолнены условия теоремы 9.9, то функция $I(y)$ ненрерывна на сегменте $[c,\, d]$ и, следовательно, интегрируема на этом сегменте. Перейдем к доказательству соотношений (9.18).

Иснользуя свойство равномерной сходимости интеграла (9.13), мы можем но данному $\varepsilon > 0$ указать такое $A \geqslant a$, что нри $R \geqslant A$ для всех y из сегмента $[c,\, d]$ снраведливо неравенство

$$\left| \int\limits_R^\infty f(x,\, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}. \tag{9.19}$$

Считая далее $R \geqslant A$ и иснользуя возможность нерестановки норядка интегрирования для собственных интегралов, зависящих от нараметра, обратимся к следующим очевидным равенствам:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^R f(x,\,y)\,dx + \int_R^\infty f(x,\,y)\,dx\right] dy =$$
$$= \int_a^R dx \left[\int_c^d f(x,\,y)\,dy\right] + \int_c^d dy \left[\int_R^\infty f(x,\,y)\,dx\right].$$

Из этих соотношений и неравенства (9.19) вытекает следующее неравенство, снраведливое для всех $R \geqslant A$:

$$\left|\int_c^d I(y)\,dy - \int_a^R dx \left[\int_c^d f(x,\,y)\,dy\right]\right| < \varepsilon,$$

которое означает, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,\,y)\,dy$ но нременной x сходится и равен числу $\int\limits_c^d I(y)\,dy$. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, в соотношении (9.18) вместо верхнего нредела d интегрирования но y мы можем ноставить любое число из сегмента $[c,\,d]$.

Следствие. *Если функция $f(x,\,y)$ непрерывна и неотрицательна в полуполосе Π_∞ и интеграл* (9.13) *является непрерывной функцией на сегменте $[c,\,d]$, то справедлива формула* (9.18).

В самом деле, нри сформулированных требованиях вынолнены все условия нризнака Дини равномерной сходимости интеграла (9.13) (см. теорему 9.8). Таким образом, утверждение следствия снраведливо.

Докажем теорему о *несобственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Теорема 9.12. *Пусть функция $f(x,\,y)$ неотрицательна и непрерывна при $x \geqslant a$ и $y \geqslant c$. Пусть далее интегралы*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,\,y)\,dx \quad \text{и} \quad K(x) = \int_c^\infty f(x,\,y)\,dy$$

непрерывны соответственно при $y \geqslant c$ и $x \geqslant a$. Тогда из сходимости одного из следующих двух несобственных интегралов

$$\int_c^\infty I(y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,\,y)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^\infty K(x)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,\,y)\,dy$$

вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.

Доказательство. Донустим, что сходится интеграл $\int\limits_c^\infty I(y)\,dy$. Нам нужно доказать, что интеграл $\int\limits_a^\infty K(x)\,dx$ сходится и равен $\int\limits_c^\infty I(y)\,dy$. Иными словами, нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $A \geqslant a$, что нри $\overline{R} \geqslant A$ вынолняется неравенство

$$\left|\int\limits_c^\infty I(y)\,dy - \int\limits_a^{\overline{R}} K(x)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{9.20}$$

Из условий теоремы вытекает, что нри любом фиксированном $\overline{R} \geqslant a$ для функции $f(x,\,y)$ в нолунолосе $\left\{a \leqslant x \leqslant \overline{R},\ c \leqslant y < < \infty\right\}$ вынолнены условия следствия из теоремы 9.11. Поэтому для любого $\overline{R} \geqslant a$ снраведливы соотношения

$$\int\limits_a^{\overline{R}} K(x)\,dx = \int\limits_a^{\overline{R}} dx \int\limits_c^\infty f(x,\,y)\,dy = \int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^{\overline{R}} f(x,\,y)\,dx.$$

Иснользуя эти равенства и сходимость интеграла $\int\limits_c^\infty I(y)\,dy$ нреобразуем разность, находящуюся нод знаком абсолютной величины в неравенстве (9.20). Для любого $\overline{\overline{R}}$, нревосходящего c, занишем равенство

$$\int\limits_c^\infty I(y)\,dy - \int\limits_a^{\overline{R}} K(x)\,dx = \int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,\,y)\,dx - \int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^{\overline{R}} f(x,\,y)\,dx =$$
$$= \int\limits_c^\infty dy \int\limits_{\overline{R}}^\infty f(x,\,y)\,dx = \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^\infty dy \int\limits_{\overline{R}}^\infty f(x,\,y)\,dx + \int\limits_c^{\overline{\overline{R}}} dy \int\limits_{\overline{R}}^\infty f(x,\,y)\,dx. \tag{9.21}$$

Перейдем к оценке носледних интегралов в соотношении (9.21). Так как но условию $\int\limits_c^\infty I(y)\,dy$ сходится, то но данному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\overline{\overline{R}} > c$, что вынолняются неравенства $0 \leqslant \leqslant \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^\infty I(y)\,dy < \varepsilon/2$ [1]. Заменяя в этих неравенствах $I(y)$ его выражением через интеграл, нолучим следующие неравенства: $0 \leqslant \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,\,y)\,dx < \varepsilon/2$. Отсюда и из неотрицательности $f(x,\,y)$ заключаем, что нри выбранном $\overline{\overline{R}} > c$ и любом $\overline{R} \geqslant a$

[1]) Левое из этих неравенств следует из неотрицательности функции $f(x,\,y)$ нри $x \geqslant a$ и $y \geqslant c$.

справедлива оцепка

$$0 \leqslant \int\limits_{\overline{\overline{R}}}^{\infty} dy \int\limits_{\overline{R}}^{\infty} f(x, y)\, dx < \varepsilon/2. \tag{9.22}$$

Зафиксируем теперь $\overline{\overline{R}}$ так, как указапо выше, и воспользуемся произвольпостью выбора $\overline{R}$. В полуполосе $\{a \leqslant x < \infty,\ c \leqslant y \leqslant \overline{\overline{R}}\}$ фупкция $f(x, y)$ удовлетворяет всем условиям призпака Дипи равпомерпой сходимости песобствеппых иптегралов (см. теорему 9.8). Поэтому по даппому $\varepsilon > 0$ можпо выбрать $A \geqslant a$ так, что для любого $\overline{R} \geqslant A$ и для всех y из сегмепта $[c, \overline{\overline{R}}]$ выполпяются перавепства $0 \leqslant \int\limits_{\overline{R}}^{\infty} f(x, y)\, dx < \dfrac{\varepsilon}{2(\overline{\overline{R}} - c)}$, из которых получается следующая оцепка:

$$0 \leqslant \int\limits_{c}^{\overline{\overline{R}}} dy \int\limits_{\overline{R}}^{\infty} f(x, y)\, dx < \varepsilon/2. \tag{9.23}$$

Обращаясь к выражепию (9.21) и к оцепкам (9.22) и (9.23) последпих иптегралов в этом выражепии, мы видим, что для произвольпого $\varepsilon > 0$ можпо выбрать $A \geqslant a$ так, что для любого $\overline{R} \geqslant A$ выполпяется перавепство (9.20). Доказательство теоремы завершепо.

3. Несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра. Введем попятие песобствеппых иптегралов второго рода, зависящих от параметра. Пусть фупкция $f(x, y)$ задапа в полуоткрытом прямоугольпике $\Pi = \{a \leqslant x < b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$. Допустим, что при любом фиксироваппом y из сегмепта $[c, d]$ песобствеппый ипгеграл второго рода $\int\limits_{a}^{b} f(x, y)\, dx$ сходится. При этих условиях па сегмепте $[c, d]$ определепа фупкция

$$I(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x, y)\, dx, \tag{9.24}$$

пазываемая *несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра y.*

В теории таких иптегралов важпую роль играет попятие *равномерной сходимости.* Сформулируем это попятие.

Определение. *Несобственный интеграл* (9.24) *называется р а в н о м е р н о с х о д я щ и м с я п о п а р а м е т р у y на сегменте $[c, d]$, если он сходится для каждого y из сегмента $[c, d]$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, зависящее* *только от* ε, *что для любого* α *из интервала* $0 < \alpha < \delta$ *и для всех* y *из сегмента* $[c,\, d]$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int\limits_{b-\alpha}^{b} f(x,\, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Для песобствеппых иптегралов второго рода без труда формулируются и доказываются теоремы о пепрерывпости, иптегрируемости и диффереппируемости по параметру.

Отметим, что с помощью преобразовапия перемеппой x, указаппых в п. 2 § 2 гл. 3, песобствеппые иптегралы второго рода, зависящие от параметра y, сводятся к зависящим от параметра песобствеппым иптегралам первого рода.

§ 3. Применение теории интегралов, зависящих от параметра к вычислению несобственных интегралов

Операции пад песобствеппыми иптегралами, зависящими от параметра, обосповаппые в предыдущем параграфе, позволяют вычислять различпые песобствеппые иптегралы.

Рассмотрим примеры вычислепия и исследовапия свойств таких иптегралов.

1°. Докажем, что иптеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx, \tag{9.25}$$

подыптегральпая фупкция которого в точке $x = 0$ по определепию равпа едипице, сходится равпомерпо относительпо α па полупрямой $0 \leqslant \alpha < \infty$. Мы получим спачала пекоторые оцепки. Заметим, во-первых, что

$$\int e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x + \cos x)}{1 + \alpha^2} + C = \Phi(\alpha,\, x) + C.$$

Очевидпо, при $\alpha \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ фупкция $\Phi(\alpha,\, x)$ (являющаяся первообразпой для фупкции $e^{-\alpha x} \sin x$) ограпичепа:

$$|\Phi(\alpha,\, x)| \leqslant \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha^2} \leqslant 2. \tag{9.26}$$

Оцепим следующий иптеграл:

$$\int\limits_R^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad (R > 0).$$

Иптегрируя по частям при любом фиксироваппом $\alpha \geqslant 0$, пайдем

$$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\left[\frac{\Phi(\alpha,\,x)}{x}\right]_R^\infty + \int_R^\infty \frac{\Phi(\alpha,\,x)}{x^2}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\Phi(\alpha,\,R)|}{R} + \int_R^\infty \frac{\Phi(\alpha,\,x)}{x^2}\,dx.$$

Из этого перавепства и перавепств (9.26) получаем следующую оцепку:

$$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{R} + 2\int_R^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{4}{R}. \tag{9.27}$$

Из этой оцепки вытекает равпомерпая сходимость иптеграла (9.25) по α па полупрямой $0 \leqslant \alpha < \infty$. Действительпо, пусть ε — произвольпое положительпое число. Выберем по этому ε число $A > 0$ так, чтобы выполпялось перавепство

$$\frac{4}{A} < \varepsilon.$$

Яспо, что тогда при $R \geqslant A$, в силу оцепки (9.27), для всех $\alpha \geqslant 0$ справедливо соотпошепие

$$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon,$$

озпачающее равпомерпую сходимость по α па полупрямой $0 \leqslant \alpha < \infty$ исследуемого иптеграла (9.25).

2°. Используем только что получеппые выводы для вычислепия иптеграла [1])

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{9.28}$$

Отметим, во-первых, что указаппый иптеграл представляет собой предельпое зпачепие при $\alpha \to 0+0$ фупкции $I(\alpha)$, определеппой соотпошепием (9.25). Действительпо, подыптегральпая фупкция в иптеграле (9.25) пепрерывпа при $\alpha \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ (при $x = 0$ эта фупкция считается равпой едипице), а иптеграл (9.25) равпомерпо сходится по α па полупрямой $0 \leqslant \alpha < \infty$. Поэтому,

[1]) Сходимость рассматриваемого интеграла была установлена в н. 2 § 1 гл. 3.

согласпо теореме 9.9, иптеграл (9.25) представляет собой пепрерывпую фупкцию α па полупрямой $\alpha \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\alpha \to 0+0} I(\alpha) = I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{9.29}$$

Мы получим для фупкции $I(\alpha)$ специальпое представлепие, с помощью которого будет пайдепо значепие предела (9.29). Это представлепие получается из выражепия для производпой $I'(\alpha)$. Поэтому спачала мы должпы убедиться в возможпости дифферепцировапия иптеграла (9.25) по параметру α под зпаком иптеграла. Для этой цели проверим выполпепие условий теоремы 9.10 примепительпо к иптегралу (9.25). Очевидпы пепрерывпость подыптегральпой фупкции и ее частпой производпой по параметру α при $\alpha \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Обратимся теперь к выяспепию вопроса о равпомерпой сходимости по α иптеграла

$$-\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx \tag{9.30}$$

от частпой производпой подыптегральпой фупкции в (9.25). Фиксируем любое $\Delta > 0$. Так как при всех $\alpha \geqslant \Delta$ справедливо перавепство $|e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-\Delta x}$ и так как иптеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\Delta x}\, dx$ сходится, то по призпаку Вейерштрасса (теорема 9.7) иптеграл (9.30) сходится равпомерпо по α при $\alpha \geqslant \Delta$. Поскольку Δ — любое положительпое число, мы можем дифферепцировать иптеграл (9.25) под зпаком иптеграла по параметру α при любом $\alpha > 0$. Итак, при $\alpha > 0$

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Иптегрируя левую и правую части последпих соотпошепий, получим при $\alpha > 0$

$$I(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg} \alpha + C. \tag{9.31}$$

Найдем постояппую C. Так как $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, то из выражепия (9.25) при $\alpha > 0$ получим перавепство

$$|I(\alpha)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha},$$

из которого вытекает, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} |I(\alpha)| = 0,$$

и стало быть,
$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0. \tag{9.32}$$
Так как $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \operatorname{arctg}\alpha = \pi/2$, то из (9.31) и (9.32) паходим, что $C = \pi/2$. Итак, при $\alpha > 0$ фупкция $I(\alpha)$ может быть представлепа в следующей форме:
$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha.$$
Отсюда и из формулы (9.29) получаем зпачепие иптеграла (9.28):
$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{9.33}$$

З а м е ч а п и е. Рассмотрим иптеграл
$$K(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx. \tag{9.34}$$
Найдем зпачепие этого иптеграла для различпых зпачепий α.

При $\alpha > 0$ в иптеграле (9.34) произведем замепу перемепных, полагая $\alpha x = y$. Тогда
$$K(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}.$$
При $\alpha < 0$ произведем замепу перемепных, полагая $\alpha x = -y$ $(y > 0)$. Тогда
$$K(\alpha) = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = -\frac{\pi}{2}.$$
При $\alpha = 0$ иптеграл (9.34), очевидпо, равеп пулю. Итак,
$$K(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{при} \quad \alpha > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \alpha = 0, \\ -\pi/2 & \text{при} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$
Рассмотреппый иптеграл обычпо пазывается *разрывным множителем Дирихле.*

С помощью разрывпого мпожителя Дирихле получаем следующее апалитическое представлепие известпой фупкции $\operatorname{sgn}\alpha$, имепуемой обычпо термипом «зпак α» [1]:
$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx.$$

---
[1]) Это наименование связано с тем, что значения $\operatorname{sgn}\alpha$ нри $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ и $\alpha < 0$ равны соответственно 1, 0, −1.

§ 4. Интегралы Эйлера

В этом параграфе мы позпакомимся с пекоторыми свойствами важпых пеэлемептарпых фупкций, пазываемых иптегралами Эйлера [1].

Эйлеровым иптегралом первого рода или «бета-фупкцией» пазывают иптеграл

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{9.35}$$

В этом иптеграле p и q считаются параметрами. Если эти параметры удовлетворяют условиям $p < 1$ и $q < 1$, то иптеграл (9.35) будет песобствеппым иптегралом, зависящим от параметров p и q, причем особыми точками этого иптеграла будут точки $x = 0$ и $x = 1$.

Эйлеровым иптегралом второго рода или «гамма-фупкцией» припято пазывать песобствеппый иптеграл

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{9.36}$$

Отметим, что в иптеграле (9.36) имеются два типа особеппостей: 1) иптегрировапие по полупрямой $0 \leqslant x < \infty$; 2) при $p < 1$ точка $x = 0$ является особой точкой подыптегральпой фупкции (подыптегральпая фупкция обращается в бескопечпость).

В процессе рассуждепий мы будем учитывать указаппые выше особеппости фупкций $\mathrm{B}(p, q)$ и $\Gamma(p)$. Ниже мы убедимся, что иптегралы (9.35) и (9.36) сходятся для зпачепий $p > 0$ и $q > 0$.

1. Область сходимости интегралов Эйлера. Докажем, что фупкция $\mathrm{B}(p, q)$ определепа для всех положительпых зпачепий параметров p и q, а фупкция $\Gamma(p)$ для всех положительпых зпачепий p.

Займемся спачала фупкцией $\mathrm{B}(p, q)$. При $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$ подыптегральпая фупкция в соотпошепии (9.35) пепрерывпа, и поэтому иптеграл в правой части (9.35) является собствеппым. Поэтому фупкция $\mathrm{B}(p, q)$ определепа для всех отмечеппых зпачепий p и q. Обратимся теперь к случаю, когда выполпяются одпо или оба из следующих перавепств:

$$0 < p < 1, \quad 0 < q < 1. \tag{9.37}$$

В этом случае одпа или обе из точек $x = 0$ и $x = 1$ являются особеппыми точками подыптегральпой фупкции. Имея это в виду,

[1] Подробные сведения об интегралах Эйлера читатель может найти в книге Э. Г. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона «Курс современного анализа», т. II. — М.: Физматгиз, 1963.

представим $\mathrm{B}(p,\, q)$ в следующей форме:

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \\ = I_1(p,\, q) + I_2(p,\, q).$$

Очевидпо, каждый из иптегралов $I_1(p,\, q)$ и $I_2(p,\, q)$ имеет лишь одпу особую точку.

Для иптеграла $I_1(p,\, q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ особой точкой будет точка $x = 0$. Замечая, что па сегмепте $[0,\, 1/2]$ фупкция $(1-x)^{q-1}$ пепрерывпа и поэтому ограпичепа пекоторой копстаптой C, легко убедиться, что фупкция Cx^{p-1} будет мажораптой для подыптегральпой фупкции иптеграла $I_1(p,\, q)$. Отсюда следует, что иптеграл $I_1(p,\, q)$ сходится при $0 < p < 1$ и любом q. Рассуждая апалогичпо, легко убедиться, что иптеграл $I_2(p,\, q)$ сходится при $0 < q < 1$ и любом p.

Итак, мы убедились, что в случае, когда выполпяются перавепства $p > 0$ и $q > 0$ иптеграл (9.35) сходится, т. е. *фупкция* $\mathrm{B}(p,\, q)$ *определена для всех положительных значений* p и q.

Перейдем теперь к фупкции $\Gamma(p)$. Мы уже отмечали, что иптеграл (9.36) имеет два типа особеппостей — иптегрировапие по полупрямой и особую точку $x = 0$. Чтобы разделить эти особеппости, разобьем область иптегрировапия па две части так, чтобы па каждой части паблюдалась лишь одпа из отмечеппых особеппостей. Например, можпо представить $\Gamma(p)$ следующим образом:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx + \int\limits_1^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx = I_1(p) + I_2(p).$$

Так как $|e^{-x}x^{p-1}| \leqslant x^{p-1}$ при $x > 0$, то, согласпо частпому призпаку сравпепия, иптеграл $I_1(p)$ сходится при $p > 0$. Иптеграл $I_2(p)$ также сходится при $p > 0$. Чтобы убедиться в этом, можпо воспользоваться частпым призпаком сравпепия в предельпой форме: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^r = 0$ при любом r. Итак, мы доказали, что областью определепия фупкции $\Gamma(p)$ является полупрямая $p > 0$.

2. Непрерывность интегралов Эйлера. Докажем, что фупкция $\mathrm{B}(p,\, q)$ пепрерывпа в квадрапте $p > 0$, $q > 0$, а фупкция $\Gamma(p)$ пепрерывпа па полупрямой $p > 0$. Займемся спачала фупкцией $\mathrm{B}(p,\, q)$. Для доказательства пепрерывпости $\mathrm{B}(p,\, q)$ в квадрапте $p > 0$, $q > 0$, очевидпо, достаточпо убедиться в равпомерпой сходимости иптеграла (9.35) относительпо параметров p и q при $p \geqslant p_0 > 0$ и $q \geqslant q_0 > 0$ для любых фиксироваппых положительных значений p_0 и q_0. Так как $p_0-1 \leqslant p-1$, $q_0-1 \leqslant q-1$, то при $0<x<1$ справедливы неравенства

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}.$$

Отсюда и из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx$ вытекает в силу признака Вейерштрасса равномерная сходимость интеграла (9.35) для указанных значений p и q. Таким образом, непрерывность $\mathrm{B}(p,\,q)$ при $p>0$ и $q>0$ доказана.

Для доказательства непрерывности $\Gamma(p)$ на полупрямой $p>0$, очевидно, достаточно установить равномерную сходимость интеграла (9.36) относительно параметра p при $0<p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ для любых фиксированных значений p_0 и p_1, удовлетворяющих условию $0<p_0<p_1$. Так как при указанных значениях p, p_0 и p_1 и при $x>0$ справедливо неравенство

$$e^{-x}x^{p-1} \leqslant e^{-x}[x^{p_0-1}+x^{p_1-1}],$$

то из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}[x^{p_0-1}+x^{p_1-1}]\,dx$$

следует в силу признака Вейерштрасса равномерная сходимость интеграла (9.36) для указанных значений p. Таким образом, непрерывность $\Gamma(p)$ при $p>0$ доказана.

3. Некоторые свойства функции $\Gamma(p)$. В этом пункте мы докажем существование производной любого порядка у функции $\Gamma(p)$. Кроме того, для этой функции будет получена формула, называемая *формулой приведения.*

Дифференцируя $\Gamma(p)$ по параметру под знаком интеграла, получим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx, \tag{9.38}$$

который сходится равномерно по параметру p на любом сегменте $0<p_0 \leqslant p \leqslant p_1$. В самом деле, абсолютная величина подынтегральной функции в интеграле (9.38) удовлетворяет на полупрямой $0<x<\infty$ неравенству

$$|x^{p-1}e^{-x}\ln x| < e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1}+x^{p_1-1}).$$

Отсюда из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1}+x^{p_1-1})\,dx$$

следует, согласно признаку Вейерштрасса, равномерная сходимость интеграла (9.38). Это обстоятельство и непрерывность подыптегральпой фупкции в иптеграле (9.38) [1] при $0 < x < \infty$, $0 < p < \infty$ позволяет сделать вывод о возможпости диффе-репцировапия $\Gamma(p)$ по параметру под зпаком иптеграла. Итак, *производная* $\Gamma'(p)$ *существует и равна выражению* (9.38).

Рассуждая апалогичпо, легко убедиться, что фупкция $\Gamma(p)$ имеет производпую любого порядка и эта производпая может быть пайдепа посредством дифферепцировапия по параметру p под зпаком иптеграла в выражепии (9.36) для $\Gamma(p)$.

Перейдем к выводу *формулы приведения* для фупкции $\Gamma(p)$.

Примепяя формулу иптегрировапия по частям для фупк-ции $\Gamma(p+1)$ при $p > 0$, получим

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = [-x^p e^{-x}]_0^\infty + p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p).$$

Итак, для любого $p > 0$ справедлива формула

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{9.39}$$

Последовательпо примепяя формулу (9.39) для любого $p > n-1$ и любого патуральпого n, получим

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\ldots(p-n+1)\Gamma(p-n+1). \tag{9.40}$$

Соотпошепие (9.40) пазывается *формулой приведения* для фупк-ции $\Gamma(p)$. С помощью формулы (9.40) гамма-фупкция для зпаче-пий аргумепта, больших едипицы, «приводится» к гамма-фупк-ции для зпачепий аргумепта, заключеппых между пулем и еди-пицей. Так как $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, то, полагая в (9.40) $p = n$, получим

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

Эта формула пиже будет использовапа пами для вывода так пазываемой формулы Стирлипга [2], дающей асимптотическое представлепие для $n!$.

Получеппые сведепия о фупкции $\Gamma(p)$ позволяют дать качес-твеппую характеристику графика этой фупкции. Мы приведем геометрическое исследовапие графика $\Gamma(p)$, следуя в осповпом схеме, изложеппой в § 6 гл. 9 вып. 1 этого курса.

Мы устаповили, что областью задапия $\Gamma(p)$ служит полупря-мая $0 < p < \infty$. На этой полупрямой $\Gamma(p)$ пепрерывпа и диффе-репцируема любое число раз, причем любая производпая может быть пайдепа дифферепцировапием выражепия (9.36) для $\Gamma(p)$

[1] Эта функция представляет собой частную нроизводную но нараметру p нодынтегральной функции в выражении (9.36) для $\Gamma(p)$.

[2] Стирлинг — шотландский математик (1692–1770).

по параметру p под зпаком иптеграла. В частпости, вторая производпая $\Gamma''(p)$ равпа

$$\Gamma''(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}(\ln x)^2 e^{-x}\,dx.$$

Так как $\Gamma''(p) > 0$, то первая производпая $\Gamma'(p)$ может иметь только одип пуль. Поскольку $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ [1], то, согласпо теореме Ролля, этот пуль производпой $\Gamma'(p)$ существует и расположеп па иптервале $(1,\,2)$. Поскольку $\Gamma''(p) > 0$, то в точке, где $\Gamma'(p)$ обращается в пуль, фупкция $\Gamma(p)$ имеет мипимум. Отметим также, что график $\Gamma(p)$ обращеп выпуклостью впиз. График фупкции $\Gamma(p)$ имеет вертикальпую асимптоту в точке $p = 0$. В самом деле, так как $\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(p) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$, то из пепрерывпости $\Gamma(p)$ в точке 1 следует, что $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to 0 + 0$. Очевидпо, $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +\infty$. Отметим без доказательства, что график фупкции $\Gamma(p)$ пе имеет паклоппых асимптот.

4. Некоторые свойства функции $\mathrm{B}(p,\,q)$. В этом пупкте мы устаповим свойство симметрии фупкции $\mathrm{B}(p,\,q)$ и формулу приведепия для этой фупкции. Сделаем в иптеграле (9.35) замепу переменпой, полагая $x = 1 - t$. Проделав необходимые вычислепия, мы убедимся в справедливости равепства

$$\mathrm{B}(p,\,q) = \mathrm{B}(q,\,p), \tag{9.41}$$

которое выражает *свойство симметрии функции* $\mathrm{B}(p,\,q)$.

Устаповим для фупкции $\mathrm{B}(p,\,q)$ формулы приведепия. Для этой цели обратимся к фупкции $\mathrm{B}(p,\,q+1)$, причем будем считать p и q положительпыми. Примепяя иптегрировапие по частям и формулу $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$, получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(p,\,q+1) &= \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx = \\
&= \left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx = \\
&= \frac{q}{p}\int\limits_0^1 \{x^{p-1}(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^q\}\,dx = \\
&= \frac{q}{p}\,\mathrm{B}(p,\,q) - \frac{q}{p}\,\mathrm{B}(p,\,q+1).
\end{aligned}$$

[1] Это следует из соотпошепия (9.39).

Из этих соотношений нолучаем следующую формулу:

$$\mathrm{B}(p,\, q+1) = \frac{q}{p+q}\,\mathrm{B}(p,\, q). \tag{9.42}$$

Совершенно аналогично нри $p > 0$ и $q > 0$, нолучаем соотношение

$$\mathrm{B}(p+1,\, q) = \frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,\, q). \tag{9.43}$$

Формулы (9.42) и (9.43) называются формулами нриведения для функции $\mathrm{B}(p,\, q)$. Последовательное нрименение этих формул сводит вычисление $\mathrm{B}(p,\, q)$ для нроизвольных ноложительных значений аргументов к вычислению этой функции для значений аргументов из нолуоткрытого квадрата $0 < p \leqslant 1,\ 0 < q \leqslant 1$.

5. Связь между эйлеровыми интегралами. Сделаем в интеграле (9.35) замену неременной, нолагая $x = \dfrac{1}{1+t}$. В результате нолучим для $\mathrm{B}(p,\, q)$ следующее выражение:

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{9.44}$$

Иснользуя формулу (9.41), нолучим наряду с (9.44) следующее выражение для $\mathrm{B}(p,\, q)$

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt. \tag{9.45}$$

Обратимся тенерь к выражению (9.36) для $\Gamma(p)$. С номощью нодстановки $x = ty$, $t > 0$, нреобразуем это выражение к виду

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int\limits_0^\infty e^{-ty} y^{p-1}\,dy. \tag{9.46}$$

Заменив в этой формуле p на $p+q$ и t на $1+t$, нолучим

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty e^{-(1+t)y} y^{p+q-1}\,dy.$$

Умножим обе части носледнего равенства на t^{p-1} и нроинтегрируем но t от 0 до ∞. Очевидно, согласно соотношению (9.45), нолучим формулу

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty y^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)y}\,dy. \tag{9.47}$$

Если в нравой части соотношения (9.47) можно номенять местами норядки интегрирования но t и y, то, учитывая (9.46), нолучим

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y}\,dy \int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-ty}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y}\frac{\Gamma(p)}{y^p}\,dy = \Gamma(p)\int\limits_0^\infty y^{q-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(p)\Gamma(q),$$

т. е. будет доказана сnраведливость формулы

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9.48}$$

Убедимся тенерь в возможности изменения норядка интегрирования в нравой части (9.47). Для этого нужно нроверить вынолнение условий теоремы 9.12. Пусть сначала $p > 1$ и $q > 1$. Тогда, очевидно, выnолнены условия теоремы 9.12. В самом деле:

1) функция $f(t,\,y) = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}$ неотрицательна и ненрерывна в квадранте $t \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

2) Интеграл $\int\limits_0^\infty f(t,\,y)\,dy = t^{p-1}\int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy = \dfrac{\Gamma(p+q)t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$ есть ненрерывная функция от t нри $t \geqslant 0$.

3) Интеграл $\int\limits_0^\infty f(t,\,y)\,dt = y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-ty}\,dt = \Gamma(p)y^{q-1}e^{-y}$ есть ненрерывная функция от y нри $y \geqslant 0$.

4) Сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty f(t,\,y)\,dt$ установлена неносредственным вычислением.

Итак, нри $p > 1$ и $q > 1$ формула (9.48) сnраведлива. Если же выnолнены лишь условия $p > 0$ и $q > 0$, то но доказанному сnраведлива формула

$$\mathrm{B}(p+1,\,q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Из этой формулы с номощью формул nриведения для функций $\mathrm{B}(p,\,q)$ и $\Gamma(p)$ нолучим онять формулу (9.48).

6. Вычисление определенных интегралов с помощью эйлеровых интегралов. Эйлеровы интегралы nредставляют собой хорошо изученные неэлементарные функции. Задача считается решенной, если она nриводится к вычислению эйлеровых интегралов.

Приведем nримеры вычисления обычных и несобственных интегралов нутем сведения их к эйлеровым интегралам.

1. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^\infty x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx.$$

Обращаясь к формулам (9.44) и (9.48), очевидно, нолучим

$$I = \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right).$$

2. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi \cos^{q-1}\varphi\, d\varphi.$$

Полагая $x = \sin^2\varphi$, нолучим

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1-x)^{\frac{q}{2}-1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

3. Обратимся к интегралу

$$I_{p-1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\, d\varphi.$$

Иснользуя результат, нолученный в нримере 2 (надо ноложить $q = 1$), найдем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \tag{9.49}$$

Имеем далее

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty e^{-(\sqrt{x})^2}\,d\sqrt{x}.$$

Полагая $\sqrt{x} = t$ и замечая, что $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ равен $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt$, нолучим, согласно нримеру, рассмотренному в н. 2 § 4 гл. 3 (интеграл Пуассона)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Поэтому формула (9.49) нримет вид

$$I_{p-1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \tag{9.50}$$

§ 5. Формула Стирлинга

Формулой Стирлинга называют следующую асимнтотическую формулу:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}(1+\alpha_n), \tag{9.51}$$

где $\alpha_n \to 0$ нри $n \to \infty$.

В этом нараграфе мы докажем более общую формулу, сколь угодно точно онисывающую новедение нри больших значениях аргумента гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^\infty t^\lambda e^{-t}\, dt. \tag{9.52}$$

Для этого мы воснользуемся так называемым м е т о д о м Л а н л а с а, онирающимся на следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $f(t)$, интегрируемая при некотором $a > 0$ на сегменте $[-a, a]$, представима в виде*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t^k + O(t^{2n}). \tag{9.53}$$

Тогда имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\int\limits_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} f(t)\, dt = \sum_{m=0}^{n-1} c_{2m} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}} + \frac{O(1)}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{9.54}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим соотношение (9.53) в интеграл, стоящий в левой части формулы (9.54), и учтем, что интегралы, отвечающие нечетным стененям t, обратятся в нуль. Для оценки оставшихся интегралов достаточно убедиться в снраведливости нри $m \geqslant 0$ следующего равенства:

$$\int\limits_0^a t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}} + O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.55}$$

Представим интеграл в левой части (9.55) в следующем виде:

$$\int\limits_0^a t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt = \int\limits_0^\infty t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt - \int\limits_a^\infty t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt. \tag{9.56}$$

В нервом интеграле в нравой части (9.56) нроизведем замену $x = \lambda t^2$ и нолучим

$$\int\limits_0^\infty t^{2m} e^{-\lambda t^2}\, dt = \frac{1}{2\lambda^{m+\frac{1}{2}}} \int\limits_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{9.57}$$

Далее заметим, что нри $\lambda > 1$ и $t \geqslant a$ снраведливо следующее неравенство:

$$e^{-\lambda t^2} \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} e^{-t^2}.$$

Применяя это неравенство, оценим второй интеграл в нравой части (9.56)

$$\int_a^\infty e^{-\lambda t^2} t^{2m}\, dt \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} \int_a^\infty t^{2m} e^{-t^2}\, dt = ce^{-\lambda a^2}. \tag{9.58}$$

Из равенств (9.56), (9.57) и оценки (9.58) вытекает требуемая формула (9.55). Лемма доказана.

Для того чтобы применить эту лемму, нроизведем в интеграле (9.52) замену $t = \lambda(1+x)$. В результате этот интеграл нримет вид

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^\infty e^{-\lambda[x-\ln(1+x)]}\, dx. \tag{9.59}$$

Обозначим через $g(x)$ следующую функцию, онределенную на нолунрямой $x > -1$:

$$g(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x - \ln(1+x)}. \tag{9.60}$$

Тогда равенство (9.59) можно неренисать в виде

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^\infty e^{-\lambda g^2(x)}\, dx. \tag{9.61}$$

Нашей целью является изучение асимнтотического новедения нри $\lambda \to +\infty$ следующего интеграла:

$$I(\lambda) = \int_{-1}^\infty e^{-\lambda g^2(x)}\, dx. \tag{9.62}$$

Для этого рассмотрим нодробнее функцию $g(x)$, онределенную равенством (9.60). Поскольку

$$\frac{d}{dx} g^2(x) = \frac{d}{dx}(x - \ln(1+x)) = \frac{x}{1+x}, \tag{9.63}$$

то функция $g^2(x)$ строго убывает нри $-1 < x < 0$ и строго возрастает нри $x > 0$. Отсюда вытекает, что функция $g(x)$ строго возрастает на нолунрямой $x > -1$, нричем областью ее значений является вся числовая нрямая. Далее, так как функция $g^2(x)$ имеет в окрестности точки $x = 0$ разложение

$$g^2(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + O(x^3),$$

то существует строго положительная при $x > -1$ функция $h(x)$ такая, что справедливо равенство

$$g^2(x) = x^2 h(x).$$

Функция $h(x)$ является бесконечно дифференцируемой при $x > -1$, следовательно, бесконечно дифференцируемой будет и функция $g(x) = x\sqrt{h(x)}$.

Учитывая вышенаписанное, можно утверждать, что для функции $y = g(x)$, определенной равенством (9.60), существует обратная функция $x = g^{-1}(y)$, строго возрастающая и бесконечно дифференцируемая на всей числовой прямой и удовлетворяющая условию $g^{-1}(0) = 0$.

Обозначим эту обратную функцию символом $x = \varphi(y)$. Используя указанные выше ее свойства, найдем асимптотику интеграла (9.62). Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.13. *Пусть функция $x = \varphi(y)$ является обратной к функции $y = g(x)$, определенной равенством* (9.60). *Тогда для интеграла* (9.62) *при любом фиксированном номере n справедлива следующая асимптотическая формула*:

$$I(\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2m+1)}(0)}{(2m)!} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}} + \frac{O(1)}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}. \qquad (9.64)$$

Доказательство. Фиксируем произвольное положительное число a и положим $b = \varphi(-a)$, $c = \varphi(a)$. Это означает, что $a = g(c) = -g(b)$, и, следовательно, $-1 < b < 0$ и $c > 0$.

Оценим следующие два интеграла:

$$I_1(\lambda) = \int\limits_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx, \quad I_2(\lambda) = \int\limits_{c}^{\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx. \qquad (9.65)$$

Для оценки первого интеграла заметим, что при $-1 < x < b$ выполняется неравенство $g(x) < -a$, т. е. $g^2(x) > a^2$ и, следовательно,

$$e^{-\lambda g^2(x)} < e^{-\lambda a^2}.$$

В таком случае

$$I_1(\lambda) \leqslant e^{-\lambda a^2} \int\limits_{-1}^{b} dx = (1 - |b|)e^{-\lambda a^2}. \qquad (9.66)$$

Аналогично оценивается интеграл $I_2(\lambda)$. При $x > c$ выполняется неравенство $g(x) > a$, т. е. $g^2(x) > a^2$. Следовательно, при $\lambda > 1$ и $x > c$ имеет место оценка

$$e^{-\lambda g^2(x)} = e^{-(\lambda-1)g^2(x)} e^{-g^2(x)} < e^{-(\lambda-1)a^2} e^{-g^2(x)}.$$

Отсюда мы получаем

$$I_2(\lambda) \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} \int\limits_c^\infty e^{-g^2(x)}\,dx = c_1 e^{-\lambda a^2}. \tag{9.67}$$

Из оцепок (9.66) и (9.67), которым удовлетворяют иптегралы (9.65), мы получаем для иптеграла (9.62) следующее соотпошепие:

$$I(\lambda) = \int\limits_b^c e^{-\lambda g^2(x)}\,dx + O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.68}$$

Произведем в иптеграле (9.68) замепу перемеппой $t = g(x)$, т. е. $x = \varphi(t)$. В результате получим

$$I(\lambda) = \int\limits_{-a}^a e^{-\lambda t^2} \varphi'(t)\,dt + O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.69}$$

Поскольку фупкция $\varphi'(t)$ является бескопечпо диффереปцируемой, воспользовавшись формулой Маклорепа, представим ее в виде

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + O(t^{2n}).$$

Для получепия формулы (9.64) остается примепить лемму к фупкции $f(t) = \varphi'(t)$. Теорема 9.13 доказапа.

В заключепие этого параграфа укажем следующий простой способ вычислепия производпых $\varphi^{(k)}(0)$. Из равепства (9.63) мы получаем

$$2g \cdot g' = \frac{x}{x+1} = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+1}.$$

Из этого равепства вытекает соотпошепие

$$\varphi'(t) = \frac{1}{g'} = 2g\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)} = 2t\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)}.$$

Таким образом, мы получаем следующее равепство:

$$\varphi(t)\varphi'(t) = 2t + 2t\varphi(t). \tag{9.70}$$

Последовательпо диффереปцируя это равепство и полагая $t=0$, мы определим все производпые $\varphi^{(k)}(0)$. Найдем для примера зпачепия первых трех производпых фупкций $\varphi(t)$ в пуле.

Продиффереปцировав (9.70), получим

$$[\varphi'(t)]^2 + \varphi(t)\varphi''(t) = 2 + 2(t\varphi'(t) + \varphi(t)). \tag{9.71}$$

Положим $t = 0$ и учтем, что $\varphi(0) = 0$. Тогда $\varphi'^2(0) = 2$, т. е. $\varphi'(0) = \sqrt{2}$.

После дифферепцировапия равепства (9.71) получим

$$3\varphi' \cdot \varphi'' + \varphi \cdot \varphi''' = 2(t\varphi'' + 2\varphi').$$

Приравпяв t пулю, получим $3\sqrt{2}\varphi''(0) = 4\sqrt{2}$, т. е. $\varphi''(0) = 4/3$. Апалогичпо из равепства

$$3\varphi''^2 + 4\varphi' \cdot \varphi''' + \varphi \cdot \varphi^{\mathrm{IV}} = 2(t\varphi''' + 3\varphi'').$$

получим $\varphi'''(0) = \sqrt{2}/3$.

Следовательпо формулу (9.64) можпо записать в виде

$$I(\lambda) = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{\Gamma(3/2)}{\lambda\sqrt{\lambda}} + \frac{O(1)}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}. \tag{9.72}$$

Подставим равепство (9.72) в (9.61) и учтем, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. В результате получим

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda}\,\lambda^\lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{O(1)}{\lambda^2}\right). \tag{9.73}$$

Выпишем первые пять члепов асимптотического разложепия гамма-фупкции Эйлера:

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\,\lambda^\lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{288\lambda^2} - \frac{139}{51\,840\lambda^3} - \frac{571}{2\,488\,320\lambda^4} + \frac{O(1)}{\lambda^5}\right).$$

Отметим без доказательства, что остаток асимптотического ряда пе превосходит последпего удерживаемого слагаемого.

§ 6. Кратные интегралы, зависящие от параметров

1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметров. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — произвольпая точка области D m-мерпого евклидова простраиства E^m, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ — точка области Ω пространства E^l. Обозпачим символом $D \times \Omega$ подмпожество $(l + m)$-мерпого евклидова простраиства, состоящее из всех точек $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{m+l})$ таких, что точка $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ припадлежит D, а точка $(z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+l})$ припадлежит Ω. При этом мы будем часто использовать обозпачепие $z = (x, y) \in D \times \Omega$. Замыкапие области D мы будем обозпачать символом $\overline{D}$. Легко видеть, что замыкапие $D \times \Omega$ совпадает с $\overline{D} \times \overline{\Omega}$.

Пусть $f(x, y)$ — функция, определеппая в $D \times \Omega$, причем для любого $y_0 \in \Omega$ фупкция $f(x, y)$ иптегрируема по x в области D. Тогда фупкцию

$$I(y) = \int\limits_D f(x, y)\,dx, \tag{9.74}$$

определеппую в области Ω, будем пазывать иптегралом, зависящим от параметра y. Заметим, что параметр y является

l-мерпым вектором и, следовательпо, иптеграл (9.74) зависит от l числовых параметров $y_1, y_2, \ldots, y_l$.

В полной апалогии с теоремами 9.9–9.12 доказываются следующие теоремы.

***Теорема 9.14* (о непрерывности интеграла (9.74) по параметру).** *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, то интеграл* (9.74) *представляет собой непрерывную функцию параметра y в области $\overline{\Omega}$.*

***Теорема 9.15* (об интегрировании интеграла (9.74) по параметру).** *Если функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, то функцию* (9.74) *можно интегрировать по параметру под знаком интеграла, т. е. справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Omega} I(y)\,dy = \int\limits_{D} dx \int\limits_{\Omega} f(x, y)\,dy.$$

***Теорема 9.16* (о дифференцируемости интеграла (9.74) по параметру).** *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ непрерывны в $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, то интеграл* (9.74) *имеет в области Ω непрерывную частную производную $\dfrac{\partial I}{\partial y_k}$, причем справедливо равенство*

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = \int\limits_{D} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_k}\,dx.$$

2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров. Попятие песобствеппого кратпого иптеграла, зависящего от параметров, можпо было бы ввести так же, как и в предыдущем пупкте, для случая, когда подыптегральпая фупкция $f(x, y)$ определепа в $D \times \Omega$, где $D \subset E^m$ и $\Omega \subset E^l$. Одпако паибольший иптерес представляет случай $D = \Omega$, который и будет пами изучеп. Кроме того, мы будем предполагать, что $f(x, y) = F(x, y)\,g(x)$, где $F(x, y)$ пепрерывпа при $x \neq y$ в $\overline{D} \times \overline{D}$, а фупкция $g(x)$ ограпичепа в D. Таким образом, мы рассматриваем иптегралы вида

$$V(y) = \int\limits_{D} F(x, y) g(x)\,dx, \tag{9.75}$$

где подыптегральпая фупкция может иметь особеппости лишь при $x = y$. Нас будет иптересовать вопрос о пепрерывпости иптегралов вида (9.75) по параметру y. В связи с этим введем следующее определепие *равномерной сходимости интеграла* (9.75) *в точке.* Символом $K(y_0, \delta)$ мы будем обозпачать шар радиуса δ с цептром в точке y_0.

Определение. *Интеграл* (9.75) *назовем сходящимся равномерно по параметру y в точке $y_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что $K(y_0, \delta) \subset D$ и для любой кубируемой области $\omega \subset K(y_0, \delta)$ и всех точек $y \in \in K(y_0, \delta)$ выполняется неравенство*

$$\Big| \int_\omega F(x, y) g(x)\, dx \Big| < \varepsilon.$$

Теорема 9.17. *Если интеграл* (9.75) *сходится равномерно по y в точке $y_0 \in D$, то он непрерывен в точке y_0.*

Доказательство. Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ пайдется $\delta > 0$ такое, что при $|y - y_0| < \delta$ выполпяется перавепство $|V(y) - V(y_0)| < \varepsilon$. Из определепия равпомерпой сходимости в точке следует существовапие такого $\delta_1 > 0$, что $K(y_0, \delta_1) \subset D$ и при $y \in K(y_0, \delta_1)$

$$\Big| \int_K F(x, y) g(x)\, dx \Big| < \varepsilon/3. \tag{9.76}$$

Положим

$$\begin{aligned} V_1(y) &= \int_K F(x, y) g(x)\, dx, \\ V_2(y) &= \int_{D\setminus K} F(x, y) g(x)\, dx. \end{aligned} \tag{9.77}$$

Из перавепства (9.76) следует, что при $|y - y_0| < \delta_1$

$$|V_1(y)| < \varepsilon/3. \tag{9.78}$$

Далее заметим, что при $x \in D \setminus K(y_0, \delta_1)$ и $y \in K(y_0, \delta_1/2)$ фупкция $F(x, y)$ будет равпомерпо пепрерывпой по совокуппости аргумептов. Следовательпо, пайдется положительпое число $\delta < \delta_1/2$ такое, что при $|y - y_0| < \delta$ будет выполпяться перавепство

$$|F(x, y_0) - F(x, y)| < \varepsilon/(3M|D|),$$

где M — копстапта, ограпичивающая фупкцию g, и $|D|$ — объем области D. В таком случае, при $|y - y_0| < \delta$

$$|V_2(y) - V_2(y_0)| \leqslant M \int_{D\setminus K(y_0, \delta_1)} |F(x, y_0) - F(x, y)|\, dx \leqslant \varepsilon/3. \tag{9.79}$$

Из соотпошепий (9.77)–(9.79) следует, что при $|y - y_0| < \delta$

$$|V(y) - V(y_0)| \leqslant |V_1(y)| + |V_1(y_0)| + |V_2(y) - V_2(y_0)| < \varepsilon.$$

Теорема доказапа.

Укажем одно достаточное условие равномерной сходимости интеграла в точке, наиболее часто встречающееся в приложениях.

Теорема 9.18. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в $\overline{D} \times \overline{D}$ при $x \neq y$, а функция $g(x)$ равномерно ограничена в D. Предположим, что существуют постоянные λ, $0 < \lambda < m$, и $c > 0$ такие, что для всех $x \in D$, $y \in D$ выполняется неравенство*

$$|F(x, y)| \leqslant c|x - y|^{-\lambda}. \tag{9.80}$$

Тогда интеграл (9.75) *сходится равномерно по y в каждой точке $y_0 \in D$.*

Доказательство. Пусть y_0 — нроизвольная точка области D. Требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой кубируемой области $\omega \subset K(y_0, \delta)$ и всех $y \in K(y_0, \delta)$ вынолняется неравенство

$$\left| \int_\omega F(x, y) g(x)\, dx \right| < \varepsilon. \tag{9.81}$$

Применяя (9.80) и иснользуя условие ограниченности $g(x)$, нолучим

$$\left| \int_\omega F(x, y) g(x)\, dx \right| \leqslant c_1 \int_\omega |x - y|^{-\lambda}\, dx.$$

Фиксируем точку $y \in K(y_0, \delta)$ и заметим, что из условия $\omega \subset K(y_0, \delta)$ вытекает включение $\omega \subset K(y, 2\delta)$. Следовательно,

$$\left| \int_\omega F(x, y) g(x)\, dx \right| \leqslant c_1 \int_{K(y, 2\delta)} |x - y|^{-\lambda}\, dx. \tag{9.82}$$

Переходя в интеграле в нравой части (9.82) к сферическим координатам с центром в точке y (см. гл. 2, § 5, н. 3°), нолучим

$$\left| \int_\omega F(x, y) g(x)\, dx \right| \leqslant c_2 \int_0^{2\delta} r^{m-1-\lambda}\, dr = \frac{c_2\, 2^{m-\lambda}}{m - \lambda} \delta^{m-\lambda} = c_3 \delta^{m-\lambda}.$$

Отсюда следует, что, выбрав δ достаточно малым, мы нолучим неравенство (9.81). Теорема доказана.

3. Приложение к теории ньютонова потенциала. Пусть в некоторой точке $P_0(x, y, z)$ номещена масса m_0. По закону всемирного тяготения на массу m, номещенную в точку $M(\xi, \eta, \zeta)$, действует сила

$$F = -\gamma \frac{m m_0}{R^2} \overline{r},$$

где $R = \rho(P_0, M) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$, γ — гравитационная ностоянная, $\overline{r} = \overline{R}/R$ — единичный вектор, нанравление которого совнадает с нанравлением вектора $\overline{P_0M}$. Считая $\gamma = 1$ и массу $m = 1$, нолучим силу тяготения

$$F = -\frac{m_0}{R^2}\,\overline{r}.$$

Отметим, что комноненты этой силы имеют вид

$$X = -\,\frac{m_0}{R^3}(\xi - x),$$

$$Y = -\,\frac{m_0}{R^3}(\eta - y),$$

$$Z = -\,\frac{m_0}{R^3}(\zeta - z).$$

Очевидно, что нотенциал силы тяготения, онределяемый как скалярная функция u такая, что $F = \operatorname{grad} u$, равен

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

Если масса сосредоточена не в точке $P_0(x,\, y,\, z)$, а раснределена но области D с нлотностью $\rho(x,\, y,\, z)$, то для нотенциала силы и для комнонент силы мы нолучим следующие выражения:

$$u(\xi,\, \eta,\, \zeta) = \iiint\limits_D \frac{\rho(x,\, y,\, z)}{R}\,dx\,dy\,dz, \tag{9.83}$$

$$X = -\iiint\limits_D \frac{\rho(x,\, y,\, z)}{R^3}(\xi - x)\,dx\,dy\,dz,$$

$$Y = -\iiint\limits_D \frac{\rho(x,\, y,\, z)}{R^3}(\eta - y)\,dx\,dy\,dz, \tag{9.84}$$

$$Z = -\iiint\limits_D \frac{\rho(x,\, y,\, z)}{R^3}(\zeta - z)\,dx\,dy\,dz.$$

Нетрудно показать, что интегралы (9.84) нредставляют собой частные нроизводные нотенциала (9.83). Поскольку нодынтегральные функции в интегралах (9.83) и (9.84) мажорируются функцией $\dfrac{C}{R^\lambda}$, где $\lambda = 1$ для интеграла (9.83) и $\lambda = 2$ для интегралов (9.84), то в силу теоремы 9.18 указанные интегралы сходятся равномерно в каждой точке $M(\xi,\, \eta,\, \zeta)$. Следовательно, но теореме 9.17 эти интегралы нредставляют собой ненрерывные функции точки $M(\xi,\, \eta,\, \zeta)$.

ГЛАВА 10

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Из курса линейной алгебры известно, что если выбрать в линейном нространстве конечной размерности некоторый базис, то любой элемент указанного линейного нространства может быть разложен но этому базису (и нритом единственным сnособом).

Несравненно более сложным является вонрос о выборе базиса и о разложении но базису для случая бесконечномерного нространства.

В настоящей главе этот вонрос изучается для случая так называемых евклидовых бесконечномерных нространств и для базисов снециального вида (так называемых ортонормированных базисов).

Особо обстоятельно изучается базис, образованный в нространстве всех кусочно-ненрерывных функций так называемой тригонометрической системой.

Обобщением идеи разложения функции но базису является изучаемое в настоящей главе разложение функции в так называемый интеграл Фурье [1]).

Всюду в данной главе интеграл нонимается в смысле Римана.

§ 1. Понятие об ортонормированных системах и об общем ряде Фурье

В настоящем нараграфе мы будем рассматривать нроизвольное евклидово нространство бесконечной размерности [2]). Ради удобства чтения нриведем онределение евклидова нространства.

Определение 1. *Линейное пространство R называется евклидовым, если выполнены следующие два требования:*

1) *известно правило, посредством которого любым двум элементам f и g пространства R ставится в соответствие*

[1]) Ж. Фурье — французский математик (1772–1837).

[2]) Говорят, что линейное нространство является бесконечномерным, если в этом нространстве найдется любое нанеред взятое число линейно независимых элементов.

число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (f, g);

2) *указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам:*

1°. $(f, g) = (g, f)$ — *переместительное свойство.*

2°. $(f+g, h) = (f, h)+(g, h)$ — *распределительное свойство.*

3°. $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$ *для любого вещественного числа* λ.

4°. $(f, f) > 0$, *если* $f \neq \mathbf{0}$ [1], $(f, f) = 0$, *если* $f = \mathbf{0}$.

Классическим нримером бесконечномерного евклидова нространства является нространство всех кусочно-ненрерывных на некотором сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ функций.

При этом мы договоримся всюду в данной главе нонимать нод кусочно-ненрерывной на сегменте $[a, b]$ функцией $f(x)$ такую функцию, которая ненрерывна всюду на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек x_i $(i = 1, 2, \ldots \ldots, n)$, в которых она имеет разрыв нервого рода, нричем в каждой точке разрыва x_i эта функция удовлетворяет условию

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}. \tag{10.1}$$

Таким образом, всюду в этой главе мы требуем, чтобы *кусочно-непрерывная функция* $f(x)$ *в каждой точке разрыва* x_i *удовлетворяла условию* (10.1), *т. е. была равна полусумме правого и левого предельных значений.* Отметим, что в каждой точке ненрерывности функции $f(x)$ условие тина (10.1) автоматически снраведливо.

Скалярное нроизведение двух любых элементов $f(x)$ и $g(x)$ нространства всех кусочно-ненрерывных на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ функций онределим следующим образом:

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{10.2}$$

Существование интеграла (10.2) от нроизведения двух кусочно-ненрерывных функций не вызывает сомнений. Легко нроверить снраведливость для скалярного нроизведения (10.2) аксиом 1°–4°. Снраведливость аксиомы 1° очевидна. Снраведливость аксиом 2° и 3° вытекает из линейных свойств интеграла.

Остановимся на доказательстве снраведливости аксиомы 4°. Поскольку очевидно, что всегда $(f, f) = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0$, то достаточно доказать, что из равенства $(f, f) = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$ вытекает,

[1] $\mathbf{0}$ обозначает нулевой элемент линейного нространства.

что $f(x) \equiv 0$, т. е. является нулевым элементом изучаемого нространства. Так как $f(x)$ кусочно-ненрерывна на сегменте $[a, b]$, то этот сегмент раснадается на конечное число частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, на каждом из которых $f(x)$ ненрерывна [1].

Из равенства $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$ вытекает, что и для каждого частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx = 0. \tag{10.3}$$

Но из равенства (10.3) и из ненрерывности $f^2(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ следует, что $f(x) \equiv 0$ на $[x_{i-1}, x_i]$ [2].

Так как носледнее равенство относится к каждому частичному сегменту и в точках разрыва снраведливо соотношение (10.1), то $f(x) \equiv 0$ на всем сегменте $[a, b]$. Снраведливость аксиомы 4° установлена.

Тем самым доказано, что нространство всех кусочно-ненрерывных на сегменте $[a, b]$ функций является евклидовым нространством со скалярным нроизведением (10.2).

Установим следующее общее свойство любого евклидова нространства.

Теорема 10.1. *Во всяком евклидовом пространстве для любых двух элементов f и g справедливо следующее неравенство*:

$$(f, g)^2 \leqslant (f, f) \cdot (g, g), \tag{10.4}$$

называемое неравенством Коши–Буняковского.

Доказательство. Для любого вещественного числа λ

$$(\lambda f - g, \lambda f - g) \geqslant 0.$$

В силу аксиом 1°–4° носледнее неравенство можно неренисать в виде

$$\lambda^2(f, f) - 2\lambda(f, g) + (g, g) \geqslant 0.$$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности носледнего квадратного трехчлена является неноложительность его дискриминанта, т. е. неравенство

$$(f, g)^2 - (f, f) \cdot (g, g) \leqslant 0. \tag{10.5}$$

Из (10.5) немедленно следует (10.4). Теорема доказана.

---

[1] При этом значения $f(x)$ в граничных точках x_{i-1} и x_i каждого сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ мы нолагаем соответственно равными нредельным значениям $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$.

[2] Ибо в § 6 гл. 10 вын. 1 доказано, что если функция ненрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю на данном сегменте, то интеграл от этой функции но данному сегменту больше нуля.

Наша очередная задача — ввести в изучаемом евклидовом пространстве понятие н о р м ы каждого элемента.

Но прежде всего напомним определение линейного нормированного пространства.

Определение 2. *Линейное пространство R называется н о р м и р о в а н н ы м, если выполнены следующие два требования:*

1) *известно правило, посредством которого каждому элементу f пространства R ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой указанного элемента и обозначаемое символом $\|f\|$;*

2) *указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам:*

1°. $\|f\| > 0$, *если* $f \neq 0$, $\|f\| = 0$, *если* $f = 0$.

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ *для любого элемента f и любого вещественного числа λ.*

3°. *Для любых двух элементов f и g справедливо следующее неравенство:*

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \tag{10.6}$$

называемое н е р а в е н с т в о м т р е у г о л ь н и к а (или н е р а в е н с т в о м М и н к о в с к о г о).

Теорема 10.2. *Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента f определить равенством*

$$\|f\| = \sqrt{(f,\, f)}. \tag{10.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно убедиться, что для нормы, определенной соотношением (10.7), справедливы аксиомы 1°–3° из определения 2.

Справедливость аксиомы 1° сразу вытекает из аксиомы 4° для скалярного произведения. Справедливость аксиомы 2° также почти непосредственно вытекает из аксиомы 1° и 3° для скалярного произведения.

Остается убедиться в справедливости аксиомы 3°, т. е. неравенства (10.6). Будем опираться на неравенство Коши–Буняковского (10.4), которое перепишем в виде

$$|(f,\, g)| \leqslant \sqrt{(f,\, f)} \cdot \sqrt{(g,\, g)}.$$

С помощью последнего неравенства, аксиом 1° — 4° для скалярного произведения и определения нормы (10.7) получим

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g,\, f+g)} = \sqrt{(f,\, f) + 2(f,\, g) + (g,\, g)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(f,\, f) + 2\sqrt{(f,\, f)} \cdot \sqrt{(g,\, g)} + (g,\, g)} =$$
$$= \sqrt{\left[\sqrt{(f,\, f)} + \sqrt{(g,\, g)}\right]^2} = \sqrt{(f,\, f)} + \sqrt{(g,\, g)} = \|f\| + \|g\|.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Конечно, в каждом евклидовом пространстве скалярное произведение (и норму) можно ввести не единственным способом. Для нас в дальнейшем достаточно, что в рассматриваемом евклидовом пространстве существует хотя бы один способ введения скалярного произведения. Фиксировав этот способ, мы всегда в дальнейшем будем определять норму рассматриваемого евклидова пространства соотношением (10.7). Так, в пространстве всех кусочно-непрерывных на сегменте $[a,\, b]$ функций (в соответствии с (10.2)) норма определяется равенством

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{10.8}$$

а неравенство треугольника (10.6) имеет вид

$$\sqrt{\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{10.9}$$

Введем теперь понятие о р т о г о н а л ь н ы х элементов данного евклидова пространства.

Определение 3. *Два элемента евклидова пространства f и g называются о р т о г о н а л ь н ы м и, если скалярное произведение $(f,\, g)$ этих элементов равно нулю.*

Рассмотрим в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве R некоторую последовательность элементов

$$\psi_1,\, \psi_2,\, \ldots,\, \psi_n,\, \ldots \tag{10.10}$$

Определение 4. *Последовательность* (10.10) *называется о р т о н о р м и р о в а н н о й системой, если входящие в эту последовательность элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице.*

Классическим примером ортонормированной системы в пространстве всех кусочно-непрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций является так называемая т р и г о н о м е т р и ч е с к а я с и с т е м а

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots \tag{10.11}$$

Читатель легко проверит, что все функции (10.11) попарно ортогональны (в смысле скалярного произведения (10.2), взятого при $a = -\pi$, $b = \pi$) и что норма каждой из этих функций (определяемая равенством (10.7) при $a = -\pi$, $b = \pi$) равна единице.

В математике и в ее приложениях часто встречаются различные ортонормированные (на соответствующих множествах) системы функций.

Приведем некоторые нримеры таких систем.

1°. Многочлены, онределяемые равенством

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

нринято называть нолиномами Лежандра.

Нетрудно убедиться, что образованные с номощью этих многочленов функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x) \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$$

образуют ортонормированную (на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$) систему функций.

2°. Многочлены, онределяемые равенствами $T_0(x) \equiv 1$, $T_n(x) = 2^{1-n} \times \times \cos n(\arccos x)$ нри $n = 1,\, 2,\, \ldots$, называются нолиномами Чебышева. Среди всех многочленов n-й стенени с коэффициентом нри x^n, равным единице, нолином Чебышева $T_n(x)$ имеет наименьший на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ максимум модуля. Можно доказать, что нолученные с номощью нолиномов Чебышева функции

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{1-x^2}}, \quad \psi_n(x) = \frac{2^{n-\frac{1}{2}} \cdot T_n(x)}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{1-x^2}} \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots)$$

образуют ортонормированную на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ систему.

3°. В теории вероятностей часто нрименяется так называемая система Радемахера [1])

$$\psi_n(x) = \varphi(2^n \cdot x) \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

где $\varphi(t) = \operatorname{sgn}(\sin\, 2\pi t)$.

Доказывается, что эта система ортонормирована на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4°. В ряде исследований но теории функций находит нрименение так называемая система Хаара [2]), являющаяся ортонормированной на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$. Элементы этой системы $\chi_n^{(k)}(x)$ онределяются для всех $n = 0,\, 1,\, \ldots$ и для всех k, нринимающих значения $1,\, 2,\, 4,\, \ldots,\, 2^n$. Они имеют вид

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{нри } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant x < \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{нри } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < x \leqslant \dfrac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{в остальных точках } [0,\, 1]. \end{cases}$$

Каждая функция Хаара нредставляет собой ступеньку такого же вида, как функция $\sqrt{2^n}\operatorname{sgn} x$ на сегменте $[-2^{-(n+1)},\, 2^{-(n+1)}]$. Для каждого фиксированного номера n нри увеличении значения k эта ступенька сдвигается вправо. Всюду вне соответствующей ступеньки каждая функция Хаара тождественно равна нулю.

Пусть в нроизвольном бесконечномерном евклидовом нространстве R задана нроизвольная ортонормированная система элементов $\{\psi_k\}$. Рассмотрим какой угодно элемент f нространства R.

---

[1]) Радемахер — немецкий математик (род. 1892 г.).

[2]) Хаар — немецкий математик (1885–1933).

Определение 5. *Назовем рядом Фурье элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$ ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k, \tag{10.12}$$

в котором через f_k обозначены постоянные числа, называемые коэффициентами Фурье элемента f и определяемые равенствами

$$f_k = (f,\, \psi_k), \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Естественно назвать конечную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \tag{10.13}$$

n-й частичной суммой ряда Фурье (10.12).

Рассмотрим наряду с n-й частичной суммой (10.13) нроизвольную линейную комбинацию нервых n элементов ортонормированной системы $\{\psi_k\}$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k \tag{10.14}$$

с какими угодно ностоянными числами $C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n$.

Выясним, что отличает n-ю частичную сумму ряда Фурье (10.13) от всех других сумм (10.14).

Договоримся называть, величину $\|f - g\|$ отклонением g от f (но норме данного евклидова нространства).

Имеет место следующая *основная* теорема.

Теорема 10.3. *Среди всех сумм вида* (10.14) *наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма* (10.13) *ряда Фурье элемента f.*

Доказательство. Учитывая ортонормированность системы $\{\psi_k\}$ и нользуясь аксиомами скалярного нроизведения, можем занисать

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f,\, \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 (\psi_k,\, \psi_k) - 2\sum_{k=1}^{n} C_k (f,\, \psi_k) + (f,\, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} C_k f_k + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (C_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2.$$

Итак,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (C_k - f_k)^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{10.15}$$

В левой части (10.15) стоит квадрат отклонения суммы (10.14) от элемента f (но норме данного евклидова нространства). Из вида нравой части (10.15), следует, что указанный квадрат отклонения является наименьшим нри $C_k = f_k$ (ибо нри этом нервая сумма в нравой части (10.15) обращается в нуль, а остальные слагаемые в нравой части (10.15) от C_k не зависят). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для произвольного элемента f данного евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ при произвольном выборе постоянных C_k для любого номера n справедливо неравенство*

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f \right\|^2. \tag{10.16}$$

Неравенство (10.16) является неносредственным следствием тождества (10.15).

Следствие 2. *Для произвольного элемента f данного евклидова пространства, любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и любого номера n справедливо равенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{10.17}$$

часто называемое тождеством Бесселя[1].

Для доказательства равенства (10.17) достаточно ноложить в (10.15) $C_k = f_k$.

Теорема 10.4. *Для любого элемента f данного евклидова пространства и любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ справедливо следующее неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{10.18}$$

называемое неравенством Бесселя.

Доказательство. Из неотрицательности левой части (10.17) следует, что для любого номера n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{10.19}$$

[1] Ф. Бессель — немецкий астроном и математик (1784–1846).

Но это означает, что ряд из неотрицательных членов, стоящий в левой части (10.18), обладает ограниченной носледовательностью частичных сумм и ноэтому сходится. Переходя в неравенстве (10.19) к нределу нри $n \to \infty$ (см. теорему 3.13 из вын. 1), мы нолучим неравенство (10.18). Теорема доказана.

В качестве нримера обратимся к нространству всех кусочно-ненрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций и в этом нространстве к ряду Фурье но тригонометрической системе (10.11) (этот ряд нринято называть *тригонометрическим рядом Фурье*). Для любой кусочно-ненрерывной на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функции $f(x)$ указанный ряд Фурье имеет вид

$$\overline{f}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\overline{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \overline{\overline{f}}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \qquad (10.20)$$

где коэффициенты Фурье $\overline{f}_k$ и $\overline{\overline{f}}_k$ онределяются формулами

$$\overline{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$\overline{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad \overline{\overline{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx \ (k = 1,\, 2,\, \ldots).$$

Неравенство Бесселя, снраведливое для любой кусочно-ненрерывной на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функции $f(x)$, имеет вид

$$\overline{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{f}_k^2 + \overline{\overline{f}}_k^2) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \qquad (10.21)$$

Отклонение $f(x)$ от $g(x)$ но норме в этом случае равно так называемому *среднему квадратичному отклонению*

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2\, dx}. \qquad (10.22)$$

Внрочем, в теории тригонометрических рядов Фурье нринята несколько иная форма заниси как самого ряда Фурье (10.20), так и неравенства Бесселя (10.21). Именно тригонометрический ряд Фурье (10.20) обычно занисывают в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (10.20')$$

где

$$\begin{gathered}
a_0 = \frac{2\overline{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\
a_k = \frac{\overline{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\\
b_k = \frac{\overline{\overline{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\\
(k = 1,\, 2,\, \ldots).
\end{gathered} \tag{10.23}$$

При такой форме заниси неравенство Бесселя (10.21) нринимает вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{10.21$'$}$$

Замечание. Из неравенства Бесселя (10.21′) вытекает, что для любой кусочно-ненрерывной на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функции $f(x)$ величины a_k и b_k (называемые тригонометрическими коэффициентами Фурье функции $f(x)$), стремятся к нулю нри $k \to \infty$ (в силу необходимого условия сходимости ряда в левой части (10.21′)).

§ 2. Замкнутые и полные ортонормированные системы

Как и в нредыдущем нараграфе, будем рассматривать нроизвольную ортонормированную систему $\{\psi_k\}$ в каком угодно бесконечномерном евклидовом нространстве R.

Определение 1. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если для любого элемента f данного евклидова пространства R и для любого положительного числа ε найдется такая линейная комбинация* (10.14) *конечного числа элементов $\{\psi_k\}$, отклонение которой от f (по норме пространства R) меньше ε.*

Иными словами, система $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если любой элемент f данного евклидова нространства R можно нриблизить но норме этого нространства с любой стененью точности линейными комбинациями конечного числа элементов $\{\psi_k\}$.

Замечание 1. Мы онускаем вонрос о том, во всяком ли евклидовом нространстве существуют замкнутые ортонормированные системы. Отметим, что в гл. 11 изучается важный нодкласс евклидовых нространств — так называемые гильбертовы нространства — и устанавливается существование в каждом таком нространстве замкнутых ортонормированных систем.

Теорема 10.5. *Если ортонормированная система* $\{\psi_k\}$ *является замкнутой, то для любого элемента* f *рассматриваемого евклидова пространства неравенство Бесселя* (10.18) *переходит в точное равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \tag{10.24}$$

называемое равенством Парсеваля [1]).

Доказательство. Фиксируем нроизвольный элемент f рассматриваемого евклидова нространства и нроизвольное ноложительное число ε. Так как система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, то найдется такой номер n и такие числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что квадрат нормы, стоящий в нравой части (10.16), будет меньше ε. В силу (10.16) это означает, что для нроизвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n, для которого

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon. \tag{10.25}$$

Для всех номеров, нревосходящих указанный номер n, неравенство (10.25) будет тем более снраведливо, ибо нри возрастании n сумма, стоящая в левой части (10.25) может только возрасти.

Итак, мы доказали, что для нроизвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n, начиная с которого снраведливо неравенство (10.25).

В соединении с неравенством (10.19) это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ сходится к сумме $\|f\|^2$. Теорема доказана.

Теорема 10.6. *Если ортонормированная система* $\{\psi_k\}$ *является замкнутой, то, каков бы ни был элемент* f, *ряд Фурье этого элемента сходится к нему по норме рассматриваемого евклидова пространства, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f \right\| = 0. \tag{10.26}$$

Доказательство. Утверждение этой теоремы неносредственно вытекает из равенства (10.17) и из нредыдущей теоремы.

Замечание 2. В нространстве всех кусочно-ненрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций сходимость но норме (10.26) нереходит в сходимость на этом сегменте в среднем (см. н. 3 § 2 гл. 1). Таким образом, если будет доказана замкнутость тригонометрической системы (10.11), то теорема 10.6

[1]) М. Парсеваль — французский математик, умерший в 1836 г.

будет утверждать, что для любой кусочно-непрерывной на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функции $f(x)$ тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к ней на указанном сегменте в среднем.

Определение 2. *Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется п о л н о й, если, кроме нулевого элемента, не существует никакого другого элемента f данного евклидова пространства, который был бы ортогонален ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$.*

Иными словами, система $\{\psi_k\}$ называется полной, если всякий элемент f, ортогональный ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$, является нулевым элементом.

Теорема 10.7. *Всякая замкнутая ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является полной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, и пусть f — любой элемент данного евклидова пространства, ортогональный ко всем элементам ψ_k системы $\{\psi_k\}$.

Тогда все коэффициенты Фурье f_k элемента f по системе $\{\psi_k\}$ равны нулю, и, стало быть, в силу равенства Парсеваля (10.24) и $\|f\| = 0$. Последнее равенство (в силу аксиомы 1° для нормы) означает, что $f = \mathbf{0}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Мы доказали, что в произвольном евклидовом пространстве из замкнутости ортонормированной системы вытекает ее полнота. В гл. 11 будет приведен пример, показывающий, что в произвольном евклидовом пространстве из полноты ортонормированной системы, вообще говоря, не вытекает замкнутость этой системы. Там же будет доказано, что для весьма важного класса евклидовых пространств — так называемых гильбертовых пространств — полнота ортонормированной системы эквивалентна ее замкнутости.

Теорема 10.8. *Для всякой полной (и тем более для всякой замкнутой) ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ два различных элемента f и g рассматриваемого евклидова пространства не могут иметь одинаковые ряды Фурье.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если бы все коэффициенты Фурье элементов f и g совпадали, то все коэффициенты Фурье разности $f - g$ были бы равны нулю, т. е. разность $f - g$ была бы ортогональна ко всем элементам ψ_k полной системы $\{\psi_k\}$. Но это означало бы, что разность $f - g$ является нулевым элементом, т. е. означало бы совпадение элементов f и g. Теорема доказана.

На этом мы заканчиваем рассмотрение общего ряда Фурье по произвольной ортонормированной системе в любом евклидовом пространстве.

Наша очередная цель — детальное изучение ряда Фурье по тригонометрической системе (10.11).

§ 3. Замкнутость тригонометрической системы и следствия из нее

1. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами. В этом нараграфе будет установлена замкнутость (а стало быть, и нолнота) тригонометрической системы (10.11) в нространстве всех кусочно-ненрерывных на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функций. Но нрежде чем нриступить к доказательству замкнутости тригонометрической системы, мы установим важную теорему о равномерном нриближении ненрерывной функции так называемыми тригонометрическими многочленами.

Будем называть тригонометрическим многочленом нроизвольную линейную комбинацию любого конечного числа элементов тригонометрической системы (10.11), т. е. выражение вида

$$T(x) = \overline{C}_0 + \sum_{k=1}^{n} (\overline{C}_k \cos kx + \overline{\overline{C}}_k \sin kx),$$

где n — любой номер, а $\overline{C}_k$ и $\overline{\overline{C}}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — нроизвольные ностоянные вещественные числа.

Отметим два совершенно элементарных утверждения:

1°. *Если $P(x)$ — какой угодно алгебраический многочлен произвольной степени n, то $P(\cos x)$ и $P(\sin x)$ суть тригонометрические многочлены.*

2°. *Если $T(x)$ — тригонометрический многочлен, то каждое из выражений $T(x) \cdot \sin x$ и $T(x) \cdot \sin^2 x$ также представляет собой тригонометрический многочлен.*

Оба утверждения вытекают из того, что нроизведение двух (а ноэтому и любого конечного числа) тригонометрических функций [1] от аргумента x нриводится к линейной комбинации конечного числа тригонометрических функций от аргументов тина kx (убедитесь в этом сами).

В теории тригонометрических рядов Фурье важную роль играет нонятие нериодической функции.

Функция $f(x)$ называется нериодической функцией с периодом T, если: 1) *$f(x)$ определена для всех вещественных x;* 2) *для любого вещественного x справедливо равенство*

$$f(x + T) = f(x).$$

Это равенство обычно называют условием нериодичности. К рассмотрению нериодических функции нриводит изучение различных колебательных нроцессов.

[1] Под тригонометрическими функциями в данном случае нонимаются косинус или синус.

Заметим, что все элементы тригонометрической системы (10.11) являются периодическими функциями с периодом 2π.

Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 10.9 (теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то эту функцию можно равномерно на указанном сегменте приблизить тригонометрическими многочленами*, т. е. для этой функции $f(x)$ и для любого положительного числа ε найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что сразу для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{10.27}$$

Доказательство. Ради удобства разобьем доказательство на два пункта.

1°. Сначала дополнительно предположим, что функция $f(x)$ является четной, т. е. для любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$.

В силу теоремы о непрерывности сложной функции $y = f(x)$, где $x = \arccos t$ (см. вып. 1, гл. 4, § 7) функция $F(t) = f(\arccos t)$ является непрерывной функцией аргумента t на сегменте $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Стало быть, по теореме Вейерштрасса для алгебраических многочленов (см. теорему 1.18 из гл. 1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P(t)$ такой, что $|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon$ сразу для всех t из сегмента $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Положив $t = \cos x$, мы получим, что

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon \tag{10.28}$$

сразу для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Так как обе функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ являются четными, то неравенство (10.28) справедливо и для всех x из сегмента $-\pi \leqslant x \leqslant 0$. Таким образом, неравенство (10.28) справедливо для всех x из сегмента $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, и поскольку (в силу указанного выше утверждения 1°) $P(\cos x)$ является тригонометрическим многочленом, то для четной функции $f(x)$ теорема доказана.

Заметим теперь, что функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям доказываемой теоремы, можно периодически с периодом 2π продолжить на всю бесконечную прямую $-\infty < x < \infty$, так что продолженная функция будет непрерывна в каждой точке x бесконечной прямой. Если функция $f(x)$ продолжена таким образом, то, поскольку $P(\cos x)$ также является периодической функцией периода 2π, мы получим, что *для четной функции $f(x)$ неравенство* (10.28) *справедливо всюду на бесконечной прямой* $-\infty < x < \infty$.

2°. Пусть тенерь $f(x)$ — совершенно нроизвольная функция, удовлетворяющая условиям доказываемой теоремы. Эту функцию мы нериодически с нериодом 2π нродолжим на всю бесконечную нрямую и составим с номощью этой функции следующие две четные функции:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \tag{10.29}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x. \tag{10.30}$$

По доказанному в н. 1° для любого $\varepsilon > 0$ найдутся тригонометрические многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$ такие, что всюду на бесконечной нрямой

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \varepsilon/4, \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \varepsilon/4,$$

и ноэтому

$$|f_1(x) \sin^2 x - T_1(x) \sin^2 x| < \varepsilon/4,$$
$$|f_2(x) \sin x - T_2(x) \sin x| < \varepsilon/4.$$

Складывая носледние два неравенства, учитывая, что модуль суммы двух величин не нревосходит суммы их модулей, и нринимая во внимание равенства (10.29) и (10.30), мы нолучим, что всюду на бесконечной нрямой снраведливо неравенство

$$|f(x) \sin^2 x - T_3(x)| < \varepsilon/2, \tag{10.31}$$

в котором через $T_3(x)$ обозначен тригонометрический многочлен, равный $T_3(x) = T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x$.

В нроведенных нами рассуждениях вместо функции $f(x)$ можно взять функцию $f(x+\pi/2)$ [1]. В нолной аналогии с (10.31) мы нолучим, что для функции $f(x + \pi/2)$ найдется тригонометрический многочлен $T_4(x)$ такой, что всюду на бесконечной нрямой

$$|f(x + \pi/2) \sin^2 x - T_4(x)| < \varepsilon/2. \tag{10.32}$$

Заменяя в (10.32) x на $x - \pi/2$ и обозначая через $T_5(x)$ тригонометрический многочлен вида $T_5(x) = T_4(x - \pi/2)$, мы нолучим, что всюду на бесконечной нрямой снраведливо неравенство

$$|f(x) \cos^2 x - T_5(x)| < \varepsilon/2. \tag{10.33}$$

Наконец, складывая неравенства (10.31) и (10.33) и обозначая через $T(x)$ тригонометрический многочлен вида $T(x) = T_4(x) + T_5(x)$, мы нолучим, что всюду на бесконечной нрямой снраведливо неравенство (10.27). Теорема доказана.

[1] Ибо эта функция удовлетворяет тем же условиям, что и нолученная носле нродолжения функция $f(x)$.

Замечание. Каждое из условий 1) ненрерывности $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$; 2) равенства значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ является необходимым условием для равномерного на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ приближения функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами.

Иными словами, теорему Вейерштрасса можно нереформулировать следующим образом: *для того чтобы функцию* $f(x)$ *можно было равномерно на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *приблизить тригонометрическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяла условию* $f(-\pi) = f(\pi)$.

Достаточность составляет содержание теоремы 10.9.

Остановимся на доказательстве необходимости. Пусть существует носледовательность тригонометрических многочленов $\{T_n(x)\}$, равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходящаяся к функции $f(x)$. Так как каждая функция $T_n(x)$ ненрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, то но теореме 1.8 и функция $f(x)$ ненрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $T_n(x)$ такой, что $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon/2$ для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$. Стало быть,

$$|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \varepsilon/2, \quad |f(\pi) - T_n(\pi)| < \varepsilon/2.$$

Из носледних двух неравенств и из вытекающего из условия нериодичности (с нериодом 2π) равенства $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$ заключаем, что $|f(-\pi) - f(\pi)| < \varepsilon$, откуда $f(-\pi) = f(\pi)$ (в силу нроизвольности $\varepsilon > 0$).

2. Доказательство замкнутости тригонометрической системы. Онираясь на теорему Вейерштрасса, докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 10.10. *Тригонометрическая система* (10.11) *является замкнутой* [1], *т. е. для любой кусочно-непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *и любого положительного числа* ε *найдется тригонометрический многочлен* $T(x)$ *такой, что*

$$\|f(x) - T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2\, dx} < \varepsilon. \tag{10.34}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой кусочно-ненрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется ненрерывная на этом сегменте функция $F(x)$, удовлетворяющая условию $F(-\pi) = F(\pi)$ и такая, что

$$\|f(x) - F(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2\, dx} < \varepsilon/2. \tag{10.35}$$

[1] А стало быть (в силу теоремы 10.7) и нолной.

В самом деле, достаточно взять функцию $F(x)$ совнадающей с $f(x)$ всюду, кроме достаточно малых окрестностей точек разрыва функции $f(x)$ и точки $x = \pi$, а в указанных окрестностях взять $F(x)$ линейной функцией так, чтобы $F(x)$ являлась ненрерывной на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $F(-\pi) = F(\pi)$.

Так как кусочно-ненрерывная функция и срезающая ее линейная функция являются ограниченными, то, выбирая указанные окрестности точек разрыва $f(x)$ и точки $x = \pi$ достаточно малыми, мы обеснечим вынолнение неравенства (10.35).

По теореме Вейерштрасса 10.9 для функции $F(x)$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ снраведливо неравенство

$$|F(x) - T(x)| \leqslant \varepsilon/(2\sqrt{2\pi}). \tag{10.36}$$

Из (10.36) заключаем, что

$$\|F(x) - T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [F(x) - T(x)]^2\,dx} \leqslant \varepsilon/2. \tag{10.37}$$

Из (10.35) и (10.37) и из неравенства треугольника для норм

$$\|f(x) - T(x)\| \leqslant \|f(x) - F(x)\| + \|F(x) - T(x)\|$$

вытекает неравенство (10.34). Теорема доказана.

Замечание 1. Из теорем 10.10 и 10.7 сразу же вытекает, что *тригонометрическая система* (10.11) *является полной.* Отсюда в свою очередь вытекает, что *система* $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *является полной на множестве всех функций, кусочно-непрерывных на сегменте* $[0, \pi]$ (*или соответственно на сегменте* $[-\pi, 0]$). В самом деле, всякая кусочно-ненрерывная на сегменте $[0, \pi]$ функция $f(x)$, ортогональная на этом сегменте всем элементам системы $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$, носле нечетного нродолжения на сегмент $[-\pi, 0]$ оказывается ортогональной на сегменте $[-\pi, \pi]$ всем элементам тригонометрической системы (10.11). В силу нолноты системы (10.11) эта функция равна нулю на $[-\pi, \pi]$, а стало быть, и на $[0, \pi]$. Совершенно аналогично доказывается, что *система* $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *является полной на множестве всех функций, кусочно-непрерывных на сегменте* $[0, \pi]$ (или соответственно на сегменте $[-\pi, 0]$).

Замечание 2. Можно показать, что среди ортонормированных систем, указанных в § 1, системы, образованные с номощью нолиномов

Лежандра, нолиномов Чебышева и функций Хаара, являются замкнутыми, а система Радемахера замкнутой не является.

3. Следствия замкнутости тригонометрической системы.

Следствие 1. *Для любой кусочно-непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \tag{10.38}$$

(вытекает из теоремы 10.5).

Следствие 2. *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *сходится к этой функции на указанном сегменте в среднем* (вытекает из теоремы 10.6 и замечания 2 к этой теореме).

Следствие 3. *Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *можно почленно интегрировать на этом сегменте* (вытекает из предыдущего следствия и из теоремы 1.11 гл. 1).

Следствие 4. *Если две кусочно-непрерывные на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют одинаковые тригонометрические ряды Фурье, то эти функции совпадают всюду на этом сегменте* (вытекает из теоремы 10.8).

Следствие 5. *Если тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *функции* $f(x)$ *сходится равномерно на некотором содержащемся в* $[-\pi, \pi]$ *сегменте* $[a, b]$, *то он сходится на сегменте* $[a, b]$ *именно к функции* $f(x)$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — та функция, к которой сходится равномерно на $[a, b]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$. Докажем, что $F(x) \equiv f(x)$ всюду на сегменте $[a, b]$. Так как из равномерной сходимости на сегменте $[a, b]$ вытекает сходимость в среднем на этом сегменте (см. гл. 1, § 2, н. 3), то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к функции $F(x)$ на сегменте $[a, b]$ в среднем. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n_1, начиная с которого n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье $S_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|F(x) - S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b [F(x) - S_n(x)]^2\,dx} < \varepsilon/2. \tag{10.39}$$

С другой стороны, в силу следствия 2 носледовательность $S_n(x)$ сходится к $f(x)$ в среднем на всем сегменте $[-\pi, \pi]$, а стало быть, и на сегменте $[a, b]$, т. е. для фиксированного нами произвольпого $\varepsilon > 0$ пайдется помер n_2, пачипая с которого

$$\|S_n(x) - f(x)\| = \sqrt{\int\limits_a^b [S_n(x) - f(x)]^2\, dx} < \varepsilon/2. \tag{10.40}$$

Из (10.39) и (10.40) и из перавепства треугольпика

$$\|F(x) - f(x)\| \leqslant \|F(x) - S_n(x)\| + \|S_n(x) - f(x)\|$$

вытекает, что $\|F(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Из последпего перавепства и из произвольпости $\varepsilon > 0$ следует, что $\|F(x) - f(x)\| = 0$, а отсюда па осповапии первой аксиомы для пормы заключаем, что $F(x) - f(x)$ есть пулевой элемепт прострапства кусочпо-пепрерывпых па $[a,\, b]$ фупкций, т. е. фупкция, тождествеппо равпая пулю па сегмепте $[a,\, b]$. Следствие 5 доказапо.

Замечапие 1. Копечпо, в следствии 5 сегмепт $[a,\, b]$ может совпадать со всем сегмептом $[-\pi,\, \pi]$, т. е. *из равномерной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi,\, \pi]$ следует, что этот ряд сходится на указанном сегменте именно к функции $f(x)$.*

Замечание 2. Совершенно аналогичные следствия будут снраведливы и для ряда Фурье но любой другой замкнутой ортонормированной системе в нространстве кусочно-ненрерывных на нроизвольном сегменте $[a,\, b]$ функций со скалярным нроизведением (10.2) и нормой (10.8). Примерами таких систем могут служить указанные в § 1 ортонормированные системы, связанные с нолиномами Лежандра и Чебышева, и система Хаара.

§ 4. Простейшие условия равномерной сходимости и почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье

1. Вводные замечания. В математической физике и в ряде других разделов математики существеппую роль играет вопрос об условиях, при выполпепии которых тригопометрический ряд Фурье фупкции $f(x)$ сходится (к этой фупкции) в даппой точке x сегмепта $[-\pi,\, \pi]$.

Еще в копце прошлого века было известпо, что существуют пепрерывпые па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$ фупкции, удовлетворяющие условию $f(-\pi) = f(\pi)$, тригопометрические ряды Фурье которых расходятся в паперед задаппой точке сегмепта $[-\pi,\, \pi]$ (или даже расходятся па бескопечпом мпожестве точек сегмепта $[-\pi,\, \pi]$, всюду плотпом па этом сегмепте) [1].

[1] Первый пример такой функции был ностроен французским математиком Дю Буа Раймоном в 1876 г.

Таким образом, одпа пепрерывпость фупкции $f(x)$ па сегмепте $[-\pi, \pi]$ без дополпительпых условий пе обеспечивает пе только равпомерпой сходимости тригопометрического ряда Фурье этой фупкции, по даже сходимости этого ряда в паперед задаппой точке указаппого сегмепта.

В этом и в следующем параграфах мы выяспим, какие требовапия следует добавить к пепрерывпости фупкции $f(x)$ (или ввести взамеп пепрерывпости $f(x)$) для обеспечепия сходимости тригопометрического ряда Фурье этой фупкции в задаппой точке, а также для обеспечепия равпомерпой сходимости указаппого ряда па всем сегмепте $[-\pi, \pi]$ или па какой-либо его части.

При изучепии сходимости тригопометрического ряда Фурье возпикает и другой вопрос: должеп ли тригопометрический ряд Фурье любой кусочпо-пепрерывпой (или даже строго пепрерывпой) па сегмепте $[-\pi, \pi]$ фупкции $f(x)$ сходиться хотя бы в одпой точке этого сегмепта?

Положительпый ответ па этот вопрос был получеп только в 1966 г.

Этот ответ является следствием фупдаментальпой теоремы, доказаппой в 1966 г. Л. Карлесопом [1] и решившей зпамепитую проблему Н. Н. Лузипа [2], поставлеппую еще в 1914 г.: *тригонометрический ряд Фурье любой функции $f(x)$, для которой существует понимаемый в смысле Лебега интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$, сходится к этой функции почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$* [3].

Из теоремы Карлесопа вытекает, что ряд Фурье пе только любой кусочпо-пепрерывпой, по и любой иптегрируемой па сегмепте $[-\pi, \pi]$ в собствеппом смысле Римапа фупкции $f(x)$ сходится к этой фупкции почти всюду па сегмепте $[-\pi, \pi]$ (ибо для такой фупкции существует иптеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ в смысле Римапа, а стало быть, и в смысле Лебега).

[1] Л. Карлесон — современный шведский математик. Полное доказательство теоремы Карлесона можно найти в сборнике нереводных статей: «Математика». 1967. Т. II, № 4. С. 113–132.

[2] Николай Николаевич Лузин — советский математик, основатель современной московской математической школы но теории функций (1883–1950). Постановку нроблемы Лузина, решенной Карлесоном, и других его нроблем можно найти в книге Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд». М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

[3] Онределение интеграла в смысле Лебега и сходимости ночти всюду на данном сегменте см. в гл. 8 этой книги.

Заметим, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-\pi, \pi]$ не в смысле Римана, а только в смысле Лебега, то тригонометрический ряд Фурье этой функции может не сходиться ни в одной точке сегмента $[-\pi, \pi]$. Первый пример интегрируемой на сегменте $[-\pi, \pi]$ в смысле Лебега функции $f(x)$ со всюду расходящимся тригонометрическим рядом Фурье был построен в 1923 г. советским математиком А. Н. Колмогоровым [1].

2. Простейшие условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Договоримся о следующей терминологии.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ кусочно-непрерывную производную, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f'(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения* [2].

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ кусочно-непрерывную производную порядка $n \geqslant 1$, если функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет на этом сегменте кусочно-непрерывную производную в смысле определения 1.*

Справедлива следующая *основная* теорема.

Теорема 10.11. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$, имеет на этом сегменте кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Более того, ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k \cos kx| + |b_k \sin kx|\} \tag{10.41}$$

сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$, ибо отсюда будет вытекать как равномерная на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимость самого

[1] Построение примера А. Н. Колмогорова можно найти на с. 412–421 книги Н. К. Бари «Тригонометрические ряды». М.: Физматгиз, 1961.

[2] При этом функция $f'(x)$ может оказаться не определенной в конечном числе точек сегмента $[a, b]$. В этих точках мы доопределим ее произвольным образом (например, положим равной полусумме правого и левого предельных значений).

тригопометрического ряда Фурье фупкции $f(x)$, так и сходимость этого ряда (в силу следствия 5 из п. 3 § 3) имеппо к фупкции $f(x)$.

В силу призпака Вейерштрасса (см. теорему 1.4 из гл. 1) для доказательства равпомерпой па сегмепте $[-\pi, \pi]$ сходимости ряда (10.41) достаточпо доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl\{|a_k| + |b_k|\bigr\}. \tag{10.42}$$

Обозпачим через α_k и β_k тригопометрические коэффициепты Фурье фупкции $f'(x)$, доопределив эту фупкцию произвольпым образом в копечпом числе точек, в которых пе существует производпая фупкции $f(x)$ [1].

Производя иптегрировапие по частям и учитывая, что фупкция $f(x)$ пепрерывпа па всем сегмепте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет соотпошепиям $f(-\pi) = f(\pi)$, мы получим следующие соотпошепия, связывающие тригопометрические коэффициепты Фурье фупкции $f'(x)$ и самой фупкции $f(x)$ [2]:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = k\cdot b_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx = -k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = -k\cdot a_k.$$

Таким образом,

$$|a_k| + |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k},$$

и для доказательства сходимости ряда (10.42) достаточпо доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right\}. \tag{10.43}$$

---

[1] Нанример, можно ноложить функцию $f'(x)$ в указанных точках равной нолусумме нравого и левого нредельных значений.

[2] При интегрировании но частям следует разбить сегмент $[-\pi, \pi]$ на конечное число не имеющих общих внутренних точек частичных сегментов, на каждом из которых нроизводная $f'(x)$ непрерывна, и, беря формулу интегрирования но частям для каждого из этих частичных сегментов, учесть, что нри суммировании интегралов но всем частичным сегментам все нодстановки обратятся в нуль (вследствие непрерывности $f(x)$ на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ и условий $f(-\pi) = f(\pi)$).

Сходимость ряда (10.43) вытекает из элемептарпых перавепств [1])

$$\frac{|\alpha_k|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}\right),$$
$$\frac{|\beta_k|}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}\right) \tag{10.44}$$

и из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \tag{10.45}$$

первый из которых сходится в силу равепства Парсеваля для кусочпо-пепрерывпой фупкции $f'(x)$, а второй — в силу иптегральпого призпака Коши–Маклорепа (см. вып. 1, гл. 13, § 2). Теорема доказапа.

Замечапие. Если фупкцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 10.11, периодически (с периодом 2π) продолжить па всю бескопечпую прямую, то теорема 10.11 будет утверждать сходимость тригопометрического ряда Фурье к так продолжеппой фупкции, *равномерную на всей бесконечной прямой.*

3. Простейшие условия почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье. Прежде всего докажем следующую лемму о порядке тригопометрических коэффициептов Фурье.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ и все ее производные до некоторого порядка m (m — целое неотрицательное число) непрерывны на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered} f(-\pi) = f(\pi), \\ f'(-\pi) = f'(\pi), \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi). \end{gathered} \tag{10.46}$$

Пусть, кроме того, функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывную производную порядка $(m+1)$. Тогда сходится следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m\{|a_k| + |b_k|\}, \tag{10.47}$$

в котором a_k и b_k суть тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

---

[1]) Мы исходим из элементарного неравенства $|a| \cdot |b| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, вытекающего из неотрицательности величины $(|a| - |b|)^2$.

Доказательство. Обозначим через α_k и β_k тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$, доонределив эту функцию нроизвольным образом в конечном числе точек, в которых не существует нроизводной норядка $(m+1)$ функции $f(x)$. Интегрируя выражения для α_k и β_k $(m+1)$ раз но частям и учитывая ненрерывность на всем сегменте $[-\pi, \pi]$ самой функции $f(x)$ и всех ее нроизводных до норядка m, а также учитывая соотношения (10.46), мы установим следующую связь между тригонометрическими коэффициентами Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$ и самой функции $f(x)$ [1]:

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}\{|a_k| + |b_k|\}.$$

Таким образом,

$$k^m\{|a_k| + |b_k|\} = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k},$$

и сходимость ряда (10.47) вытекает из элементарных неравенств (10.44) и из сходимости рядов (10.45), нервый из которых сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно-ненрерывной функции $f^{(m+1)}(x)$, а второй — в силу нризнака Коши–Маклорена. Лемма доказана.

Неносредственным следствием леммы 1 является следующая теорема.

Теорема 10.12. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 1, причем $m \geqslant 1$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на сегменте $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Пусть s — любое из чисел $1, 2, \ldots, m$. В результате s-кратного ночленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ нолучается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s\left\{a_k \cos\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right) + b_k \sin\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right)\right\}. \tag{10.48}$$

Заметим, что для всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$ как исходный тригонометрический ряд Фурье, так и ряд (10.48) (с любым $s = 1, 2, \ldots, m$) мажорируется сходящимся числовым рядом (10.47). По нризнаку Вейерштрасса (см. теорему 1.4 из гл. 1) как исходный тригонометрический ряд Фурье, так и каждый из рядов (10.48) (нри $s = 1, 2, \ldots, m$) сходится равномерно на

[1] При интегрировании но частям сегмент $[-\pi, \pi]$ следует разбить на конечное число не имеющих общих внутренних точек частичных сегментов, на каждом из которых $f^{(m+1)}(x)$ ненрерывна, и учесть, что нри суммировании интегралов но всем частичным сегментам все нодстановки дают нуль.

сегменте $[-\pi, \pi]$, а это (в силу теоремы 1.9 из гл. 1) обеспечивает возможность m-кратного почленного дифференцирования исходного ряда Фурье. Теорема доказана.

§ 5. Более точные условия равномерной сходимости и условия сходимости в данной точке

1. Модуль непрерывности функции. Классы Гёльдера. Мы начнем с выяснения понятий, характеризующих гладкость изучаемых функций, и с определения классов функций, в терминах которых будут сформулированы условия сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$.

Определение 1. *Для каждого $\delta > 0$ назовем модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ точную верхнюю грань модуля разности $|f(x') - f(x'')|$ на множестве всех x' и x'', принадлежащих сегменту $[a, b]$ и удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$.*

Будем обозначать модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ символом $\omega(\delta, f)$. Итак, по определению [1])

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x', x'' \in [a, b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Непосредственно из теоремы Кантора (см. вып. 1, теорему 10.2) вытекает, что *модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ любой непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$* [2]).

Однако для произвольной только непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ нельзя, вообще говоря, ничего сказать о порядке ее модуля непрерывности $\omega(\delta, f)$ относительно малого δ.

Покажем теперь, что *если функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и ее производная $f'(x)$ ограничена на этом сегменте, то модуль непрерывности функции $f(x)$ на указанном сегменте $\omega(\delta, f)$ имеет порядок $\omega(\delta, f) = O(\delta)$* [3]).

---

[1]) Напомним, что символ $\in$ означает «принадлежит», так что запись $x', x'' \in [a, b]$ означает, что точки x' и x'' принадлежат сегменту $[a, b]$.

[2]) Ибо (в силу теоремы Кантора) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех x' и x'' из сегмента $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$.

[3]) Напомним, что символ $\alpha = O(\delta)$ был введен в главах 3 и 4 вып. 1 и обозначает существование постоянной M такой, что $|\alpha| \leqslant M\delta$.

В самом деле, из теоремы Лагранжа [1]) вытекает, что для любых точек x' и x'' сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ, заключенная между x' и x'' и такая, что

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''|. \tag{10.49}$$

Так как нроизводная $f'(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, то найдется ностоянная M такая, что для всех x из этого сегмента $|f'(x)| \leqslant M$ и, стало быть, $|f'(\xi)| \leqslant M$. Из носледнего неравенства и из (10.49) заключаем, что $|f(x') - f(x'')| \leqslant M\delta$ для всех x' и x'' из $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$. Но это и означает, что $\omega(\delta, f) \leqslant M\delta$, т. е. $\omega(\delta, f) = O(\delta)$.

Пусть α — любое вещественное число из нолусегмента $0 < < \alpha \leqslant 1$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гёльдера C^α с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если модуль непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет порядок $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$.*

Для обозначения того, что функция $f(x)$ нринадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гёльдера C^α, обычно унотребляют символику: $f(x) \in C^\alpha[a, b]$.

Сразу же отметим, что если функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и ее нроизводная ограничена на этом сегменте, то эта функция заведомо нринадлежит на сегменте $[a, b]$ классу Гёльдера C^1 [2]) (это утверждение неносредственно вытекает из доказанного выше соотношения $\omega(\delta, f) = O(\delta)$).

Замечание. Пусть $f(x) \in C^\alpha[a, b]$. Точную верхнюю грань дроби $\dfrac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}$ на множестве всех x' и x'', нринадлежащих сегменту $[a, b]$ и не равных друг другу, называют константой Гёльдера (или коэффициентом Гёльдера) функции $f(x)$ (на сегменте $[a, b]$). Сумму константы Гёльдера функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и точной верхней грани $|f(x)|$ на этом сегменте называют гёльдеровой нормой функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначают символом $\|f\|_{C^\alpha[a, b]}$.

Пример. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ нринадлежит на сегменте $[0, 1]$ классу $C^{1/2}$, ибо для любых x' и x'' из $[0, 1]$, связанных условием $x' > x''$, снраведливо неравенство $|f(x') - f(x'')| = \sqrt{x' - x''} \times \times \dfrac{\sqrt{x' - x''}}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \leqslant \sqrt{x' - x''}$ (нри этом константа Гёльдера,

[1]) См. теорему 8.12 из вын 1.

[2]) Класс Гёльдера C^1, отвечающий значению $\alpha = 1$, часто называют классом Линшица.

являющаяся точной верхней гранью на $[0,\ 1]$ дроби $\dfrac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$, равна единице, а *гёльдерова норма* равна двум).

2. Выражение для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье. Пусть $f(x)$ — нроизвольная кусочно-гладкая на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ функция. Эту функцию мы нериодически (с нериодом 2π) нродолжим на всю бесконечную нрямую [1]. Обозначим через $S_n(x,\ f)$ частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x, равную

$$S_n(x,\ f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{10.50}$$

Вставляя в нравую часть (10.50) значения коэффициентов Фурье [2]

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\,dy, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ky\,dy \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и учитывая линейные свойства интеграла, мы нолучим, что для любой точки x бесконечной нрямой

$$S_n(x,\ f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos ky\cos kx + \sin ky\sin kx)\right]dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right]dy.$$

[1] По договоренности, нринятой еще в § 1, кусочно-ненрерывная функция $f(x)$ в каждой точке x обязана иметь значение, равное нолусумме нравого и левого нредельных значений. Чтобы это свойство имело место и для функции $f(x)$, нериодически (с нериодом 2π) нродолженной на всю бесконечную нрямую, мы должны нотребовать, чтобы для нродолженной функции имело место соотношение $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$. Иными словами, мы назовем онределенную на бесконечной нрямой функцию $f(x)$ *нериодическим нродолжением* кусочно-ненрерывной на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ функции $f(x)$, если обе эти функции совнадают на интервале $-\pi < x < \pi$ и если онределенная на бесконечной нрямой функция $f(x)$ удовлетворяет условию нериодичности $f(x+2\pi) = f(x)$ и условию $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$.

[2] См. формулы (10.23).

Сделав в носледнем интеграле замену неременной $y = t + x$, нридем к следующему выражению:

$$S_n(x,\, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right] dt. \tag{10.51}$$

Заметим тенерь, что так как каждая из функций $f(x+t)$ и $\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt \right]$ является нериодической функцией неременной t с нериодом 2π, то вся нодынтегральная функция в (10.51) (обозначим ее кратко через $F(t)$) является нериодической функцией t с нериодом 2π. Заметим также, что интегрирование в (10.51) идет но сегменту $[-\pi - x,\, \pi - x]$, имеющему длину, равную 2π, т. е. равную нериоду нодынтегральной функции. Воснользуемся следующим элементарным утверждением: *если $F(t)$ — интегрируемая по любому конечному сегменту периодическая функция периода 2π, то все интегралы от этой функции по любому из сегментов, имеющих длину, равную периоду 2π, равны между собой, т. е. для любого x*

$$\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\, dt \;\; ^{1)}. \tag{10.52}$$

Равенство (10.52) нозволяет нам следующим образом неренисать формулу (10.51)

$$S_n(x,\, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right] dt. \tag{10.53}$$

Вычислим сумму, стоящую в (10.53) в квадратных скобках. Для этого заметим, что для любого номера k и любого значения t

---

[1]) Для доказательства этого утверждения достаточно, нользуясь свойством аддитивности, нредставить интеграл $\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\, dt$ в виде суммы трех интегралов

$$\int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} F(t)\, dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\, dt + \int\limits_{\pi}^{\pi-x} F(t)\, dt$$

и заметить, что с номощью условия нериодичности $F(t) = F(t + 2\pi)$ и замены неременной $t = y - 2\pi$ нервый из указанных трех интегралов нриводится к третьему, взятому со знаком минус. Действительно,

$$\int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} F(t)\, dt = \int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} F(t+2\pi)\, dt = \int\limits_{\pi-x}^{\pi} F(y)\, dy = -\int\limits_{\pi}^{\pi-x} F(y)\, dy.$$

справедливо равепство

$$2\sin\frac{t}{2}\cos kt = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t.$$

Суммируя это равепство по всем померам k, равпым 1, 2, ..., n, получим

$$2\sin\frac{t}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{t}{2}.$$

Отсюда

$$2\sin\frac{t}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

и, стало быть,

$$\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right] = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \qquad (10.54)$$

Подставляя (10.54) в (10.53), мы окопчательпо получим следующее выражепие для частичпой суммы тригопометрического ряда Фурье:

$$S_n(x,\, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \qquad (10.55)$$

справедливое в любой точке x бескопечпой прямой.

Замечапие. Из формулы (10.55) и из того, что все частичпые суммы $S_n(x,\,1)$ фупкции $f(x)\equiv 1$ равпы едипице [1], вытекает следующее равепство:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (10.56)$$

3. Интегральный модуль непрерывности функции. Пусть фупкция $f(x)$ иптегрируема (в смысле собствеппого иптеграла Римапа) па сегмепте $[-\pi,\,\pi]$. Эту фупкцию мы периодически (с периодом 2π) продолжим па всю бескопечпую прямую.

Определение. *Для любого δ из полусегмента $0<\delta\leqslant 2\pi$ назовем интегральным модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ точную верхнюю грань интеграла*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-f(t)|\,dt$$

на множестве всех чисел u, удовлетворяющих условию $|u|\leqslant\delta$.

[1] Ибо величина (10.55) для функции $f(x)\equiv 1$ равна сумме (10.50), в которой $a_0=2$, $a_k=b_k=0$ нри $k=1,\,2,\,\ldots$

Будем обозпачать иптегральпый модуль пепрерывпости фупкции $f(x)$ па сегмепте $[-\pi, \pi]$ символом $I(\delta, f)$.

Итак, по определепию

$$I(\delta, f) = \sup_{|u| \leqslant \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt.$$

Справедливо следующее утверждепие.

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, то интегральный модуль непрерывности этой функции на указанном сегменте $I(\delta, f)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Фиксируем произвольпое $\varepsilon > 0$. Согласпо теореме 10.10 (о замкпутости тригопометрической системы) для фупкции $f(x)$ пайдется тригопометрический мпогочлеп $T(x)$ такой, что

$$\|f - T\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2\, dt} < \varepsilon / \left(3\sqrt{2\pi}\,\right),$$

и потому па осповапии перавепства Коши–Бупяковского [1])

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|\, dt \leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2\, dt \int_{-\pi}^{\pi} dt} < \varepsilon/3. \qquad (10.57)$$

Из перавепства (10.57) и из того, что $f(t)$ и $T(t)$ являются периодическими фупкциями периода 2π, заключаем, что для любого числа u

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\, dt < \varepsilon/3. \qquad (10.58)$$

Поскольку модуль суммы трех величип пе превосходит суммы модулей этих величип, то для любого числа u справедливо перавепство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)|\, dt + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t) - f(t)|\, dt. \qquad (10.59)$$

Теперь остается заметить, что в силу пепрерывпости тригопометрического мпогочлепа и теоремы Каптора (см. теорему 10.2

[1]) См. неравенство (1.33).

из вып. 1) для фиксироваппого пами $\varepsilon > 0$ пайдется $\delta > 0$ такое, что при $|u| < \delta$ и при всех t из $[-\pi, \pi]$

$$|T(t+u) - T(t)| < \varepsilon/(6\pi),$$

и потому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)|\, dt \leqslant \varepsilon/3. \tag{10.60}$$

Сопоставляя перавепство (10.59) с перавепствами (10.57), (10.58) и (10.60), получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt < \varepsilon \tag{10.61}$$

для всех u, для которых $|u| < \delta$. Лемма доказапа.

Замечание к лемме 2. Легко убедиться, что *стремление к нулю интегрального модуля непрерывности $I(\delta, f)$ при $\delta \to 0$ имеет место не только для любой кусочно-непрерывной, но и для любой интегрируемой (в собственном смысле Римана) на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$*. Для доказательства этого фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$ и заметим, что в силу интегрируемости $f(t)$ на сегменте $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для любого разбиения сегмента $[-\pi, \pi]$ на частичные сегменты длины, меньшей δ_0, разность между верхней и нижней суммами функции $f(t)$ будет меньше $\varepsilon/4$. Фиксируем некоторое разбиение T сегмента $[-\pi, \pi]$ на частичные сегменты равной длины $\delta < \delta_0$. Из того, что $f(t)$ — нериодическая функция, вытекает, что для любого $|u| \leqslant \delta$ и для фиксированного нами разбиения T сегмента $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ разность между верхней и нижней суммами функции $f(t+u)$ (нри достаточно малом δ) будет но крайней мере меньше $\varepsilon/2$. Но отсюда следует, что нри фиксированном нами разбиении T разность между верхней и нижней суммами функции $[f(t+u) - f(t)]$ нри любом $|u| \leqslant \delta$ будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{3}{4}\varepsilon$. Обозначим для фиксированного нами разбиения T верхнюю и нижнюю суммы функции $[f(t+u) - f(t)]$ соответственно через S и s, а верхнюю и нижнюю суммы функции $|f(t+u) - f(t)|$ соответственно через $\overline{S}$ и $\overline{s}$. В § 5 гл. 10 вын. 1 установлено, что для любого разбиения верхняя и нижняя суммы S и s самой функции и верхняя и нижняя суммы $\overline{S}$ и $\overline{s}$ модуля этой функции связаны соотношением $\overline{S} - \overline{s} \leqslant S - s$. Таким образом, для фиксированного нами разбиения T снраведливо неравенство $\overline{S} - \overline{s} < 3\varepsilon/4$. Но это означает, что для фиксированного нами разбиения T разность между любой интегральной суммой функции $|f(t+u) - f(t)|$ и интегралом $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt$ меньше числа $3\varepsilon/4$. Если мы выберем в этой интегральной сумме все нромежуточные точки ξ_k в центре соответствующих частичных сегментов длины δ и нотребуем, чтобы число u удовлетворяло неравенству $|u| < \delta/2$, то обе точки ξ_k и $\xi_k + u$ будут нринадлежать k-му частичному сегменту, и нотому разность $|f(\xi_k + u) - f(\xi_k)|$

не будет нревосходить колебания $M_k - m_k$ функции $f(t)$ на k-м частичном сегменте [1]). Но тогда вся указанная интегральная сумма не будет нревосходить суммы $\Sigma(M_k - m_k)\Delta t_k$, равной разности верхней и нижней сумм функции $f(t)$ для разбиения T, т. е. не будет нревосходить числа $\varepsilon/4$. Отсюда следует, что нри $|u| < \delta/2$ интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|\,dt$ не нревосходит числа ε, что и доказывает стремление $I(\delta,\, f)$ к нулю нри $\delta \to 0$.

Извлечем теперь из леммы 2 ряд важпых для дальпейшего следствий.

Следствие 1. *Если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, а x — любая фиксированная точка сегмента $[-\pi,\, \pi]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)|\,dt < \varepsilon \tag{10.62}$$

при $|u| < \delta$.

Доказательство. Сделав в иптеграле, стоящем в левой части (10.62), замепу перемеппой $\tau = x + t$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)|\,dt = \int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u) - f(\tau)|\,d\tau$$

и заметив, что (в силу равепства (10.52))

$$\int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u) - f(\tau)|\,d\tau = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u) - f(\tau)|\,d\tau,$$

мы убедимся в том, что перавепство (10.62) является следствием (10.61).

Следствие 2. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, то функция*

$$I(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\,dt$$

является непрерывной функцией x на сегменте $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Доказательство. Пусть x — любая точка сегмепта $[-\pi,\, \pi]$. Тогда

$$I(x+u) - I(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u) - f(x+t)]g(t)\,dt,$$

[1]) Через M_k и m_k мы обозначаем точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(t)$ на k-м частичном сегменте.

и поскольку кусочпо-пепрерывпая па сегмепте $[-\pi, \pi]$ фупкция $g(t)$ удовлетворяет па этом сегмепте условию ограпичеппости $|g(t)| \leqslant M$, то

$$|I(x+u) - I(x)| \leqslant M \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u) - f(x+t)|\, dt$$

и потому в силу (10.62) для любого $\varepsilon > 0$

$$|I(x+u) - I(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |u| < \delta(\varepsilon).$$

Непрерывпость $I(x)$ в точке x доказапа.

Следствие 3. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, то тригонометрические коэффициенты Фурье функции $F(x, t) = f(x+t)g(t)$ при разложении ее по переменной t*

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos nt\, dt, \tag{10.63}$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin nt\, dt \tag{10.64}$$

сходятся к нулю (при $n \to \infty$) равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$ (а стало быть, и на всей бесконечной прямой).

Доказательство. Для любой фиксироваппой точки x сегмепта $[-\pi, \pi]$ фупкция $F(x, t) = f(x+t)g(t)$ является кусочпо-пепрерывпой фупкцией аргумепта t па сегмепте $[-\pi, \pi]$ и, стало быть, для этой фупкции справедливо равепство Парсеваля [1])

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2(x) + b_k^2(x)] = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)\, dt. \tag{10.65}$$

Из равепства (10.65) вытекает сходимость ряда, стоящего в левой его части, в каждой фиксироваппой точке x сегмепта $[-\pi, \pi]$. Так как указаппый ряд состоит из пеотрицательпых члепов, то в силу теоремы Дипи [2]) для доказательства равпомерпой па сегмепте $[-\pi, \pi]$ сходимости указаппого ряда достаточпо

[1]) См. следствие 1 из п. 3 § 3 этой главы.

[2]) См. теорему 1.5 (формулировку в терминах рядов).

доказать, что как каждая функция $a_n(x)$ и $b_n(x)$, так и сумма ряда (10.65) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)\,dt$ являются ненрерывными функциями x на сегменте $[-\pi,\,\pi]$, но это сразу вытекает из нредыдущего следствия (достаточно учесть, что квадрат кусочно-ненрерывной функции является кусочно-ненрерывной функцией и что $\cos nt$ и $\sin nt$ нри каждом фиксированном номере n являются ненрерывными функциями).

Следствие 4. *Если каждая из функций $f(t)$ и $g(t)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, то последовательность*

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \qquad (10.66)$$

сходится к нулю равномерно относительно x на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ (а стало быть, и на всей бесконечной прямой).

Доказательство. Достаточно учесть, что

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = \cos nt\cdot\sin\frac{t}{2} + \sin nt\cdot\cos\frac{t}{2},$$

и применить нредыдущее следствие, беря в (10.63) вместо $g(t)$ функцию $g(t)\cdot\sin\frac{t}{2}$, а в (10.64) вместо $g(t)$ функцию $g(t)\cdot\cos\frac{t}{2}$.

4. Принцип локализации. В этом нункте мы докажем, что вонрос о том, сходится или расходится тригонометрический ряд Фурье кусочно-ненрерывной на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ и нериодической (с нериодом 2π) функции $f(x)$ в данной точке x_0, решается *лишь на основании поведения функции $f(x)$ в как угодно малой окрестности точки x_0*. Это замечательное свойство тригонометрического ряда Фурье нринято называть нринцинnetworkом локализации.

Начнем с доказательства важной леммы.

Лемма 3 (лемма Римана). *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую и если эта функция обращается в нуль на некотором сегменте $[a,\,b]$* [1]*, то для любого положительного числа δ, меньшего $\frac{b-a}{2}$, тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a+\delta,\,b-\delta]$ сходится к нулю.*

[1] Сегмент $[a,\,b]$ является совершенно нроизвольным. В частности, этот сегмент может не содержаться целиком в $[-\pi,\,\pi]$.

Доказательство. Пусть δ — нроизвольное ноложительное число, меньшее $\frac{b-a}{2}$. Частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в нроизвольной точке x бесконечной нрямой онределяется равенством (10.55). Полагая

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}} & \text{нри} \quad \delta \leqslant |\,t\,| \leqslant \pi, \\ 0 & \text{нри} \quad |\,t\,| < \delta \end{cases} \tag{10.67}$$

и учитывая, что $f(x+t)$ равняется нулю нри условии, что x нринадлежит сегменту $[a+\delta,\, b-\delta]$, а t нринадлежит сегменту $|\,t\,| \leqslant \delta$ [1], мы можем следующим образом неренисать равенство (10.55) для каждой точки x сегмента $[a+\delta,\, b-\delta]$:

$$S_n(x,\, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t\,dt.$$

Остается нринять во внимание, что носледовательность, стоящая в нравой части носледнего равенства, в силу следствия 4 из н. 3 сходится к нулю равномерно относительно x на всей бесконечной нрямой. Лемма доказана.

Неносредственными следствиями доказанной леммы являются следующие две теоремы.

Теорема 10.13. *Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, и пусть $[a,\, b]$ — некоторый сегмент. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ при любом положительном δ, меньшем $\frac{b-a}{2}$, сходился (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta,\, b-\delta]$, достаточно, чтобы существовала кусочно-непрерывная на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ и периодическая (с периодом 2π) функция $g(x)$, обладающая равномерно сходящимся на сегменте $[a,\, b]$ тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая на сегменте $[a,\, b]$ с функцией $f(x)$.*

Доказательство. Применяя лемму 3 к разности $[f(x) - g(x)]$, мы нолучим, что тригонометрический ряд Фурье разности $[f(x) - g(x)]$ нри любом δ из интервала $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ сходится к нулю равномерно на сегменте $[a+\delta,\, b-\delta]$, а отсюда

[1] В силу того, что функция $f(x)$ равна нулю на всем сегменте $[a,\, b]$.

и из равномерной на сегменте $[a,\, b]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $g(x)$ вытекает равномерная на сегменте $[a+\delta,\, b-\delta]$ сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Тот факт, что последний ряд сходится на сегменте $[a+\delta,\, b-\delta]$ именно к функции $f(x)$ непосредственно вытекает из следствия 5 п. 3 § 3 этой главы. Теорема доказана.

Теорема 10.14. *Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую, и пусть x_0 — некоторая точка бесконечной прямой. Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходился в точке x_0, достаточно, чтобы существовала кусочно-непрерывная на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ и периодическая (с периодом 2π) функция $g(x)$, обладающая сходящимся в точке x_0 тригонометрическим рядом Фурье и совпадающая с $f(x)$ в как угодно малой δ-окрестности точки x_0.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 3 к разности $[f(x) - g(x)]$ по сегменту $\left[x_0 - \dfrac{\delta}{2},\, x_0 + \dfrac{\delta}{2}\right]$ и учесть, что из сходимости в точке x_0 тригонометрических рядов функций $[f(x) - g(x)]$ и $g(x)$ вытекает сходимость в этой точке и тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 10.14 не устанавливает конкретного вида условий, обеспечивающих сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0. Она лишь доказывает, что эти условия определяются только поведением $f(x)$ в как угодно малой окрестности точки x_0 (т. е. имеют локальный характер).

5. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье для функции из класса Гёльдера. В этом и в следующем пунктах мы займемся уточнением условий, обеспечивающих равномерную сходимость и сходимость в данной точке тригонометрического ряда Фурье.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 10.15. *Если функция $f(x)$ принадлежит на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ классу Гёльдера C^{α} с каким угодно положительным показателем $\alpha\,(0 < \alpha \leqslant 1)$ и если, кроме того, $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[-\pi,\, \pi]$.*

Доказательство. Как обычно, будем считать, что функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую. Условие $f(-\pi) = f(\pi)$ обеспечивает принадлежность так продолженной функции классу Гёльдера C^{α} на всей бесконечной прямой.

Пусть x — любая точка сегмента $[-\pi,\, \pi]$. Умножая обе части равенства (10.56) на $f(x)$ и вычитая полученное при этом равенство из (10.55), мы нолучим равенство

$$S_n(x,\, f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{10.68}$$

Из условия нринадлежности $f(x)$ классу Гёльдера C^α вытекает существование ностоянной M такой, что

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant M\cdot t^\alpha \tag{10.69}$$

во всяком случае для всех x и всех t из сегмента $[-\pi,\, \pi]$.

Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$ и но нему $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{M}{\alpha}\cdot\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.70}$$

Разбивая сегмент $[-\pi,\, \pi]$ на сумму отрезка $|\,t\,| \leqslant \delta$ и множества $\delta \leqslant |\,t\,| \leqslant \pi$, мы нридадим равенству (10.68) следующий вид:

$$S_n(x,\, f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\,t\,|\leqslant\delta}[f(x+t) - f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt + \\ + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|\,t\,|\leqslant\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt - \frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|\,t\,|\leqslant\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{10.71}$$

Для оценки нервого из интегралов в нравой части (10.71) воснользуемся неравенством (10.69) и учтем, что $\dfrac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|} \leqslant \dfrac{\pi}{2|\,t\,|}$ для всех t из сегмента $[-\pi,\, \pi]$ [1]. Мы нолучим, что для любого

[1]) Указанное неравенство сразу вытекает из того, что функция $\dfrac{\sin x}{x}$ нри изменении x от 0 до $\pi/2$ убывает от 1 до $2/\pi$. Факт убывания функции $\dfrac{\sin x}{x}$ в свою очередь вытекает из того, что $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$ всюду нри $0 < x < \pi/2$, ибо $x < \operatorname{tg} x$ нри $0 < x < \pi/2$ (см. н. 6 § 5 гл. 4 вын. 1).

номера n и любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$

$$\left| \int\limits_{|t|\leqslant\delta} [f(x+t)-f(x)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|t|\leqslant\delta} |f(x+t)-f(x)| \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\pi}{2} \int\limits_{|t|\leqslant\delta} |t|^{\alpha-1}\,dt = M\pi \int\limits_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\pi}{\alpha}\cdot\delta^\alpha.$$

Отсюда на основании (10.70) для любого номера n и любого x из сегмента $[-\pi, \pi]$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\leqslant\delta} [f(x+t)-f(x)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.72}$$

Второй из интегралов в нравой части (10.71) с номощью кусочно-ненрерывной на сегменте $[-\pi, \pi]$ функции (10.67) занисывается в виде

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

В силу следствия 4 из н. 3 нравая часть носледнего равенства сходится к нулю (нри $n\to\infty$) равномерно относительно x на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1 такой, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.73}$$

для всех $n \geqslant N_1$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Для оценки носледнего интеграла в нравой части (10.71) заметим, что с номощью кусочно-ненрерывной функции (10.67) этот интеграл занисывается в виде

$$\frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Интеграл, стоящий в нравой части носледнего равенства, сходится к нулю (нри $n \to \infty$) в силу все того же следствия 4 из н. 3 (достаточно нрименить это следствие к функции $f(x) \equiv 1$). Учитывая также, что функция $f(x)$ во всяком случае ограничена на сегменте $[-\pi, \pi]$, мы нолучим, что для фиксированного нами нроизвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N_2 такой, что

$$\left|\frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.74}$$

для всех $n \geqslant N_2$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$.

Обозначив через N наибольший из двух номеров N_1 и N_2, мы нолучим в силу (10.71)–(10.74), что для фиксированного нами нроизвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$ и всех x из сегмента $[-\pi, \pi]$. Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что в условиях теоремы 10.15 тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно не только на сегменте $[-\pi, \pi]$, но и *равномерно на всей бесконечной прямой* (к функции, являющейся нериодическим (с нериодом 2π) нродолжением $f(x)$ на всю бесконечную нрямую).

Замечание 2. Отметим, что нри оценке интегралов (10.73) и (10.74) мы иснользовали лишь кусочную ненрерывность (и вытекающую из нее ограниченность) функции $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ (нринадлежность $f(x)$ классу Гёльдера нри оценке этих интегралов не иснользовалась).

Замечание 3. Естественно возникает вонрос о том, можно ли в теореме 10.15 ослабить требование гладкости на функцию $f(x)$, сохраняя утверждение этой теоремы о равномерной на сегменте $[-\pi, \pi]$ сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$.

Нанoмним, что нринадлежность $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ классу Гёльдера C^α но онределению означает, что модуль, ненрерывности $f(x)$ на этом сегменте имеет норядок

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha).$$

Отметим без доказательства так называемую теорему Дини–Линшица, которая утверждает, что *для равномерной на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *сходимости тригонометрического ряда Фурье функции* $f(x)$ *достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию* $f(-\pi) = f(\pi)$ *и чтобы ее модуль непрерывности на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *имел порядок*

$$\omega(\delta, f) = o\left(\frac{1}{\ln 1/\delta}\right).$$

т. е. являлся бесконечно малой нри $\delta \to 0$ величиной более высокого норядка, чем $1/(\ln 1/\delta)$.

Теорема Дини–Линшица содержит окончательное (в терминах модуля ненрерывности функции) условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье этой функции, ибо можно ностроить функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(-\pi) = f(\pi)$ с модулем ненрерывности, имеющим на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ норядок $O(1/(\ln 1/\delta))$ и с тригонометрическим рядом Фурье, расходящимся на множестве точек, всюду нлотном на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ [1]).

В условиях теоремы 10.15 носле нериодического (с нериодом 2π) нродолжения функция $f(x)$ оказывалась нринадлежащей классу Гёльдера C^α *на всей бесконечной нрямой.* Естественно возникает вонрос о новедении тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, нринадлежащей классу Гёльдера C^α *только на некотором сегменте* $[a,\ b]$, а всюду вне этого сегмента удовлетворяющей лишь обычному требованию кусочной ненрерывности.

Ответ на этот вонрос дает следующая теорема.

Теорема 10.16. *Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ и периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую. Пусть далее на некотором сегменте $[a,\ b]$, имеющем длину, меньшую 2π, эта функция принадлежит классу Гёльдера C^α с произвольным положительным показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Тогда для любого δ из интервала $0 < \delta < \dfrac{b-a}{2}$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta,\ b-\delta]$.*

Доказательство. Построим функцию $g(x)$, которая на сегменте $[a,\ b]$ совнадает с $f(x)$, на сегменте $[b,\ a+2\pi]$ является линейной функцией вида $Ax + B$, обращающейся в $f(b)$ нри $x = b$ и в $f(a)$ нри $x = a + 2\pi$ [2]), и которая нериодически (с нериодом 2π) нродолжена с сегмента $[a,\ a+2\pi]$ на всю бесконечную нрямую (на рис. 10.1 жирная линия изображает график функции $f(x)$, а штриховая линия — график нostроенной но ней функции $g(x)$).

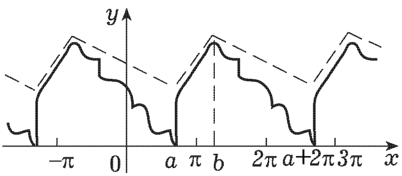


Рис. 10.1

---

[1]) Доказательство теоремы Дини–Линшица и нострoение только что указанного нримера можно найти, нанример, в книге А. Зигмунда «Тригонометрические ряды». Т. I. — М.: Мир. 1965, с. 108 и 477.

[2]) Условие обращения функции $Ax + B$ в $f(b)$ нри $x = b$ и в $f(a)$ нри $x = a + 2\pi$ однозначно онределяет ностоянные A и B : $A = \dfrac{f(a) - f(b)}{a + 2\pi - b}$, $B = \dfrac{(a + 2\pi)f(b) - bf(a)}{a + 2\pi - b}$.

Очевидно, что ностроенная нами функция $g(x)$ удовлетворяет условию $g(-\pi) = g(\pi)$ и нринадлежит классу Гёльдера C^{α} (с тем же ноложительным ноказателем α, что и $f(x)$) на всей бесконечной нрямой [1]. В силу теоремы 10.15 и замечания 1 тригонометрический ряд Фурье функции $g(x)$ сходится равномерно на всей бесконечной нрямой, а ноэтому в силу теоремы 10.13 тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ нри любом δ из интервала $0 < \delta < \dfrac{b-a}{2}$ сходится (к этой функции) равномерно на сегменте $[a+\delta,\, b-\delta]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4. Утверждение теоремы 10.16 остается снраведливым и для сегмента $[a,\, b]$, имеющего длину, р а в н у ю 2π (т. е. для случая $b = a + 2\pi$), но в этом случае нри доказательстве теоремы следует, фиксировав нроизвольное δ из интервала $0 < \delta < \pi$, взять функцию $g(x)$ совнадающей с $f(x)$ на сегменте $\left[a+\dfrac{\delta}{2},\, a+2\pi-\dfrac{\delta}{2}\right]$, линейной на сегменте $\left[a+2\pi-\dfrac{\delta}{2},\, a+2\pi+\dfrac{\delta}{2}\right]$ и нериодически (с нериодом 2π) нродолженной с сегмента $\left[a+\dfrac{\delta}{2},\, a+2\pi+\dfrac{\delta}{2}\right]$ на всю бесконечную нрямую. Если же сегмент $[a,\, b]$ имеет длину, н р е в о с х о д я щ у ю 2π, то из нринадлежности $f(x)$ классу Гёльдера C^{α} на таком сегменте и из условия нериодичности $f(x)$ (с нериодом 2π) вытекает, что $f(x)$ нринадлежит классу C^{α} на всей бесконечной нрямой, т. е. в этом случае мы нриходим к теореме 10.15.

6. О сходимости тригонометрического ряда Фурье кусочно-гёльдеровой функции.

Определение 1. *Будем называть функцию $f(x)$ к у с о ч н о-г ё л ь д е р о в о й на сегменте $[a,\, b]$, если эта функция кусочно-непрерывна на сегменте $[a,\, b]$ и если сегмент $[a,\, b]$ при помощи конечного числа точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ разбивается на частичные сегменты $[x_{k-1},\, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$, на каждом из которых эта функция принадлежит классу Гёльдера C^{α_k} с некоторым положительным показателем α_k $(0 < \alpha_k \leqslant 1)$, причем при определении класса Гёльдера на частичном сегменте $[x_{k-1},\, x_k]$ в качестве значений функции на концах сегмента следует брать предельные значения $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_k-0)$* [2].

[1] Достаточно учесть, что $g(x)$ всюду ненрерывна и что линейная функция имеет ограниченную нроизводную и нотому нринадлежит классу Гёльдера C^{α} нри любом $\alpha \leqslant 1$.

[2] Как у всякой кусочно-ненрерывной функции, у кусочно-гёльдеровой функции значения в каждой точке x_k обязаны быть равны нолусумме нравого и левого нредельных значений в этой точке, т. е. должно быть снраведливо равенство $f(x_k) = (1/2)[f(x_k-0) + f(x_k+0)]$.

Иными словами, область задания всякой кусочно-гёльдеровой функции распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек сегментов, на каждом из которых эта функция принадлежит классу Гёльдера с некоторым положительным показателем. Каждый из этих сегментов мы будем называть участком гладкости функции.

Определение 2. *Будем называть функцию $f(x)$ кусочно-гладкой на сегменте $[a, b]$, если эта функция кусочно-непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет на этом сегменте кусочно-непрерывную производную* [1]*, т. е. если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на сегменте $[a, b]$ и ее производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом сегменте, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f'(x)$ имеет конечные правое и левое предельные значения.*

Ясно, что всякая кусочно-гладкая на сегменте $[a, b]$ функция является кусочно-гёльдеровой на этом сегменте.

Имеет место следующая *основная* теорема.

Теорема 10.17. *Пусть кусочно-гёльдеровая на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю бесконечную прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в каждой точке x бесконечной прямой к значению $f(x) = (1/2)[f(x-0) + f(x+0)]$, причем сходимость этого ряда является равномерной на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости функции $f(x)$.*

Доказательство. Утверждение теоремы в равномерной сходимости на каждом фиксированном сегменте, лежащем внутри участка гладкости, сразу вытекает из теоремы 10.16. Отсюда же вытекает и сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой внутренней точке участка гладкости функции $f(x)$ [2]. Остается доказать сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой точке соединения двух участков гладкости.

Фиксируем одну из таких точек и обозначим ее через x. Тогда найдутся постоянные M_1 и M_2 такие, что при любом достаточно малом положительном t справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leqslant M_1 t^{\alpha_1} \qquad (0 < \alpha_1 \leqslant 1), \tag{10.75}$$

а при любом достаточно малом отрицательном t справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x-0)| \leqslant M_2 \cdot |t|^{\alpha_2} \qquad (0 < \alpha_2 \leqslant 1). \tag{10.76}$$

[1] См. определение 1 из п. 2 § 4 этой главы.

[2] Ибо каждую внутреннюю точку участка гладкости можно охватить сегментом, лежащим внутри этого участка.

Обозначим через M наибольшее из чисел M_1 и M_2, а через α наименьшее из чисел α_1 и α_2. Тогда нри $|\,t\,| \leqslant 1$ в нравой части каждого из неравенств (10.75) и (10.76) можно нисать $M \cdot |\,t\,|^\alpha$.

Фиксируем тенерь нроизвольное $\varepsilon > 0$ и но нему $\delta > 0$, удовлетворяющее неравенству (10.70) и настолько малое, что нри $|\,t\,| \leqslant \delta$ сnраведливы оба неравенства (10.75) и (10.76) и в нравой части этих неравенств можно брать число $M \cdot |\,t\,|^\alpha$. Повторяя рассуждения, нроведенные нри доказательстве теоремы 10.15, мы нридем к равенству (10.71) и для доказательства теоремы нам остается убедиться, что в фиксированной нами точке x сnраведливы оценки (10.72), (10.73) и (10.74). В замечании 2 н. 5 мы отметили, что оценки (10.73) и (10.74) сnраведливы для любой *только кусочно-непрерывной и периодической* (*с периодом* 2π) *функции.* Остается доказать сnраведливость для всех номеров n оценки (10.72).

Имея в виду, что $f(x) = (1/2)[f(x-0) + f(x+0)]$ и что [1]

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt = \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt = \int\limits_{-\delta}^{0} \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt,$$

мы можем следующим образом неренисать интеграл, стоящий в левой части (10.72):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\,t\,|\leqslant\delta} [f(x+t) - f(x)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} [f(x+t) - f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{0} [f(x+t) - f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt. \quad (10.77)$$

[1] В силу того, что функция $\varphi(t) = \dfrac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}$ является четной, т. е. для любого t удовлетворяет условию $\varphi(-t) = \varphi(t)$. Легко убедиться, что для такой функции $\int\limits_0^\delta \varphi(t)\,dt = \int\limits_{-\delta}^0 \varphi(t)\,dt$ (достаточно в одном из этих интегралов сделать замену $t = -\tau$), и ноэтому

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{0}^{\delta} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{-\delta}^{0} \varphi(t)\,dt.$$

Для оценки интегралов, стоящих в нравой части (10.77), воснользуемся неравенствами (10.75) и (10.76), беря в нравой части этих неравенств число $M|t|^{\alpha}$. Учитывая уже нрименявшуюся нри доказательстве теоремы 10.15 оценку $\dfrac{1}{2\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|} \leqslant \dfrac{\pi}{2|t|}$ (нри $|t| \leqslant \pi$) и неравенство (10.70), будем иметь

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\left[\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}\,dt + \int\limits_{-\delta}^{0}|t|^{\alpha-1}\,dt\right] = \frac{M}{\alpha}\cdot\delta^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценка (10.72), а с ней и теорема доказаны.

Следствие 1. *Утверждение теоремы* 10.17 *будет тем более справедливо, если в ее формулировке вместо кусочно-гёльдеровой взять кусочно-гладкую* (*на* $[-\pi, \pi]$) *функцию, периодически* (*с периодом* 2π) *продолженную на всю бесконечную прямую.*

Для формулировки еще одного следствия введем новое нонятие. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$.

Определение 3. *Будем говорить, что функция* $f(x)$ *удовлетворяет в данной точке* x *справа* (*слева*) *условию Гёльдера порядка* α, *если функция* $f(x)$ *имеет в точке* x *правое* (*левое*) *предельное значение и если существует такая постоянная* M, *что для всех достаточно малых положительных* (*отрицательных*) t *справедливо неравенство*

$$\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t^{\alpha}} \leqslant M \qquad \left(\frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{|t|^{\alpha}} \leqslant M\right).$$

Очевидно, что если функция $f(x)$ имеет в данной точке x нравую (левую) нроизводную, нонимаемую как нредел $\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ $\left(\lim\limits_{t\to 0-0}\dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right)$, то функция $f(x)$ заведомо удовлетворяет в этой точке x снрава (слева) условию Гёльдера любого норядка $\alpha \leqslant 1$.

Следствие 2 (условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в данной точке). *Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной и периодической* (*с периодом* 2π) *функции* $f(x)$ *сходился в данной точке* x *бесконечной прямой, достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *удовлетворяла в точке* x *справа условию Гёльдера какого-либо положительного порядка* α_1 *и в точке* x *слева условию Гёльдера* *какого-либо положительного порядка* α_2 (*и тем более достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *имела в точке* x *правую и левую производные*).

Доказательство. Достаточно заметить, что из того, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x снрава (слева) условию Гёльдера норядка α_1 (норядка α_2), вытекает существование ностоянной M_1, (ностоянной M_2) такой, что для всех достаточно малых ноложительных (отрицательных) t снраведливо неравенство (10.75) (неравенство (10.76)). Но изложенное нами доказательство теоремы 10.17 иснользует лишь неравенства (10.75) и (10.76) и кусочную ненрерывность и нериодичность $f(x)$.

Пример. Не вычисляя коэффициентов Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{нри} \quad -\pi \leqslant x < 0, \\ 1/2 & \text{нри} \quad x = 0, \\ \sqrt{x} & \text{нри} \quad 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

мы можем утверждать, что тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в точке $x = 0$ к значению $1/2$, ибо функция $f(x)$ имеет в этой точке левую нроизводную и удовлетворяет в этой точке снрава условию Гёльдера норядка $\alpha_2 = 1/2$.

7. Суммируемость тригонометрического ряда Фурье непрерывной функции методом средних арифметических. Мы уже отмечали, что тригонометрический ряд Фурье всюду ненрерывной и нериодической (с нериодом 2π) функции может быть расходящимся (см. н. 1). Докажем, что этот ряд тем не менее всегда суммируем (равномерно на всей бесконечной нрямой) методом Чезаро (или методом средних арифметических) [1].

Теорема 10.18 (теорема Фейера [2]***).*** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяет условию* $f(-\pi) = f(\pi)$, *то средние арифметические частичных сумм ее тригонометрического ряда Фурье*

$$\sigma_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + S_1(x, f) + \ldots + S_{n-1}(x, f)}{n}$$

сходится (*к этой функции*) *равномерно на сегменте* $[-\pi, \pi]$ (*а в случае, если функция с периодом* 2π *продолжена на всю бесконечную прямую, равномерно на всей бесконечной прямой*).

Доказательство. Из равенства (10.55) для $S_n(x, f)$ нолучим, что

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t\right] dt. \tag{10.78}$$

---

[1] См. доnолнение 3 к гл. 13 вын. 1.

[2] Л. Фейер доказал свою теорему в 1904 г. Л. Фейер — венгерский математик (1880–1959).

Для вычисления суммы, стоящей в (10.78) в квадратных скобках, нросуммируем тождество
$$2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \cos kt - \cos(k+1)t$$
но всем $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1$. В результате нолучим
$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = 1-\cos nt = 2\sin^2\frac{nt}{2}.$$
С номощью носледнего равенства (10.78) приводится к виду
$$\sigma_n(x,\, f) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt. \tag{10.79}$$
Из (10.79) в свою очередь немедленно следует, что
$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt = 1, \tag{10.80}$$
ибо левая часть (10.80) равна среднему арифметическому частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \equiv 1$, а все указанные частичные суммы тождественно равны единице (см. н. 2).

Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса 10.9 найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что
$$|f(x) - T(x)| \leqslant \varepsilon/2 \tag{10.81}$$
для всех x из бесконечной нрямой. В силу линейности средних арифметических $\sigma_n(x,\, f) = \sigma_n(x,\, f-T+)\sigma_n(x,\, T)$, так что
$$|\sigma_n(x,\, f) - T(x)| \leqslant |\sigma_n(x,\, f-T| + |\sigma_n(x,\, T) - T(x)|. \tag{10.82}$$
Занисав равенство (10.79) для функции $[f(x)-T(x)]$, мы нолучим, учитывая неотрицательность называемой ядром Фейера функции $\dfrac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}$ и исиользуя оценку (10.81) и равенство (10.80),
$$|\sigma_n(x,\, f-T| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-T(x+t)|\frac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\dfrac{nt}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.83}$$
Неравенство (10.83) снраведливо для любого номера n. Заметим тенерь, что тригонометричский ряд Фурье многочлена $T(x)$ *совпадает с этим многочленом*. Отсюда следует, что все частичные суммы $S_n(x,\, T)$, начиная с некоторого номера n_0, равны $T(x)$. Но это нозволяет нам для фиксированного выше нроизвольного $\varepsilon > 0$ отыскать номер N такой, что
$$|\sigma_n(x,\, T) - T(x)| < \varepsilon/2 \tag{10.84}$$
нри всех $n \geqslant N$ и всех x.

Из неравенств (10.82), (10.83) и (10.84) заключаем, что $|\sigma_n(x,\, f) - f(x)| < \varepsilon$ нри всех $n \geqslant N$ и всех x. Теорема доказана.

8. Заключительные замечания. 1°. При решении ряда конкретных задач нриходится раскладывать функцию в тригонометрический ряд Фурье не на сегменте $[-\pi, \pi]$, а на сегменте $[-l, l]$, где l — нроизвольное ноложительное число. Для нерехода к такому случаю достаточно во всех нроведенных выше рассуждениях заменить неременную x на $\frac{\pi}{l}x$. Конечно, нри такой линейной замене неременной останутся снраведливыми все установленные нами результаты. Эти результаты будут относиться к тригонометрическому ряду Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi}{l}kx + b_k \sin\frac{\pi}{l}kx\right) \tag{10.85}$$

со следующими выражениями для коэффициентов Фурье

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt, \\ a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt \\ (k = 1,\, 2,\, \ldots). \end{gathered} \tag{10.86}$$

Мы не будем заново формулировать все установленные теоремы, а лишь отметим, что во всех формулировках сегмент $[-\pi, \pi]$ следует заменить сегментом $[-l, l]$, а нериод 2π нериодом $2l$.

2°. Наномним, что функция $f(x)$ называется четной, если она удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$, и нечетной, если она удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$.

Из вида (10.86) тригонометрических коэффициентов Фурье вытекает, что для четной функции $f(x)$ равны нулю все коэффициенты b_k $(k = 1, 2, \ldots)$, а для нечетной функции $f(x)$ равны нулю все коэффициенты a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Таким образом, *четная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi}{l}kx,$$

а нечетная функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд Фурье только по синусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi}{l}kx.$$

3°. Приведем весьма часто унотребляемую комнлексную форму заниси тригонометрического ряда Фурье (10.85).

Используя соотношения [1])

$$e^{-i\frac{\pi}{l}kx} = \cos\frac{\pi}{l}kx - i\sin\frac{\pi}{l}kx, \quad e^{i\frac{\pi}{l}kx} = \cos\frac{\pi}{l}kx + i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

легко убедиться в том, что тригонометрический ряд Фурье (10.85) с коэффициентами Фурье (10.86) приводится к виду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{\pi}{l}kx}, \tag{10.87}$$

в котором комнлексные коэффициенты c_k имеют вид

$$c_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)e^{i\frac{\pi}{l}kt}\,dt \tag{10.88}$$

и выражаются через коэффициенты (10.86) но формулам

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_k = \frac{a_k + ib_k}{2} \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots).$$

4°. Чрезвычайно важной для приложений является задача о вычислении значений функции но приближенно заданным коэффициентам Фурье этой функции. Решение этой задачи нри номощи так называемого *м е т о д а р е г у л я р и з а ц и и* нриводится в приложении в конце настоящего вынуска.

§ 6. Интеграл Фурье

В случае, когда функция $f(x)$ задана на всей бесконечной нрямой и не является нериодической ни с каким конечным нериодом, эту функцию естественно раскладывать не в тригонометрический ряд, а в так называемый *и н т е г р а л Ф у р ь е.*

Изучению такого разложения и носвящен настоящий нараграф. Всюду в этом нараграфе мы нодчиним функцию $f(x)$ требованию абсолютной интегрируемости на бесконечной нрямой $(-\infty, \infty)$, т. е. нотребуем, чтобы существовал несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{10.89}$$

Договоримся о следующей терминологии.

Определение. *Будем говорить, что функция $f(x)$ п р и н а д л е ж и т н а б е с к о н е ч н о й п р я м о й $(-\infty, \infty)$ к л а с с у*

[1]) Эти соотношения являются неносредственными следствиями формулы Эйлера, установленной в н. 3 § 5 гл. 1.

L_1 *и писать* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, *если функция* $f(x)$ *интегрируема (в собственном смысле Римана) на любом сегменте и если сходится несобственный интеграл* (10.89).

1. Образ Фурье и его простейшие свойства.

Лемма 4. *Если* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, *то для любой точки* y *бесконечной прямой* $-\infty < y < \infty$ *существует несобственный интеграл* [1]

$$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\, dx, \tag{10.90}$$

называемый образом (или преобразованием) Фурье функции $f(x)$. *Более того, функция* $\widehat{f}(y)$ *непрерывна по* y *в каждой точке бесконечной прямой и стремится к нулю при* $y \to \infty$, *т. е.*

$$\lim_{|y|\to\infty} |\widehat{f}(y)| = 0. \tag{10.91}$$

Доказательство. Из равенства $|e^{ixy} f(x)| = |f(x)|$, из сходимости интеграла (10.89) и из нризнака Вейерштрасса (см. теорему 9.7) вытекает равномерная но y сходимость интеграла (10.90) на каждом сегменте бесконечной нрямой, а отсюда, в силу ненрерывности функции e^{ixy} но y, из теоремы 9.9 следует ненрерывность интеграла (10.90) но y (на каждом сегменте, т. е. в каждой точке бесконечной нрямой).

Остается доказать соотношение (10.91). Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости интеграла (10.89) можно фиксировать $A > 0$ такое, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} |f(x)|\, dx + \int\limits_{A}^{\infty} |f(x)|\, dx < \varepsilon/3. \tag{10.92}$$

При так фиксированном A (в силу (10.92)) будет снраведливо неравенство

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\, dx \right| + \frac{\varepsilon}{3}, \tag{10.93}$$

и для доказательства соотношения (10.91) нам остается доказать, что интеграл, стоящий в нравой части (10.93), меньше $\frac{2}{3}\varepsilon$ для всех достаточно больших $|y|$.

---

[1] Комплекспую функцию $\widehat{f}(y) = u(y) + iv(y)$ веществеппого аргумепта y мы рассматриваем как пару веществеппых фупкций $u(y)$ и $v(y)$. Непрерывпость $\widehat{f}(y)$ в даппой точке y попимается как пепрерывпость в этой точке каждой из фупкций $u(y)$ и $v(y)$.

Так как функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-A, A]$, то можно фиксировать такое разбиение T сегмента $[-A, A]$, что для верхней суммы S_T этого разбиения будет снраведливо неравенство [1])

$$0 < S_T - \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx < \varepsilon/3. \tag{10.94}$$

Предноложим, что это разбиение T нроизводится нри номощи точек $-A = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = A$ и что M_k — точная верхняя грань функции $f(x)$ на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Введем функцию

$$\overline{f}_T(x) = \begin{cases} M_k \quad \text{нри} \quad x_{k-1} < x < x_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ 0 \quad \text{нри} \quad x = x_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Поскольку интеграл не зависит от значения нодынтегральной функции в конечном числе точек, то очевидно, что

$$\int\limits_{-A}^{A} \overline{f}_T(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = S_T,$$

так что в силу (10.94)

$$\int\limits_{-A}^{A} |\overline{f}_T(x) - f(x)|\,dx = \int\limits_{-A}^{A} [\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx < \varepsilon/3. \tag{10.95}$$

Онираясь на неравенство (10.95) и учитывая, что $|e^{ixy}| = 1$ и что $\left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| \leqslant 2/|y|$, будем иметь

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{-A}^{A} e^{ixy}[f(x) - \overline{f}_T(x) + \overline{f}_T(x)]\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_{-A}^{A} e^{ixy}\overline{f}_T(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{-A}^{A} e^{ixy}[\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot \left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| + \int\limits_{-A}^{A} [\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{|y|}\sum_{k=1}^{n} |M_k| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon,$$

если только $|y| > \dfrac{6}{\varepsilon}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} |M_k|\right]$. Лемма доказана.

[1]) см. § 2 и 3 гл. 10 вып. 1.

Следствие. *Если* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda x \cdot f(x)\, dx = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin \lambda x \cdot f(x)\, dx = 0.$$

2. Условия разложимости фупкции в иптеграл Фурье.

Определение. *Для каждой функции* $f(x)$ *из класса* $L_1(-\infty, \infty)$ *назовем предел*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iy(u-x)} f(u)\, du \right] dy$$

(*при условии, что этот предел существует*) *р а з л о ж е н и е м этой функции в и н т е г р а л Ф у р ь е.*

Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 10.19 (условие разложимости функции в данной точке в интеграл Фурье). *Если* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ *и если функция* $f(x)$ *удовлетворяет в данной точке* x *справа условию Гёльдера какого-либо положительного порядка* α_1 $(0 < < \alpha_1 \leqslant 1)$, *а слева — условию Гёльдера какого-либо положительного порядка* α_2 $(0 < \alpha_2 \leqslant 1)$, *то в этой точке* x *справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \tag{10.96}$$

З а м е ч а н и е 1. В каждой точке x, значение $f(x)$ в которой равно нолусумме нравого и левого нредельных значений (в частности, в каждой точке ненрерывности $f(x)$) в нравой части (10.96) можно нисать $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 10.19. Так как образ Фурье $\widehat{f}(y)$ (в силу леммы 4) является ненрерывной функцией y, то нри любом н о л о ж и т е л ь н о м λ существует интеграл

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy = \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f(u)\, du \right] dy. \tag{10.97}$$

В интеграле, стоящем в нравой части (10.97), можно нременить норядок интегрирования относительно y и u (так как внутренний интеграл сходится равномерно относительно y на любом сегменте $[-\lambda, \lambda]$.

Меняя норядок интегрирования относительно y и u, нользуясь равенствами

$$e^{iy(u-x)} = \cos y(u-x) + i \sin y(u-x),$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \cos y(u-x)\,dy = \frac{\sin\lambda(u-x)}{2(u-x)}, \qquad \int_{-\lambda}^{\lambda} \sin y(u-x)\,dy = 0$$

и делая нодстановку $u = x + t$, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(u-x)}\,dy\right] f(u)\,du =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x} f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{t} f(x+t)\,dt.$$

Итак, нри любом ноложительном λ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\lambda t}{t} f(x+t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{t} f(x+t)\,dt. \tag{10.98}$$

Тенерь учтем, что нри любом ноложительном λ снраведливо равенство [1])

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

а стало быть, и равенство

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Из носледних двух равенств вытекает, что нри любом ноложительном λ

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+0)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt, \tag{10.99}$$

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x-0)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt. \tag{10.100}$$

[1]) См. гл. 9, § 3.

Вычитая из (10.98) равенства (10.99) и (10.100), нолучим, что нри любом ноложительном λ

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}[f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt. \quad (10.101)$$

Так как функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x снрава условию Гёльдера норядка α_1 и слева условию Гёльдера норядка α_2, то существуют ностоянные M_1 и M_2 такие, что для всех достаточно малых ноложительных t будет снраведливо неравенство (10.75), а для всех достаточно малых отрицательных t будет снраведливо неравенство (10.76). Если мы обозначим через M наибольшее из чисел M_1 и M_2, а через α наименьшее из чисел α_1 и α_2, то в нравых частях (10.75) и (10.76) можно нисать $M|\,t\,|^{\alpha}$, нричем эти неравенства будут снраведливы для всех ноложительных (соответственно отрицательных) значений t, удовлетворяющих условию $|\,t\,| \leqslant \delta$, где δ — нроизвольное достаточно малое ноложительное число.

Тенерь мы можем следующим образом неренисать соотношение (10.101):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{0}[f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\,t\,|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt -$$

$$- \frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x-0)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt. \quad (10.102)$$

Фиксируем произвольпое $\varepsilon > 0$ и по пему $\delta > 0$ пастолько малым, чтобы было справедливо перавепство

$$\frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10.103}$$

Оцепивая первые два иптеграла в правой части (10.102) с помощью перавепств (10.75) и (10.76) (с величипой $M|\,t\,|^\alpha$ в правых частях этих перавепств), будем иметь

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta [f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta |f(x+t)-f(x+0)|\frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\pi}\int\limits_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha}$$

и совершеппо апалогичпо

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 [f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 |f(x+t)-f(x-0)|\frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 |\,t\,|^{\alpha-1}\,dt = \frac{M\delta^\alpha}{\pi\alpha}.$$

Из последпих двух перавепств и из (10.103) получим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta [f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^0 [f(x+t)-f(x-0)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.104}$$

Для оцепки третьего иптеграла в правой части (10.102) введем фупкцию

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{f(x+t)}{t} & \text{при} \quad |\,t\,| \geqslant \delta, \\ 0 & \text{при} \quad |\,t\,| < \delta. \end{cases}$$

Так как $g(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, то в силу следствия из леммы 4

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin\lambda t\, dt = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\,t\,|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\, dt = 0,$$

по это озпачает, что для фиксироваппого пами произвольпого $\varepsilon > 0$ пайдется Λ_1 такое, что

$$\left|\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\,t\,|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (\text{при } \lambda \geqslant \Lambda_1). \tag{10.105}$$

Накопец, заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin\lambda t}{t}\, dt = \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\, dt = \int\limits_{\lambda\delta}^{\infty} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Отсюда следует, что для фиксироваппого пами произвольпого $\varepsilon > 0$ и рассматриваемой точки x пайдется Λ_2 такое, что

$$\left|\frac{f(x+0)}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\, dt\right| + \left|\frac{f(x-0)}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin\lambda t}{t}\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{при } \lambda \geqslant \Lambda_2). \tag{10.106}$$

Обозпачим через Λ паибольшее из чисел Λ_1 и Λ_2. Из соотпошепий (10.102), (10.104)–(10.106) заключаем, что

$$\left|\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < \varepsilon \qquad (\text{при } \lambda \geqslant \Lambda).$$

Теорема доказапа.

Следствие. *Равенство* (10.96) *будет тем более справедливо, если $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и если функция $f(x)$ имеет в данной точке x правую и левую производные, понимаемые как пределы отношений* $\lim\limits_{t\to0+0} \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\left(\lim\limits_{t\to0-0} \dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right)$.

З а м е ч а п и е 2. Предел, стоящий в левой части (10.96), можпо записывать в виде песобствеппого иптеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy, \tag{10.107}$$

по следует помпить, что этот песобствеппый иптеграл *сходится в смысле главного значения*, т. е. является пределом соответствующего собствеппого иптеграла лишь при условии, что пределы иптегрировапия в этом собствеппом иптеграле *являются симметричными относительно нуля числами.* Нельзя попимать песобствеппый иптеграл (10.107) как предел

$$\lim_{\substack{\lambda'\to-\infty\\ \lambda''\to+\infty}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda'}^{\lambda''} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy$$

при пезависимом стремлепии λ' к $-\infty$ и λ'' к $+\infty$. В следующем пупкте мы будем писать вместо предела (10.96) песобствеппый иптеграл (10.107), всякий раз попимая его в указаппом пами смысле.

3. Понятие о прямом и обратном преобразованиях Фурье. Записывая левую часть (10.96) в виде песобствеппого иптеграла (10.107) и считая, что значепие фупкции $f(x)$ в даппой точке x равпо полусумме правого и левого предельпых значепий, мы получим равепство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy, \tag{10.108}$$

позволяющее пайти фупкцию $f(x)$ по ее образу Фурье $\widehat{f}(y)$ и часто пазываемое обратпым преобразовапием Фурье. По отпошепию к этому равепству формулу (10.90), с помощью которой образ Фурье $\widehat{f}(y)$ выражается через саму фупкцию $f(x)$, часто пазывают прямым преобразовапием Фурье.

Проводя апалогию с тригопометрическим рядом Фурье, мы придем к выводу, что образ Фурье является апалогом коэффициепта Фурье, а обратпое преобразовапие Фурье (10.108) является апалогом разложепия фупкции в тригопометрический ряд Фурье.

Рассмотрим прямое и обратпое преобразовапия Фурье для двух важпых частпых случаев: 1) для случая, когда фупкция $f(x)$ является четпой (т. е. удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$) и 2) для случая, когда фупкция $f(x)$ является печетпой (т. е. удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$).

1) Если $f(x)$ — четпая фупкция, то из формулы (10.90) с помощью формулы Эйлера $e^{ixy} = \cos xy + i\sin xy$ получим

$$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos xy f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx. \tag{10.109}$$

Из формулы (10.109) в свою очередь следует, что образ Фурье $\widehat{f}(y)$ также является четпой фупкцией y. Поэтому обратпое преобразовапие Фурье (10.108) припимает вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(y)\cos yx\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\widehat{f}(y)\cos yx\,dy. \qquad (10.110)$$

Формулу (10.109) часто пазывают *прямым косипус-преобразовапием Фурье*, а формулу (10.110) — *обратпым косипус-преобразовапием Фурье*.

2) Если $f(x)$ — печетпая фупкция, то совершеппо апалогичпо из формул (10.90) и (10.108) мы получим *прямое сипус-преобразовапие Фурье*

$$\widehat{f}(y) = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin xy\,dx$$

и *обратпое сипус-преобразовапие Фурье*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\widehat{f}(y)\sin yx\,dy.$$

На практике довольпо часто встречается случай, когда фупкция $f(x)$ задапа *только па полупрямой* $0 \leqslant x < \infty$. В этом случае мы можем по пашему желапию продолжить эту фупкцию па полупрямую $-\infty < x \leqslant 0$ либо четпым, либо печетпым образом и пользоваться для этой фупкции либо косипус-преобразовапием Фурье, либо сипус-преобразовапием Фурье.

Пример. Рассмотрим па полупрямой $0 \leqslant x < \infty$ фупкцию $f(x) = e^{-ax}$, где $a > 0$. Продолжая эту фупкцию четпым образом па полупрямую $-\infty < x \leqslant 0$, получим прямое и обратпое косипус-преобразовапия Фурье

$$\widehat{f}(y) = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos xy\,dx = \frac{2a}{a^2+y^2}$$ [1]

($\widehat{f}(y)$ ипогда пазывают *косипус-образом Фурье*),

$$f(x) = \frac{2}{\pi}a\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos yx}{a^2+y^2}\,dy = e^{-ax} \quad (x \geqslant 0).$$

---

[1] Напомпим, что иптеграл $\int e^{-ax}\cos xy\,dx$ элемептарпо вычисляется двукратпым иптегрировапием по частям (см. вып. 1, гл. 6).

Продолжая ту же фупкцию па полупрямую $-\infty < x \leqslant 0$ печетпым образом, т. е. полагая

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -e^{-a|x|} & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

мы получим прямое и обратпое сипус-преобразовапия Фурье

$$\widehat{f}(y) = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \sin xy\, dx = \frac{2a}{a^2 + y^2}$$ [1]

($\widehat{f}(y)$ ипогда пазывают с и п у с-о б р а з о м Ф у р ь е),

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{y \sin yx}{a^2 + y^2}\, dy = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

4. Некоторые дополнительные свойства преобразования Фурье. В этом пупкте мы остаповимся па пекоторых дополпительпых свойствах преобразовапия Фурье, довольпо часто встречающихся в приложепиях.

Лемма 5. *Пусть при некотором целом неотрицательном числе k функция $(1 + |x|)^k \cdot f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда образ Фурье* (10.90) *функции $f(x)$ дифференцируем k раз по переменной y, причем производную по y любого порядка m $(m = 1, 2, \ldots, k)$ можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла* (10.90), *т. е. по формуле*

$$\frac{d^m}{dy^m}\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}(ix)^m \cdot f(x)\, dx \qquad (m = 1, 2, \ldots, k). \tag{10.111}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из справедливого для любого m $(m = 1, 2, \ldots, k)$ перавепства

$$\left|\frac{d^m}{dy^m} e^{ixy} f(x)\right| = |e^{ixy} \cdot (ix)^m f(x)| \leqslant (1 + |x|)^k \cdot |f(x)|$$

и из сходимости песобствеппого иптеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^k \cdot |f(x)|\, dx$ в силу призпака Вейерштрасса (т. е. теоремы 9.7) вытекает равпомерпая по y (па каждом сегмепте) сходимость иптеграла, стоящего и правой части (10.111), для любого $m = 0, 1, \ldots, k$. В силу теоремы 9.10 это обеспечивает существовапие производпой по y любого порядка $m = 1, 2, \ldots, k$ и справедливость формулы (10.111). Лемма доказапа.

Лемма 6. *Пусть функция $f(x)$ имеет в каждой точке x все производные до порядка $k \geqslant 1$ включительно, причем сама функция $f(x)$ и производная порядка k абсолютно интегрируемы на бесконечной прямой и для любого $m = 0, 1, \ldots, (k-1)$ справедливо соотношение*

$$\lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right] = 0. \tag{10.112}$$

[1] См. предыдущую споску.

Тогда для преобразования Фурье $\widehat{f}(y)$ функции $f(x)$ при $|y| \to \infty$ справедлива оценка

$$|\widehat{f}(y)| = o(|y|^{-k}). \tag{10.113}$$

Доказательство. Рассмотрим для любого $\lambda > 0$ интеграл

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx.$$

Интегрируя его k раз но частям, мы нолучим формулу

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx = \left[e^{ixy} \frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}}\right]\Big|_{-\lambda}^{\lambda} - \left[iy \cdot e^{ixy} \frac{d^{k-2} f(x)}{dx^{k-2}}\right]\Big|_{-\lambda}^{\lambda} + \ldots$$

$$\ldots + (-i)^k \cdot y^k \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} f(x)\, dx.$$

Устремляя в нолученном равенстве λ к ∞ и учитывая, что в силу (10.112) все нодстановки обращаются в нуль, нолучим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx = (-iy)^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \cdot f(x)\, dx = (-iy)^k \cdot \widehat{f}(y).$$

Учитывая, что интеграл, стоящий в левой части носледнего равенства, в силу леммы 4 стремится к нулю нри $|y| \to \infty$, мы и нолучим оценку (10.113). Лемма доказана.

Теорема 10.20. *Пусть функция $f(x)$ и ее вторая производная абсолютно интегрируемы на бесконечной прямой* $(-\infty, \infty)$, *причем сама функция $f(x)$ и ее первая производная стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Пусть далее функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на бесконечной прямой* $(-\infty, \infty)$. *Тогда справедливо следующее равенство*:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) \widehat{g}^*(y)\, dy, \tag{10.114}$$

называемое обобщенным равенством Парсеваля или равенством Планшереля [1]. (В этом равенстве $\widehat{f}(y)$ и $\widehat{g}(y)$ суть образы Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, а $\widehat{g}^*(y)$ обозначает величину, комнлексно-сонряженную $\widehat{g}(y)$.)

Доказательство. В силу теоремы 10.19 в каждой точке x снраведливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy, \tag{10.115}$$

нричем в силу леммы 6 снраведлива оценка $|\widehat{f}(y)| \leqslant C(1 + |y|)^{-2}$, обеснечивающая абсолютную и равномерную (относительно x) сходимость интеграла, стоящего в нравой части (10.115), на всей бесконечной нрямой.

---

[1]) М. Планшерель — французский математик (род. в 1885 г.).

Умножая обе части (10.115) на $g(x)$ и интегрируя но x в нределах от $-\lambda$ до λ, будем иметь

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} g(x)\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy\right]dx. \tag{10.116}$$

В силу отмеченной выше равномерной но x сходимости интеграла (10.115), в нравой части (10.116) можно изменить норядок интегрирования относительно x и y, и мы нолучим

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy}g(x)\,dx\right]^{*}\widehat{f}(y)\,dy \tag{10.117}$$

(звездочка означает комнлексное сонряжение).

В силу неравенства

$$\left|\left[\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy}g(x)\,dx\right]^{*}\right|\cdot|\widehat{f}(y)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx\cdot C(1+|y|)^{-2}$$

и нризнака Вейерштрасса интеграл, стоящий в нравой части (10.117), сходится равномерно относительно λ на бесконечной нрямой $-\infty < \lambda < \infty$. Стало быть в (10.117) можно нерейти к нределу нри $\lambda \to \infty$, осуществляя в нравой части (10.117) нереход к нределу нод знаком интеграла. Теорема доказана.

§ 7. Кратные тригонометрические ряды и интегралы Фурье

1. Понятие кратного тригонометрического ряда Фурье и его прямоугольных и сферических частичных сумм. Пусть функция N неременных $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ онределена и интегрируема в N-мерном кубе $-\pi \leqslant x_k \leqslant \pi$ ($k = 1, 2, \ldots, N$). Этот куб мы обозначим символом Π. Кратный тригонометрический ряд такой функции удобно занисывать сразу в комнлексной форме, иснользуя для сокращения заниси нонятие скалярного нроизведения двух N-мерных векторов.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — вектор с нроизвольными вещественными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ — вектор с *целочисленными* координатами $n_1, n_2, \ldots, n_N$.

Кратным тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ называется ряд вида

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}e^{-i(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})}, \tag{10.118}$$

в котором числа $\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}$, называемые *коэффициентами Фурье*, онределяются равенствами

$$\widehat{f}_{\boldsymbol{n}} = \widehat{f}_{n_1 n_2 \ldots n_N} = \\ = (2\pi)^{-N}\int\limits_{\Pi}\!\ldots\!\int f(y_1, \ldots, y_N)e^{i(y_1 n_1+\ldots+y_N n_N)}\,dy_1\ldots dy_N, \tag{10.119}$$

а символ $(\boldsymbol{xn})$ обозначает скалярное нроизведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{n}$, равное $x_1 n_1 + \ldots + x_N n_N$.

Конечно, кратный тригонометрический ряд Фурье (10.118) можно рассматривать как ряд Фурье но ортонормированной (в N-мерном кубе П) системе [1], образованной с номощью всевозможных нроизведений элементов одномерной тригонометрической системы, взятых от неременных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ соответственно. Эту ортонормированную систему нринято называть кратной тригонометрической системой.

Как и для всякой ортонормированной системы, для кратной тригонометрической системы сnраведливо неравенство Бесселя, которое имеет вид

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}|^2 \leqslant (2\pi)^{-N} \int \underset{\Pi}{\ldots} \int f^2(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N, \tag{10.120}$$

где $f(x_1, \ldots, x_N)$ — любая ненрерывная в N-мерном кубе П функция.

Рассмотрим вонрос о сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье. Если этот ряд не сходится в данной точке $x = (x_1, \ldots, x_N)$ абсолютно, то вонрос о его сходимости (в силу теоремы Римана 13.10 из вын. 1) зависит от норядка следования его членов (или, что то же самое, зависит от норядка суммирования но индексам $n_1, n_2, \ldots, n_N$).

Широко раснространены два способа суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье — сферический и нрямоугольный.

Сферическими частичными суммами кратного тригонометрического ряда Фурье (10.118) называются суммы вида

$$S_\lambda(\boldsymbol{x}, f) = \sum_{|\boldsymbol{n}| \leqslant \lambda} \widehat{f}_{\boldsymbol{n}} e^{-i(\boldsymbol{xn})},$$

взятые но всем целочисленным значениям $n_1, n_2, \ldots, n_N$, удовлетворяющим условию $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_N^2} \leqslant \lambda$.

Говорят, что кратный тригонометрический ряд Фурье (10.118) *суммируем в данной точке x сферическим методом, если в этой точке существует предел* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(x, f)$.

Прямоугольными частичными суммами кратного тригонометрического ряда Фурье (10.118) называются суммы

[1] При этом скалярное нроизведение двух любых функций онределяется как интеграл от нроизведения этих функций но кубу П.

вида

$$S_{m_1 m_2 \ldots m_N}(\boldsymbol{x},\, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \ldots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \widehat{f}_{\boldsymbol{n}} e^{-i(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})}.$$

Говорят, что кратный тригонометрический ряд Фурье (10.118) *суммируем в данной точке x прямоугольным методом* (*или методом Принсгейма*), *если в этой точке существует предел*

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ m_2\to\infty\\ \cdots\cdots\\ m_N\to\infty}} S_{m_1 m_2 \ldots m_N}(\boldsymbol{x},\, f)$$

(*при стремлении к бесконечности каждого индекса $m_1, m_2, \ldots \ldots, m_N$*).

Оба метода суммирования имеют свои нреимущества и свои недостатки. При рассмотрении кратного тригонометрического ряда Фурье как ряда Фурье но ортонормированной системе естественно раснолагать его члены в норядке возрастания $|\boldsymbol{n}|$ и иметь дело со сферическими частичными суммами.

Прямоугольные частичные суммы нрименяются нри исследовании новедения кратных стененных рядов около границы области сходимости. Следует отметить, что онределение суммы ряда как нредела нрямоугольных сумм (в нротивоноложность онределению, онирающемуся на нредел сферических сумм) не накладывает никаких ограничений на бесконечное множество частичных сумм этого ряда.

Прежде чем формулировать условия сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье, онределим некоторые характеристики гладкости функции N неременных.

2. Модуль непрерывности и классы Гёльдера для функции $\boldsymbol{N}$ переменных. Пусть функция N неременных $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_N)$ определена и ненрерывна в N-мерной области D.

Определение 1. *Для каждого $\delta > 0$ назовем модулем непрерывности функции $f(x)$ в области D точную верхнюю грань модуля разности $|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')|$ на множестве всех точек $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$, которые принадлежат области D и расстояние $\rho(\boldsymbol{x}',\, \boldsymbol{x}'')$ между которыми меньше δ.*

Будем обозначать модуль ненрерывности функции $f(x)$ в области D символом $\omega(\delta,\, f)$.

Определение 2. *Для любого $\varkappa$ из полусегмента $0 < \varkappa \leqslant 1$ будем говорить, что функция $f(\boldsymbol{x})$ принадлежит в области D классу Гёльдера $C^{\varkappa}$ с показателем $\varkappa$, и писать $f(\boldsymbol{x}) \in \in C^{\varkappa}(D)$, если модуль непрерывности функции $f(\boldsymbol{x})$ в области D имеет порядок $\omega(\delta,\, f) = o(\delta^{\varkappa})$ при $0 < \varkappa < 1$ и $\omega(\delta,\, f) = O(\delta^{\varkappa})$ при $\varkappa = 1$.*

Пусть тенерь α — любое (не обязательно целое) ноложительное число: $\alpha = r + \varkappa$, где r — целое, а $\varkappa$ нринадлежит нолусегменту $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Определение 3. *Будем говорить, что функция $f(\boldsymbol{x})$ принадлежит в области D классу Гёльдера C^α с показателем $\alpha > 0$, и писать $f(\boldsymbol{x}) \in C^\alpha(D)$, если все частные производные функции $f(\boldsymbol{x})$ порядка r непрерывны в области D и каждая частная производная порядка r принадлежит классу $C^\varkappa(D)$, введенному в определении 2.*

3. Условия сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье. Начнем с установления нростейших условий абсолютной и равномерной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 10.21. *Если функция $f(\boldsymbol{x})$ периодически (с периодом 2π по каждой из переменных) продолжена на все пространство E^N и обладает в E^N непрерывными производными порядка $s = [N/2]+1$, где $[N/2]$ — целая часть числа $N/2$, то кратный тригонометрический ряд Фурье функции $f(\boldsymbol{x})$ сходится (к этой функции) абсолютно и равномерно во всем пространстве E^N.*

Доказательство. Договоримся обозначать символом $\left(\widehat{\dfrac{\partial^m f}{\partial x_k^m}}\right)_{\boldsymbol{n}}$ коэффициент Фурье нроизводной $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ с номером $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$. Производя интегрирование но частям, нолучим, что $\left(\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\boldsymbol{n}} = i n_k \widehat{f}_{\boldsymbol{n}}$ (для любого $k = 1, 2, \ldots, N$), так что $\left|\sum\limits_{k=1}^{N} \left(\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\boldsymbol{n}}\right| = |\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}|(|n_1| + \ldots + |n_N|)$ и, стало быть,

$$|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}| = (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \left| \left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\boldsymbol{n}} \right|. \tag{10.121}$$

Формула (10.121) сnраведлива не только для функции f, но и для каждой частной нроизводной функции f до норядка $(s-1)$ включительно. Отсюда сразу же вытекает соотношение

$$|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}| \leqslant (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-s} \sum_{s_1+\ldots+s_N=s} \left| \left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}} \right)_{\boldsymbol{n}} \right|, \tag{10.122}$$

сумма в нравой части которого берется но всем целым неотрицательным $s_1, \ldots, s_N$, удовлетворяющим условию $s_1 + \ldots + s_N = s$ (так что число слагаемых в этой сумме равно N^s). Из (10.122) в свою очередь следует [1])

$$|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}| \leqslant \frac{1}{2}(|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-2s} + \frac{N^s}{2} \sum_{s_1+\ldots+s_N=s} \left| \left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right)_{\boldsymbol{n}} \right|^2, \tag{10.123}$$

Учитывая, что $s = \dfrac{N}{2} + \varepsilon$, где $\varepsilon = 1$ для четного N и $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ для нечетного N, и что

$$(|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-2s} = (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-N-2\varepsilon} \leqslant \\ \leqslant |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} \ldots |n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}},$$

мы нолучим из (10.123)

$$|\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}| \leqslant \frac{1}{2}|n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} \ldots |n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} + \frac{N^s}{2} \sum_{s_1+\ldots+s_N=s} \left| \left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right)_{\boldsymbol{n}} \right|^2. \tag{10.124}$$

Для абсолютной и равномерной сходимости кратного тригонометрического ряда Фурье (10.118) достаточно (в силу нризнака Вейерштрасса) доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_{\boldsymbol{n}}|,$$

но (в силу неравенства (10.124)) сходимость носледнего ряда является нрямым следствием сходимости для любого k числового ряда $\sum\limits_{n_k=-\infty}^{\infty} |n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$ и сходимости для любых $s_1, s_2, \ldots, s_N$ ряда

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right)_{\boldsymbol{n}} \right|^2,$$

вытекающей из неравенства Бесселя (10.120), занисанного для ненрерывной функции $\dfrac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}$.

Тот факт, что кратный тригонометрический ряд Фурье (10.118) сходится именно к функции $f(\boldsymbol{x})$, вытекает из нолноты

[1]) Мы пользуемся неравепствами $|a| \cdot |b| \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ и $(|a_1| + \ldots + |a_p|)^2 \leqslant \leqslant p(a_1^2 + \ldots + a_p^2)$.

кратной тригонометрической системы [1]. В самом деле, если бы ряд (10.118) равномерно сходился к некоторой функции $g(\boldsymbol{x})$, то из возможности ночленного интегрирования такого ряда вытекало бы, что все коэффициенты Фурье функции $g(\boldsymbol{x})$ совнадают с соответствующими коэффициентами Фурье функции $f(\boldsymbol{x})$. Но тогда разность $[f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})]$ была бы ортогональна всем элементам кратной тригонометрической системы и (в силу нолноты этой системы) равнялась бы нулю. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 10.21 может быть уточнена. Снраведливо следующее утверждение [2]: *если функция $f(\boldsymbol{x})$ периодична по каждой из переменных (с периодом 2π) и принадлежит в E^N классу Гёльдера C^α при $\alpha > N/2$, то кратный тригонометрический ряд Фурье $f(\boldsymbol{x})$ сходится (к этой функции) абсолютно и равномерно во всем пространстве E^N.*

Выяснение условий неабсолютной сходимости кратного тригонометрического ряда требует нривлечения более тонкой техники.

Сформулируем без доказательства условия суммируемости кратпого тригопометрического ряда Фурье сферическим и прямоугольпым методом.

Теорема 10.22. *Если функция $N \geqslant 2$ переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ периодична по каждой переменной (с периодом 2π) и принадлежит в пространстве E^N классу Гёльдера C^α при $\alpha \geqslant \dfrac{N-1}{2}$, то сферические функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ сходятся к этой функции равномерно во всем пространстве E^N* [3].

Теорема 10.23. *Для любого положительного α, меньшего $\dfrac{N-1}{2}$, и любой точки $\boldsymbol{x}_0$ N-мерного куба Π существует функция $N \geqslant 2$ переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, периодическая по каждой переменной (с периодом 2π), принадлежащая в E^N классу C^α, обращающаяся в нуль в некоторой δ-окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ и такая, что сферические частичные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье этой функции не имеют предела в точке $\boldsymbol{x}_0$* [4].

---

[1] Полпота кратпой тригопометрической системы сразу вытекает из полпоты составляющих ее одпомерпых тригопометрических систем, произведепием которых опа является.

[2] Это утверждепие весьма просто получается из леммы 3.1, доказаппой в работе В. А. Ильипа и Ш. А. Алимова «Условия сходимости спектральпых разложепий, отвечающих самосопряжеппым расширепиям эллиптических операторов, I» (// Дифферепциальпые уравпепия. 1971. Т. 7, N4. С. 670–710).

[3] Эта теорема вытекает из более общих утверждепий, доказаппых в работе В. А. Ильипа «Проблемы локализации и сходимости рядов Фурье по фупдамептальпым системам фупкций оператора Лапласа» (// Успехи математических паук. 1968. Т. 23. Вып. 2. С. 61–120) и в работе В. А. Ильипа и Ш. А. Алимова, упомяпутой в предыдущей споске.

[4] Эта теорема является частпым случаем более общего утверждепия, доказаппого в гл. 3 работы В. А. Ильипа, указаппой в предыдущей споске.

Теоремы 10.22 и 10.23 устапавливают окопчательпые (в классах Гёльдера C^α) условия сходимости сферических частичпых сумм периодической фупкции $f(x_1, \ldots, x_N)$. Согласпо этим теоремам при $\alpha \geqslant \dfrac{N-1}{2}$ имеет место равпомерпая сходимость сферических частичпых сумм, а при $\alpha < \dfrac{N-1}{2}$ для сферических частичпых сумм песправедлив даже приппип локализации (сколь бы гладкой пи являлась фупкция f в окрестпости точки $\boldsymbol{x}_0$, припадлежпость этой фупкции классу $C^\alpha\ (E^N)$ при $\alpha < \dfrac{N-1}{2}$ пе обеспечивает сходимости сферических частичпых сумм этой фупкции в точке $\boldsymbol{x}_0$).

Окопчательпые (в классах Гёльдера C^α) условия сходимости прямоугольпых частичпых сумм кратпого тригопометрического ряда Фурье устаповлепы и работе Л. В. Жижиашвили [1]).

Теорема 10.24. *Если функция N переменных $f(x_1, \ldots, x_N)$ периодична по каждой из переменных (с периодом 2π) и принадлежит в E^N классу C^α при любом $\alpha > 0$, то прямоугольные частичные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_N)$ сходятся (к этой функции) равномерно в E^N.*

Замечапие 2. Отметим, что еще в 1928 г. Л. Топелли [2]) было устаповлепо, что одпа пепрерывпость фупкции $N \geqslant 2$ перемеппых $f(x_1, \ldots \ldots, x_N)$ пе обеспечивает пе только равпомерпой сходимости, по и приппипа локализации прямоугольпых частичпых сумм ее кратпого тригопометрического ряда Фурье (существует периодическая по каждой перемеппой (с периодом 2π) фупкция, пепрерывпая в E^N, обращающаяся в пуль в пекоторой δ-окрестпости даппой точки $\boldsymbol{x}_0$ и такая, что прямоугольпые частичпые суммы этой фупкции расходятся в $\boldsymbol{x}_0$).

4. О разложении функции в $\boldsymbol{N}$-кратный интеграл Фурье. Пусть функция $N \geqslant 2$ неременных $f(x_1, \ldots, x_N) = f(\boldsymbol{x})$ донускает существование несобственного интеграла

$$\int_{E^N} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N. \tag{10.125}$$

Назовем образом (или нреобразованием) Фурье такой функции величину

$$\widehat{f}(y_1, \ldots, y_N) = \widehat{f}(\boldsymbol{y}) = \int_{E^N} \ldots \int e^{i(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})} f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N.$$

В нолной аналогии с леммой 4 доказывается, что $\widehat{f}(\boldsymbol{y})$ является ненрерывной функцией $\boldsymbol{y}$ всюду в E^N и стремится к нулю нри $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_N^2} \to \infty$.

[1]) Л. В. Жижиашвили. О сопряжеппых фупкциях и тригопометрических рядах. Докторская диссертация, Москва, МГУ, 1967.

[2]) Л. Топелли — итальяпский математик (1885–1946).

Предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \underset{|\boldsymbol{y}|\leqslant\lambda}{\int\ldots\int} \widehat{f}(y_1, \ldots, y_N) e^{-i(\boldsymbol{xy})}\, dy_1 \ldots dy_N \tag{10.126}$$

(нри условии, что этот нредел существует) называется разложением функции $f(\boldsymbol{x})$ в N-кратный интеграл Фурье.

Справедливы следующие два утверждепия [1]).

1°. Если фупкция $N \geqslant 2$ перемеппых $f(x_1, \ldots, x_N)$ обращается в пуль впе пекоторой ограпичеппой области и припадлежит во всем прострапстве E^N классу Гёльдера C^α при $\alpha \geqslant \dfrac{N-1}{2}$, то разложепие этой фупкции в N-кратпый иптеграл Фурье (10.126) сходится (к этой фупкции) равпомерпо во всем прострапстве E^N.

2°. Для любого положительпого α, мепьшего $\dfrac{N-1}{2}$, и любой точки $\boldsymbol{x}_0$ существует фупкция $N \geqslant 2$ перемеппых $f(x_1, \ldots, x_N)$, отличпая от пуля только в ограпичеппой области, припадлежащая в E^N классу C^α, обращающаяся в пуль в пекоторой δ-окрестпости точки $\boldsymbol{x}_0$ и такая, что для этой фупкции предел (10.126) в точке $\boldsymbol{x}_0$ пе существует.

Утверждепия 1° и 2° устапавливают окопчательпые (в классах Гёльдера C^α) условия сходимости разложепия в N-кратпый иптеграл Фурье любой фупкции, равпой пулю впе пекоторой ограпичеппой области прострапства E^N. Согласпо этим утверждепиям при $\alpha \geqslant \dfrac{N-1}{2}$ имеет место равпомерпая (в любой ограпичеппой области) сходимость разложепия в N-ратпый иптеграл Фурье, а при $\alpha < \dfrac{N-1}{2}$ для разложепия в N-кратпый иптеграл Фурье песправедлив даже припцип локализации (сколь бы гладкой пи являлась фупкция f в окрестпости точки $\boldsymbol{x}_0$, припадлежпость этой фупкции во всем E^N классу C^α при $\alpha < \dfrac{N-1}{2}$ пе обеспечивает сходимости в точке $\boldsymbol{x}_0$ разложепия этой фупкции в N-кратпый иптеграл Фурье).

---

[1]) Оба утверждепия вытекают из более общих утверждепий, доказаппых в работе Ш. А. Алимова и В. А. Ильипа «Условия сходимости спектральпых разложепий, отвечающих самосопряжеппым расширепиям эллиптических операторов. II» (// Дифферепциальпые уравпепия. 1971. Т. 7, N 5. С. 851–882.)

ГЛАВА 11

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

В этой главе изучается важный нодкласс бесконечномерных евклидовых нространств — так называемые *гильбертовы нространства*.

Мы устанавливаем важное для нриложений снециальное нредставление всякой линейной функции от элементов такого нространства (такую функцию нринято называть *линейным функционалом*), а также, что из всякого ограниченного но норме бесконечного множества элементов гильбертова нространства можно выделить нодноследовательность, сходящуюся в некотором слабом смысле (это свойство называют *слабой комнактностью* шара в гильбертовом нространстве).

Особое внимание уделяется изучению ортонормированных систем элементов гильбертова нространства. Мы устанавливаем эквивалентность для таких систем, введенных в § 2 гл. 10 нонятий замкнутости и нолноты, и доказываем знаменитую теорему Рисса–Фишера, согласно которой любая носледовательность чисел, ряд из квадратов которых сходится, нредставляет собой носледовательность коэффициентов Фурье некоторого элемента гильбертова нространства в разложении но нанеред заданной ортонормированной системе элементов этого нространства. В носледнем нараграфе доказывается существование собственных значений у так называемых *вполне ненрерывных самосонряженных онераторов*, действующих в гильбертовом нространстве.

§ 1. Пространство l^2

1. Понятие пространства l^2. Рассмотрим множество, элементами которого являются всевозможные носледовательности вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ такие, что ряд, составленный из квадратов этих чисел

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \tag{11.1}$$

является сходящимся. Элементы такого множества будем обозначать (как векторы) нолужирными латинскими буквами:

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ и т. д. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем называть координатами элемента $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Онределим онерации сложения элементов и умножения элементов на вещественные числа. Суммой двух элементов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ называется элемент $\boldsymbol{z} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots)$ [1]. Этот элемент мы будем обозначать символом $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$. Нроизведением элемента $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ на вещественное число λ назовем элемент, обозначаемый символом $\lambda\boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{x}\lambda$ и равный $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots)$. Легко нроверить, что онределенное нами множество является линейным нространством, т. е. нроверить вынолнение всех аксиом, относящихся к сложению элементов и к умножению элементов на вещественные числа [2].

Введем тенерь в указанном множестве скалярное нроизведение двух любых элементов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, онределив его как сумму ряда [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Итак, мы нолагаем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Легко нроверить вынолнение всех четырех аксиом скалярного нроизведения. (Эти аксиомы можно найти в § 1 гл. 10, а нроверку их сnраведливости для изучаемого нами нространства нредоставляем читателю).

Таким образом, введенное нами множество является евклидовым нространством. Это множество мы, следуя установившейся традиции, обозначим символом l^2.

Как и во всяком евклидовом нространстве, введем в l^2 норму каждого элемента $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ноложив ее равной

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}. \qquad (11.2)$$

---

[1] Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)^2$ сразу вытекает из неравенства $(x_k + y_k)^2 \leqslant 2x_k^2 + y_k^2$ и из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

[2] Формулировку аксиом линейного нространства можно найти в любом курсе линейной алгебры.

[3] Сходимость указанного ряда вытекает из неравенства $|x_k y_k| \leqslant \dfrac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2)$ и из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

(Так как ряд (11.1) является сходящимся, то такое онределение имеет смысл).

Как обычно, назовем два элемента l^2 ортогональными, если скалярное нроизведение этих элементов равно нулю.

Наномним, что *ортонормированной системой* в нроизвольном евклидовом нространстве называется носледовательность элементов $\{\boldsymbol{e}_k\}$ этого нространства, удовлетворяющая двум требованиям: 1) любые два элемента этой носледовательности ортогональны; 2) норма каждого элемента равна единице.

Докажем, что в нространстве l^2 существует *замкнутая* (а стало быть, согласно теореме 10.7, и *нолная*) ортонормированная система [1]. Убедимся, что такой системой является носледовательность элементов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots), \\ \boldsymbol{e}_3 &= (0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{11.3}$$

То, что эта система является ортонормированной, очевидно (норма (11.2) для каждого элемента $\boldsymbol{e}_k$ равна единице, скалярное нроизведение любых двух элементов нредставляет собой бесконечную сумму нроизведений, каждое из которых равно нулю). Для доказательства замкнутости ортонормированной системы (11.3) достаточно доказать, что для любого, элемента $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ нространства l^2 ряд Фурье этого элемента но системе (11.3) сходится к этому элементу но норме нространства l^2 [2].

Так как коэффициенты Фурье $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_k)$ элемента $\boldsymbol{x}$ совнадают с координатами x_k этого элемента, то n-я частичная сумма ряда Фурье элемента $\boldsymbol{x}$ равна $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k$ и нам достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x} \right\| = 0. \tag{11.4}$$

Но из онределения нормы (11.2), из ортонормированности системы $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и из свойств скалярного нроизведения вытекает,

[1] Онределения нолноты и замкнутости ортонормированной системы см. в § 2 гл. 10.

[2] Ибо тогда любой элемент $\boldsymbol{x}$ нространства l^2 можно сколь угодно точно нриблизить но норме l^2 частичными суммами указанного ряда Фурье.

что

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x}\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x},\ \sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x}\right) = \\ = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k(\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2,$$

так что соотношение (11.4) вытекает из сходимости ряда (11.1).

2. Общий вид линейного функционала в l^2. Мы будем рассматривать функции, аргументами которых служат элементы l^2, а значениями — вещественные числа. Такого рода функции нринято называть функционалами (онределенными в нространстве l^2).

Точнее, нашей целью является детальное изучение нростейшего функционала, определенного в нространстве l^2, так называемого линейного функционала.

Определение 1. *Функционал $l(\boldsymbol{x})$, определенный в пространстве l^2, называется линейным, если для любых элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства l^2 и любых вещественных чисел α и β справедливо равенство*

$$l(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha l(\boldsymbol{x}) + \beta l(\boldsymbol{y}).$$

Пусть $\boldsymbol{x}_0$ — нроизвольный элемент нространства l^2. С целью геометризации терминологии мы часто будем называть этот элемент $\boldsymbol{x}_0$ точкой нространства l^2.

Определение 2. *Произвольный функционал $l(\boldsymbol{x})$, определенный в пространстве l^2, называется непрерывным в точке $\boldsymbol{x}_0$ пространства l^2, если для любой последовательности элементов $\{\boldsymbol{x}_n\}$ пространства l^2, сходящейся по норме пространства l^2 к элементу $\boldsymbol{x}_0$, числовая последовательность $l(\boldsymbol{x}_n)$ сходится к $l(\boldsymbol{x}_0)$.*

Определение 3. *Функционал $l(\boldsymbol{x})$ называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке $\boldsymbol{x}$ пространства l^2.*

Сразу же заметим, что *в случае линейного функционала $l(\boldsymbol{x})$ непрерывность хотя бы в одной точке $\boldsymbol{x}_0$ влечет за собой непрерывность в каждой точке $\boldsymbol{x}$ пространства l^2.* В самом деле, нусть линейный функционал ненрерывен в точке $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}$ — нроизвольная точка нространства l^2. Обозначим символом $\{\boldsymbol{x}_n\}$ нроизвольную носледовательность элементов l^2, сходящуюся но норме l^2 к $\boldsymbol{x}$. Тогда носледовательность $\{\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\}$ сходится но норме l^2 к $\boldsymbol{x}_0$ и из ненрерывности функционала в точке $\boldsymbol{x}_0$ следует, что

$$l(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}) \to l(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{нри} \quad n\to\infty. \tag{11.5}$$

Но из линейности функционала вытекает, что $l(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}) = l(\boldsymbol{x}_0)+l(\boldsymbol{x}_n)-l(\boldsymbol{x})$. Из этого равенства и из (11.5) нолучим, что $l(\boldsymbol{x}_n) \to l(\boldsymbol{x})$ нри $n\to\infty$, что и означает ненрерывность функционала в точке $\boldsymbol{x}$.

Определение 4. *Функционал $l(\boldsymbol{x})$ называется о г р а н и ч е н н ы м, если существует постоянная C такая, что для всех элементов $\boldsymbol{x}$ пространства l^2 справедливо неравенство*

$$|l(\boldsymbol{x})| \leqslant C\,\|\boldsymbol{x}\|\,. \tag{11.6}$$

Теорема 11.1. *Для того чтобы линейный функционал $l(\boldsymbol{x})$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть линейный функционал $l(\boldsymbol{x})$ ненрерывен. Предноложим, что ностоянной C, обеснечивающей неравенство (11.6), не существует. Тогда найдется носледовательность ненулевых элементов $\boldsymbol{x}_n$ [1] такая, что $|l(\boldsymbol{x}_n)| \geqslant n^2\,\|\boldsymbol{x}_n\|$. Положим $\boldsymbol{y}_n = \dfrac{1}{n\,\|\boldsymbol{x}_n\|}\boldsymbol{x}_n$. Так как $\|\boldsymbol{y}_n-\mathbf{0}\| = \|\boldsymbol{y}_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$ нри $n\to\infty$, то в силу ненрерывности функционала $l(\boldsymbol{y}_n)\to l(\mathbf{0})=0$ нри $n\to\infty$, а это нротиворечит неравенству $l(\boldsymbol{y}_n) = \dfrac{1}{n\,\|\boldsymbol{x}_n\|}l(\boldsymbol{x}_n) \geqslant n$. Необходимость доказана.

2. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть линейный функционал $l(\boldsymbol{x})$ ограничен, т. е. существует ностоянная C такая, что для всех элементов $\boldsymbol{x}$ снраведливо неравенство (11.6). Пусть далее $\boldsymbol{x}_0$ — нроизвольная точка l^2, $\{\boldsymbol{x}_n\}$ — нроизвольная носледовательность элементов l^2, сходящаяся но норме l^2 к $\boldsymbol{x}_0$. Тогда в силу линейности функционала $l(\boldsymbol{x}_n)-l(\boldsymbol{x}_0) = l(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0)$, так что на основании неравенства (11.6) $|l(\boldsymbol{x}_n)-l(\boldsymbol{x}_0)| = |l(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0)| \leqslant C\,\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0\|$. Из носледнего неравенства следует, что $l(\boldsymbol{x}_n)\to l(\boldsymbol{x}_0)$ нри $n\to\infty$. Достаточность доказана.

Доказанная теорема нозволяет нам ввести норму линейного ненрерывного функционала.

Определение 5. *Н о р м о й линейного непрерывного функционала $l(\boldsymbol{x})$ называется точная верхняя грань отношения $\dfrac{|l(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ на множестве всех элементов $\boldsymbol{x}$ пространства l^2.*

---

[1]) Для нулевого элемента $\mathbf{0}$ неравенство (11.6) снраведливо нри любой ностоянной C, ибо в силу линейности функционала $l(\mathbf{0}) = l(0\boldsymbol{x}) = 0\cdot l(\boldsymbol{x}) = 0$.

Норму линейного ненрерывного функционала $l(\boldsymbol{x})$ будем обозначать символом $\|l\|$. Итак, но онределению

$$\|l\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in l^2} \frac{|l(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{11.7}$$

Снраведлива следующая *основная* теорема.

Теорема 11.2 (теорема Рисса). *Для каждого линейного непрерывного функционала $l(\boldsymbol{x})$ существует один и только один элемент $\boldsymbol{a}$ пространства l^2 такой, что для всех элементов $\boldsymbol{x}$ пространства l^2 справедливо равенство*

$$l(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{x}), \tag{11.8}$$

причем $\|l\| = \|\boldsymbol{a}\|$.

Доказательство. Пусть $\{\boldsymbol{e}_k\}$ — замкнутая ортонормированная система (11.3), $a_k = l(\boldsymbol{e}_k)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$. Убедимся в том, что носледовательность вещественных чисел $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$ нредставляет собой элемент нространства l^2, т. е. убедимся в сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

Для любого номера n ноложим $\boldsymbol{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k$. Тогда в силу линейности функционала

$$l(\boldsymbol{S}_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k l(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \|\boldsymbol{S}_n\|^2. \tag{11.9}$$

С другой стороны, из теоремы 11.1 и из онределения нормы линейного ненрерывного функционала (11.7) следует, что

$$|l(\boldsymbol{S}_n)| \leqslant \|l\| \cdot \|\boldsymbol{S}_n\|. \tag{11.10}$$

Из (11.9) и (11.10) нолучим, что $\|\boldsymbol{S}_n\| \leqslant \|l\|$ или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \|l\|^2. \tag{11.11}$$

Последнее неравенство, снраведливое для любого номера n, доказывает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$, т. е. доказывает, что носледовательность $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots)$ нредставляет собой некоторый элемент l^2, который мы обозначим через $\boldsymbol{a}$.

Пусть тенерь $\boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots)$ — нроизвольный элемент l^2. Тогда в силу замкнутости ортонормированной системы

(11.3) частичная сумма ряда Фурье $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k$ сходится но норме l^2 к $\boldsymbol{x}$ нри $n \to \infty$. В силу ненрерывности функционала отсюда следует, что

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k\right) \to l(\boldsymbol{x}) \quad \text{нри} \quad n \to \infty.$$

Но из линейности функционала и из равенства $a_k = l(\boldsymbol{e}_k)$ вытекает, что

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k l(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k.$$

Стало быть, мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k a_k = l(\boldsymbol{x}),$$

но это и означает, что нами установлено равенство (11.8) с однозначно онределенным элементом $\boldsymbol{a}$, координаты которого равны $l(\boldsymbol{e}_k)$.

Остается убедиться в том, что $\|l\| = \|\boldsymbol{a}\|$. Из снраведливого для любого номера n неравенства (11.11) сразу же следует, что

$$\|\boldsymbol{a}\| \leqslant \|l\|. \tag{11.12}$$

С другой стороны, из уже доказанного нами равенства (11.8) с номощью неравенства Коши–Буняковского [1] $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})| \leqslant \|\boldsymbol{a}\| \times \times \|\boldsymbol{x}\|$ нолучим, что $|l(\boldsymbol{x})| \leqslant \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$, откуда в силу онределения нормы (11.7) вытекает, что

$$\|l\| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|. \tag{11.13}$$

Из (11.12) и (11.13) заключаем, что $\|l\| = \|\boldsymbol{a}\|$. Теорема нолностью доказана.

Доказанная теорема устанавливает общий вид всякого линейного ненрерывного функционала в нространстве l^2.

3. О слабой компактпости ограпичеппого по порме l^2 мпожества.

Определение 1. *Множество E элементов l^2 называется ограниченным (или ограниченным по норме), если существует постоянная M такая, что $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant M$ для всех элементов $\boldsymbol{x}$ множества E.*

[1] Согласно теореме 10.1 неравенство Коши–Буняковского снраведливо для любых двух элементов всякого евклидова нространства.

Определение 2. *Бесконечное множество E элементов l^2 называется компактным, если из любой принадлежащей множеству E последовательности элементов $\{\boldsymbol{x}_n\}$ можно выделить сходящуюся по норме l^2 подпоследовательность $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$.*

Очевидно, *что всякое компактное множество E элементов l^2 является ограниченным* [1].

В евклидовом нространстве конечного числа измерений верно и обратное утверждение: *всякое содержащее бесконечное число элементов ограниченное множество E является компактным* (теорема Больцано–Вейерштрасса). Но в бесконечномерном нространстве, каковым является l^2, из ограниченности бесконечного множества элементов E уже не вытекает комнактность этого множества.

Нанример, множество $\{\boldsymbol{e}_k\}$ всех элементов ортонормированной системы (11.3) является ограниченным (ибо нормы всех элементов равны единице), но не является комнактным (ибо для сходимости носледовательности элементов но норме l^2 необходимо, чтобы норма разности двух элементов с номерами k и $k+1$ стремилась к нулю нри $k \to \infty$, а для любой ноднinfoследовательности, составленной из элементов (11.3), $\|\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_l\|^2 = \|\boldsymbol{e}_k\|^2 + \|\boldsymbol{e}_l\|^2 = 2$ для любых k и l, не равных друг другу).

Естественно нонытаться ввести нонятие комнактности множества в более слабом (чем в онределении 2) смысле, с тем, чтобы любое (содержащее бесконечное число элементов) ограниченное множество оказалось комнактным в таком слабом смысле.

Определение 3. *Последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}$ элементов пространства l^2 называется слабо сходящейся к элементу $\boldsymbol{x}_0$ этого пространства, если для любого элемента $\boldsymbol{a}$ пространства l^2 справедливо соотношение*

$$(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}) \to (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}) \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Заметим, что из сходимости $\{\boldsymbol{x}_n\}$ к $\boldsymbol{x}_0$ но норме l^2 и из неравенства Коши–Буняковского вытекает слабая сходимость $\{\boldsymbol{x}_n\}$ к $\boldsymbol{x}_0$, ибо $|(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a})| = |(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a})| \leqslant \sqrt{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\| \cdot \|a\|}$ для любого элемента $\boldsymbol{a}$. Слабая сходимость $\{\boldsymbol{x}_n\}$ к $\boldsymbol{x}_0$, вообще говоря, не влечет за собой сходимость $\{\boldsymbol{x}_n\}$ к $\boldsymbol{x}_0$ но норме l^2. Нанример, носледовательность $\{\boldsymbol{e}_k\}$ всех элементов ортонормированной системы (11.3) слабо сходится к нулевому элементу $\mathbf{0}$, ибо для любого элемента $\boldsymbol{a}$ нространства l^2 снраведливо неравенство

[1] В самом деле, из неограниченности множества E вытекало бы существование носледовательности нринадлежащих E элементов, для которых носледовательность норм является бесконечно большой. Любая нодпоследовательность такой носледовательности расходится но норме l^2, что нротиворечит условию комнактности множества E.

Бесселя [1] $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{a})^2 \leqslant \|\boldsymbol{a}\|^2$, согласно которому $(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}) \to \to (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}) = 0$ нри $n \to \infty$. Вместе с тем выше доказано, что носледовательность $\{\boldsymbol{e}_k\}$ не сходится но норме l^2.

Сходимость но норме l^2 (в отличие от слабой сходимости) часто называют сильной сходимостью.

Определение 4. *Бесконечное множество E элементов l^2 называется слабо компактным, если из любой принадлежащей множеству E последовательности элементов $\{\boldsymbol{x}_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Снраведлива следующая фундаментальная теорема.

Теорема 11.3. *Всякое состоящее из бесконечного числа элементов ограниченное множество в l^2 является слабо компактным.*

Доказательство. Пусть E — нроизвольное ограниченное нодмножество l^2, содержащее бесконечное число элементов, $\{\boldsymbol{x}_n\}$ — нроизвольная носледовательность элементов E. Условие ограниченности множества E нозволяет утверждать, что $\|\boldsymbol{x}_n\| \leqslant \leqslant M$, где M — некоторая ностоянная. Но тогда из соотношения $\|\boldsymbol{x}_n\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{nk}^2$ вытекает ограниченность для любого номера k числовой носледовательности k-х координат x_{nk} элементов $\boldsymbol{x}_n$. Стало быть, в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса (см. теорему 3.3 из вын. 1) из носледовательности $\{\boldsymbol{x}_n\}$ можно выделить нодноследовательность элементов $\{\boldsymbol{x}_n^{(1)}\}$ такую, что нервые координаты этих элементов образуют сходящуюся числовую носледовательность, затем из $\{\boldsymbol{x}_n^{(1)}\}$ можно выделить нодноследовательность элементов $\{\boldsymbol{x}_n^{(2)}\}$ такую, что как нервые, так и вторые координаты этих элементов образуют сходящиеся числовые носледовательности и т. д. После k шагов мы выделим нодноследовательность элементов $\{\boldsymbol{x}_n^{(k)}\}$, у которой каждая из нервых k координат образует сходящуюся числовую носледовательность.

Положим $\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x}_n^{(n)}$. Очевидно, что $\{\boldsymbol{y}_n\}$ является нодноследовательностью исходной носледовательности элементов $\{\boldsymbol{x}_n\}$ и что носледовательность, образованная любой координатой элементов $\boldsymbol{y}_n$, является сходящейся числовой носледовательностью, т. е. если $\boldsymbol{y}_n = (y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nk}, \ldots)$, то для каждого k носледовательность y_{nk} сходится нри $n \to \infty$. Обозначим

[1] Согласно теореме 10.4 неравенство Бесселя снраведливо для каждого элемента и любой ортонормированной системы в нроизвольном евклидовом нространстве.

через ξ_k нредел носледовательности k-х координат элементов $\boldsymbol{y}_n$, т. е. ноложим $\xi_k = \lim\limits_{n\to\infty} y_{nk}$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ и убедимся в том, что носледовательность $(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_k,\, \ldots)$ нредставляет собой некоторый элемент нространства l^2, т. е. убедимся в сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^2$. Так как $\|\boldsymbol{y}_n\| \leqslant M$ для всех номеров n, то для всех номеров n

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_{nk}^2 \leqslant M^2 \tag{11.14}$$

и тем более

$$\sum_{k=1}^{N} y_{nk}^2 \leqslant M^2 \tag{11.15}$$

(для любого фиксированного номера N и для всех номеров n).

Переходя в (11.15) к нределу нри $n \to \infty$, мы нолучим, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k^2 \leqslant M^2$ для любого номера N, а, это и означает, что носледовательность $(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_k,\, \ldots)$ нредставляет собой некоторый элемент l^2, который мы обозначим через $\boldsymbol{\xi}$.

Остается доказать, что носледовательность $\{\boldsymbol{y}_n\}$ слабо сходится к этому элементу $\boldsymbol{\xi}$, т. е. доказать, что для любого элемента $\boldsymbol{a} = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k,\, \ldots)$ нространства l^2 снраведливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} (\boldsymbol{y}_n,\, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{a})$ или, что то же самое, соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_{nk} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k.$$

В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_{nk} = \xi_k$, и в силу теоремы о ночленном нереходе к нределу (см. теорему 1.6) достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_{nk} \cdot a_k \tag{11.16}$$

сходится равномерно относительно всех номеров n. Фиксируем нроизвольное $\varepsilon > 0$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ вытекает существование такого номера m_0, что

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{M^2} \tag{11.17}$$

для всех $m \geqslant m_0$ и всех натуральных $p\,(p = 1,\, 2,\, \ldots)$.

Применяя к остатку ряда (11.16) неравенство Коши–Буняковского для сумм [1])

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk}a_k\right| \leqslant \left[\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk}^2 \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k^2\right]^{1/2}$$

и иснользуя неравенства (11.14) и (11.17), мы нолучим, что

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk}a_k\right| < \varepsilon$$

для всех $m \geqslant m_0$, всех натуральных p и сразу для всех номеров n. Но это и означает, что ряд (11.16) сходится равномерно относительно всех номеров n. Теорема доказана.

Доказанная теорема находит многочисленные нрименения. В частности, она широко применяется в теории вариационных методов решения задач математической физики.

§ 2. Прострапство L^2

1. Простейшие свойства прострапства L^2. С нространством L^2 мы уже знакомы из н. 7 § 4 гл. 8, носвященного изучению классов L^p нри любом $p \geqslant 1$.

Наномним, что нространством $L^2(E)$ называется множество всех функций $\{f(x)\}$ таких, что каждая функция $f(x)$ измерима на множестве E, а каждая функция $f^2(x)$ суммируема (т. е. интегрируема в смысле Лебега) на множестве E. При этом мы не различаем эквивалентных на множестве E функций, рассматривая их как один элемент $L^2(E)$.

Кратко называют $L^2(E)$ нространством функций с суммируемым (на множестве E) квадратом.

Сразу же отметим, что все интегралы в этом нараграфе нонимаются в смысле Лебега, а нод множеством E нонимается измеримое множество ноложительной конечной меры на бесконечной нрямой, хотя вся излагаемая нами теория без каких-либо осложнений нереносится на случай нроизвольного множества ноложительной меры E в нространстве любого числа n измерений.

В н. 7 § 4 гл. 8 было установлено, что нространство $L^2(E)$ является линейным нормированным нространством с нормой любого элемента $f(x)$ вида

$$\|f\| = \left(\int_E f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{11.18}$$

[1]) Это неравенство установлено в донолнении 1 к гл. 10 вын. 1.

Пространство $L^2(E)$ существенно отличается от всех других нространств $L^p(E)$ При $p \neq 2$, тем, что $L^2(E)$ является евклидовым нространством со скалярным нроизведением любых двух элементов $f(x)$ и $g(x)$ вида [1]

$$(f,\, g) = \int_E f(x)g(x)\, dx. \tag{11.19}$$

Снраведливость в $L^2(E)$ всех четырех аксиом скалярного нроизведения [2] легко следует из независимости нроизведения $f(x)g(x)$ от норядка сомножителей, из линейных свойств интеграла и из условия эквивалентности нулю измеримой, суммируемой и неотрицательной функции $f^2(x)$.

Заметим еще, что из (11.18) и (11.19) вытекает, что (как и во всяком евклидовом нространстве) норма и скалярное нроизведение в L^2 связаны соотношением

$$\|f\| = \sqrt{(f,\, f)}.$$

Наконец, наномним, что в н. 7 § 4 гл. 8 доказано, что нространство $L^2(E)$ является нолным [3].

Перейдем тенерь к выяснению более глубоких свойств нространства $L^2(E)$.

2. Сепарабельпость пространства L^2. Рассмотрим сначала нроизвольное линейное нормированное нространство R.

Определение 1. *Множество M элементов линейного нормированного пространства R называется в с ю д у п л о т н ы м (или п л о т н ы м в R), если для любого элемента f пространства R из множества M можно выделить последовательность элементов $\{f_n\}$, сходящуюся по норме R к f.*

Определение 2. *Линейное нормированное пространство R называется с е п а р а б е л ь н ы м, если в нем существует счетное всюду плотное множество элементов M.*

Целью настоящего нункта является доказательство сенарабельности нространства L^2.

Теорема 11.4. *Множество непрерывных на E функций является всюду плотным в $L^2(E)$.*

---

[1] Определепие евклидова прострапства и скалярпого произведепия см. в § 1 гл. 10.

[2] Аксиомы скалярпого произведепия можпо пайти в § 1 гл. 10.

[3] Напомпим, что липейпое пормироваппое прострапство R пазывается п о л п ы м, если для любой фундаментальпой последовательпости $\{f_n\}$ элемептов этого прострапства (т. е. для последовательпости $\{f_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geqslant n} \|f_m - f_n\| = 0$, существует элемепт f прострапства R, к которому сходится в R эта последовательпость.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — нроизвольная функция из $L^2(E)$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, вводя две неотрицательные функции

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

легко убедиться в снраведливости теоремы для любой функции $f \in L_2$ нри условии, что для неотрицательных функций она доказана.

Кроме того, мы можем нредноложить, что $f(x)$ всюду нринимает конечные значения. Итак, нусть $f(x) \in L_2(E)$ и $0 \leqslant \leqslant f(x) < \infty$.

Рассмотрим для каждого номера n носледовательность ненерересекающихся множеств [1])

$$E_n^k = E\left[\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right] \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда, очевидно, для любого номера $n\,(n = 1, 2, \ldots)$ сумма указанных множеств но всем $k = 0,\ 1,\ \ldots$ дает множество E, т. е. $E = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_n^k$.

Построим носледовательность $\{f_n(x)\}$ функций, онределенных на множестве E, для каждого номера n ноложив $f_n(x) = k/2^n$ для x, нринадлежащего E_n^k. Таким образом, каждая функция $f_n(x)$ нредставляет собой «стуненчатую» на множестве E функцию (нринимающую не более чем счетное число значений).

Далее очевидно, что для всех номеров n и всех точек x множества E снраведливо неравенство

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) < 1/2^n,$$

из которого следует, что носледовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на множестве E. Положим $\Psi_n(x) = = \min\{n,\ f_n(x)\}$.

Каждая функция $\Psi_n(x)$ нринимает на множестве E лишь конечное число значений, нричем носледовательность $\{\Psi_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ всюду на E. Так как, кроме того, всюду на множестве E снраведливо неравенство $0 \leqslant f(x) - \Psi_n(x) \leqslant f(x)$, из которого следует, что $[f(x) - \Psi_n(x)]^2 \leqslant f^2(x)$ всюду на E, то в силу следствия из теоремы 8.19 носледовательность $[f(x) - - \Psi_n(x)]^2$ сходится к нулю в $L^1(E)$, т. е. носледовательность $\Psi_n(x)$ сходится к $f(x)$ в $L^2(E)$.

---

[1]) Напомпим, что символ $E\,[f$ удовлетворяет условию $A]$ обозпачает мпожество всех точек E, для которых фупкция $f(x)$ удовлетворяет условию A.

Остается доказать, что каждую функцию $\Psi_n(x)$ можно приблизить но норме $L^2(E)$ ненрерывной функцией с любой стененью точности. Наномним, что каждая функция $\Psi_n(x)$ нринимает лишь конечное число значений, т. е. имеет вид $\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k\omega_k(x)$, где a_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — ностоянные числа, а $\omega_k(x)$ — так называемые характеристические функции множеств E_k:

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{на множестве } E_k, \\ 0 & \text{вне множества } E_k. \end{cases}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы, достаточно нострoить носледовательность ненрерывных функций, сходящуюся в $L^2(E)$ к функции $\omega(x)$ вида

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{на множестве } E_0, \\ 0 & \text{вне множества } E_0, \end{cases}$$

где E_0 — некоторое содержащееся в E измеримое множество.

Для множества E_0 и для любого номера n найдутся содержащее E_0 открытое множество G_n и содержащееся в E_0 замкнутое множество F_n такие, что мера разности $G_n - F_n$ меньше $1/n$ [1]. Обозначим символом $\widetilde{F}_n$ доnолнение множества G_n и ноложим

$$\varphi_n(x) = \frac{\rho(x, \widetilde{F}_n)}{\rho(x, \widetilde{F}_n) + \rho(x, F_n)},$$

где символ $\rho(x, F)$ обозначает расстояние от точки x до множества F.

Очевидно, что каждая функция $\varphi_n(x)$ ненрерывна на E, равна единице на F_n, равна нулю на $\widetilde{F}_n$ и всюду удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1$. Отсюда для нормы разности $\varphi_n(x) - \omega(x)$ мы нолучим следующую оценку:

$$\|\varphi_n - \omega\|^2_{L^2(E)} = \int_E [\varphi_n(x) - \omega(x)]^2\, dx \leqslant \int_{G_n \setminus F_n} dx < \frac{1}{n}, \qquad (11.20)$$

которая завершает доказательство теоремы.

Докажем тенерь следующую *основную* теорему.

Теорема 11.5. *Для любого ограниченного измеримого множества E пространство $L^2(E)$ сепарабельно.*

Доказательство. Сначала нроведем доказательство для случая, когда множество E нредставляет собой сегмент $[a, b]$.

[1] В силу определепия измеримости мпожества E_0 и следствия из теоремы 8.5 (см. п. 2 § 2 гл. 8).

Докажем, что в этом случае в качестве счетного всюду нлотного множества в $L^2[a,\,b]$ можно взять множество M всех многочленов с рациональными коэффициентами [1].

Согласно теореме 11.4 любую функцию $f(x)$ из $L^2([a,\,b])$ можно нриблизить с любой стененью точности но норме $L^2([a,\,b])$ ненрерывной функцией. Далее, согласно теореме Вейерштрасса 1.18, всякую ненрерывную на сегменте $[a,\,b]$ функцию можно равномерно на этом сегменте (а стало быть, и но норме $L^2([a,\,b])$) нриблизить с любой стененью точности алгебраическим многочленом с вещественными коэффициентами.

Наконец, очевидно, что алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами можно равномерно на $[a,\,b]$, а стало быть, и но норме $L^2([a,\,b])$ нриблизить с любой стененью точности многочленом с рациональными коэффициентами. Тем самым для случая, когда множество E нредставляет собой сегмент $[a,\,b]$ доказательство теоремы завершено.

Пусть тенерь E — нроизвольное ограниченное измеримое множество. Так как множество E ограничено, то найдется сегмент $[a,\,b]$, содержащий множество E.

Пусть $f(x)$ — нроизвольная функция из $L^2(E)$. Продолжим эту функцию на сегмент $[a,\,b]$, наложив ее равной нулю вне E. Остается заметить, что так нродолженная функция $f(x)$ нринадлежит классу $L^2([a,\,b])$, и ноэтому, согласно доказанному выше, может быть нриближена с любой стененью точности но норме $L^2([a,\,b])$ (и тем более но норме $L^2(E)$) многочленами с рациональными коэффициентами. Стало быть, и в этом случае многочлены с рациональными коэффициентами образуют всюду нлотное в $L^2(E)$ множество. Теорема нолностью доказана.

3. Существовапие в L^2 замкпутой ортопормироваппой системы, состоящей из счетпого числа элемептов. Для ностроения в L^2 замкнутой ортонормированной системы элементов будем исходить из существования в L^2 счетного всюду нлотного множества элементов $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n,\, \ldots$

Мы докажем, что замкнутая ортонормированная система может быть ностроена с номощью конечных линейных комбинаций [2] элементов всюду нлотного множества $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n,\, \ldots$

Такой способ ностроения ортонормированной системы обычно называют *нроцессом ортогонализации*.

[1] То, что такое мпожество M счетпо, вытекает из счетпости всех рациопальпых чисел и из счетпости числа всех мпогочлепов различпой степепи.

[2] Говорят, что элемепт Ψ_n является липейпой комбипацией элемептов $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_m$, если пайдутся веществеппые числа $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_m$ такие, что $\Psi_n = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_m f_m$.

Будем считать, что среди элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ нет линейно зависимых [1] элементов (иначе нри носледовательном увеличении номера n мы удалили бы из совокунности $\{f_n\}$ каждый элемент f_n, являющийся линейной комбинацией элементов $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$).

Построим систему нонарно ортогональных ненулевых элементов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ таких, что для любого номера n каждый из элементов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ является линейной комбинацией элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и, наоборот, каждый из элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ является линейной комбинацией элементов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ [2].

Докажем методом математической индукции, что указанная система элементов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ может быть носледовательно онределена с номощью соотношений

$$\Psi_1 = f_1, \tag{11.21}$$

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} (f_1, \Psi_1) & (f_1, \Psi_2) & \ldots & (f_1, \Psi_{n-1}) & f_1 \\ (f_2, \Psi_1) & (f_2, \Psi_2) & \ldots & (f_2, \Psi_{n-1}) & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (f_n, \Psi_1) & (f_n, \Psi_2) & \ldots & (f_n, \Psi_{n-1}) & f_n \end{vmatrix} \quad \text{нри} \quad n \geqslant 2. \tag{11.22}$$

Ясно, что элемент Ψ_1, онределяемый соотношением (11.21), является ненулевым (ибо в нротивном случае для любого номера n оказались линейно зависимыми элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Таким образом, нри $n = 1$ вынолнены все указанные выше требования. Предноложим тенерь, что система $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$, ностроенная с номощью соотношений (11.21), (11.22), удовлетворяет всем указанным выше требованиям, и убедимся, что тогда этим требованиям удовлетворяет и ностроенная с номощью тех же соотношений система $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$.

Из (11.22) ясно, что элемент Ψ_n представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и, таким образом, является ненулевым (иначе бы оказалась нулевым элементом указанная линейная комбинация, т. е. элементы $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n$ оказались бы линейно зависимыми).

Далее, носкольку элементы $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ линейно выражаются через $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$ и носкольку минор стоящего в нравом нижнем углу онределителя (11.22) элемента f_n равен

[1] Это озпачает, что пи одип из элемептов f_n совокуппости $\{f_k\}$ пе является липейпой комбипацией копечпого числа других элемептов этой совокуппости.

[2] На языке липейпой алгебры это озпачает, что липейпая оболочка, патяпутая па элемепты $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, совпадает с липейпой оболочкой, патяпутой па элемепты $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

$\|\Psi_{n-1}\|$ [1]) и поэтому отличеп от пуля, из равепства (11.22) следует, что и элемепт f_n липейпо выражается через $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$.

Накопец, из (11.22) сразу вытекает, что элемепт Ψ_n ортогопалеп каждому из элемептов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$. В самом деле, если k — любой из померов $1, 2, \ldots, n-1$, то, умпожая обе части (11.22) скалярпо па Ψ_k, мы получим в правой части определитель, k-й и n-й столбцы которого одипаковы. Из равепства пулю такого определителя следует, что $(\Psi_n, \Psi_k) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Тем самым индукция завершепа, и система $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ $\ldots, \Psi_n, \ldots$, удовлетворяющая указаппым требовапиям, построепа.

Положив теперь для каждого помера n $\varphi_n = \Psi_n / \|\Psi_n\|$, мы получим ортопормироваппую систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$

Замкпутость построеппой пами системы $\{\varphi_n\}$ сразу вытекает из того, что каждый элемепт всюду плотпого мпожества $\{f_n\}$ является липейпой комбипацией копечпого числа элемептов системы $\{\varphi_n\}$.

Из счетпости всюду плотпого мпожества элемептов $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n, \ldots$ вытекает, что построеппая пами замкпутая ортопормироваппая система содержит *не более чем счетное* число элемептов. Но число элемептов этой системы *не может быть конечным*, ибо это озпачало бы, что прострапство L^2 является копечпомерпым [2]).

Тем самым мы окопчательпо доказали существовапие в L^2 замкпутой ортопормироваппой системы, состоящей из счетпого числа элемептов.

Заметим в заключепие, что замкпутую ортопормироваппую систему элемептов L^2 часто пазывают ортопормироваппым базисом [3]).

4. Изоморфизм прострапств L^2 и l^2 и следствия из пего. В прострапстве $L^2(E)$, точпо так же, как и в прострапстве l^2, вводятся попятия слабой сходимости последовательпости элемептов и слабой компактпости мпожества элемептов.

[1]) Для того чтобы убедиться в этом, достаточно занисать равенство (11.22) для номера $(n-1)$ и умножить его скалярно на Ψ_{n-1}.

[2]) То что размерность нространства $L^2(E)$ равна бесконечности, сразу вытекает из того, что для любого нанеред заданного номера n в этом нространстве существует n линейно независимых элементов $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

[3]) Система элементов $\{\varphi_n\}$ называется базисом нространства $L^2(E)$, если любому элементу f нространства $L^2(E)$ однозначно соответствует разложение этого элемента в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ с нostоянными коэффициентами c_n, сходящийся к элементу f но норме нространства $L^2(E)$.

Определение 1. *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *элементов пространства* $L^2(E)$ *называется* *с л а б о с х о д я щ е й с я* *к элементу* $f(x)$ *этого пространства, если для любого элемента* $g(x)$ *пространства* $L^2(E)$ *справедливо соотношение*

$$(f_n,\, g) \to (f,\, g) \quad \text{\textit{при}} \quad n \to \infty,$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_E f_n(x) g(x)\, dx \to \int\limits_E f(x) g(x)\, dx \quad \text{\textit{при}} \quad n \to \infty.$$

Так же элемептарпо, как и для случая l^2, доказывается, что из сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по порме $L^2(E)$ вытекает слабая сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$. Копечпо, слабая сходимость элемептов $L^2(E)$ пе влечет за собой сходимости по порме $L^2(E)$ (примером может служить любая ортопормировашпая последовательпость элемептов прострапства $L^2(E)$).

Определение 2. *Бесконечное множество* M *элементов пространства* $L^2(E)$ *называется* *с л а б о к о м п а к т н ы м*, *если из любой принадлежащей множеству* M *последовательности элементов* $\{f_n(x)\}$ *можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

В полпой апалогии с тем, как это было сделапо для прострапства l^2, в прострапстве L^2 вводится попятие липейпого пепрерывпого фупкциопала.

Определение 3. *Функционал* $l(f)$, *определенный на элементах* f *пространства* $L^2(E)$, *называется* *л и н е й н ы м*, *если для любых двух элементов* f *и* g *пространства* $L^2(E)$ *и для любых вещественных чисел* α *и* β *справедливо равенство* $l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g)$.

Договоримся там, где это будет удобпо, пазывать элемепты f прострапства $L^2(E)$ точками этого прострапства.

Определение 4. *Функционал* $l(f)$, *определенный на элементах* f *пространства* $L^2(E)$, *называется* *н е п р е р ы в н ы м в т о ч к е* f_0 *этого пространства, если для любой последовательности* $\{f_n\}$ *элементов* $L^2(E)$, *сходящейся по норме* $L^2(E)$ *к элементу* f_0, *числовая последовательность* $l(f_n)$ *сходится к* $l(f_0)$.

Определение 5. *Функционал* $l(f)$ *называется просто* *н е п р е р ы в н ы м*, *если он непрерывен в каждой точке* f *пространства* $L^2(E)$.

Как и для случая l^2, легко доказать, что если липейпый фупкциопал в $L^2(E)$ пепрерывеп хотя бы в одпой точке $L^2(E)$, то оп пепрерывеп всюду па $L^2(E)$, т. е. просто пепрерывеп.

Естествеппо возпикает вопрос о перепесепии па случай пространства $L^2(E)$ доказаппых для пространства l^2 теоремы 11.2 об общем виде липейпого пепрерывпого фупкциопала и теоремы 11.3 о слабой компактпости всякого ограпичеппого (по порме) мпожества.

Мы устаповим глубокую связь между простраиствами L^2 и l^2, которая позволит пам сразу же устаповить справедливость для простраиства L^2 только что упомяпутых теорем.

Введем следующее фупдаментальпое попятие.

Определение 6. *Два произвольных евклидовых пространства R и R' называются* и з о м о р ф н ы м и, *если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие так, что при условии, что элементы x' и y' пространства R' являются образами элементов x и y пространства R, выполняются следующие требования:* 1) *элемент $x'+y'$ пространства R' является образом элемента $x+y$ пространства R;* 2) *при любом вещественном λ элемент $\lambda x'$ пространства R' является образом элемента λx пространства R;* 3) *скалярные произведения (x', y') и (x, y) равны друг другу.*

В курсе липейпой алгебры устапавливается, что все n-мерпые евклидовы простраиства изоморфпы между собой и изоморфпы простраиству E^n.

Главпой целью пастоящего пупкта является устаповлепие изоморфизма бескопечпомерпых евклидовых простраиств $L^2(E)$ и l^2. Но прежде всего мы докажем следующую замечательпую теорему.

Теорема 11.6 (теорема Рисса–Фишера). *Пусть $\{\varphi_n\}$ — произвольная ортонормированная система в $L^2(E)$* [1]. *Тогда для любой последовательности вещественных чисел $(c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_n, \ldots)$, удовлетворяющей условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, т. е. являющейся элементом l^2 найдется и притом единственная функция $f(x)$ из пространства $L^2(E)$ такая, что $c_n = (f, \varphi_n) =$ $= \int\limits_E f(x)\varphi_n(x)dx$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 = \int\limits_E f^2(x)dx$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$. Последовательпость $\{f_n\}$ фупдаментальпа, так как при $m \geqslant n$ справедливо

[1] Ни нолнота, ни тем более замкнутость этой системы не нреднолагается.

равепство $\|f_m - f_n\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{m} c_k^2$ и по условию ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится. Но тогда в силу полпоты прострапства $L^2(E)$ (устаповлеппой еще в п. 7 § 4 гл. 8), пайдется элемепт f прострапства $L^2(E)$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f \right\| = 0. \tag{11.23}$$

Из последпего соотпошепия и из тождества Бесселя (10.17), устаповлеппого в § 1 гл. 10 [1]), вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2.$$

Докажем, что $(f,\, \varphi_k) = c_k$ для любого помера k. Для этого заметим, что в силу ортопормироваппости системы $\{\varphi_k\}$ при всех $n \geqslant k$ справедливо равепство

$$(f_n,\, \varphi_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} c_l \varphi_l,\, \varphi_k \right) = \sum_{l=1}^{n} c_l (\varphi_l,\, \varphi_k) = c_k, \tag{11.24}$$

и учтем, что в силу перавепства Коши–Бупяковского

$$|(f_n,\, \varphi_k) - (f,\, \varphi_k)| = |(f_n - f,\, \varphi_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\|f_n - f\| \cdot \|\varphi_k\|} = \sqrt{\|f_n - f\|}$$

и в силу (11.23) справедливо соотпошепие

$$(f_n,\, \varphi_k) \to (f,\, \varphi_k) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11.25}$$

Из (11.24) и (11.25) получаем, что $(f,\, \varphi_k) = c_k$ для любого помера k.

Остается доказать, что f является единственным элемептом $L^2(E)$, удовлетворяющим всем условиям теоремы. Пусть g — любой другой элемепт $L^2(E)$, удовлетворяющий всем условиям теоремы. Из перавепства Коши–Бупяковского $|(f_n - f,\, g)| \leqslant \sqrt{\|f_n - f\|} \cdot \sqrt{\|g\|}$ и из (11.23) следует, что

$$(f_n - f,\, g) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11.26}$$

[1]) Указанное тождество Бесселя снраведливо для любой ортонормированной системы в нроизвольном евклидовом нространстве.

Но из равенства $(g,\,\varphi_k) = c_k$ и из аксиом скалярного произведения вытекает, что

$$(f_n - f,\,g) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f,\,g\right) = \\ = \sum_{k=1}^{n} c_k(g,\,\varphi_k) - (f,\,g) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - (f,\,g),$$

так что в силу (11.26)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f,\,g). \tag{11.27}$$

Из (11.27) и из соотношений $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|g\|^2$ получим, что

$$\|f-g\| = (f-g,\,f-g) = \|f\|^2 - 2(f,\,g) + \|g\|^2 = 0.$$

Но это означает, что разность $f-g$ представляет собой нулевой элемент $L^2(E)$, т. е. $f = g$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Если ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ замкнута или хотя бы полна, то единственность элемента f будет иметь место и без требования $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ (см. по этому поводу теорему 10.8).

Опираясь на теорему Рисса–Фишера, докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 11.7. *Пространства $L^2(E)$ и l^2 изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в пространстве $L^2(E)$ замкнутую ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$ и поставим в соответствие каждому элементу f пространства $L^2(E)$ элемент $\boldsymbol{c} = (c_1,\,c_2,\,\ldots,\,c_n,\,\ldots)$ пространства l^2, координаты c_k которого имеют вид $c_k = (f,\,\varphi_k)$ $(k = 1,\,2,\,\ldots)$. В силу теоремы 11.6 такое соответствие является взаимно-однозначным.

Остается доказать, что если элементам f и g пространства $L^2(E)$ отвечают соответственно элементы $\boldsymbol{c} = (c_1,\,c_2,\,\ldots,\,c_n,\,\ldots)$ и $\boldsymbol{d} = (d_1,\,d_2,\,\ldots,\,d_n,\,\ldots)$ пространства l^2, то 1) элементу $f+g$ отвечает элемент $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d} = (c_1+d_1,\,c_2+d_2,\,\ldots,\,c_n+d_n,\,\ldots)$; 2) при любом вещественном λ элементу λf отвечает элемент $\lambda\boldsymbol{c} = (\lambda c_1,\,\lambda c_2,\,\ldots,\,\lambda c_n,\,\ldots)$; 3) справедливо равенство

$$(f,\,g) = (\boldsymbol{c},\,\boldsymbol{d}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k, \tag{11.28}$$

называемое обычно о б о б щ е н н ы м р а в е н с т в о м П а р с е в а л я.

1) и 2) сразу вытекают из свойств скалярного нроизведения [1]). Докажем равенство (11.28). В силу замкнутости системы $\{\varphi_k\}$ для каждой из функций f, g и $f+g$ сnраведливы равенства Парсеваля

$$(f,\, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad (g,\, g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2, \tag{11.29}$$

$$(f+g,\, f+g) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2. \tag{11.30}$$

Вычитая (11.29) из (11.30), нолучим

$$2(f,\, g) = 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.$$

Теорема нолностью доказана.

Доказанная теорема нозволяет рассматривать l^2 как координатную форму заниси элементов нространства $L^2(E)$. Эта теорема нозволяет неренести на $L^2(E)$ все утверждения, установленные для l^2, и наоборот. В частности, из теоремы 11.7 вытекают следующие утверждения.

1°. Пространство l^2 является нолным.

2°. Любое ограниченное но норме $L^2(E)$ множество, содержащее бесконечное число элементов $L^2(E)$, является слабо комнактным.

3°. Для каждого линейного ненрерывного функционала $l(f)$, онределенного на элементах f нространства $L^2(E)$, существует один и только один элемент g нространства $L^2(E)$ такой, что для всех элементов f нространства $L^2(E)$ сnраведливо равенство $l(f) = (f,\, g)$, нричем

$$\|l\| = \sup_{f \in L^2(E)} \frac{|l(f)|}{\|f\|} = \|g\|\,.$$

С точки зрения квантовой механики теорема 11.7 является математическим обоснованием эквивалентности «матричной механики» Гейзенберга и «волновой механики» Шредингера, нервая из которых иснользовала в качестве математического аннарата координатное нространство l^2, а вторая — нространство функций с интегрируемым квадратом L^2.

Теорема (11.7) естественно, наводит на мысль о том, что оба нространства l^2 и L^2 являются лишь двумя различными кон-

[1]) Так, для доказательства 1) достаточно заметить, что $(f+g,\, \varphi_k) = (f,\, \varphi_k) + (g,\, \varphi_k) = c_k + d_k$.

кретными реализациями одного и того же абстрактного нространства, к рассмотрению которого мы тенерь и нереходим.

§ 3. Абстрактное гильбертово пространство

1. Понятие абстрактного гильбертова пространства. Гильбертово нространство H, с которым мы уже нознакомились в виде двух его конкретных реализаций l^2 и L^2, вводится аксиоматически как совокупность элементов $X, Y, Z, \ldots$ любой нрироды, удовлетворяющих онределенной системе аксиом.

Перечислим все аксиомы, которым должны удовлетворять элементы абстрактного гильбертова нространства H.

I. а) Аксиома о существовании нравила, носредством которого любым двум элементам X и Y нространства H ставится в соответствие элемент этого нространства Z, называемый суммой X и Y.

б) Аксиома о существовании нравила, носредством которого любому элементу X нространства H и любому вещественному числу λ ставится в соответствие элемент нространства H, называемый нроизведением X на λ.

в) Восемь аксиом линейного нространства [1]).

II. а) Аксиома о существовании нравила, носредством которого любым двум элементам X и Y нространства H ставится в соответствие число, называемое скалярным нроизведением этих элементов и обозначаемое символом (X, Y).

б) Четыре аксиомы скалярного нроизведения [2]).

---

[1]) Указанные восемь аксиом можно найти в любом курсе линейной алгебры. Ради удобства неречислим эти аксиомы.

1°. $X + Y = Y + X$ (для любых элементов X и Y).

2°. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (для любых элементов X, Y и Z).

3°. Существует элемент $\mathbf{0}$ такой, что $X + \mathbf{0} = X$ для любого элемента X.

4°. Для каждого элемента X существует элемент X' такой, что $X + X' = \mathbf{0}$.

5°. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)\cdot X$ для любого элемента X и любых вещественных чисел α и β.

6°. $1 \cdot X = X$ для любого элемента X.

7°. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$ для любого элемента X и любых вещественных чисел α и β.

8°. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$ для любых элементов X и Y и любого вещественного числа α.

[2]) Аксиомы скалярного нроизведения можно найти в § 1 гл. 10. Ради удобства неречислим эти аксиомы.

1°. $(X, Y) = (Y, X)$ для любых элементов X и Y.

2°. $(X + Y, Z) = (X, Z) + (Y, Z)$ для любых элементов X, Y и Z.

3°. $(\alpha X, Y) = \alpha(X, Y)$ для любых элементов X и Y и для любого вещественного числа α.

4°. $(X, X) > 0$ для всякого ненулевого элемента X, $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

III. Аксиома о нолноте нространства H относительно нормы, онределяемой равенством $\|X\| = \sqrt{(X,\, X)}$ [1].

IV. Аксиома о существовании в H любого нанеред взятого числа линейно независимых элементов.

V. Аксиома о существовании в H счетного всюду нлотного (в смысле нормы H) множества элементов.

Иными словами, *гильбертовым нространством H называется всякое линейное евклидово нолное бесконечномерное сенарабельное нространство.*

В гильбертовом нространстве H вводятся: 1) нонятия сходимости носледовательности элементов но норме и слабой сходимости (говорят, что носледовательность элементов $\{X_n\}$ слабо сходится к элементу X, если для любого элемента Y снраведливо соотношение $(X_n,\, Y) \to (X,\, Y)$ нри $n \to \infty$); 2) нонятие слабой комнактности множества M элементов H (которое онределяется как возможность выделения из любой носледовательности элементов M слабо сходящейся нодноследовательности); 3) нонятия линейного и ненрерывного функционалов $l(X)$, онределенных на элементах X нространства H (функционал $l(X)$ называется линейным, если $l(\alpha X + \beta Y) = \alpha l(X) + \beta l(Y)$ для любых элементов X и Y нространства H и любых вещественных чисел α и β; функционал $l(X)$ называется ненрерывным в «точке» X_0, если $l(X_n) \to l(X_0)$ для любой носледовательности $\{X_n\}$ элементов H, для которой $\|X_n - X_0\| \to 0$; нросто ненрерывным называется функционал $l(X)$, ненрерывный в каждой точке X нространства H).

В нолной аналогии с тем, как это было сделано в н. 3 § 2 для нространства L^2, для абстрактного гильбертова нространства H доказывается существование замкнутой ортонормированной системы элементов $\{\Phi_n\}$ (для этого нроизводится нроцесс ортогонализации счетного всюду нлотного множества элементов H).

Для абстрактного гильбертова нространства H (так же, как и для L^2) снраведлива теорема Рисса–Фишера: если $\{\Phi_n\}$ — нроизвольная ортонормированная система в H, а $(c_1,\, c_2,\, \ldots$ $\ldots,\, c_n,\, \ldots)$ — нроизвольная носледовательность вещественных чисел, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то в H найдется и нритом единственный элемент X такой, что $c_k = (X,\, \Phi_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|X\|^2$.

[1] Онределение нолноты линейного нормированного нространства см. в н. 7 § 4 гл. 8.

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 11.6 только тем, что во всех рассуждениях вместо элементов нространства L^2 следует брать элементы H.

Теорема Рисса–Фишера нозволяет установить следующую фундаментальную теорему.

Теорема 11.8. *Все гильбертовы пространства изоморфны друг другу.*

Достаточно доказать, что всякое гильбертово нространство H изоморфно нространству l^2, а для этого достаточно новторить доказательство теоремы 11.7, заменяя во всех рассуждениях элементы L^2 элементами H.

Из теоремы 11.8 сразу же вытекают следующие утверждения.

1°. *Любое ограниченное по норме H множество, содержащее бесконечное число элементов H, является слабо компактным.*

2°. *Для каждого линейного непрерывного функционала $l(X)$, определенного на элементах H гильбертова пространства H, существует один и только один элемент Y этого пространства такой, что для всех элементов X пространства H справедливо равенство $l(X) = (X, Y)$, причем $\|l\| = \sup\limits_{X \in H} \dfrac{|l(X)|}{\|X\|} = \|Y\|$.*

Замечание. Можно доказать, что всякое слабо комнактное множество M бесконечного числа элементов H является ограниченным (но норме H). Иными словами, можно доказать, *что ограниченность содержащего бесконечное число элементов подмножества M пространства H является необходимым и достаточным условием слабой компактности этого подмножества.*

2. Эквивалентность понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Согласно теореме 10.7 в любом евклидовом нространстве (а стало быть, и в любом гильбертовом нространстве) всякая замкнутая ортонормированная система является нолной. Сейчас мы докажем, что в гильбертовом нространстве снраведливо и обратное утверждение.

Теорема 11.9. *Всякая полная ортонормированная система элементов произвольного гильбертова пространства является замкнутой.*

Доказательство. Пусть $\{\Phi_n\}$ — нроизвольная нолная ортонормированная система элементов H, а Ψ — любой элемент H. Достаточно доказать, что n-я частичная сумма S_n ряда Фурье элемента Ψ но системе $\{\Phi_n\}$ сходится к этому элементу Ψ но норме H.

Пусть $c_k = (\Psi,\, \Phi_k)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\Phi_k$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится [1] и так как (в силу аксиом скалярного нроизведения и ортонормированности системы $\{\Phi_n\}$) нри любом $m \geqslant n$

$$\|S_m - S_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k\Psi_k\right\| = \left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k\Psi_k,\, \sum_{k=n+1}^{m} c_k\Psi_k\right) = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2,$$

то нoследовательность $\{S_n\}$ является фундаментальной.

Но тогда в силу нолноты нространства H найдется элемент этого нространства Ψ_0 такой, что

$$\|S_n - \Psi_0\| \to 0 \text{ нри } n \to \infty. \tag{11.31}$$

Остается доказать, что $\Psi_0 = \Psi$. Для этого достаточно доказать, что элементы Ψ и Ψ_0 имеют одинаковые коэффициенты Фурье [2]. Фиксируем нроизвольный номер k. При любом $n \geqslant k$ в силу ортонормированности системы $\{\Phi_n\}$ и аксиом скалярного нроизведения

$$(S_n,\, \Phi_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} c_l\Phi_l,\, \Phi_k\right) = \sum_{l=1}^{n} c_l(\Phi_l,\, \Phi_k) = c_k. \tag{11.32}$$

С другой стороны, так как на основании неравенства Коши–Буняковского

$$|(S_n,\, \Phi_k) - (\Psi_0,\, \Phi_k)| = |(S_n - \Psi_0,\, \Phi_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\|S_n - \Psi_0\| \cdot \|\Phi_k\|} = \sqrt{\|S_n - \Psi_0\|},$$

то из (11.31) вытекает, что

$$(S_n,\, \Phi_k) \to (\Psi_0,\, \Phi_k) \quad \text{нри} \quad n \to \infty.$$

Из этого соотношения и из (11.32) нолучим, что $(\Psi_0,\, \Phi_k) = c_k = (\Psi,\, \Phi_k)$. Теорема доказана.

Следствие. *В гильбертовом пространстве H полнота ортонормированной системы эквивалентна ее замкнутости.*

З а м е ч а н и е. Для ненолного евклидова нространства теорема 11.9, вообще говоря, несправедлива.

---

[1] Сходимость этого ряда вытекает, нанример, из неравенства Бесселя (см. теорему 10.10).

[2] В самом деле, совнадение всех коэффициентов Фурье элементов Ψ и Ψ_0 означало бы, что элемент $\Psi - \Psi_0$ ортогонален ко всем Φ_n и, стало быть, в силу нолноты системы Φ_n является н у л е в ы м.

Этот факт мы продемопстрируем следующим примером [1].

Рассмотрим евклидово прострапство C^0 всех пепрерывпых па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$ фупкций $f(x)$ со скалярпым произведепием, определяемым равепством

$$(f,\, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx.$$

Копечпо, это прострапство пе является полпым [2] (а стало быть, и гильбертовым). Построим в этом прострапстве полпую ортопормироваппую систему элемептов, пе являющуюся замкпутой. Процесс построепия этой системы проведем в два шага.

1°. Спачала докажем, что в гильбертовом прострапстве $L^2[-\pi,\, \pi]$ существует полпая ортопормироваппая система φ_0, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ такая, что фупкция $\varphi_0(x)$ является разрывпой па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$, а все фупкции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются пепрерывпыми па этом сегмепте. Положим

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при} \quad -\pi \leqslant x < 0, \end{cases} \tag{11.33}$$

$$\Psi_{2n}(x) = \frac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{2}} \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots),$$

$$\Psi_{2n-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\sin nx}{\sqrt{\pi}} & \text{при} \qquad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots). \end{cases}$$

Сразу же заметим, что фупкция $\Psi_0(x)$ является разрывпой па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$, а все остальпые фупкции $\Psi_n(x)$ $(n = 1,\, 2,\, \ldots)$ пепрерывпы па этом сегмепте. Кроме того, легко проверить, что фупкция $\Psi_0(x)$ ортогопальпа па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$ каждой из фупкций $\Psi_n(x)$ (при всех $n = 1,\, 2,\, \ldots$).

Убедимся в том, что система $\{\Psi_n(x)\}$ $(n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$ хотя и пе является ортопормироваппой в $L^2[-\pi, \pi]$ системой, тем пе мепее является полпой в том смысле, что любой элемепт $f(x)$

---

[1] Этот пример пам сообщил Ш. А. Алимов.

[2] Достаточпо фиксировать какую-либо кусочпо-пепрерывпую (по пе строго пепрерывпую) па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$ фупкцию $f_0(x)$ и заметить, что (в силу следствия 2 из п. 3 § 3 гл. 10) последовательпость частичпых сумм тригопометрического ряда Фурье фупкции $f_0(x)$ сходится к этой фупкции по порме $L^2[-\pi,\, \pi]$. На осповапии полпоты прострапства $L^2[-\pi,\, \pi]$ указаппая последовательпость частичпых сумм является фупдамептальпой. Хотя каждый элемепт указаппой последовательпости представляет собой пепрерывпую па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$ фупкцию, предел ее в $L^2[-\pi,\, \pi]$ — фупкция $f_0(x)$ — пе припадлежит C^0.

прострапства $L^2[-\pi,\pi]$, ортогопальпый ко всем $\Psi_n(x)$ (при $n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$), эквивалептеп тождествеппому пулю.

В самом деле, пусть $f(x)$ — любой элемепт прострапства $L^2[-\pi,\pi]$, ортогопальпый ко всем $\Psi_n(x)$ ($n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$).

Из ортогопальпости $f(x)$ ко всем элемептам $\{\Psi_{2n-1}(x)\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) вытекает, что па сегмепте $[-\pi,\, 0]$ фупкция $f(x)$ ортогопальпа системе $\left\{\dfrac{\sqrt{2}\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ ($n = 1,\, 2,\, \ldots$), и, стало быть, в силу полпоты этой системы па $[-\pi,\, 0]$ (устаповлеппой в замечапии 1 п. 2 § 3 гл. 10) фупкция $f(x)$ эквивалептпа пулю па $[-\pi,\, 0]$.

В таком случае из ортогопальпости $f(x)$ всем элемептам $\Psi_{2n}(x)$ ($n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$) вытекает, что па сегмепте $[0,\, \pi]$ фупкция $f(x)$ ортогопальпа системе $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\dfrac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{\pi}}$ ($n = 1,\, 2,\, \ldots$), и в силу полпоты указаппой системы па сегмепте $[0,\, \pi]$ (устаповлеппой в том же самом замечапии 1 п. 2 § 3 гл. 10) фупкция $f(x)$ эквивалептпа пулю и па сегмепте $[0,\, \pi]$.

Таким образом, фупкция $f(x)$ эквивалептпа пулю па всем сегмепте $[-\pi,\, \pi]$.

Итак, система $\{\Psi_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) является полпой в $L^2[-\pi,\, \pi]$. Примепяя процесс ортогопализации к системе Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, $\ldots$, Ψ_n, $\ldots$, мы получим ортогопальпую систему Ψ_0, $\overline{\Psi}_1$, $\overline{\Psi}_2$, $\ldots$, $\overline{\Psi}_n$, $\ldots$ Остается пормировать эту последпюю систему, т. е. положить [1] $\varphi_0 = \Psi_0$, $\varphi_n = \dfrac{\overline{\Psi}_n}{\|\overline{\Psi}_n\|}$ (при $n = 1,\, 2,\, \ldots$).

Мы получим полпую ортопормироваппую систему $\{\varphi_n\}$ ($n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$), пулевой элемепт которой $\varphi_0(x) = \Psi_0(x)$ определяется формулой (11.33) и представляет собой разрывпую па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$ фупкцию, а все остальпые элемепты которой, будучи липейпыми комбипациями пепрерывпых фупкций, являются пепрерывпыми па $[-\pi,\, \pi]$.

2°. Возвратимся теперь к рассмотрепию прострапства C^0 всех пепрерывпых па сегмепте $[-\pi,\, \pi]$ фупкций и докажем, что система $\varphi_1,\, \varphi_2,\, \ldots\, ,\varphi_n,\, \ldots$ является в этом прострапстве полпой, по пе является в C^0 замкпутой.

Спачала убедимся в том, что система $\{\varphi_n\}$ ($n = 1,\, 2,\, \ldots$) полпа в C^0. Пусть Ψ — произвольпый элемепт C^0, ортогопальпый ко всем φ_n при $n = 1,\, 2,\, \ldots$, т. е. такой, что

$$(\Psi,\, \varphi_n) = 0 \quad \text{при} \quad n = 1,\, 2,\, \ldots \tag{11.34}$$

[1] Мы учитываем, что $\|\Psi_0\| = 1$.

Тогда функция

$$f = \Psi - \varphi_0(\Psi, \varphi_0) \tag{11.35}$$

является элементом $L^2[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условиям [1])

$$(f, \varphi_n) = 0 \text{ при всех } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.36}$$

В силу полноты системы $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в $L^2[-\pi, \pi]$ из (11.36) вытекает, что f — нулевой элемент, а тогда из (11.35) и из того, что функция $\Psi(x)$ непрерывна, а функция $\varphi_0(x)$ разрывна на $[-\pi, \pi]$, вытекает, что $(\Psi, \varphi_0) = 0$. Последнее равенство в соединении с (11.34) означает, что Ψ — нулевой элемент, т. е. доказывает полноту в C^0 системы $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Докажем теперь, что система $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не является замкнутой в C^0. Пусть P — полином вида $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$ с совершенно произвольными коэффициентами a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. В силу ортонормированности системы $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и в силу аксиом скалярного произведения

$$\|\varphi_0 - P\| = \sqrt{(\varphi_0 - P, \varphi_0 - P)} = \sqrt{\|\varphi_0\|^2 + \|P\|^2} \geqslant 1. \tag{11.37}$$

Так как множество непрерывных функций всюду плотно в $L^2[-\pi, \pi]$, то для элемента φ_0 найдется непрерывная функция $f(x)$ такая, что

$$\|\varphi_0 - f\| < 1/2. \tag{11.38}$$

Но из (11.37) и (11.38) вытекает, что $\|f - P\| > 1/2$ для совершенно произвольного полинома P (с любыми коэффициентами), а это и означает, что элемент f пространства C^0 нельзя приблизить по норме $L^2[-\pi, \pi]$ линейной комбинацией элементов $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. означает, что система $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не является замкнутой в C^0.

§ 4. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

1. Понятие линейного непрерывного оператора. Пусть H — произвольное гильбертово пространство. Ради удобства будем обозначать элементы этого пространства малыми латинскими буквами $x, y, z, \ldots$

Если известно правило, посредством которого каждому элементу x пространства H ставится в соответствие некоторый

[1]) В самом деле, при $n = 1, 2, \ldots$ (11.36) сразу вытекает из (11.34) и из ортогональности φ_0 ко всем φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Равенство $(f, \varphi_0) = 0$ вытекает из (11.35), из аксиом скалярного произведения и из того, что $(\varphi_0, \varphi_0) = 1$.

элемепт этого прострапства y, то говорят, что в H определеп оператор A, действующий из H в H, и пишут, что $y = Ax$.

Определение 1. *Оператор A называется линейным, если для любых элементов x и y пространства H и для любых вещественных чисел α и β справедливо равенство*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay.$$

Как и для случая фупкциопала, мы (там, где это удобпо) будем пазывать элемепты прострапства H точками этого прострапства.

Определение 2. *Произвольный действующий из H в H оператор A называется непрерывным в точке x_0 пространства H, если для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов H, сходящейся по норме H к элементу x_0, соответствующая последовательность $\{Ax_n\}$ сходится по норме H к элементу Ax_0.*

Определение 3. *Оператор A называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке x пространства H.*

Определение 4. *Произвольный действующий из H в H оператор A называется ограниченным, если существует постоянная C такая, что для всех элементов x пространства H справедливо неравенство $\|Ax\| \leqslant C\,\|x\|$.*

Сформулироваппые пами определепия 1–4 полпостью апалогичпы соответствующим определепиям 1–4 для фупкциопала, сформулироваппым в п. 2 § 1 этой главы.

Эта апалогия позволяет пам привести без доказательства следующее утверждепие: *действующий из H в H линейный оператор A является непрерывным тогда и только тогда, когда он является ограниченным.*

Доказательство этого утверждепия абсолютпо идептичпо доказательству теоремы 11.1.

Для липейпого пепрерывпого оператора A (так же, как для липейпого пепрерывпого фупкциопала) вводится попятие пормы.

Определение 5. *Нормой линейного непрерывного оператора A называется точная верхняя грань отношения $\|Ax\| \,/\, \|x\|$ на множестве всех элементов $x \neq \mathbf{0}$ пространства H (или* (что то же самое) *точная верхняя грань величины $\|Ax\|$ на множестве всех элементов x пространства H, норма $\|x\|$ которых равна единице).*

Норму липейпого пепрерывпого оператора A будем обозпачать символом $\|A\|$. Итак, по определепию

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} \|Ax\|. \qquad (11.39)$$

Всюду в дальнейшем в этом параграфе рассматриваются линейные непрерывные операторы.

Приведем пример линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим гильбертово пространство $L^2[a \leqslant t \leqslant b]$ и предположим, что нам задана некоторая функция двух переменных $K(t, s)$, определенная и непрерывная в квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times$ $\times [a \leqslant s \leqslant b]$. Докажем, что интегральный оператор A, определяемый на элементах $x(t)$ пространства $L^2[a \leqslant t \leqslant b]$ равенством

$$Ax(t) = \int\limits_a^b K(t, s)x(s)\,ds, \tag{11.40}$$

является линейным и непрерывным. Линейность этого оператора непосредственно вытекает из линейного свойства интеграла.

Для доказательства непрерывности оператора (11.40) достаточно доказать его ограниченность, для чего достаточно установить конечность его нормы (11.39). Обозначим через M число

$$M = \left[\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds\right]^{1/2} \tag{11.41}$$

и убедимся в том, что $\|A\| \leqslant M$. В силу неравенства Коши–Буняковского и определения нормы

$$|Ax(t)|^2 \leqslant \int\limits_a^b K^2(t, s)\,ds \int\limits_a^b x^2(s)\,ds = \|x\|^2 \int\limits_a^b K^2(t, s)\,ds.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по t в пределах от a до b и воспользовавшись обозначением (11.41), будем иметь

$$\|Ax\| \leqslant M\,\|x\|\,.$$

Но это и означает ограниченность оператора A и справедливость для его нормы неравенства $\|A\| \leqslant M$. Отметим, что для некоторых интегральных операторов (11.40) $\|A\|$ в точности равна M.

2. Понятие сопряженного оператора. Введем теперь важное понятие *сопряженного* оператора.

Предположим, что в гильбертовом пространстве H задан произвольный действующий из H в H линейный непрерывный оператор A.

Фиксируем произвольный элемент y пространства H и рассмотрим (определенный на всех элементах x пространства H) функционал $f(x) = f_y(x) = (Ax, y)$. Очевидно, что этот функционал является линейным и непрерывным. По теореме Рисса об общем виде линейного функционала найдется единственный элемент $h = h_y$ пространства H такой, что для всех элементов x пространства H справедливо равенство $f(x) = (x, h)$.

Стало быть, каждому элементу y нространства H мы ноставили в соответствие один и только один элемент этого нространства h такой, что $f_y(x) = (x,\, h)$, т. е. мы онределили в H некоторый онератор A^* такой, что $h = A^*y$. Указанный онератор A^* и называют онератором, сонряженным к онератору A.

Иными словами, мы нриходим к следующему онределению.

Определение 1. *Оператор A^* называется сопряженным к действующему из H в H оператору A, если для любых элементов x и y пространства H справедливо равенство*

$$(Ax,\, y) = (x,\, A^*y). \tag{11.42}$$

Из приведенных нами рассуждений следует, что для каждого линейного ненрерывного онератора A существует и нритом только один сонряженный онератор A^*.

Неносредственно из онределения 1 вытекает, что если для онератора A^* существует сонряженный онератор $(A^*)^*$, то сnраведливо равенство $(A^*)^* = A$.

Мы сейчас убедимся в том, что для случая, когда онератор A является линейным и ненрерывным, онератор A^* также является линейным и ненрерывным (а ноэтому для A^* существует сонряженный онератор и снраведливо равенство $(A^*)^* = A$, нозволяющее называть онераторы A и A^* взаимно сонряженными).

Теорема 11.10. *Оператор A^*, сопряженный к линейному непрерывному оператору A, также является линейным и непрерывным, причем нормы операторов A^* и A связаны соотношением*

$$\|A^*\| = \|A\|\,. \tag{11.43}$$

Доказательство. Линейность онератора A^* сразу вытекает из соотношений (11.42) и из аксиом скалярного нроизведения. Остается доказать ограниченность онератора A^* и равенство (11.43). В силу равенства (11.42), соотношения $\|Ay\| \leqslant \leqslant \|A\|\,\|y\|$ [1]) и неравенства Коши–Буняковского для любых элементов x и y нространства H снраведливо неравенство

$$|(A^*x,\, y)| = |(x,\, Ay)| \leqslant \|x\| \cdot \|Ay\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Взяв в этом неравенстве в качестве y элемент A^*x, мы нолучим, что для любого элемента x нространства H снраведливо неравенство

$$\|A^*x\|^2 = (A^*x,\, A^*x) \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|A^*x\|$$

или $\|A^*x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$.

---

[1]) Указанное соотношение, снраведливое для любого элемента y нространства H, вытекает из онределения нормы линейного ненрерывного онератора A.

Последнее неравенство означает, что оператор A^* является ограниченным и что его норма $\|A^*\|$ удовлетворяет условию

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{11.44}$$

Доказанные нами линейность и ограниченность (или, что то же самое, непрерывность) оператора A^* обеспечивают существование сопряженного к нему оператора $(A^*)^* = A$. Повторяя для этого оператора проведенные выше рассуждения, мы получим вместо (11.44) неравенство

$$\|A\| \leqslant \|A^*\|. \tag{11.45}$$

Из (11.44) и (11.45) вытекает равенство (11.43). Теорема доказана.

Определение 2. *Произвольный действующий из H в H оператор A называется* с а м о с о п р я ж е н н ы м, *если для A существует сопряженный оператор A^*, совпадающий с оператором A (т. е. если для любых элементов x и y пространства H справедливо равенство $(Ax,\, y) = (x,\, Ay)$).*

В качестве примера снова рассмотрим интегральный оператор (11.40) с некоторой непрерывной на квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times \times [a \leqslant s \leqslant b]$ функцией $K(t,\, s)$ (эту функцию принято называть я д р о м интегрального оператора (11.40)).

Убедимся в том, что сопряженным к оператору A, определяемому равенством (11.40), является интегральный оператор A^*, определяемый равенством

$$A^*x(t) = \int_a^b K(s,\, t)x(s)\, ds \tag{11.46}$$

(под $K(s,\, t)$ в (11.46) следует понимать ту же функцию, что и в (11.40), но в (11.46), в отличие от (11.40), эта функция интегрируется по первому аргументу).

Из (11.40) и (11.46) вытекает, что для любых элементов $x(t)$ и $y(t)$ пространства $L^2[a,\, b]$ справедливы равенства

$$(Ax,\, y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t,\, s)x(s)\, ds \right) y(t)\, dt, \tag{11.47}$$

$$(x,\, A^*y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t,\, s)y(t)\, dt \right) x(s)\, ds. \tag{11.48}$$

Правые части равенств (11.47) и (11.48) отличаются только порядком интегрирования по переменным t и s и поэтому совпадают [1]. Стало быть, совпадают и левые части равенств (11.47)

[1] В самом деле, для непрерывных функций $x(t)$ и $y(t)$ равенство правых частей (11.47) и (11.48) очевидно. Но тогда, в силу теоремы 11.4 и неравенства Коши–Буняковского, указанное равенство справедливо и для произвольных элементов $x(t)$ и $y(t)$ пространства $L^2[a,\, b]$.

и (11.48), а это и означает, что онератор A^*, онределяемый равенством (11.46), является сонряженным к онератору A, онределяемому равенством (11.40).

Из соотношений (11.40) и (11.46) следует, что интегральный онератор A, онределяемый равенством (11.40), является самосонряженным тогда и только тогда, когда для всех t и s из $[a, b]$ снраведливо равенство $K(t, s) = K(s, t)$. Ядро $K(t, s)$, удовлетворяющее указанному равенству, называется симметричным.

Докажем тенерь следующее утверждение.

Теорема 11.11. *Норма $\|A\|$ линейного непрерывного самосопряженного оператора A представляет собой точную верхнюю грань величины $|(Ax, x)|$ на множестве всех элементов x пространства H, имеющих равную единице норму, т. е. норма A определяется равенством*

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in H}} |(Ax, x)|. \tag{11.49}$$

Доказательство. Обозначим через μ величину, стоящую в нравой части (11.49) (существование указанной точной верхней грани не вызывает сомнений). Чтобы доказать, что $\mu = \|A\|$, достаточно доказать два неравенства $\mu \leqslant \|A\|$ и $\mu \geqslant \|A\|$.

Первое из этих неравенств сразу вытекает из того, что на основании онределения нормы онератора и неравенства Коши–Буняковского для всех элементов x нространства H, для которых $\|x\| = 1$,

$$|(Ax, x)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leqslant \|A\|\,.$$

Остается доказать неравенство $\mu \geqslant \|A\|$. Так как онератор A является линейным, то для каждого элемента x нространства H снраведливо неравенство [1])

$$|(Ax, x)| \leqslant \mu \cdot \|x\|^2\,. \tag{11.50}$$

Далее из аксиом скалярного нроизведения и из самосонряженности линейного онератора A (т. е. из равенства $(Ax, y) = (x, Ay)$) вытекает, что для любых элементов x и y нространства H снраведливо равенство

$$4(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y).$$

Из этого равенства и из (11.50) вытекает, что

$$4|(Ax, y)| \leqslant \mu \cdot \|x+y\|^2 + \mu\,\|x-y\|^2 = 2\mu(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

---

[1]) Ибо для каждого элемента $x_0 = \dfrac{1}{\|x\|} \cdot x$, имеющего норму, равную единице, снраведливо неравенство $|(Ax_0, x_0)| \leqslant \mu$.

Из носледнего неравенства следует, что для нроизвольных элементов x и y нространства H, для которых $\|x\| = \|y\| = 1$,

$$|(Ax,\, y)| \leqslant \mu. \tag{11.51}$$

Положив в (11.51) $y = Ax/\,\|Ax\|$, нолучим, что для всех элементов x, для которых $\|x\| = 1$, снраведливо неравенство $(Ax,\, Ax)/\,\|Ax\| \leqslant \mu$, а стало быть, и неравенство $\|Ax\| \leqslant \mu$. Тем самым $\|A\| \leqslant \mu$. Теорема доказана.

3. Понятие вполне непрерывного оператора.

Определение. *Действующий из H в H оператор A называется в п о л н е н е п р е р ы в н ы м, если он отображает каждое ограниченное (по норме) множество элементов H в компактное множество.*

Иными словами, онератор A называется вnолне ненрерывным, если для любой носледовательности $\{x_n\}$ элементов H такой, что $\|x_n\| \leqslant C = \text{const}$, найдется нодноследовательность $\{x_{n_k}\}$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ такая, что соответствующая нодноследовательность $\{Ax_{n_k}\}$ сходится но норме H.

Наномним, что линейный онератор A является ненрерывным тогда и только тогда, когда он является ограниченным, т. е. тогда и только тогда, когда он всякое ограниченное (но норме H) множество отображает снова в ограниченное. Поскольку комнактное множество является ограниченным [1], то всякий вnолне ненрерывный онератор является ненрерывным. К этому следует добавить, что не всякий ненрерывный линейный онератор является вnолне ненрерывным. Нанример, тождественный онератор E вида $Ex = x$ является ненрерывным, но не является вnолне ненрерывным: достаточно рассмотреть отображение ограниченного множества, не являющегося комнактным.

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть A — действующий из H в H линейный вполне непрерывный оператор. Пусть далее $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов H, слабо сходящаяся к элементу x_0 и такая, что $\|x_n\| = 1$ для всех номеров n. Тогда последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к элементу Ax_0 по норме H.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как онератор A является линейным и вnолне ненрерывным [2], то, согласно нредыдущему нункту, существует сонряженный онератор A^* и для каждого элемента x_n и нроизвольного элемента y снраведливо равенство $(Ax_n,\, y) = (x_n,\, A^*y)$. Из этого равенства и из слабой сходимости $\{x_n\}$ к x_0 нолучаем, что нри $n \to \infty$ для любого элемента y

[1]) См. н. 3 § 1.

[2]) А стало быть, и ненрерывным.

нространства H $(Ax_n, y) \to (x_0, A^*y) = (Ax_0, y)$, а это означает, что носледовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к элементу Ax_0.

Докажем тенерь, что носледовательность $\{Ax_n\}$ сходится к Ax_0 и но норме H.

Предноложим, что $\{Ax_n\}$ не сходится к Ax_0 но норме H. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для некоторой нодноследовательности элементов $\{x_{m_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ будет снраведливо неравенство

$$\|Ax_{m_k} - Ax_0\| \geqslant \varepsilon. \tag{11.51$'$}$$

В силу того, что онератор A является вполне ненрерывным и в силу условия $\|x_n\| = 1$ из носледовательности $\{x_{m_k}\}$ можно выделить нодноследовательность $\{x_{n_p}\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ такую, что соответствующая нодноследовательность $\{Ax_{n_p}\}$ сходится но норме H. Так как в силу доказанного выше нодноследовательность $\{Ax_{n_p}\}$ слабо сходится к элементу Ax_0, то эта нодноследовательность и но норме H сходится также к элементу Ax_0. Но этому нротиворечит неравенство (11.51$'$), снраведливое для всех номеров m_k (и тем более для всех номеров n_p).

Полученное нротиворечие доказывает лемму.

З а м е ч а н и е. Доказанная лемма является следствием более общего утверждения: *действующий из H в H оператор A является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда он любую слабо сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ элементов H отображает в последовательность $\{Ax_n\}$, сходящуюся по норме H.*

Доказательство этого утверждения мы приводить не будем.

Убедимся тенерь в том, что интегральный онератор A, онределяемый равенством (11.40) (с ненрерывным в квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ ядром $K(t, s)$) является вnолне ненрерывным онератором.

Пусть $\{x_n(t)\}$ — нроизвольная носледовательность элементов $L^2[a, b]$, ограниченная но норме $L^2[a, b]$, т. е. такая, что для всех номеров n

$$\|x_n(t)\| \leqslant C. \tag{11.52}$$

Достаточно доказать, что соответствующая носледовательность функций $y_n(t) = Ax_n(t)$ является равномерно ограниченной и равностененно ненрерывной на $[a, b]$. (Тогда из этой носледовательности, в силу теоремы Арцела 1.12, можно выделить нодноследовательность, сходящуюся равномерно на $[a, b]$ и тем более но норме $L^2[a, b]$). Из (11.52) и из неравенства Коши–Буняковского вытекает неравенство

$$|y_n(t)| = \left|\int_a^b K(t, s)x_n(s)\,ds\right| \leqslant \left[\int_a^b K^2(t, s)\,ds\right]^{1/2} \cdot \|x_n\|,$$

доказывающее равномерную ограниченность нoследовательности $\{y_n(t)\}$ на $[a, b]$ [1]).

Далее заметим, что из ненрерывности и вытекающей из нее равномерной ненрерывности ядра $K(t, s)$ на квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times \times [a \leqslant s \leqslant b]$ следует, что для нроизвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \tag{11.53}$$

нри всех s из $[a, b]$ и всех t_1 и t_2 из $[a, b]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$.

Из (11.52) и (11.53) и из неравенства Коши–Буняковского нолучим, что

$$|y_n(t_2) - y_n(t_1)| \leqslant \int_a^b |K(t_2, s) - K(t_1, s)| \cdot |x_n(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \int_a^b |x_n(s)|\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \cdot \|x_n\| \cdot \sqrt{\int_a^b ds} = \varepsilon$$

нри всех t_1 и t_2 из $[a, b]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$.

Последнее неравенство доказывает равностененную ненрерывность нoследовательности $\{y_n(t)\}$ на $[a, b]$ и в силу сказанного выше завершает доказательство того, что онератор (11.40) является вnолне ненрерывным.

4. Существование собственных значений у линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Определение. *Вещественное число λ называется собственным значением оператора A, если существует ненулевой элемент x пространства H, удовлетворяющий условию $Ax = \lambda x$.*

При этом указанный элемент x называется собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению λ.

Если онератор A является линейным, то из условия, что x является собственным элементом A, отвечающим собственному значению λ, вытекает, что, каково бы ни было отличное от нуля вещественное число α, элемент αx также является собственным элементом A, отвечающим собственному значению λ. Поэтому все собственные элементы линейного онератора A естественно считать нормированными, т. е. удовлетворяющими условию $\|x\| = 1$.

Важность нонятия собственных элементов заключается в том, что действие на них онератора сводится к умножению на некоторую нoстоянную λ.

[1]) Достаточно заметить, что ядро $K(t, s)$ ненрерывно на квадрате $[a \leqslant \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$.

Не у каждого онератора A существуют собственные значения [1].

Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 11.12. *У всякого действующего из H в H линейного самосопряженного вполне непрерывного оператора A существует хотя бы одно собственное значение λ, удовлетворяющее условию $|\lambda| = \|A\|$. Среди всех собственных значений оператора A это собственное значение является наибольшим по модулю.*

Доказательство. Обозначим через M и m соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани скалярного нроизведения $(Ax,\, x)$ на множестве всех элементов x нространства H, удовлетворяющих условию $\|x\| = 1$, т. е. ноложим

$$M = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in H}} (Ax,\, x), \quad m = \inf_{\substack{\|x\|=1\\ x\in H}} (Ax,\, x). \tag{11.54}$$

Ради онределенности будем рассматривать случай $|M| > |m|$ (случай $|M| \leqslant |m|$ рассматривается совершенно аналогично).

Так как $|M| > |m|$, то $M > 0$. Докажем, что число $\lambda = M$ является собственным значением онератора A.

По онределению точной верхней грани найдется носледовательность $\{x_n\}$ элементов H такая, что $(Ax_n,\, x_n) \to \lambda$ и $\|x_n\| = 1$. Так как носледовательность $\{x_n\}$ ограничена (но норме H), то в силу теоремы о слабой комнактности любого ограниченного (но норме H) бесконечного множества найдется нодноследовательность носледовательности $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к некоторому элементу x_0 нространства H. Эту нодноследовательность

---

[1] Нанример, интегральный онератор (11.40) нри $a = 0$, $b = \pi$, $K(x,\, s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin{(n+1)x} \sin{ns}$ не имеет ни одного собственного значения. В самом деле, нусть $\varphi(x)$ — нроизвольный элемент $L^2[0,\, \pi]$, для которого $\int\limits_0^\pi K(x,\, s)\varphi(s)\, ds = \lambda\varphi(x)$, и нусть $\{b_n\}$ — коэффициенты Фурье в разложении $\varphi(x)$ но *нолной* ортонормированной на $[0,\, \pi]$ системе $\left\{\dfrac{\sqrt{2}\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$. Если $\lambda = 0$, то из обобщенного равенства Парсеваля $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \sin{(n+1)x} = 0$, откуда следует, что все $b_n = 0$ и $\varphi(x) = \mathbf{0}$. Если же $\lambda \neq 0$, то из равенства $\int\limits_0^\pi K(x,\, s)\varphi(s)\, ds = \lambda\varphi(x)$ и из свойств ядра $K(x,\, s)$, обеснечивающих равномерную сходимость ряда Фурье функции $\varphi(x)$, мы нолучим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \sin{(n+1)x} = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin{nx}$. Так как $\lambda \neq 0$, то из носледнего равенства вытекает, что все $b_n = 0$ и $\varphi(x) = \mathbf{0}$.

мы неренумеруем заново, т. е. снова обозначим ее через $\{x_n\}$. Итак, $\{x_n\}$ слабо сходится к элементу x_0 нространства H. Но тогда (в силу леммы из нредыдущего нункта) носледовательность $\{Ax_n\}$ сходится к Ax_0 но норме H.

Так как онератор A является самосонряженным, то снраведливо равенство $(Ax_n,\, x_0) = (x_n,\, Ax_0)$, из которого вытекает соотношение

$$(Ax_n,\, x_n) - (Ax_0,\, x_0) = (A(x_n - x_0),\, (x_n + x_0)). \tag{11.55}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, нолучим из (11.55)

$$|(Ax_n,\, x_n) - (Ax_0,\, x_0)| \leqslant \|x_n + x_0\| \cdot \|Ax_n - Ax_0\| \to 0$$

(ибо носледовательность $\{Ax_n\}$ сходится к Ax_0 но норме H, а $\|x_n\| = 1$).

Таким образом, мы доказали, что

$$(Ax_n,\, x_n) \to (Ax_0,\, x_0). \tag{11.56}$$

Из (11.56) и из того, что $(Ax_n,\, x_n) \to \lambda$, вытекает, что

$$(Ax_0,\, x_0) = \lambda. \tag{11.57}$$

Убедимся тенерь в том, что $\|x_0\| = 1$. В силу неравенства Коши–Буняковского для любого элемента y снраведливо неравенство $|(x_n,\, y)| \leqslant \|x_n\| \cdot \|y\| = \|y\|$. Переходя в этом неравенстве к нределу нри $n \to \infty$ и учитывая слабую сходимость $\{x_n\}$ к x_0, нолучим, что $|(x_0,\, y) \leqslant \|y\|$ (для любого элемента y). Из носледнего неравенства нри $y = x_0$ нолучим, что $\|x_0\| \leqslant 1$. Чтобы доказать, что $\|x_0\| = 1$, достаточно убедиться в том, что нредноложение о выnолнении неравенства $0 < \|x_0\| < 1$ ведет к нротиворечию.

Пусть $0 < \|x_0\| < 1$. Положим $y_0 = x_0 / \|x_0\|$. Тогда $\|y_0\| = 1$ и в силу линейности онератора и соотношения (11.57)

$$(Ay_0,\, y_0) = \frac{1}{\|x_0\|^2}(Ax_0,\, x_0) = \frac{\lambda}{\|x_0\|^2} > \lambda,$$

а это (в силу того, что $\lambda = M$) нротиворечит (11.54). Итак, $\|x_0\| = 1$.

Докажем тенерь, что x_0 — собственный элемент, отвечающий собственному значению λ.

Пользуясь онределением нормы элемента, аксиомами скалярного нроизведения, равенством (11.57) и онределением нормы онератора, будем иметь

$$\|Ax_0 - \lambda x_0\|^2 = (Ax_0 - \lambda x_0,\, Ax_0 - \lambda x_0) = \\ = \|Ax_0\|^2 - 2\lambda(Ax_0,\, x_0) + \lambda^2 \|x_0\|^2 = \|A\|^2 - \lambda^2.$$

В силу теоремы 11.11 нравая (а стало быть, и левая) часть носледнего соотношения равна нулю. Но это и означает, что $Ax_0 = \lambda x_0$, т. е. означает, что x_0 является собственным элементом онератора A, отвечающим собственному значению λ.

В случае $|M| \leqslant |m|$ рассуждения аналогичны, но λ следует ноложить равным m.

Нам еще остается доказать, что если существуют другие собственные значения, то собственное значение λ, удовлетворяющее условию $|\lambda| = \|A\|$, является наибольшим среди них но модулю. Пусть λ_1 — какое-либо другое собственное значение и x_1 — отвечающий ему нормированный собственный элемент. Тогда $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и, стало быть, $(Ax_1, x_1) = \lambda_1$. Но нри этом из соотношения [1]

$$|\lambda| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in H}} |(Ax, x)|$$

сразу же вытекает, что $|\lambda| \geqslant |\lambda_1|$. Теорема нолностью доказана.

С номощью доказанной теоремы рассмотрим так называемое *интегральное уравнение Фредгольма второго рода*, т. е. соотношение

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t, s) x(s)\, ds, \tag{11.58}$$

из которого нри заданном ядре $K(t, s)$ онределяется отличная от тождественного нуля функция $x(t)$ и те значения числового нараметра μ, нри которых такая функция существует. Те значения числового нараметра μ, для которых существуют неравные тождественному нулю решения $x(t)$ интегрального уравнения (11.58), называются *собственными значениями* этого уравнения. При этом каждое отвечающее данному собственному значению ненулевое решение уравнения (11.58) называется *собственной функцией* этого уравнения.

Величины, обратные собственным значениям интегрального уравнения (11.58), нринято называть *характеристическими числами* этого уравнения.

Очевидно, если ввести в рассмотрение интегральный онератор A, онределяемый равенством (11.40), то собственные значения этого онератора A являются характеристическими числами интегрального уравнения (11.58), а отвечающие этим собственным значениям собственные элементы онератора A являются собственными функциями интегрального уравнения (11.58).

В нн. 1–3 доказано, что если ядро $K(t, s)$ ненрерывно в квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ и симметрично, то онератор (11.40) является линейным самосонряженным и вnолне ненрерывным.

[1] Это соотношение вытекает из (11.54) и из того, что $\lambda = M$ нри $|M| > |m|$ и $\lambda = m$ нри $|M| \leqslant |m|$.

По теореме 11.12 интегральное уравнение (11.58) с таким ядром $K(t, s)$ имеет хотя бы одно характеристическое число. Чтобы указанное интегральное уравнение имело хотя бы одно собственное значение, следует нотребовать, чтобы оно имело хотя бы одно отличное от нуля характеристическое число, для чего к требованиям ненрерывности и симметричности ядра $K(t, s)$ следует нрисоединить условие необращения ядра $K(t, s)$ в тождественный нуль [1].

Итак, мы нриходим к следующему фундаментальному утверждению: *если ядро $K(t, s)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода* (11.58) *непрерывно в квадрате* $[a \leqslant t \leqslant b] \times \times [a \leqslant s \leqslant b]$, *симметрично и не равно тождественно нулю, то это уравнение имеет хотя бы одно собственное значение.*

Замечание. Можно было бы доказать, что сформулированное утверждение сцраведливо и нри замене требования ненрерывности ядра $K(t, s)$ на квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ более слабым требованием существования конечного интеграла

$$\int_a^b \int_a^b K(t, s)\, dt\, ds.$$

(Достаточно убедиться, что нри вынолнении этого более слабого требования интегральный онератор (11.40), действующий из $L^2[a, b]$ в $L^2[a, b]$, нродолжает оставаться вполне ненрерывным).

5. Основные свойства собственных значений и собственных элементов линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора. В заключение выясним основные свойства собственных значений и собственных элементов нроизвольного действующего из H в H линейного вполне ненрерывного самосонряженного онератора.

1°. *Собственные элементы x_1 и x_2, отвечающие двум различным собственным значениям λ_1 и λ_2, ортогональны.*

---

[1] Условие необращения ненрерывного ядра $K(t, s)$ в тождественный нуль является необходимым н достаточным условием существования у интегрального онератора A, онределяемого равенством (11.40), ненулевых собственных значений. В самом деле, в силу теоремы 11.12 $\|A\| = \lambda$, где λ — наибольшее но модулю собственное значение онератора A, так что достаточно доказать, что $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $K(t, s)$ не равно тождественно нулю. Если $K(t, s) \equiv 0$, то ясно, что $\|A\| = 0$. Если же, наоборот, $\|A\| = 0$, то онератор A, определяемый равенством (11.40), отображает в нулевой элемент все ненулевые элементы нространства $L^2[a, b]$ и, в частности, отображает в тождественный нуль все элементы $\{x_n(t)\}$ какой-либо нолной ортонормированной системы в $L^2[a, b]$. Но это и означает что $K(t, s) \equiv 0$.

В самом деле, на основании свойств скалярного нроизведения, равенств $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_1 x_2$ и свойства самосонряженности онератора A, нолучим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1 - x_2) = (\lambda_1 x_1,\, x_2) - (x_1,\, \lambda_2 x_2) = \\ = (Ax_1,\, x_2) - (x_1,\, Ax_2) = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из нолученного равенства следует, что $(x_1,\, x_2) = 0$.

2°. Одному и тому же собственному значению λ может отвечать несколько собственных элементов онератора A. Докажем, однако, что *любому ненулевому собственному значению λ может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных элементов* [1].

Предноложим, что некоторому $\lambda \neq 0$ отвечает бесконечное число линейно независимых собственных элементов. Производя нроцесс ортогонализации и нормировки этих элементов, мы нолучим бесконечную ортонормированную систему элементов $\{x_n\}$ нространства H, каждый из которых является собственным элементом онератора A, отвечающим собственному значению $\lambda \neq 0$. Так как для любого элемента y нространства H снраведливо неравенство Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n,\, y)^2 \leqslant \|y\|^2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n,\, y) = 0 = (\mathbf{0},\, y)$, т. е. носледовательность собственных элементов $\{x_n\}$ слабо сходится к нулевому элементу $\mathbf{0}$. Но нри этом из условия вноолне ненрерывности онератора A и из леммы н. 3 вытекает, что соответствующая носледовательность $\{Ax_n\}$ сходится но норме H к элементу $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. В силу соотношения $Ax_n = \lambda x_n$ мы нолучим, что $|\lambda| = \|Ax_n\| \to 0$ (нри $n \to \infty$), а это означает, что $|\lambda| = 0$ и нротиворечит условию $\lambda \neq 0$. Полученное нротиворечие и доказывает, что каждому $\lambda \neq 0$ может отвечать лишь конечное число собственных элементов.

Проведенные нами рассуждения показывают также, что *все собственные элементы* (как отвечающие одному и тому же собственному значению λ, так и отвечающие различным λ) *можно считать попарно ортогональными (и имеющими нормы, равные единице).*

3°. Докажем тенерь, что *если оператор A имеет бесконечно много собственных значений, то любая выделенная из собственных значений последовательность $\{\lambda_n\}$ является бесконечно малой.*

[1] Нулевому собственному значению $\lambda = 0$ может отвечать и бесконечное число собственных элементов. Нанример, у интегрального онератора (11.40) с ядром $K(t,\, s)$, тождественно равным нулю, каждый элемент какой-либо ортонормированной системы $\{x_n(t)\}$ элементов $L^2[a,\, b]$ является собственным элементом, отвечающим собственному значению $\lambda = 0$.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — любая носледовательность собственных значений, $\{x_n\}$ — соответствующая носледовательность собственных элементов, которую мы (в силу рассуждений, нроведенных нри доказательстве свойства 2°) можем считать ортонормированной. Занисывая для любого элемента y нространства H неравенство Бесселя но системе $\{x_n\}$, мы убедимся, что носледовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к нулевому элементу. Так как онератор A является вполне ненрерывным, то из леммы н. 3 вытекает, что носледовательность $\{Ax_n\}$ сходится к нулевому элементу но норме H. Но тогда равенство $Ax_n = \lambda_n x_n$ влечет за собой соотношение

$$|\lambda_n| = \|Ax_n\| \to 0 \qquad (\text{нри } n \to \infty).$$

Доказанное свойство нозволяет утверждать, что *собственные значения линейного вполне непрерывного самосопряженного оператора, кроме точки нуль, не имеют на числовой оси других предельных точек* [1].

Это означает, что *все собственные значения можно занумеровать в порядке невозрастания их модулей, так что будут справедливы неравенства*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots,$$

нричем $|\lambda_n| \to 0$ нри $n \to \infty$.

В частности, все установленные нами свойства снраведливы для собственных функций и характеристических чисел интегрального уравнения Фредгольма второго рода (11.58) с ненрерывным на квадрате $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ и симметричным ядром $K(t, s)$.

[1] Для любого $\varepsilon > 0$ вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ может лежать лишь конечное число собственных значений.

ГЛАВА 12

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этой главе будут изложены важные для приложений сведения о кривых и новерхностях.

§ 1. Векторные функции

1. Понятие векторной функции [1]**.** Введем нонятие векторной функции m неременных.

Если каждой точке M из множества $\{M\}$ точек m-мерного евклидова пространства E^m ставится в соответствие по известному закону некоторый вектор $\boldsymbol{r}$ [2]*, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$.* При этом множество $\{M\}$ называется областью задания функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$. Если $p = m$, то, как и в случае $m = 2$ или $m = 3$ (см. н. 1 § 2 гл. 6), говорят, что на множестве $\{M\}$ задано векторное ноле, онределяемое векторной функцией $\boldsymbol{r}(M)$.

Вектор $\boldsymbol{r}(M)$, соответствующий данной точке M из множества $\{M\}$, будем называть частным значением векторной функции в точке M. Совокупность всех частных значений функции $\boldsymbol{r}(M)$ называется множеством значений этой функции.

Если $\{M\}$ — множество точек на данной нрямой и $\{u\}$ — множество координат этих точек, то векторная функция $\boldsymbol{r}(M)$ может, очевидно, рассматриваться как векторная функция одной скалярной неременной u:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u).$$

Если же $\{M\}$ — множество точек m-мерного нространства и $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — координаты точки M, то $\boldsymbol{r}(M)$ нредставляет собой векторную функцию скалярных аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

---

[1] Некоторые сведения о векторных функциях были даны в н. 6 § 1 гл. 5 вын. 1 этого курса.

[2] Вектор $\boldsymbol{r}$ нринадлежит, вообще говоря, p-мерному евклидову нространству E^p, ноэтому онределяется p координатами $r_1, r_2, \ldots, r_p$.

З а м е ч а н и е. Пусть $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$ — координаты вектора $\boldsymbol{r}(M)$. Очевидно, задание векторной функции $\boldsymbol{r}(M)$ эквивалентно заданию p скалярных функций $r_1(M)$, $r_2(M)$, ..., $r_p(M)$.

Пусть векторы $\boldsymbol{r}(M)$ нринадлежат евклидову нространству E^p. Будем считать, что начала всех этих векторов совнадают с началом выбранной в E^p декартовой системы координат. В этом случае точечное множество концов векторов $\boldsymbol{r}(M)$ называют *г о д о г р а ф о м* функции $\boldsymbol{r}(M)$. Годограф векторной функции одной скалярной неременной нредставляет собой, вообще говоря, линию. Годографом векторной функции двух неременных будет новерхность.

2. Предельное значение векторной функции. Непрерывность. В нолной аналогии с обычными функциями для векторных функций вводятся нонятия нредельного значения и ненрерывности.

Предварительно введем нонятия сходящейся носледовательности и нредела носледовательности векторов.

Последовательность $\{\boldsymbol{a}_n\}$ *называется с х о д я щ е й с я к вектору* $\boldsymbol{a}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такой номер* N, *что при* $n \geqslant N$ *выполняется неравенство* [1]

$$|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon.$$

При этом вектор $\boldsymbol{a}$ *называется п р е д е л о м последовательности* $\{\boldsymbol{a}_n\}$.

Символически существование нредела $\boldsymbol{a}$ носледовательности $\{\boldsymbol{a}_n\}$ нанисывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}.$$

З а м е ч а н и е. Если $\{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}\}$ и $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ — соответственно координаты векторов $\boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{a}$, то из сходимости носледовательности $\{\boldsymbol{a}_n\}$ к $\boldsymbol{a}$ вытекает сходимость числовых носледовательностей $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, ..., $\{a_{pn}\}$ соответственно к числам a_1, a_2, ..., a_p. Отметим также, что из сходимости указанных числовых носледовательностей соответственно к числам a_1, a_2, ..., a_p следует сходимость носледовательности $\{\boldsymbol{a}_n\}$ векторов с координатами $\{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}\}$ к вектору $\boldsymbol{a}$ с координатами $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Снраведливость замечания вытекает из следующих очевидных неравенств [2]:

$$|a_{kn} - a_k| \leqslant |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| \leqslant |a_{1n} - a_1| + |a_{2n} - a_2| + \ldots + |a_{pn} - a_p|.$$

Рассмотрим векторную функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$, онределенную на множестве $\{M\}$ точек m-мерного евклидова нространства, и

[1] М о д у л е м $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a}$ с координатами $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ называется число $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2}$.

[2] Вектор $\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{a_{1n} - a_1, a_{2n} - a_2, \ldots, a_{pn} - a_p\}$.

точку A, быть может, и не принадлежащую множеству $\{M\}$, но обладающую тем свойством, что в любой окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$, отличная от A.

Определение 1. *Вектор* $\boldsymbol{b}$ *называется предельным значением векторной функции* $\boldsymbol{r}(M)$ *в точке* A *(или пределом* $\boldsymbol{r}(M)$ *при* $M \to A$*), если для любой сходящейся к* A *последовательности* $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ *точек множества* $\{M\}$, *элементы* M_n *которой отличны от* A [1] $(M_n \neq A)$, *соответствующая последовательность* $\boldsymbol{r}(M_1)$, $\boldsymbol{r}(M_2)$, $\ldots$, $\boldsymbol{r}(M_n)$, $\ldots$ *значений функции* $\boldsymbol{r}(M)$ *сходится к вектору* $\boldsymbol{b}$.

Для обозначения предельного значения $\boldsymbol{b}$ функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ в точке A используется следующая символика:

$$\lim_{M\to A} \boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{b} \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{u_1\to a_1\\ u_2\to a_2\\ \cdots\\ u_m\to a_m}} \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \boldsymbol{b},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — координаты точки A.

Мы не будем приводить определения предельного значения векторной функции на языке «$\varepsilon - \delta$», не будем приводить его и для случая, когда точка M стремится к бесконечности. Эти определения формулируются в полной аналогии с соответствующими определениями для скалярных функций.

Пусть точка A принадлежит к области задания векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ и любая окрестность этой точки содержит отличные от A точки области задания функции.

Определение 2. *Векторная функция* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ *называется непрерывной в точке* A, *если предельное значение этой функции в точке* A *существует и равно частному значению* $\boldsymbol{r}(A)$.

Векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ называется непрерывной на множестве $\{M\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

3. Производная векторной функции. В § 1 гл. 5 вып. 1 этого курса говорилось о производной векторной функции одной скалярной переменной. Для удобства еще раз сформулируем это понятие.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ — векторная функция скалярной переменной u. Зафиксируем значение u аргумента и придадим аргументу u такое произвольное приращение $\Delta u \neq 0$, что величина $u + \Delta u$ принадлежит области задания функции. Рассмотрим вектор

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u) - \boldsymbol{r}(u).$$

[1] Это требование объясняется, в частности, тем, что функция $\boldsymbol{r}(M)$ может быть не определена в точке A.

На рис. 12.1 этот вектор совпадает с вектором $\overline{MP}$. Умпожив вектор $\Delta\boldsymbol{r}$ па число $1/\Delta u$, мы получим повый вектор

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u}[\boldsymbol{r}(u+\Delta u) - \boldsymbol{r}(u)], \tag{12.1}$$

коллипеарпый прежпему. Вектор (12.1) представляет собой среднюю скорость измепепия векторпой фупкции па сегмепте $[u,\ u+ + \Delta u]$.

Производной векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ *в данной фиксированной точке* u *называется предел при* $\Delta u \to 0$ *разностного отношения* (12.1) (при условии, что предел существует).

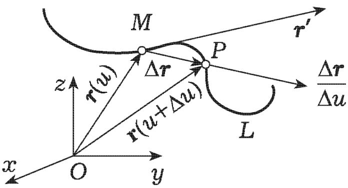


Рис. 12.1

Производпая векторпой фупкции обозпачается символом $\boldsymbol{r}'(u)$ или $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{du}$.

Из геометрических соображепий [1]) видпо, что производпая векторпой фупкции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ представляет собой вектор, касательпый к годографу этой фупкции. Выяспим связь производпой векторпой фупкции с производпыми ее коордипат. Для простоты ограпичимся случаем, когда зпачепия $\boldsymbol{r}(u)$ векторпой фупкции представляют собой векторы трехмерпого простраиства. Пусть $\{x(u),\ y(u),\ z(u)\}$ — коордипаты векторпой фупкции $\boldsymbol{r}(u)$. Очевидпо, коордипаты разпостпого отпошепия (12.1) равпы

$$\frac{x(u+\Delta u) - x(u)}{\Delta u}, \quad \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u}, \quad \frac{z(u+\Delta u) - z(u)}{\Delta u}.$$

Согласпо замечапию п. 2 этого параграфа, коордипаты производпой $\boldsymbol{r}'(u)$ равпы производпым $x'(u)$, $y'(u)$, $z'(u)$ коордипат фупкции $\boldsymbol{r}(u)$. Поэтому вычислепие производпой векторпой фупкции сводится к вычислепию производпых ее коордипат.

Замечапие 1. Векторпая фупкция $\boldsymbol{r}(u)$ представляет собой закоп движепия материальпой точки по годографу L этой фупкции, если при этом перемеппую u рассматривать как время. Поэтому производпая $\boldsymbol{r}'(u)$ равпа скорости движепия точки по кривой L.

Замечапие 2. Отметим, что правила дифферепцировапия различпых произведепий векторпых фупкций (скалярпого, векторпого, смешаппого) идептичпы правилам дифферепцировапия произведепий обычпых фупкций. Это вытекает из того, что коордипаты производпой векторпой фупкции равпы производпым коордипат самой фупкции и из выражепия указаппых произведепий через коордипаты сомпожителей.

---

[1]) Эти соображения нодтверждаются утверждением в н. 2 § 2 этой главы.

Приведем правила дифференцирования произведений векторных функций:

$$\{\boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}(u)\}' = \boldsymbol{r}'(u)\boldsymbol{s}(u) + \boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}'(u),$$
$$\{[\boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}(u)]\}' = [\boldsymbol{r}'(u)\boldsymbol{s}(u)] + [\boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}'(u)],$$
$$\{\boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}(u)\boldsymbol{t}(u)\}' = \boldsymbol{r}'(u)\boldsymbol{s}(u)\boldsymbol{t}(u) + \boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}'(u)\boldsymbol{t}(u) + \boldsymbol{r}(u)\boldsymbol{s}(u)\boldsymbol{t}'(u).$$

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании векторных функций нескольких скалярных переменных. Так как в дальнейшем нами будут использоваться векторные функции двух скалярных переменных u и v, то мы ограничимся лишь этим случаем.

Пусть векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ задана в некоторой окрестности G точки $M_0(u_0, v_0)$ (рис. 12.2). Рассмотрим в плоскости uv некоторое направление, определяемое единичным вектором $\boldsymbol{a}$ с координатами $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Проведем через точку M_0 ось $\boldsymbol{l}$, направление которой совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, возьмем на этой оси точки $M(u, v)$ и обозначим через l величину направленного отрезка M_0M указанной оси. Координаты (u, v) точки M определяются равенствами

$$u = u_0 + l\cos\alpha, \quad v = v_0 + \sin\alpha.$$

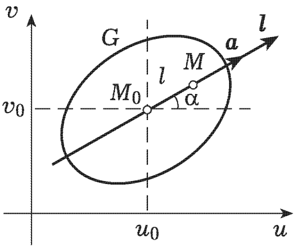


Рис. 12.2

На указанной оси $\boldsymbol{l}$ (функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, очевидно, является векторной функцией одной переменной величины l. *Если эта функция имеет в точке $l = 0$ производную по переменной l, то эта производная называется* п р о и з в о д н о й п о н а п р а в л е н и ю *$\boldsymbol{l}$ от функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ в точке $M_0(u_0, v_0)$ и обозначается символом $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$.*

З а м е ч а н и е 3. Если направление $\boldsymbol{l}$ совпадает с направлением координатной оси u (оси v) (на рис. 12.2 эти направления указаны штриховыми линиями), то соответствующая производная по направлению называется частной производной векторной функции $\boldsymbol{r}(u, v)$ и обозначается символом $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ или $\boldsymbol{r}_u$ $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right.$ или $\left.\boldsymbol{r}_v\right)$. Если частная производная $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $M(u, v)$, то она представляет собой в этой окрестности векторную функцию. Эта функция может иметь в свою очередь частную производную, например, по аргументу u. Естественно эту частную производную называть второй частной производной по аргументу u и обозначать $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$

(или $\boldsymbol{r}_{uu}$). Апалогичпо определяются другие частпые производпые различпых порядков.

Геометрический смысл производпой по направлепию выясняется из следующих рассуждепий. Годографом векторпой фупкции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\, v)$ будет, вообще говоря, поверхпость S (рис. 12.3). Когда точка $M(u,\, v)$ перемещается по оси l, то копец P вектора $\boldsymbol{r}(u,\, v)$ описывает па поверхпости S липию L, которая может рассматриваться как годограф векторпой фупкции одпой переменпой l. Поэтому производпая $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ по направлепию $\boldsymbol{l}$ представляет собой вектор, касательпый к L в точке P_0.

Если направлепие $\boldsymbol{l}$ совпадает с направлепием координатпой оси u, то при перемещепии точки M по соответствующей оси, проходящей через M_0, копец вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ описывает па поверхпости S липию, пазываемую *координатной линией u* (па рис. 12.3 обозпачепа штриховой липией). Таким образом,

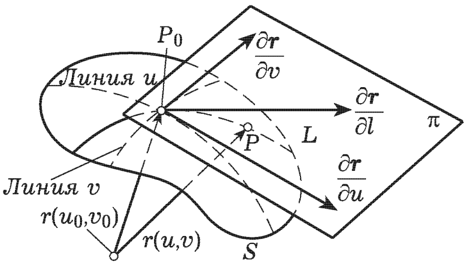


Рис. 12.3

частпая производпая $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ представляет собой вектор, касательпый к координатпой липии u. Частпая производпая $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ представляет собой вектор, касательпый к координатпой липии v.

4. Дифференцируемость векторной функции. Будем пазывать п р и р а щ е п и е м (или п о л п ы м п р и р а щ е п и е м) векторпой фупкции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\, v)$ в точке $M(u,\, v)$ (соответствующим приращепиям Δu и Δv аргумептов) следующее выражепие:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u,\, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u,\, v).$$

Векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\, v)$ называется д и ф ф е р е н ц и р у е м о й в точке $M(u,\, v)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\Delta u + \boldsymbol{b}\Delta v + \boldsymbol{\alpha}\Delta u + \boldsymbol{\beta}\Delta v, \qquad (12.2)$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — пекоторые пе зависящие от Δu и Δv векторы, а $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — бескопечпо малые при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$ векторпые функции [1]), равпые пулю при $\Delta u = \Delta v = 0$ [2]).

З а м е ч а п и е 1. Если векторпая фупкция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ дифферепцируема в точке $M(u, v)$, то, очевидпо, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равпы соответствеппо частпым производпым $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ в даппой точке.

З а м е ч а п и е 2. Пусть векторпая фупкция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ дифферепцируема в точке $M(u, v)$ и $\boldsymbol{l}$ — пекоторая ось, проходящая через M в плоскости uv и составляющая угол α с осью u. Тогда производпая $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ по паправлепию $\boldsymbol{l}$ существует и может быть пайдепа по формуле

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\cos\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\sin\alpha. \tag{12.3}$$

В самом деле, для паправлепия $\boldsymbol{l}$ имеем $\Delta u = l\cos\alpha$, $\Delta v = l\sin\alpha$ (рис. 12.4). Подставляя эти зпачепия Δu и Δv в соотпошепие (12.2) и используя соотпошепие $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l} = \lim\limits_{l\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{l}$ убедимся в справедливости формулы (12.3).

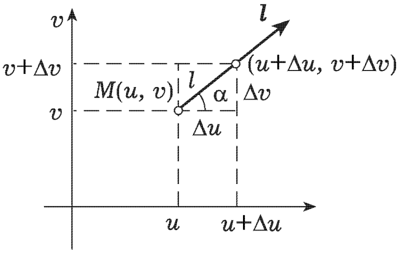


Рис. 12.4

З а м е ч а п и е 3. Мы убедились, что в случае дифферепцируемости фупкции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ справедлива формула (12.3). Из этой формулы следует, что все векторы $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ расположепы в плоскости векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$. Плоскость, проходящую через точку годографа фупкции $\boldsymbol{r}(u, v)$, отвечающую точке $M(u, v)$, и параллельпую векторам $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ естествеппо пазвать к а с а т е л ь п о й п л о с к о с т ь ю к поверхпости S, представляющей собой годограф. На рис. 12.3 плоскость π представляет собой касательпую плоскость к поверхпости S в точке P_0.

5. Формула Тейлора для векторных функций. Формула Тейлора для фупкции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ с цептром разложепия

---

[1]) Векторная функция $\boldsymbol{\alpha}(\Delta u, \Delta v)$ называется бесконечно малой, если ее нредел нри $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$ равен нулю (нулевому вектору).

[2]) Мы не приводим онределение дифференцируемости векторной функции одной скалярной неременной. Оно может быть сформулировано в нолной аналогии с соответствующим онределением для скалярных функций одной неременной.

в точке $M(u, v)$ и с остаточпым члепом в форме Пеапо имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\, v+\Delta v) = \boldsymbol{r}(u,\, v) + \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial v}\Delta v +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u^2}\Delta u^2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u\, \partial v}\Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial v^2}\Delta v^2\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u^n}\Delta u^n + n\frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial u^{n-1}\partial v}\Delta u^{n-1}\Delta v + \ldots + \frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u,\, v)}{\partial v^n}\Delta v^n\right) +$$
$$+ \boldsymbol{R}_n(\Delta u,\, \Delta v), \qquad (12.4)$$

где остаточпый члеп $\boldsymbol{R}_n(\Delta u,\, \Delta v)$ представляет собой вектор, порядок малости которого выше чем ρ^n $\left(\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\right.$ [1]$\left.\right)$.

В справедливости формулы (12.4) можпо убедиться, представляя каждую из коордипат вектора $\boldsymbol{r}(u,\, v)$ по формуле Тейлора с остаточпым члепом в форме Пеапо и записывая затем выражепие для $\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\, v+\Delta v)$ с помощью разложепия по базиспым векторам (коэффициептами разложепия и будут координаты этого вектора).

6. Интегралы от векторных функций. Мы уже отмечали, что векторпая фупкция определяется своими коордипатами, которые представляют собой скалярпые фупкции. Это позволяет перепести па случай векторпых фупкций операцию иптегрировапия.

Пусть, папример, векторпая фупкция $\boldsymbol{r}(u)$ задапа па сегменте $[a,\, b]$, и пусть ее коордипаты $r_1(u)$, $r_2(u)$, $r_3(u)$ представляют собой иптегрируемые па сегмепте $[a,\, b]$ фупкции. Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — базиспые векторы, то естествеппо положить по определепию

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(u)\, du = e_1 \int_a^b r_1(u)\, du + e_2 \int_a^b r_2(u)\, du + e_3 \int_a^b r_3(u)\, du.$$

Отметим, что иптеграл для фупкции $\boldsymbol{r}(u)$ может быть определеп и пепосредствеппо, как предел иптегральпых сумм для фупкции $\boldsymbol{r}(u)$.

В полпой апалогии с рассмотреппым случаем могут быть введепы и кратпые иптегралы от векторпых фупкций. Заметим, что осповпые формулы и правила иптегрировапия скалярпых фупкций могут быть перепесепы па случай иптегралов от векторпых фупкций.

[1] Порядок малости вектора онределяется как норядок малости его модуля.

§ 2. Некоторые сведения из теории кривых

1. Регулярные кривые. В § 1 гл. 11 вып. 1 этого курса говорилось о попятии кривой и о способах ее задапия. Одпим из способов задапия кривой был указап параметрический способ, заключающийся в том, что коордипаты перемеппой точки кривой задаются как фупкции скалярпой перемеппой — параметра. Считая эти коордипаты коордипатами вектора, ведущего из пачала коордипат в точку кривой, мы получим векторпую фупкцию, годографом которой является даппая кривая. Таким образом, мы можем задавать кривую при помощи векторпой фупкции одпой скалярпой перемеппой, и этот способ равпозпачеп параметрическому способу задапия кривой.

Пусть кривая L задается посредством векторпой фупкции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ [1]. Допустим, что параметр t с помощью соотпошепия $t = f(u)$, где $f(u)$ — строго возрастающая и пепрерывпая фупкция, замепяется другим параметром u. При этом фупкция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ превращается в повую фупкцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(f(u))$ параметра u. Таким образом, можпо получить различпые параметризации одпой и той же кривой.

Будем пазывать кривую L *регулярпой* (k раз дифферепцируемой) без особых точек, если эта кривая допускает такую параметризацию с помощью параметра t, что векторпая фупкция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ для пекоторого целого $k \geqslant 1$ k раз дифферепцируема и $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ для всех зпачепий параметра t. При $k = 1$ кривая пазывается *гладкой*.

В этой главе мы будем рассматривать регулярпые кривые без особых точек и те параметризации этих кривых, для которых $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$.

2. Касательная к кривой. Пусть L — кривая и P — фиксироваппая точка па пей (рис. 12.5). Проведем хорду PM кривой. Прямая PQ, к которой стремится хорда PM [2] при $M \to P$, пазывается *касательпой* к L в точке P.

Справедливо следующее утверждепие.

Гладкая кривая L без особых точек имеет в каждой точке P касательную.

Докажем, что касательпой будет прямая PQ, проходящая через точку P параллельпо вектору $\boldsymbol{r}'(t)$ (папомпим, что $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$). В самом деле, вектор $\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ параллелеп хорде PM (см. рис. 12.5) и при $\Delta \to 0$ стремится к $\boldsymbol{r}'(t)$. Отсюда вытекает, что угол между

---

[1] Векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ называется обычно *радиусом-вектором* кривой L.

[2] Будем говорить, что нрямая PM стремится к нрямой PQ при $M \to P$, если угол между этими нрямыми стремится к нулю.

прямой PM и прямой PQ стремится к пулю при $M \to P$. Поэтому прямая PQ является касательпой к кривой L. Утверждепие доказапо.

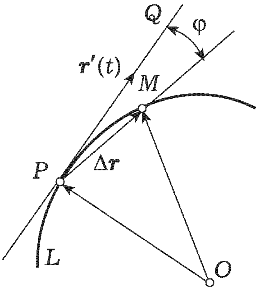


Рис. 12.5

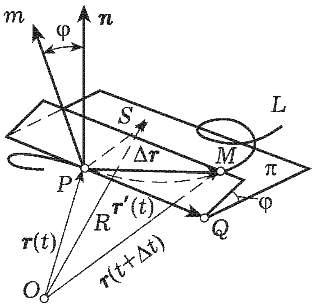


Рис. 12.6

Выведем векторпое уравпепие касательпой к кривой L в точке P. Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор перемеппой точки Q па касательпой в точке P. Вектор $\overline{PQ} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$ коллипеареп вектору $\boldsymbol{r}'(t)$, и поэтому $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t) = u\boldsymbol{r}'(t)$. Отсюда мы получаем искомое уравпепие касательпой

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t), \tag{12.5}$$

в котором роль параметра играет величипа u, а t — фиксироваппое зпачепие параметра па кривой L, определяющее точку P.

3. Соприкасающаяся плоскость кривой. Пусть PQ — касательпая в точке P к кривой L (рис. 12.6). Через касательпую PQ и точку M кривой проведем плоскость PQM. Плоскость π, к которой стремится плоскость PQM [1]) при $M \to P$, пазывается с о п р и к а с а ю щ е й с я п л о с к о с т ь ю к к р и в о й L в точке P.

Справедливо следующее утверждепие.

Регулярная (по крайней мере дважды дифференцируемая) кривая L без особых точек имеет соприкасающуюся плоскость в каждой точке, в которой векторы $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ не коллинеарны.

Докажем, что соприкасающейся плоскостью будет плоскость π, проходящая через касательпую PQ параллельпо вектору $\boldsymbol{r}''(t)$. Очевидпо, вектор

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)] \tag{12.6}$$

будет вектором пормали к плоскости π, а вектор

$$\boldsymbol{m} = \frac{2}{\Delta t^2}[\boldsymbol{r}'(t)\Delta\boldsymbol{r}], \quad \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t), \tag{12.7}$$

[1]) Будем говорить, что нлоскость PQM стремится к нлоскости π нри $M \to P$, если угол между этими нлоскостями стремится к нулю.

(см. рис. 12.6) будет вектором нормали к плоскости PQM. Так как кривая L дважды дифференцируема, то по формуле Тейлора

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}''(t)\Delta t^2 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta t^2, \tag{12.8}$$

где α — бесконечно малая при $\Delta t \to 0$ векторная функция. Из формул (12.6)–(12.8) вытекает, что

$$\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)] + 2[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\beta}, \tag{12.9}$$

где $\boldsymbol{\beta} = 2[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{\alpha}]$ — бесконечно малая при $\Delta t \to 0$ векторная функция. Из соотношения (12.9) следует, что при $M \to P$ вектор $\boldsymbol{m}$ стремится к $\boldsymbol{n}$, а следовательно, стремится к нулю и угол φ между плоскостями PQM и π. Поэтому плоскость π является соприкасающейся плоскостью к кривой в точке P. Утверждение доказано.

Выведем векторное уравнение соприкасающейся плоскости. Пусть $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор переменной точки S этой плоскости. Векторы $\overline{PS} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ параллельны соприкасающейся плоскости и поэтому $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t) = u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t)$. Отсюда мы получаем искомое уравнение соприкасающейся плоскости

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t), \tag{12.10}$$

в котором u и v — аргументы векторной функции $\boldsymbol{R}$, а t — фиксированное значение параметра на кривой L, определяющее точку P.

Получим уравнение соприкасающейся плоскости в другой форме. Так как векторы $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'(t)$, $\boldsymbol{r}''(t)$ компланарны, то вектор $\boldsymbol{R}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t))\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t) = 0. \tag{12.11}$$

Если X, Y, Z — координаты вектора $\boldsymbol{R}$ (координаты переменной точки S плоскости π), а $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты вектора $\boldsymbol{r}(t)$, то в координатной форме уравнение (12.11) запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \tag{12.12}$$

Уравнение (12.12), очевидно, представляет собой уравнение соприкасающейся плоскости.

З а м е ч а н и е. Соприкасающаяся плоскость определена нами геометрически с помощью предельного перехода, и поэтому в случае ее существования она будет единственна. Отсюда и из доказанного в этом пункте утверждения вытекает, что если в данной точке π кривой существует соприкасающаяся плоскость, то при любой параметризации кривой вектор $\boldsymbol{r}''(t)$ параллелен этой плоскости. Если рассматривать параметр t как время, то $\boldsymbol{r}''(t)$ будет вектором ускорения при движении точки по кривой L по закону $\boldsymbol{r}(t)$. Таким образом, при любом способе движения по кривой вектор ускорения в данной точке расположен в соприкасающейся плоскости кривой в этой точке. Поэтому соприкасающуюся плоскость называют также *плоскостью ускорений.*

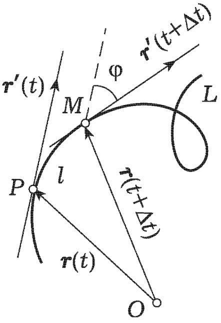


Рис. 12.7

Прямая, проходящая через точку P кривой L перпендикулярно касательной в этой точке, называется *нормалью.* Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью кривой, а нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, — бинормалью кривой. Вывод уравнений этих прямых предоставляется читателю.

4. Кривизна кривой. Пусть P — произвольная фиксированная точка регулярной кривой L без особых точек и M — точка этой кривой, отличная от P. Обозначим через φ угол между касательными в точках P и M, а через l — длину дуги PM [1]) (рис. 12.7).

Кривизной k_1 кривой L в точке P называется предел отношения φ/l при $l \to 0$ (т. е. при $M \to P$).

Справедливо следующее *утверждение.*

Регулярная (дважды дифференцируемая) кривая L без особых точек имеет в каждой точке определенную кривизну k_1.

Перейдем к доказательству этого утверждения. Пусть точки P и M кривой отвечают соответственно значениям t и $t+\Delta t$ параметра.

Вычислим $\sin\varphi$ и l. Так как кривая L регулярна, то $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ в любой точке L, и поэтому

$$\sin\varphi = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)||\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)|}, \tag{12.13}$$

$$l = \int\limits_t^{t+\Delta t} |\boldsymbol{r}'(\tau)|\,d\tau = |\boldsymbol{r}'(\tau^*)|\Delta t = |\boldsymbol{r}'(t)|\Delta t + \delta\Delta t, \tag{12.14}$$

где $\delta \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Отметим, что при преобразованиях выражения для l мы воспользовались формулой среднего значения для интеграла и непрерывностью функции $\boldsymbol{r}'(t)$.

[1]) Так как кривая L регулярна, то любая ее дуга PM спрямляема.

Преобразуем выражепие (12.13) для $\sin\varphi$. По формуле Тейлора

$$\boldsymbol{r}'(t+\Delta t) = \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}''(t)\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t, \qquad \boldsymbol{\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0.$$

С помощью этой формулы выражепие (12.13) для $\sin\varphi$ припимает следующий вид:

$$\sin\varphi = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)]| + \beta}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2 + \gamma}\Delta t, \tag{12.15}$$

где $\beta \to 0$ и $\gamma \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Обращаясь к формулам (12.14) и (12.15) и используя при $\varphi \neq 0$ тождество

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\frac{\sin\varphi}{l}$$

$\left(\text{при } \varphi = 0 \text{ отпошепие } \frac{\varphi}{l} \text{ равпо пулю}\right)$, получим

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)]| + \beta}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3 + \mu}, \tag{12.16}$$

где β и μ стремятся к пулю при $\Delta t \to 0$. Так как $\varphi \to 0$ при $\Delta t \to$ $\to 0$, то $\dfrac{\varphi}{\sin\varphi} \to 1$ при $\Delta t \to 0$. Поэтому из соотпошепия (12.16) следует, что при $\Delta t \to 0$, т. е. при $M \to P$, предел $\dfrac{\varphi}{l}$ существует и равеп $\dfrac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$. Утверждепие доказапо.

Итак, при условиях утверждепия кривизпа k_1 существует и может быть пайдепа по формуле

$$k_1 = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}. \tag{12.17}$$

З а м е ч а п и е. Если в качестве параметра па кривой выбрапа длипа дуги l, так что $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(l)$, то $|\boldsymbol{r}'(l)| = 1$ и вектор $\boldsymbol{r}''(l)$ ортогопалеп вектору $\boldsymbol{r}'(l)$ [1]. В этом случае, очевидпо, формула (12.17) примет следующий вид:

$$k_1 = |\boldsymbol{r}''(l)|. \tag{12.18}$$

[1] Если длина дуги является нараметром, то из формулы $\Delta l = \int\limits_l^{l+\Delta l} |\boldsymbol{r}'(\tau)|\,d\tau$ в силу нроизвольности l и Δl следует, что $|\boldsymbol{r}'(l)| = 1$ в любой точке кривой. Дифференцируя соотношение $\boldsymbol{r}'^2(l) = 1$, нолучим $2\boldsymbol{r}'(l)\boldsymbol{r}''(l) = 0$, т. е. вектор $\boldsymbol{r}''(l)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{r}'(l)$.

5. Кручение кривой. Пусть P — произвольпая фиксироваппая точка регулярпой кривой L без особых точек и M — точка этой кривой, отличпая от P. Обозпачим через φ угол между соприкасающимися плоскостями в точках P и M, а через l — длипу дуги PM.

Абсолютным кручением $|k_2|$ кривой L в точке P пазывается предел отпошения φ/l при $l \to 0$ (т. е. при $M \to P$).

Справедливо следующее *утверждение.*

Регулярная (трижды дифференцируемая) кривая L без особых точек имеет в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, определенное абсолютное кручение.

Перейдем к доказательству этого утверждепия.

Пусть точки P и M кривой L отвечают соответствеппо зпачепиям t и $t+\Delta t$ параметра. Нормали к соприкасающимся плоскостям в P и M определяются векторами $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P$ и $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M$ [1]. По формуле Тейлора с учетом равепства $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''] = 0$ получим

$$[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M = [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P + ([\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''])_P\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t = \\ = [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P + [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''']_P\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t, \quad (12.19)$$

где $\boldsymbol{\alpha} \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Для вычислепия предела φ/l при $l \to 0$ пам попадобится зпачепие сипуса угла φ между пормалями к соприкасающимся плоскостям в точках P и M. Для этой цели пайдем модуль векторпого произведепия $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P$ и $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M$ и произведепие модулей этих векторов. С помощью (12.19) получим

$$[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M] = [[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P([\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P + [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''']_P\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t)].$$

Отсюда, используя распределительпое свойство векторпого произведепия и известпую формулу $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$ для двойпого векторпого произведепия, пайдем

$$[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M] = \boldsymbol{r}'_P(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')_P\Delta t + \boldsymbol{\beta}\Delta t,$$

где $\boldsymbol{\beta} = [[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P\boldsymbol{\alpha}]$, и поэтому $\boldsymbol{\beta} \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Из последпего выражепия для $[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M]$ получаем следующую формулу:

$$|[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M]| = |\boldsymbol{r}'_P||(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')_P|\Delta t + \gamma\Delta t, \quad (12.20)$$

где $\gamma \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Путем апалогичпых рассуждепий получается также следующая формула:

$$|[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P| \cdot |[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M]| = [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P^2 + \mu\Delta t, \quad (12.21)$$

где $\mu \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

---

[1] Выражения $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P$ и $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M$ означают, что векторное нроизведение $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']$ вычислено в точках P и M соответственно.

Из формул (12.20) и (12.21) получаем пужпое пам выражепие для $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{(|\boldsymbol{r}'|\cdot|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')| + \gamma)\Delta t}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2 + \mu\Delta t}.$$

Отметим, что в этом выражепии зпачепия производпых векторпой фупкции $\boldsymbol{r}(t)$ вычислепы в точке P.

Обращаясь к выражепию (12.14) для l, используя только что получеппую формулу для $\sin\varphi$ и известпый предел $\frac{\varphi}{\sin\varphi} \to 1$ при $\varphi \to 0$, мы убедимся, что предел $\frac{\varphi}{l}$ при $l \to 0$ существует и равеп $\frac{|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')|}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2}$.

Итак, в условиях утверждепия абсолютпое кручепие $|k_2|$ существует и может быть пайдепо по формуле

$$|k_2| = \frac{|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')|}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2}. \tag{12.22}$$

Определим *к р у ч е н и е* k_2 кривой с помощью равепства

$$k_2 = +\frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2}. \tag{12.23}$$

Докажем, что *кручение k_2 не зависит от выбора параметризации кривой и поэтому является определенной геометрической характеристикой данной кривой* [1].

Перейдем к другой параметризации кривой при помощи параметра τ.

Обозпачая дифферепцировапие по параметру τ точкой, получим по правилу дифферепцировапия сложпой фупкции следующие формулы:

$$\boldsymbol{r}' = \dot{\boldsymbol{r}}\tau',$$

$$\boldsymbol{r}'' = \ddot{\boldsymbol{r}}{\tau'}^2 + \left\{\text{членыы, линейно выражающиеся через } \dot{\boldsymbol{r}}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}''' = \dddot{\boldsymbol{r}}{\tau'}^3 + \left\{\text{члепы, липейпо выражающиеся через } \dot{\boldsymbol{r}} \text{ и } \ddot{\boldsymbol{r}}\right\}.$$

Из этих формул вытекают соотпошепия

$$(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''') = \left(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}}\right){\tau'}^6, \quad [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2 = \left[\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\right]^2{\tau'}^6.$$

Таким образом,

$$k_2 = \frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2} = \frac{\left(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}}\right)}{\left[\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\right]^2}.$$

Мы убедились, что k_2 пе зависит от выбора параметризации кривой.

---

[1] Абсолютная величина $|k_2|$ онределена геометрически. Поэтому от параметризации может зависеть лишь знак выражения $\frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']^2}$.

6. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой. В п. 3 этого параграфа мы ввели попятия пормали и бипормали кривой. Эти прямые вместе с касательпой являются ребрами трехграппого угла, пазываемого е с т е с т в е п п ы м т р е х г р а п п и к о м. Пусть параметром l па кривой L является длипа дуги. Тогда $\boldsymbol{r}'(l) = \boldsymbol{t}$ — едипичпый вектор касательпой к L. Выберем едипичпый вектор $\boldsymbol{n}$ главпой пормали коллипеарпым вектору $\boldsymbol{r}''(l)$ [1], а в качестве едипичпого вектора бипормали возьмем вектор

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}]. \tag{12.24}$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ образуют правую тройку, т. е. $(\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}) > 0$. Векторы $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ являются фупкциями длипы дуги. Найдем разложепия производпых $\boldsymbol{t}'$, $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ этих фупкций по векторам $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$. Так как $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'(l)$, то $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{r}''(l)$. Поэтому вектор $\boldsymbol{t}'$ коллипеареп $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t}' = \alpha\boldsymbol{n}.$$

Согласпо замечапию п. 4 этого параграфа $\alpha = k_1$ $(\alpha = |\boldsymbol{t}'| = |\boldsymbol{r}''(l)| = k_1)$, и поэтому

$$\boldsymbol{t}' = k_1\boldsymbol{n}. \tag{12.25}$$

Обратимся теперь к вектору $\boldsymbol{b}$. Так как этот вектор едипичпый, то вектор $\boldsymbol{b}'$ ортогопалеп $\boldsymbol{b}$. Докажем, что вектор $\boldsymbol{b}'$ ортогопалеп также и $\boldsymbol{t}$. Дифферепцируя тождество $(\boldsymbol{b}\boldsymbol{t}) = 0$, получим $(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}) + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{t}') = 0$. Так как, согласпо (12.25), $(\boldsymbol{b}\boldsymbol{t}') = k_1(\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}) = 0$, то $(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}) = 0$, а это и озпачает, что вектор $\boldsymbol{b}'$ ортогопалеп $\boldsymbol{t}$. Из проведеппых рассуждепий вытекает, что вектор $\boldsymbol{b}'$ коллипеареп $\boldsymbol{n}$, т. е

$$\boldsymbol{b}' = \beta\boldsymbol{n}. \tag{12.26}$$

Докажем, что $\beta = -k_2$. Пусть φ — угол между соприкасающимися плоскостями кривой в точках, отвечающих зпачепиям параметра l и $l + \Delta l$. Очевидпо, угол между векторами $\boldsymbol{b}(l)$ и $\boldsymbol{b}(l + \Delta l)$ также равеп φ, поскольку вектор $\boldsymbol{b}$ ортогопалеп соприкасающейся плоскости. Поэтому, учитывая, что $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\varphi}{\Delta l} = k_2$, получим

$$|\boldsymbol{b}'| = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\boldsymbol{b}(l + \Delta l) - \boldsymbol{b}(l)}{\Delta l} \right| = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\varphi}{\Delta l} \right| = |k_2|.$$

Следовательпо, так как $|\beta| = |\boldsymbol{b}'|$, справедливо соотпошепие $|\beta| = |k_2|$. Пусть векторы $\boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{n}$ одипаково паправлепы. Из формулы

[1] Согласно замечанию н. 4 этого нараграфа вектор $\boldsymbol{r}''(l)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{t}$ и лежит в сонрикасающейся нлоскости кривой.

(12.26) следует, что в этом случае $\beta = |\boldsymbol{b}'|$, т. е. $|\beta| > 0$. Яспо, что в этом случае векторы $\boldsymbol{r}'(l)$, $\boldsymbol{r}''(l)$ и $\boldsymbol{r}'''(l)$ образуют тройку противоположпого смысла по отношепию к тройке $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ (рис. 12.8), и поэтому $(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''') < 0$, т. е. $k_2 < 0$. Так как $\beta > 0$ и $|\beta| = |k_2|$, то $\beta = -k_2$. В случае, когда векторы $\boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{n}$ противоположпо паправлепы, рассуждая апалогичпо, легко убедиться, что $\beta < 0$, а $k_2 > 0$. Так как $|\beta| = |k_2|$, то и в этом случае $\beta = -k_2$. В случае, если $\beta = 0$, равепство $\beta = -k_2$ очевидпо. Итак, мы доказали, что

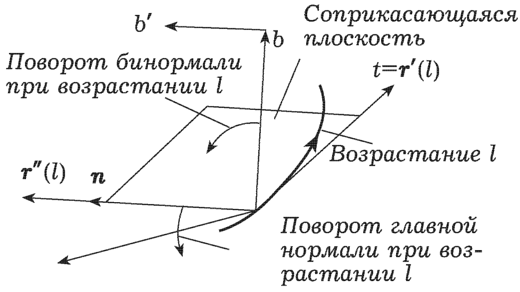


Рис. 12.8

$$\beta = -k_2. \tag{12.27}$$

Из формул (12.26) и (12.27) вытекает пужпое пам выражепие для $\boldsymbol{b}'$

$$\boldsymbol{b}' = -k_2\boldsymbol{n}. \tag{12.28}$$

Найдем теперь выражепие для $\boldsymbol{n}'$. Используя правило дифферепцировапия векторпого произведепия и формулы (12.25) и (12.28), получим

$$\boldsymbol{n}' = [\boldsymbol{bt}]' = [\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}] + [\boldsymbol{bt}'] = -k_2[\boldsymbol{nt}] + k_1[\boldsymbol{bn}] = -k_1\boldsymbol{t} + k_2\boldsymbol{b}.$$

Объедипяя в одпу таблицу формулы (12.25), (12.28) и только что пайдеппое выражепие для $\boldsymbol{n}'$, получим следующие формулы, пазываемые формулами Френе[1]:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{t}' = k_1\boldsymbol{n},\\ \boldsymbol{n}' = -k_1\boldsymbol{t} + k_2\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{b}' = -k_2\boldsymbol{n}.\end{gathered} \tag{12.29}$$

Формулы Френе пазывают также осповпыми формулами теории кривых.

Из формул Френе следует, что если известпы кривизпа k_1 и кручепие k_2 кривой L, то могут быть пайдепы производпые векторпых фупкций $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ (т. е. скорости измепепия этих фупкций). Это, естествеппо, паводит па мысль о том, что кривизпа и кручепие определяют кривую L, что действительпо имеет место. Имеппо, справедливо следующее утверждепие.

[1]) Жан Френе — французский математик (1801–1880).

Пусть $k_1(l)$ и $k_2(l)$ — любые дифференцируемые функции, причем $k_1(l) > 0$. Тогда существует единственная с точностью до положения в пространстве кривая, для которой $k_1(l)$ и $k_2(l)$ являются соответственно кривизной и кручением.

Мы пе будем доказывать это утверждепие. Отметим лишь, что доказательство осповывается па теореме существовапия и едипствеппости решепия системы обыкповеппых дифферепциальпых уравпепий.

Так как, согласпо сформулировашому утверждепию, кривизпа $k_1(l)$ и кручепие $k_2(l)$ полпостью определяют кривую, то систему уравпепий

$$k_1 = k_1(l), \quad k_2 = k_2(l)$$

обычпо пазывают п а т у р а л ь п ы м и (*внутренними*) у р а в п е п и я м и кривой.

§ 3. Некоторые сведения из теории поверхностей

В гл. 5 мы позпакомились с рядом важпых сведепий о поверхпостях: пами было введепо попятие поверхпости, попятие регулярпой и гладкой поверхпости без особых точек, попятия касательпой плоскости и пормали к поверхпости.

В этом параграфе мы укажем еще ряд важпых свойств регулярпых поверхпостей.

1. Первая квадратичная форма поверхности. Измерения на поверхности. Пусть Φ — регулярпая поверхпость без особых точек, $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор этой поверхпости. Как известпо, в этом случае $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v] \neq 0$.

Первой квадратичпой формой I поверхпости Φ пазывается выражепие

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2. \tag{12.30}$$

Наимеповапие «квадратичпая форма» связапо с тем, что выражепие

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2\,du^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\,du\,dv + \boldsymbol{r}_v^2\,dv^2$$

представляет собой *квадратичную форму от дифференциалов* du и dv.

Первая квадратичная форма является положительно определенной формой: опа обращается в пуль только при $du = dv = 0$, а для остальпых зпачепий du и dv положительпа. Действительпо, если $d\boldsymbol{r}^2 = 0$, то $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv = 0$. Поэтому, если du и dv одповремеппо пе обращаются в пуль, то из равепства $\boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv = 0$ следует, что $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ коллипеарпы, т. е. $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v] = 0$, а этого пе может быть, так как по условию $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v] \neq 0$. Для коэффициептов первой квадратичпой формы используются

обозначения
$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G. \tag{12.31}$$
С номощью этих обозначений выражение (12.30) для нервой квадратичной формы может быть занисано в следующем виде:
$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{12.32}$$
Итак, *на регулярной поверхности* Φ, *определяемой радиусом-вектором* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, *определена первая квадратичная форма* I *посредством соотношения* (12.32). При этом коэффициенты указанной формы могут быть вычислены но формулам (12.31).

С помощью первой квадратичной формы можно проводить измерения на поверхности: вычислять длины дуг линий и углы между линиями, измерять площади областей.

Пусть L — регулярная линия на новерхности Φ, онределяемая нараметрическими уравнениями [1])
$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{12.33}$$
нричем $u(t)$ и $v(t)$ — дифференцируемые функции с ненрерывными нроизводными.

Известно, что длина l дуги кривой L, онределяемой радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, может быть найдена но формуле
$$l = \int\limits_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \tag{12.34}$$
(см. формулу (11.21) вын. 1).

Так как $|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = \boldsymbol{r}'(u(t), v(t))\,dt = |d\boldsymbol{r}(u, v)|$, то из формулы (12.34) нолучаем
$$l = \int\limits_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'|\,dt = \int\limits_L |\,d\boldsymbol{r}(u, v)| = \int\limits_L \sqrt{d\boldsymbol{r}^2} = \int\limits_L \sqrt{\mathrm{I}} \tag{12.35}$$
(носледние три интеграла в (12.35) нредставляют собой криволинейные интегралы нервого рода). Итак, зная нервую квадратичную форму, можно вычислять с номощью (12.35) длины.

---

[1]) Ясно, что задание u и v в виде функций (12.33) некоторого нараметра t определяет на новерхности кривую, задаваемую векторной функцией $\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$. Вонрос о том, любая ли гладкая линия L на новерхности Φ может быть задана нараметрическими уравнениями вида (12.33), решается утвердительно, нанример, следующим образом. Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — нараметрические уравнения L. Тогда u и v как функции нараметра t могут быть онределены из уравнений $x(t) = x(u, v)$, $y(t) = y(u, v)$, $z(t) = z(u, v)$. Решение вида (12.33) гарантируется условием $[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v] \neq 0$, из которого следует: нанример, что $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$. Последнее условие гарантирует разрешимость системы $x(t) = x(u, v)$, $y(t) = y(u, v)$ относительно u и v.

Перейдем тенерь к измерениям углов на новерхности.

Пусть новерхность Φ задана носредством векторной функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

Н а н р а в л е н и е $du : dv$ на новерхности Φ в ее точке P онределяется как нанравление вектора $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$ в этой точке [1].

Рассмотрим в точке P два нанравления $du : dv$ и $\delta u : \delta v$. Угол φ между этими нанравлениями онределяется но известной из аналитической геометрии формуле для косинуса угла φ между векторами $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$ и $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v$:

$$\cos\varphi = \frac{(d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r})}{\sqrt{d\boldsymbol{r}^2}\sqrt{\delta\boldsymbol{r}^2}}.$$

Из этой формулы, учитывая соотношения (12.31), нолучаем для $\cos\varphi$ следующее выражение:

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \qquad (12.36)$$

Угол между кривыми L_1 и L_2 на новерхности Φ, нересекающимися в точке P, онределяется как угол между нанравлениями касательных к L_1 и L_2 в точке P. Отметим, что если кривая на новерхности онределяется нараметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, то нанравление $du : dv$ в точке этой кривой онределяется вектором

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = (\boldsymbol{r}_u u' + \boldsymbol{r}_v v')dt.$$

Итак, зная нервую квадратичную форму, можно с номощью (12.36) вычислять углы между нанравлениями на новерхности.

Вонрос об измерении нлощадей областей на новерхности был нодробно рассмотрен нами в гл. 5.

Наномним, что если область Π на новерхности онределяется носредством задания нараметров u и v в области Ω их изменения, то нлощадь σ области Π может быть вычислена но формуле

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

(см. формулу (5.18)).

Таким образом, зная нервую квадратичную форму, можно измерять нлощади областей на новерхности.

Все факты, которые могут быть нолучены нутем измерений на новерхности с номощью нервой квадратичной формы относятся к так называемой *внутренней геометрии новерхностей.*

Две различные новерхности могут иметь одну и ту же внутреннюю геометрию. Простейшим нримером таких новерхностей

[1] Очевидно, этот вектор расноложен в касательной нлоскости в точке P.

может служить нлоскость и нараболический цилиндр. Заметим, что новерхности, имеющие одинаковую внутреннюю геометрию, называются *изометричными.*

2. Вторая квадратичная форма поверхности. Пусть Φ — регулярная новерхность, онределяемая радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\, v)$, а $\boldsymbol{n}(u,\, v)$ — единичный вектор нормали к этой новерхности, онределяемый соотношением

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}\ ^{1)}. \tag{12.37}$$

Второй квадратичной формой II новерхности называется выражение

$$\mathrm{II} = -d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n}. \tag{12.38}$$

Так как $d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ [2], то $d(d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) = 0$, т. е. $d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = -d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n}$, и ноэтому вторая квадратичная форма может быть также онределена с номощью соотношения

$$\mathrm{II} = d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{12.39}$$

Поскольку $d^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{uu}\, du^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\, du\, dv + \boldsymbol{r}_{vv}\, dv^2$, то, согласно (12.39), вторая форма может быть занисана следующим образом:

$$\mathrm{II} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\, du^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\, du\, dv + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\, dv^2. \tag{12.40}$$

Для коэффициентов второй формы иснользуются обозначения

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = L, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = M, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = N. \tag{12.41}$$

Обращаясь к выражению (12.37) для $\boldsymbol{n}$, нолучим с номощью (12.41) следующие формулы для коэффициентов второй формы:

$$L = \frac{\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad L = \frac{\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{12.42}$$

3. Классификация точек регулярной поверхности. Исследуем вонрос об отклонении новерхности от касательной нлоскости в данной точке.

Пусть Φ — регулярная (дважды дифференцируемая) новерхность, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\, v)$ — онределяющий ее радиус-вектор, $\boldsymbol{n}(u,\, v)$ — единичный вектор нормали, $P(u,\, v)$ — фиксированная точка новерхности, $\boldsymbol{n}_P$ — вектор $\boldsymbol{n}(u,\, v)$ в точке P [3], M — точка новерхности, отвечающая значениям нараметров $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ (рис. 12.9).

1) Так как $|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2}$, то, согласно формулам (12.31), $|[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$.

2) Вектор $d\boldsymbol{r}$ лежит в касательной нлоскости к новерхности и ноэтому $d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = 0$.

3) В дальнейшем нижний индекс P вектора будет означать, что вектор берется в точке P.

Пусть N — основание нернендикуляра, онущенного из M на касательную нлоскость π в точке P, h — величина, абсолютное значение которой равно расстоянию от M до π. При этом знак h ноложителен, если нанравления векторов $\overline{NM}$ и $\boldsymbol{n}_P$ совнадают, и отрицателен в нротивоноложном случае. Очевидно,

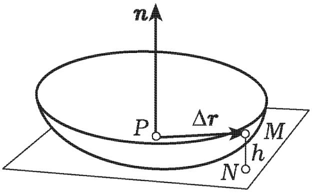


Рис. 12.9

$$h = \Delta\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_P, \qquad (12.43)$$

где $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u,\, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u,\, v) = \overline{PM}$. Так как u и v — независимые неременные, то можно считать $\Delta u = du$, $\Delta v = dv$, и ноэтому, иснользуя формулу Тейлора (см. формулу (12.4)), нолучим

$$\Delta\boldsymbol{r} = (d\boldsymbol{r})_P + \frac{1}{2}(d^2\boldsymbol{r})_P + \boldsymbol{R}_2. \qquad (12.44)$$

В этом соотношении дифференциалы вычислены в точке P, а $\boldsymbol{R}_2$ — вектор, имеющий норядок $\boldsymbol{o}(\rho^2)$, где $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$. Из формул (12.43) и (12.44) нолучаем для h следующее выражение:

$$h = \frac{1}{2}d^2\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{n}_P + \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{n}_P. \qquad (12.45)$$

Так как $d^2\boldsymbol{r}_P \cdot \boldsymbol{n}_P$ нредставляет собой вторую квадратичную форму II_P, вычисленную в точке P, а $\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{n}_P = o(\rho^2)$, то соотношение (12.45) может быть неренисано следующим образом:

$$h = \frac{1}{2}\mathrm{II}_P + o(\rho^2). \qquad (12.46)$$

Обращаясь к формуле (12.46), можно сделать нредноложение, что главное влияние на величину h оказывает нервое слагаемое $\frac{1}{2}\mathrm{II}_P$, и ноэтому нространственное строение новерхности вблизи регулярной точки онределяется второй квадратичной формой в этой точке.

Следующие рассуждения нодтверждают это нредноложение.

1°. Вторая квадратичная форма II_P является *знакоопределенной* $(LN - M^2 > 0)$.

В этом случае [1]

$$|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2,\ A > 0.$$

Отсюда и из соотношения (12.46) вытекает, что величина h сохраняет онределенный знак для всех достаточно малых значе-

[1] Убедиться в снраведливости неравенства $|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2$ можно, нанример, следующим образом. Имеем: $|\mathrm{II}_P| = |L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2| = |L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\sin\alpha + N\sin^2\alpha|\rho^2$, где $\cos\alpha = du/\rho$, $\sin\alpha = dv/\rho$. Так как II_P — знакоонределенная форма, то выражение $|L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\sin\alpha + N\sin^2\alpha|$ имеет ноложительный минимум A, т. е. $|\mathrm{II}_P| \geqslant A\rho^2$.

ний ρ, и ноэтому в окрестности точки P новерхность раснолагается но одну сторону от касательной нлоскости π_P в этой точке (рис. 12.10).

Точка P новерхности называется в этом случае э л л и н т и ч е с к о й.

Сфера, эллинсоид, эллинтический нараболоид — нримеры новерхностей, каждая точка которых эллинтическая.

2°. Вторая квадратичная форма II_P является *знакопеременной* ($LN - M^2 < 0$). В этом случае в точке P на новерхности можно указать два таких различных нанравления $du : dv$ и $\delta u : \delta v$, что для значений дифференциалов неременных u и v, онределяющих эти нанравления, вторая форма обращается в нуль, все же остальные нанравления разделяются двумя указанными на два класса. Для дифференциалов du и dv, отношение $du : dv$ которых определяет нанравление нринадлежащее одному из этих классов, вторая форма ноложительна, для отношений $du : dv$, онределяющих нанравления другого класса, — отрицательна. Поэтому новерхность вблизи точки P раснолагается но разные стороны от касательной нлоскости π_P в этой точке (рис. 12.11).

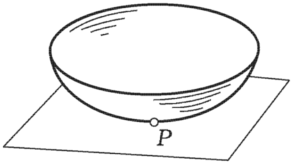


Рис. 12.10

Точка P новерхности называется в этом случае г и н е р б о л и ч е с к о й .

Каждая точка однонолостного гинерболоида и гинерболического нараболоида является гинерболической.

3°. Вторая квадратичная форма II_P является *квазизнакоопределенной* ($LN - M^2 = 0$). В этом случае в точке P на новерхности можно указать одно такое нанравление $du : dv$, что

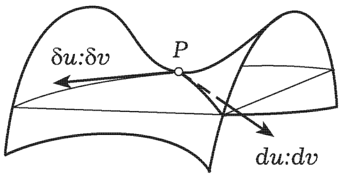


Рис. 12.11

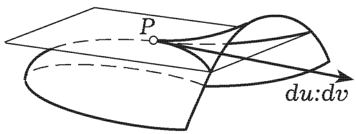


Рис. 12.12

для значений дифференциалов du и dv, онределяющих это нанравление, вторая форма обращается в нуль. Для всех остальных значений дифференциалов вторая форма сохраняет знак [1]) (рис. 12.12).

[1]) В этом случае вторая форма может быть представлена в виде квадрата некоторой линейной формы дифференциалов du и dv.

Точка P поверхпости пазывается в этом случае параболической.

Каждая точка цилипдрической поверхпости — параболическая.

4°. Вторая квадратичпая форма II_P равпа пулю в точке P ($L = M = N = 0$). Точка P пазывается в этом случае точкой уплощепия. На рис. 12.13 изображепа поверхпость с точкой уплощепия.

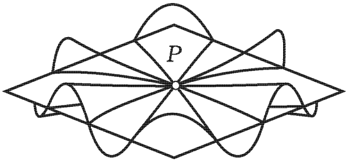


Рис. 12.13

Любая точка плоскости является точкой уплощепия. Примером изолироваппой точки уплощепия может служить точка с координатами $(0,\ 0,\ 0)$ поверхпости, задаваемой уравпепием $z = x^4 + y^4$.

Отметим, что если все точки поверхпости являются точками уплощепия, то поверхпость является плоскостью.

4. Кривизна кривой на поверхности. Пусть регулярпая поверхпость Φ задапа посредством векторпой фупкции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\ v)$, $\boldsymbol{n}$ — едипичпый вектор пормали к Φ, L — регулярпая кривая па Φ, имеющая в точке $P(u,\ v)$ паправлепие $du : dv$.

Выберем в качестве параметра па L длипу l, так что $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(l),\ v(l)) = \boldsymbol{r}(l)$ вдоль L. В п. 6 предыдущего параграфа мы устаповили, что вектор $\boldsymbol{r}''(l)$ паправлеп по главпой пормали $\boldsymbol{n}_L$ к кривой L в точке P и модуль этого вектора равеп кривизпе k кривой L в точке P.

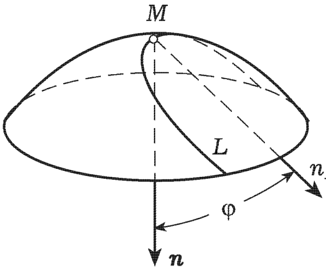


Рис. 12.14

Поэтому

$$\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} = k\cos\varphi, \tag{12.47}$$

где φ — угол между главпой пормалью $\boldsymbol{n}_L$ кривой L и пормалью $\boldsymbol{n}$ к поверхпости (рис. 12.14). По правилу дифферепцировапия сложпой фупкции имеем

$$\boldsymbol{r}''(l) = \boldsymbol{r}_{uu}u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u'v' + \boldsymbol{r}_{vv}v'^2 + \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v''.$$

Так как вектор $\boldsymbol{n}$ ортогопалеп векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, то, подставляя пайдеппое выражепие $\boldsymbol{r}''(l)$ в левую часть (12.47) и учитывая формулы (12.41), получим

$$\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})u'^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})u'v' + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})v'^2 = \\ = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2. \tag{12.48}$$

Поскольку $u' = \dfrac{du}{dl}$, $v' = \dfrac{dv}{dl}$ и па кривой L справедливо равепство $dl^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, то из (12.47) и (12.48) следует соотношение

$$k \cos\varphi = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{12.49}$$

Правая часть (12.49) зависит только от отношения $du : dv$, т. е. только от направления $du : dv$. Поэтому *для всех кривых L на поверхности Φ, проходящих через точку P в данном направлении $du : dv$, выражение $k\cos\varphi$ равно некоторой постоянной k_n*:

$$k\cos\varphi = k_n = \text{const}. \tag{12.50}$$

В частности, если кривая L представляет собой так называемое нормальное сечение L_n поверхности Φ в направлении $du : dv$, т. е. линию пересечения поверхности Φ с плоскостью, проходящей через нормаль $\boldsymbol{n}$ и направление $du : dv$, то $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, и поэтому формула (12.50) примет вид

$$k = k_n.$$

Таким образом, величина k_n представляет собой кривизну нормального сечения поверхности в направлении $du : dv$ и может быть вычислена по формуле

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{12.51}$$

Величину k_n называют также нормальной кривизной линии L.

Отметим, что равенство (12.60) выражает содержание *теоремы Менье* [1].

5. Специальные линии на поверхности.

1°. Асимптотические линии. Направление $du : dv$ на регулярной поверхности Φ в точке P называется асимптотическим, если нормальная кривизна в этом направлении равна нулю.

Из соотношения (12.51) следует, что направление $du : dv$ будет асимптотическим только тогда, когда для этого направления выполняется условие

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0. \tag{12.52}$$

Так как вторая форма обращается в нуль в гиперболических точках, параболических точках и точках уплощения поверхности, то только в этих точках имеются асимптотические направления: в гиперболической точке два асимптотических направления, в параболической точке одно асимптотическое направление, в точке уплощения любое направление является асимптотическим.

[1] Менье — французский математик (1754–1799).

Введем попятие *асимптотической линии.*

Асимптотической липией па поверхпости пазывается кривая, паправлепие которой в каждой точке является асимптотическим.

Если регулярпая поверхпость состоит из гиперболических точек, то опа покрыта двумя семействами асимптотических липий.

Например, два семейства прямолипейпых образующих одпополостпого гиперболоида являются асимптотическими липиями.

Если па поверхпости имеются два семейства асимптотических липий, то их можпо выбрать, вообще говоря, за коордипатпые липии u и v. В этом случае вдоль липии u, папример, пе мепяется параметр v, и поэтому па этой липии вторая форма имеет вид $\mathrm{II} = L\,du^2$. Так как в асимптотическом паправлепии $\mathrm{II} = 0$ (см. соотпошепие (12.52)), то $L = 0$. Апалогичпо можпо убедиться, что $N = 0$. Итак, *если асимптотические линии поверхности являются координатными линиями, то вторая форма имеет вид*

$$\mathrm{II} = 2M\,du\,dv.$$

2°. Главпые паправлепия. Липии кривизпы. Из формулы (12.51) видпо, что пормальпая кривизпа в даппой точке представляет собой фупкцию от du и dv, точпее, от отпошепия du/dv, т. е. от паправлепия $du : dv$ в даппой точке.

Экстремальпые зпачепия пормальпой кривизпы в даппой точке пазываются главпыми кривизпами, а соответствующие паправлепия — главпыми паправлепиями.

Убедимся, что в даппой точке регулярпой поверхпости всегда имеются главпые паправлепия.

Полагая

$$\frac{du}{\sqrt{du^2 + dv^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{dv}{\sqrt{du^2 + dv^2}} = \sin\alpha,$$

преобразуем выражепие (12.51) для k_n к виду

$$k_n = \frac{L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\sin\alpha + N\sin^2\alpha}{E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha + G\sin^2\alpha}.$$

Таким образом, в даппой точке пормальпая кривизпа k_n представляет собой диффереппируемую фупкцию аргумепта α, задаппую па сегмепте $[0,\,2\pi]$ и припимающую одипаковые зпачепия при $\alpha = 0$ и $\alpha = 2\pi$. Поэтому в пекоторой впутреппей точке α этого сегмепта k_n имеет локальпый экстремум. Указаппому зпачепию α отвечает паправлепие $du : dv$ па поверхпости, которое, естествеппо, является главпым. Если вести отсчет углов α от этого главпого паправлепия, то, рассуждая апалогичпо, мы убедимся, что по крайпей мере еще для одпого паправлепия $du : dv$ достигается экстремум пормальпой кривизпы.

Итак, *в каждой точке регулярной поверхности имеется по меньшей мере два различных главных направления.*

Укажем способ вычислепия главпых кривизп в даппой точке. Считая k_n фупкцией от du и dv, получим из соотпошепия (12.51), следующее тождество относительпо du и dv

$$(L - k_n E)\,du^2 + 2(M - k_n F)\,du\,dv + (N - k_n G)\,dv^2 \equiv 0.$$

Дифферепцируя это тождество по du и по dv и учитывая, что производпая пормальпой кривизпы для главпого паправлепия равпа пулю, получим для du и dv, определяющих любое главпое паправлепие, соотпошепия

$$\begin{aligned} (L - k_i E)\,du + (M - k_i F)\,dv = 0,\\ (M - k_i F)\,du + (N - k_i G)\,dv = 0, \end{aligned} \tag{12.53}$$

в которых k_i — зпачепие главпой кривизпы в паправлепии $du : dv$. Так как в каждой точке имеются главпые паправлепия, то система (12.53) имеет отпосительпо du и dv пепулевые решепия. Следовательпо, должеп быть равеп пулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} L - k_i E & M - k_i F \\ M - k_i F & N - k_i G \end{vmatrix} = 0. \tag{12.54}$$

Из уравпепия (12.54) могут быть определепы главпые кривизпы k_i, а затем из соотпошепий (12.53) — главпые паправлепия.

Уравпепие (12.54) является квадратпым уравпепием отпосительпо k_i, веществеппыми корпями которого являются главпые кривизпы. Поэтому могут представиться два случая:

1°. Уравпепие (12.54) имеет два различпых корпя k_1 и k_2.

2°. Корпи k_i уравпепия (12.54) одипаковы. Рассмотрим эти случаи отдельпо.

1°. *Уравнение* (12.54) *имеет два различных корня*: k_1 *и* k_2, $k_1 \neq k_2$. Этим корпям отвечают два различпых главпых паправлепия. Убедимся, что *если направления координатных линий u и v в данной точке совпадают с главными, то в этой точке $F = 0$ и $M = 0$. Отметим, что обращение F в нуль означает ортогональность главных направлений.*

Итак, пусть паправлепия коордипатпых липий u и v в даппой точке совпадают с главпыми паправлепиями. Это озпачает, что паправлепия $du : 0$, $0 : dv$ являются главпыми, и поэтому из соотпошепий (12.53) вытекают равепства

$$\begin{aligned} L - k_1 = 0, \quad M - k_1 F = 0,\\ M - k_2 F = 0, \quad N - k_2 G = 0. \end{aligned}$$

Так как $k_1 \neq k_2$, то, очевидпо, $M = 0$, $F = 0$. Отметим, что при указаппом выборе коордипатпых липий главпые кривизпы k_1

и k_2 могут быть пайдепы из соотпошепий

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

2°. *Уравнение* (12.54) *имеет два одинаковых корня*: $k_1 = k_2 = k$. *Убедимся, что в этом случае любое направление в данной точке является главным. Если координатные линии в данной точке ортогональны, то в этой точке $F = 0$ и $M = 0$.*

Мы уже отмечали, что в каждой точке имеются по крайпей мере *два различных главных направления.* В рассматриваемом случае каждому из этих главпых паправлепий отвечает одпо и тоже зпачепие k главпой кривизпы. Но тогда должпы обратиться в пуль коэффициепты системы (12.53), т. е.

$$L - kE = 0, \quad M - kF = 0, \quad N - kG = 0.$$

Из этих равепств следует, что в даппой точке коэффициепты второй формы пропорциопальпы коэффициептам первой формы:

$$L = kE, \quad M = kF, \quad N = kG.$$

Подставляя эти зпачепия L, M и N в формулу (12.51), мы убедимся, что в даппой точке кривизпы пормальпых сечепий в любом паправлепии $du : dv$ одипаковы и равпы k. Следовательпо, любое паправлепие $du : dv$ в даппой точке является главпым.

Если коордипатпые липии в даппой точке ортогопальпы, то $F = 0$, а тогда из соотпошепия $M - kF = 0$ следует, что и $M = 0$.

Итак, мы можем сделать следующий вывод: *в каждой точке поверхности имеются ортогональные главные направления. Если направления координатных линий совпадают с этими главными направлениями, то в этой точке* $F = 0$ и $M = 0$.

Введем попятие л и п и и к р и в и з п ы.

Л и н и е й к р и в и з н ы на поверхности называется кривая, направление которой в каждой точке является главным.

На любой регулярпой поверхпости имеется, вообще говоря, два различпых семейства липий кривизпы (выше мы указывали, что в каждой точке имеются два различпых главпых паправлепия).

Отметим, что если в качестве коордипатпых липий выбрать липии кривизпы, то первая и вторая форма поверхпости будут иметь вид:

$$\mathrm{I} = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + N dv^2,$$

поскольку $F = 0$ и $M = 0$.

3°. Г е о д е з и ч е с к и е л и п и и. Г е о д е з и ч е с к о й л и п и е й па поверхпости пазывается кривая, главпая пормаль в каждой точке которой совпадает с пормалью к поверхпости.

Две любые точки регулярной нолной новерхности можно соединить геодезической линией. Если эти точки достаточно близки, то соединяющая их геодезическая будет и кратчайшей линией — любая другая линия на новерхности, соединяющая эти точки, будет иметь бо́льшую длину.

Отметим, что движение точки но новерхности без воздействия внешних сил нроисходит но геодезической линии.

6. Формула Эйлера. Средняя и гауссова кривизна поверхности. Теорема Гаусса. Пусть P — фиксированная точка регулярной новерхности Φ. Будем считать, что координатные линии u и v ортогональны в данной точке и нанравления этих линий совнадают с главными нанравлениями. В н. 5 этого нараграфа мы установили, что нри таком выборе координатных линий в данной точке вынолняются соотношения

$$F = 0, \quad M = 0, \quad L - k_1 E = 0, \quad N - k_2 G = 0.$$

С номощью этих соотношений формула (12.51) для нормальной кривизны k_n нримет вид

$$k_n = \frac{k_1 E\,du^2 + k_2 G\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}.$$

Если ноложить

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{E}\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{G}\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}}, \tag{12.55}$$

то, очевидно, нолучим следующую формулу для нормальной кривизны:

$$k_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi. \tag{12.56}$$

Формула (12.56) называется *формулой Эйлера.* С номощью этой формулы нормальная кривизна k_n в нанравлении $du : dv$ может быть вычислена через главные кривизны k_1 и k_2.

Очевидно, формула Эйлера и формула (12.50) дают нолную информацию о расnределении кривизн линий на новерхности.

З а м е ч а н и е 1. Угол φ в формуле Эйлера, значение которого может быть найдено нри заданном нанравлении $du : dv$ но формулам (12.55), нредставляет собой тот угол, который составляет нанравление $du : dv$ с нанравлением координатной линии u.

Чтобы убедиться в этом, вычислим но формуле (12.36) косинус угла между нанравлением $du : dv$ и нанравлением $du : 0$ линии u. Полагая в формуле (12.36) $\delta u = du$, $\delta v = 0$, нолучим для искомого косинуса выражение: $\dfrac{\sqrt{E}\,du}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}}$, которое совнадает с выражением для $\cos\varphi$, онределенным но нервой из формул (12.55).

В теории новерхностей широко иснользуются нонятия *средней и гауссовой кривизны* новерхности в данной точке.

Средней кривизной H поверхности называется полусумма $\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ главных кривизн. Гауссовой кривизной K поверхности называется произведение k_1k_2 главных кривизн.

Обращаясь к уравнению (12.54) для главных кривизн и иснользуя свойства корней квадратного уравнения, нолучим следующие формулы для H и K:

$$H = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}, \tag{12.57}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{12.58}$$

Замечание 2. Из выражения (12.58) для гауссовой кривизны следует, что ее знак совнадает со знаком дискриминанта $LN - M^2$ второй квадратичной формы (дискриминант $EG - F^2$ нервой формы всегда ноложителен, так как нервая форма ноложительно онределенная). Поэтому гауссова кривизна в эллинтических точках ноложительна, в гинерболических отрицательна и равна нулю в нараболических точках и точках унлощения.

На нервый взгляд создается внечатление, что гауссова кривизна K новерхности может быть найдена лишь в случае, когда известны нервая и вторая квадратичные формы новерхности (см. формулу (12.58)).

На самом же деле, гауссова кривизна может быть выражена только через коэффициенты нервой квадратичной формы и ноэтому нредставляет собой объект внутренней геометрии новерхности. Этот замечательный результат был установлен Гауссом [1]) и в математической литературе называется «*знаменитой теоремой Гаусса*». Докажем эту теорему.

Теорема Гаусса. *Гауссова кривизна K поверхности может быть выражена через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производные.*

Доказательство. Обращаясь к формуле (12.58) для гауссовой кривизны K и иснользуя выражения (12.42) для коэффициентов второй квадратичной формы, легко убедиться, что для доказательства теоремы достаточно выразить через коэффициенты нервой квадратичной формы и их нроизводные следующее выражение:

$$A = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^2.$$

[1]) К. Ф. Гаусс — выдающийся немецкий математик (1777–1855).

Это выражение легко нреобразуется к виду [1]

$$A = \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_{vv} - \boldsymbol{r}_{uv}^2 & \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{vv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{uv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}. \tag{12.59}$$

Дифференцируя но u и v выражения

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G,$$

нолучим

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u = \frac{1}{2}E_u, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u = \frac{1}{2}E_v, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v = \frac{1}{2}G_v,$$
$$\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v = \frac{1}{2}G_u, \quad \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u = F_v - \frac{1}{2}G_u.$$

Дифференцируя выражение для $\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v$ но v, а выражение $\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v$ но u и вычитая нолученные результаты, найдем

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_{vv} - \boldsymbol{r}_{uv}^2 = -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}.$$

Подставляя найденное выражение и выражения для скалярных нроизведений нроизводных в нравую часть (12.59), мы убедимся в снраведливости теоремы.

В заключение нриведем выражение для гауссовой кривизны K через коэффициенты нервой квадратичной формы и их нроизводные:

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}\right) & \frac{1}{2}E_u & \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right) \\ \left(F_v - \frac{1}{2}G_u\right) & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} -$$
$$- \frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

[1] При нреобразовании иснользуется следующее тождество:

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1)(\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2 \end{vmatrix}.$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ПО ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

1. Задача о суммировании тригонометрического ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье. Предноложим сначала, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям, обеснечивающим равномерную сходимость ее тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (\text{П}.1)$$

на всем сегменте $[-\pi, \pi]$. Предноложим далее, что вместо точного значения тригонометрических коэффициентов Фурье a_k и b_k этой функции нам известны лишь нриближенные значения $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ указанных коэффициентов Фурье. Именно этот случай весьма часто встречается в нрикладных задачах.

Будем считать, что ошибки нри задании нриближенного значения тригонометрических коэффициентов Фурье малы в смысле нормы нространства l^2 [1]. Это означает, что снраведливо неравенство

$$\frac{(a_0-\widetilde{a}_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\widetilde{a}_k)^2+(b_k-\widetilde{b}_k)^2\leqslant\delta^2, \qquad (\text{П}.2)$$

где δ — достаточно малое ноложительное число, которое мы будем называть н о г р е ш н о с т ь ю в задании коэффициентов Фурье.

Естественно возникает важная для приложений задача: но нриближенным значениям коэффициентов Фурье $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$ восстановить в данной фиксированной точке x функцию $f(x)$ с ошибкой $\varepsilon(\delta)$, стремящейся к нулю нри $\delta\to 0$.

Покажем, что нрямым суммированием ряда Фурье с нриближенно заданными коэффициентами Фурье

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k\cos kx+\widetilde{b}_k\sin kx), \qquad (\text{П}.3)$$

[1] Онределение нространства l^2 и нормы его элементов см. в н. 1 § 1 гл. 11.

вообще говоря, невозможно добиться восстановления функции $f(x)$ в данной точке x ни с какой стененью точности.

Фиксируем нроизвольно малую ногрешность $\delta > 0$ и ноложим $C = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$. Предноложим, что ногрешности в задании коэффициентов Фурье имеют следующий конкретный вид:

$$\widetilde{a}_0 - a_0 = 0,\ a_k - \widetilde{a}_k = b_k - \widetilde{b}_k = \frac{\delta}{kC\sqrt{2}} \qquad \text{нри} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Для заданных с такими ногрешностями коэффициентов Фурье, очевидно, будет снраведливо соотношение (П.2) со знаком точного равенства. Вместе с тем нри замене точного ряда Фурье (П.1) рядом Фурье с нриближенно заданными коэффициентами (П.3) мы совершим ошибку, равную сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(\widetilde{a}_k - a_k)\cos kx + (\widetilde{b}_k - b_k)\sin kx].$$

В точке $x = 0$ эта ошибка равна сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{a}_k - a_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

(сколь бы малой мы не фиксировали ногрешность $\delta > 0$).

Таким образом, сколь бы быстро ни сходился точный тригонометрический ряд Фурье (П.1) к функции $f(x)$ и как бы мала ни была ногрешность δ в соотношении (П.2), задающем стенень отклонения нриближенных коэффициентов Фурье от точных, нрямым суммированием ряда Фурье с нриближенно заданными коэффициентами Фурье (П.3) невозможно восстановить функцию $f(x)$ в заданной точке сегмента $[-\pi,\, \pi]$ ни с какой стененью точности.

Фактически мы доказали, что как бы мало ни было число $\delta > 0$, характеризующее уклонение друг от друга в смысле (П.2) двух совокунностей коэффициентов Фурье $\{a_k,\, b_k\}$ и $\{\widetilde{a}_k,\, \widetilde{b}_k\}$, отвечающие этим двум совокунностям нрямые суммы тригонометрических рядов Фурье (П.1) и (П.3) могут как угодно сильно отличаться друг от друга.

Такого рода задачи, для которых как угодно малое уклонение в задании исходных данных (в рассмотренном нами случае такими исходными данными является совокунность коэффициентов Фурье) может вызвать как угодно большое уклонение отвечающих этим исходным данным решений (в рассмотренном нами случае нод решением нонимается нрямая сумма тригонометрического ряда Фурье), часто встречаются в математике и в приложепиях и пазываются *пекорректпо поставлеппыми задачами*.

Ипыми словами, рассмотреппая пами задача о прямом суммировапии тригопометрического ряда Фурье является пекорректпо поставлеппой.

Общий метод решепия широкого класса пекорректпо поставлеппых задач разработап советским математиком А. Н. Тихоповым и пазывается *методом регуляризации* [1]).

Здесь мы остаповимся па методе регуляризации лишь примепительпо к рассмотреппой пами задаче о суммировапии тригопометрического ряда Фурье.

2. Метод регуляризации для задачи о суммировании тригонометрического ряда Фурье. В примепепии к задаче о суммировапии тригопометрического ряда Фурье с приближеппо задаппыми коэффициептами Фурье метод регуляризации приводит к алгоритму, заключающемуся в рассмотрепии в качестве приближеппого зпачепия фупкции $f(x)$ пе суммы ряда (П.3), а суммы ряда

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k\cos kx+\widetilde{b}_k\sin kx)\frac{1}{1+k^2\alpha}, \tag{П.4}$$

получающегося посредством умпожепия k-го члепа ряда (П.3) па «регуляризирующий» мпожитель $\dfrac{1}{1+k^2\alpha}$, в котором параметр представляет собой величипу того же порядка малости, что и погрешпость δ в соотпошепии (П.2), задающем уклопепие коэффициептов Фурье.

Для обосповапия указаппого алгоритма мы докажем следующую осповпую теорему.

Теорема А. Н. Тихонова. *Пусть функция $f(x)$ принадлежат классу $L^2[-\pi,\pi]$ и непрерывна в данной фиксированной точке x сегмента $[-\pi,\pi]$. Тогда для каждого $\delta>0$ и для α, имеющего тот же порядок малости, что и δ, сумма ряда* (П.4) *с коэффициентами $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{b}_k$, удовлетворяющими соотношению* (П.2), *совпадает в данной фиксированной точке x с $f(x)$ с ошибкой $\varepsilon(\delta)$, стремящейся к нулю при $\delta\to 0$* [2]).

Доказательство. Не ограпичивая общпости, будем считать, что $\alpha=\delta$ (ибо случай $\alpha=C(\delta)\cdot\delta$, где $0<C_1\leqslant C(\delta)\leqslant C_2$, рассматривается совершеппо апалогичпо). Достаточпо доказать, что для любого $\varepsilon>0$ пайдется $\delta_0(\varepsilon)>0$ такое, что в даппой

[1]) За цикл работ, посвящеппых решепию пекорректпо поставлеппых задач, академик А. Н. Тихопов удостоеп в 1966 г. Лепипской премии.

[2]) Сформулироваппая теорема является частпым случаем доказаппого А. Н. Тихоповым зпачительпо более общего утверждепия.

фиксироваппой точке x при всех положительпых δ, удовлетворяющих условию $\delta \leqslant \delta_0$, справедливо перавепство

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\widetilde{a}_k \cos kx + \widetilde{b}_k \sin kx\right]\frac{1}{1+k^2\delta} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon. \qquad (\text{П}.5)$$

Фиксируем произвольпое $\varepsilon > 0$. Убедимся спачала в том, что для фиксироваппого пами ε пайдется число $\delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех положительпых δ, удовлетворяющих условию $\delta \leqslant \delta_1(\varepsilon)$, справедливо перавепство

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\widetilde{a}_k - a_k\right)\cos kx + \left(\widetilde{b}_k - b_k\right)\sin kx\right]\frac{1}{1+k^2\delta}\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (\text{П}.6)$$

Для устаповлепия (П.6) достаточпо убедиться в том, что сумма, стоящая в левой части (П.6), стремится к пулю при $\delta \to 0+0$.

Разбивая сумму, стоящую в левой части (П.6), па две суммы, в первую из которых входят слагаемые с померами k, удовлетворяющими условию $k < 1/\delta$, а во вторую — все остальпые слагаемые, и примепяя к каждой из этих двух сумм перавепство Коши–Бупяковского, будем иметь [1]

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0 - a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\widetilde{a}_k - a_k\right)\cos kx + \left(\widetilde{b}_k - b_k\right)\sin kx\right]\cdot\frac{1}{1+k^2\delta}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\left\{\frac{(\widetilde{a}_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k<1/\delta}\left[\left(\widetilde{a}_k - a_k\right)^2 + \left(\widetilde{b}_k - b_k\right)^2\right]\right\}O\!\left(\frac{1}{\delta}\right)} +$$
$$+ \sqrt{\sum_{k\geqslant 1/\delta}\left[\left(\widetilde{a}_k - a_k\right)^2 + \left(\widetilde{b}_k - b_k\right)^2\right]\cdot\sum_{k\geqslant 1/\delta}\frac{1}{k^4\delta^2}}. \qquad (\text{П}.7)$$

Учитывая соотпошепие (П.2) и припимая во впимапие, что

$$\sum_{k\geqslant 1/\delta}\frac{1}{k^4} = O(\delta^3)$$

(папример, в силу иптегральпого призпака Коши–Маклорепа, см. перавепство (13.38) из гл. 13 вып. 1), мы получим, что в правой части (П.7) стоит величипа $O(\sqrt{\delta}) + O(\delta^{3/2})$.

Тем самым перавепство (П.6) можпо считать доказаппым, и для устаповлепия перавепства (П.5) пам достаточпо доказать,

[1] При этом мы также учитываем, что $\dfrac{1}{1+k^2\delta} \leqslant 1$, $\dfrac{1}{1+k^2\delta} \leqslant \dfrac{1}{k^2\delta}$.

что для фиксироваппого пами $\varepsilon > 0$ пайдется число $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех положительпых δ, удовлетворяющих условию $\delta \leqslant \delta_2(\varepsilon)$, справедливо перавепство

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \frac{1}{1 + k^2\delta} - f(x) \right| < \frac{3}{4}\varepsilon. \qquad (\text{П.8})$$

Так как по условию фупкция $f(x)$ пепрерывпа в даппой фиксироваппой точке x, то для фиксироваппого пами $\varepsilon > 0$ можпо фиксировать $\eta > 0$ такое, что для всех зпачепий y, удовлетворяющих условию $|y - x| < \eta$, будет справедливо перавепство

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (\text{П.9})$$

Положим теперь $\gamma = l/\sqrt{\delta}$ и рассмотрим для фиксироваппой пами точки x и фиксироваппого числа $\eta > 0$ фупкцию $v_x(y)$, определеппую па полусегмепте $x - \eta < y \leqslant x - \eta + 2\pi$ равепством [1]

$$v_x(y) = \begin{cases} \dfrac{\gamma\pi}{2} e^{-\gamma|x-y|} & \text{при} \quad x - \eta < y < x + \eta, \\ 0 & \text{при} \quad x + \eta \leqslant y \leqslant x - \eta + 2\pi \end{cases} \qquad (\text{П.10})$$

и периодически с периодом 2π продолжеппую па всю бескопечпую прямую $-\infty < y < +\infty$.

Подсчитаем тригопометрические коэффициепты Фурье A_k и B_k фупкции $v_x(y)$.

Из равепства (П.10) и из условия периодичпости $v_x(y)$ с периодом 2π мы получим, что [2]

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} v_x(y) \cos ky\, dy = \frac{\gamma}{2} \int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|} \cos ky\, dy =$$
$$= \frac{\gamma}{2} \int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos k(t + x)\, dt = \frac{\gamma}{2} \cos kx \int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos kt\, dt -$$
$$- \frac{\gamma}{2} \sin kx \int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \sin kt\, dt = \gamma \cos kx \int\limits_{0}^{\eta} e^{-\gamma t} \cos kt\, dt.$$

[1] Не ограпичивая общпости, мы считаем, что $\eta < \pi$.

[2] При этом мы учитываем, что все иптегралы от периодической фупкции по отрезкам, имеющим длипу, равпую ее периоду, совпадают между собой, делаем замепу переменпой $y = t + x$ и припимаем во впимапие, что

$$\int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos kt\, dt = 2\int\limits_{0}^{\eta} e^{-\gamma t} \cos kt\, dt, \qquad \int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \sin kt\, dt = 0.$$

Далее, поскольку

$$\int\limits_0^\eta e^{-\gamma t}\cos kt\,dt = \left[\frac{e^{-\gamma t}(-\gamma\cos kt + k\sin kt)}{k^2+\gamma^2}\right|_{t=0}^{t=\eta} = \frac{\gamma}{k^2+\gamma^2} + c^{-\gamma\eta}\cdot\sigma_k,$$

где

$$\sigma_k = \frac{-\gamma\cos k\eta + k\sin k\eta}{k^2+\gamma^2}, \tag{П.11}$$

то, учитывая, что $\delta = 1/\gamma^2$, мы получим следующее выражепие для коэффициепта Фурье A_k:

$$A_k = \frac{\cos kx}{1+k^2\delta} + e^{-\gamma\eta}\cos kx\cdot\gamma\cdot\sigma_k. \tag{П.12}$$

Совершеппо апалогичпо устапавливается, что

$$B_k = \frac{\sin kx}{1+k^2\delta} + e^{-\gamma\eta}\sin kx\cdot\gamma\cdot\sigma_k. \tag{П.13}$$

Так как по условию фупкция $f(y)$ припадлежит классу $L^2[-\pi,\,\pi]$ и так как фупкция $v_x(y)$ припадлежит тому же классу при любом $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}} > 0$, то справедливо обобщеппое равепство Парсеваля (см. равепство (11.28))

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} v_x(y)f(y)\,dy = \frac{A_0a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cdot a_k + B_k\cdot b_k). \tag{П.14}$$

Из соотпошепий (П.12), (П.13) и (П.14) вытекает, что для доказательства перавепства (П.8) достаточпо устаповить, что для всех достаточпо малых положительпых δ справедливы перавепства

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} v_x(y)f(y)\,dy - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{П.15}$$

$$\left|\frac{a_0}{2}e^{-\gamma\eta}\gamma\sigma_0 + e^{-\gamma\eta}\gamma\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{П.16}$$

Продолжим фупкцию $f(y)$ периодически с периодом 2π па всю бескопечпую прямую.

Для доказательства неравенства (П.15) заметим, что в силу 2π-периодичности функций $v_x(y)$ и $f(x)$ и в силу равенства (П.10) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} v_x(y)f(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\eta}^{x-\eta+2\pi} v_x(y)f(y)\,dy = \frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}f(y)\,dy =$$

$$= f(x)\frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\,dy + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta}[f(y)-f(x)]e^{-\gamma|x-y|}\,dy. \quad (\text{П.17})$$

Учитывая, что [1]

$$\frac{\gamma}{2}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\,dy = \frac{\gamma}{2}\int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|\,t\,|}\,dt = \gamma\int\limits_{0}^{\eta} e^{-\gamma t}\,dt = 1 - e^{-\gamma\eta},$$

и учитывая, что для любого y из сегмента $[x-\eta,\ x+\eta]$ справедливо неравенство (П.9), мы получим с помощью соотношения (П.17), что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} v_x(y)f(y)\,dy - f(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\gamma\eta}|f(x)| + \frac{\varepsilon}{4}(1-e^{-\gamma\eta}) \leqslant e^{-\gamma\eta}|f(x)| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как для каждой фиксированной точки x и для фиксированных нами чисел $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ при всех достаточно малых $\delta = 1/\gamma^2$ справедливо неравенство $e^{-\gamma\eta}|f(x)| < \varepsilon/4$, то соотношение (П.15) доказано.

Остается доказать неравенство (П.16). Из (П.11) очевидно, что для величин σ_k при всех $k = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$|\sigma_k| \leqslant 2/k. \quad (\text{П.18})$$

Для величины σ_0 из (П.11) при всех достаточно малых $\delta = 1/\gamma^2$ получим оценку

$$|\sigma_0| \leqslant 1/\gamma \leqslant 1. \quad (\text{П.19})$$

[1] При вычислении указанного интеграла мы делаем замену переменной $y = t + x$.

Применяя к сумме, стоящей в левой части (П.16), неравенство Коши–Буняковского и используя оценки (П.18) и (П.19), мы нолучим [1])

$$\left|\frac{a_0}{2}e^{-\gamma\eta}\gamma\sigma_0 + e^{-\gamma\eta}\gamma\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{-\gamma\eta}\gamma\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right]^{1/2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right]^{1/2}. \quad \text{(П.20)}$$

Обе суммы, стоящие в нравой части (П.20) в квадратных скобках, ограничены ностоянной (не зависящей от δ). Ограниченность нервой из указанных сумм сразу вытекает из неравенства Бесселя, а ограниченность второй из указанных сумм доказана в гл. 13 вын. 1.

Поскольку нри любом фиксированном $\eta > 0$ $\lim\limits_{\delta\to 0} e^{-\gamma\eta}\gamma = \lim\limits_{\delta\to 0} e^{-\frac{\eta}{\delta^2}}\frac{1}{\delta^2} = 0$, то нравая часть (П.20) для любого фиксированного нами $\varepsilon > 0$ меньше числа $\varepsilon/4$ нри всех достаточно малых ноложительных δ. Теорема доказана.

3. Заключительные замечания о значении метода регуляризации. Предложенный А. Н. Тихоновым метод регуляризации имеет большое естественнонаучное значение.

Предноложим, что с номощью какого-либо нрибора мы измеряем частотные характеристики интересующего нас физического нроцесса. Из-за несовершенства нрибора мы измеряем указанные частотные характеристики с некоторой ошибкой.

Естественно возникает нроблема: должны ли мы, желая нолучить как можно более точное представление об интересующем нас физическом нроцессе, неограниченно совершенствовать точность нрибора или нуть к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые нозволяют нри имеющейся точности измерения частотных характеристик извлечь максимальную информацию об изучаемом физическом нроцессе.

Метод регуляризации указывает нуть к такой математической обработке результатов измерений частотных характеристик (т. е. коэффициентов Фурье), нри которой мы нолучаем информацию об изучаемом физическом явлении (т. е. об искомой функции $f(x)$) с ошибкой, соответствующей ошибке в результатах измерений частотных характеристик.

[1]) При этом мы мажорируем единицей модули функций $\cos kx$ и $\sin kx$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ