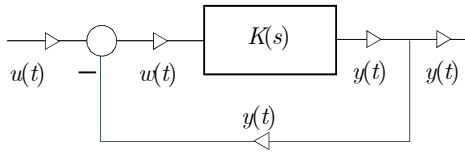


## 1 Sprzężenie zwrotne

Struktura jak na rys 1.1 nazywa się sprzężeniem zwrotnym. Ze względu na to, że  $w(t) = u(t) - y(t)$ , mówimy, że sprzężenie jest ujemne. Dla  $w(t) = u(t) + y(t)$  sprzężenie byłoby dodatnie.

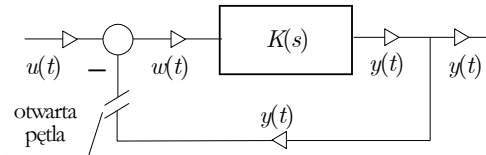


Rys. 1.1: System ze sprzężeniem zwrotnym.

O sytuacji jak na rys. 1.2, mówimy, że pętla sprzężenia została otwarta. Sygnał wejściowy  $u(t)$  pokonuje transmitancję  $K(s)$  i na wyjściu pokazuje się sygnał  $y(t)$ . Zatem  $K(s)$  jest transmitancją systemu otwartego. Przyjmujemy przy tym, że

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie  $L(s)$  i  $M(s)$  są wielomianami.



Rys. 1.2: Otwarta pętla sprzężenia zwrotnego.

Aby wyznaczyć transmitancję

$$K_Z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

systemu zamkniętego, zauważamy, że

$$\begin{cases} Y(s) = K(s)W(s) \\ W(s) = U(s) - Y(s), \end{cases}$$

dzięki czemu

$$\begin{aligned} K_Z(s) &= \frac{K(s)}{1 + K(s)} = \frac{\frac{L(s)}{M(s)}}{1 + \frac{L(s)}{M(s)}} \\ &= \frac{L(s)}{L(s) + M(s)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją

$$K_Z(s) = \frac{L_Z(s)}{M_Z(s)},$$

skąd wynika

$$M_Z(s) = L(s) + M(s).$$

**Przykład 1.1** Dla transmitancji systemu otwartego

$$K(s) = \frac{5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

transmitancją układu zamkniętego jest

$$\begin{aligned} K_Z(s) &= \frac{5s + 6}{(s^3 + 2s^2 + 3s + 4) + (5s + 6)} \\ &= \frac{5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 8s + 10}. \end{aligned}$$

## 2 Stabilność

Stabilność systemu zamkniętego zależy od pierwiastków jego równania charakterystycznego

$$L(s) + M(s) = 0,$$

czyli biegunów jego transmitancji  $K_Z(s)$ . Jest on stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy leżą one w lewej półpłaszczyźnie. Aby stwierdzić, czy fakt ten ma miejsce można zastosować dowolne ze znanych nam kryteriów, czyli

- twierdzenie o znaku współczynników,
- kryterium Hurwitza,
- kryterium Michajłowa

co pokażemy na przykładach.

**Przykład 2.1 (znak współczynników)** System otwarty ma transmitancję

$$K(s) = \frac{s - 2}{(s + 1)^3}.$$

Z Własności 1.1 wynika, że wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego jest

$$M_Z(s) = (s + 1)^3 + (s - 2) = s^3 + 3s^2 + 4s - 1.$$

Ponieważ jego współczynniki są różnych znaków, z twierdzenia o znaku współczynników wynika, że system zamknięty jest niestabilny.

**Przykład 2.2 (kryterium Hurwitza)** Transmitancją układu otwartego jest

$$K(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

Wielomianem charakterystycznym układu zamkniętego jest zatem

$$M_Z(s) = (s^3 + 2s^2 + 3s + 4) + 1 = s^3 + 2s^2 + 3s + 5,$$

skąd wynika, że

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [2].$$

System zamknięty stabilny, bowiem  $\Delta_1 = 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = 1 > 0$ ,  $\Delta_3 = 5 > 0$ .

**Przykład 2.3 (kryterium Hurwitza)** Transmitancją układu otwartego jest

$$K(s) = \frac{3}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego, to

$$M_Z(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 7.$$

Zatem

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [2],$$

czyli  $\Delta_1 = 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = -1 < 0$ ,  $\Delta_3 = -7 < 0$ . System zamknięty jest niestabilny.

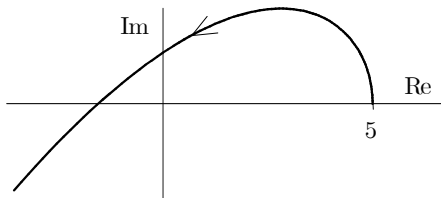
**Przykład 2.4 (kryterium Michajłowa)** Dla systemu jak w Przykładzie 2.2,

$$M_Z(j\omega) = (-2\omega^2 + 5) + j(-\omega^3 + 3\omega).$$

Wykres Michajłowa pokazany jest na rys. 2.1. Ponieważ

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M_Z(j\omega) = 3\frac{\pi}{2},$$

system zamknięty jest stabilny.



Rys. 2.1: Wykres Michajłowa  $M_Z(j\omega)$ , Przykład 2.4.

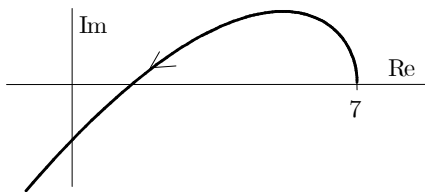
**Przykład 2.5 (kryterium Michajłowa)** Dla systemu z Przykładu 2.3,

$$M_Z(j\omega) = (-2\omega^2 + 7) + j(-\omega^3 + 3\omega).$$

Z wykresu Michajłowa, rys. 2.2, wynika, że

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M_Z(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \neq 3\frac{\pi}{2}.$$

System zamknięty jest niestabilny.



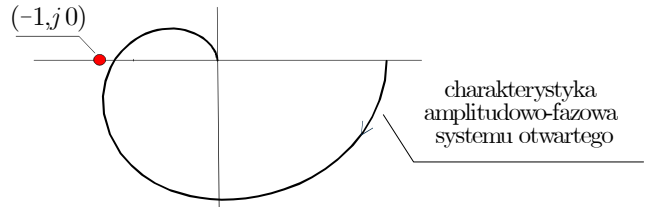
Rys. 2.2: Wykres Michajłowa, Przykład 2.5.

### 3 Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista, które teraz omówimy, zostało opracowane specjalnie dla systemu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Podamy je dla dwóch odrębnych przypadków. W pierwszym system otwarty jest stabilny, w drugim oprócz stabilnych ma jeden biegun w punkcie  $s = 0$ , czyli ma charakter całkujący.

W kryterium tym sporządza się wykres Nyquista, rys. 3.1, na którym przedstawiona jest

- charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego, czyli wykres funkcji  $K(j\omega)$  dla  $\omega \in [0, \infty)$ ,
- oraz zaznaczony jest punkt  $(-1, j0)$ .



Rys. 3.1: Przykładowy wykres Nyquista.

O stabilności układu zamkniętego wnioskujemy się na podstawie usytuowania charakterystyki względem wspomnianego punktu.

Przypominamy jeszcze, że  $M(s) = a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0$  i zakładamy, że

$$a_m > 0 \text{ oraz } l < m,$$

gdzie  $l$  jest stopniem wielomianu  $L(s)$ .

W omawianym kryterium zasadniczą rolę odgrywa pojęcie przyrostu argumentu, który np., w odniesieniu do wielomianu  $G(j\omega)$ , definiujemy jak poniżej:

$$\Delta \arg G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) - \arg G(j0).$$

Zauważmy przy tym, że nie ma ono zastosowania w sytuacji, w której  $G(s)$  ma pierwiastek urojony. W powyższej definicji i dalszych rozważaniach nawiązujemy do argumentacji stosowanej przy omawianiu kryterium Michajłowa.

**Lemat 3.1** System zamknięty ma biegun na osi liczb urojonych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie równania

$$1 + K(j\omega) = 0.$$

**Dowód.** Ponieważ

$$1 + K(s) = 1 + \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s) + M(s)}{M(s)}, \quad (3.1)$$

zatem pierwiastki równania charakterystycznego systemu zamkniętego  $L(s) + M(s) = 0$ , czyli jego bieguny, są takie same jak równania  $1 + K(s) = 0$ . Zatem ten sam pierwiastek urojony mają obydwa równania, co kończy dowód.  $\square$

**Lemat 3.2** Załóżmy, że system zamknięty nie ma żadnego bieguna na osi liczb urojonych. System zamknięty nie ma ponadto żadnego bieguna w prawej półpłaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = m\frac{\pi}{2} - \Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega).$$

**Dowód.** Z (3.1) wynika, że

$$\begin{aligned} \Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] \\ = \Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] - \Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega). \end{aligned}$$

Wartość  $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)]$  jest poprawnie określona, bowiem na mocy założenia wielomian  $L(s) + M(s)$ , jako wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego, nie pierwiastka urojonego. Z kryterium Michajłowa wynika zatem, że system zamknięty nie ma bieguna w prawej półpłaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] = m\frac{\pi}{2},$$

a to dlatego ponieważ  $m$  jest stopniem wielomianu  $L(s) + M(s)$ , co kończy dowód.  $\square$

### 3.1 System otwarty stabilny

Zakładamy teraz, że system otwarty jest stabilny. Z Lematów 3.1 i 3.1 wynika

**Twierdzenie 3.1 (kryterium Nyquista)** *Założmy, że system otwarty jest stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$1 + K(j\omega) \neq 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in [0, \infty), \quad (3.2)$$

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = 0. \quad (3.3)$$

**Dowód.** Z Lematu 3.1 wynika, że (3.2) jest równoważne temu, że system zamknięty nie ma bieguna na osi liczb urojonych. Można zatem zastosować Lemat 3.2.

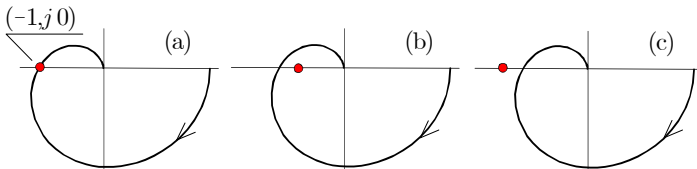
Stabilność systemu otwartego jest równoznaczna równości

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega) = \frac{\pi}{2},$$

co, dzięki Lematowi 3.2, jest równoznaczne brakowi biegunów w prawej półpłaszczyźnie. Teza została w ten sposób udowodniona.  $\square$

Kryterium polega na badaniu wykresu Nyquista, czyli wzajemnego usytuowania charakterystyki amplitudowo-fazowej systemu otwartego i punktu  $(-1, j0)$ . Możliwe są trzy sytuacje przedstawione na rys. 3.2. Wykresy zaczynają się oczywiście w punkcie  $K(0)$ , przy czym dla każdego z nich  $K(0) > 0$ . Dla  $K(0) < 0$  analiza i wnioski są podobne.

Zacniemy od sytuacji (a), z którą powiązany jest warunek (3.2), a raczej jego negacja. Jej istotą jest bowiem to, że wykres Nyquista, czyli wykres  $K(j\omega)$ , przechodzi przez punkt  $(-1, j0)$ . System zamknięty jest więc niestabilny.



Rys. 3.2: Możliwe usytuowania charakterystyki amplitudowo-fazowej  $K(j\omega)$  układu otwartego względem punktu  $(-1, j0)$ ,  $K(0) > 0$ .

W sytuacjach (b) i (c) należy ustalić wartość  $\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)]$ . Do (b) odnosi się bezpośrednio rys. 3.3. Wektor zaznaczony na nim jako  $1 + K(j\omega)$  jest *de facto* wektorem  $1 + K(j\omega)$  przesuniętym równolegle w lewo o 1. Nas interesuje  $\arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)]$ , który to kąt nie ulega zmianie przy tym przesunięciu. Dzięki temu w sytuacji jak na rysunku łatwo ustalić, że

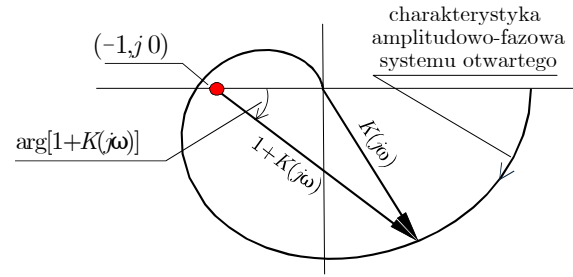
$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi \neq 0,$$

co oznacza niestabilność. W sytuacji (c), natomiast,

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = 0,$$

skąd wynika, że system jest stabilny.

Dzięki temu, w formie uwagi, podamy teraz geometryczną wersję kryterium.

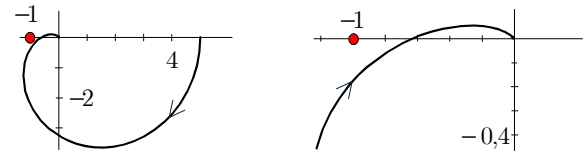


Rys. 3.3: Wykres Nyquista. Charakterystyka amplitudowo-fazowa  $K(j\omega)$  układu otwartego nie przechodzi przez punkt  $(-1, j0)$ .

**Uwaga 3.1** *Założmy, że system otwarty jest stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego*

- nie przechodzi przez punkt  $(-1, j0)$
- ani go nie obejmuje.

**Przykład 3.1** *System otwarty o transmitancji  $K(s) = 5/(s+1)^3$  jest oczywiście stabilny. Na rys. 3.4 przedstawiono jego charakterystykę amplitudowo-fazową oraz, w powiększeniu, jej fragment w pobliżu punktu  $(-1, j0)$ . Nie obejmuje ona punktu  $(-1, j0)$ , system zamknięty jest stabilny.*

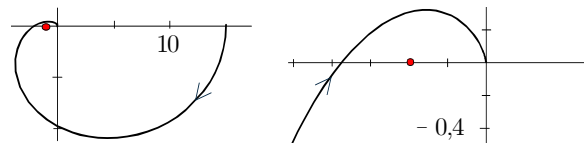


Rys. 3.4: Wykres Nyquista, (fragment w powiększeniu), Przykład 3.1.

**Przykład 3.2** *Niech teraz  $K(s) = 15/(s+1)^3$ . Ponieważ*

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi \neq 0,$$

*system zamknięty nie jest więc stabilny.*



Rys. 3.5: Wykres Nyquista, Przykład 3.2.

### 3.2 System otwarty ma element całkujący

Założmy teraz, że oprócz biegunów stabilnych, system otwarty ma jeden biegun, powiedzmy  $s_1$ , w punkcie 0. Oznacza to, że wielomian  $M(s)$  ma jeden pierwiastek  $s_1 = 0$ , a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. Jest oczywiste, że system otwarty nie jest stabilny, zawiera on bowiem element całkujący.

Ponieważ

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} (s_1 - j\omega) = 0,$$

zatem argumentując jak w dowodzie kryterium Michajłowa, otrzymujemy

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} M(j\omega) = (m-1)\frac{\pi}{2}.$$

Lematów 3.1 i 3.2 wynika więc, że warunkiem stabilności systemu zamkniętego jest

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = m \frac{\pi}{2} - (m-1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

skąd wynika poniższa wersja kryterium Nyquista:

**Twierdzenie 3.2 (kryterium Nyquista)** *Założmy, że system otwarty ma jeden biegun w punkcie  $s = 0$  i pozostałe stabilne. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$1 + K(j\omega) \neq 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in [0, \infty),$$

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = \frac{\pi}{2}.$$

Geometryczna forma kryterium ma postać jak poniżej:

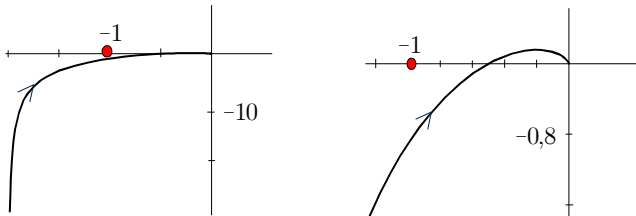
**Uwaga 3.2** *Założmy, że system otwarty ma jeden biegun w punkcie  $s = 0$  i pozostałe stabilne. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego*

- *nie przechodzi przez punkt  $(-1, j0)$*
- *ani go nie obejmuje.*

**Przykład 3.3** *Niech  $K(s) = 1/s(s+1)^3$ . Transmitancja systemu otwartego ma zatem jeden biegun w punkcie  $s = 0$ , a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. Ponieważ z rys. 3.6 wynika, że*

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = \frac{\pi}{2}.$$

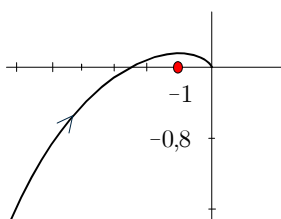
*System zamknięty więc jest stabilny.*



Rys. 3.6: Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego (fragment w powiększeniu), Przykład 3.3.

**Przykład 3.4** *Niech  $K(s) = 4/s(s+1)^3$ . System zamknięty jest niestabilny, ponieważ z rys. 3.7 wynika, że*

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = \frac{3}{2}\pi \neq \frac{\pi}{2}.$$



Rys. 3.7: Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, Przykład 3.4.

## 4 Podsumowanie

Kryterium Nyquista służy do badania stabilności systemów z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. O stabilności decyduje położenie punktu  $(-1, j0)$  względem charakterystyki amplitudowo-fazowej systemu otwartego. Podaje ono warunek, który jest jednocześnie konieczny i wystarczający. Spełnienie warunku jest równoznaczne stabilności, brak spełnienia jest równoznaczny z niestabilnością. Jego geometryczną wersją może być stwierdzenie jak poniżej:

system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego nie przechodzi przez punkt  $(-1, j0)$  ani go nie obejmuje.