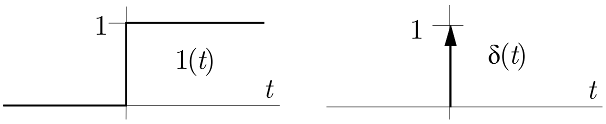
1 Sygnały

Przedmiotem naszego zainteresowania będą sygnały, czyli funkcje czasu oznaczonego symbolem t, określone na całej prostej. Przykładem jest skok jednostkowy $1(t)$, rys. 1.1, czyli funkcja zdefiniowana jak poniżej:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0 \\ 1, & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$



Rys. 1.1: Skok jednostkowy $1(t)$ i impuls Diraca $\delta(t)$.

Specyficznym i ważnym sygnałem jest $\delta(t)$, czyli tzw. impuls (delta) Diraca, patrz Uwaga 1.1, przedstawiony także na rys. 1.1. Sygnał ten nie jest klasycznie rozumianą funkcją. Ma on bowiem własności jak poniżej:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty, & \text{dla } t = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{1.1}$$

Ponadto, dla dowolnej funkcji $f(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0). \tag{1.2}$$

Dodajmy na koniec, że

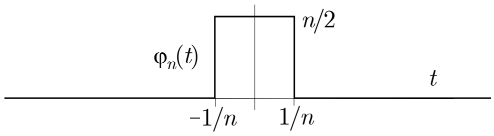
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = 1(t)$$

oraz na mocy umowy, bowiem $1(t)$ nie ma klasycznie rozumianej pochodnej w punkcie $t = 0$,

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t).$$

Uwaga 1.1 *Impuls Diraca, to specyficznie rozumiana granica ciągu funkcji $\varphi_n(t)$, rys. 1.2, dla których $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)dt = 1$. Jego klasycznie rozumiana granica $\varphi(x)$ nie zachowuje tej własności, gdyż $\varphi(x) = 0$ dla $x \neq 0$, a zatem $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 0$. Impuls Diraca $\delta(t)$ można jednak uważać za swoiście rozumianą granicę, która tę własność zachowuje, bowiem $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$. Granica ta, czyli $\delta(t)$, nie jest bowiem funkcją, lecz tzw. dystrybucją. Na tej zasadzie, wyrażenie po lewej stronie w (1.2) jest równe*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t-t_0)f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{t_0-1/n}^{t_0+1/n} f(t)dt = f(t_0).$$



Rys. 1.2: Funkcja $\varphi_n(t)$.

2 Transformacja Laplace'a

2.1 Definicja

Definicja 2.1 *Funkcję $F(s)$ zdefiniowaną wzorem*

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2.1}$$

nazywa się transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$.

O ile $F(s)$ nazywa się transformatą, to $f(t)$ jej oryginałem. Operacja prowadząca od $f(t)$ do $F(s)$ nazywa się natomiast transformacją Laplace'a.

Często stosuje się zapisy skrócone: $F(s) \ \widehat{=}\ f(t)$, $\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s)$ lub $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$. Ogólnie przyjętą konwencją jest, że transformata funkcji oznaczonej małą literą zapisywana jest literą wielką, np. $G(s) \ \widehat{=}\ g(t)$.

Na rzecz rozważań dotyczących transformacji Laplace'a przyjmujemy, że (porównaj z (1.1))

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Odwołując się bezpośrednio do definicji wyznaczymy teraz transformaty kilku funkcji.

Przykład 2.1 (impuls Diraca) *Na mocy definicji*

$$\delta(t) \ \widehat{=}\ 1,$$

bowiem

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = \int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1.$$

Przykład 2.2 (skok jednostkowy) *Aby wykazać, że*

$$1(t) \ \widehat{=}\ \frac{1}{s},$$

korzystamy z definicji i otrzymujemy

$$1(t) \ \widehat{=}\ \int_{0}^{\infty} e^{-st}dt = \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s}.$$

Przykład 2.3 (funkcja wykładnicza) *Wykażemy, że*

$$e^{-at} \ \widehat{=}\ \frac{1}{s+a}.$$

Na mocy definicji, bowiem

$$\begin{aligned} e^{-at} \ \widehat{=}\ & \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\ &= \left(-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s+a}. \end{aligned}$$

Przykład 2.4 (sinusoida) *Sprawdzimy, że*

$$\sin \omega t \ \widehat{=}\ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Zaczynamy od równości

$$\sin \omega t = -\frac{1}{2}j\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right),$$

którą można otrzymać odejmując stronami co poniżej

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos\omega t + j\sin\omega t, \\ e^{-j\omega t} &= \cos\omega t - j\sin\omega t. \end{aligned}$$

Korzystając następnie z Przykładu 2.3, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{\sin\omega t\} &= -\frac{1}{2}j\left(\mathfrak{L}\{e^{j\omega t}\} - \mathfrak{L}\{e^{-j\omega t}\}\right) \\ &= -\frac{1}{2}j\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Przykład 2.5 *Postępując jak w Przykładzie 2.4, można wykazać, że*

$$\cos\omega t = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Przykład 2.6 *Relacje*

$$\sin(\omega t+\varphi) \;\widehat{=}\; \frac{s\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2},$$

$$\cos(\omega t+\varphi) \;\widehat{=}\; \frac{s\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2},$$

wynikają z Przykładów 2.4 i 2.5 oraz równości

$$\begin{aligned} \sin(\omega t+\varphi) &= \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi, \\ \cos(\omega t+\varphi) &= \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi. \end{aligned}$$

Przykład 2.7 (opóźnienie o τ) *Jeśli $f(t) = 0$ dla $t < 0$, to*

$$f(t-\tau) \;\widehat{=}\; e^{-s\tau}F(s),$$

ponieważ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt &= e^{-s\tau}\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt \\ &= e^{-s\tau}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = e^{-s\tau}F(s). \end{aligned}$$

Przykład 2.8 (splot) *Wykażemy teraz, że jeśli $f(t) = 0$ i $g(t) = 0$ dla $t < 0$, to*

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \;\widehat{=}\; F(s)G(s).$$

Wyrażenie po lewej stronie nazywa się splotem funkcji $f(.)$ i $g(.)$. Ze względu na założenie, splot jest równy $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, bowiem $g(\tau) = 0$ dla $\tau \in (-\infty, 0)$ i $f(t-\tau) = 0$ dla $\tau \in (t, \infty)$. Ponadto splot jest równy 0 dla $t < 0$, bowiem $g(\tau) = 0$ na obszarze całkowania, który jest odcinkiem na ujemnej półprostej. Jego transformata jest zatem równa

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\right]g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = F(s)G(s). \end{aligned}$$

2.2 Własności

Przejdziemy teraz do omówienia własności transformacji. Jest ona operacją liniową, ponieważ

$$af(t) \pm bg(t) \;\widehat{=}\; aF(s) \pm bG(s), \tag{2.2}$$

co wynika z tego, że polega ona na całkowaniu. Ponadto, Ćwiczenia 2.1 i 2.2:

$$e^{-at}f(t) \;\widehat{=}\; F(s+a), \tag{2.3}$$

$$tf(t) \;\widehat{=}\; -\frac{d}{ds}F(s). \tag{2.4}$$

Dzięki (2.3) i (2.4) można łatwo wyznaczyć transformaty bardziej skomplikowanych funkcji, co czynimy w § 3.

Ćwiczenie 2.1 (mnożenie przez e^{-at}) *Aby wykazać (2.3) wystarczy skorzystać z definicji, bowiem*

$$e^{-at}f(t) \;\widehat{=}\; \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(s+a).$$

Ćwiczenie 2.2 (mnożenie przez t) *Relacja (2.4) dotycząca mnożenia przez t wynika z poniższego:*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}F(s) &= -\frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right) \\ &= -\int_0^\infty f(t)\left(\frac{d}{ds}e^{-st}\right)dt \\ &= \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt \;\widehat{=}\; tf(t). \end{aligned}$$

2.3 Transformaty pochodnej i całki

Przejdziemy teraz do transformat pochodnej i całki. Jeśli funkcja $f(.)$ jest ciągła w punkcie $t = 0$, to

$$f'(t) \;\widehat{=}\; sF(s) - f(0), \tag{2.5}$$

patrz Ćwiczenie 2.3. Jeśli jednak funkcja ta nie jest ciągła w tym punkcie, tzn. jeśli $f(0_-) \neq f(0)$, gdzie $f(0_-)$ oznacza jej granicę lewostronną w punkcie $t = 0$, to obowiązuje reguła jak poniżej, patrz Ćwiczenie 2.4:

$$f'(t) \;\widehat{=}\; sF(s) - f(0_-), \tag{2.6}$$

którą przyjmujemy jako podstawową, i która będzie nas obowiązywać. Mówimy, że wyraz $f(0_-)$ uwzględnia tzw. warunek początkowy.

Z (2.6) wynika (Ćwiczenie 2.5), że

$$f''(t) \;\widehat{=}\; s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-). \tag{2.7}$$

Dla trzeciej pochodnej

$$f^{(3)}(t) \;\widehat{=}\; s^3F(s) - s^2f(0_-) - sf'(0_-) - f''(0_-)$$

oraz, ogólnie,

$$f^{(n)}(t) \;\widehat{=}\; s^nF(s) - P_{n-1}(s),$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_{n-1}(s) = {} & s^{n-1}f(0_-) + s^{n-2}f^{(1)}(0_-) \\ & + \cdots + sf^{(n-2)}(0_-) + f^{(n-1)}(0_-) \end{aligned}$$

jest wielomianem stopnia $n-1$. Gdy rząd pochodnej rośnie, wielomian warunku początkowego rozrasta się, jego stopień jest o 1 mniejszy od rzędu pochodnej.

Jeśli chodzi o transformatę całki, to (patrz Ćwiczenie 2.6)

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \,\widehat{=}\, \frac{1}{s}F(s). \tag{2.8}$$

Z uwagi na (2.6) i (2.8), można powiedzieć, że różniczkowaniu w dziedzinie t odpowiada mnożenie w dziedzinie s (z dokładnością do warunku początkowego $f(0_-)$), natomiast całkowaniu odpowiada dzielenie przez s. Z tego też względu s nazywa się operatorem różniczkowania, a $1/s$ operatorem całkowania.

Ćwiczenie 2.3 (pochodna funkcji ciągłej) *Na mocy definicji* $f'(t) \,\widehat{=}\, \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$. *Całkując przez części i przyjmując* $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$, *stwierdzamy, że wyrażenie po prawej stronie jest równe*

$$\begin{aligned} & f(t)e^{-st}\big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty f(t)\left(\frac{d}{dt}e^{-st}\right)dt \\ &= \left(\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - f(t)e^{-st}\big|_{t=0}\right) - \int_0^\infty f(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2.4 (pochodna dowolnej funkcji) *Skok jednostkowy nie jest ciagły w punkcie $t=0$ i dlatego wzór (2.5) nie ma zastosowania, bowiem według niego, np.*

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s\mathfrak{L}\{1(t)\} - 1(0) = s\frac{1}{s} - 1 = 0,$$

co nie jest prawdą z tej racji, że

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = \mathfrak{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

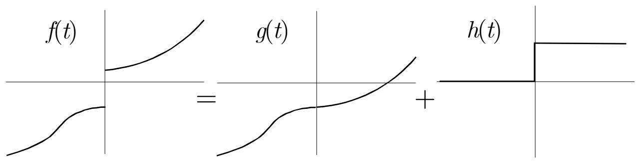
Według (2.6), zgodnie z prawdą,

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s\mathfrak{L}\{1(t)\} - 1(0_-) = s\frac{1}{s} - 0 = 1.$$

Jeśli natomiast funkcja $f(t)$, podobnie jak skok jednostkowy, nie jest lewostronnie ciągła w punkcie $t=0$, to można ją przedstawić w postaci $g(t)+h(t)$, gdzie

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dla } t<0 \\ f(t) - f(0_-), & \text{dla } t\ge 0, \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą, a $h(t) = (f(0) - f(0_-))1(t)$ nieciągłą, rys. 2.1. Wobec $g(t)$ jako funkcji ciągłej mają więc zastosowanie obydwa wzory, tzn. (2.5) i (2.6), wobec $f(t)$ i $h(t)$ jedynie ten drugi.



Rys. 2.1: Funkcja nieciągła $f(t)$ jako suma funkcji ciągłej $g(t)$ i skoku $h(t)$.

Ćwiczenie 2.5 (pochodna drugiego rzędu) *W celu sprawdzenia (2.7), przepiszemy (2.6) w postaci*

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\} = s\mathfrak{L}\{g(t)\} - g(0_-),$$

skąd wynika, że

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\} = \mathfrak{L}\left\{\frac{d}{dt}f'(t)\right\} = s\mathfrak{L}\{f'(t)\} - f'(0_-)$$

które to wyrażenie jest równe

$$s\left[sF(s) - f(0_-)\right] - f'(0_-) = s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-).$$

Ćwiczenie 2.6 (całka) *Wykazanie (2.8) nie jest trudne. Całkując bowiem przez części i zakładając, że* $\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty$, *otrzymujemy*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(t)d\tau\right\} &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)e^{-st}dt \\ &= \left[\int_0^t f(\tau)d\tau\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= sF(s). \end{aligned}$$

2.4 Twierdzenia graniczne

Twierdzenia graniczne podają związki pomiędzy granicami funkcji $f(t)$, tzn. $\lim_{t\to 0} f(t)$ oraz $\lim_{t\to\infty} f(t)$, czyli granicami funkcji w dziedzinie czasu, a jej transformatą $F(s)$.

Twierdzenie 2.1 *Jeśli granica* $\lim_{t\to 0} f(t)$ *istnieje, to*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

Twierdzenie 2.2 *Jeśli granica* $\lim_{t\to\infty} f(t)$ *istnieje, to*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

Założenie o tym, że granice w dziedzinie czasu istnieją jest istotne. Zauważmy bowiem np., że $\mathfrak{L}\{\sin(\omega t)\} = s/(s^2+\omega^2)$, skąd wynika $\lim_{s\to 0} s\mathfrak{L}\{\sin\omega t\} = 0$. Nie upoważnia to jednak do wyciągnięcia wniosku, że granica $\lim_{t\to\infty}\sin\omega t$ jest równa zero.

3 Transformaty wybranych funkcji

Wykorzystując podane wcześniej własności (2.3) i (2.4), wyznaczymy teraz transformaty Laplace'a kilku ważnych funkcji.

Przykład 3.1 *Dzięki (2.4),*

$$\mathfrak{L}\{t\} = \mathfrak{L}\{t\times 1(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{1(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

Przykład 3.2 *Korzystając z (2.3), otrzymujemy*

$$\mathfrak{L}\{te^{-at}\} = \mathfrak{L}\{t\}|_{s=s+a} = \frac{1}{s^2}\bigg|_{s=s+a} = \frac{1}{(s+a)^2}.$$

Przykład 3.3 *Z (2.3) i Przykładów 2.4 i 2.5 wynika, że*

$$e^{-\sigma t}\sin\omega t \;\widehat{=}\; \mathfrak{L}\{\sin\omega t\}|_{s=s+\sigma} = \left.\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right|_{s=s+\sigma} = \frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$

jak również

$$e^{-\sigma t}\cos\omega t \;\widehat{=}\; \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}.$$

Przykład 3.4 *Z (2.4) i Przykładów 2.4 i 2.5 wynika*

$$t\sin\omega t \;\widehat{=}\; -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{\sin\omega t\} = -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

oraz

$$t\cos\omega t \;\widehat{=}\; \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

Przykład 3.5 *Korzystając z (2.3) i Przykładu 3.4, wnioskujemy, że*

$$te^{-\sigma t}\sin\omega t \;\widehat{=}\; \mathfrak{L}\{t\sin\omega t\}|_{s=s+\sigma} = \frac{2\omega(s+\sigma)}{((s+\sigma)^2+\omega^2)^2}$$

oraz

$$te^{-\sigma t}\cos\omega t \;\widehat{=}\; \frac{(s+\sigma)^2-\omega^2}{((s+\sigma)^2+\omega^2)^2}.$$

W kolejnych przykładach korzystamy z zasady liniowości (2.2).

Przykład 3.6 *Aby wyznaczyć transformatę funkcji* $3\delta(t)+5te^{-4t}$*, zauważamy, że* $\delta(t) \;\widehat{=}\; 1$*,* $te^{-4t} \;\widehat{=}\; 1/(s+4)^2$*, a następnie korzystamy z (2.2), aby napisać:*

$$3\delta(t)+te^{-4t} \;\widehat{=}\; 3+5\frac{1}{(s+4)^2} = \frac{3s^2+24s+53}{(s+4)^2}.$$

Przykład 3.7 *Niech* $x(t) = 2e^{3t}+4e^{-5t}$*. Zatem, dzięki (2.2),*

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{x(t)\} &= 2\mathfrak{L}\{e^{3t}\}+4\mathfrak{L}\{e^{-5t}\}\\ &= 2\frac{1}{s-3}+4\frac{1}{s+5} = \frac{6s-2}{(s-3)(s+5)}.\end{aligned}$$

4 Rozkład na ułamki proste

Transformaty Laplace'a funkcji, które nas interesują mają postać

$$\frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami o stopniach l oraz m. Są to zatem funkcje wymierne. Omówimy teraz problem znalezienia oryginału, czyli

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{L(s)}{M(s)}\right\}.$$

Istotny dla naszych rozważań jest mianownik

$$\begin{aligned}M(s) &= a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0\\ &= a_m(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m),\end{aligned}$$

gdzie $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, s_m$ są jego pierwiastkami. Mogą być one rzeczywiste lub zespolone. Zespolone występuja parami, każdemu zespolonemu towarzyszy bowiem drugi, sprzeżony z nim. Zarówno pierwiastki rzeczywiste jak i pary zespolone mogą być pojedyncze lub wielokrotne.

Załóżmy teraz, że wszystkie pierwiastki są pojedyncze. Jeśli ponadto $l < m$, to istnieją liczby A_1, A_2, …, A_m takie, że

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_m}{s-s_m} \tag{4.1}$$

dla wszystkich $s \in (-\infty,\infty)$. Wynika stąd, że

$$\frac{L(s)}{M(s)} \;\widehat{=}\; A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+\cdots+A_me^{s_mt}.$$

Jeśli natomiast $l = m$, to istnieją liczby B_0, B_1, …, B_m, takie, że

$$\frac{L(s)}{M(s)} = B_0+\frac{B_1}{s-s_1}+\frac{B_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{B_m}{s-s_m} \tag{4.2}$$

dla wszystkich $s \in (-\infty,\infty)$, co oznacza, że w sytuacji takiej w rozkładzie pojawia się dodatkowy składnik B_0. Zatem

$$\frac{L(s)}{M(s)} \;\widehat{=}\; B_0\delta(t)+B_1e^{s_1t}+B_2e^{s_2t}+\cdots+B_me^{s_mt}.$$

Przykład 4.1 **($l < m$)** *Przykładem rozkładu dla sytuacji* $l < m$*, np.* $l = 1$*,* $m = 2$*, jest*

$$\frac{2s+3}{(s+4)(s+5)} = \frac{A_1}{s+4}+\frac{A_2}{s+5}.$$

Przykład 4.2 **($l = m$)** *Jako przykład rozkładu dla sytuacji* $l = m = 2$*, może służyć*

$$\frac{s^2+s+1}{(2s+3)(5s+4)} = B_0+\frac{B_1}{2s+3}+\frac{B_2}{5s+4}.$$

Uwaga 4.1 **($l = m$)** *Rozkład*

$$\frac{s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

nie jest poprawny, ponieważ wyrażenie w liczniku ułamka po prawej stronie poniżej

$$\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2} = \frac{(A+B)s+(2A+B)}{(s+1)(s+2)}$$

nie jest wielomianem stopnia 2.

Funkcja wymierna $L(s)/M(s)$ została zatem rozłożona na ułamki proste, czyli ułamki o postaci

$$\frac{1}{s-s_i}.$$

Jeśli s_i jest rzeczywiste, to A_i i B_i są rzeczywiste. Jeśli s_i jest zespolone, to współczynniki te są zespolone. Jeśli natomiast pierwiastki równania $M(s) = 0$ są wielokrotne, to rozkład wymaga modyfikacji, co pokazuje Przykład 4.9.

Jedynym problemem jest zatem wyznaczenie współczynników omówionych rozkładów. Metody ich wyznaczania przedstawimy na przykładach.

Przykład 4.3 ($l < m$) *Na podstawie (4.1) możemy napisać*

$$\frac{5s+11}{(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha}{s+2} + \frac{\beta}{s+3}.$$

Mnożąc obie strony przez $(s+4)(s+5)$*, pozbywamy się ułamków i otrzymujemy*

$$5s + 11 = \alpha(s+3) + \beta(s+2), \tag{4.3}$$

czyli

$$5s + 11 = (\alpha+\beta)s + (3\alpha + 2\beta).$$

Porównanie współczynników przy jednakowych potęgach zmiennej s *stojących po obu stronach równości prowadzi do układu równań*

$$\left.\begin{array}{r} 5 = \alpha + \beta \\ 11 = 3\alpha + 2\beta \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

który rozwiązujemy, otrzymując $\alpha = 1$ *oraz* $\beta = 4$*. Zatem*

$$\frac{5s+11}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+2} + \frac{4}{s+3} \,\widehat{=}\, e^{-2t} + 4e^{-3t}.$$

Przykład 4.4 *Zadanie jak w poprzednim przykładzie rozwiążemy w prostrzy sposób. Ponieważ funkcje po obu stronach (4.3) są identyczne, zatem w szczególności są sobie równe dla* $s = -2$ *i* $s = -3$*. Wartości te kolejno podstawiamy do obydwu stron i otrzymujemy* $1 = \alpha$ *i* $-4 = -\beta$*. Dzięki zręcznym podstawieniom uniknęliśmy w ten sposób rozwiązywania układu (4.4) dwóch równań o dwóch niewiadomych.*

Przykład 4.5 ($l = m$) *W tym przykładzie stopnie wielomianów w liczniku i mianowniku są jednakowe:*

$$\frac{s^2+s+1}{(s+3)(s+4)} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{s+3} + \frac{\beta_2}{s+4},$$

skąd wynika $s^2+s+1 = \beta_0(s+3)(s+4)+\beta_1(s+4)+\beta_2(s+3)$*. Podstawiając kolejno* $s = -3$ *oraz* $s = -4$*, znajdujemy* $\beta_1 = 7$ *oraz* $\beta_2 = -13$*. Aby wyznaczyć* β_0*, można teraz podstawić np.* $s = 0$*, skąd wynika, że* $\beta_0 = 1$*. Zatem oryginałem jest* $\delta(t) + 7e^{-3t} - 13e^{-4t}$*.*

Przykład 4.6 *W przykładzie tym*

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b},$$

skąd wynika, że $1 = A(s+b) + B(s+a)$*. Podstawiając kolejno* $s = -b$ *oraz* $s = -a$*, otrzymujemy* $1 = B(-b+a)$ *oraz* $1 = A(-a+b)$*. W rezultacie*

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+a)(s+b)} &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right) \\ &\widehat{=}\, \frac{1}{a-b}\left(-e^{-at} + e^{-bt}\right). \end{aligned}$$

Przykład 4.7 *Teraz*

$$\frac{s}{(s+a)(s+b)} = \frac{C}{s+a} + \frac{D}{s+b},$$

skąd wynika, że $s = C(s+b) + D(s+a)$*. Podstawiając kolejno* $s = -b$ *oraz* $s = -a$*, otrzymujemy* $-b = D(-b+a)$ *oraz* $-a = C(-a+b)$*, skąd wynika* $C = a/(a-b)$ *oraz* $D = -b/(a-b)$*. Zatem*

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s+a)(s+b)} &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s+a} - \frac{b}{s+b}\right) \\ &\widehat{=}\, \frac{1}{a-b}\left(ae^{-at} - be^{-bt}\right). \end{aligned}$$

Przykład 4.8 (pierwiastki zespolone) *Jeśli mianownik funkcji wymiernej ma parę pierwiastków zespolonych, powiedzmy* $s_1 = \sigma + j\omega$ *i* $s_2 = \overline{s}_1 = \sigma - j\omega$*, to w jej rozkładzie pojawia się wyrażenie*

$$\frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2},$$

w którym A *i* B *są liczbami zespolonymi. Jest ono równe*

$$\begin{aligned} & \frac{A}{(s-\sigma)-j\omega} + \frac{B}{(s-\sigma)+j\omega} \\ = & \frac{(A+B)(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + j\frac{(A-B)\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla rzeczywistych s *przyjmuje ono wartości rzeczywiste (jego oryginał jest bowiem rzeczywistą funkcją czasu), zatem* $j(A-B)$ *jest liczbą rzeczywistą, skąd wynika, że* $B = \overline{A}$*. Oznaczając* $A = \alpha + j\beta$*, dochodzimy w ten sposób do wniosku, że* $B = \alpha - j\beta$*. Badane wyrażnie jest więc równe*

$$\frac{2\alpha(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{2\beta\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}, \tag{4.5}$$

czego oryginałem jest

$$\begin{aligned} & 2\alpha e^{\sigma t}\cos\omega t + 2\beta e^{\sigma t}\sin\omega t \\ = & 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{\sigma t}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\omega t + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\omega t\right] \\ = & 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{\sigma t}\sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

gdzie $\sin\varphi = \alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$*. W rezultacie*

$$\frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} \,\widehat{=}\, 2|A|e^{\sigma t}\sin(\omega t + \varphi),$$

gdzie $\sin\varphi = \operatorname{Re} A/|A|$*, co oznacza, że* $\varphi = \arg A$*. Oryginał jest zatem funkcją periodyczną. Kończąc, zauważmy ponadto, że*

$$\frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} = \frac{as+b}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{as+b}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

gdzie $a = 2\alpha$*,* $b = 2(-\alpha\sigma + \beta\omega)$*.*

Przykład 4.9 (pierwiastek wielokrotny) *Ponieważ jeden z pierwiastków mianownika jest dwukrotny, zatem rozkład na ułamki proste jest następujący:*

$$\frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2},$$

czyli nieco inny niż dotychchczasowe. Zatem

$$1 = A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs.$$

Podstawiając $s = 0$ i $s = 1$, wyliczamy $A = 1$ oraz $C = 1$. Zatem $1 = (s-1)^2 + Bs(s-1) + s$, skąd wynika, że $B = -1$. Ostatecznie

$$\frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Ponieważ

$$\frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} = \frac{bs+c}{(s-1)^2},$$

gdzie $b = B$, $c = C - B$, zatem rozkład

$$\frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s + \gamma}{(s-1)^2}$$

jest także poprawny.

5 Równanie różniczkowe

Liniowe równanie różniczkowe rzędu n ma postać

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t),$$

gdzie $u(t)$ jest znaną funkcją, przy czym $t \in [0, \infty)$. Towarzyszy mu tzw. warunek początkowy, czyli zestaw n liczb

$$y^{(n-1)}(0_-), y^{(n-2)}(0_-), \ldots, y^{(1)}(0_-), y(0_-).$$

Korzystając z narzędzia jakim jest transformacja Laplace'a, możemy rozwiązywać równania tego typu, tzn. potrafimy wyznaczyć funkcję $y(t), t \in [0, \infty)$, która je spełnia.

Przykład 5.1 *Rozwiążemy teraz równanie różniczkowe pierwszego rzędu*

$$y'(t) + ay(t) = 0,$$

przy warunku początkowym $y'(0_-)$. Dokonując przekształcenia Laplace'a wobec obydwu jego stron otrzymujemy

$$sY(s) - y'(0_-) + aY(s) = 0,$$

patrz (2.6), skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{y'(0_-)}{s+a}.$$

Zatem

$$y(t) = y'(0_-)e^{-at}.$$

Przykład 5.2 *Równaniu różniczkowemu drugiego rzędu*

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \delta(t)$$

towarzyszy warunek początkowy $y'(0_-), y(0_-)$. Transformacja Laplace'a prowadzi do równania

$$s^2 \left[Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)\right] + 3\left[sY(s) - y'(0_-)\right] + 2Y(s) = 1,$$

patrz (2.6), (2.7) i Przykład 2.1, skąd wynika, że

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = [sy(0_-) + 4y'(0_-)] + 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{sy(0_-) + 4y'(0_-) + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{sy(0_-) + 4y'(0_-) + 1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}, \end{aligned}$$

gdzie $a = 4y'(0_-) - y(0_-) + 1$, $b = -4y'(0_-) + 2y(0_-) - 1$. W rezultacie

$$y(t) = ae^{-t} + be^{-2t}.$$

Przykład 5.3 *Rozwiążemy teraz równanie*

$$y'' + y = 0,$$

przy warunku początkowym $y'(0_-), y(0_-)$. Stosując transformację Laplace'a, otrzymujemy

$$(s^2 + 1)Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) - y(0_-) = 0,$$

skąd wynika

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2 + 1} = \frac{As}{s^2 + 1} + \frac{B}{s^2 + 1},$$

gdzie $A = y(0_-)$, $B = -y'(0_-) - y(0_-)$. Zatem

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos t + B\sin t \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin t\right) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}\,(\sin\varphi\cos t + \cos\varphi\sin t) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(t + \varphi), \end{aligned}$$

przy czym $\sin\varphi = A/\sqrt{A^2 + B^2}$.

6 Tablica transformat

$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\sigma t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$
$e^{-\sigma t}\cos\omega t$	$\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$te^{-\sigma t}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(s+\sigma)}{((s+\sigma)^2+\omega^2)^2}$
$te^{-\sigma t}\cos\omega t$	$\frac{(s+\sigma)^2-\omega^2}{((s+\sigma)^2+\omega^2)^2}$