Guía 5 - Inferencia de Tipos

Ejercicio 1

I Es válido. Pertenece a gramática de términos anotados.

II Es válido. Pertenece a gramática de términos sin anotación.

III No es válido, σ debería ser un tipo.

IV Es un término sin anotaciones, pero no pertenece a una gramática

V Es válido. Pertenece a gramática de tipos.

VI Es válido. Pertenece a gramática de tipos.

VII Es válido. Pertenece a gramática de términos anotados.

VIII No es válido.

Ejercicio 2

I $x : Nat \to Bool$

II $x : Bool \to Bool \vdash \lambda x.(X_2 \to X_3) \to Bool.\ x : Nat \to X_2$

Ejercicio 3

$X_1 \to X_2$ Nat $X_2 \to Bool$ $X_3 \to X_4 \to X_5$

X_1 $Nat \to Bool$ $(Nat \to X_2) \to Bool$ $Nat \to X_2 \to Bool$

- $MGU\{X_1 \to X_2 \overset{?}{=} (Nat \to X_2) \to Bool\} \xrightarrow{decompose} \{X_1 \overset{?}{=} Nat \to X_2, X_2 \overset{?}{=} Bool\}$ $\xrightarrow[\{X_2 := Bool\}]{elim} \{X_1 \overset{?}{=} Nat \to Bool\} \xrightarrow[\{X_1 := Nat \to Bool\}]{elim} \emptyset$

  $S = \{X_1 := Nat \to Bool ; X_2 := Bool\}$

- $MGU\{X_1 \to X_2 \overset{?}{=} Nat \to Bool\} \xrightarrow{decompose} \{X_1 \overset{?}{=} Nat\} \cup \{X_2 \overset{?}{=} Bool\}$

  doble elim y $S = \{X_1 := Nat, X_2 := Bool\}$

- $MGU\{X_1 \overset{?}{=} Nat\} \xrightarrow[\{X_1 := Nat\}]{elim} \emptyset$

  $S = \{X_1 := Nat\}$

- $MGU\{X_1 \overset{?}{=} X_2 \to Bool\} \Rightarrow S = \{X_1 := X_2 \to Bool\}$

- $MGU\{X_2 \to Bool \stackrel{?}{=} Nat \to Bool\} \xrightarrow{\text{decompose}} \{X_2 \stackrel{?}{=} Nat,\ Bool \stackrel{?}{=} Bool\}$

  $S = \{X_2 := Nat\}$

- $MGU\{X_3 \to X_4 \to X_5 \stackrel{?}{=} Nat \to X_2 \to Bool\}$

  $\xrightarrow{\text{decompose.2}} \{X_3 \stackrel{?}{=} Nat,\ X_4 \stackrel{?}{=} X_2,\ X_5 \stackrel{?}{=} Bool\}$

  elim y $S = \{X_3 := Nat,\ X_4 := X_2,\ X_5 := Bool\}$

Ejercicio 4

I

$\emptyset \triangleright \lambda z^{:Bool}.\ if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero) : Bool \to Nat$ $\quad \sigma \leftarrow$

$\downarrow \lambda$

$z : Bool \triangleright if\ z\ then\ zero\ else\ succ(zero) : Nat$ $\quad S_1 \leftarrow$

$z : X_1 \triangleright z : X_1 \qquad \emptyset \triangleright zero : Nat \qquad \emptyset \triangleright succ(zero) : Nat$

$\emptyset \triangleright zero : Nat$

$S_1 = MGU\{X_1 \stackrel{?}{=} Bool,\ Nat \stackrel{?}{=} Nat\} = \{X_1 := Bool\}$

$\sigma = Bool$

II

$\emptyset \triangleright \lambda y : Nat.\ succ((\lambda x : Nat.\ x)\ y) : Nat \to Nat$

$\to \sigma = Nat$

$|\lambda$

$y : Nat \triangleright succ((\lambda x : Nat.\ x)\ y) : Nat$

$|@ \qquad \to S_2$

$y : X_1 \triangleright ((\lambda x : X_1.\ x)\ y) : X_3$

$@ \qquad \to S_1$

$\emptyset \triangleright \lambda x : X_1.\ x : X_1 \to X_1 \qquad y : X_2 \triangleright y : X_2$

$\sigma : x : X_1 \quad |\lambda$

$x : X_1 \triangleright x : X_1$

$S_1 = MGU\{X_1 \to X_1 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\} = \{X_2 := X_1,\ X_3 := X_1\}$

$S_2 = MGU\{X_1 \stackrel{?}{=} Nat\} = \{X_1 := Nat\}$

III No tipable → $\lambda x.\text{if isZero}(x) \text{ then } x \text{ else } (\text{if } x \text{ then } x \text{ else } x)$

$| \lambda$

$S \leftarrow \text{if isZero}(x) \text{ then } x \text{ else } (\text{if } x \text{ then } x \text{ else } x)$

if

$x:Nat \triangleright isZero(x):Bool$ $\quad x:X_2 \triangleright x:X_2$ $\quad x:Bool \triangleright \text{if } x \text{ then } x \text{ else } x : Bool$

$| isZero()$ $\quad$ if

$x:X_1 \triangleright x:X_1$ $\quad x:X_3 \triangleright x:X_3$ $\quad x:X_4 \triangleright x:X_4$ $\quad x:X_5 \triangleright x:X_5$

$S = MGU\{Bool \stackrel{?}{=} Bool ; X_2 \stackrel{?}{=} Bool\} \cup \{Nat \stackrel{?}{=} Bool ; Nat \stackrel{?}{=} X_2 ; X_2 \stackrel{?}{=} Bool\}$

→ Falla, puesto que $Nat \neq Bool$!!

IV $\emptyset \triangleright \lambda x:Bool.\lambda y:Nat.\text{if } x \text{ then } y \text{ else } succ(zero) : Bool \to Nat \to Nat$

$| \lambda$ $\quad \sigma = Bool$

$x:Bool \triangleright \lambda y:Nat.\text{if } x \text{ then } y \text{ else } succ(zero) : Nat \to Nat$

$| \lambda$ $\quad \sigma = Nat$

$x:Bool, y:Nat \triangleright \text{if } x \text{ then } y \text{ else } succ(zero) : Nat$

if $\quad$ → S_1

$x:X_1 \triangleright x:X_1$ $\quad y:X_2 \triangleright y:X_2$ $\quad \emptyset \triangleright succ(zero) : Nat$

$S_1 = MGU\{X_1 \stackrel{?}{=} Bool, X_2 \stackrel{?}{=} Nat\} = \{X_1 := Bool, X_2 := Nat\}$

V $\emptyset \triangleright \text{if True then } (\lambda x.zero)\,zero \text{ else } (\lambda x.zero)\,False : Nat$

if

True $\quad \emptyset \triangleright (\lambda x.zero)\,zero : N$ $\quad \emptyset \triangleright (\lambda x.zero)\,False : N$

@ $\quad$ @

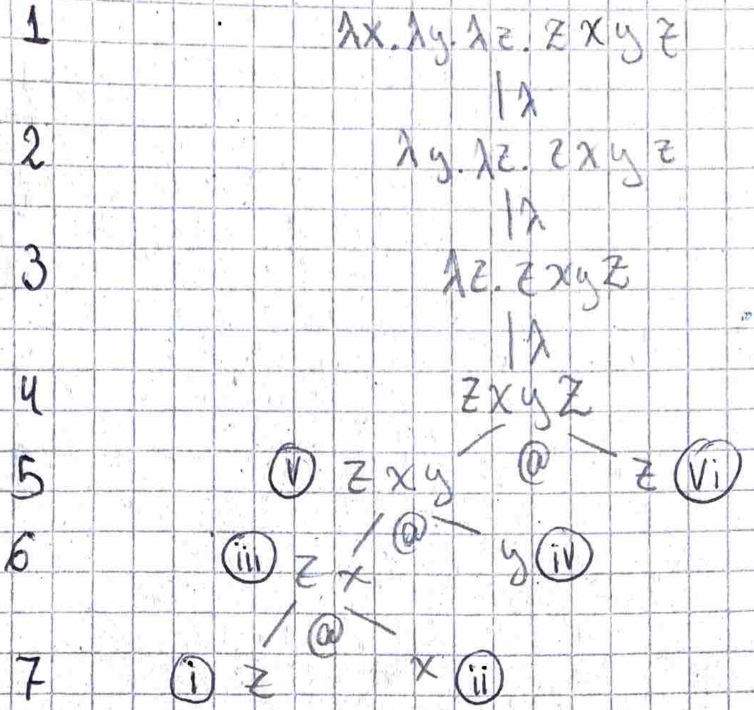
$\emptyset \triangleright (\lambda x.zero) : X_1 \to N$ $\quad zero : N$ $\quad \triangleright (\lambda x.zero) : X \to N$ $\quad False : Bool$

$| \lambda$ $\quad | \lambda$

$\emptyset \triangleright zero : N$ $\quad \emptyset \triangleright zero : N$

Ejercicio 5

a)



7 (i) $z : X_1 \triangleright z : X_1$ (ii) $x : X_2 \triangleright x : X_2$

6 (iv) $y : X_3 \triangleright y : X_3$ (iii) $S = \{X_1 := X_2 \to X_4\} \Rightarrow z : X_2 \to X_4, x : X_2 \triangleright zx : X_4$

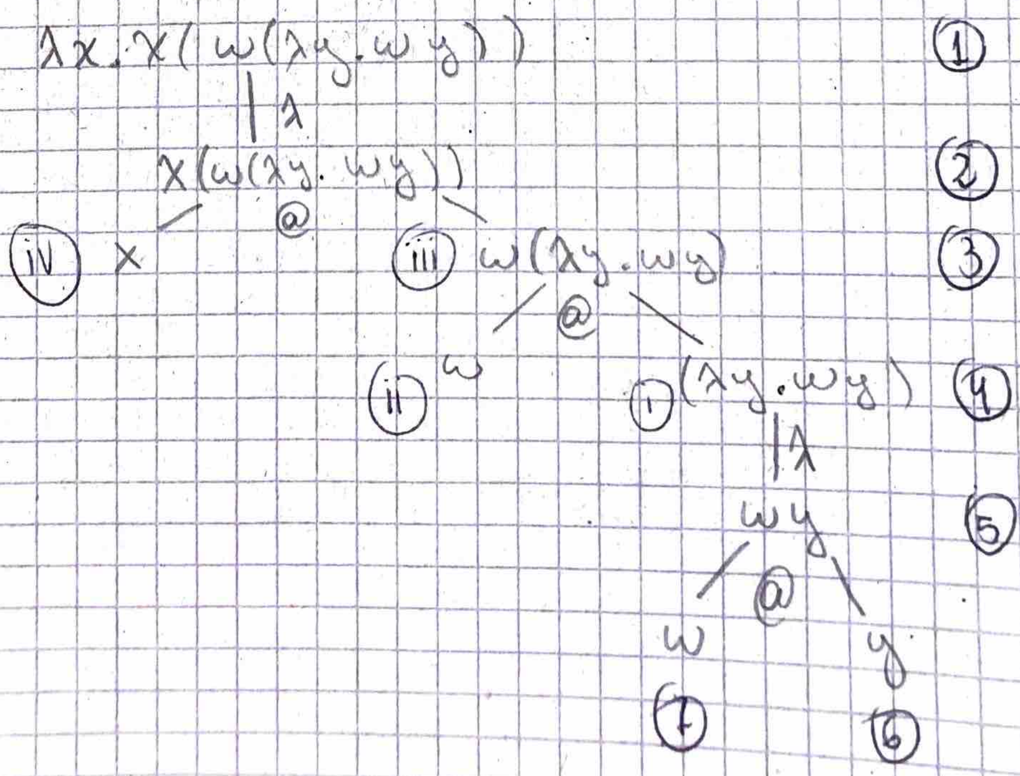
5 (vi) $z : X_5 \triangleright z : X_5$

(v) $S_2 = \{X_4 := X_3 \to X_6\} \Rightarrow z : X_2 \to X_3 \to X_6, x : X_2, y : X_3 \triangleright zxy : X_6$

4 $S_3 = MGU\{X_6 \stackrel{?}{=} X_5 \to X_7\} \cup \{X_2 \to X_3 \to X_6 \stackrel{?}{=} X_5\}$

$\xrightarrow{\text{elim } \{X_6 := X_5 \to X_7\}} \{X_2 \to X_3 \to X_5 \to X_7 \stackrel{?}{=} X_5\} \xrightarrow{O.C.}$ Falla

b)



(7) $w : X_1 \triangleright w : X_1$ (6) $y : X_2 \triangleright y : X_2$

(5) $S = \{X_1 := X_2 \to X_3\}$, $w : X_2 \to X_3,\ y : X_2 \triangleright wy : X_3$

(4) (i) $\sigma = X_2$, $w : X_2 \to X_3 \triangleright \lambda y : X_2 .\ wy : X_2 \to X_3$ (ii) $w : X_4 \triangleright w : X_4$

(3) (iii) $S = MGU\{X_2 \to X_3 \overset{?}{=} X_4 \to X_5\} \cup \{X_2 \to X_3 \overset{?}{=} X_4\}$

$\xrightarrow{\text{swap + elim}} \{X_4 := X_2 \to X_3\}$ $\{X_2 \to X_3 \overset{?}{=} X_2 \to X_3 \to X_5\}$ $\xrightarrow{\text{occur-check}}$ Falla

c)

(1) $\lambda x . \lambda y . xy$

$|\lambda$

(2) $\lambda y . xy$

$|\lambda$

(3) xy

(4) x @ y (5)

(5) $y : X_1 \triangleright y : X_1$ (4) $x : X_2 \triangleright x : X_2$

(3) $S = \{X_2 \overset{?}{=} X_1 \to X_3\}$ $\Rightarrow$ $x : X_1 \to X_3,\ y : X_1 \triangleright xy : X_3$

(2) $\sigma = X_1$, $x : X_2 \to X_3 \triangleright \lambda y : X_1 .\ xy : X_1 \to X_3$

(1) $\sigma = X_1 \to X_3$, $\emptyset \triangleright \lambda x . \lambda y . xy : (X_1 \to X_3) \to X_1 \to X_3$

d) $\emptyset \triangleright \lambda x : X_2 . \lambda y : X_2 \to X_3 .\ y x : X_2 \to (X_2 \to X_3) \to X_3$

$\sigma = X_2$

$|\lambda$

$x : X_2 \triangleright \lambda y : X_2 \to X_3 .\ y x : X_2 \to X_3 \to X_3$

$\sigma = X_2 \to X_3$

$|\lambda$

$y : X_2 \to X_3,\ x : X_2 \triangleright y x : X_3$

@

$S = \{X_1 := X_2 \to X_3\}$

$y : X_1 \triangleright y : X_1$ $x : X_2 \triangleright x : X_2$

e)

$\emptyset \triangleright \lambda x : X_2 . (\lambda x : X_1 . x) : X_2 \to X_1 \to X_1$

$|\lambda$ $\quad \to \sigma = X_2$

$\emptyset \triangleright \lambda x : X_1 . x \; : X_1 \to X_1$

$|\lambda \qquad \sigma = X_1$

$x : X_1 \triangleright x : X_1$

f)

$\emptyset \triangleright \lambda x : X_2 . (\lambda y : X_2 . y) \, x \; : X_2 \to X_2$

$|\lambda \quad \to \sigma = X_2$

$x : X_2 \triangleright (\lambda y : X_2 . y) \, x \; : X_2$

$@ \quad \to S = \{ X_1 := X_2 \, , X_3 := X_2 \}$

$\emptyset \triangleright \lambda y : X_1 . y : X_1 \to X_1 \qquad x : X_2 \triangleright x : X_2$

$|\lambda \quad \to \sigma = X_1$

$y : X_1 \triangleright y : X_1$

g)

$(\lambda z . \lambda x . x (z (\lambda y . z))) \, \text{True}$ ①

vi $\quad \lambda z . \lambda x . x (z (\lambda y . z)) \quad @ \quad \text{True}$ v ②

$|\lambda$

$\lambda x . x (z (\lambda y . z))$ ③

$|\lambda$

$x (z (\lambda y . z))$ ④

$@$

x iv $\qquad z (\lambda y . z)$ iii ⑤

$@$

z ii $\qquad \lambda y . z$ i ⑥

$|\lambda$

z ⑦

⑦ $z : X_1 \triangleright z : X_1$

⑥ i $z : X_1 \triangleright \lambda y : X_2 . z : X_2 \to X_1$

ii $z : X_3 \triangleright z : X_3$

⑤ iV $x : X_4 \triangleright x : X_4$

iii $S = MGU \{ X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_1 \to X_5 \} \cup \{ X_3 \stackrel{?}{=} X_1 \}$

$\xrightarrow{\text{elim}} \{ X_2 \to X_1 \to X_5 \stackrel{?}{=} X_1 \} \xrightarrow{\text{occur-check}}$ Falla

$\{ X_3 := X_2 \to X_1 \to X_5 \}$

Ejercicio 6

A simple vista, la notación $M^n(N) \approx M(M(\cdots(M(N))))$ nos indica que se realizan n aplicaciones. La primera es MN, por lo que aplico N de un tipo libre a un M que va de ese tipo libre a otro ($M: X_1 \to X_2$, $N: X_1$). La segunda aplicación, $M(MN)$, nos dice que M debe ir del tipo (MN) a otro, es decir, $M: (X_1 \to X_2) \to X_3$, pero previamente vimos que $M: X_1 \to X_2$. Para que esto funcione, debemos hacerlos compatibles, y por ello podemos decir que $M: X_2 \to X_1$, $N: X_1$, $MN: X_1$, $M(MN)$: aplico X_1 a $X_1 \to X_1$: X_1, $M(M(MN)): X_1$, y así sucesivamente. Lo demuestro por inducción

$P(n) = \lambda y: X_i \to X_i. \lambda x: X_i. y^n(x) = (\sigma, \tau) \equiv (X_i \to X_i, X_i)$

Caso Base: Notemos que el primer caso interesante es cuando $n = 2$. $P(2) = (\sigma, \tau) \equiv (X_i \to X_i, X_i)$. Encontremos σ y τ con inferencia de tipos sobre $\lambda y. \lambda x. y(yx)$

$\varnothing \triangleright \lambda y: X_4 \to X_4. \lambda x: X_4. y(yx): X_4 \to X_4 \to X_4 \to X_4$

$\sigma = X_4 \to X_4 \leftarrow$

λ

$y: X_4 \to X_4 \triangleright \lambda x: X_4. y(yx): X_4 \to X_4$

$\sigma = X_4 \leftarrow$

λ

$y: X_4 \to X_4, x: X_4 \triangleright y(yx): X_4$

$S_2 \leftarrow$

$@$

$y: X_3 \triangleright y: X_3$ $\quad$ $y: X_2 \to X_4, x: X_2 \triangleright yx : X_4$

$S_1 \leftarrow$

$@$

$y: X_1 \triangleright y: X_1$ $\quad$ $x: X_2 \triangleright x: X_2$

$S_1 = MGU\{X_1 \overset{?}{=} X_2 \to X_4\} = \{X_1 := X_2 \to X_4\}$

$S_2 = MGU\{X_3 \overset{?}{=} X_4 \to X_5\} \cup \{X_3 \overset{?}{=} X_2 \to X_4\} = \{X_2 := X_4, X_5 := X_4, X_3 := X_4 \to X_4\}$

Llegue a que $(\sigma, \tau) \equiv (X_4 \to X_4, X_4)$, que es lo que quería probar. ($i = 4$).

Paso Inductivo = $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Es decir, que (σ, τ) para n son los mismos que para $n+1$.

(HI) = $(\sigma, \tau) \equiv (X_j \to X_j, X_j)$ para $\lambda y:\sigma.\lambda x:\tau.\ y^n(x)$

qvq' $(\sigma, \tau) \equiv (X_j \to X_j, X_j)$ para $\lambda y:\sigma.\lambda x:\tau.\ y^{n+1}(x)$. Busco σ y τ con iferencia de tipos:

(1) $\lambda y.\lambda x.\ y(y^n(x))$

$\quad | \lambda$

(2) $\lambda x.\ y(y^n(x))$

$\quad | \lambda$

(3) $y(y^n(x))$

$\quad @$

$y:X_1 \triangleright y:X_1 \qquad y^n(x) : X_j$

$\hookrightarrow$ por (HI), $\{y: X_j \to X_j$ y $x:X_j\}$ lo uso de contexto

(3) $S = MGU\{X_1 \stackrel{?}{=} X_j \to X_2\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_j \to X_j\}$

$\xrightarrow[\{X_1 := X_j \to X_j\}]{\text{elim}} \{X_j \to X_j \stackrel{?}{=} X_j \to X_2\}$

$\xrightarrow{\text{decompose}} \{X_j \stackrel{?}{=} X_j\} \cup \{X_j \stackrel{?}{=} X_2\} \xrightarrow[\{X_2 := X_j\}]{\text{delete + swap + elim}} \emptyset$

$S = \{X_1 := X_j \to X_j,\ X_2 := X_j\}$

$\Rightarrow$ (3) $y:X_j \to X_j, x:X_j \triangleright y(y^n(x)) : X_j$

(2) $\sigma = x:X_j \Rightarrow y:X_j \to X_j \triangleright \lambda x:X_j.\ y(y^n(x)) : X_j \to X_j$

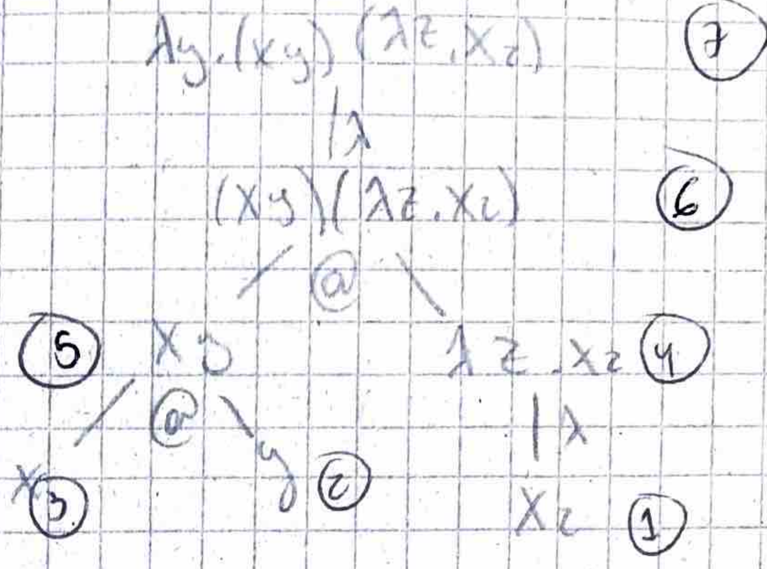
(1) $\sigma = X_j \to X_j$

$\Rightarrow \emptyset \triangleright \lambda y: \underbrace{X_j \to X_j}_{\sigma}.\ \lambda x:\underbrace{X_j}_{\tau}.\ y(y^n(x)) : X_j \to X_j \to X_j \to X_j$

Como llegamos a que $(\sigma, \tau) \equiv (X_j \to X_j, X_j)$, qed.

Ejercicio 7

I



(1) $x_2 : X_2 \triangleright x_2 : X_2$ (2) $y : X_3 \triangleright y : X_3$ (3) $x : X_1 \triangleright x : X_1$

(4) $\sigma = X_4$ (fresca) $\Rightarrow$ $x_2 : X_2 \triangleright \lambda z : X_4 . x_2 : X_4 \to X_2$

(5) $S = \{ X_1 := X_3 \to X_5 \}$ $\Rightarrow$ $x : X_3 \to X_5, y : X_3 \triangleright xy : X_5$

(6) $S = MGU\{ X_5 \stackrel{?}{=} (X_4 \to X_2) \to X_6 \} = \{ X_5 := (X_4 \to X_2) \to X_6 \}$

$x : X_3 \to (X_4 \to X_2) \to X_6, y : X_3, x_2 : X_2 \triangleright (xy)(\lambda z : X_4 \to X_2 . x_2) : X_6$

(7)

$x : X_3 \to (X_4 \to X_2) \to X_6, x_2 : X_2 \triangleright \lambda y : X_3 . (xy)(\lambda z : X_4 \to X_2 . x_2) : X_3 \to X_6$

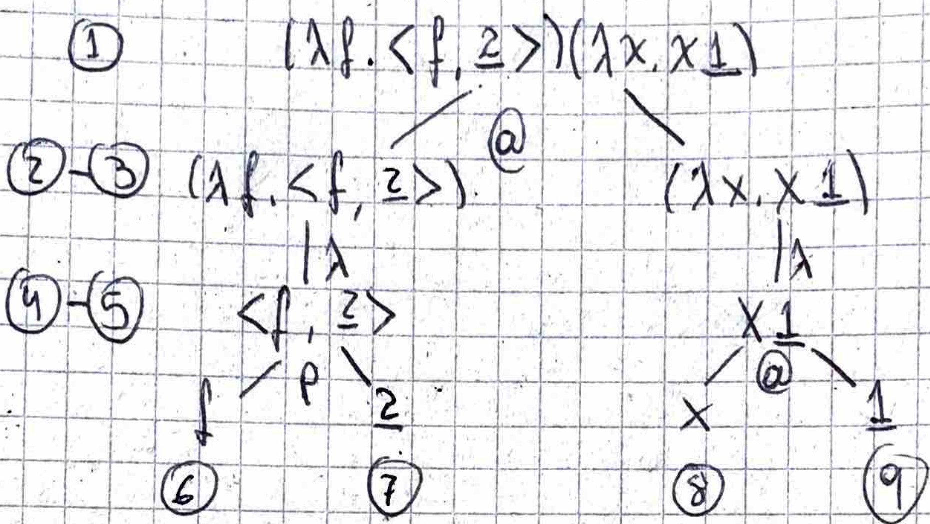
II Demostrar (utilizando chequeo de tipos) que el juicio es correcto.

VI

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \triangleright x : X_3 \to (X_4 \to X_2) \to X_6}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\Gamma \triangleright y : X_3}\,\text{ax}}{\Gamma \triangleright xy : (X_4 \to X_2) \to X_6}\,\text{T-APP} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \cup \{z : X_4\} \triangleright x_2 : X_2}\,\text{ax}}{\Gamma \triangleright (\lambda z : X_4 .\, x_2) : X_4 \to X_2}\,\text{T-ABS}}{\Gamma = \{x : X_3 \to (X_4 \to X_2) \to X_6,\ x_2 : X_2,\ y : X_3\} \triangleright (xy)(\lambda z : X_4 .\, x_2) : X_6}\,\text{T-APP}}{x : X_3 \to (X_4 \to X_2) \to X_6,\ x_2 : X_2 \triangleright \lambda y : X_3 .\, (xy)(\lambda z : X_4 .\, x_2) : X_3 \to X_6}\,\text{T-ABS}$$

Ejercicio 8

I



⑨ $\emptyset \rhd \underline{1} : Nat$ ⑧ $x : X_1 \rhd x : X_1$ ⑦ $\emptyset \rhd \underline{2} : Nat$ ⑥ $f : X_2 \rhd f : X_2$

⑤ $S = MGU\{X_1 \overset{?}{=} Nat \to X_3\} = \{X_1 := Nat \to X_3\}$

$x : Nat \to X_3 \rhd x\,\underline{1} : X_3$

④ $f : X_2 \rhd \langle f, \underline{2}\rangle : (X_2 \times Nat)$

③ $\sigma = Nat \to X_3$ $\emptyset \rhd \lambda x : Nat \to X_3 . x\,\underline{1} : Nat \to X_3 \to X_3$

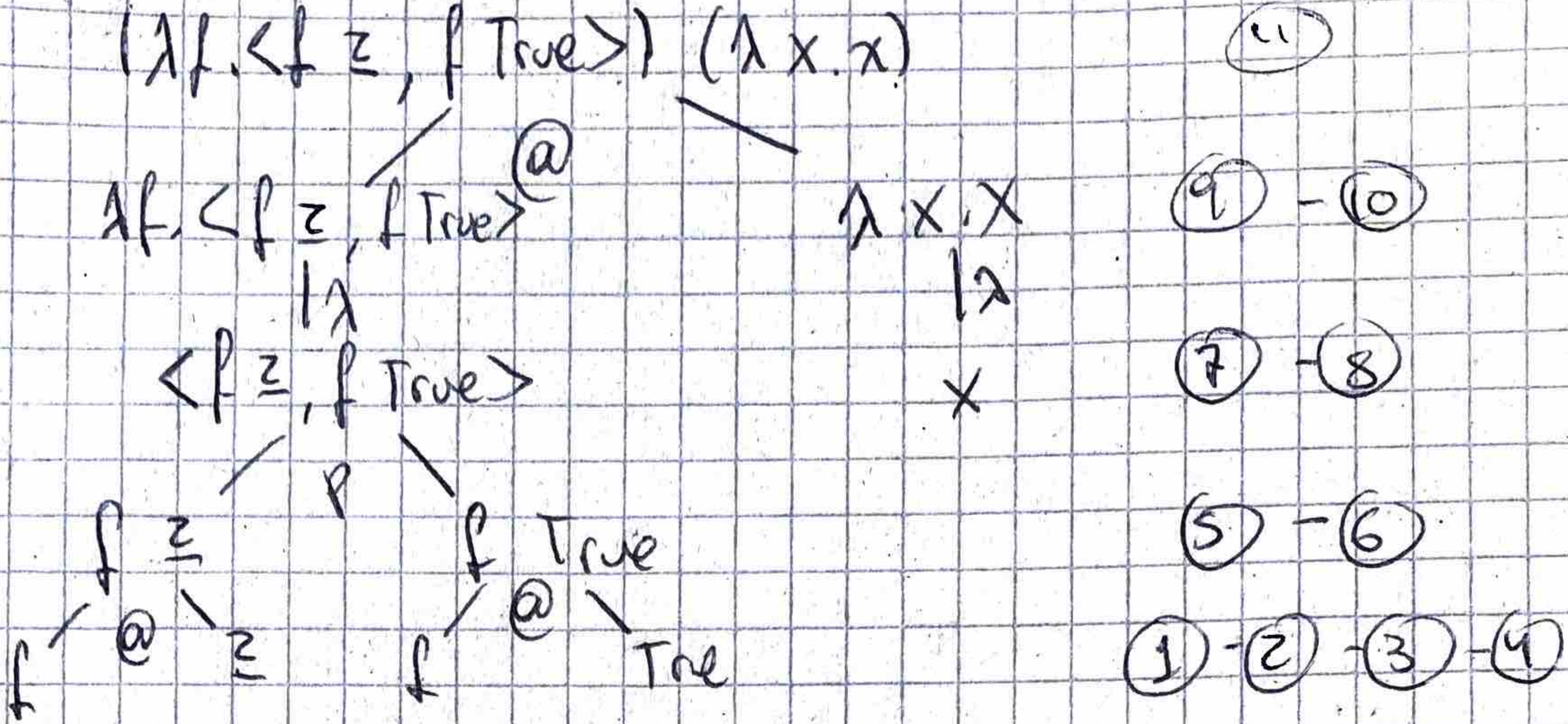
② $\sigma = X_2 \Rightarrow$ $\emptyset \rhd \lambda f : X_2 . \langle f, \underline{2}\rangle : X_2 \to (X_2 \times Nat)$

① $S = MGU\{X_2 \to (X_2 \times Nat) \overset{?}{=} (Nat \to X_3 \to X_3) \to X_4\} \xrightarrow{decom} \{X_2 \overset{?}{=} Nat \to X_3 \to X_3, (X_2 \times Nat) \overset{?}{=} X_4\}$

$\xrightarrow[\{X_2 := Nat \to X_3 \to X_3\}]{elim} \{(Nat \to X_3 \to X_3 \times Nat) \overset{?}{=} X_4\} \xrightarrow[\{X_4 := (Nat \to X_3 \to X_3 \times Nat)\}]{elim + swap} \emptyset$

$\emptyset \rhd (\lambda f : Nat \to X_3 \to X_3 . \langle f, \underline{2}\rangle)(\lambda x : Nat \to X_3 . x\,\underline{1}) : (Nat \to X_3 \to X_3 \times Nat)$

II



(1) $f : X_1 \triangleright f : X_1$ (2) $\emptyset \triangleright z : Nat$ (3) $f : X_2 \triangleright f : X_2$ (4) $\emptyset \triangleright True : Bool$

(5) $S = \{ X_1 := Nat \to X_3 \} \Rightarrow f : Nat \to X_3 \triangleright f\ z : X_3$

(6) $S = \{ X_2 := Bool \to X_4 \} \Rightarrow f : Bool \to X_4 \triangleright f\ True : X_4$

(7) $S = MGU \{ Nat \to X_3 \overset{?}{=} Bool \to X_4 \}$

$\xrightarrow{\text{decompose}} \{ Nat \overset{?}{=} Bool, X_3 \overset{?}{=} X_4 \} \longrightarrow$ Falla

Ejercicio 9

I ① case left(1) of left(x) ⇝ isZero(x) || rigth(y) ⇝ True

② ③ , ④ W(left(1)) W(isZero(x)) W(True)

⑤ W(1)

⑤ $\emptyset \triangleright \underline{1} : Nat$ ④ $\emptyset \triangleright True : Bool$ ③ $x : Nat \triangleright isZero(x) : Bool$

② $\emptyset \triangleright left_{X_1}(\underline{1}) : Nat + X_1$ ① $T_x = Nat$ $T_y = X_2$, $\Gamma_2' = \Gamma_3' = \emptyset$

$S = MGU\{Nat + X_1 \stackrel{?}{=} Nat + X_2, Bool \stackrel{?}{=} Bool\} = \{X_1 := X_2\}$

$\Rightarrow \emptyset \triangleright$ case left($\underline{1}$) of left(x) ⇝ isZero(x) || right(y) ⇝ True : Bool

II case right(z) of left(x) $\rightsquigarrow$ isZero(x) || right(y) $\rightsquigarrow$ y

$z:Bool \triangleright$ case right(z) of left(x) $\rightsquigarrow$ isZero(x) || right(y) $\rightsquigarrow$ y : Bool

III case right(zero) of left(x) $\rightsquigarrow$ isZero(x) || right(y) $\rightsquigarrow$ y

$\downarrow$ W(right(zero)) $\qquad \downarrow$ W(isZero(x)) $\qquad \downarrow$ W(y)

$W(right(zero)) \rightsquigarrow \emptyset \triangleright right_{X_1}(zero) : X_1 + Nat$

$W(y) \rightsquigarrow y:X_2 \triangleright y:X_2 \qquad W(isZero(x)) \rightsquigarrow x:Nat \triangleright isZero(x):Bool$

$S = MGU = \{X_1 + Nat \overset{?}{=} Nat + X_2,\ Bool \overset{?}{=} X_2\}$

$\xrightarrow[\{X_2 := Bool\}]{elim} \{X_1 + Nat \overset{?}{=} Nat + Bool\} \longrightarrow$ falla, en $Nat \overset{?}{=} Bool$.

IV case x of left(x) $\rightsquigarrow$ isZero(x) || right(y) $\rightsquigarrow$ y

$x:X_1 \triangleright x:X_1 \qquad x:Nat \triangleright isZero(x):Bool \qquad y:X_2 \triangleright y:X_2$

$\Gamma_x = Nat, \quad \Gamma_y = X_2, \quad \Gamma_2' = \emptyset = \Gamma_3'$

$S = MGU\{X_1 \overset{?}{=} Nat + X_2,\ Bool \overset{?}{=} X_2\} = \{X_2 := Bool,\ X_1 := Nat + Bool\}$

$\Rightarrow x: Nat + Bool \triangleright$ case x of left(x) $\rightsquigarrow$ isZero(x) || right(y) $\rightsquigarrow$ y : Bool

V case left(z) of left(x) $\rightsquigarrow$ z || right(y) $\rightsquigarrow$ y

$z:X_1 \triangleright left(z)_{X_2} : X_1 + X_2 \qquad z:X_3 \triangleright z:X_3 \qquad y:X_4 : y:X_4$

$\Gamma_x = X_5, \quad \Gamma_y = X_4, \quad \Gamma_z' = \{z:X_3\}, \quad \Gamma_3' = \emptyset$

$S = MGU\{X_1 + X_2 \overset{?}{=} X_5 + X_4,\ X_3 \overset{?}{=} X_4\} \cup \{X_3 \overset{?}{=} X_1\}$

$\xrightarrow[\{X_3 := X_1\}]{descomp + elim} \{X_1 \overset{?}{=} X_5,\ X_2 \overset{?}{=} X_4,\ X_1 \overset{?}{=} X_4\}$

$\xrightarrow{elim\ \{X_1 := X_5\}} \{X_2 \overset{?}{=} X_4\}\{X_5 \overset{?}{=} X_4\} \xrightarrow{elim} \emptyset$

$S = \{X_3 := X_4,\ X_1 := X_4,\ X_5 := X_4,\ X_2 := X_4\}$

$z:X_4 \triangleright$ case left(z) of left(x) $\rightsquigarrow$ z || right(y) $\rightsquigarrow$ y : X_4

VI

$$\text{case } z \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$$

$$z : X_1 \triangleright z : X_1 \qquad z : X_2 \triangleright z : X_2 \qquad y : X_3 \triangleright y : X_3$$

$\tau_x = X_4$, $\tau_y = X_3$, $\Gamma_2' = \{z : X_2\}$, $\Gamma_3' = \emptyset$

$S = MGU\{X_1 \stackrel{?}{=} X_4 + X_3 , X_2 \stackrel{?}{=} X_3\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2\}$

$\xrightarrow[\{X_1 := X_4 + X_3\}]{\text{elim}} \{X_2 \stackrel{?}{=} X_3\} \cup \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2\} \xrightarrow[\{X_2 := X_3\}]{\text{elim}} \{X_4 + X_3 \stackrel{?}{=} X_3\}$

$\xrightarrow{\text{occur-check}}$ Falla

$\{Nat \doteq Bool, X_3 \doteq X_1\} \longrightarrow$ falla

Ejercicio 10

I

$\text{foldr } x :: [\,] \text{ base} \hookrightarrow [\,];\ \text{rec}(h, r) \hookrightarrow \text{isZero}(h) :: r$ (1)

$x :: [\,]$ $\quad \emptyset \triangleright [\,]_{X_4} [X_4]$ $\quad \text{isZero}(h) :: r$ (2)(3)(4)

(8) x $\quad$ $[\,]$ (7) $\quad$ (6) $\text{isZero}(h)$ $\quad$ r (5)

(8) $x : X_1 \triangleright x : X_1$ $\quad$ (7) $\emptyset \triangleright [\,]_{X_2} : X_2$ $\quad$ (6) $h : Nat \triangleright \text{isZero}(h) : Bool$ $\quad$ (5) $r : X_3 \triangleright r : X_3$

(4) $S = \{X_3 := [Bool]\} \Rightarrow h : Nat, r : [Bool] \triangleright \text{isZero}(h) :: r : [Bool]$

(2) $S = \{X_2 := [X_1]\} \Rightarrow x : X_1 \triangleright x :: [\,]_{[X_1]} : [X_1]$

(1) $\Gamma_3 = \emptyset$, $S = MGU\{[X_1] \stackrel{?}{=} [Nat], [X_4] \stackrel{?}{=} [Bool], [Bool] \stackrel{?}{=} [Bool]\}$

$S = \{X_1 := Nat, X_4 := Bool\}$

$x : Nat \triangleright \text{foldr } x :: [\,]_{Nat} \text{ base} \hookrightarrow [\,]_{Bool}, \text{rec}(h, r) \hookrightarrow \text{isZero}(h) :: r : [Bool]$

$\emptyset \triangleright [\,]_{X_8} : [X_8]$

II

① $\text{foldr } \underbrace{(\lambda x.\,succ(x))::[\,]}_{\text{iv}}\ \text{base} \hookrightarrow [\,];\ rec(x,r) \hookrightarrow \text{if } p\,x \text{ then } x::r \text{ else } r$

② $\lambda x.\,succ(x)$ (i) $\qquad [\,]$ (ii) $\qquad \text{if } p\,x \text{ then } x::r \text{ else } r$ (iii)

$\downarrow \lambda$

③ $succ(x)$ $\qquad$ ④ $p\,x$ $\qquad$ ⑤ $x::r$ $\qquad$ ⑥ r

⑥ $r : X_1 \triangleright r : X_1$ $\qquad$ ⑤ $S = \{X_2 := [X_3]\} \Rightarrow x : X_3,\ r : [X_3] \triangleright x::r : [X_3]$

④ $x : X_4 \triangleright x : X_4 \quad , \quad p : X_5 \triangleright p : X_5 \quad \Rightarrow x : X_4,\ p : X_4 \to X_6 \triangleright p\,x : X_6$

③ $x : Nat \triangleright succ(x) : Nat$

② (i) $\emptyset \triangleright \lambda x : Nat.\ succ(x) : Nat \to Nat$ $\qquad$ (ii) $\emptyset \triangleright [\,]_{X_7} : [X_7]$

(iii) $S = MGU\{X_6 \stackrel{?}{=} Bool,\ X_1 \stackrel{?}{=} [X_3]\} \cup \{X_3 \stackrel{?}{=} X_4,\ X_1 \stackrel{?}{=} [X_3]\}$

$S = \{X_6 := Bool,\ X_1 := [X_4],\ X_3 := X_4\}$

$\Rightarrow x : X_4,\ r : [X_4],\ p : X_4 \to Bool \triangleright \text{if } p\,x \text{ then } x::r \text{ else } r : [X_4]$

(iv) $S = MGU\{[X_8] \stackrel{?}{=} [Nat \to Nat]\} = \{X_8 := Nat \to Nat\}$

$\emptyset \triangleright (\lambda x : Nat.\ succ(x)) :: [\,]_{Nat \to Nat} : [Nat \to Nat]$

Corregir que era $rec(x,r)$ y no $r(h,r)$

① $S = MGU\{[Nat \to Nat] \stackrel{?}{=} [X_9],\ [X_7] \stackrel{?}{=} [X_4],\ [X_4] \stackrel{?}{=} [X_4]\}$

$S = \{X_9 := Nat \to Nat,\ X_7 := X_4\}$

$x : X_4,\ p : X_4 \to Bool \triangleright \text{foldr } (\lambda x : Nat.\ succ(x)) :: [\,]_{Nat \to Nat} \cdots : [X_4]$

III

$\text{foldr } x \ \text{base} \hookrightarrow x;\ rec(h,r) \hookrightarrow isZero(h)::r$

$x : X_1 \triangleright x : X_1 \qquad x : X_2 \triangleright x : X_2 \qquad h : Nat,\ r : [Bool] \triangleright isZero(h) :: r : [Bool]$

$h : Nat \triangleright isZero(h) : Bool \qquad r : X_4 \triangleright r : X_4$

$\downarrow \{X_3 := Nat\}$

$h : X_3 \triangleright h : X_3$

$\tau_h = Nat \qquad \tau_r = [Bool] \quad , \quad \Gamma_3' = \emptyset$