GUÍA 6 - Lógica de Primer Orden

SINTAXIS DE LA LPO

Ejercicio 1

I - No es término puesto que g tiene aridad 3

II - No es término, f tiene aridad 2.

III - Es un término

IV - No es un término, $h \notin \mathcal{F}$

V - No es término, ver las aridades.

Ejercicio 2

I Es fórmula

II Es fórmula

III No es fórmula, es término

IV No es fórmula (B no es término)

V No es fórmula (B es predicado binario)

VI Es fórmula

VII Es fórmula

VIII No es fórmula porque f(X) no es fórmula

IX Es fórmula

X Es fórmula

XI No es fórmula

Ejercicio 3

$$\exists X. P(Y, Z) \land \forall Y. \neg Q(Y, X) \lor P(Y, Z)$$

I - libres, ligadas, libre

II - $\sigma\{X := W\} \Rightarrow P(Y, Z) \land \forall Y. \neg Q(Y, W) \lor P(Y, Z)$

$\sigma\{Y := W\} \Rightarrow \exists X. P(W, Z) \land \forall Y. \neg Q(Y, X) \lor P(Y, Z)$

$\sigma\{Z := g(Y, Z)\} \Rightarrow \exists X. P(Y, g(Y, Z)) \land \forall Y. \neg Q(Y, X) \lor P(Y, g(Y, Z))$

Ejercicio 4

I $\neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \land \forall Z. P(X, Y, Z)$

ligados, libres, ligada

II

$\sigma\{X := t\} \Rightarrow \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \land \forall Z. P(g(f(g(Y, Y)), Y), Y, Z)$

GUÍA 6 - UNIFICACIÓN LPO

Ejercicio 5

$P(f(X))$ $\quad P(a)$ $\quad P(Y)$ $\quad Q(X, f(Y))$ $\quad Q(X, f(Z))$ $\quad Q(X, f(a))$ $\quad X$ $\quad f(X)$

$P(X)$ $\quad P(f(a))$ $\quad P(g(Z))$ $\quad Q(f(Y), X)$ $\quad Q(f(Y), f(X))$ $\quad Q(f(Y), Y)$ $\quad f(f(c))$ $\quad f(g(Y))$

(No voy a hacer todos los MGU)

$S = MGU\{P(a) \stackrel{?}{=} P(g(Z))\} \xrightarrow{decom.} \{a \stackrel{?}{=} g(Z)\} \xrightarrow[\{a:=g(Z)\}]{elim} \emptyset$

$S = \{a := g(Z)\}$ → error: a es una cte (aridad 0), clash

$S = MGU\{Q(X, f(Z)) \stackrel{?}{=} Q(f(Y), f(X))\} \xrightarrow{decom.} \{X \stackrel{?}{=} f(Y),\ f(Z) \stackrel{?}{=} f(X)\}$

$\xrightarrow[\{X:=f(Y)\}]{elim} \{f(Z) \stackrel{?}{=} f(f(Y))\} \xrightarrow{decom.} \{Z \stackrel{?}{=} f(Y)\} \xrightarrow{elim} \emptyset$

$S = \{X := f(Y),\ Z := f(Y)\}$

$S = MGU\{f(X) \stackrel{?}{=} f(f(c))\} \xrightarrow{decom.} \{X \stackrel{?}{=} f(c)\} \xrightarrow[\{X:=f(c)\}]{elim} \emptyset$

$S = \{X := f(c)\}$

Ejercicio 6 a y b ctes.

I $\quad MGU\{f(X, X, Y) \stackrel{?}{=} f(a, b, Z)\} \xrightarrow{decom.} \{X \stackrel{?}{=} a,\ X \stackrel{?}{=} b,\ Y \stackrel{?}{=} Z\}$

$\xrightarrow[\{X:=a\}]{elim} \{a \stackrel{?}{=} b,\ Y \stackrel{?}{=} Z\} \xrightarrow{clash} a \neq b \Rightarrow$ falla

II $\quad MGU\{Y \stackrel{?}{=} f(X)\} \xrightarrow[\{Y:=f(X)\}]{elim} \emptyset$

Son unificables, $S = \{Y := f(X)\}$

III $\quad MGU\{f(g(c, Y), X) \stackrel{?}{=} f(Z, g(Z, a))\}$

$\xrightarrow{decompose} \{g(c, Y) \stackrel{?}{=} Z,\ X \stackrel{?}{=} g(Z, a)\} \xrightarrow{swap} \{Z \stackrel{?}{=} g(c, Y),\ X \stackrel{?}{=} g(Z, a)\}$

$\xrightarrow[\{Z:=g(c,Y)\}]{elim} \{X \stackrel{?}{=} g(g(c, Y), a)\} \xrightarrow{elim} \emptyset$

Son Unificables, $S = \{Z := g(c, Y),\ X := g(g(c, Y), a)\}$

IV $\quad \{f(a) \stackrel{?}{=} g(Y)\} \xrightarrow{clash} f \neq g \Rightarrow$ Falla

V $\{f(X) \stackrel{?}{=} X\} \xrightarrow{swap} \{X \stackrel{?}{=} f(X)\} \xrightarrow{occurs-check}$ Falla

VI $\{g(X,Y) \stackrel{?}{=} g(f(Y), f(X))\} \xrightarrow{decom} \{X \stackrel{?}{=} f(Y), Y \stackrel{?}{=} f(X)\}$

$\xrightarrow[\{X:=f(Y)\}]{elim} \{Y \stackrel{?}{=} f(f(Y))\} \xrightarrow{occurs-check}$ Falla

Ejercicio 7

I

Reflexividad:

$\stackrel{?}{=}$ unifica con será reflexiva sii X unifica con X $\forall X \in \mathcal{L}$

Esto es verdaderamente trivial, por regla delete.

Simetría:

$\stackrel{?}{=}$ unifica con es Simétrica sii X unifica con Y y Y unifica con X, $X \neq Y$, $X, Y \in \mathcal{L}$. Esto es verdad,

falta justificación

Transitividad:

unifica con es transitiva sii si $X \stackrel{?}{=} Y$ y $Y \stackrel{?}{=} Z$ luego $X \stackrel{?}{=} Z$. Esto es verdad, y lo justifico siguiendo el algoritmo: $\{X \stackrel{?}{=} Y, Y \stackrel{?}{=} Z\} \xrightarrow{elim} \{Y \stackrel{?}{=} Z\} \xrightarrow{elim} \emptyset$

$S = \{X := Y\} \circ \{Y := Z\} = \{X := Y, X := Z\}$ ✓

II

No, porque si t es variable, un término s que tenga a t como variable libre ya no unifica; si t es función o predicado, basta con que s sea una función/predicado distinto que t para que no unifique.

III Haría un MGU entre cada término y una misma variable

Ejercicio 8

I $MGU\{T_1 \to T_2 \stackrel{?}{=} Nat \to Bool\} = \{T_1 := Nat, T_2 := Bool\}$

II $MGU\{T_1 \to T_2 \stackrel{?}{=} T_3\} = \{T_3 := T_1 \to T_2\}$

III $MGU\{T_1 \to T_2 \stackrel{?}{=} T_2\} \Rightarrow$ Falla (si hago swap + occurs-check)

IV $MGU\{(T_2 \to T_1) \to Bool \doteq T_2 \to T_3\} \Rightarrow$ Falla (si hago decompose + swap(1) + occurs-check)

V $MGU\{T_2 \to T_1 \to Bool \doteq T_2 \to T_3\} = \{T_3 := T_1 \to Bool\}$

VI $MGU\{T_1 \to Bool \doteq Nat \to Bool,\ T_1 \doteq T_2 \to T_3\} \Rightarrow$ Falla por clash (en $T_2 \to T_3 \doteq Nat$)

VII $MGU\{T_1 \to Bool \doteq Nat \to Bool,\ T_2 \doteq T_1 \to T_1\} = \{T_1 := Nat,\ T_2 \doteq Nat \to Nat\}$

VIII $MGU\{T_1 \to T_2 \doteq T_3 \to T_4,\ T_3 \doteq T_2 \to T_1\} \Rightarrow$ Falla por occurs-check en T_3

Ejercicio 9

I Intercambio del $\forall$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y)}\ ax.}{\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \forall Y.P(X,Y)}\ \forall_E}{\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash P(X,Y)}\ \forall_E}{\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \forall X.P(X,Y)}\ \forall_I}{\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \forall Y.\forall X.P(X,Y)}\ \forall_I}{\vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y) \Rightarrow \forall Y.\forall X.P(X,Y)}\ \Rightarrow_i$$

análogo

$\vdots$

$$\dfrac{}{\vdash \forall Y.\forall X.P(X,Y) \Rightarrow \forall X.\forall Y.P(X,Y)}$$

$$\emptyset \vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y) \iff \forall Y.\forall X.P(X,Y)$$

Guia 6 - LPO

Ejercicio 9

II -

$$\overline{\Gamma, P(x,y) \vdash P(x,y)}\ ax$$

$$\overline{\Gamma, P(x,y) \vdash \exists x. P(x,y)}\ \exists i$$

$$\overline{\Gamma, P(x,y) \vdash \exists y. \exists x. P(x,y)}\ \exists i$$

$$\overline{\Gamma \vdash \exists y. P(x,y)}\ ax$$

$$\overline{\Gamma \{\exists x. \exists y. P(x,y), \exists y. P(x,y)\} \vdash \exists y. \exists x. P(x,y)}\ \exists e$$

$$\overline{\exists x. \exists y. P(x,y) \vdash \exists x. \exists y. P(x,y)}\ ax$$

$$\overline{\exists x. \exists y. P(x,y) \vdash \exists y. \exists x. P(x,y)}\ \exists e$$

$$\overline{\vdash \exists x. \exists y. P(x,y) \Rightarrow \exists y. \exists x. P(x,y)}\ \Rightarrow i$$

análogo

$$\vdash \exists y. \exists x. P(x,y) \Rightarrow \exists x. \exists y. P(x,y)$$

$$\overline{\vdash \exists x. \exists y. P(x,y) \Leftrightarrow \exists y. \exists x. P(x,y}$$

III ·

X

$$\overline{\Gamma \vdash \exists x. \forall y. P(x,y)}\ ax$$

$$\overline{\Gamma, \forall y. P(x,y) \vdash \forall y. P(x,y)}\ ax$$

$$\overline{\Gamma, \forall y. P(x,y) \vdash P(x,y)}\ \forall e$$

$$\overline{\Gamma \vdash P(x,y)}\ \exists e$$

no puede pertenecer a fv(Γ)

$$\overline{\Gamma \vdash \exists x. P(x,y)}\ \exists I$$

$$\overline{\Gamma \{\exists x. \forall y. P(x,y)\} \vdash \forall y. \exists x. P(x,y)}\ \forall I$$

$$\overline{\vdash \exists x. \forall y. P(x,y) \Rightarrow \forall y. \exists x. P(x,y)}\ \Rightarrow i$$

IV

$$\overline{\forall x. P(x) \vdash \forall x. P(x)}\ ax$$

$$\overline{\forall x. P(x) \vdash P(x)}\ \forall e$$

$$\overline{\forall x. P(x) \vdash \exists x. P(x)}\ \exists I$$

$$\overline{\vdash \forall x. P(x) \Rightarrow \exists x. P(x)}\ \Rightarrow i$$

III

$$\Gamma \vdash \forall Y.P(X,Y) \quad \forall e$$

$$\Gamma \vdash P(X,Y) \quad \exists_I$$

$$\Gamma \vdash \exists X.P(X,Y)$$

$$\text{ax}$$

$$\exists X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \exists X.\forall Y.P(X,Y) \qquad \Gamma=\{\exists X.\forall Y.P(X,Y), \forall Y.P(X,Y)\} \vdash \forall Y.\exists X.P(X,Y) \quad \exists e$$

$$\exists X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \forall Y.\exists X.P(X,Y) \quad \Rightarrow i$$

$$\emptyset \vdash \exists X.\forall Y.P(X,Y) \Rightarrow \forall Y.\exists X.P(X,Y)$$

V

$$\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \forall X.\forall Y.P(X,Y) \quad \forall e$$

$$\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \forall Y.P(X,Y) \quad \{y:=x\}$$

$$\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash P(X,X) \quad \forall_I$$

$$\forall X.\forall Y.P(X,Y) \vdash \forall X.P(X,X) \quad \Rightarrow i$$

$$\emptyset \vdash \forall X.\forall Y(X,Y) \Rightarrow \forall X.P(X,X)$$

VI

$$\text{ax}$$

$$\exists X.P(X,Y), P(X,Y) \vdash P(X,Y) \quad \exists_I$$

$$\exists X.P(X,Y), P(X,Y) \vdash \exists Y.P(X,Y) \quad \exists_I$$

$$\text{ax}$$

$$\exists X.P(X,Y) \vdash \exists X.P(X,Y) \qquad \exists X.P(X,Y), P(X,Y) \vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y) \quad \exists e$$

$$\exists X.P(X,Y) \vdash \exists X.\exists Y.P(X,Y) \quad \Rightarrow i$$

$$\emptyset \vdash \exists X.P(X,Y) \Rightarrow \exists X.\exists Y.P(X,Y)$$

VII

1

$$\text{ax}$$

$$\Gamma, P(X) \vdash P(X) \quad \exists_I$$

$$\Gamma, P(X) \vdash \exists X.P(X) \quad \Rightarrow i \qquad \text{ax}$$

$$\Gamma \vdash P(X) \Rightarrow \exists X.P(X) \qquad \Gamma \vdash \neg \exists X.P(X) \quad \text{MT}$$

$$\Gamma \vdash \neg P(X) \quad \forall_I$$

$$\Gamma\{\neg \exists X.P(X)\} \vdash \forall X.\neg P(X) \quad \Rightarrow i$$

$$\vdash \neg \exists X.P(X) \Rightarrow \forall X.\neg P(X)$$

(2).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \exists X.\, P(x)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x) \vdash P(x)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P(x) \vdash \forall X.\, \neg P(x)}\,ax}{\Gamma, P(x) \vdash \neg P(x)}}{\Gamma, P(x) \vdash \bot}\,\neg e}{\Gamma \{\forall X.\, \neg P(X),\ \exists X.\, P(X)\} \vdash \bot}\,\exists e}{\forall X.\, \neg P(x) \vdash \neg \exists X.\, P(X)}\,\neg i}{\vdash \forall X.\, \neg P(x) \Rightarrow \neg \exists X.\, P(X)}\,\Rightarrow i$$

Ejercicio 13

σ se interpreta como "Si $X_1 - X_2$ es negativo, es porque $X_1 < X_2$"

El enunciado es verdadero.

Un ejemplo de interpretación con el valor de verdad opuesto puede ser el mismo pero tal que $f(X,Y)$ sea $Y-X$.

Ejercicio 14

I $X_1 + X_1 = succ(X_1) . succ(X_1)$

↳ satisface $\{X_1 := 0\}$

↳ no satisface $\{X_1 := 1\}$

II $(X_1 + 0 = X_2) \Rightarrow X_1 + X_2 = X_3$

↳ satisface $\{X_3 := 2 . X_1\}$

↳ No satisface $\{X_3 := 3 . X_1\}$

III $X_1 . X_2 \neq X_2 . X_3$

↳ satisface $\{X_1 := 2,\ X_2 := 3,\ X_3 := 2\}$ al revez

↳ no satisface $\{X_1 \neq X_3\}$

II $\forall X_1 .\ X_1 . X_2 = X_3$

↳ satisface $\{X_2 := 1,\ X_3 := X_1\}$

↳ no satisface $\{X_2 := 1,\ X_3 \neq X_1\}$