Señales básicas

Constante:

$$x(t) = A$$

Escalón unidad:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Signo:

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Pulso rectangular:

$$p(t) = u(t - T_0) - u(t - T_1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T_0 < t < T_1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Rampa:

$$r(t) = t \cdot u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Exponencial unilateral:

$$x(t) = e^{-at} \cdot u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^{-at} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Si $a > 0$: Exponencial decreciente.
Si $a < 0$: Exponencial creciente.

Coseno:

$$x(t - t_0) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f$$
$$\phi = -\omega t_0$$

Sinc:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\text{sinc}(0) = 1$$
$$\forall t \neq 0 \in \mathbb{Z} : \text{sinc}(t) = 0$$

Operaciones

Escalado en amplitud:

$$y(t) = a \cdot x(t)$$

$$a \in \mathbb{R}$$
$$\text{Si } a < 1: \text{ Atenuación.}$$
$$\text{Si } a > 1: \text{ Amplificación.}$$

Escalado en tiempo:

$$y(t) = x(at)$$

$$a \in \mathbb{R}^+$$
$$\text{Si } a < 1: \text{ Expansión.}$$
$$\text{Si } a > 1: \text{ Compresión.}$$

Inversión en tiempo:

$$y(t) = x(-t)$$

Si $x(t) = x(-t) : x$ es simétrica (par)
Si $x(t) = -x(-t) : x$ es antisimétrica (impar)

Desplazamiento en tiempo:

$$y(x) = x(t - t_0)$$

Si $t_0 > 0$: Retardo (Desplazamiento hacia la derecha)
Si $t_0 < 0$: Adelanto (Desplazamiento hacia la izquierda)

Derivación en tiempo:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Integración en tiempo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Suma y resta de señales:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

Producto de señales:

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Potencia y energía de señales

Potencia instantánea de una señal:

$$P(t) = x^2(t)$$

Energía de una señal en un intervalo:

$$E_x^T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$$

Energía de una señal:

$$E_x = \lim_{T\to\infty} E_x^T = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$$

Potencia de una señal en un intervalo:

$$P_x^T = \frac{E_x^T}{T} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$$

Potencia media de una señal:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} P_x^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$$

Ganancia de un sistema:

$$G = \frac{P_y}{P_x}$$

$P_x \equiv$ Potencia de la señal de entrada.
$P_y \equiv$ Potencia de la señal de salida.

Observaciones:

$E_x \geq 0$ y $P_x \geq 0$ ya que $x^2(t) \geq 0$

$E_x = 0$ si $x(t) = 0$
$P_x = 0$ si $E_x < \infty$

$x(t)$ tiene energía finita si $E_x < \infty$
$x(t)$ tiene potencia media finita si $0 < P_x < \infty$
Si una señal tiene potencia media finita, tiene energía infinita.
Existen señales con potencia media y energía infinitas.

La energía se expresa en Julios (J) y la potencia en Vatios (W)

Convoluciones

Expresión:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau)\, d\tau$$

Pasos:

1: Se invierte $h(t)$ para obtener $h(-\tau)$
2: Se desplaza $h(-\tau)$ a cada instante.
3: En cada desplazamiento se multiplica por $x(\tau)$ y se calcula el área.

Observaciones:

Tras invertir $h(t)$ para obtener $h(-\tau)$ el punto que estaba en 0 ahora corresponde a t y el punto que estaba en t_0 ahora corresponde a $t - t_0$.

Convolución de dos pulsos rectangulares:

Dados dos pulsos rectangulares:

- Uno con inicio en a, duración T_1 y amplitud A.
- Otro con inicio en b, duración T_2 y amplitud B.

El resultado de su convolución (siendo $T_1 < T_2$) resultará en un trapecio isósceles con:

- Altura: $A \cdot B \cdot T_1$.
- Base mayor con inicio en $a + b$ y duración $T_1 + T_2$.
- Base menor con inicio en $a + b + T_1$ y duración $T_2 - T_1$.

Si $T_1 = T_2 = T$ su convolución resultará en un triángulo isósceles con:

- Altura: $A \cdot B \cdot T$.
- Base con inicio en $a + b$ y duración $2T$.
- Vértice superior en $a + b + T$.

Delta de Dirac

Propiedades:

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$
$$\delta(0) \to \infty$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Multiplicación por una señal:

$$y(t) = x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Convolución con una señal:

$$y(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)$$
$$y(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$
$$y(t) = x(t - t_0) * \delta(t) = x(t - t_0)$$