MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN SIMPLE O CAMBIO DE VARIABLE

Si $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx,$

sea

$u = g(x)$

$\frac{du}{dx} = g'(x)$

$du = g'(x)dx$

Si F es una antiderivada de f,

entonces $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$

$$\int h(r(t)) \cdot r'(t)dt$$

$w = r(t)$

$\frac{dw}{dt} = r'(t)$

$dw = r'(t)dt$

$$\Rightarrow \int h(\underbrace{r(t)}_{w})\underbrace{r'(t)dt}_{dw} = \int h(w)dw$$

$$= H(w) + C$$

$$= H(r(t)) + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Dada la integral: $I = \int \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g(x)dx}_{dv}$

$$\cancel{\int dv} = \int g(x)dx$$

$$v = \int g(x)dx$$

Sean $\begin{matrix} u & = & f(x) \\ du & = & f'(x)dx \end{matrix}$, $\begin{matrix} dv & = & g(x)dx \\ v & = & \int g(x)dx \end{matrix}$

tal que

$$I = \int \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g(x)dx}_{dv} = \int udv = \boxed{uv - \int vdu}$$

NOTA

	Función a derivar	**Función a integrar**
1)	Función polinomial	Función trigonométrica
2)	Función polinomial	Función exponencial
3)	Función trigonométrica inversa	Cualquier función
4)	Función logarítmica	Cualquier función

Polinomio de grado

1) $I = \int \underbrace{(x^2+2x-2)}_{u} \underbrace{\cos(x)\,dx}_{dv}$

$I = \int x^3 \operatorname{sen}(4x-2)dx$

$y = x^2+2x-3$

2) $I = \int \underbrace{(x+2)}_{u} \underbrace{e^{4x}\,dx}_{dv}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

3) $I = \int \underbrace{\operatorname{arctg}(x^2)}_{u} \underbrace{\sqrt{x}\,dx}_{dv}$

$(\ln(u))' = \frac{1}{u} \cdot u'$

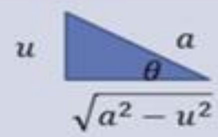
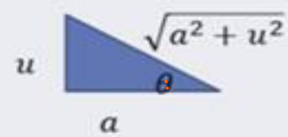
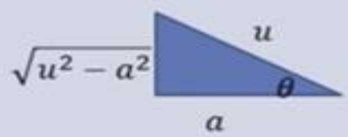
4) $I = \int \underbrace{\ln(x^2+1)}_{u} \underbrace{3\,dx}_{dv}$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Sea $u = f(x)$ una función de x. En muchos casos es posible calcular una integral efectuando una sustitución trigonométrica, y estas integrales son de la forma:

$$\int R\left(u, \sqrt{u^2+a^2}\right)du, \quad \int R\left(u, \sqrt{a^2-u^2}\right)du, \quad \int R\left(u, \sqrt{u^2-a^2}\right)du$$

Donde R es una función racional y a constante.
Se consideran los siguientes casos:

Expresión en el integrando	Sustitución trigonométrica	Triángulo rectángulo
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a\ sen(\theta)$ $du = a\cos(\theta)\,d\theta$ $\theta = arcsen\left(\frac{u}{a}\right)$ $\sqrt{a^2-u^2} = a\cos(\theta)$	
$\sqrt{a^2+u^2}$ $\sqrt{u^2+a^2}$	$u = a\tan(\theta)$ $du = a\sec^2(\theta)\,d\theta$ $\theta = arctan\left(\frac{u}{a}\right)$ $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec(\theta)$	
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a\sec(\theta)$ $du = a\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$ $\theta = arcsec\left(\frac{u}{a}\right)$ $\sqrt{u^2-a^2} = a\tan(\theta)$	

$u = a\,sen\,\theta$

$Sen\,\theta = \frac{u}{a} = \frac{CO}{H}$

$u = a\,tg\,\theta$

$tg\,\theta = \frac{u}{a} = \frac{CO}{CA}$

$u = a\sec\theta$

$Sec\,\theta = \frac{u}{a} = \frac{H}{CA}$

$$\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{(a\sec\theta)^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}$$
$$= \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)} = \sqrt{a^2tg^2\theta} = a\,tg\,\theta$$

INTEGRACIÓN MEDIANTE FRACCIONES PARCIALES

Dada la función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grado m y n respectivamente. Si $m<n$, Se presentan dos casos:

Caso 1.

1. Si $Q(x)=(x-c_1)(x-c_2)\bullet\cdots\bullet(x-c_k)$ (si los factores son lineales y ninguno se repite). entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-c_1}+\frac{A_2}{x-c_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-c_k}; \qquad A_i : i=1,\ldots,k \text{ constantes}$$

Por ejemplo:

$$Q(x)=(2x+3)(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-c}$$

2. Si $Q(x)=(ax+b)^k$, (si algún factor lineal se repite). entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k};$$

Por ejemplo

$$Q(x)=(2x-1)^3$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}+\frac{C}{(2x-1)^3}$$

Caso 2.

1. Si $Q(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\bullet\ldots\bullet(a_kx^2+b_kx+c_k)$ (si los factores son cuadráticos irreducibles y ninguno se repite), entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{a_kx^2+b_kx+c_k}$$

Por ejemplo

$$Q(x)=(x^2+2x+4)(x^2+9)(3x^2-2x+13)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{Dx+E}{x^2+9}+\frac{Fx+H}{3x^2-2x+13}$$

2. Si $Q(x)=\left(ax^2+bx+c\right)^k$ (si algún factor cuadrático irreducible se repite), entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k};$$