Kalkulua

Integral Mugatua

Behe- eta goi-baturak, Riemann-en integrala eta adierazpen geometrikoa

Endika Trecu Arruabarrena

May 4, 2017

Aurkibidea

5. Gaia
Integral Mugatua

5.1 Behe- eta goi-baturak

Izan bedi $f(x)$ funtzioa bornatua $[a,b]$ tartean.

5.1. Definizioa. *$[a,b]$ tarteko puntuen $P = \{x_0, x_1, .., x_k\}$ multzoa, non $a = x_o < x_1 < x_2 < .. < x_k = b$ baita, $[a,b]$ tartearen partiketa bat da.*

$I_i = [x_{i-1}, x_i]$ bada, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ balioa I_i azpitaldearen luzera da.
$\delta(P) = \max\limits_{i=1,..,k} \Delta x_i$ balioari P partiketaren luzera deritzo.

5.2. Definizioa. *Har ditzagun $m_i = \inf\limits_{x \in I_i} f(x)$ eta $M_i = \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$, $i = 1, .., k$.*

$\overline{S}(P) = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i$ baturari goi-batura deritzo.

$\underline{S}(P) = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i$ baturari behe-batura deritzo.

5.3. Propietatea. *1. $\overline{S}(P)$ eta $\underline{S}(P)$ beti existitzen dira.*

2. P_1 eta P_2 $[a,b]$ tartearen bi partiketa badira, $\delta(P_1) < \delta(P_2)$ izanik, $\underline{S}(P_1) \leq \underline{S}(P_2)$ eta $\overline{S}(P_1) \geq \overline{S}(P_2)$ beteko dira.

3. P_1 eta P_2 $[a,b]$ tartearen bi partiketa badira, beti betetzen da $\underline{S}(P_1) \leq \overline{S}(P_2)$

5.2 Riemann-en integralaren definizioa

5.4. Definizioa. *Izan bedi* $P = \{x_i\}^k{}_{i=1}$ $[a,b]$ *tartearen partiketa bat,* I_i *azpitarte bakoitzean* $\xi_i \in I_i$ *puntu bat hartuko dugu.*

$\sigma(P) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ *baturari Riemann-en batura deritzo.*

5.5. Definizioa. $f(x)$ *funtzioa* $[a,b]$ *tartean Riemann-en zentzuan integragarria da* $\lim_{n\to\infty} \sigma(P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k_n} f({\xi_i}^{(n)})\Delta x_i^{(n)} = I$ *existitzen bada, non* $P_n = \{{x_o}^{(n)}, {x_1}^{(n)}, ..{x_{k_n}}^{(n)}\}$

partiketen edozein segida baita, $\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$ *izanik, eta* ${\xi_i}^{(n)} \in I^{(n)}$ *puntuak edozein baitira,* $i = 1,..,k_n$.

I *limiteari* $f(x)$ *funtzioaren* $[a,b]$ *tarteko integral mugatu deritzo eta* $I = \int_a^b f(x)dx$ *idatziko dugu.*

a *eta* b *integral mugatuaren integrazio-mugak dira.*

5.6. Propietatea. $[a,b]$ *tartean edozein* P *partiketa hartuz,* $\underline{S}(P) \leq \sigma(P) \leq \overline{S}(P)$ *beteko da.*

5.7. Teorema. $f(x)$ *funtzioa Riemann-en zentzuan integragarria bada* $[a,b]$ *tartean,* $\lim_{n\to\infty} \underline{S}(P_n) = I = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(P_n)$ *beteko da, eta alderantziz ere bai.*

5.8. Teorema. *Baldintza beharrezkoa*

$f(x)$ $[a,b]$ *tartean integragarria bada,* $[a,b]$ *tartean bornatua da.*

5.9. Adibidea. Aurrekoa ez da nahikoa integragarria dela esateko. Frogatzeko:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \text{ denean,} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \text{ denean} \end{cases}$$

$[0,1]$ tartea eta edozein P partiketa hartuko dugu.

$\xi_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(\xi_i) = 1 \Rightarrow \sigma(P) = \sum_{i=1}^{k} 1\Delta x_i = 1 - 0 = 1.$

$\xi_i \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(\xi_i) = 0 \Rightarrow \sigma(P) = \sum_{i=1}^{k} 0\Delta x_i = 0.$

Ikusi daitekeen bezala, Riemann-en baturen emaitza desberdina da $[0,1]$ tartean, tarte berean funtzioa bornatua izan arren. Horregatik, irizpide gehiago ezarri behar zaizkio funtzio bornatu bati tarte batean edo bere osotasunean integragarria izan dadin. Hau da, integragarria izateak bornatua dela adierazten du, baina ezin da beste zentzuan aplikatu, eta horregatik beste irizpide batzuk gehitu beharko dira funtzio bat integragarria dela ondorioztatzeko.

5.10. Teorema. *Integral mugatuaren existentzia-irizpideak.*

Izan bedi $f(x)$ *funtzio bornatua* $[a,b]$ *tartean.*

1. $f(x)$ *monotonoa bada* $[a,b]$ *tartean, integragarria da bertan.*
2. $f(x)$ *jarraitua bada* $[a,b]$ *tartean, integragarria da bertan.*

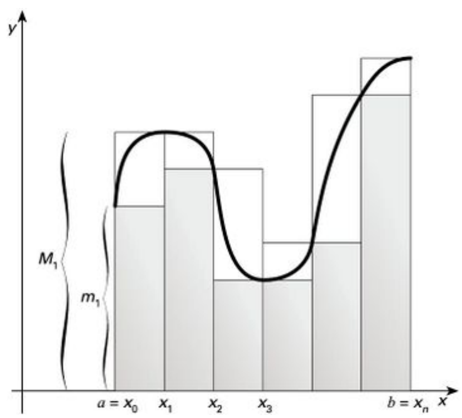
3. *$f(x)$funtzioak $[a, b]$ tartean etenune kopuru finitua edo infinitu zenbakigarria baditu, integragarria da tartean.*

4. *$f(x)$ integragarria bada $[a, b]$ tartean, $|f(x)|$ ere integragarria da tartean, eta $|\int f(x)dx| \leq \int |f(x)dx|$ beteko da.*

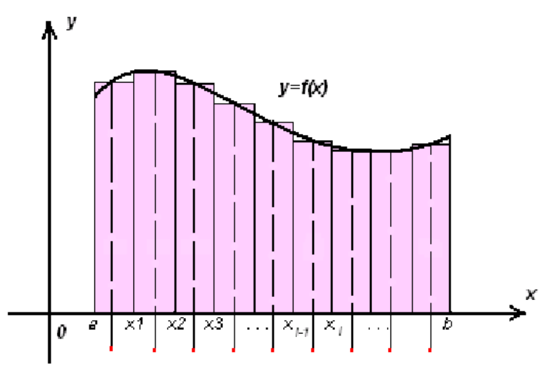
5. *$f(x)$ eta $g(x)$ integragarriak badira $[a, b]$ tartean, $f(x) \cdot g(x)$ ere bai.*

5.3 Adierazpen Geometrikoa

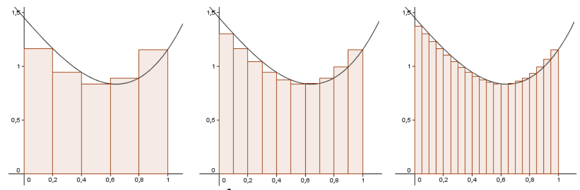
Behe- eta goi-baturaren adierazpen grafikoa irudian ikusten denarekin azaldu daiteke. Goi-batura laukizuzen handien azaleren batura da, hauetako bakoitzaren azalera $M_i \Delta x_i$ delako (altuera bider zabalera). Behe-baturaren kasuan, laukizuzen txikien azaleren batura izango da.



Riemann-en baturan, berriz, maximoaren edo minimoaren y parametroa hartu beharrean, puntuak arbitrarioki aukeratzen dira. Horrela ere, baturaren emaitza laukizuzen horien azaleren batura izango da ere bai.



Gainera, beste irudi honetan (EZ da aurretik aipatutako baturarik, bakarrik adibide bat propietate bat azaltzeko grafikoki) ikus daitekeen moduan, zenbat eta laukizuzen gehiago izan $[a, b]$ tarte berdinean (laukizuzenak estuagoak eginez) batura (goi-batura, behe-batura edo Riemann-en batura) tartearen mugen, funtzioaren eta OX ardatzaren arteko azalerari gehiago gerturatuko zaio. Horregatik esaten da Riemann-en batura batean laukizuzen kopurua infinitora gerturatzen deneko, hau da, P_n partiketan n infinitura gerturatzen deneko limitea $[a, b]$ tartean funtzioaren eta OX ardatzaren arteko azalera dela (funtzioa OX ardatzaren azpitik dagoenean izan ezik, bertan baturaren emaitza -azalera izango da).

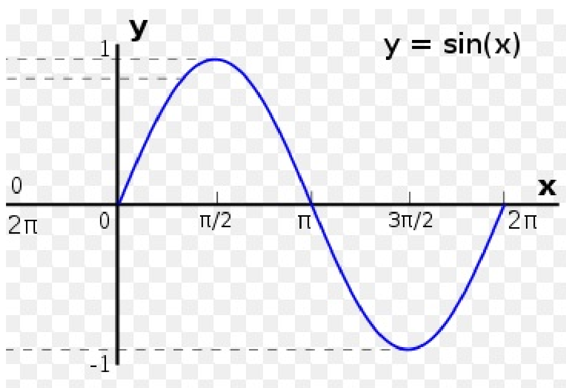


Beraz, laburbilduz, integral mugatua $\int_a^b f(x)dx$ izanik, bere balioa f(x) funtzioak eta $x = a$, $y = 0$ eta $x = b$ zuzenek mugatzen duten azalera izango da. .

5.4 Ariketak

- 1.21 ariketa

  $y = \sin x$ funtzioaren eta $y = 0$ zuzenaren arteko azalera kalkulatu, $[0, 2\pi]$ tartean.

  Ikusten den moduan, zati batean ($[\pi, 2\pi]$ tartean) integratzean emaitza negatiboa izango litzake, eta bestean ($[0, \pi]$) positiboa. Gainera, bi azalerak guztiz berdinak dira, beraz 0tik 2πra kalkulatuko bagenu, integral mugatua 0 izango zen. Bi azalerak berdinak direla kontuan izanik, bakarrik lehen tartea hartuko dugu, 0tik πra, eta emaitza hori birekin biderkatuko dugu benetako azalera lortzeko.

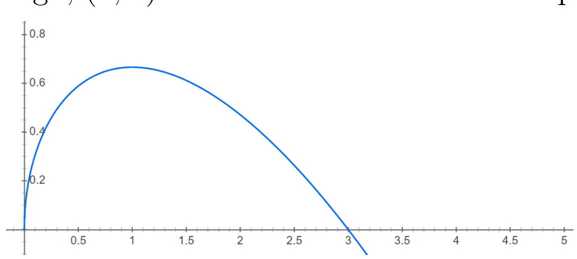
  $S = 2\int_0^\pi \sin x dx$

  $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = 2$

  $S = 2\int_0^\pi \sin x dx = 2 \cdot 2 = 4$

  4 izango da azalera.

- 4.4 ariketa $9y^2 = x(3-x)^2$ funtzioak OX ardatzaren inguruan biratzean sortzen den azalera kalkulatuko dugu, $(0, \pi)$ tartean. Funtzioaren adierazpen grafikoa:

  $9y^2 = x(3-x)^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x(3-x)^2}{9} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x(3-x)^2}{9}} = \frac{(3-x)\sqrt{x}}{3}$

Azalera mota hauek kalkulatzeko, hurrengo formula hau erabiltzen da:

$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$

Beraz, gure azalera kalkulatzeko:

$$A = 2\pi \int_0^\pi \frac{(3-x)\sqrt{x}}{3}\sqrt{1+((\frac{(3-x)\sqrt{x}}{3})')^2}dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (3-x)\sqrt{x}\sqrt{1+(\frac{1-x}{2\sqrt{x}})^2}dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (3-x)\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1-2x+x^2}{4x}}dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (3-x)\sqrt{x}\sqrt{\frac{1+2x+x^2}{4x}}dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (3-x)\sqrt{x}\frac{1+x}{2\sqrt{x}}dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (3-x)\frac{1+x}{2}dx = \frac{\pi}{3}\int_0^\pi (3-x)(1+x)dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_0^\pi (3+3x-x-x^2)dx = \frac{\pi}{3}\int_0^\pi (-x^2+2x+3)dx = \frac{\pi}{3}(-[\tfrac{x^3}{3}]_0^\pi + [x^2]_0^\pi + [3x]_0^\pi]) =$$

$$= \frac{\pi}{3}(-\frac{\pi^3}{3}+\pi^2+3\pi) = -\frac{\pi^4}{9}+\frac{\pi^3}{3}+\pi^2$$ izango da azalera, unitate karratutan.