Zenbaki Teoria. Ariketak

Zenbaki osoak. Zenbaki lehenak. Zatigarritasuna

1. Existitzen al dira honako ekuazioak betetzen dituzten $x, y, z \in \mathbb{Z}$?

   1.1 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ zenbaki osoak non $3x + 6y + 9z = 1000$

   1.2 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ zenbaki osoak non $6x + 9y + 15z = 107$

   1.3 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ zenbaki osoak non $5x + 10y + 20z = 1003$

2. Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ hiru zenbaki oso positibo.

   2.1 Aurki itzazu a, b eta c zenbaki osoen balioak honako baldintza beteko dutenak: $31 \mid (5a + 7b + 11c)$

   2.2 a, b eta c zenbaki osoek $31 \mid (5a + 7b + 11c)$ baldintza betetzen dutela jakinda, froga ezazu honakoak betetzen direla:

   - $31 \mid (21a + 17b + 9c)$
   - $31 \mid (6a + 27b + 7c)$

3. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Baldin $b \mid a$ eta $b \mid (a + 2)$, froga ezazu $b = 1$ edo $b = 2$.

4. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$ eta biak bakoitiak. Froga ezazu $a^2 + b^2$ zenbakia 2-ren multiploa dela baina ez 4-ren multiploa, hau da, $2 \mid (a^2 + b^2)$ baina $4 \nmid (a^2 + b^2)$.

5. Izan bedi $n \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki oso positiboa.

   5.1 Froga ezazu $n \geq 2$ zenbakia konposatua bada, orduan p zenbaki lehenen bat existitzen dela non $p \mid n$ eta $p \leq \sqrt[2]{n}$.

   5.2 Aurreko atalean frogatutako ondorioa erabiliz, azter ezazu honakoak zenbaki lehenak diren: $n = 811$, $n = 467$, $n = 911$.

6. Izan bedi $n \in \mathbb{Z}^+$, eta har dezagun r zenbakiaren adierazpena 10 oinarrian

$$r = r_0 + r_1 10 + \cdots + r_{n-1} 10^{n-1} + r_n 10^n$$

non $0 \leq r_i \leq 9$ diren $1 \leq i \leq n - 1$ eta $0 < r_n \leq 9$ den. Zatigarritasunaren propietateak erabiliz froga ezazu $9 \mid r$ baldin eta soilik baldin $9 \mid r_n + r_{n-1} + \cdots + r_0$.

7. Izan bedi $n \in \mathbb{Z}^+$, eta har dezagun bere adierazpena 10 oinarrian:

$$n = r_k 10^k + r_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + r_1 10 + r_0$$

Zatigarritasunaren propietateak erabiliz honakoak froga itzazu:

   7.1 $2 \mid n$ baldin eta soilik baldin $2 \mid r_0$.

   7.2 $4 \mid n$ baldin eta soilik baldin $4 \mid (r_1 10 + r_0)$.

Zatiketa Euklidestarra. Zatitzaile komunetako handiena

8. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = 60$ bada eta $zkh(a, b) = 12$ bada, zeintzuk dira zenbaki hauek? Eta, $a + b = 75$ bada?

9. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ pare bakoitzarekin kalkula ezazu $zkh(a, b)$ Euklidesen algoritmoa erabiliz. Ondoren, adieraz ezazu kalkulatu berri duzun $zkh(a, b)$ balioa a eta b-ren konbinazio lineal moduan. a eta b zenbaki lehen erlatiboak al dira?

   9.1 $a = 231, b = 1820$;

   9.2 $a = 1369, b = 2597$;

   9.3 $a = 2689, b = 4001$;

   9.4 $a = 7982, b = 7983$;

   9.5 $a = 102, b = 28$.

10. Euklidesen algoritmoa erabiliz kalkula ezazu $zkh(-187, 154)$.

11. Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, a eta b zenbaki lehen erlatiboak izanik, hau da, $zkh(a, b) = 1$. Froga ezazu $a \mid bc$ bada, orduan $a \mid c$ betetzen dela.

12. Izan bitez $a, b, d \in \mathbb{Z}^+$, non $d = zkh(a, b)$ den. Froga ezazu $zkh(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ dela.

13. a eta b zenbaki lehen erlatiboak badira, froga ezazu, bietako bat, edo $zkh(a - b, a + b) = 1$ edo $zkh(a - b, a + b) = 2$ beteko dela.

14. $n \in \mathbb{Z}^+$ izanik, kalkula itzazu $zkh(n, n + 1)$ eta $mkt(n, n + 1)$.

15. Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$.

   15.1 Demagun a eta b zenbaki lehen erlatiboak direla. Froga ezazu c zenbakia $a$ren eta $b$ren multiplo komuna bada, orduan abrena ere badela, hau da, $a \mid c$ eta $b \mid c$ orduan $ab \mid c$.

   15.2 $zkh(a, b) \neq 1$ bada, $a \mid c$ eta $b \mid c$ izanik, posible al da $ab \mid c$ ondoriora iristea?

16. Kalkula ezazu $mkt(500, 120)$ aritmetikaren oinarrizko teorema erabiliz, (zenbaki lehenen biderketa gisa deskonposatuz).

17. Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Froga ezazu, $d = a + bc$ bada, $zkh(b, d) = zkh(a, b)$ dela.

18. Izan bitez $a, b, k \in \mathbb{Z}^+$. Froga ezazu $zkh(ka, kb) = k\ zkh(a, b)$ dela.

19. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki oso positiboak.

   19.1 $p \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki lehena izanik, honakoa froga ezazu.

$$p \mid ab \quad \text{bada,} \quad p \mid a \text{ edo } p \mid b.$$

   19.2 $p \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki lehena ez bada, ondorio bera froga dezakegu? Hala ez bada, kontradibide bat eman ezazu.

Ariketak. Erlazioak

(8)

$\mathbb{R}^2$ multzoan, $(x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2)$ baldin $x_1\cdot x_2 = y_1\cdot y_2$

Bihurkorra? Bai!

$\forall (x_1,x_2)$ $\quad (x_1,x_2)\,R\,(x_1,x_2)$ baldin $x_1\cdot x_2 = x_1\cdot x_2$

$(x_1,x_2)\,R\,(x_1,x_2) \underset{\text{R-ren det}}{\Rightarrow} x_1\cdot x_2 = x_1\cdot x_2$ betetzen da berdintza

Simetrikoa? Bai!

$\forall (x_1,x_2)(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ $(x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2) \Rightarrow (x_1,y_2)\,R\,(x_1,x_2)$

$(x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2) \underset{\text{R-ren det}}{\Rightarrow} x_1\cdot x_2 = y_1\cdot y_2 \Rightarrow y_1\cdot y_2 = x_1\cdot x_2 \Rightarrow (y_1,y_2)\,R\,(x_1,x_2)$

Iragankorra?

$\forall (x_1,x_2)(y_1,y_2)(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ $(x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2) \wedge (y_1,y_2)\,R\,(z_1,z_2) \Rightarrow (x_1,x_2)\,R\,(z_1,z_2)$

$(x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2) \underset{\text{R-ren det}}{\Rightarrow} \{x_1\cdot x_2\} = y_1\cdot y_2$

eta

$(y_1,y_2)\,R\,(z_1,z_2) \Rightarrow y_1\cdot y_2 = z_1\cdot z_2$

$\Rightarrow x_1\cdot x_2 = z_1\cdot z_2 \underset{\text{R-ren det}}{\Rightarrow} (x_1,x_2)\,R\,(z_1,z_2)$

$\mathbb{R}'$: $(x_1,x_2)\,\mathbb{R}'(y_1,y_2)$ baldin $x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2$ eta $x_1 \cdot y_1 \geq 0$

Bihurkorra? Bai!

$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}'$ $(x_1,x_2) R (x_1,x_2)$ Baldin $x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$ eta $x_1 \cdot x_1 \geq 0$

$(x_1,x_2) R (x_1,x_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = x_1 \cdot x_2 \\ x_1 \cdot x_1 \geq 0 \end{cases}$ → Betetzen da, zenbaki bat zenbaki berarekin biderkatuz, beti izango baita 0 edo handiagoa.

Simetrikoa? Bai!

$\forall (x_1,x_2) \underset{(y_1,y_2)}{\in} \mathbb{R}'$ $(x_1,x_2) R (y_1,y_2) \Rightarrow (y_1,y_2) R (x_1,x_2)$

$(x_1,x_2) R (y_1,y_2) \underset{\text{R-ren def}}{\Rightarrow} \left.\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 = x_1 \cdot x_2 \\ x_1 \cdot y_1 \geq 0 \Rightarrow y_1 \cdot y_2 \geq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (y_1,y_2) R (x_1,x_2)$

Iragankorra?

$\forall (x_1,x_2) (y_1,y_2) (z_1,z_2) \in \mathbb{R}'$ $(x_1,x_2) R (y_1,y_2) \wedge (y_1,y_2) R (z_1,z_2) \Rightarrow (x_1,x_2) R (z_1,z_2)$

$(x_1,x_2) R (y_1,y_2) \underset{\text{R-ren def}}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1 x_2 = y_1 y_2 \\ x_1 \cdot y_1 \geq 0 \end{cases}$

eta

$(y_1,y_2) R (z_1,z_2) \Rightarrow \begin{cases} y_1 y_2 = z_1 \cdot z_2 \\ y_1 \cdot z_1 \geq 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = z_1 \cdot z_2 \\ \Rightarrow x_1 \cdot z_1 \geq 0 \end{array}\right\} \underset{\text{R-ren def}}{\Rightarrow} (x_1,x_2) R (z_1,z_2)$

Betetzen dute baliokidetasun erlazioa.

10

$\mathbb{R}^2$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa:

$$\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1,x_2)\, R\, (y_1,y_2) \text{ baldin } x_1 = y_1$$

Bihurkorra? Bai!

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1,x_2)\, R\, (x_1,x_2)$$

$$(x_1,x_2)\, R\, (x_1,x_2) \underset{\substack{R\text{-ren}\\ \text{def}}}{\Rightarrow} x_1 = x_1$$

Simetrikoa? Bai!

$$\forall (x_1,x_2),(y_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1,x_2)\, R\, (y_1,y_2) \Rightarrow (y_1,y_2)\, R\, (x_1,x_2)$$

$$(x_1,x_2)\, R\, (y_1,x_2) \underset{\substack{R\text{-ren}\\ \text{def}}}{\Rightarrow} x_1 = y_1 \Rightarrow y_1 = x_1 \underset{\substack{R\text{-ren}\\ \text{def}}}{\Rightarrow} (y_1,x_2)\, R\, (x_1,x_2)$$

Iragankorra?

$$\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1,x_2)\, R\, (y_1,x_2) \wedge (y_1,x_2)\, R\, (z_1,z_2) \Rightarrow (x_1,x_2)\, R\, (z_1,z_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1,x_2)\, R\, (y_1,x_2) \underset{\substack{R\text{-ren}\\ \text{def}}}{\Rightarrow} x_1 = y_1 \\ \text{eta} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{eta} \\ (y_1,x_2)\, R\, (z_1,z_2) \Rightarrow y_1 = z_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = z_1 \underset{\substack{R\text{-ren}\\ \text{def}}}{\Rightarrow} (x_1,x_2)\, R\, (z_1,z_2)$$

Aritmetika. Erlazioak

7

$\forall x, y \in \mathbb{N}$ $\quad xRy$ baldin $3 \mid x^2 - y^2$

a)

Frogatu baliokidetasun erlazioa.

Bihurkorra? Bai!

$\forall x \in \mathbb{N}$ $\quad xRx$ baldin $3 \mid x^2 - x^2$

$xRx \underset{\text{R-ren def}}{\Rightarrow} 3 \mid x^2 - x^2 \Rightarrow 3 \mid 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ non $0 = 3k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}$

Simetrikoa? Bai!

$\forall x, y \in \mathbb{N}$ $\quad xRy$ baldin $3 \mid x^2 - y^2$ $\quad xRy \Rightarrow yRx$

$xRy \underset{\text{R-ren def}}{\Rightarrow} 3 \mid x^2 - y^2 \Longrightarrow 3 \mid y^2 - x^2 \Rightarrow yRx$

Iragankorra?

$\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ $\quad xRy \wedge yRz \Rightarrow \cancel{x}Rz$ baldin $3 \mid x^2 - y^2$

$xRy \Rightarrow 3 \mid x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - \cancel{y^2} = 3k$

eta

$\cancel{x}Rz \Rightarrow 3 \mid y^2 - z^2 \Rightarrow \cancel{y^2} - z^2 = 3k \Rightarrow x^2 - z^2 = 3k \Rightarrow 3 \mid x^2 - z^2 \Rightarrow xRz$

b)

$[0] = \{x \in \mathbb{N}$ non $xR0\} = \{x \in \mathbb{N}$ non $3 \mid x^2\} = \{[3], [6], [9], [12]\}$

$[1] = \{x \in \mathbb{N}$ non, $xR1\} = \{x \in \mathbb{N}$ non $3 \mid x^2 - 1\} = \{[1], [2], [4], [5]\}$

Iragankorra? $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Z} \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Baldin, $x = 2^n \cdot y$

$$\left.\begin{array}{l} xRy \Rightarrow x = 2^n \cdot y \xRightarrow{\{n=0\}} x = y \\ \text{eta} \\ yRz \Rightarrow y = 2^n \cdot z \xRightarrow{\{n=0\}} y = z \end{array}\right\} ; \; x = z \xRightarrow{\{n=0\}} x = 2^n \cdot z \Rightarrow xRz$$

Baliokidetasun klaseak: $[1], [2], [3], [4]$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z}^+ \text{ non } (x,1) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ \text{ non } x = 2^n \cdot 1, n \in \mathbb{Z}\text{-rea betetzen}\} =$

$= \{1, 2, 4, 8 \ldots\} = [2] = [4]$

~~$[2] = \{x \in \mathbb{Z}^+ \text{ non } xR2\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ \text{ non } x = 2^n \cdot 2, n \in \mathbb{Z}\text{-rea betetzen}$~~

~~$= \{1,$~~

$[3] = \{x \in \mathbb{Z}^+ \text{ non } xR3\} = \{x \in \mathbb{Z}^+ \text{ non } x = 2^n 3, n \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{3, 6, 12 \ldots\}$

Partizioa
(zatidura multzoa) $\mathbb{Z}^+/R = \{[1], [3], [5] \ldots\}$

5

Frogatuta geratzen da ordena erlazioa dela

Totala? Partziala?

Kontra adibidea:

$(x_1, y_1) = (3,5)$

$(x_2, y_2) = (5,7)$

$(3,5) R (5,7)$ $(5,7) R (3,5)$

$3 \nmid 5 \wedge 7 \nmid 5$ $5 \nmid 3 \wedge 5 \nmid 7$

Erlazioa ez da izango totala. $\boxed{\text{Partziala}}$

6

$\mathbb{Z}^+$ multzoan xRy baldin $x = 2^n y,\ n \in \mathbb{Z}$

Egiaztatu baliokidetasun erlazioa dela,

Bihurkorra?

$\forall x \in R \Rightarrow xRx$ baldin $x = 2^n \cdot x, n \in \mathbb{Z}$

$xRx \Rightarrow x = 2^n \cdot x \underset{n=0}{\Rightarrow} x = 1 \cdot x \Rightarrow \boxed{x = x}$

Simetrikoa? $\forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow xRy \Rightarrow yRx$ baldin $x = 2^n \cdot y\ n \in \mathbb{Z}$

$xRy \Rightarrow x = 2^n \cdot y$

eta

$yRx \Rightarrow y = 2^n \cdot x$

$n=0$

$x = y$

eta

$y = x$

5 Arilketak. Erlazioak

$\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ multzoan, $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ baldin $x_1 | x_2$ eta $y_2 | y_1$

Bihurkorra? Bai!

$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \quad (x_1, y_1) R (x_1, y_1)$ baldin $x_1 | x_1$ eta $y_1 | y_1$

$$(x_1, y_1) R (x_1, y_1) \underset{R\text{-ren det}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x_1 | x_1 \\ \text{eta} \\ y_1 | x_1 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{Zatig 1. prop}$$

Antisimetrikoa?

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^* \quad (x_1, y_1) R (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) R (x_1, y_1) \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ baldin $x_1 | x_2 \wedge y_2 | y_1$

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \underset{R\text{-ren det}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x_1 | x_2 \\ \wedge \\ y_2 | x_1 \end{array} \right.$$

$$(x_2, y_2) R (x_1, y_1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 | x_1 \\ y_1 | y_2 \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ Berez betetzen da. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Zatig. 2. prop $x_1 = x_2$ edo $\cancel{x_1 = -x_2}$ $\mathbb{Z}^+$-ean

Iragankorra?

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{Z}^{+2} \quad (x_1, y_1) R (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) R (x_3, y_3) \Longrightarrow (x_1, y_1) R (x_3, y_3)$

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 | x_2 \\ \text{eta} \\ y_2 | x_1 \end{array} \right.$$

$\wedge$ R-ren det

$$(x_2, y_2) R (x_3, y_3) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 | x_3 \\ \text{eta} \\ y_3 | y_2 \end{array} \right.$$

Zatig. 3. prop $\Longrightarrow$ * $a | b \wedge b | c \Longrightarrow a | c$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 | x_3 \\ y_3 | x_1 \end{array} \right\} \text{R-ren det} \Longrightarrow (x_1, y_1) R (x_3, y_3)$$

Antisimetrikoa?

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$
$$(a,b)\, R\, (c,d) \wedge (c,d)\, R\, (a,b) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$$

$$(a,b)\, R\, (c,d) \xRightarrow[\text{R-ren def}]{} a \leq c$$
$$(c,d)\, R\, (a,b) \xRightarrow[\text{R-ren def}]{} c \leq a$$
$$\Rightarrow a = c \text{ eta } b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$$

Baina $b = d$ ezin da adierazi, beraz ez da antisimetrikoa.

Kontra adibidea:

$(a,b) = (1,2)$
$(c,d) = (1,3)$

$(1,2)\, R\, (1,3)$; $1 \leq 1$

$(1,3)\, R\, (1,2) \Rightarrow (1,2) \neq (1,3)$; $1 \leq 1$

Iragankorra?

$$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$
$$(a,b)\, R\, (c,d) \text{ eta } (c,d)\, R\, (e,f) \Rightarrow (a,b)\, R\, (e,f)$$

$(a,b)\, R\, (c,d) \Rightarrow a \leq c$

eta

$(c,d)\, R\, (e,f) \Rightarrow c \leq e$

$\Rightarrow a \leq e \Rightarrow (a,b)\, R\, (e,f)$

Antisimetrikoa? Ez!

$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

$xRy \overset{R\text{-ren def}}{\Rightarrow} x+y \Rightarrow$ bakoitia

eta

$yRx \underset{R\text{-ren def}}{\Rightarrow} y+x \Rightarrow$ bakoitia

$\not\Rightarrow \quad x = y$

Kontra adibidea:

$x = 1 \quad x+y \Rightarrow 1+2 = 3$

$y = 2 \quad y+x \Rightarrow 2+1 = 3$

$\Rightarrow x \neq y \Rightarrow 1 \neq 2$

Iragankorra? Ez!

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$xRy \overset{R\text{-ren def}}{\Longrightarrow} x+y =$ bak

eta

$yRz \underset{R\text{-ren def}}{\Longrightarrow} y+z =$ bak

$\not\Rightarrow \quad x+z =$ bak $\Rightarrow xRz$

Kontra adibidea:

$x = 1 \quad 1R2 \Rightarrow 1+2 = 3$

$y = 2 \quad 2R3 \Rightarrow 2+3 = 5$

$z = 3 \quad 1R3 \Rightarrow 1+3 = 4$

g)

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ multzoan $(a,b) R (c,d)$ baldin $a \leq c$

Bihurkorra? Bai!

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a,b) R (a,b) \quad a \leq a$

Simetrikoa? Ez!

$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (a,b) R (c,d) \Rightarrow (c,d) R (a,b)$

$(a,b) R (c,d) \Rightarrow a \leq c \overset{Ez}{\not\Rightarrow} c \leq a \Rightarrow (c,d) R (a,b)$.

Kontra adibidea:

$a = 1$

$b = 2 \quad (a,b) = (1,2) \quad (1,2) R (3,4)$

$c = 3 \quad (c,d) = (3,4) \quad \Downarrow$

$d = 4$

$1 \leq 3 \not\Rightarrow 3 \leq 1 \not\Rightarrow (3,4) R (1,2)$

Iragankorra?

$\forall x,y,z \in A \quad xRy \wedge \cancel{x}Rz \Rightarrow xRz$

Kontra adibidea:

$x=3$ $\quad 3R2 \wedge 2R3 \Rightarrow 3\not R3$
$y=2$
$z=3$

$R_5 = A\times A$

Bikorkorra? Bai!

Simetrikoa? Bai!

Antisimetrikoa? Ez!

$\forall x,y \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

Kontra adibidea:

$x=1$ $\quad 1R2 \wedge 2R1 \Rightarrow 1\neq 2$
$y=2$

Iragankorra? Bai!

2

c)

R multzoan xRy baldin Batura bakoitia bada.

Bikorkorra? Ez!

$\forall x \in Z \quad xRx$

$xRx \Rightarrow x+x \Rightarrow 2x \not\Rightarrow$ Bakoitia

Kontra adibidea:

$x=5$ $\quad 2x \Rightarrow x=10$

Simetrikoa? Bai!

$\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad xRy \Rightarrow yRx$

$xRy \underset{R\text{-}def}{\Rightarrow} x+y = \text{Bakoitia} = y+x \underset{R\,def}{\Rightarrow} yRx$!

Simetrikoa? Bai!

$\forall x,y \in A \quad xRy \Rightarrow yRx$

Antisimetrikoa? Bai!

$\forall x,y \in A \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

Iragankorra? Bai!

$\forall x,y,z \in A \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$R_3 = \{(1,2)\}$

Bihurkorra? Ez!

$\forall x \in A \quad xRx$

Kontra Adibidea: $x=1 \quad 1 \not R 1$

Simetrikoa? Ez!

$\forall x,y \in A \quad xRy \Rightarrow yRx$

Kontra Adibidea: $x=1$, $y=2$ $\quad 1R2 \Rightarrow 2 \not R 1$

Antisimetrikoa? Bai!

$\forall x,y \in A \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

Iragankorra? Bai!

$\forall x,y,z \in A \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$R_4 = \{(1,1),(3,2),(2,3)\}$

Bihurkorra? Ez!

$\forall x \quad xRx$

Kontra Adibidea:

$x=2 \quad 2 \not R 2$

Simetrikoa? Bai!

$\forall x,y \quad xRy \Rightarrow yRx$

Antisimetrikoa? Ez!

$\forall x,y \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

Kontra Adibidea: $x=3$, $y=2$ $\quad 3R2 \wedge 2R3 \Rightarrow 3 \neq 2$

Ariketak. Erlazioak   Matematika Diskretua

①

$A = \{1, 2, 3\}$

$R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2)\ (2,3)\}$

Bihurkorra? Ez!

$\forall x \in A \quad xRx$

Kontra Adibidea: $x = 3 \quad 3 \not R 3$

Simetrikoa? Ez!

$\forall x, y \in A \quad xRy \Rightarrow xRx$

Kontra Adibidea: $x = 2$, $y = 1$ $\quad (2,1) \in R \Rightarrow (1,2) \notin R$

Antisimetrikoa? Ez!

$\forall x, y \in A \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

Kontra Adibidea: $x = 3$, $y = 2$ $\quad 3R2 \wedge 2R3 \Rightarrow 3 \neq 2$

Iragankorra? Ez!

$\forall x, y, z \in A \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Kontra Adibidea:

$x = 3$

$y = 2$

$z = 3$

$3R\cancel{2} \wedge 2R3 \Rightarrow 3 \not R 3$

$R_2 = \{(1,1)\}$

Bihurkorra?

$\forall x \quad xRx$

Kontra Adibidea: $x = 2 \quad 2 \not R 2$

12

$A=\{1,2,3,4,5\}$. $A^2 \Rightarrow$ definitutako erlazioa $(x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2)$ baldin $x_1+x_2=y_1+y_2$

Bihurkorra? $\underline{\text{Bai!}}$ $\forall (x_1,x_2)\in A^2 \quad (x_1,x_2)\,R\,(x_1,x_2)$

$$(x_1,x_2)\,R\,(x_1,x_2) \underset{\text{R-ren def}}{\Longrightarrow} x_1+x_2=x_1+x_2$$

Simetrikoa? Bai!

$$\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in A^2 \quad (x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2) \Rightarrow (y_1,y_2)\,R\,(x_1,x_2)$$

$$(x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2) \underset{\text{R-ren def}}{\Longrightarrow} x_1+x_2=y_1+y_2 \Rightarrow y_1+y_2=x_1+x_2 \underset{\text{R-ren def}}{\Longrightarrow} (y_1,y_2)\,R\,(x_1,x_2)$$

Iragankorra? Bai!

$$\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in A^2 \quad (x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2) \wedge (y_1,y_2)\,R\,(z_1,z_2) \Rightarrow (x_1,x_2)\,R\,(z_1,z_2)$$

$$(x_1,x_2)\,R\,(y_1,y_2) \underset{\text{R-ren def}}{\Longrightarrow} x_1+x_2=y_1+y_2$$

eta

$$(y_1,y_2)\,R\,(z_1,z_2) \underset{\text{R-ren def}}{\Longrightarrow} y_1+y_2=z_1+z_2$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=z_1+z_2 \underset{\text{R-ren def}}{\Longrightarrow} (x_1,x_2)\,R\,(z_1,z_2)$$

$$[[(1,3)]] = \{(x_1,x_2)\in A^2 \text{ non } (x_1,x_2)\,R\,(1,3)\} = \{(x_1,x_2)\in A^2 \text{ non } x_1+x_2=1+3\} =$$
$$=\{[2,2],[3,1],[1,3]\}$$

$$[[(2,4)]] = \{(x_1,x_2)\in A^2 \text{ non } (x_1,x_2)\,R\,(2,4)\} = \{(x_1,x_2)\in A^2 \text{ non } x_1+x_2=2+4\} =$$
$$=\{[2,4],[1,5],[5,1],[4,2],[3,3]\}$$

$$[[(1,1)]] = \{(x_1,x_2)\in A^2 \text{ non } (x_1,x_2)\,R\,(1,1)\} = \{(x_1,x_2)\in A^2 \text{ non } x_1+x_2=1+1\} =$$
$$=\{(1,1)\}$$

$A^2/R = \{[1,1], [1,3], [2,4], [1,4], [1,2], [2,5], [3,5], [4,5], [5,5]\}$

13

$2 \equiv 10 \pmod 4$.

2 eta 10 kongruenteak al dira modulu 4? Egia

$4 \mid 2-10 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ non $\Rightarrow 2-10 = 4 \cdot k \Rightarrow -8 = 4 \cdot k \Rightarrow -2 = k \in \mathbb{Z}$

Egia

4 modulolo kongruentziak $\mathbb{Z}$ multzoan partizio hau sortzen du.

$\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$.

$10 \,\underline{|\, 4}$
$2 \quad 2$

→ hondarraren klasean dago
[2]

$7 \equiv 2 \pmod 3$

3 modulolo kongruentzia

$3 \mid 7-2 \qquad 3 \mid 5$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ non $5 = 3k$
$k = \frac{5}{3} \in \mathbb{Z}$

Ariketak Funtzioak

(1)

b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = 2x - 3$

Funtzioa $\to$ $x \in \mathbb{Z}, \exists f(x)$ Bai!

Injektiboa $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa $\forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Ez!

$f(x) = y \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow \frac{3+y}{2} = x$

Kontra Adibidea:

$y = 2 \quad f(x) = 2 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow \frac{3+2}{2} = x \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

c) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = -x + 5$

Funtzioa $\to$ $x \in \mathbb{Z} \quad \exists f(x)$ Bai!

Injektiboa $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1 + 5 = -x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa $\forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow y = -x + 5 \Rightarrow x = -y + 5$

f) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = x^3$

Funtzioa $x \in \mathbb{Z} \quad \exists f(x)$ Bai!

Injektiboa $\forall x_1, x_2 \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa. $\forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = x$ EZ!

$f(x) = y \Rightarrow y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

Kontra Adibidea

$y = 2 \quad 2 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} = 1'29 \quad x \notin \mathbb{Z}$

3

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = n$

Funtzioa: $n \in \mathbb{Z} \quad \exists f(n)$ Bai!

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Bai!

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N}$ non $f(n) = y$

$f(n) = y \Rightarrow y = n$ beraz, $y \in \mathbb{N}$ bada, $n \in \mathbb{N}$ izan behar da.

$f(n) = 3n$

Funtzioa: $n \in \mathbb{N} \quad \exists f(n)$ Bai!

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Bai!

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 3n_1 = 3n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

Injektiboa: $\forall m_1, m_2 \in S \quad g(m_1) = g(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$

$g(m_1) = g(m_2) \Rightarrow \max\{3, m_1\} = \max\{3, m_2\} \not\Rightarrow m_1 = m_2$

Kontra Adibidea:

$m_1 = 1 \qquad \max\{3,1\} = \max\{3,2\}, \quad 1 \neq 2$

$m_2 = 2 \qquad 3 \neq 3$

Suprajektiboa: $\forall n \in S \quad \exists m \in S$ non $g(m) = n$ Ez!

$g(m) = n \Rightarrow \max\{3, m\} = n \not\Rightarrow \forall n \in S \quad g(m) = n$

Kontra Adibidea:

$n = 1 \qquad \underset{\overset{\|}{3}}{\max\{3, m\}} \neq 1 \quad \exists m \in S$

③

$g: N \to N \qquad g(n) = n + (-1)^n$

Funtzioa: $\exists g(n)$ Bai!

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad g(n_1) = g(n_2) \quad n_1 = n_2$ Bai!

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 + (-1)^{n_1} = n_2 + (-1)^{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$

Kasuak bereiztu:

~~$n_1 = 1, n_2 = 2$; $1 + (-1)^1 = 2 + (-1)^2 \Rightarrow 0 \neq 3$~~

n_1 Biki, n_2 Biki: $n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

n_1 Bakoiti, n_2 Bakoiti: $n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

~~n_1 Bakoiti, n_2 Biki~~: $n_1 - 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 \neq n_2$ (Kontraesana)

Suprajektiboa: $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ non $g(n) = m$ Bai!

$g(n) = m \Rightarrow n + (-1)^n = n$

Kasuak Bereizten:

n Bikoitia: $n+1 = m \qquad n = m-1 \Rightarrow$

n Bakoitia: $n-1 = m \qquad n = m+1 \Rightarrow n, m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\mathbb{1}_N(n) = n}$$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad g(n_1) = g(n_2) \quad n_1 = n_2$ Bai!

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa: $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ non $g(n) = m$ Bai!

$g(n) = m \Rightarrow n = m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(n) = 3n}$$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 3n_1 = 3n_2$ Bai!

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 3n_1 = 3n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa: $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ non $f(n) = m$ Bai!

$f(n) = m \Rightarrow 3n = m$

$h(n) = \cancel{\frac{1}{2}} \min[\cancel{3}n, 100]$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad h(n_1) = h(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

$h(n_1) = h(n_2) \Rightarrow \min[n_1, 100] = \min[n_2, 100] \Rightarrow \cancel{n_1 = n_2}\ n_1 = n_2$

~~Kontra Adibidea:~~ $n_1 = 1$, $n_2 = 10$ $\quad \min[n_1, 100] \neq \min[n_2, 100] \Rightarrow n_1 \neq n_2$

Suprajektiboa: $\forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}$ non $h(n) = m$ Bai!

$h(n) = m \Rightarrow \min[n_1, 100] = m \Rightarrow n_1 = m$

$$\boxed{K(n) = \max[0, n-5]}$$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $K(n_1) = K(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

$K(n_1) = K(n_2) \Rightarrow \max[0, n-5] = \max[0, n-5]$

Kontra Adibidea:

$n_1 = 1$ $\quad \max[0, 1-5] = \max[0, 2-5]$

$n_2 = 2$

$n_1 \neq n_2$

$1 \neq 2$

Suprajektiboa:

$\forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}$ $K(n) = m$ Bai!

$K(n) = m \Rightarrow \max[0, n-5] = m$

$n - 5 = m \qquad n - 5 \in \mathbb{N}$

(6)

$f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = x - 1$

$g(x) = 3x$

$h(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ bikoitia} \\ 1 & x \text{ bakoitia} \end{cases}$

a) Kalkulatu: $f \circ g$, $g \circ f$

$f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(f \circ g)\, x = f(g(x)) = f(3x) = 3x - 1$

$g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = 3x-3$

$g \circ h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \begin{cases} g(0) & x \text{ Bik} \Rightarrow g(0) = 0 \\ g(1) & x \text{ Bak} \Rightarrow g(1) = 3 \end{cases}$

$h \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(3x) = \begin{cases} 0 & 3x \text{ Bik} \\ 1 & 3x \text{ Bak} \end{cases}$

$f \circ (g \circ h) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f \circ (g \circ h)(x) = f \circ (g \circ h(x)) = f \circ (g(h(x))) = f \circ \begin{cases} g(0) & x \text{ Bik} & g(0) = 0 \\ g(1) & x \text{ Bak} & g(1) = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} f(g(0)) = 0-1 = -1 \\ f(g(3)) = 3-1 = 2 \end{cases}$

b)

Kalkulatu $f^2 = f \circ f$ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x-1) = x-1-1 = x-2$

$f^3 = f \circ f^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f \circ f(x)^2 = f(f^2(x)) = f(x-2) = x-2-1 = x-3$

$h^2 = h \circ h$ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$h \circ h(x) = h(h(x)) = \cancel{\begin{cases} h(0) & x \text{ bik} \\ h(1) & x \text{ bak} \end{cases}} =$

$$h(h(x)) = \begin{cases} h(0) & x \text{ Bik } = 0 \\ h(1) & x \text{ Bak } = 1 \end{cases}$$

$h^2 \circ h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$h \circ h(x) = h(h^2(x)) = \begin{cases} h(0) & x \text{ Bik } = 0 \\ h(1) & x \text{ Bak } = 1 \end{cases}$$

(8)

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = 2n$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$g(m) = \begin{cases} \frac{m}{2} & m \text{ bikoitia} \\ \frac{m+1}{2} & m \text{ Bakoitia} \end{cases}$$

Injektiboa: Bai

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa: Ez!

$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ non $f(n) = m$

$f(n) = m \Rightarrow 2n = m \Rightarrow n = \frac{m}{2}$

Kontra Adibidea:

$m = 5 \qquad n = \frac{5}{2} = 2'5 \notin \mathbb{N}$

g)

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ Bik} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ Bak} \end{cases}$$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \quad g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ ~~Bai~~ Ez!

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow \frac{n_1+1}{2} = \frac{n_1+1}{2} \Rightarrow n_1+1 = n_2+1 \Rightarrow n_1 = n_2$

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2+1}{2} \Rightarrow n_1 = n_2+1$ Kontra Adb: $n_1 = 2 \quad n_1 = 1 \quad 2 = 1+1, \; 2 = 2, \; n_1 \neq n_2$

Bik Bak

Suprajektiboa: $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad g(n) = m$ Bai!

$g(n) = m \Rightarrow \frac{n}{2} = m \Rightarrow n = 2m$

$g(n) = m \Rightarrow \frac{n+1}{2} = m \Rightarrow n+1 = 2m \Rightarrow n = 2m-1$

Konposizioa

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = \begin{cases} \frac{2x}{2} & x \text{ Bik} = x \\ \frac{2x+2}{2} & x \text{ Bak} = \cancel{\frac{x+1}{2}} \; \cancel{\frac{2x+2}{2}} = x+1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(b)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x+y, x-y)$

Injektiboa? $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \; f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ ~~$x_1 = x_2 \; y_1 = y_2$~~

$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow$ ~~$x_1+y_1 = x_2+y_2 \quad x_1-y_1 = x_2-y_2$~~ $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

$(x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2), (x_2-y_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ x_1-y_1 = x_2-y_2 \end{cases} \Rightarrow 2y_1 = 2y_2$$

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \quad 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa: Bai!

$\forall m,n \in \mathbb{R}^2 \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}$ non $f(x,y) = (m,n)$

$f(x,y) = (m,n) \Rightarrow ((x+y),(x-y)) = (m,n)$

$\cancel{x+y = m \in \mathbb{R}^2}$

$\cancel{x-y = n \in \mathbb{R}^2}$

$x+y = m$

$x-y = n$

$(1)+(2): 2x = m+n$

$(1)-(2): 2y = m-n$

Funtzio hau Bijektiboa denez, Alderantzizkoa kalkula dezakegu

$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f^{-1}(z,t) = \left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right)$

Aritketak Funtzioak

7

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = n+1$

Funtzioa: $n \in \mathbb{N}$ $\exists f(n)$ Bai!

Injektiboa: $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}$ $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Bai!

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N}$ $\exists n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = y$ Ez!

$f(n) = y \Rightarrow n+1 = y \Rightarrow n = y-1$

Kontra Adibidea:

$y = 0 \Rightarrow n+1 = 0 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$

$g(n) = max\{0, n-1\}$

Funtzioa: $n \in \mathbb{N}$ $\exists g(n)$ Bai!

Injektiboa: $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}$ $g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Bai!

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow max(0, n_1 - 1) = max(0, n_2 - 1)$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N}$ eta $\exists n \in \mathbb{N}$ non $g(n) = y$ Bai!

$$g(n) = y \Rightarrow max(0, n-1) = y \begin{cases} n = 0 \Rightarrow y = 0 \\ n > 0 \Rightarrow y \geq 0 \end{cases}$$

Frogatullo dugu $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ baina $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \max\{0, x+1-1\} = \max\{0, x\}$

Beraz, $x \in \mathbb{N}$ bada, $g(f(x)) \in \mathbb{N}$ beteko da.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\max\{0, \cancel{x}-1\}) =$

9

$C = x^2$ non $x \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to C$ eta $h: C \to \mathbb{N}$

$f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ eta $h(x) = \sqrt{x}$

a) $f(x) = |x|$

Injektiboa: $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}$ $\cancel{\exists}$ $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 = x_2$ Bai!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{Z}$ $\exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Ez!

$f(x) = y \Rightarrow y = |x|$

Kontra Adibidea:

$y = -2$ $\nexists x \in \mathbb{Z}$ non $y = f(x) \Rightarrow y = |x| \Rightarrow \cancel{2} \neq |x|$

⑨

$C = \{x^2 \text{ non } x \in \mathbb{N}\}$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to C$ $h: C \to \mathbb{N}$

a)

$f(x) = |x|$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Ez!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 \neq x_2$

Kontra Adibidea:

$x_1 = -2$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |-2| = |2| \Rightarrow 2 = 2$

$x_2 = 2$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow -2 \neq 2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$ $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow |x| = y$

$g(x) = x^2$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \underset{x \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in C \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}$ $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow x^2 = y$

$y \in C$

$h(x) = \sqrt{x}$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in C \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \underset{x \in C}{\Rightarrow} \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in C$ non $h(x) = y$ Bai!

$h(x) = y \Rightarrow \sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2$

b)

$h \circ g \circ f \Rightarrow h \circ g(f(x)) \Rightarrow h \circ ((|x|)^2) \Rightarrow +\sqrt{(|x|)^2} \Rightarrow +|x|$

$h \circ g \circ f = +|x| \Rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

Injektiboa?: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ EZ!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |x| = |x_2| \Rightarrow x_1 \neq x_2$

Kontra Adibidea

$x_1 = -2$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |-2| = |2| \Rightarrow 2 = 2$

$x_2 = 2$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow -2 \neq 2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow |x| = x$

c)

Frogatuko dugu $g \circ h = 1_C$ eta $h \circ g = 1_{\mathbb{N}}$ direla.

$g \circ h = 1_C$

$g \circ h : C \rightarrow C$

$g \circ h \Rightarrow g(h(x)) = (\cancel{+}\sqrt{x})^2 = +x \quad x \in C$

$h \circ g = 1_{\mathbb{N}}$

$h \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$h \circ g \Rightarrow h(g(x)) = +\sqrt{x^2} = +x \quad x \in \mathbb{N}$

d)

g^{-1}

g bijektiboa izanik

$g^{-1} \circ g = id_{\mathbb{N}}$

$id_{\mathbb{N}}(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

$g^{-1} \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y^{\cancel{2}}}$

$g^{-1} = \sqrt{x^2} \quad x \in \mathbb{N}$

①

Iker

a) Murrizketarik gabe.

Hizkiak: 4

$n=4$
$r=4$

Ordenak? Bai!

Errep? Ez!

Permutazioa: $P(n) = V(n,n) = n! = 4! = 24.$

b)

"i" hizkiaz hasita

$n=3$

$r=3$

Ordena? Bai!

Errep? Ez! $P(n) = V(n,n) = n! = 3! = 6$

iker, iekr, irke, ierk, irek, ikre

c)

lehenengo hizkia bokala

Badakigu i-rekin hasita 6 aukera daudela, beste bokal bat dagoenez soilik, honek ere 6 aukera izango ditu beraz, 12 aukera daude guztira.

Iker, Ikre
Iekr, Ierk
Irke, Irek
ekir, ekri
eikr, eirk
erik, erki

d) Kontsonante baten aurretik beti bokala.

B K B K → ~~Ikker~~ Iker Bi kontsonante eta bi bokal dau denez

~~KBK~~ $P_B(2) = 2! = 2$

~~BKBK~~ $P_K(2) = 2! = 2$

Biderkadura erabiliko dugu $P_B(2) \cdot P_K(2) = \boxed{4}$

Iker Irek

ekir erik

2

3 bokal → Bokalen konbinazio posibleak $n=3,\ r=3 \Rightarrow P(3)=6$

3 kontsonante → $n=3,\ r=3\ \ P(3)=6$

$P(3) \cdot P(3) = 36$

3

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

$\underline{A_2}\ \underline{A_1}\ \_\ \_\ \_ \quad \_\ \_\ \_\ \underline{A_2}\ \underline{A_1}$

$\_\ \underline{A_2}\ \underline{A_1}\ \_\ \_$

$\_\ \_\ \underline{A_2}\ \underline{A_1}\ \_$

Beraz, $n=3$

$r=3$

ordena? Bai! $P(n) = 3! = 6$

Errep? Ez!

Hori, 5 toki desberdinetan ~~ip~~ jarri daitekeenez, ~~4~~ . 6 → 24 ~~30~~ era desberdinetara jarri daiteke.

④

Sei abiluntzi: U, H, B, M, T, N

U ezin H-ren ondoan egon

~~U~~ _ _ _ _ _ _

Guztira:

$n = 6$

$r = 6$

Ordena? Bai!

Errep? Ez!

$P(6) = n! = 6! = 720$

(UH), B, M, t, N

$n = 5$

$r = 5$

$P(n) = P(5) = n! = 5! = 120$

Ordena? Bai!

Errep? Ez!

Baina, kontuan izan behar dugu ere, H,U ere izan daitezkeela
Beraz, 240 aldiz egongo ahalko dira bata bestearen ondoan,

$720 - 240 = 480$ pos ere dauda UH alkarren ondoan ez egoteko.

⑤

mississipi

$n = 10$

$r = 10$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

$n_1 = 4$'s'

$n_2 = 4$ 'i'

$n_3 =$ 'm'

$n_4 =$ 'p'

$$P(n) = \frac{10!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{10!}{4! \cdot 4!} =$$

$= 6300$ hitz sortu daitezke.

⑥

$n = 6$
$r = 3$
Ordenik? Bai!
Errep? Bai!

$A = 3 \Rightarrow n_1 = 3$
$L = 2 \Rightarrow n_2 = 2$
$M = 1 \qquad n_1 = 1$

$VR(6,3) = n^r = 6^3 = 216$ aukera desberdin.

⑦

$n = 2$
$r = 6$
Ordenik? Bai!
Errep? Bai!

$VR(2,6) = 2^6 = 64$ aukera desberdin.

⑧

Zenbakiak: 1, 2, 3, 4, 5, 6

2 tamainoko kotxe matrikulak

$n = 6$
$r = 2$
Ordena? Bai! $\qquad \overline{6aukera}\ \overline{5auk}$
Errep? Ez!

$$V(6,2) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$$

12, 13, 14, 15, 16, 21, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 56, 61, 62, 63, 64, 65.

Zifrak errepikatzea egotea posible bada.

$n = 6$
$r = 2$ $\qquad \underline{6auk}\ \underline{6auk}$
Ordena? Bai!
Errep? Bai!

$V(6,2) = 6^2 = 36$

⑥

3 lagun 6 arilleta egitelko batu dira

$n = 6$ $\begin{cases} Anek = 3 \\ Leirek = 2 \\ Maitek = 1 \end{cases}$

$r = 3$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

$$RR_{(n)} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{12} = 60$$

60 era desberdinetara banatu dezakego arilletak.

⑦

Futbol partidu baten 4-2

$n = 6$ $\begin{cases} 1Taldea = 4 \\ 2Taldea = 2 \end{cases}$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

$$RR_{(6)} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

15 era desberdinetara heldu daitezke emaitza horretara.

⑨

8 ataza daude eta horietatik 3, 3 langileri esleitu nahi da.

$n = 8$

$r = 3$

Ordena? Bai!

Errep? EZ!

$$V_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{5!} = 336$$ aukera posible daude.

(11)

14 partida jokatu, bakoitzean 3 aukera 1, x, 2 zenbat posibilidade desberdin daude?

$n = 3$ $\underline{3\text{auk}}\ \underline{3\text{auk}}\ \underline{3\text{auk}}\ \underline{3\text{auk}} \ldots \underline{3\text{auk}}$

$r = 14$

$VR_{(n,r)} = n^r = 3^{14} = 4782969$ era desberdinetara egin daiteke kiniela.

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

(12)

Letrak 9rekin 4 zifrako matrikulak

$n = 9$ $\underline{9\text{auk}}\ \underline{9\text{auk}}\ \underline{9\text{auk}}\ \underline{9\text{auk}}$

$r = 4$

Ordena? Bai! $VR(n,r) = n^r = 9^4 = 6561$ aukera guztira.

Errep? Bai!

13 zenbakia ezin bada agertu:

$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{9\text{auk}}\ \underline{9\text{auk}}$, $-\ \underline{1}\ \underline{3}\ -$, $-\ -\ \underline{1}\ \underline{3}$

$n = 9$

$r = 2$

Ordena? Bai! $VR(9,2) = 9^2 = 81$

Errep? Bai!

3 eratara agertu daitekeenez 13 zenbakia, $VR(9,2) \cdot 3$ egin behar da.

$VR(9,2) \cdot 3 = 243$

~~Baina kasu hori~~

$VR(9,4) - VR(9,2) \cdot 3 = 6561 - 243 = 6318$ aukera daude.

Baina, 13 13 zenbakia bi aldiz kendu dugu, beraz, 6319 aukera daude guztira

(14)

Zenbakiak: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Digituak 5.

$n = 7$ 7auk 7auk 7auk 7auk 7auk

$r = 5$

Ordena? Bai! $VR_{(7,5)} = n^r = 7^5 = 16\,807$

Errep? Bai!

16 807 zenbaki osa daitezke.

Horietatik zenbat dira bikoitiak. Zenbaki bat bikoitia izateko azkenengo digituko zifra bikoitia izan behar da, hau da, kasu honetan, 2, 4 edo 6 izan beharko da.

7auk 7auk 7auk 7auk 3auk

$n = 7$ $VR(7,4) = 7^4$

$r = 4$

ordena? Bai $7^4 \cdot 3 = 7203$ zenbaki izango dira bikoitiak.

Errep? Bai

Zenbat izango dira palindromoak. Horretarako lehenengo bi digituak eta azkenengo biak ~~beti~~ berdinak izan beharko dira. Beraz, nahikoa izango da lehenengo 3 digituetan ~~dau~~ egon daitezkeen konbinazio posible guztiak aztertzea.

7auk 7auk 7auk --- ---

$n = 7$

$r = 3$

Ordena? Bai! $VR(7,3) = n^r = 7^3 = 343$ konbinazio posible egongo dira. Zenbaki palindromoak lortzeko.

Errep? Bai!

(15)

6 ikasle ditugu, 3 postutarako.

$n=6$
$r=3$

6aukl 5aukl 4aukl

Ordena? ~~Bai~~ EZ!
Errep? EZ!

$$C_{(n,r)} = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$$

20 konbinazio posible daude

(16)

10 neskentzako
2 leku daude

$n=10$
$r=2$
Ordena? EZ!
Errep? EZ!

8 mutilentzako
2 leku daude

$n=\cancel{10}\,8$
$r=2$
Ordena? EZ
Errep? EZ

$$C_{(n,r)} = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = 45$$

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$$

$C_{(10,2)} \times C_{(8,2)} = 1260$ eratara sortu daitekle taldea.

(17)

9 lagunetik 4 lagunako batzordea sortu.

$n=9$
$r=4$
Ordena? EZ!
Errep? EZ!

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = 126 \text{ eratara}$$

Ane, Gema, B, C, D, E, F, G, H

~~Biak batera kontzen badira~~,

A Ge _ _

Beraz,

$n=7$

$r=2$

Ordena? Ez!

Errep? Ez!

$$C(n,r) = \frac{7!}{5! \cdot 2} = 21$$ aldiz egongo dira batera

(18)

22 izen daude, hortik 1 ordezko atleta eta 4 zinegotziak

$\frac{22 \text{ aukera}}{\text{Atleta}}$ $\frac{21 \text{ aukera}}{\text{zinegotziak}}$

$n=22$

$r=2$

Ordena? Bai!

Errep? Ez!

$$V(22,2) = \frac{22!}{20!} = 462$$ aukera

_ _ _ _

zinegotziak

$n=21$

$r=4$

Ordena? Ez!

Errepika? Ez!

$$C(21,4) = \frac{21!}{\cancel{8}\,17! \cdot 4!} = 5985$$

$V(22,2) + C(21,4) = 6447$ era desberdinetan aukeratu daitezke.

(20)

Fortrain-en 3 liburu eta C^{++}ello 4

$n = 7$

$r = 7$ $\qquad P(7) = n! = 7! = 5040$ modu desberdinetara ordenatu daiteke.

Ordena? Bai!

Errep? Ez!

Programazio lenguaiak txandakatuta agertzeko.

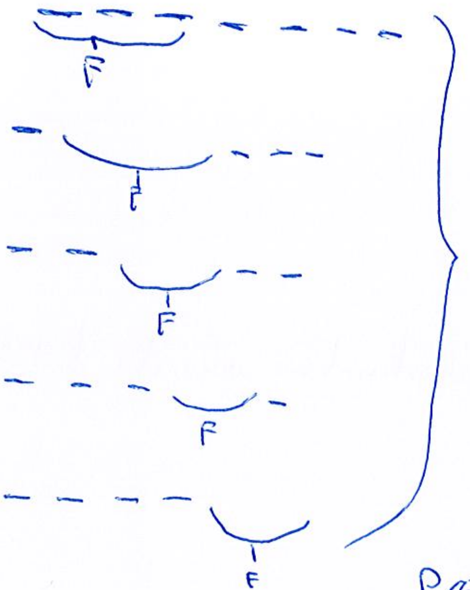
$\underline{C^{++}}\ \underline{F}\ \underline{C^{++}}\ \underline{F}\ \underline{C^{++}}\ \underline{F}\ \underline{C^{++}}$

Bi azpiproblema:

$n = 4$	$n = 3$
$r = 4$	$r = 3$
Ordena? Bai!	ordena? Bai!
Errep? Ez!	Errep? Ez!
↓	↓
$P(4) = 4! = 24$	$P(3) = 3! = 6$

$P(4) \cdot P(3) = 24 \cdot 6 = 144$ era desberdin daude

Fortrain liburuak elkarren ondoan:



$P(4) \cdot P(3) = 144$

$5 \cdot 144 = 720$ aukera desberdin

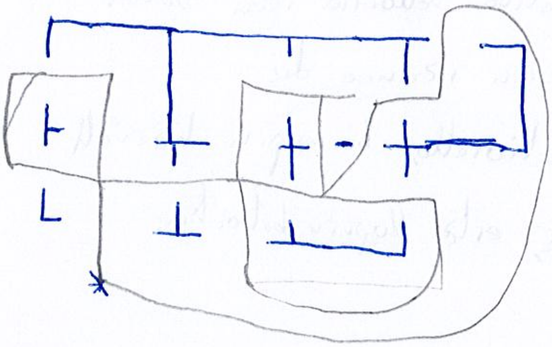
Biak elkarren ondoan jarri behar badira:

$n = 3$		$n = 4$	
$r = 3$	$P(3) = 6$	$r = 4$	$P(4) = 24$
ordena? Bai!		Ordena? Bai	
Errep? Ez		Errep? Ez	

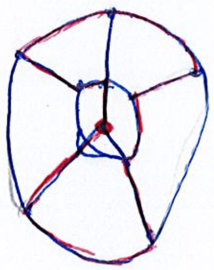
$P(3) \cdot P(4) = 144$ Bi modu daude soilik: $2 \cdot 144 = 288$ era daude.

d) Zikllo hamiltondarra eta zirkuitu eulertarra daude

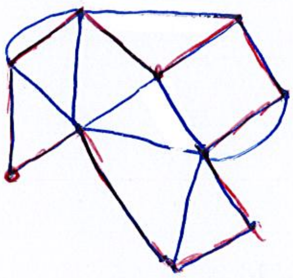
(3.8)

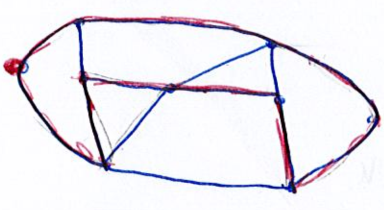


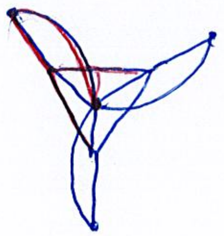
(3.9)



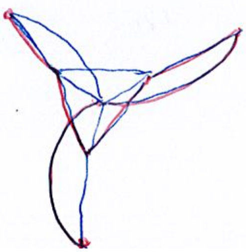
Existitzen da zikllo hamiltondarra







Ez da existitzen zikllo hamiltondarrik



3.2

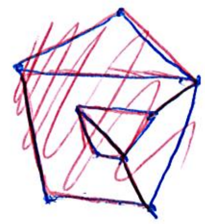
Zirkuitu eulertarra izateko, Grafo eulertarra izan behar du, hau da, konektatua eta erpinen gradu guztiek bikoitiek.

$K_n \Rightarrow d(x) = n-1 \quad \forall x \in V$

Erpinen gradua bikoitia bada, orduan n-ren balioa bakoitia izan behar da. Beraz, ~~bakoi~~ n bakoitia bada zirkuitu eulertarra izango du.

$K_n \Rightarrow K$ Kate eulertarra izango du $n=2$ baliorako, bi erpin horiek $d(x) = 2-1 = 1$ ertz izango dituztelako, hau da, ertz kopuru bakoitia.

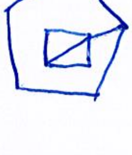
3.4



3.6

b) Zirkuitu eulertarra du baina ez ziklo hamiltondarrik.

a) Ez du zirkuitu eulertarrik eta ziklo hamiltondarrik ere.



c) Ziklo hamiltondarra dago baina ez zirkuitu eulertarrik.

2.9

a) $G=(V,\mathcal{E})$

$|V|=n$

$|\mathcal{E}|=?=e$

$\xRightarrow{\text{osagarria}}$

$\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$

$|V|=n$

$|\bar{\mathcal{E}}|=?=\frac{(n-1)n}{2}-e$

Teorema: $\sum_{u\in V} d(u)=2m \Rightarrow \cancel{k+}(n-1)n=2e \Rightarrow e=\frac{\cancel{k}(n-1)n}{2}$

$G_n\cong\bar{G}$ direnez, $|\mathcal{E}|=|\bar{\mathcal{E}}| \Rightarrow e=\frac{n(n-1)}{2}-e \Rightarrow 2e=\frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 4e=n(n-1) \Rightarrow$

$e=\frac{n(n-1)}{4}$

$|\mathcal{E}|=\frac{n(n-1)}{4}$ izango da. ertz kopurua.

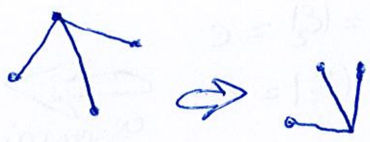
b)

n=4

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V|=4$

$|\mathcal{E}|=\frac{n(n-1)}{4}=\frac{4(4-1)}{4}=3$

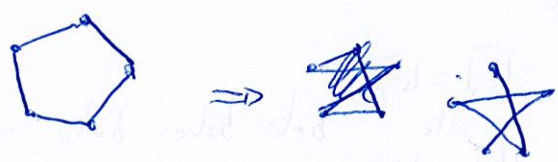


n=5

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V|=5$

$|\mathcal{E}|=\frac{5(5-1)}{4}=\frac{5\cdot 4}{4}=5$



c)

$k\in\mathbb{Z}$ izanik

4k

$|\mathcal{E}|=\frac{n(n-1)}{4}=\frac{4k(4k-1)}{4}=k(4k-1)\in\mathbb{Z}$

4k+1

$|\mathcal{E}|=\frac{\cancel{4k}\,n(n-1)}{4}=\frac{(4k+1)(4k+1-1)}{4\cancel{k}}=\frac{(4k+1)4k}{4}=k(4k+1)\in\mathbb{Z}$ 4-ren multiploak izan behar direlako.

(2.8)

a) G_1 eta G_2

$G_1 = (V, E)$

$G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow \bar{G_1} \cong \bar{G_2}$ Betetzen dela frogatuko dugu.

$G_1 \cong G_2 \Rightarrow \bar{G_1} \cong G_2$

$G_1 = (V_1, E_1)$
$|V| = v$
$|E| = e$

$\xrightarrow{\text{Osagarria}}$

$\bar{G_1} = (V_1, \bar{E_1})$
$|V| = v$
$|\bar{E}| = \frac{v(v-1)}{2} - e$

$G_2 = (V_2, E_2)$
$|V| = v$
$|E| = e$

$\xrightarrow{\text{Osagarria}}$

$\bar{G_2} = (V_2, \bar{E_2})$
$|V| = v$
$|\bar{E}| = \frac{v(v-1)}{2} - e$

$G_1 \cong G_2 \Rightarrow \begin{matrix} |E_1| = |E_2| = e \\ |V_1| = |V_2| = v \end{matrix} \xrightarrow{\text{Osagarria}} \begin{matrix} |\bar{E_1}| = |\bar{E_2}| \\ |V_1| = |V_2| \end{matrix} \Rightarrow \bar{G_1} \cong \bar{G_2}$

Beraz, frogatuta geratzen da $G_1 \cong G_2 \Rightarrow \bar{G_1} \cong \bar{G_2}$ betetzen dela.

$\bar{G_1} \cong \bar{G_2} \Rightarrow G_1 \cong G_2$

$\bar{G_1} \cong G_2$ izateko $\begin{matrix} |\bar{E_1}| = |\bar{E_2}| \\ \text{eta} \\ |V_1| = |V_2| \end{matrix}$ bete behar dute $\Rightarrow |E_1| = E$

$n = 5 \nRightarrow G \cong \bar{G}$

$G = (V, E)$

$|V| = 5$

$|E| = m = 5$ Osogarria $\Rightarrow$ $\bar{G} = (V, \bar{E})$

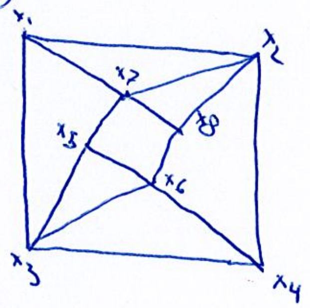
$|V| = 5$

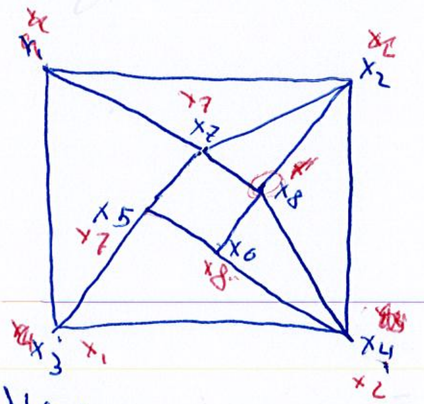
$|\bar{E}| = ? = \frac{n(n-1)}{2} - \cancel{m}\, 5 = 5$

n erpineko zikloa badu, 5 ertz izan beharko ditu

Beraz, $|E| = |\bar{E}|$ eta $|V| = |V|$ betetzen direnez $G = \bar{G}$. Beraz, $G \cong \bar{G}$ betetzen da.

(2.7)



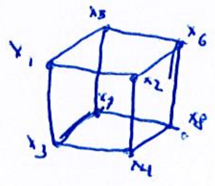


$d(x_1) = 3$
$d(x_2) = 4$
$d(x_3) = 4$
$d(x_4) = 3$
$d(x_5) = 3$
$d(x_6) = 4$
$d(x_7) = 4$
$d(x_8) = 3$

$d'(x_1) = 3$
$d'(x_2) = 4$
$d'(x_3) = 3$
$d'(x_4) = 4$
$d'(x_5) = 3$
$d'(x_6) = 3$
$d'(x_7) = 4$
$d'(x_8) = 4$

Ez dira isomorfoak ez baitute erpinen arteko albokotasunak mantentzen. ~~Ka~~ Adibidez, $d(x_8) = x_4, x_3, x_5$ eta x_8 -rekin lotuta dago, baina ez dago erpinik hori betetzen duenik.

(2.4)



$V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$V_2 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $\quad V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad V_1 \cup V_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} = V$

$\mathcal{E} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_2, x_6), (x_2, x_4), (x_3, x_7), (x_3, x_4), (x_4, x_8), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_8), (x_7, x_8)$

Beraz, frogatuta geratzen da zatibiko grafoa dela,

(2.5)

$G = (V, \mathcal{E})$

$|V| = n$

$|\mathcal{E}| = ? = m$

Frogatuko dugu $\underline{G \cong \bar{G} \Leftrightarrow n = 5}$

$\underline{G \cong \bar{G} \Rightarrow n = 5}$

$G = (V, \mathcal{E})$

$|V| = n$

$|\mathcal{E}| = m = ?$

$\xRightarrow{\text{Osagarria}}$

$\bar{G} = (V, \bar{\mathcal{E}})$

$|V| = n$

$|\bar{\mathcal{E}}| = \frac{n(n-1)}{2} - m$

Teorema: $\sum_{u \in V} d(u) = 2m \Rightarrow (n-1) * n = 2m \Rightarrow m = \frac{n(n-1)}{2}$

$|\mathcal{E}| = |\bar{\mathcal{E}}| \Rightarrow m = \frac{n(n-1)}{2} - m \Rightarrow 2\cancel{m} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 4\cancel{m} = n(n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n = n^2 - n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n = 0 \rightarrow n = 0$ ezin da izan ez baita grafoa..

$n = 5$

Beraz, frogatuta gelditzen da $G \cong \bar{G} \Rightarrow n = 5$ betetzen dela.

2.2

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V|=10$

$|\mathcal{E}|=$

$\Rightarrow$ $\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$

$|V|=10$

$d(v_1)=2 \Rightarrow d'(v_1)=K_{10}-d(v_1)=9-2=7$

$d(v_2)=3$, $d'(v_2)=6$

$d(v_3)=3$, $d'(v_3)=6$

$d(v_4)=5$, $d'(v_4)=4$

$d(v_5)=1$, $d'(v_5)=8$

$d(v_6)=2$, $d'(v_6)=7$

$d(v_7)=5$, $d'(v_7)=4$

$d(v_8)=2$, $d'(v_8)=7$

$d(v_9)=3$, $d'(v_9)=6$

$d(v_{10})=2$, $d'(v_{10})=7$

2.3

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V|=v$

$|\mathcal{E}|=e$

$\xRightarrow{\text{Osagarrir}}$ $\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$

$|V|=v$

$|\bar{\mathcal{E}}|=?$

Teorema: $\sum_{v\in V} d(v)=2m \Rightarrow d(v)=2e \Rightarrow v-1=2e \Rightarrow (v-1)v=2e \Rightarrow e=\frac{v(v-1)}{2}$

$K_n=\frac{v(v-1)}{2}$

$|\bar{\mathcal{E}}|=\frac{v(v-1)}{2}-e$

(1.7)

$G=(V,E)$

$|V|=n$

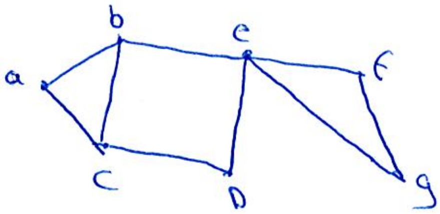
$|E|=m$

3 erregularra

<u>Teorema</u>: $\sum_{v\in V} d(v) = 2m \Rightarrow 3n = 2m \Rightarrow n = \frac{2m}{3}$

n osoa izateko ~~3~~ m 3-ren multiploa izan behar da, hau da, $m=\{3,6,9,15\ldots\}$ horrela izanik eta $m \cdot 2$ egiten dugunez beti izango da bikoitia erpin kopurua.

(1.10)



a) b-tik d-rako ibilbide bat katea ez dena.

B, e, f, g, f, e, d

b) b-d kate bat bidea ez dena

B, e, f, g, e, D

c) b-tik d-rako bide bat

B, c, D

d) b-tik b-rako ibilbide itxia zirkuitua ez dena

B, a, c, d, e, f, e, B

e) b-tik b-rako ~~it~~ zirkuitua ~~ktd~~ zikloa ez dena

B, e, f, g, e, ~~B~~ d, c, a, B

f) b-tik b-rako zikloa

B, a, c, d, e, B

9

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V| = ? = n$

$|\mathcal{E}| = 10$

4 graduko bi erpin eta 3 gradukoak besteak.

<u>Teorema</u>: $\sum_{v\in V} d(v) = 2m \Rightarrow \cancel{3n+4(n-2)}\ 4\cdot 2 + 3(n-2) = 10\cdot 2 \Rightarrow 3n = 18 \Rightarrow \boxed{n=6}$

(1.4)

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V| = n = ?$

$|\mathcal{E}| = 19$

~~Grad.~~ Gutxienez 4-erregularra izan behar da.

<u>Teorema</u>: $\sum_{v\in V} d(v) = 2m \Rightarrow 4\cdot n = 2\cdot 19 \Rightarrow n = 9'5$

Baina ezin direnez 9'5 erpin egon grado kopurua ezberdina izan behar da.

$\sum_{v\in V} d(v) = 2m \Rightarrow 4\cdot(n-2) + 5\cdot 2 = 38 \Rightarrow 4n = 36 \Rightarrow \boxed{n=9}$

(1.5)

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V| = n = ?$

$|\mathcal{E}| = e = 2n-6$

3 erregularra

<u>Teorema</u>: $\sum_{v\in V} d(v) = 2m \Rightarrow 3n = 2(2n-6) \Rightarrow 3n = 4n - 12 \Rightarrow \boxed{n=12}$

$|\mathcal{E}| = 2n-6 = 18$

12 erpin eta 18 ertz izango dituo.

1.3

a) $G = (V, \mathcal{E})$

$|V| = ? = n$

$|\mathcal{E}| = 9$

3 erregularrak.

Teorema: $\sum_{n \in V} d(n) = 2m \Rightarrow 3n = 2 \cdot 9 \Rightarrow 3n = 18 \Rightarrow \boxed{n = 6}$

b)

$G = (V, \mathcal{E})$

$|V| = ? = n$

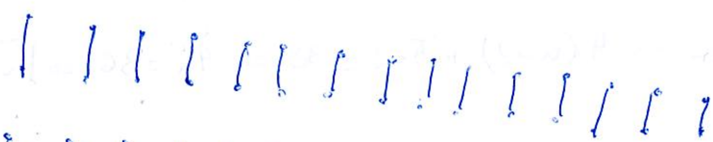
$|\mathcal{E}| = \cancel{9}\,15$

6 erregularra

Teorema: $\sum_{n \in V} d(n) = 2m \Rightarrow 6 \cdot n = \overset{30}{\cancel{18}} \Rightarrow n = \frac{\cancel{18}\,30}{6}$

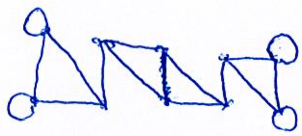
G-ren araberakoa izango da erpin kopurua:

$d(x) = 1 \Rightarrow n = 30$



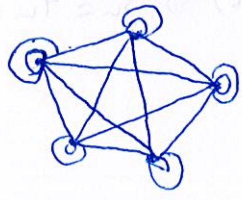
$d(x) = 2 \Rightarrow n = 15$

$d(x) = 3 \Rightarrow n = 10$



$d(x) = 5 \Rightarrow n = 6$

$d(x) = 6 \Rightarrow n = 5$



$d(x) = 10 \Rightarrow n = 3$

$d(x) = 15 \Rightarrow n = 2$

$d(x) = 30 \Rightarrow n = 1$

3.15

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V|=n \geq 2k+2$

$|\mathcal{E}|=m$

k erregularra

$\Longrightarrow$

$\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$

$|V|=n \geq 2k+2$

$|\bar{\mathcal{E}}| = K_n - m = n-1-k$

grafo osagarriak ziklo hamiltondarra daukala frogatuko da.

teorema: ziklo hamiltondarra izateko konektatua izan behar da eta

$\forall x \in V \quad d(x) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n-1-k \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n-1-\frac{n-2}{2} \geq \frac{n}{2} \Rightarrow \frac{2n-2-n+2}{2} \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$

$n \geq 2k+2 \Rightarrow \frac{n-2}{2} \geq k$

$\Rightarrow \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2}$

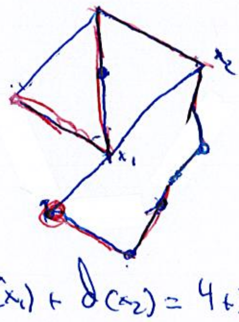
3.11

a)

bide hamiltondarra, $d(x)+d(y) < n-1$

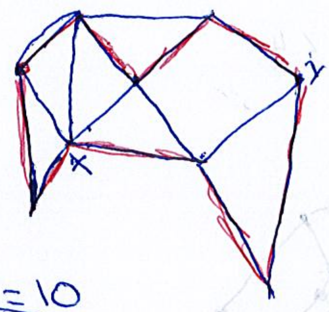
baldintzak: ~~$d($~~ ~~$\forall$~~ $\forall x \in V \quad d(x) \geq \frac{n-1}{2}$

~~$n=9 \Rightarrow d(x) \geq 4$~~ ~~$n=7 \Rightarrow d(x) \geq 3$~~



$d(x_1)+d(x_2) = 4+3 < 9-1 \Rightarrow 4+3 < 8 \Rightarrow 7 < 8$

b)

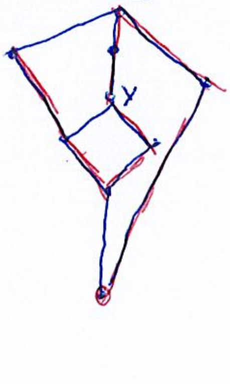


$n=10$

$d(x)+d(y) < n$ x eta y ezin dira izan auzokideak

$5+3 < 10 \Rightarrow \boxed{8 < 10}$

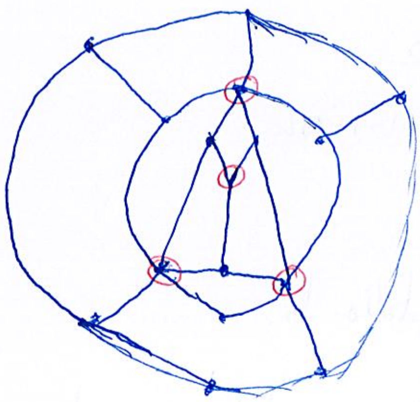
a)

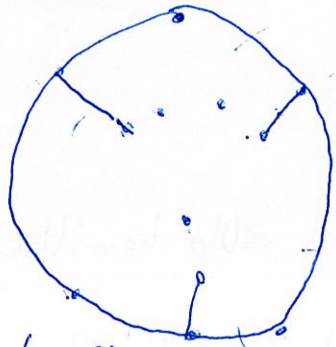


$d(x)+d(y) < n-1 \Rightarrow 3+3 < 9-1 \Rightarrow 6 < 8$

~~baldintza: $\forall x \in V \; d(x) \geq \frac{n-1}{2}$~~ =

3.17





$G = (V_1, \mathcal{E}_1)$

$V_1 = V - V' = 12$

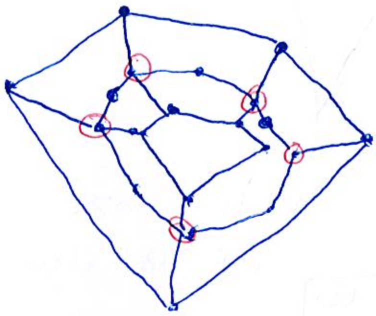
$\mathcal{E}_1 = 9$

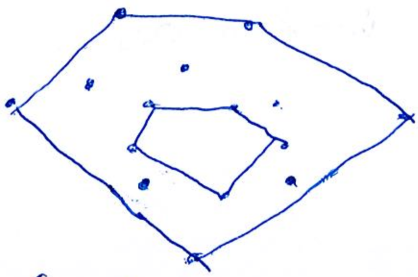
$V' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$K(G - V') = V_1 - V' - 1 = 8 - 1 = 7$

$K(G - V') \leq |V'|$

$7 \leq 4$





$V' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$G = (V_1, \mathcal{E}_1)$

$V_1 = 15$

$\mathcal{E}_1 = 10$

$K(G - V') \leq |V'|$

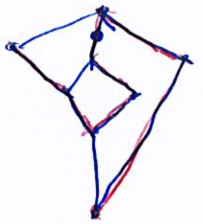
$15 - 5 - 1 \leq 5$

$9 \leq 5$

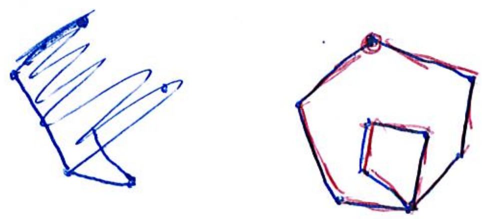
3.6

a)

Ez zirkuitu Eulertarrik ezta ziklo hamiltondarrik.

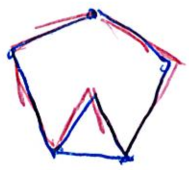


b) zirkuitu eulertarra dago baina ez ziklo hamiltondarrik

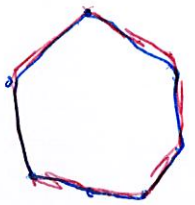


c)

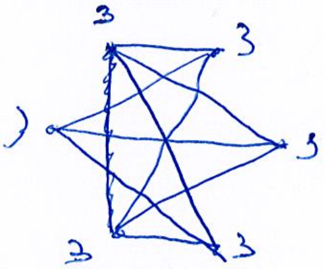
ziklo hamiltondarra bada baina ez zirkuitu hamiltondarrik.



d)

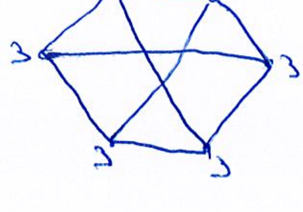


2.10



$|V|=6$

3-erregularra



teorema: Baldin $G=(V,E)$ hamiltondarra, orduan edozein $V'\subset V$ azpimultzorentzat, $\emptyset \neq V' \neq V$.

$$K(G-V') \leq |V'|$$

non $(G-V')=(V_1,E_1)$ non $V_1 = V-V'$ eta E_1: V'-rekiko intzidenteak diren ertzak ezik E-ko beste ertz guztiak.

Kate eta Zirkuitu Eulertarrak

teorema: G eulertarra izango da baldin eta soilik baldin konektatua bada eta erpin guztien gradua bikoitia bada.

Korolarioa: G-k kate eulertarra izango du baldin eta soilik baldin konektatua bada eta zehazki gradu bakoitiko bi erpin baditu.

Bide eta Ziklo Hamiltondarra

teorema: G-k bide hamiltondarra badu, $G=(V,E)$ grafo ez zuzendua izanik, n erpinekoa. Baldin:

$$d(x)+d(y)\geq n-1 \quad , \forall x,y\in V \ , \ x\neq y$$

Korolarioa: G-k bide hamiltondarra badu, $G=(V,E)$ grafo ez zuzendua izanik, n erpinekoa

$$\forall x\in V \quad d(x)\geq \frac{n-1}{2}$$

teorema: G hamiltondarra bada, $G=(V,E)$ grafo ez zuzendua izanik, $n\geq 3$ erpinekoa, Baldin

$$\forall x,y\in V \quad d(x)+d(y)\geq n$$

Korolarioa: G hamiltondarra da, $G=(V,E)$ grafo ez zuzendua izanik $n\geq 3$ erpinekoa. Baldin.

$$\forall x\in V \quad d(x)\geq \frac{n}{2}$$

(24)

Ume bolloitzeko gutxienez, gaileta bat.

7 gaileta eta 6 goxoko ⟹ 9~~7~~ guztira

$n=9$
$r=4$
Ordena? Ez!
Errep? Bai!

$$CR(n,r) = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495$$ modu desberdin egongo dira.

(23)

3 bolako izozki-kopa. 4 zapore: t, m, l eta k

$n=4$
$r=3$
Ordena? Ez!
Errep? Bai!

$$CR_{(4,3)} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

20 izozki-kopa desberdin sortu ditzakegu.

(21)

~~7 gaileta 6 goxoki, 4 ume~~

~~$n=4$~~
~~$r=4$~~
~~Ordena? Ez!~~

7 gaileta

_ _ _ _ _ _ _

Errep? ~~Ez!~~ Bai!

$$CR(n, r) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$ era desberdin

(21)

10 txanpon

5 lagunen artean banatzeko, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

a) murrizketarik gabe.

$n=5$

$r=10$

Ordena? Ez!

Errep? Bai!

$$CR_{(5,10)} = C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{(n+r-1-r)! \cdot r!} = \frac{14!}{4! \cdot 10!} = 1001 \text{ era}$$

desberdinetan kokatu daitezke.

b)

$n=5$

$r=5$

Ordena? Ez!

Errep? Bai!

$$CR(5,5) = C(n+r-1,r) = \frac{(n+r-1)!}{(n+r-1-r)! \cdot r!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126 \text{ era}$$

desberdin.

c)

$n=5$

$r=8$

Errep? Bai!

Ordena? Ez!

$n=4$

Errep

$$CR(4,8) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\, r!} = \frac{12!}{\cancel{8}! \cdot 8!} = \cancel{165}\ 495 \text{ era.}$$