Analisi Matematikoa
Ariketa ebatziak

Anonimoa

2017ko abendua

Gaien Aurkibidea

1 Gaia
Ariketa ebatziak

1.1 Zenbaki arruntak eta osoak

1. Froga ezazu indukzio-printzipioaren bidez:

   $f(n) = G(n) - G(n-1)$ bada, $f(1) + ... + f(n) = G(n) - G(0)$ beteko dela.

   Froga.

   $n = 1$ denean, $f(1) = G(1) - G(0)$ izango da, hau kasu berezia da, beraz alde batera utziko dugu.

   $n = 2$ denean $f(2) = G(2) - G(2-1)$ izango da, hau da, $f(2) = G(2) - G(1)$
   $n = 3$ denean $f(3) = G(3) - G(3-1)$ izango da, hau da, $f(3) = G(3) - G(2)$.

   n-ren hiru balio hauek erabiliz, hasierako ekuazioa frogatuko dugu $f(n)$ balioak ordezkatuz:

   $f(1) + f(2) + f(3) = G(3) - G(0)$
   $G(1) - G(0) + G(2) - G(1) + G(3) - G(2) = G(3) - G(0)$
   $G(3) - G(0) = G(3) - G(0)$

   Ikusi dugunez, $n = 3$ denean ekuazioa bete egiten da. Orain indukzio hipotesia erabiliz n-ren edozein baliotarako beteko dela frogatuko dugu. Horretarako berdintza $n + 1$ balioetarako betetzen dela frogatuko dugu, hasierako ekuazioaz baliatuz.

   Hasteko, ematen diguten berdintzan $n + 1$ jarriko dugu n-ren ordez, eta beraz $f(n+1) = G(n+1) - G(n)$ bada, $f(1) + ... + f(n) + f(n+1) = G(n+1) - G(0)$ bete beharko litzateke.

   Jakinik $f(1) + ... + f(n) = G(n) - G(0)$ dela, $f(1) + ... + f(n) + f(n+1) = G(n+1) - G(0)$ ekuazioan balioak ordezkatuko ditugu, ondorengo berdintza lortuz:

   $G(n) - G(0) + f(n+1) = G(n+1) - G(0)$

   Ondoren, $f(n+1)$-en balioa ordezkatuko dugu aurreko berdintzan, $f(n+1) = G(n+1) - G(n)$ dela jakinik, berdintza honetara iritsiz:

   $G(n) - G(0) + G(n+1) - G(n) = G(n+1) - G(0)$

Bukatzeko berdintza sinplifikatu eta $G(n+1) - G(0) = G(n+1) - G(0)$ dela lortuko dugu, hau da, berdintza egiazkoa dela. Beraz, frogatuta dago $f(n) = G(n) - G(n-1)$ bada, $f(1) + ... + f(n) = G(n) - G(0)$ beteko dela.

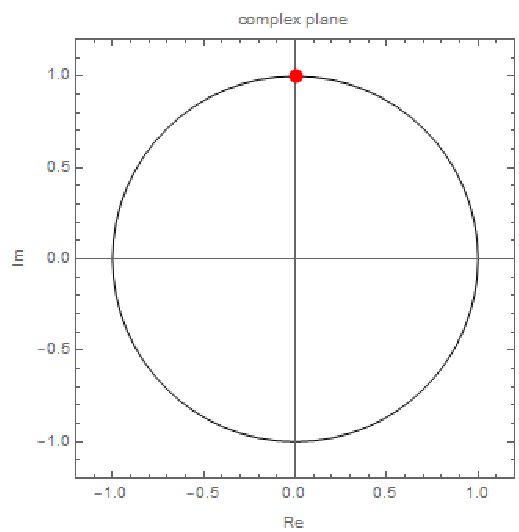
1.2 Zenbaki konplexuak

17.2 Ebatz ezazu ekuazio hau $\ln z = \frac{\pi}{2}i$ eta adieraz itzazu grafikoen bidez soluzioak:

Ebazpena.

$\ln z = \dfrac{\pi}{2}i$ bada, $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$ izango da, logaritmo nepertarraren definizioa jarraituz.

Eulerren formula jarraituz, hau da, $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$ hurrengo adierazpena lortuko dugu $z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ hau sinplifikatuz $z = 0 + 1i$ espresioa lortuko dugu, hau da, $z = i$.



1.3 Zenbaki arruntak eta osoak

1.4 Determina ezazu multzo honen barnealdea, muga eta kanpoaldea $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

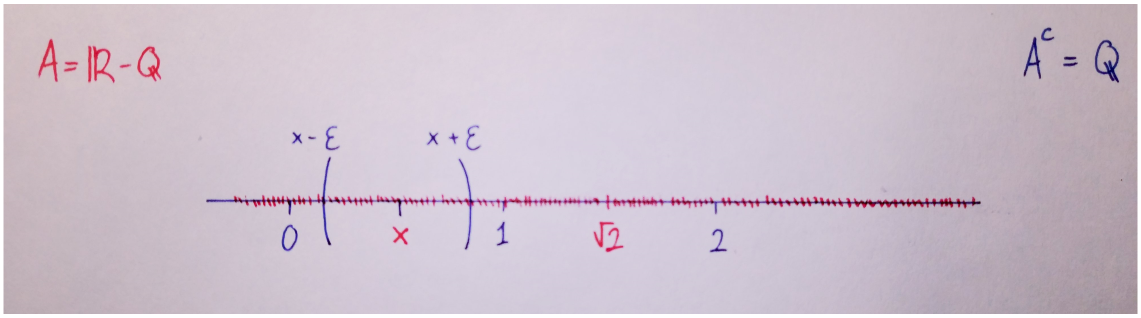
Ebazpena.

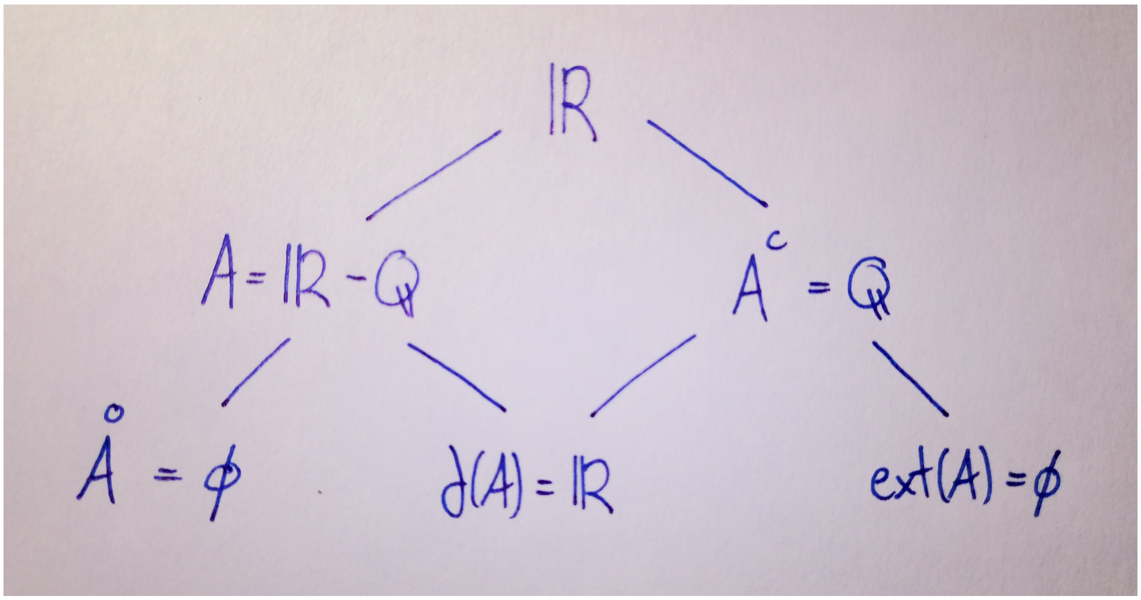
$\forall a \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{E}(a,\varepsilon) \not\subseteq A$ eta $\mathcal{E}(a,\varepsilon) \not\subseteq A^C$, $\mathcal{E}(a,\varepsilon)$ ingurunean zenbaki arrazionalak eta irrazionalak daudelako; beraz $a \in \partial(A)$ (Muga-puntua).

Ondorioz, $\mathring{A} = \varnothing$ eta $A \subset \partial(A)$.

Hortaz gainera, $\forall b \in A^C \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{E}(b,\varepsilon) \not\subseteq A^C$ eta $\mathcal{E}(b,\varepsilon) \not\subseteq A$, $\mathcal{E}(b,\varepsilon)$ ingurunean zenbaki arrazionalak eta irrazionalak daudelako; beraz $b \in \partial(A)$, muga-puntua izango, hau da, $A^C \subset \partial(A)$

Ondorioz, $A \cup A^C \subset \partial(A)$ edo $\mathbb{R} \subset \partial(A)$ izango da, eta $\operatorname{ext}(A) = \mathbb{R} - \mathring{A} - \partial(A)$ denez, $\operatorname{ext}(A) = \varnothing$ izango da.





1.4 Segidak $\mathbb{R}$ multzoan

4.16 Kalkula ezazu n gai orokorra duen segida honen limitea $(\ln(n^2+3n-1))^{-\frac{n^2-1}{3n^2+4n-1}}$

Ebazpena.

Hasteko gure ekuazioaren forma aldatuko dugu, honela jarriz:

$$\frac{1}{\ln(n^2+3n-1))^{\frac{n^2-1}{3n^2+4n-1}}}$$

Alde batetik, $\lim_{n\to\infty} \ln(n^2+3n-1) = \infty$ da; bestetik $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+4n-1} = \frac{1}{3}$ da.

Hortaz, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n^2+3n-1))^{\frac{n^2-1}{3n^2+4n-1}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}} = 0$ izango da.

Ondorioz, $\lim_{n\to\infty} \ln(n^2+3n-1))^{\frac{n^2-1}{3n^2+4n-1}} = 0$ izango da.

1.5 Serieak $\mathbb{R}$ multzoan

4.18 Determina ezazu θ parametroa duen serie honen izaera: $\dfrac{|\sin n\theta|}{n^2}$

Ebazpena.

Hasteko seriea gai positiboko seriea (GPS) dela konprobatuko dugu. Serieko zatiduraren zenbakitzaileari dagokionez, honen balioa beti izango da positiboa θ parametroa edozein izanik, balio absolutua baitugu. Beste aldetik izendatzailean n gai orokorraren berreketa dugu, beti positiboa izango dena, n positiboa izango baita. Ondorioz, gai positiboko seriea dugu eta beraz konparaziozko irizpide orokorra (KIO) erabil dezakegu honen izaera determinatzeko.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{|\sin n\theta|}{n^2} \leq \sum \dfrac{2}{n^2}$ betetzen da, $\sum \dfrac{2}{n^2}$ serie harmoniko orokorra baita, $\alpha = 2$ izanik. Beraz $\sum_n \dfrac{2}{n^2}$ seriea enuntziatuko seriearen maiorantea da.

Gai positibokoa denez zatiduraren irizpidea aplika dezakegu:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{2}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^2}} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$ da. Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ da. Hau zalantzazko kasua da, zatiduraren irizpidearen arabera. Beraz, Raabe-ren irizpidea aplikatuko dugu ebazpenarekin jarraitzeko:

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} \text{ da.}$$

Hortaz, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 2 > 1$ da. Ondorioz, serie maiorante konbergentea da.

Azkenik, Konparaziozko irizpide orokorra aplikatuz, $\sum \dfrac{|\sin n\theta|}{n^2}$ seriea ere konbergentea da, θ parametroaren balioa edozein izanik.