Gaien Aurkibidea

1 Integral mugagabea.

1.1 Integral mugagabea.

1.1 Definizioa. *Izan bedi* $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funtzioa,* $[a,b]$ *tartean* $F'(x) = f(x)$ *betetzen duen edozein* $F(x)$ *funtzioari* $f(x)$ *funtzioaren jatorrizko funtzio deritzo.*

1.2 Definizioa. $F_1(x)$ *eta* $F_2(x)$ *funtzioak* $f(x)$ *funtzioaren bi jatorrizko funtzio badira,* $F_1(x) - F_2(x) = K$ *konstante izango da,* $[a,b]$ *tartean.*

Froga.

Hipotesiz, $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ izango da. Har dezagun $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ funtzioa.

$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow G(x) = K$ konstantea da, hau da. $F_1(x) - F_2(x) = K$.

Hortik atera dezakegu, $f(x)$ funtzioaren jatorrizko funtzio guztiek $F(x) + K$ itxura dutela, $F(x)$ jatorrizko funtzio bat izanik.

1.3 Definizioa. $F(x) + k$ *adierazpenari, f(x) funtzioaren integral mugagabea*[1] *deritzo eta* $\int f(x)dx$ *idatziko dugu. Hau da,* $\underline{\int f(x)dx}$ [1] $=$ $\underline{F(x) + K}$ [2] *da.*

1.4 Ondorioak. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + K\right)' = F'(x) = f(x)$.

$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + K$.

Laburbilduz, d *eta* $\int$ *eragileak elkarren aderantzizkoak dira.*

1.5 Propietatea. *Integralen propietateak:*

1. *Integral mugagabea lineala da:*
   $\int \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$
2. $F'(x) = f(x)$ *bada,* $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + K.$

Oharra. *Funtzio guztiek ez dute jatorrizko funtziorik. Baina funtzio jarraitua bada, beti izango du jatorrizko funtzio bat, hots, integral mugagabea izango du. Hala ere, integral mugagabea beti ezin da adierazi funtzio elementalen bidez, Adibidez:*

$$\int \frac{-sinx}{x^n}dx, \int e^{-x^2}dx...$$

[2] Infinitua.
[1] Bakarra.

1.2 Integrazio-metodoak.

1.2.1 Berehalako integralak.

1. $\int 0\, dx = k, \int a\, dx = ax + k.$

2. $\int x^a\, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + k, \int g(x)^a g'(x)\, dx = \dfrac{g(x)^{a+1}}{a+1} + k, \quad a \neq -1.$

3. $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + k, \int \dfrac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln|g(x)| + k.$

4. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k, \int a^{g(x)} g'(x)\, dx = \dfrac{a^{g(x)}}{\ln a} + k, \quad a > 0.$

5. $\int e^x\, dx = e^x + k, \int e^{g(x)} g'(x)\, dx = e^{g(x)} + k.$

6. $\int \dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\, dx = 2\sqrt{g(x)} + k, \int \dfrac{g'(x)}{\sqrt[n]{g(x)^{n-1}}}\, dx = n\sqrt[n]{g(x)} + k.$

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + k, \int g'(x) \sin g(x)\, dx = -\cos g(x) + k.$

8. $\int \cos x\, dx = \sin x + k, \int g'(x) \cos g(x)\, dx = \sin g(x) + k.$

9. $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + k, \int g'(x) \tan g(x)\, dx = -\ln|\cos g(x)| + k.$

10. $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + k, \int g'(x) \cot g(x)\, dx = \ln|\sin g(x)| + k.$

11. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + k, \int g'(x) \csc^2 g(x)\, dx = -\cot g(x) + k.$

12. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + k, \int g'(x) \sec^2 g(x)\, dx = \tan g(x) + k.$

13. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + k, \int \dfrac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g(x)^2}}\, dx = \arcsin \dfrac{g(x)}{a} + k, \quad a \neq 0.$

14. $\int \dfrac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arccos \dfrac{x}{a} + k, \int \dfrac{-g'(x)}{\sqrt{a^2 - g(x)^2}}\, dx = \arccos \dfrac{g(x)}{a} + k, \quad a \neq 0.$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + k, \int \frac{g'(x)}{a^2+g(x)^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{g(x)}{a} + k, \quad a \neq 0.$

16. $\displaystyle\int \frac{-1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\text{arccot }\frac{x}{a} + k, \int \frac{g'(x)}{a^2+g(x)^2}\,dx = \frac{1}{a}\text{arccot }\frac{g(x)}{a} + k, \quad a \neq 0.$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + k, \quad a \neq 0.$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + k.$

19. $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + k.$

20. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + k.$

1.2.2 Ordezkapen-metodoa edo aldagai-aldaketa.

$\int f(x)dx$ kalkulatzeko, $x = \varphi(t)dx = \varphi'(t)dt$ aldagai aldaketa egingo dugu.

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

.

1.6 Adibideak. *Integralaren ebazpena ordezkapen metodoaren bidez.*

1. $\sqrt{1-x^2}$.

   $x = \sin t$\$

$dx = cos\ dt$\$$\Rightarrow I = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\ dt = \int \cos t \cos t\ dt = \int \cos^2 t\ dt.$

$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ *da. Beraz,* $I = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \dfrac{1}{2} \int dt + \dfrac{1}{2} \int \cos 2t\ dt = t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 2t}{2} + K$

Aldagai-aldaketa desegingo dugu:

$I = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{\sin 2t}{4} + K = \dfrac{1}{2}t\ \dfrac{+2\sin t \cos t}{4} + K$ [3] $=$

$$I = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + K.$$

2. $\int \dfrac{x}{1+x^2}dx.$

$\int x\ \dfrac{1}{1+x^2}dx.$

x, berehalako integralen bidez integratuko dugu.

$x\ dx = \dfrac{1}{2}(x^2)$

eta orain, aldagai aldaketa egingo dugu.

$x^2 = t,\ 2x\ dx = dt \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+t},\ x\ dx = \dfrac{1}{2}\ dt$

Orain, aldagai aldaketa desegingo dugu:

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + K$$

---

[3] $t = \arcsin x; \sin t = x; \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$

1.2.3 Zatikako Integrazioa.

Izan bitez u eta v bi funtzio deribagarri: $(uv)' = u'v + v'u$, $d(uv) = v\ du + u\ dv$. Orain, berdintza integratuz: $\int d(uv) = uv = \int v\ du + \int v\ du$ izango dugu. Hortik formula hau lortuko dugu: $\int u\ dv = uv - \int v\ du$. Guk $f(x)dx = u\ dv$ deskonposaketa egin behar dugu.

1.7 Adibideak. *Integral ebazpena zatikako integrazioaren bidez.*

1. $I = \int \cos^2 t\ dt$

   Lehenik eta behin integrala deskonposatuko dugu:

   $u = 1, cos^2 t\ dt = dv.$

   $u = \cos\ t,\ \ dt = dv.$

   $u = \cos^2 t,\ dt = dv.$

   Orain u eta dv lortuko ditugu:

   $du = 0$ *(ez du balio, ezinezkoa delako).*

   $du = \sin t\ dt,\ v = \int \cos t\ dt = sint.$

   $du = -2\cos t \sin t,\ v = \int dt = t.$

   $I = \cos t \sin t - \int \sin t(-\sin t)\ dt = \cos t \sin t + \int (1 - \cos^2 t)\ dt = \cos t \sin t + \int dt$ $- \int \cos^2 t\ dt = \cos t \sin t + t - I\ 2I = \cos t + \sin t + t$

   $$I = \frac{\cos t + \sin t}{2} + \frac{t}{1} + K.$$

2. $\int \ln t\ dt.$

   $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t}\ dt.$

   $dv = dt \Rightarrow v = t.$

   $I = t \ln t - \int t \frac{1}{t} dt = t \ln |t| - t + K =$

   $$t \ln |t - 1| + K.$$

1.2.4 Funtzio arrazionalen integrazioa.

Izan bitez $P(x)$ eta $Q(x)$ m eta n mailetako polinomioak. $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ integrala kalkulatu nahi badugu, ondorengo urratsak emango ditugu:

1. $P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioen arteko sinplifikazioa egingo dugu, faktore komunen bidez.
2. Zatidura kalkulatuko dugu: $P(x) = Z(x)^4Q(x) + H(x)^5$ izango dugu, $H(x)$ polinomioaren maila n baino txikiagoa izanik. Hortik hau aterako dugu:
   $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int Z(x)dx + \int \frac{H(x)}{Q(x)}dx$
   $Z(x)$ funtzioaren integrala berehalakoa da.
3. $Q(x)$ polinomioa faktore linealetan eta koadratikoetan deskonposatuko dugu:
   $Q(x) = \underline{a(x-\alpha_1)^{K_1}...(x-\alpha_r)^{K_r}}$ [6] $\underline{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$, [7]
   $k_1 + ... + k_r + 2l_1 + ... + 2l_s = n$ izanik.
4. $\frac{H(x)}{Q(x)}$ funtzioa zatiki bakunen batura bezala adieraziko dugu. Zatiki horiek mota hauetakoak izan daitezke:

   (a) Erro erreal bakun bakoitzeko $\frac{A}{x-\alpha}$ motako zatiki bat izango dugu eta bere integrala hau izango da:
   $\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-a| + K.$

   (b) Erro erreal anizkoitz bakoitzeko batura hau izango dugu, erroaren anizkoiztasuna k izanik:
   $\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$
   Bigarrenetik aurrera, batugai horien integrala hau da:
   $\int \frac{A_h}{x-\alpha}dx = \frac{-A_h}{(h-1)(x-\alpha)^{h-1}}$

   (c) Erro konplexu konjugatu bakunen bikote bakoitzeko $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ motako zatiki bat izango dugu. Bere integrala honela lortuko dugu:
   $\frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{Ax+b}{(x-a)^2+b^2}, a = \frac{-p}{2}$ eta $b^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ izanik.
   $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{Aa+B}{b}\arctan\frac{x-a}{b} + K.$

[4] Zatidura
[5] Hondarra
[6] Erro errealak
[7] Erro konplexuak

(d) Erro konplexu konjugatu anizkoitzen bikote bakoitzeko batura hau izango dugu erroaren anizkoitasuna l izanik: $\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l}$
Bigarrenetik aurrera, batugai horien integraketan bi integral hauek ager daitezke:

$$\int\frac{du}{(u^2+b^2)^h}=\frac{1}{2(h-1)b^2}\left(\frac{u}{(u^2+b^2)^{h-1}}+(2h-3)\int\frac{du}{(u^2+b^2)^{h-1}}\right) \text{ eta}$$

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^h}dx=\frac{Y(x)}{(x^2+px+q)^{h-1}}+\int\frac{X(x)}{x^2+px+q}dx,$$

non $Y(x)$ polinomioaren maila $2h-3$ den eta $X(x)$ polinomioarena 1.

1.2.5 Funtzio irrazionalen integrazioa.

Integral binomialak

$\int x^m(a+bx^n)^p dx$ integral binomialak, a,b $\in\mathbb{R}$ eta $m,n,p\in\mathbb{Q}$ izanik.

1. $p\in Z$ bada, aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $x=t^{\frac{1}{t}}$, edo $x^n=t$;
2. $p\in\mathbb{Q}-Z$, $p=\dfrac{q}{s}$ eta $\dfrac{m+1}{n}\in Z$ badira, $a+bx^n=t^s$ aldaketa egingo dugu;
3. $p,\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Q}-Z, p=\dfrac{q}{s}$ eta $\dfrac{m+1}{n}+p\in Z$ badira, $ax^{-n}+b=t^s$ aldaketa egingo dugu;

1.2.6 Funtzio transzendenteen integrazioa

I Funtzio esponentzialak

$\int R(a^x)dx$ integrala kalkulatzeko $a^x=t$, $dx=\dfrac{dt}{t\ln a}$ aldagai aldaketa egingo dugu.

II Funtzio logaritmikoak

$\int\dfrac{R\ln x}{x}dx$ integrala kalkulatzeko $\ln x=t$, $\dfrac{dx}{x}=dt$ aldagai aldaketa egingo dugu.

III Funtzio trigonometrikoak

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ integrala kalkulatzeko aldagai-aldaketa orokorra hau da:

$$\tan\frac{x}{2} = t \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Beste aldagai aldaketa batzuk:

$$\sin x = t \quad \cos x dx = dt \qquad \cos x = \sqrt{1-t^2} \quad \tan x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x = t \quad -\sin x dx = dt \qquad \sin x = \sqrt{1-t^2} \quad \tan x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$$

$$\tan x = t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

1.3 Ariketak

1.3.1 Kalkula itzazu ondoko integralak

(7) 42. ariketa: I=$\int \dfrac{\arctan x}{1+x^2} = \int \arctan x \dfrac{1}{1+x^2} dx$

Ordezkapen metodoaz baliatuko gara ariketa hau egiteko:

$u = \arctan x, du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \| \Rightarrow \int u\ du = \dfrac{u^2}{2} + K.$

Orain, aldagai aldaketa desegingo dugu emaitza lortuz:

$$I = \frac{(\arctan x)^2}{2} + K.$$

83. ariketa: I=$\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Ordezkapen metodoaz baliatuko gara:

$u = 1 - x^2, -\dfrac{1}{2} du = x\ dx\ \| \Rightarrow$- $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int \dfrac{1}{\sqrt{u}} du = -\dfrac{1}{2} 2\sqrt{u} + K = -\sqrt{u} + K. =$

Orain, aldagai aldaketa desegingo dugu emaitza lortuz:

$$I = -\sqrt{1-x^2} + K.$$

132. Ariketa I=$\int (5x^2 - 3) 4^{3x+1} dx$

Zatikako integrazioaz baliatuko gara ariketa hau egiteko:

$dv = 4^{3x+1} dx,\ v = \int 4^{3x+1}\ dx = \dfrac{1}{3} \int 3(4^{3x+1})\ dx = \dfrac{1}{3} \dfrac{4^{3x+1}}{\ln 4} dx\ \|$
u=5x$^2 - 3, du = 10x\ dx\ \|$
$I = \dfrac{1}{3}\ (5x^2 - 3) \dfrac{4^{3x+1}}{\ln 4} - \dfrac{10}{3 \ln 4} \int x 4^{3x+1} dx$

$u = x, du = dx\ \|$
dv= $4^{3x+1}, v = \dfrac{1}{3 \ln 4} 4^{3x+1} \|$

$$I = \frac{4^{3x+1}}{3 \ln 4}\ (5x^2 - 3) - \frac{10}{3 \ln 4} \left[\frac{x}{3 \ln 4} 4^{3x+1} - \int \frac{1}{3 \ln 4} 4^{3x+1} dx \right] =$$
$$= \frac{4^3 x + 1}{3 \ln 4} (5x^2 - 3) - \frac{10}{(3 \ln 4)^2} (x 4^{3x+1}) + \frac{10}{(3 \ln 4)^2} \int 4^{3x+1} dx =$$

$$= \frac{4^{3x+1}}{3 \ln 4} (5x^2 - 3) - \frac{10}{(3 \ln 4)^2} (x 4^{3x+1}) + \frac{10}{(3 \ln 4)^3} 4^{3x+1} + K.$$

1.4 Bibliografia

www.sharelatex.com/learn ⇒ *Latexlanaegiteko*
www.khanacademy.org ⇒ *Integralaknolaegitendirenhobetoulertzeko*
*egela*1617*.ehu.eus* ⇒ *Oinarrizkoinformazioajasotzeko*