Kalkulua

Aldagai anitzeko funtzioen diferentziagarritasuna

Oihana Leiza Alzuart

March 21, 2017

Aurkibidea

2 Aldagai anitzeko funtzioen diferentziagarritasuna **1**
2.1 Norabidezko deribatuak eta deribatu partzialak 1
2.2 Diferentziagarritasuna. Diferentzial totala 2

2. Gaia
Aldagai anitzeko funtzioen diferentziagarritasuna

2.1 Norabidezko deribatuak eta deribatu partzialak

2.1. Definizioa. *Izan bedi* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *funtzio bektoriala. Ondoko limeteari, existitzen denean,* $a \in A$ *puntuko* u *norabideko deribatu deritzo, eta* $D_u f(a)$ *idatziko dugu.*

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \qquad D_u f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t}.$$

2.2. Teorema. $f(x)$ *funtzio bektoriala* $f \equiv (f_1, f_2, ..., f_m)$ *bada,*
$D_u f(a)$=($D_u f_1(a)$, $D_u f_2(a)$, ..., $D_u f_m(a)$) *izango da.*

2.3. Definizioa. *f(x) funtzio bektoriala emanik,* $u = e_k = (0,0,0,...,0,\overset{k}{\frown}\!\!\!\!1,0,...,0)$ *denean, bektore kanonikoa, limite hau izango dugu:*

$$D_{e_k} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_k + t, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_n)}{t}.$$

Limite honi a puntuko k. deribatu partzial deritzo eta $D_k f(a)$ *idatziko dugu.*

2.4. Teorema. $f(x)$ *funtzio bektoriala* $f \equiv (f_1, f_2, ..., f_m)$ *bada,*
$D_k f(a)$=($D_k f_1(a)$, $D_k f_2(a)$, ..., $D_k f_m(a)$) *izango da.*

2.5. Adibidea.
1)

Izan bedi f(x,y)= $\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Kalkula ditzagun horren norabidezko deribatuak u=(u_1, u_2)$\in \mathbb{R}^2$ bada.

$$D_u f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(u_1,u_2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(tu_1)^2 tu_2}{(tu_1)^4 + (tu_2)^2}}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2} = \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}, u_2 \neq 0 \quad \textit{bada.}$$

$u_2 = 0$ *denean,* $u = (u_1, 0)$ *da.*

$$D_{(u_1,0)}f(0,0) \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

$D_u f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{u_1^2}{u_2} & u_2 \neq 0 \\ 0 & u_2 = 0 \end{cases}$ *; hortaz, norabidezko deribatu guztiak existitzen dira.*

Baina, aurreko gaiko 10.adibidean ikusi genuen moduan, funtzio honek ez dauka limiterik jatorrian, hau da, funtzioa ez da jarraitua.

Deribatu partzialak:

$D_1 f(0,0) = 0$ *eta* $D_2 f(0,0) = \dfrac{0^2}{1} = 0$ *dira.*

2)

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = (\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \sin(x+y))$, $(x,y) \neq (0,0)$

$f_1(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2y^2}$ *eta* $f_2(x,y) = \sin(x+y)$.

- $D_1 f_2(x,y) = \cos(x+y)$.
- $D_2 f_2(x,y) = \cos(x+y)$.
- $D_1 f_1(x,y) = \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.
- $D_1 f_1(x,y) = \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Hortaz, $D_1 f(x,y) = \left(\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \cos(x+y)\right)$ *eta* $D_2 f(x,y) = \left(\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \cos(x+y)\right)$ *dira.*

2.2 Diferentziagarritasuna. Diferentzial totala

2.6. Definizioa. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *funtzio bektoriala diferentziagarria da* $a \in A$ *puntuan* $Df(a) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *aplikazio lineal bat existitzen bada, non*

$f(a+u) = f(a) + Df(a)(u) + \| u \| E_a(u)$ *betetzen baita* $\lim_{u\to\theta_n} E_a(u) = \theta_m$ *izanik.*
Df(a) aplikazio lineralari diferentzial total edo deribatu total deritzo.

$\lim_{u\to\theta_n} E_a(u) = \theta_m$ *baldintza honela idatzi daiteke:*

$$\lim_{v\to\theta_n} \frac{f(a+u) - f(a) - Df(a)(u)}{\| u \|} = \theta_m.$$

2.7. Teorema. *f(x) funtzio bektoriala diferentziagarria bada $a \in A$ puntuan, f(x) jarraitua izango da bertan.*

2.8. Teorema. *f(x) diferentziagarria bada $a \in A$ puntuan, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ $D_u f(a)$ existituko da eta $Df(a)(u) = D_u f(a)$ izango da.*

$$\begin{aligned} Df(a) : A \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m, Df(a)(u) = D_u f(a) \text{ izanik.} \\ u &\to D_u f(a) \end{aligned}$$

2.9. Teorema. *f(x) diferentziagarria bada $a \in A$ puntuan,*

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \; Df(a)(u) = \sum_{k=1}^{n} u_k D_k f(a) = (D1f(a), ..., D_n f(a)) \; D_k f(a) \begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Hortaz, Df(a) $\equiv (D_1 f(a), ..., D_n f(a))$ dela pentsa dezakegu, hau da, D f(a) deribatu partzialez osatutako matrizea da.

2.10. Definizioa. *$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala diferentziagarria bada $a \in A$ puntuan, $Df(a) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio linealari dagokion $m \times n$ dimentsioko matrizeari matrize jacobitar deritzo.*

9.Teorematik $Df(a) \equiv (D_1 f(a), ..., D_n f(a))$ da.

$$\text{4.Teorematik } D_k f(a) \equiv \begin{pmatrix} D_k f_1(a) \\ . \\ . \\ . \\ D_k f_m(a) \end{pmatrix} \text{ da.}$$

$$\text{Hortaz, } Df(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & ... & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & ... & D_n f_2(a) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & & D_n f_m(a) \end{pmatrix} \text{ da.}$$

m=1 denean, $Df(a) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aplikazio lineal erreala da. Matrize jacobitarrak errenkada bakarra du eta, batzuetan, ∇ f(a) idazten da eta gradiente deritzo.

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), ..., D_n f(a)).$$

2.11. Adibidea.

1. $f(x,y) = (\frac{x^2y}{x^2y^2}, \sin(x+y))$ (2.5.2 adibideko funtzioa)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)} \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}, (x,y) \neq (0,0)$$

2. $f(t) = (\sin 2t, \cos 3t)$

$$Df(t) = \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ -3\sin 3t \end{pmatrix}$$

2.12. Adibidea. (Ariketak)

1.1 Kalkula itzazu norabidezko deribatuak ematen diren puntuetan eta norabideetan:

1) $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 - 1$, $a = (1,2)$, $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
Norabidezko deribatua:

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \qquad D_u f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

Beraz gure kasuan,

$$D_u f(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,2) + t(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})) - f(1,2)}{t}$$

$$D_u f(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{5+3t}{5}, \frac{10+4t}{5}) - f(1,2)}{t}$$

Kalkula dezagun $f(\frac{5+3t}{5}, \frac{10+4t}{5})$

$$f(\tfrac{5+3t}{5}, \tfrac{10+4t}{5}) = \left(\tfrac{(5+3t)}{5}\right)^3 - 2\left(\tfrac{(5+3t)}{5}\right)^2 \left(\tfrac{(10+4t)}{5}\right) + \left(\tfrac{(5+3t)}{5}\right)^1 \left(\tfrac{(10+4t)}{5}\right)^2 - 1 =$$

$$f(\tfrac{5+3t}{5}, \tfrac{10+4t}{5}) = \tfrac{3t^3+35t^2+125t+125}{125} - 1 = \tfrac{3t^3+35t^2+125t}{125}$$

Kalkula dezagun f(1,2)

$f(1,2) = 1^3 - 2(1^2 \cdot 2) + 1 \cdot 2^2 - 1 = 0.$

Beraz,

$$D_u f(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{3t^3+35t^2+125t}{125}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^3+35t^2+125t}{125t} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2+35t+125}{125} = 1.$$

2.13. Adibidea.

1.2 Kalkula itzazu lehen ordenako deribatu partzialak:

10) $z = \ln \tan \dfrac{x}{y}$

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} =?$ y konstante muduan tratatuz.

Katearen erregela erabiliz:

$$\frac{df\,(u)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Izan bedi $\tan(x/y) = u$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\, u}\,(\ln{(u)})\,\frac{\partial}{\partial\, x}\left(\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

Zati bakoitza bere aldetik deribatuz:

$$\frac{\partial}{\partial\, u}\,(\ln{(u)}) = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial\, x}\left(\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y}$$

Beraz

$$\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y}$$

u ordezkatuz:

$$\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y} = \frac{\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y\tan\left(\frac{x}{y}\right)}$$

b) $\dfrac{\partial x}{\partial y} =?$ x konstante moduan tratatuz.

Katearen erregela erabiliz:

$$\frac{df\,(u)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Izan bedi $\tan(x/y) = u$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial\, u}\,(\ln{(u)})\,\frac{\partial}{\partial\, y}\left(\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

Zati bakoitza bere aldetik deribatuz

$$\frac{\partial}{\partial\, u}(\ln(u)) = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial\, y}\left(\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

Katearen erregela erabiliz:

$$\frac{df\,(u)}{dx} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Izan bedi $\dfrac{x}{y} = v$

$$\frac{\partial}{\partial\, y}\left(\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial\, v}(\tan(v))\,\frac{\partial}{\partial\, y}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\, v}(\tan(v)) = \sec^2(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial\, y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

v ordezkatu

$$\frac{\partial}{\partial\, y}\left(\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \sec^2\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial\, u}(\ln(u))\,\frac{\partial}{\partial\, y}\left(\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right)\frac{1}{u}\left(-\frac{x\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right)$$

u ordezkatu

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{y}\right)}\left(-\frac{x\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right) = -\frac{x\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2\tan\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$z = \ln\tan\dfrac{x}{y}$ funtzioaren lehen ordenako deribatu partzialak:

$$\frac{\partial}{\partial\, x} = \frac{\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y\tan\left(\frac{x}{y}\right)} \qquad \text{eta} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2\tan\left(\frac{x}{y}\right)} \text{ dira.}$$