1. GAIA | Aldagai anitzeko funtzioak. Jarraitutasuna.

uadukoa

1.1. Aldagai anitzeko funtzioak. Limiteak.

1) Definizioa

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funtzioari aldagai anitzeko funtzio bektoriala deritzo (irudi bat baino gehiago).

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ bada $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots x_n)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, … izango dira, non $f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioak aldagai anitzeko funtzio errealak diren.

f_i funtzio errealei $f(x)$ funtzioaren osagai funtzio deritze. Orduan, horrela idatz dezakegu: $f \equiv (f_1, f_2, \dots, f_n)$

2) Definizioa

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio bektorialak $a \in A$ puntuan $\ell \in \mathbb{R}^m$ limitea du baldin eta $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < d_n(x, a) < \delta \Longrightarrow d_m(f(x), \ell) < \varepsilon$ edo

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < \|x - a\|_n < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_m < \varepsilon$ baita, eta $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ idatziko dugu.

3) Propietatea

$f(x)$ funtzio bektorialak $a \in A$ puntuan ℓ limitea badu,

1. ℓ limitea bakarra da.
2. funtzioa bornatua da a puntuaren bola batean

4) Teorema

Izan bedi $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala:

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ da baldin eta soilik baldin $\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$ bada, $\forall i = 1, \dots, m$

Honek esan nahi du funtzio bektorial bat aztertzeko nahikoa dela horren osagai funtzio errealak aztertzea.

"Bostalde n aldagaiekin egin behar den azterketa ikasteko, nahikoa da 2 aldagaiekin egiten den azterketa ikastea"

5) Definizioa: Limite bikoitza (LB)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio errealak $(a,b) \in A$ puntuan $\ell \in \mathbb{R}$ limitea du baldin eta $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < d((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$ edo

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$ baita, eta

$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \ell$ idatziko dugu.

6) Definizioa: Norabide limitea (NL)

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzioa emanik, $f(x,y)$ funtzioaren (a,b) puntuko limitea kalkulatzean, (x,y) aldagaiari S multzoan egoteko baldintza ezartzen bazaio, S norabideko bektorea lortuko dugu.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ (x,y) \in S \quad 0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$ (…)

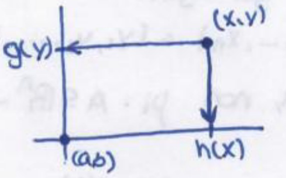
(...) eta $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in S}} f(x,y) = l$ idatziko dugu.

7) Definizioa: Dimentsio bakarreko limitea (dbl)

$f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funtzioa emanik, $f(x,y)$ funtzioaren (a,b) puntuko limitea kalkulatzean, aldagai bat konstante uzten badugu dimentsio bakarreko limitea lortuko dugu.

y kte. $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = g(y)$

x kte. $\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = h(x)$



8) Definizioa: limite berrituak (lb)

$f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funtzioa emanik, dimentsio bakarreko limiteak existitzen badira horien limiteak kalkula ditzakegu horrela:

$$\lim_{y\to b} g(y) \left(= \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)\right) \text{ eta } \lim_{x\to a} h(x) \left(= \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$$

9) Teorema

Izan bedi $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funtzio erreala $(a,b)\in A$ puntuko dimentsio bakarreko limiteak existitzen direla pentsatuko dugu.

Funtzioaren limite bikoitza existitzen bada $(a,b)\in A$ puntuan, limite berrituak existituko dira eta limite bikoitzaren berdina izango dira.

$$\exists \text{dbl} \mid \exists LB \Rightarrow \exists lb \text{ eta } lb = LB$$

10) Adibidea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R}^2$$

limiterik existitzen da jatorrian? dbl   limite-berrituak

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = 0 = g(y)$

$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = 0 = h(x)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0\end{array}\right\} lb = 0$

zuzenak

$(y-b) = m(x-a)$ formula orokorra $\underset{(a,b)=(0,0)}{\Longrightarrow}$ $y = mx$, $x = 0$

↑ edozein zuzenentzat ↑ zuzen bertikala

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = 0, \forall m\neq 0$$

parabolak

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=\lambda x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=\lambda x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\lambda x^2)}{x^4+(\lambda x^2)^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

norabidearen arabera limiteak desberdinak dira

⇓

LB ez da existitzen

1.2. Aldagai anitzeko funtzioen jarraitutasuna

1.1) Definizioa

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala jarraitua da $a \in A$ puntuan $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ bada, hau da,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ x \in A \text{ eta } d_n(x, a) < \delta \Rightarrow d_m(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

1.2) Teorema

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala jarraitua da $a \in A$ puntuan b.s.b. $f_i(x)$ osagai funtzio errealak jarraituak badira $a \in A$ puntuan, $\forall i = 1, \ldots, m$

1.3) Definizioa

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funtzioa jarraitua da A multzoan A-ren puntu guztietan jarraitua bada.

1.4) Adibidea

Aztertu dezagun $f(x,y)$ funtzioaren jarraitutasuna jatorrian

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & x \neq 0 \text{ eta } y \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \exists f(0,0) = 0$$

Limite Bikoitzak

$$\lim_{x \to 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = \nexists \ (\sin \tfrac{1}{0} \nexists)$$

$$\text{Zuzenak: } y = mx \quad \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = mx}} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = \lim_{x \to 0} x(1+m) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{mx} = 0$$

Definizioa

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ (x,y) \in D_f \text{ eta } \underbrace{\|(x,y) - (0,0)\| < \delta}_{2} \Rightarrow \left|(x+y) \sin \tfrac{1}{x} \sin \tfrac{1}{y} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0\right| = \left|(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\right| \leq |x+y| \leq |x| + |y| \quad 1$$

$\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = |x| + |y|$ norma aukeratuko dugu.

Orduan, $|x| + |y| < \delta$ dela jakinda, nahikoa da $\delta < \varepsilon$ aukeratzea 3

$$\left|(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\right| \underset{1}{\leq} |x| + |y| \underset{2}{<} \delta \underset{3}{<} \varepsilon \text{ izateko.}$$

1 — 2 hipotesia — 3 gure erabakia, aurkitu duguna