38. (2008ko iraila) bikoitia(x) eta bikmugi(C(1..r), (c_1, c_2, …, c_r), D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos) predikatuak eta A(1..n) bektoreko posizioetan elementu bikoitia dagoen bakoitzean, posizio horretako A(1..n) eta B(1..n) bektoreetako elementuak trukatu eta A(1..n) bektoreko posizioetan elementu bakoitia dagoen bakoitzean, A(1..n) bektoreko posizio horretan -1 gorde eta B(1..n) bektoreko posizio horretan ezer egiten ez duen programa

a) **bikoitia(x)** $\equiv$ {x mod 2 = 0}.

b) **bikmugi(C(1..r), (c_1, c_2, …, c_r), D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos)** $\equiv$

$r \geq 1 \wedge$

$0 \leq pos \leq r \wedge$

$\forall k\ (1 \leq k \leq pos \wedge bikoitia(c_k) \rightarrow (C(k) = d_k \wedge D(k) = c_k)) \wedge$

$\forall k\ (1 \leq k \leq pos \wedge \neg bikoitia(c_k)) \rightarrow (C(k) = -1 \wedge D(k) = d_k))$

c)

(1) {Hasierako baldintza} $\equiv$ {$n \geq 1 \wedge$

$\forall k\ (1 \leq k \leq n \rightarrow (A(k) = a_k \wedge B(k) = b_k))$}

(2) {Tarteko asertzioa} $\equiv$ {(1) $\wedge$ i = 0}

(10) {Bukaerako baldintza} $\equiv$

{bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), n)}

(3) {Inbariantea} $\equiv$

{($0 \leq i \leq n$) $\wedge$ bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i)}

(4) {Tarteko asertzioa} $\equiv$

{($0 \leq i \leq n - 1$) $\wedge$

bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i)}

(5) {Tarteko asertzioa} $\equiv$

{($1 \leq i \leq n$) $\wedge$

bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i – 1)}

(6) {Tarteko asertzioa} $\equiv$

{($1 \leq i \leq n$) $\wedge$

bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i – 1) $\wedge$

bikoitia(A(i)) $\wedge$ A(i) = a_i $\wedge$ B(i) = b_i}

(6) puntua honela labur daiteke:

(6) $\equiv$ {(5) $\wedge$ bikoitia(A(i)) $\wedge$ A(i) = a_i $\wedge$ B(i) = b_i}

(7) {Tarteko asertzioa} ≡
$\{(1 \le i \le n) \wedge$
$bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), i - 1) \wedge$
$bikoitia(A(i)) \wedge A(i) = a_i \wedge B(i) = b_i \wedge lag = a_i\}$

(7) puntua honela labur daiteke:

$(7) \equiv \{(5) \wedge bikoitia(A(i)) \wedge A(i) = a_i \wedge B(i) = b_i \wedge lag = a_i\}$

(8) {Tarteko asertzioa} ≡
$\{(1 \le i \le n) \wedge$
$bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), i - 1) \wedge$
$bikoitia(a_i) \wedge A(i) = B(i) \wedge B(i) = b_i \wedge lag = a_i\}$

(8) puntua honela labur daiteke:

$(8) \equiv \{(5) \wedge bikoitia(a_i) \wedge A(i) = B(i) \wedge B(i) = b_i \wedge lag = a_i \}$

(9) {Tarteko asertzioa} ≡
$\{(1 \le i \le n) \wedge$
$bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), i - 1) \wedge$
$bikoitia(a_i) \wedge A(i) = b_i \wedge B(i) = lag \wedge lag = a_i\}$

(9) puntua honela labur daiteke:

$(9) \equiv \{(5) \wedge bikoitia(a_i) \wedge A(i) = b_i \wedge B(i) = lag \wedge lag = a_i\}$

Baina kasu honetan, (9) puntuan (5) puntuaren bidez 1 eta i – 1 posizioen arteko kalkulu denak eginda daudela esaten da eta $A(i) = b_i \wedge B(i) = lag \wedge lag = a_i$ zatiaren bidez i posiziokoa ere kalkulatuta dagoela esaten da, beraz 1 eta i – 1 posizioen arteko kalkulu denak eginda daude. Hori bikmuga predikatuan i ipiniz adieraz daiteke, beraz (9) puntua honela ere eman daiteke:

(9) ≡
$\{(1 \le i \le n) \wedge$
$bikmugi(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), i) \wedge$
$bikoitia(a_i) \wedge lag = a_i\}$

Beraz $A(i) = b_i \wedge B(i) = lag \wedge lag = a_i$ zatiak dioena, predikatuaren argumentu bezala i ipiniz eta $lag = a_i$ mantenduz adieraz daiteke.

(12) {Tarteko asertzioa} $\equiv$

{$(1 \leq i \leq n) \wedge$
bikmugi(A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, B(1..n), $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, i)}

(12) asertzioa **end if** eta **end loop**-en artean betetzen den asertzioa da.

Zein da (12) eta (9)ren arteko desberdintasuna? (9)an badakigu if-eko baldintza bete dela eta then bidetik joan garela, baina (12) puntuan ez dakigu if-eko baldintza bete al den ala ez eta horregatik bikoitia(a_i) $\wedge$ lag = a_i ezin da ipini.

(10) E = n – i

Asertzio batetik bestera zer aldatzen den hobeto ikusteko, aldaketak kolorez ipini dira.