Arilletall SDDO

1.1

Sinplifikatu

$$g = (\bar{a}+\bar{b})(ab+c) = \bar{a}ab + \bar{a}c + \bar{b}ab + \bar{b}c \underset{A_4}{=}$$

$$\underset{A_5}{=} \underset{0}{\cancel{\bar{a}\cdot a\cdot b}} + \bar{a}\cdot c + \underset{0}{\cancel{\bar{b}ab}} + \bar{b}c = \bar{a}\cdot c + \bar{b}c \underset{A_4}{=} c(\bar{a}+\bar{b})$$

1.2

(2) $\bar{b}(a \oplus c) + a(b \oplus c) = \bar{b}c + \bar{c}a \Rightarrow \bar{b}(\bar{a}\cdot c + \bar{c}\cdot a) + a(\bar{b}c + \bar{c}b) =$

$$= \bar{b}(\bar{a}\cdot c) + \bar{b}(\bar{c}\cdot a) + a(\bar{b}c) + a(\bar{c}b) = \cancel{\bar{b}(\bar{a}c + \bar{c}a + ac}$$

$$\underset{A_5}{=} \underbrace{\bar{c}(a\bar{b} + ba)}_{\bar{c}a} + \bar{b}c = \bar{b}c + \bar{c}a$$

Funtzio logikoaren adierazpena

Bi modu → egia taula

adierazpen aljebraiko

Adierazpen kanonikoak

minterm-a

↳ Biderketa gai bat, bere horretan edo ezeztatuta

2^n aukera izan ditzakete minterm-ak

Maxterm-a

↳ Batuketa gai bat, bere horretan edo ezeztatuta

2^n aukera.

a b c	

	a	b	c	f	
m_0 $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	0	0	0	0	$M_0 (a+b+c)$
	0	0	1	1	
	0	1	0	1	
	0	1	1	1	
m_4 $a\bar{b}\bar{c}$	1	0	0	1	$\to M_4 (\bar{a}+b+c)$
	1	0	1	0	
	1	1	0	1	
	1	1	1	0	$M_7 (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

0 bada Mintermak ez du balio

5 1 daudenez adierazpen bat gaztiek ~~batuz~~ ~~bidertuz~~ balioz lortuko dituzu.

3 0 daudenez Maxtermen ~~batuketa~~ Biderketa egingo dituzu

$$f = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}$$

$$f = (a+b+c)\cdot(\bar{a}+b+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) =$$

Adierazpenen minimizazioa

1.1
(3)

$$h = a(b+c(b+a))$$

a	b	c	h
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	~~0~~ 1
1	1	1	1

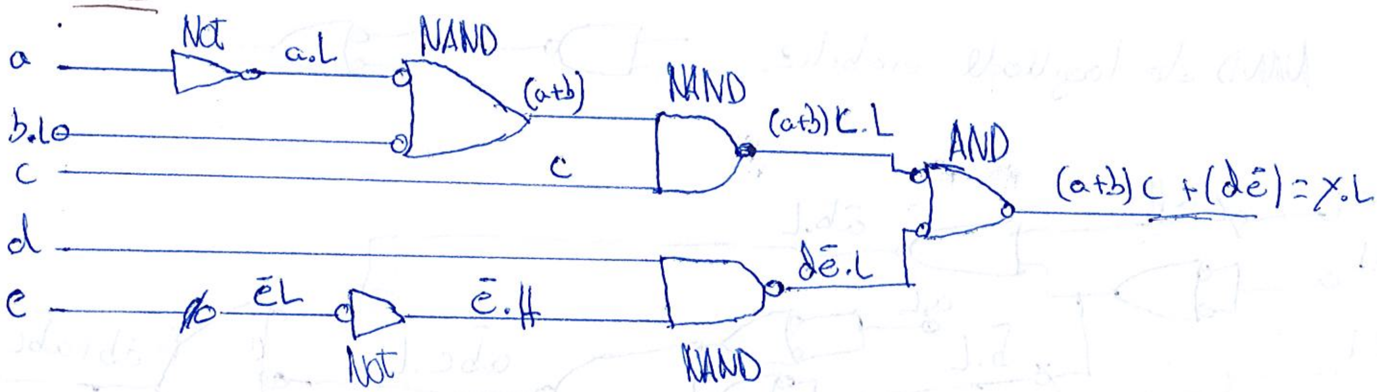
Beharrezko aldeko deitzeko

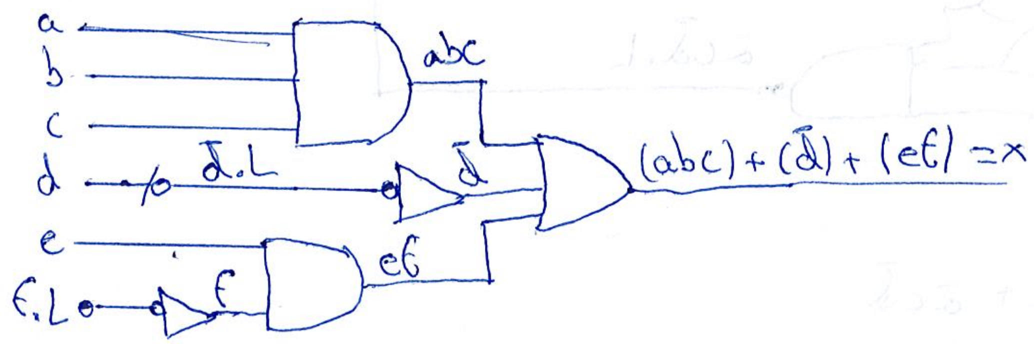
a \ bc	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1

$f = ac \quad ab$

Arilletall

2.2

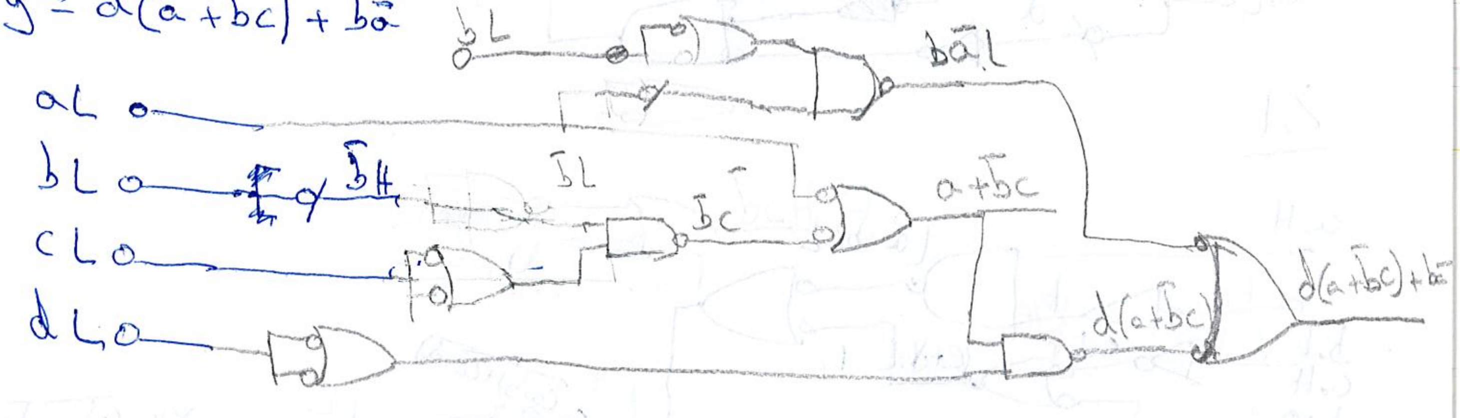




2.3

NAND etecll erabiliz

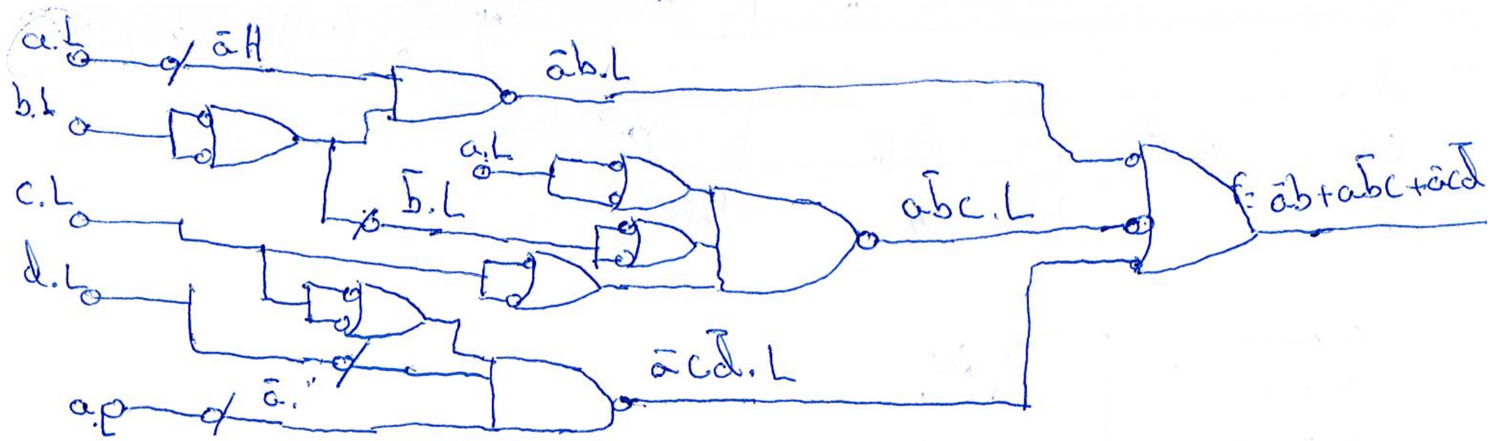
$g = d(a + \bar{b}c) + b\bar{a}$



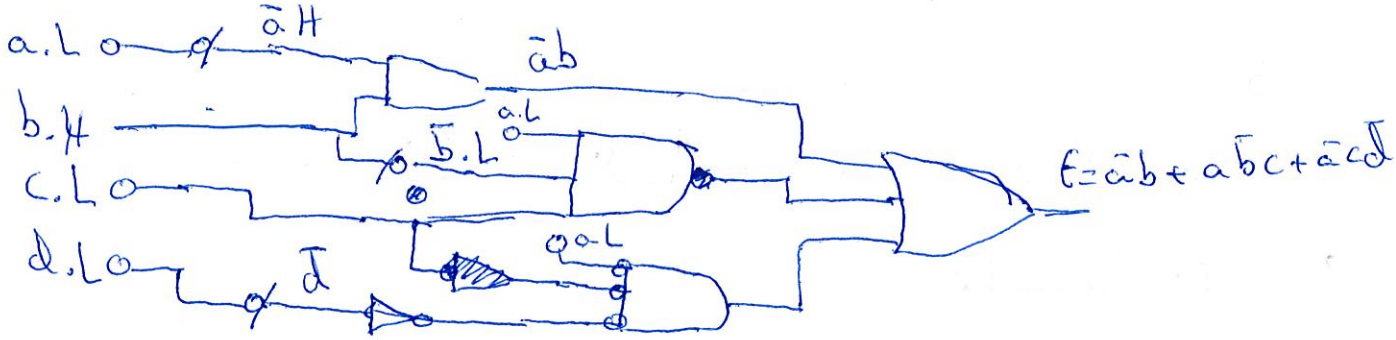
2.3

b) $f = \bar{a}b + a\bar{b}c + \bar{a}c\bar{d}$

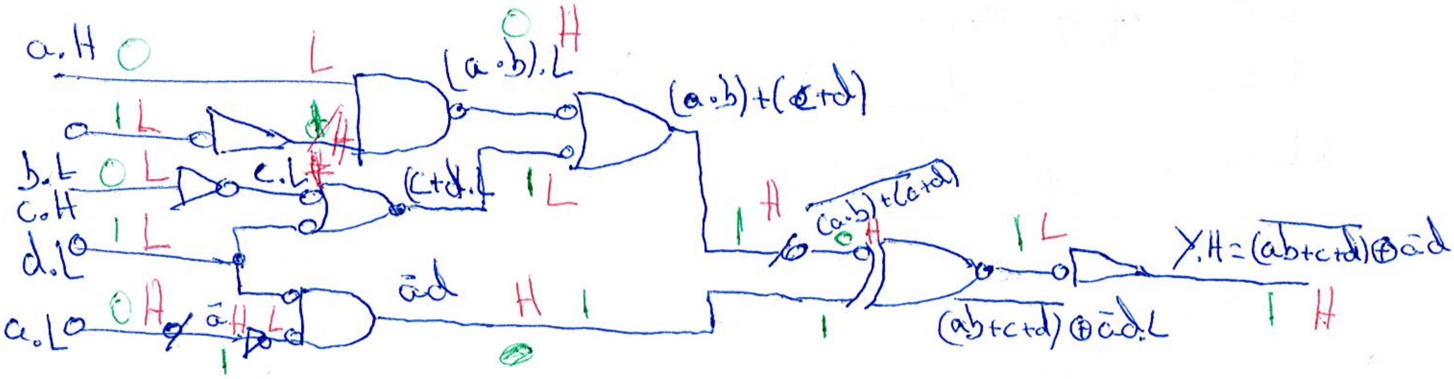
NAND ate logikoak erabiliz.



a) $f = \bar{a}b + a\bar{b}c + \bar{a}c\bar{d}$



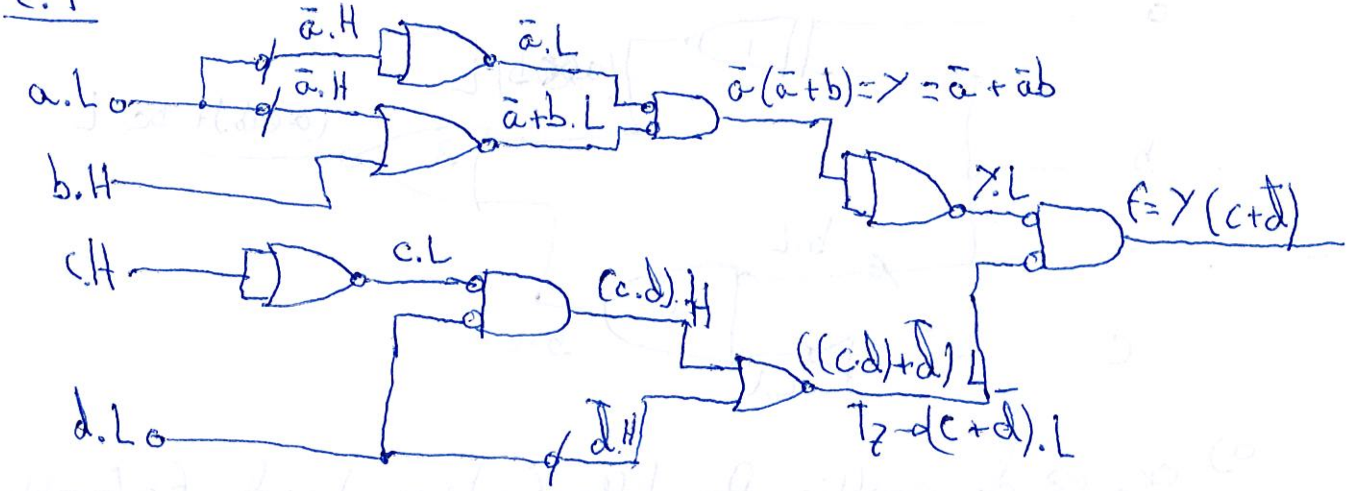
2.1



Arilletall

SDDO

2.4



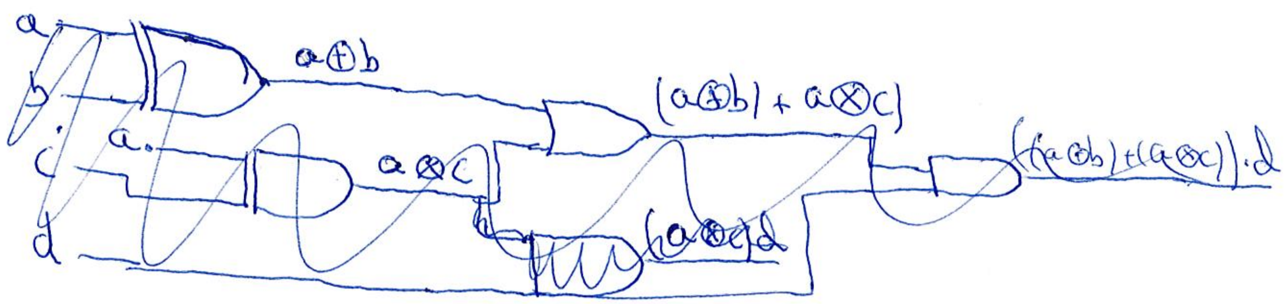
(1) $\bar{a}$.H

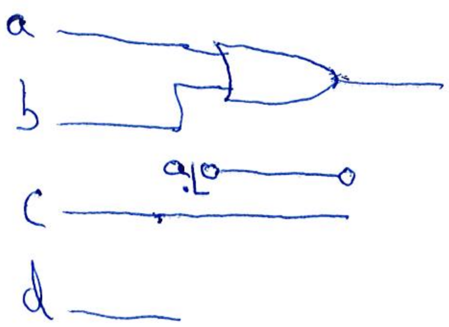
(2) $y.L = \bar{a}(\bar{a}+b).L$

(3) $(cd+\bar{d}).L = (c+\bar{d}).L$

2.5

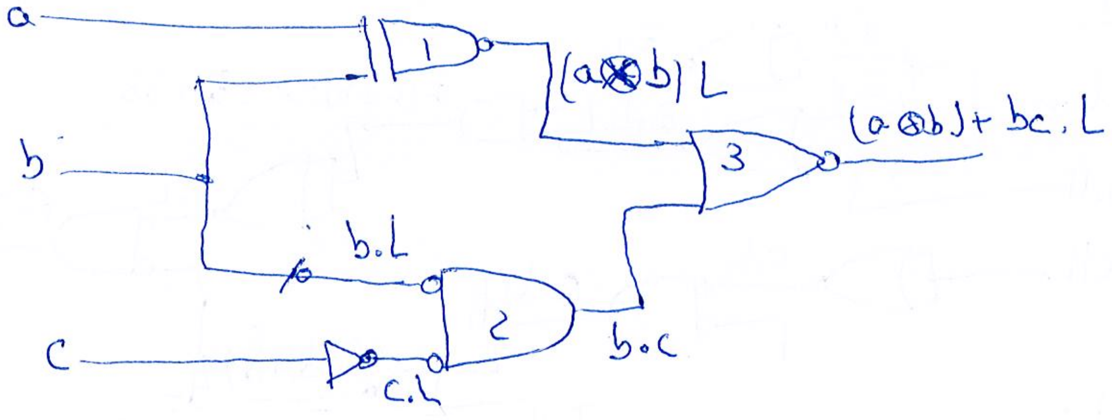
$f = ((a \oplus b) + (a \otimes c)) \cdot d$





2.6

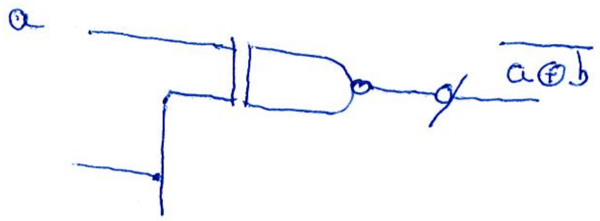
a)



a) ez, ez da egokia. Benetako funtzioa, hau da, $f=(a\otimes b)+bc$

Nahiz eta berez zirkuituko elementu batzuk gaizki kokatuta egon.

b)



2017

SISTEMA DIGITALAK DISEINATZEKO OINARRIAK

ALJEBRA BOOLEARRA

1. Gaia

1

Aljebra Boolearra

- **Aljebra Boolearra:** axiomak, teoremak eta oinarrizko eragiketak.
- **Funtzio logikoak.**
  Adierazpena.
  Minimizazioa.
  Zehaztu gabeko gaiak.

1

Aljebra Boolearra

- **Zergatik beharrezkoa?**

- Zirkuitu logikoen oinarrizko teoria matematikoa.
- Zirkuituen seinaleen balio-aldaketek aljebra boolearraren axiomak eta teoremak jarraitzen dituzte.
- Erreferentziak:
  1854, G. Boole matematikaria
  1938, C.E. Shannon ingeniaria

1

Aljebra Boolearra

- **Aljebra Boolearraren osagaiak**

- osagai-multzoa, *B*
- bi eragiketa: + edo ***or***; · edo ***and***
- axiomak

1

Aljebra Boolearra

Axiomak

A1 axioma

$\forall a, b \in B \rightarrow a + b \in B$

$\forall a, b \in B \rightarrow a \cdot b \in B$

A2 axioma

$\exists\, 0 \in B \;/ \forall a \in B \rightarrow a + 0 = a$

$\exists\, 1 \in B \;/ \forall a \in B \rightarrow a \cdot 1 = a$

1

Aljebra Boolearra

Axiomak

A3 axioma

$\forall a, b \in B \rightarrow a + b = b + a$

$\forall a, b \in B \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$

A4 axioma

$\forall a, b, c \in B \rightarrow a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$\forall a, b, c \in B \rightarrow a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

1

Aljebra Boolearra

Axiomak

A5 axioma

$\forall a \in B \;\exists\, \bar{a} \in B \;/ a + \bar{a} = 1$

$\forall a \in B \;\exists\, \bar{a} \in B \;/ a \cdot \bar{a} = 0$

A6 axioma

$\exists a, b \in B \;/ a \neq b$

1

Aljebra Boolearra

Teoremak

T1 teorema

$\forall a \in B \;\rightarrow a + a = a$

$\forall a \in B \;\rightarrow a \cdot a = a$

T2 teorema

$\forall a \in B \;\rightarrow a + 1 = 1$

$\forall a \in B \;\rightarrow a \cdot 0 = 0$

1

Aljebra Boolearra

Teoremak

T3 teorema

$\forall a,b \in B \rightarrow a+(a \cdot b)=a$

$\forall a,b \in B \rightarrow a \cdot (a+b)=a$

T4 teorema

$\forall a \in B \rightarrow \bar{\bar{a}}=a$

1

Aljebra Boolearra

Teoremak

T5 teorema

$\forall a,b,c \in B \rightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$

$\forall a,b,c \in B \rightarrow (a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$

T6 teorema

$\forall a,b \in B \rightarrow \overline{a+b}=\bar{a} \cdot \bar{b}$

$\forall a,b \in B \rightarrow \overline{a \cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$

1

Aljebra Boolearra

Teoremak

T7 teorema

$\forall a,b \in B \rightarrow a+\bar{a} \cdot b=a+b$

$\forall a,b \in B \rightarrow a \cdot (\bar{a}+b)=a \cdot b$

1

Aljebra Boolearra

Dualtasun-printzipioa

- Berdintza orok bere ***duala*** dauka. Duala lortzeko:
  - eragiketak trukatu
  - konstanteak trukatu

Kommutazio-aljebra

$B = \{0,1\}$ denean

Aljebra Boolearra

Eragiketa logikoak: definizioa

Batuketa log. edo ***or*** **(+)**

a	*b*	*a or b*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Biderketa log. edo ***and*** **(·)**

a	*b*	*a and b*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Aljebra boolearraren axiomak betetzen dituzte. Ondorioz, baita teoremak ere.

Aljebra Boolearra

Oinarrizko eragiketa logikoak

Ezeztapena edo ***not*** **(¯)**

a	*not a*
0	1
1	0

Osagarria ere deitzen zaio.
A5 axiomatik ondorioztatzen da.

Funtzio logikoak

Funtzio logikoak

Funtzio bat, aplikazio bat da: $\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$

n: aldagai kopurua

Aldagai bakarreko funtzioak:

a	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Funtzio logikoak

Funtzio logikoak

Bi aldagaiko funtzioak:

a	b	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

1

Funtzio logikoak

▶ Funtzio logikoak

{*not*, *and*, *or*} funtzioek osatzen dute **sistema osoa** deitzen dena.

Adibidea: *xor* funtzioa haien bitartez

1

Funtzio logikoak

▶ Funtzio logikoen adierazpena

Bi modu:

- egia-taula
- adierazpen aljebraikoa

Nola lortu batetik bestea?

1

Funtzio logikoak

▶ Funtzio logikoen adierazpena

- egia-taula lortzea: erraza. Eragiketak pixkanaka egin definizioetatik abiatuta.
- adierazpen aljebraikoa: ez da hain sinplea bidea ikustea.

1

Funtzio logikoak

▶ Funtzio logikoen adierazpena

Definizioak:

- *minterm*-a
- *maxterm*-a

Funtzio logikoen adierazpena

Minterm-ak eta *maxterm*-ak:

c	b	a	mintermak m_i	maxtermak M_i
0	0	0	m_0: $\bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a}$	M_0: $c + b + a$
0	0	1	m_1: $\bar{c} \cdot \bar{b} \cdot a$	M_1: $c + b + \bar{a}$
0	1	0	m_2: $\bar{c} \cdot b \cdot \bar{a}$	M_2: $c + \bar{b} + a$
0	1	1	m_3: $\bar{c} \cdot b \cdot a$	M_3: $c + \bar{b} + \bar{a}$
1	0	0	m_4: $c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a}$	M_4: $\bar{c} + b + a$
1	0	1	m_5: $c \cdot \bar{b} \cdot a$	M_5: $\bar{c} + b + \bar{a}$
1	1	0	m_6: $c \cdot b \cdot \bar{a}$	M_6: $\bar{c} + \bar{b} + a$
1	1	1	m_7: $c \cdot b \cdot a$	M_7: $\bar{c} + \bar{b} + \bar{a}$

Funtzio logikoen adierazpena

Adierazpen **kanonikoak**:

- 1 balioa duten *minterm*-en batuketa
- 0 balioa duten *maxterm*-en biderketa

Baliokideak dira biak.

Adierazpenaren minimizazioa

Adierazpen **minimoa** lortzeko bi bide:

- Axiomak eta teoremak aplikatu
- Karnaugh-en mapak erabili

Minimizazioa: Axiomak + teoremak

Adibidea (1.1. (3) ariketa, 35 orr.):

$h = a(b+c(b+a))$

1

Funtzio logikoak

Minimizazioa: K-mapak

- Metodo grafikoa
- Gogoratzeko erraza

1

Funtzio logikoak

Minimizazioa: K-mapak

Egia-taula grafikoki adierazi

b \ a	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

Gelaxka bakoitzari *minterm* bat dagokio

c \ ba	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

dc \ ba	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

1

Aljebra Boolearra

Minimizazioa: K-mapak

- 1 balioa duten “alboko” gelaxkak elkartu (2, 4, 8, 16ko taldetan)
- Elkartze bakoitzeko, termino bat: aldatzen ez diren aldagaiek osaturiko terminoa
- Funtzioaren adierazpen minimoa: aurreko urratsean lortutako termino guztien batura

1

Aljebra Boolearra

Zehaztu gabeko gaiak

- Funtzioaren balioa erabat definitu gabea duten aldagai-konbinazioak.
- Bi arrazoi posible:
  - Konbinazio hori ez da sekula gertatuko
  - Ez du axolarik zer balioa duen funtzioak konbinazio horretan (bi balioak “onartzen” dira).

Zehaztu gabeko gaiak

Adierazteko: **X** edo — ikurrak.

$f=\Sigma(1,7,9,11)+d(3,5,12)$

dc \ ba	00	01	11	10
00	0	1	–	0
01	0	–	1	0
11	–	0	0	0
10	0	1	1	0

Sinplifikatzeko erabili

1 GAIA: ARIKETAK

Liburuan proposatutako ariketak

1.1. Aljebra boolearraren axiomak eta teoremak erabiliz, sinplifika itzazu honako adierazpen hauek:

(1) $f = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,b\,\bar{c} + a\,c + \bar{b}\,c + \bar{a}\,b\,c$

(2) $g = (\bar{a} + \bar{b})(a\,b + c)$

(3) $h = a\,(b + c\,(b + a))$

1.2. Froga itzazu berdintza hauek, batetik, egia-taulak erabiliz, eta, bestetik, aljebra boolearraren axiomak eta teoremak erabiliz:

(1) $a\,b\,c + \bar{a}\,b + a\,\bar{c} = b + a\,\bar{c}$

(2) $\bar{b}\,(a \oplus c) + a\,(b \oplus c) = \bar{b}\,c + \bar{c}\,a$

(3) $(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c)$

1.3. Adieraz itzazu honako funtzio hauen osagarriak, eta minimizatu adierazpenak:

(1) $f = \bar{a}(b + \bar{c}) + b + c\,\bar{d}$

(2) $g = a + a\,c + c(\bar{d} + e)$

(3) $h = a\,\bar{b} + \bar{c}\,(b + d)$

1.4. Lor itzazu honako funtzio hauen adierazpen minimoak Karnaugh-en mapak erabiliz.

(1) $f(c, b, a) = \bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} + a\,\bar{b} + b\,\bar{a} + c(\bar{a} + \bar{b})$

(2) $f(d, c, b, a) = a\,d + a\,\bar{b}\,c + \bar{a}\,b\,c + a\,b\,\bar{d}$

(3) $f(d, c, b, a) = \sum(0, 13, 14, 15) + d(1, 2, 3, 9, 10, 11)$

(4) $f(d, c, b, a) = \sum(1, 3, 5, 8, 9, 11, 15) + d(2, 13)$

1.5. Minimiza itzazu K-mapen bidez adierazitako bi funtzio hauek.

dc \ ba	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	–	1
11	1	0	0	0
10	1	0	0	0

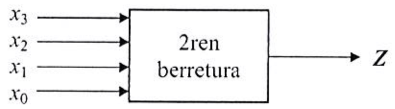
dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	1	1

1.6. Bi funtzio logikoen egia-taulak kontuan hartuz, idatzi funtzio bakoitzaren era kanonikoa; gero, minimizatu adierazpenak K-mapak erabiliz.

d	c	b	a	f
0	0	0	–	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	–	–	–
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	–	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	–
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

c	b	a	g
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1.7. Irudiko zirkuituaren sarrerek —x_3, x_2, x_1, x_0— 4 biteko zenbaki arrunt bat adierazten dute, bitar hutsez. Z irteerak, berriz, sarrerako zenbakia 2ren berretura den ala ez adierazi beharko du. Idatz ezazu funtzioaren egia-taula eta lor ezazu adierazpen minimoa Karnaugh-en mapak erabiliz.



Errepikatu aurrekoa, baina murriztapen hau kontuan hartuta: sarrerako zenbakia digitu hamartar bat da: 0tik 9ra.

1.8. 4 biteko kodeak —X (x_3, x_2, x_1, x_0)— prozesatzen dira sistema digital batean, eta, emaitza gisa, bit bateko hiru funtzio sortzen dira: BAT, ZERO eta BERDIN izenekoak. BAT funtzioa aktibatzen da sarrera-kodearen 1ekoen kopurua 0koena baino handiagoa denean; ZERO aktibatzen da 0koen kopurua 1ekoena baino handiagoa denean; eta BERDIN bi kopuruak berdinak direnean.
Idatz itzazu hiru funtzio horien egia-taulak, eta eman haien adierazpen aljebraiko minimoak.

1.9. Sistema digital batek detektatu behar du sarrerako zenbakiak (4 bitekoak) lehenak diren ala ez. Idatzi funtzio horri dagokion egia-taula eta eman funtzioaren adierazpen minimoa.

Liburuan ebatzitako ariketak

1.1. Aljebra boolearraren axiomak eta teoremak erabiliz, sinplifika ezazu funtzio logiko honen adierazpen algebraikoa:

$$f = a\,b\,c\,d + \overline{b}\,\overline{a} + a\,b\,\overline{c} + \overline{b}\,a + \overline{c}\,a$$

1.2. Adieraz ezazu $f = d\,(\overline{a} + b\,(\overline{c} + a\,\overline{d}))$ funtzioaren osagarria, eta minimiza ezazu haren adierazpena.

1.3. Sor ezazu funtzio honen egia-taula: $f = (a\overline{b} + c) \cdot (b + \overline{a}\,c)$

1.4. Hiru aldagaiko f eta g funtzioen egia-tauletan oinarrituta, idatz itzazu bi funtzioen adierazpen kanonikoak, minterm-en eta maxterm-en bitartez.

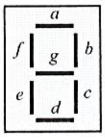
	c	b	a	f	g
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1

1.5. Lor ezazu $f(c,b,a) = \sum(1, 2, 4, 6, 7)$ funtzioaren adierazpen aljebraiko minimoa Karnaugh-en mapak erabiliz.

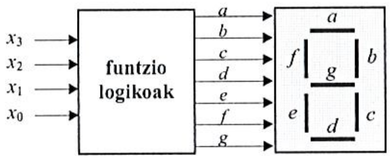
1.6. Minimiza ezazu $f = \sum(2, 4, 8, 13, 14) + d(0, 5, 10, 12, 15)$ funtzio logikoa Karnaugh-en mapa baten bidez.

1.7. $f_1 = \overline{d}\,\overline{c}\,a + \overline{d}\,c\,b\,a + d\,c\,b + d\,b\,a$ funtzioa sinplifikatzeko asmoz, hainbat zehaztu gabeko gai erabili dira. Emaitza $f_2 = ba + dc + \overline{d}a$ izan da. Zein zehaztu gabeko gai erabili dira sinplifikazioa egiteko?

1.8. Sistema digital askotan, ikusgailu bereziak erabiltzen dira 0tik 9ra arteko zenbakiak erakusteko. Ikusgailu horiek "7 segmentuzko digituak" deitzen dira, argitzen diren zazpi segmentu (diodo) dituztelako, irudian ageri den moduan. Adibidez, a = 1 denean, a diodoa pizten da; 0 denean, berriz, itzali egiten da.



0tik 9rako zenbakiak bitarrez adierazteko, 4 bit behar dira; esate baterako, $X = x_3\, x_2\, x_1\, x_0$. Zenbakia grafikoki adierazteko, aldiz, 7 biteko kode bat behar da: *a, b, c, d, e, f* eta *g* segmentuetakoa, hain zuzen ere.
Hau egin behar da ariketa honetan: idatzi *a, b...* eta g funtzio logikoen adierazpen minimoak, x_3, x_2, x_1, x_0 aldagaien arabera (funtzio horiek gauzatzen dituen zirkuituari "BCD – 7 segmentu" deskodegailua deritzo).



1.1

$$f = \bar a \bar b + \bar a b \bar c + ac + \bar b c + \bar a b c \underset{A_5}{=}$$

$$\bar a \bar b(\bar c + c) + \bar a b \bar c + ac + \bar b c \underset{T_7}{=} \bar a \bar b + c(a + \bar b) + \bar a b \bar c +$$

$$g) = (\bar a + \bar b)(ab + c) = \bar a(ab + c) + \bar b(ab + c) = \underbrace{\bar a a}_{0} b + \bar a c + \bar b ab + \bar b c =$$

$$\underset{A_5\ T_5}{=} \bar a c + \underbrace{\bar b b}_{0} a + \bar b c \underset{A_5}{=} \bar a c + \bar b c = c(\bar a + \bar b)$$

$$h)\ a(b + c(b + a)) \underset{T_5}{=} a(b + cb + ca) \underset{A_4}{=} a((b + c)\cdot(b + b) + ca) \underset{T_1}{=}$$

$$= a((b + c)b + ca) \underset{T_3}{=} a(b + ca)$$

1.2

② $\bar b(a \oplus c) + a(b \oplus c) = \bar b c + \bar a c$

$$\bar b(\bar a \cdot c + a \cdot \bar c) + a(\bar b \cdot c + a b \bar c) = \cancel{\bar b \bar a c + \bar b a \bar c + a \bar b c + a b \bar c} =$$

$$\cancel{= a \bar b (c + \bar c) + \bar b \bar a c + a b \bar c} =$$

$$= \bar b(\bar a c) + \bar b(a \bar c) + a(\bar b c) + a(b \bar c) = \bar c(ab + \bar b a) + c(\underbrace{\bar b a + \bar b \bar a}_{1}) =$$

$$= \bar b c + \bar c a$$

1.4

(2) $f(d,c,b,a) = ad + a\bar{b}c + \bar{a}bc + ab\bar{d}$

minimizalo → K-mapa

dc \ ba	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	0

$F = ba + bc + ac + ad$

(1) $f(c,b,a) = \bar{c}\bar{b}\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + c(\bar{a} + \bar{b})$

c \ ba	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1

$f = \bar{c}\bar{b} + \bar{b}a + b\bar{a}$

3) $f(d,c,b,a) = \Sigma(0,13,14,15) + d(1,2,3,9,10,11)$

dc \ ba	00	01	11	10
00	1	-	-	-
01				
11		1	1	1
10		-	-	-

$f_1 = \bar{c}\bar{d} +$

$f_2 = da$

$f_3 = db$

$f = f_1 + f_2 + f_3 = \bar{c}\bar{d} + da + db$

b) $f(d,c,b,a) = \Sigma(1,3,5,8,9,11,15) + d(2,13)$

dc \ ba	00	01	11	10
00		1	1	-
01		1		
11		-	1	
10	1	1	1	

$f_1 = \bar{d}\bar{c}b + \bar{b}a + da + d\bar{c}\bar{b}$

1.6

a)

dc \ bc	00	01	10	10
00	1	1	1	0
01	0	0	0	0
11	-	0	1	1
10	1	1	0	1

b)

c \ ba	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$f = \bar{c}\bar{a} + \bar{b}\bar{a} + ca$

ezeztapena edo not ($\bar{\ }$)

a	not a
0	1
1	0

Funtzio logikoa $\rightarrow \{0,1\}^n$

n = aldagai kopurua

$f_7 \rightarrow$ xor $\oplus \rightarrow$ gehiketa borobildua

$f_{10} \rightarrow$ equ $\odot \rightarrow$ biderketa borobildua

$a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b}$

a	b	$a\oplus b$	$\bar{a}$	$\bar{a}\cdot b$	$a\cdot b$	$\bar{a}b + a\cdot\bar{b}$
0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1

a	b	$a\oplus b$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}\cdot b$	$a\cdot\bar{b}$	$\bar{a}\cdot b + a\cdot\bar{b}$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

$a \odot b = a\cdot b + \bar{a}\bar{b}$

$$f = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b\bar{c} + ac + \bar{b}c + \bar{a}bc \underset{A_4}{=} \bar{a}(\bar{b} + b\bar{c}) + ac + \bar{b}c + \bar{a}bc \underset{T_7,\ T_4}{=}$$

$$= \bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) + \cancel{c\cdot(a+\bar{b})}\ c(a + \bar{a}b) + \bar{b}c \underset{A_4,\ T_5}{=} \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + ca + cb + \bar{b}c =$$

$$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + c(a + b + \bar{b}) \quad A_3\ T_5$$

Konmutazio-aljebra

↳ aljebra boolear mota → bi osagai ditu soilik

$B = \{0, 1\}$

Batuketa logikoa → or (+)

Biderketa logikoa → and

a	b	a or b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	a and b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A4

a	b	c	$b+c$	$a\cdot(b+c)$	$a\cdot b$	$a\cdot c$	$(a\cdot b)+(a\cdot c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

=

A5

a

$0 + \bar{0} = 1$

$0 \cdot \bar{0} = 0$

$1 + \bar{1} = 1$

$1 \cdot \bar{1} = 0$

dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	1	1

$f = \bar d \bar b \bar a + c\bar b + \bar c b + ba$

1.5

b)

dc \ ba	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	1	1

$f = \bar c b + \cancel{d\bar c \bar b \bar a + \bar d \bar c \bar a} + \bar d c \bar b a$

$\bar c \bar a$

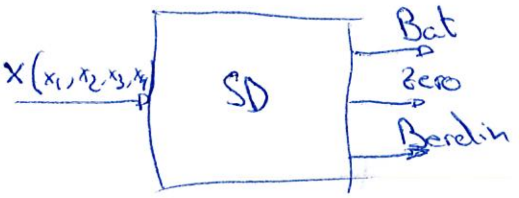
$f = \sum(2,4,8,13,14) + d(0,5,10,12,15)$

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	-	0	0	1
01	1	-	0	0
11	-	1	-	1
10	1	0	0	-

$f = \bar{b}\bar{a} + dc + \bar{c}\bar{a}$

- ez dago definituta 1 edo 0 izan daiteke, elkarketa handiagoak egin ahal izan ezkero, 1 bezala hartuko ditugu.

1.8



x_1	x_2	x_3	x_4	Bat	Zero	Berdin
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	0	1
11	1	0	0	0
10	0	1	0	1

$$Berdin = \bar{d}\bar{c}ba + \bar{d}c\bar{b}a + \bar{d}cb\bar{a} + dc\bar{b}\bar{a} + d\bar{c}\bar{b}a + d\bar{c}b\bar{a} =$$

$$= \bar{d}\bar{c}ba + \bar{d}c(\bar{b}a + b\bar{a}) + dc\bar{b}\bar{a} + d\bar{c}(\bar{b}a + b\bar{a})$$

$$= \bar{d}\bar{c}ba + (d\bar{c} + \bar{d}c)(b \oplus a) + dc\bar{b}\bar{a}$$

$$= \bar{d}\bar{c}ba + (d \oplus c)(b \oplus a) + dc\bar{b}\bar{a}$$

0 GAIA: ARIKETAK

0.1. Adieraz itzazu honako zenbaki hauek zeinu/magnitudean, birako osagarrian, eta desplazatutako adierazpidean, 6 bitetan:

(a) +7	(c) –43	(e) 22
(b) –7	(d) +43	(f) –22

0.2. Honako kode bitar hauek: 0111 1011 / 1101 1011, zein zenbaki adierazten dute kasu hauetan?

a. Zenbaki naturalak badira.

b. Zeinu/magnitudean adierazitako zenbaki osoak badira.

c. Birako osagarrian adierazitako zenbaki osoak badira.

d. Desplazatutako adierazpidean adierazitako zenbaki osoak badira.

0.3. Esan ezazu zein den adierazpide-sistema bakoitzaren tartea 8 bit erabiliz: naturalak, zeinu/magnitudea, 2rako osagarria, desplazatutako adierazpidea. Ondoren, adierazi tarte bakoitzaren mugen kodeketa bitarra.

0.4. Egin itzazu batuketa hauek 2rako osagarrian, 8 bit erabiliz:

(a) 18 + (–15)	(c) 113 + 71
(b) (–18) + 15	(d) (–113) + 71

0.5. Adierazi zenbaki erreal hauek, koma higikorraren adierazpidea erabiliz: bit bat zeinurako, 10 bit mantisarako eta 5 bit berretzailerako.

(a) -6,298 (b) 27,298 (c) –0,721 (d) 0,1875

0.4

a)

18 + (-15) → 18 → 00010010

-15 → 11110001

0 00000011 → 3

b)

(-18) + 15 → -18 → 11101110

15 → 00001111

11111101 → -3

c)

113 + 71 → 113 → $\boxed{0}$1110001

71 → $\boxed{0}$1000111

$\boxed{1}$0111000

Bi zenbaki positiboen negatiboa eman dutelako errorea ematen da.

d) (-113) + 21

-113 → 10001111

71 → 01000111

11010110 $\xrightarrow{-42}$ 00101001

+1

00101010 → 42

10001110

+1

10001111

0.5

27'298

$\underline{S=1}$ 0 $\underline{M \Rightarrow 10}$ 1101101001 $\underline{B=5}$ 1000 → $2^4-1=15$ 15+5=20

27 → 11011,0010 00110 → 0'11011 0100110 $\cdot 2^5$

0'298
·2
0'596
·2
1'192
·2
0'384

0'384
·2
0'768
·2
1'536
·2
1'072
·2
... 4 4

0.4

a) $18 + (-15)$

$18 \to 00010010$

$-15 \to -15 + 2^8 \to 241 \to$ ~~0214~~ 11110001

$241 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 120 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 60 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 30 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 15 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 7 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 3 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 1$

$$\begin{array}{rr} 18 \to & 00010010 \\ +(-15) \to & 11110001 \\ \hline & 00000011 \end{array}$$

b)

$-18 \to$ ~~$-18 + 2^8 \to 238 \to 11101110$~~

$15 \to 00001111$

$$\begin{array}{rr} & 00001111 \\ +\ -18 \to & 11101110 \\ \hline & 11111101 \to -3 \end{array}$$

$238 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 119 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 59 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 29 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 14 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 7 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 3 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 1$

c) $113 + 71$

$113 \to 01110001$

$71 \to 01000111$

$$\begin{array}{r} 01110001 \\ 01000111 \\ \hline 10111000 \to 184 \end{array}$$

$113 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 56 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 28 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 14$ … $0 \quad 13 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 6 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 3 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 1$

$71 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 35 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 17 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 8 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 4 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 2 \,|\!\underline{2}$; $0 \quad 1$

d) $-113 + 71$

$-113 + 2^8 = 143$

$143 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 71 \,|\!\underline{2}$; $1 \quad 1 \quad 1 \quad 0001$

$$\begin{array}{r} 10001111 \\ 11110000 \\ \hline 100000000 \end{array}$$

e) 22 → 010110 zm

→ 010110 zosg

→ ~~22+31=53 → ezin da ida~~ 110101

f) -22 → 110110 zm

→ -22+64 = 42 → 101010

→ -22+31 = 9 → 001001

O2

0111 1011 / 1101 1011

n=8

Zenbaki arruntaretako → 0111 1011 → ~~123 243 115~~ 123

→ 1101 1011 → ~~435~~ 219

Zeinu/magnitudo → 0111 1011 → ~~243 115~~ 123

→ -91

Biko osagarria → 0111 1011 → ~~915~~ 123

→ 219 - 256 = -37

Desplazatuta adierazpidean → 0111 1011 → 123 - 127 = ~~12~~ -4

→ 1101 1011 → 219 - 127 = 92

O3

naturalen tartea: $[0, 2^n - 1] \underset{n=8}{=} [0, 255]$

Zeinu/magnitudea: $[-(2^{n-1}), 2^{n-1} - 1] = [-127, 127]$

Zeko osagarria: $[(-2^{n-1}), (2^{n-1} - 1)] = [-128, 127]$

Desp adierazpena: $[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1}] = [-127, 128]$