Kalkulua

Aldagai anitzeko funtzioen estudio lokala

Berretura-seriezko garapena eta aldagai anitzeko funtzioen muturrak

Ivan Arrizabalaga Cupido

April 25, 2017

Aurkibidea

3.1 Berretura-seriezko garapena

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio erreal diferentziagarria.

Hortaz, $\forall k = 1, \dots, n \ \ \exists\, D_k f(x)$ eta horiek $D_k f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio errealak dira.

Hori j aldagaiarekiko deriba dezakegu: $D_j(D_k f) = D_{jk} f$. Hori da bigarren ordenako deribatu partzial bat.

Berdinak al dira $D_{jk}f$ eta $D_{kj}f$? Hau da, deribazio ordenak eragina al du emaitzan? Bai, izango du, ondorioz, deribazio-ordena kontuan izan beharko dugu.

3.1. Adibidea. $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1.$

Kalkulatu $D_{112}f(x, y)$ *eta* $D_{211}f(x, y)$.

$D_2 f = 2ye^x + 3x^2y^2;\ \ D_{12}f = 2ye^x + 6xy^2;\ \ D_{112}f = 2ye^x + 6y^2.$

$D_1 f = y^2e^x + 2xy^3;\ \ D_{11}f = y^2e^x + 2y^3;\ \ D_{211}f = 2ye^x + 6y^2.$

Kasu honetan berdinak dira.
Deribatu gurutzatuak dira, baina ez da beti horrela.

3.2. Teorema. *Taylor-en garapena*

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funtzio erreala* $(p + 1)$ *aldiz diferentziagarria* $a \in A$ *puntuaren B(a,r) bola batean.*

$\forall x \in B(a, r)\ /\ L[a, x] \in B(a, r)\ \ \exists z \in L[a, x]$, *non*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}Df(a)(x - a) + \frac{1}{2!}D^{(2)}f(a)(x - a)^{(2)} + ... + \frac{1}{p!}D^{(p)}f(a)(x - a)^{(p)} + \frac{1}{(p+1)!}D^{(p+1)}f(z)(x - a)^{(p+1)}$$ *beteko baita.*

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *funtzioaren kasuan:* $a \equiv (a, b), x \equiv (x, y)$

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}(D_1f(a, b)(x - a) + D_2f(a, b)(y - b))+$$
$$\frac{1}{2!}(D_{11}f(a, b)(x - a)^2 + 2D_{12}f(a, b)(x - a)(y - b) + D_{22}f(a, b)(y - b)^2)+$$
$$\frac{1}{3!}(D_{111}f(a, b)(x - a)^3 + 3D_{112}f(a, b)(x - a)^2(y - b) + 3D_{122}f(a, b)(x - a)(y - b)^2 + D_{222}f(a, b)(y - b)^3) + \dots$$

3.3. Adibidea. $f(x, y) = y^x$ *(1,1) puntuan*

$f(x, y) = y^x \qquad f(1, 1) = 1$

$D_1 f(x, y) = y^x \ln y \qquad D_1(1, 1) = 0$

$D_2 f(x, y) = xy^{x-1} \qquad D_2(1, 1) = 1$

$D_{11} f(x, y) = (1y^x \ln y)(\ln y) = y^x \ln^2 y \qquad D_{11}(1, 1) = 0$

$D_{12} f(x, y) = y^{x-1} + xy^{x-1} \ln y \qquad D_{12}(1, 1) = 1$

$D_{22} f(x, y) = x(x - 1)y^{x-2} \qquad D_{22}(1, 1) = 0$

$$D_{111}f(x,y) = y^x \ln^3 y \qquad D_{111}(1,1) = 0$$
$$D_{112}f(x,y) = 2y^{x-1}\ln y + xy^{x-1}\ln^2 y \qquad D_{112}(1,1) = 0$$
$$D_{122}f(x,y) = (2x-1)y^{x-2} + (x^2-x)y^{x-2}\ln y \qquad D_{122}(1,1) = 1$$
$$D_{222}f(x,y) = x(x-1)(x-2)y^{x-3} \qquad D_{222}(1,1) = 0$$

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(0(x-1)+1(y-1)) + \frac{1}{2!}(0(x-1)^2 + 2\cdot 1(x-1)(y-1) + 0(y-1)^2) + \frac{1}{3!}(0(x-1)^3 + 3\cdot 0(x-1)^2(y-1) + 3\cdot 1(x-1)(y-1)^2 + (y-1)^3) + ...$$
$$= 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)(y-1)^2 + ...$$

3.2 Aldagai anitzeko funtzioen muturrak

3.4. Definizioa. *$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio errealak mutur absolutua izango du $a \in A$ puntuan $f(x) \leq f(a)$ (maximoa) edo $f(a) \leq f(x)$(minimoa) bada.*

3.5. Definizioa. *$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio errealak mutur erlatiboa izango du $a \in A$ puntuan B(a,r) bola bat existitzen bada, non $\forall x \in B(a,r) \subseteq A \quad f(x) \leq f(a)$ (maximoa) edo $f(a) \leq f(x)$ (minimoa) bada.*

3.6. Definizioa. *$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio erreala diferentziagarria bada $a \in A$ puntuan eta $Df(a) = \theta$ (nulua) bada, $a \in A$ puntuari funtzioaren puntu kritiko deritzo.*

3.7. Definizioa. *$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio erreal diferentziagarria emanik, $a \in A$ puntu kritikoa zela-puntua da $\forall r > 0 \ / \ \exists\, x, y \in B(a,r)$, non $f(x) < f(a) < f(y)$ betetzen baita.*

3.8. Teorema. *Baldintza beharrezkoa*

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio erreala $a \in A$ puntuan funtzioaren diferentzial totala (deribatu partzial guztiak) existitzen bada, funtzioak $a \in A$ puntuan mutur bat badu, $Df(a) = \theta$ izango da.

3.9. Teorema. *Baldintza nahikoak*

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio erreala $\underline{bi\ aldiz\ diferentziagarria}$ $a \in A$ puntuan. Demagun 2. ordenako deribatu partzial guztiak jarraituak direla $a \in A$ puntuaren bola batean eta $\underline{Df(a) = \theta}$ dela.

Orduan, segida hau osatuko dugu: $\{1, H_1, H_2, ..., H_n\}$, non

$$H_1 = D_{11}f(a), H_2 = \begin{vmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) \end{vmatrix}, ..., \ H_n = \begin{vmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) & ... & D_{1n}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) & ... & D_{2n}f(a) \\ ... & ... & & ... \\ D_{n1}f(a) & D_{n2}f(a) & ... & D_{nn}f(a) \end{vmatrix}$$

baitira (azken matrize honeri matrize hessetarra deritzo).

1) $\{1, H_1, H_2, ..., H_n\}$ segidaren gai guztiak positiboak badira, funtzioak minimo erlatibo bat izango du $a \in A$ puntuan.

2) $\{1, H_1, H_2, ..., H_n\}$ segidaren gaiak, txandaka, positiboak eta negatiboak badira, funtzioak maximo erlatibo bat izango du $a \in A$ puntuan.

3) $\{1, H_1, H_2, ..., H_n\}$ segidaren gaiak positiboak eta negatiboak badira beste edozein ordenatan, funtzioak zela-puntu bat izango du $a \in A$ puntuan.

4) $\{1, H_1, H_2, ..., H_n\}$ segidaren gairen bat 0 bada, azterketa berezia egin beharko da.

3.10. Korolarioa. *Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio erreala bi aldiz diferentziagarria $a \in A$ puntuan. Demagun 2. ordenako deribatu partzial guztiak jarraituak direla $a \in A$ puntuaren bola batean eta $Df(a) = \theta$ dela.*

Orduan, segida hau osatuko dugu $\{1, D_{11}f(a), \Delta\}$, non $\Delta = \begin{vmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) \end{vmatrix}$ hessetarra baita.

1) $D_{11}f(a) > 0$ eta $\Delta > 0$ badira, funtzioak minimo erlatiboa izango du $a \in A$ puntuan.

2) $D_{11}f(a) < 0$ eta $\Delta > 0$ badira, funtzioak maximo erlatiboa izango du $a \in A$ puntuan.

3) $D_{11}f(a) \neq 0$ eta $\Delta < 0$ badira, funtzioan zela-puntu bat izango du $a \in A$ puntuan.

4)$\{1, D_{11}f(a), \Delta\}$ segidaren gai bat 0 bada, azterketa berezia egon beharko da.

3.11. Adibidea. *$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ funtzioaren mutur erlatiboak bilatuko ditugu.*

a) puntu kritikoak bilatuko ditugu

$D_1f(x, y) = 3x^2 - 3 \ || = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

$D_2f(x, y) = 3y^2 - 12 \ || = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2.$

Beraz, $(1, 2)$,$(1, -2)$,$(-1, 2)$,$(-1, -2)$ *puntu kritikoak ditugu.*

b) puntu kritikoak aztertuko ditugu

$D_{11}f(x, y) = 6x$

$D_{12}f(x, y) = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy \Rightarrow \{1, 6x, 36xy\}$ *segida dugu.*

$D_{22}f(x, y) = 6y$

Puntuak	*1*	$D_{11}f(x, y)$	Δ
(1,2) puntua	*1*	*6*	*72*
(1,-2) puntua	*1*	*6*	*-72*
(-1,2) puntua	*1*	*-6*	*-72*
(-1,-2) puntua	*1*	*-6*	*72*

Funtzioak minimo erlatiboa du (1,2) puntuan, non f(1,2)= 2 baita.
Funtzioak zela- puntu bat du (1,-2) puntuan, non f(1,-2)= 34 baita.
Funtzioak zela- puntu bat du (-1,2) puntuan, non f(-1,2)= 6 baita.
Funtzioak maximo erlatiboa du (1,-2) puntuan, non f(-1,-2)= 38 baita.

3.3 Ariketak

1.1-3 Kalkula itzazu deribatu partzial hauek:

$u = x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$, 3. ordenakoak.

$D_{111}u = 6$ $D_{211}u = 0$
$D_{112}u = 0$ $D_{212}u = 0$
$D_{113}u = 0$ $D_{213}u = -6$
$D_{221}u = 0$ $D_{313}u = 0$
$D_{222}u = 6$ $D_{323}u = 0$
$D_{223}u = 0$ $D_{333}u = 6$

2.1-1 Kalkula ezazu funtzioen Taylor-en garapena jatorriaren inguruan:

$f(x,y) = \sin x \sin y$, 3. ordenaraino.
(a,b)=(0,0)
f(0,0)=0

$D_1 f(x,y) = \cos x \ siny$ $D_1 f(0,0) = 0$
$D_2 f(x,y) = \ sinx \cos y$ $D_2 f(0,0) = 0$

$D_{11} f(x,y) = -\sin x \sin y$ $D_{11} f(0,0) = 0$
$D_{12} f(x,y) = \cos x \cos y$ $D_{12} f(0,0) = 1$
$D_{22} f(x,y) = -\sin x \sin y$ $D_{21} f(0,0) = 0$

$D_{111} f(x,y) = -\cos x \sin y$ $D_{111} f(0,0) = 0$
$D_{112} f(x,y) = -\sin x \cos y$ $D_{112} f(0,0) = 0$
$D_{122} f(x,y) = -\cos x \sin y$ $D_{122} f(0,0) = 0$
$D_{222} f(x,y) = -\sin x \cos y$ $D_{222} f(0,0) = 0$

$P(x,y) = \frac{1}{2}(2D_{12}f(0,0))(x-0)(y-0).$

$P(x,y) = xy.$

3.1-1 Kalkula itzazu funtzio honen muturrak:

$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
$D_1 z = 3x^2 + 3y^2 - 15 \ || = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$
$D_2 z = 6xy - 12 \ || = 0 \Rightarrow 6xy - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{y}$
$x = \dfrac{2}{y}$ goiko ekuazioan ordezkatuz,

$$\frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow \frac{4}{y^2} + \frac{y^4}{y^2} - \frac{5y^2}{y^2} = 0 \Rightarrow 4 + y^4 - 5y^2 = 0 \Rightarrow y^4 - 5y^2 + 4 = 0.$$

$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{+5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 * 4 * 1}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{+5+3}{2} = 4$ eta $t = \dfrac{+5-3}{2} = 2.$

$y^2 = t$, beraz $y^2 = 4 \Rightarrow y = +2$ edo -2.
eta $y^2 = 2 \Rightarrow y = +1$ edo -1.

Dauden kondizioak kontuan hartuta ($x = \dfrac{2}{y}$), hauek dira puntu posibleak: (2,1),(1,2),(-1,-2) eta (-2,-1).

$D_{11} f(x, y) = 6x$
$D_{12} f(x, y) = 6y \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2$.
$D_{22} f(x, y) = 6x$

Puntuak	1	$D_{11} f(x, y)$	Δ
(2,1) puntua	1	12	108
(1,2) puntua	1	6	-108
(-1,-2) puntua	1	-6	-108
(-2,-1) puntua	1	-12	108

Funtzioak minimo erlatiboa du (2,1) puntuan, non f(2,1)= -28.
Funtzioak zela- puntu bat du (1,2) puntuan, non f(1,2)= -26.
Funtzioak zela- puntu bat du (-1,-2) puntuan, non f(-1,-2)= 26.
Funtzioak maximo erlatiboa du (-2,-1) puntuan, non f(-2,-1)= 28.