(1)

Matematikka diskretua

Sarrera

Premisak $\begin{cases} 1.\ \text{Euria egiten du} \to \text{Proposizioa (P)} \\ 2.\ \text{Euria egiten duenean Euritakoa eramaten dut} \end{cases}$ *

Ondorioa: Euritakoa eramaten dut

$$* \begin{cases} p \\ p \to q \end{cases}$$
$$\overline{\qquad q \qquad}$$

Predikatu-logikoa

Txakurra beltza da
Katua beltza da
Ardia beltza da

terminoak
t: Txakurra $B(t)$
K: Katua $B(K)$
A: Ardia $B(A)$

$B(x)$, x beltza da

Proposizio-kalkuloa

Enuntziatua edo Proposizioa: p, q, r, s... letren bidez izendatzen diren enuntziatu bakunak dira.

Proposizioei konektiboak gehitzen zaizkie esanahi ezberdinak emateko.

Ukapena: $\neg$ (1. maila), ez, ez da egia, gezurra da...
Konjuntzioa: $\wedge$ (2. maila), eta, baina, hala ere...
Disjuntzioa: $\vee$ (2. maila) edo.

Baldintzazkoa, $\rightarrow$, (3. maila): baldin... orduan... baldin...

Baldintzabikoa, $\leftrightarrow$, (3. maila): ~~B~~ Beharrezkoa eta nahikoa, baldin eta soilik baldin...

Ni zinera edo antzerkira noa zu futbolera bazoaz.

1. Ni zinera noa. p $\quad (p \vee q) \rightarrow r$
2. Ni antzerkira noa. q
3. Zu futbolera zoaz. r

a ez da ~~2~~ 7 baino handiagoa, ez bada a-5 0 baino handiagoa dela eta a^2-3 40 baino handiagoa

1. a 7 baino handiagoa p
2. $a-5$ 0 baino handiagoa q
3. a^2-3 40 baino handiagoa r

$(\neg q \vee r) \rightarrow \neg p$

Irismena

$A = p \rightarrow A$ formula p proposizioa izan daiteke

$B = q$

$A \wedge B \rightarrow$ formula

$A \vee B \rightarrow$ formula

$A = (p \vee q) \rightarrow r$

$B = q \rightarrow r$ Ez da A-ren azpiformula bat

$A = ((p \vee q) \rightarrow r) \vee s$ ~~$\leftrightarrow$~~

$B = (p \vee q) \rightarrow r$

$A = p \vee q \rightarrow r \vee s$

Ariketak

MD

1.1

a) p_1 Euria egiten duenean etxean geldtzen gara. Euria ari du. p_2
Etxean geratuko gara. p_3

P_1: 1. Euria egiten du p

2. Etxean gerato q

$P_1: p \to q$

$P_2: p$

$O: q$

b) $a>2$ bada $a^2>4$ izango da, eta $a<-2$ bada, $a^2>4$. Hortaz, $|a|>2$ denean, $a^2>4$ betetzen da

$$|a|>2 \Rightarrow \begin{cases} a<-2 \Leftarrow a<0 \quad -a<-2 \\ (a>0) \quad a>2 \end{cases}$$

1. $a>2$ p

2. $a<-2$ q

$|a|>2 \to (p \vee q)$

3. $a^2>4$ r

$P_1: (p \to r)$

$P_2: (q \to r)$

$P_1 \wedge P_2$

$O: (p \vee q) \to r$

1.2

a) $(\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

$\dfrac{\neg p \vee_2 q}{1}$

$\dfrac{\neg_3 p}{2}$ $\dfrac{q}{2}$

$\dfrac{p}{3}$

$\dfrac{\neg_4(p \wedge q)}{1}$

$\dfrac{p \wedge q}{4}$

$\dfrac{p}{5}$ $\dfrac{q}{5}$

Interpretazioak: Formularen baliozkotasuna adierazteko modua da. Formula batean beti izan behar da posible jakitea proposizioa egiazkoa edo faltsua den. pi proposizioari E edo F esleituz, formularako $I = \{m_1, \dots m_n\}$ interpretazioa lortzen da $m_i = p_i$ bada, proposizioa E izango da, $m_i = \neg p_i$ bada proposizioa F. Horrela Formulak 2^n interpretazio izango ditu.

A	B	$\neg A$	$A \land B$	$A \lor B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
E	E	F	E	E	E	E
E	F	F	F	E	F	F
F	E	E	F	E	E	F
F	F	E	F	F	E	E

Formulari G deitzen diogu.
Formula egia izan dadin $V(G, I) = E$ eta $I \models G$ notazioa erabili
Formula faltsua izan dadin $V(G, I) = F$ eta $I \not\models G$
G formula hori kontsistentea izango da, baldin eta interpretazio batean gutxienez egiazkoa izango balitz
G formula beti izango balitz egiazkoa orduan tautologia izango zen.
G formula baliogabea izango da, G gutxienez interpretazio bat izango ez balitz egia.

Predikatu-logika. Ariketak

1. Sintaxia predikatu-logikan

1.1 Formaliza itzazu esaldiak honako funtzio proposizionalak erabiliz: $N(x)$: x zenbaki arrunta da. $B(x)$: x bikoitia da. $I(x)$: x bakoitia da. $M(x)$: x negatiboa da. $Z(x,y)$: x zenbakiak y zatitzen du. $A(x,y,z)$: x zenbakia y eta z zenbakien biderkadura da.

a) Bikoitiak zenbaki arruntak dira.

b) Bikoitiak bakarrik dira zenbaki arruntak.

c) Zenbaki arrunt bat bera ere ez da negatiboa.

d) Badago bakoiti bat bikoiti guztiek zatitzen dutena.

e) Zenbaki arrunt orok bikoitiren bat zatitzen du.

f) Bikoitiak dira bi zenbaki bikoitiren biderkadura diren zenbaki bakarrak.

g) Bakoiti bat bera ere ez du bikoiti batek zatitzen.

1.2 Honako formuletan zenbatzaileen irismena adieraz ezazu, eta esan aldagaien zein agerpen diren askeak eta zein lotuak.

a) $\forall z \exists y (P(z,y) \wedge \forall z Q(z,x) \rightarrow R(z))$.

b) $\exists z \forall x (P(z,x) \vee \forall z Q(x,y,z))$.

c) $\forall x \exists y P(x,z,y) \rightarrow \exists x \neg Q(x,y) \vee R(z)$.

d) $\exists x(\neg P(x,y) \rightarrow R(x,z)) \vee \neg P(x,y)$.

e) $\exists x P(x,y) \wedge Q(z)$.

2.- Baliokidetza logikoak

Froga itzazu baliokidetza hauek baliokidetza-logikoak erabiliz:

a) $\forall x(N(x) \rightarrow \neg G(x)) \equiv \neg \exists x(N(x) \wedge G(x))$.

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \equiv \exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$.

c) $\forall x \exists y(P(x) \wedge Q(y)) \equiv \exists y \forall x(P(x) \wedge Q(y))$.

d) $\forall x \exists y(P(x) \wedge Q(y)) \equiv \forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$.

3.- Dedukzio formala

3.1 Formaliza itzazu honako argumentuak predikatu-logikarako. Ondoren, egin ezazu argumentuen baliozkotasunaren froga formala dedukzioa erabiliz.

a) Atleta guztiak langileak dira. Langile eta adimentsu den edonork ikasketak bukatuko ditu. Pello atleta da. Pello adimentsua da. Hortaz, Pellok ikasketak bukatuko ditu.

b) Oteiza miresten ez dutenak ez dira artezaleak. Izarok ez du inor miresten. Hortaz, Izaro ez da artezalea.

c) Donostiarrek edozein txalotzen dute. Gorkak ez du Txillida txalotzen. Hortaz, Gorka ez da donostiarra.

d) Lagun bat norbaiten aita bada, orduan norbait hori lagun horren semea edo alaba da. Edorta norbaiten aita da. Edortak ez du semerik. Hortaz, Edortak alabaren bat dauka.

e) Informatikariek gogoko dute abestea. Lagun batek ez du abestea gogoko, baina pianoa jotzen du. Hortaz, badago informatikaria ez den eta pianoa jotzen duen lagunen bat.

3.2 Eman itzazu hurrengo argumentuen baliozkotasunaren froga formalak:

a) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad / \therefore \quad \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (P(y) \rightarrow R(y))$

b) $\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y) \quad / \therefore \quad \forall x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$

c) $\exists x \forall y(P(x) \leftrightarrow Q(y)) \quad / \therefore \quad \forall y \exists x(P(x) \leftrightarrow Q(y))$

d) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
$\exists x(P(x) \vee \neg Q(x)) \quad / \therefore \quad \exists x P(x)$

e) $\exists x P(x) \rightarrow \forall y(P(y) \vee Q(y) \rightarrow R(y))$
$\exists x P(x) \wedge \exists x R(x) \quad / \therefore \quad \exists x(P(x) \wedge R(x))$

f) $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$
$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad / \therefore \quad \exists y Q(y)$

g) $\exists x P(x) \vee \forall y(P(y) \rightarrow Q(y))$
$\forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \quad / \therefore \quad \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow Q(y))$

Predikatu-logika

Argumentuen baliozkotasunaren froga.

Y aldagaia askea da x-rako A(x) formulan x aldagaia y aldagaiaz ordezkatzean y-ren agerpen guztiak askeak izaten jarraitzen badute, A(y) formulan.

A(x) formulan x askea agertzen ez bada, $\forall y\, A(y) = A(x)$

Zenbatzaileen erregelak (Zenbatzaile unibertsala ezabatzearen erregela ($\forall x$ ezabatu)).

$\forall x\, A(x)$ formula izanik, A(y) ondorioztatu dezakegu, baldin eta y askea bada x aldagairako A(x) formulan edo y konstantea bada.

Edozein x-erako A(x) betetzen bada, y edozein ex-etako bat izan daiteke.

Adb

1- $\neg P(x)$

2- $\forall y\,(P(y) \vee Q(y))$ $\;/\therefore\; Q(x)$

3- $P(x) \vee Q(x)$ $\quad \forall y$ ezabatu (2)

(x askea y-rako $P(y) \vee Q(y)$ formulan)

4- $Q(x)$ $\quad$ SD (3, 1)

Zenbatzaile unibertsala sartzearen erregela ($\forall x$ sartu)

A(y) formula izanik, $\forall x\, A(x)$ ondorioztatu dezakegu, betiere premisa eta hipotesi eta suposizioetan ez badute y aldagaiaren agerpen askerik.

A(y) formulako y aldagaiak ∀ elementu adierazi. ∀ elementu horietako bat egiazkoa bada, guztientzat izango da egiazkoa.

Adb

1- $\forall y\, P(y,y) \wedge \forall z\, R(z)$ $\;/\therefore\; \forall y\,(P(y,y) \wedge R(y))$

2- $\forall y\, P(y,y)$ $\quad$ KS(1)

3- $P(y,y)$ $\quad \forall y$ ezabatu (2)

(y askea y-rako $P(y,y)$ formulan)

4. $\forall z\, R(z) \wedge \forall y\, P(y,y)$ trull (1)

5- $\forall z\, R(z)$ KS(4)

6 -> $R(z)$ $\forall z$ ezabatu (5)
(z aslea da z rekin $R(z)$ formulan)

7 - $P(y,y) \wedge R(z)$ KK(3,6)

8- $\forall y\, (P(y,y) \wedge R(z))$ $\forall y$ sartu (7)
(1. premisan y aldagaia ez da aske ageri)

Zenbatzaile existentziala sartzearen erregela ($\exists x$ sartu)

$A(y)$ formula izanik, ondorioztatu dezakegu $\exists x\, A(x)$, baldin y askea bada x aldagairekin $A(x)$ formulan edo y konstantea bada.

Unibertsoko y elementuarentzat egiazkoa den $A(y)$ formula beste elementu batentzat ere egiazkoa da.

Adb

1- $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ /∴ $P(y) \rightarrow \exists x$

$\boxed{2}$ $P(y)$ (BFE) hipotesia/∴ $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

$\boxed{3}$ $P(y) \rightarrow Q(y)$ $\forall x$ ezabatu (1)
(y aske xrekin $P(x) \rightarrow Q(x)$)

$\boxed{4}$ $Q(y)$ MP(3,2)

$\boxed{5}$ $P(y) \wedge Q(y)$ KK(2,4)

$\boxed{6}$ $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ $\exists x$ sartu (5)
(y aske x rekin $P(x) \wedge Q(x)$).

7. $P(y) \rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ BFE (2,3-6)

Zenbakitzaile existentziala ezabatzearen erregela ($\exists x$ ezabatu)

$\exists x\, A(x)$ formulatik $A(y)$ ondorioztatzeko, ezinda y aske agertu ez premisetan, ez ondorioan ezta indarrean dauden hipotesietan.

$A(x)$ egiazatto egiten duen x elementua bereizia eta y dela $\boxed{\text{suposatzen}}$ dugu. y elementu guztietatik bereizi ez daitekeela $A(x)$ betetzen duen hori zein den.

Adb

1- $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$

2- $\exists y\, (P(y))$ $\quad$ /∴ $\exists z\, Q(z)$

$\boxed{3}$ $P(y)$ $\quad$ $\exists y$ ezabatu (2) (suposizioa)

(y ez da azaldu premisetan eta ondorioan)

$\boxed{4}$ $P(y) \to Q(y)$ $\quad$ $\forall \cancel{x}$ ezabatu (1)

(y azaldu x-ren lekuan $P(x) \to Q(x)$ formulan

$\boxed{5}$ $Q(y)$ $\quad$ MP(4,3)

$\boxed{6}$ $\exists z\, Q(z)$ $\quad$ $\exists z$ sartu (5)

y-ren lekuan z-rekin $Q(z)$ formulan

7 $\exists z\, Q(z)$

Proposizio-logika. Ariketak

1. Sintaxia proposizio-logikan

1.1 Honako argumentuetako esaldien formalizazioa egin ezazu proposizio-logikarako:

a) Euria egiten duenean etxean geratzen gara. Euria ari du. Hortaz, etxean geratuko gara.

b) $a > 2$ bada, $a^2 > 4$ izango da, eta, $a < -2$ bada, $a^2 > 4$ izango da. Hortaz, $|a| > 2$ denean, $a^2 > 4$ betetzen da.

c) Matematika ikasten duenak azterketa gaindituko du eta azterketa gainditzen duenak badaki integralak kalkulatzen. Hortaz, matematika ikasi duenak badaki integralak kalkulatzen.

d) Donostiara Tolosatik edo Zarauztik joan gaitezke. Tolosako bidea itxita dagoenez, Donostiara bagoaz, Zarauztik joango gara.

e) Jone datorrenean Izaskun ere badator. Eta Ainhoa datorrenean Gaizka ere badator. Bietako bat, Izaskun edo Gaizka, kanpoan da. Hortaz, Jone edo Ainhoa ez da etorriko.

f) Mikelek edo Jonek hil zuten. Mikel herritik kanpo zegoen hilketa gertatu zenean. Mikel herritik kanpo bazegoen hilketa gertatu zenean orduan ez zegoen hilketa gertatutako lekuan. Mikel hilketa gertatutako lekuan ez bazegoen orduan ezin zuen hilketa burutu. Hortaz, Jonek hil zuen.

g) Gogotsu saiatzen banaiz eta gaitasun berezia badut musikari ona izango naiz. Musikari ona banaiz zoriontsua izango naiz. Hortaz, zoriontsua ez banaiz gogotsu saiatu ez naizelako edo gaitasun berezia ez dudalako izango da.

1.2 Honako formuletako lokailuen agerpen bakoitzaren irismena adieraz ezazu.

a) $(\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

b) $\neg p \wedge q \leftrightarrow (r \wedge \neg\neg(p \vee q) \to s)$

c) $p \wedge (p \vee q \to (r \to \neg p))$

2. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna. Baliokidetza logikoak

2.1 Izan bitez A eta B formulak eta $I_1 = \{p, q, \neg r\}$ eta $I_2 = \{\neg p, q, \neg r\}$ interpretazioak. Kalkula itzazu $V(A, I_1)$, $V(A, I_2)$, $V(B, I_1)$ eta $V(B, I_2)$ egia-balioak.

$$A = p \vee \neg r \to r \wedge q, \qquad B = \neg p \vee q \to (\neg(p \wedge r) \to \neg p)$$

2.2 Honako formulen egia-taulak eraiki itzazu, eta baliozkotasunari buruz, esan formulak kontsistente/inkontsistente(kontraesan) eta baliozko(tautologia)/baliogabe diren, erabakia arrazoituz.

a) $p \vee \neg q \leftrightarrow s$

b) $(\neg p \to q) \wedge (q \to p)$

c) $(p \to q) \to (\neg(q \wedge r) \to \neg(r \wedge p))$

d) $(p \leftrightarrow \neg q) \to r \vee s$

2.3 Formula bakoitzerako 2 interpretazio aurki itzazu, formula egiazko egingo duen bat eta faltsu egingo duen beste bat, horretarako egia-taulak eraiki gabe.

a) $(p \to q) \vee q$

b) $(p \vee \neg q) \wedge p$

c) $(p \to r) \to ((q \to s) \to (p \vee q \to r))$

2.4 Honako formulen baliozkotasuna azter ezazu, kontsistente/inkontsistente(kontraesan) eta baliozko(tautologia)/baliogabe diren erabakiz, egia-taulak eraiki gabe. Zure erantzuna frogatuko duten interpretazioak aurki itzazu.

a) $\neg p \to q \wedge (q \to p)$

b) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

c) $p \wedge (p \vee q \to (r \to \neg p))$

d) $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)$

2.5 Formulen baliozkotasunari buruzko honako baieztapenak egiazkoak ala faltsuak diren erabaki ezazu, erantzuna arrazoituz:

a) $\neg A$ tautologia bada, A ez da tautologia izango.

b) A ez bada tautologia, $\neg A$ tautologia izango da.

c) $A \vee B$ tautologia bada, A tautologia da edo B tautologia da.

d) A tautologia bada edo B tautologia bada, $A \vee B$ tautologia izango da.

e) $A \wedge B$ tautologia da baldin eta soilik baldin A eta B tautologiak badira.

2.6 Formulak baliokideak direla froga ezazu 10 baliokidetza logikoak erabiliz.

a) $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \equiv q \wedge (p \vee r)$

b) $\neg(\neg p \vee \neg(r \vee s)) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s)$

c) $(p \vee r) \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge s)$

d) $p \to (q \to r) \equiv q \to (p \to r)$

e) $p \wedge q \to r \equiv \neg(p \wedge q \wedge \neg r)$

2.7 Egia-taulak eraikiz edo baliokidetza logikoak erabiliz, honakoak egiazko edo faltsu diren erabaki ezazu.

a) $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to q \wedge r$

b) $(p \to q) \to p \wedge q \equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to p)$

c) $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$

d) $(p \wedge q) \vee r \equiv p \wedge (q \vee r)$

3. Ondorio logikoak. Argumentuen dedukzio formala

3.1 Erabaki ezazu beheko ondorio logikoak egiazkoak ala faltsuak diren. Horretarako, emandako formulen egia-taula eraiki eta zure erabakia arrazona ezazu.

a) q formula $p \wedge q$ formularen ondorio logikoa da.

b) q formula $p \vee q$ formularen ondorio logikoa da.

c) q formula $p \vee q$ eta $\neg p$ formulen ondorio logikoa da.

d) p formula $p \vee q$ eta q formulen ondorio logikoa da.

3.2 Honako argumentuen baliozkotasuna azter ezazu baliokidetasun logikoak erabiliz. Baliozko direla frogatzeko, $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ tautologia dela edo $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg C$ inkontsistentzia dela frogatu beharko duzu. Baliogabea dela ikusten baduzu, argumentua faltsu egiten duen interpretazio bat aurki ezazu (ez eraiki egia-taularik).

a) $p \to q \quad / \therefore \neg(q \wedge r) \to \neg(r \wedge p)$

b) $p \to q \quad / \therefore (p \to \neg r) \to \neg p$

c) $(p \wedge q) \to r \quad / \therefore (p \to (q \to r))$

3.3 Honako argumentuen baliozkotasuna azter ezazu (baliozkoak/baliogabeak), egia-taulak eraiki gabe. Zure erantzuna frogatuko duten interpretazioak aurkitu.

a) $a \to d$
$d \to c$
$a \quad / \therefore d \wedge c$

b) $a \to b$
$c \to d$
$b \vee c \quad / \therefore a \vee d$

c) $p \to \neg q$
$p \vee r$
$\neg r \quad / \therefore q$

d) $\neg p \vee q$
$r \to s$
$q \vee r \quad / \therefore p \vee s$

3.4 Honako argumentuen baliozkotasunaren froga formalak egin itzazu, 9 inferentzia-erregelak soilik erabiliz.

a) $h \to (i \to j)$
$k \to (i \to j)$
$\neg h \wedge \neg k \to \neg l \vee \neg m$
$(\neg l \to \neg n) \wedge (\neg m \to \neg o)$
$(p \to n) \wedge (q \to o)$
$\neg(i \to j) \quad / \therefore \neg p \vee \neg q$

b) $\neg b \to (d \leftrightarrow \neg h)$
$(d \to e) \to f$
$e \wedge a \to \neg b$
$\neg f \vee \neg(d \leftrightarrow \neg h)$
$c \to (d \to e) \quad / \therefore \neg c \vee \neg(e \wedge a)$

c) $(p \to \neg q) \wedge (\neg r \to s)$
$(t \to u) \wedge (\neg v \to \neg x)$
$(\neg q \to t) \wedge (s \to \neg v)$
$u \vee \neg x \to y \wedge z$
$p \vee \neg r \quad / \therefore y \wedge z$

3.5 Argumentuen baliozkotasunaren froga formala egin ezazu 9 inferentzia-erregelak eta ordezkapen-erregela (10 baliokidetza logikoak) soilik erabiliz.

a) $\neg(p \to q)$
$r \to q$
$p \to s \quad / \therefore s \wedge \neg r$

b) $\neg p \vee q$
$r \wedge s \to p$
$\neg q \wedge s \;/ \therefore \neg r$

c) $\neg q \wedge s$
$s \to \neg r$
$\neg r \to \neg p \vee q \quad / \therefore \neg p$

d) $p \to r$
$s \wedge \neg r$
$\neg q \wedge s \to p \quad / \therefore q$

3.6 Dedukzio formala erabiliz, argumentuen baliozkotasunaren froga formala egin ezazu. Horretarako 9 inferentzia-erregelak, ordezkapen-erregela (10 baliokidetza logikoak), absurdura eramatearen erregela (AEE) eta baldintzazko frogaren erregela (BFE) erabil ditzakezu. Froga modu bat baino gehiagotan egin.

a) $p \wedge (q \vee r) \to q \wedge r \;/ \therefore p \to (q \to r)$

b) $a \;/ \therefore b \vee (b \to c)$

c) $d \vee e \to (f \to g)$
$\neg g \vee h \to d \wedge f \quad / \therefore g$

d) $s \to \neg r$
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \;/ \therefore q \vee \neg s$

e) $o \to (p \to q)$
$p \to (q \to r) \quad / \therefore o \to (p \to r)$

f) $p \vee q \to (r \wedge s)$
$\neg(\neg p \vee \neg r)$
$\neg t \to \neg(p \wedge s) \quad / \therefore t$

g) $p \wedge s$
$\neg r \to \neg p \vee q$
$p \vee r \to s \wedge \neg q \quad / \therefore r$

h) $(h \to i) \wedge (j \to k)$
$(i \vee k) \to l$
$\neg l \quad / \therefore \neg(h \vee j)$

i) $p \to \neg q$
$\neg r \wedge s \to p$
$s \wedge q \quad / \therefore r$

j) $a \wedge b \to c$
$c \to d$
$b \wedge \neg d \quad / \therefore \neg a$

k) $x \to (y \to z)$
$x \to (a \to b)$
$x \wedge (y \vee a)$
$\neg z \quad / \therefore b$

l) $(v \to \neg w) \wedge (x \to y)$
$(\neg w \to z) \wedge (y \to \neg a)$
$(z \to \neg b) \wedge (\neg a \to c)$
$v \wedge x \quad / \therefore \neg b \wedge c$

m) $(l \vee m) \vee (n \wedge o)$
$(\neg l \wedge o) \wedge \neg(\neg l \wedge m) \;/ \therefore \neg l \wedge n$

Sintaxia. Ondo eratutako formula

- Atomoa: n aritateko P predikatua eta $t_1, t_2, \ldots, t_n$ terminoak izanik, $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomoa edo formula atomikoa da.
- Ondo eratutako formula:
  1. Atomo bat ondo eratutako formula da.
  2. A eta B ondo eratutako formulak badira, $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ ere ondo eratutako formulak dira.
  3. A ondo eratutako formula bada eta x aldagai bat bada, $(\forall x A)$ eta $(\exists x A)$ ere ondo eratutako formulak dira.
  4. Ondo eratutako formulak sortzeko modu bakarra aurreko hiru arauak aldi kopuru finituan aplikatzea da.
- Azpiformula: Ondo eratutako G formula emanik, A Gren azpiformula da A osatzen duten sinboloak ondoz-ondokoak badira Gn eta ondo eratutako formula bat osatzen badute.

Oharra: Hemendik aurrera formula aipatzean ondo eratutako formula bati buruz ari garela ulertuko da.

Sintaxia. Ondo eratutako formula

- Zenbatzaile baten irismena: Zenbatzaile baten agerpen batek formularen zein azpiformulari eragiten dion adierazten du, norainokoa den haren eragina.
- Aldagai baten agerpena (lotua/askea): Formula batean aldagai baten agerpena lotua da zenbatzaile batekin badago edo aldagai hori erabiltzen duen zenbatzaile baten irismenaren barne badago. Agerpena lotua ez bada orduan askea da.
- Aldagai lotua/askea: Aldagai bat askea da formula batean gutxienez aldagaiaren agerpen bat askea bada, eta lotua da gutxienez aldagaiaren agerpen bat lotua bada. Aldagai bat aldiberean lotua eta askea izan daiteke.
- Formula itxia: Formula batean aldagaien agerpen askerik ez badago formula itxia dela esaten da.

Notazioa: $A[x]$: x aldagairen agerpen askea duen formula,
J: x aldagaiaren agerpen askerik ez duen formula (itxia)

Baliokidetza-logikoak predikatu-logikan

Proposizio-logikako baliokidetza-logikoak (ELKAR, TRUK, BANA, TAUT, UB, DeM, TRANS, INP, BALIO, ESP) predikatu-logikan ere baliokidetza-logiko dira.
Horiez gain, zenbatzaileen baliokidetzak daude.

- Zenbatzaileen baliokidetza-logikoak:
  1. $\neg\forall x A[x] \equiv \exists x \neg A[x]$
  2. $\forall x \neg A[x] \equiv \neg\exists x A[x]$
  3. $\forall x A[x] \wedge \forall x B[x] \equiv \forall x (A[x] \wedge B[x])$
  4. $\exists x A[x] \vee \exists x B[x] \equiv \exists x (A[x] \vee B[x])$
  5. 5.1 $\forall x A[x] \vee J \equiv \forall x (A[x] \vee J)$
     5.2 $\exists x A[x] \vee J \equiv \exists x (A[x] \vee J)$
  6. 6.1 $\forall x A[x] \wedge J \equiv \forall x (A[x] \wedge J)$
     6.2 $\exists x A[x] \wedge J \equiv \exists x (A[x] \wedge J)$
- Ez dira baliokidetza-logikoak:
  1. $\forall x A[x] \vee \forall x B[x] \not\equiv \forall x (A[x] \vee B[x])$
  2. $\exists x A[x] \wedge \exists x B[x] \not\equiv \exists x (A[x] \wedge B[x])$

Argumentuen baliozkotasunaren froga

Dedukzio formala
Predikatu-logikan argumentuen baliozkotasunaren froga formala (dedukzio formala) egiteko erabiliko ditugun erregelak:

1. Inferentzia-erregelak (proposizio-logikako 9ak): MP, MT, SH, SD, DE, DS, KS, KK, DB.
2. Ordezkapen erregela: Proposizio-logikako 10 baliokidetzak eta predikatu-logikako zenbatzaileen baliokidetzak erabiltzeko.
3. Baldintzazko Frogaren Erregela (BFE) eta Absurdora Eramatearen Erregela (AEE).
4. Zenbatzaileen erregelak. Erregela berriak dira, frogako errenkada osoei aplikatzeko modukoak.

Predikatu-Logika

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Titulazioa: Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Informatika fakultatea
Donostia

Sarrera. Formalizazioa

Argumentuen formalizazioa logikan sinboloen bidez.
Esaldiaren analisiaren konplexutasunaren arabera, bi maila:

- Proposizio-logika: Formalizaziorako oinarrizko elementuak esaldi deklaratzaile bakunak (proposizioak) dira. Esaldia zatiezina da. Argumentuaren baliozkotasuna proposizioen arteko erlazioan oinarritzen da.
- Predikatu-logika: Esaldiaren egitura aztertuko da.
  - Terminoak edo konstanteak: Banakoak (pertsonak, zenbakiak, . . .). Notazioa (hizki xeheak): a, b, c, . . .
  - Predikatuak: Banakoen ezaugarriak (animalia izatea, mendira joatea, . . .). Notazioa (hizki larriak): P, Q, . . .
    - Aldagaia: x, konstante batez ordezkatua izan daiteke.
    - Proposizioa: P(b), P(l), P(s), ... Egia-balioa dute.
    - Funtzio proposizionala: Aldagaiez osatutako adierazpenak, aldagaiak konstanteez ordezkatuak izatean proposizio bihurtzen direnak. P(x)

Sarrera. Formalizazioa

Funtzio proposizionaletatik proposizioak lortzeko bi modu:

- Aldagaiak instantziatzea: Aldagaiak konstanteez ordezkatzea, P(x)tik P(b) lortzea
- Aldagaiak kuantifikatzea edo zenbatzea: Proposizio orokorrak adierazteko, bi zenbatzaile erabil daitezke.
  - Zenbatzaile unibertsala, $\forall$: $\forall x P(x)$
  - Zenbatzaile existentziala, $\exists$: $\exists x P(x)$

  Lau proposizio-mota:
  - Baiezko unibertsala, $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - Baiezko partikularra, $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
  - Ezezko unibertsala, $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
  - Ezezko partikularra, $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Sintaxia. Alfabetoa. Ondo eratutako formula

- Alfabetoa: honako sinboloek osatzen dute,
  - Terminoak:
    - Aldagaiak: $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$
    - Konstanteak: $\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots\}$
  - Predikatuak: $\mathcal{P} = \{P, Q, R, \ldots\}$
  - Lokailuak: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
  - Zenbatzaileak: $\{\forall, \exists\}$

    Lokailuak eta zenbatzaileak hierarkia-mailaka:
    - 1. maila (irismen txikienekoa): $\neg$, $\forall$, $\exists$.
    - 2. maila: $\wedge$, $\vee$.
    - 3. maila (irismen handienekoa): $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
  - Parentesiak eta komak: $\{ (\,,\,)\,,\,, \}$
- Predikatuaren aritatea, $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$: P predikatuak $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termino baditu n aritatekoa dela esaten da.

Zenbatzaileen erregelak

Zenbatzaile existentziala sartzearen erregela ($\exists x$ sartu).
$A(y)$ formula izanik, $\exists x\, A(x)$ ondoriozta dezakegu, beti ere y askea bada x aldagairako $A(x)$ formulan edo y konstantea bada.

- Intuitiboki: Unibertsoko y elementu jakin batentzat egiazkoa den $A(y)$ formula unibertsoko elementuren batentzat egiazkoa dela esaten da erregela aplikatuz.
- Formalki: Unibertsoko elementu jakin bat $y$ren bidez adierazteko: y askea x aldagairako $A(x)$ formulan.

Adibidea.

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$	$/ \therefore \quad P(y) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
$\boxed{2.}$ $P(y)$	(BFE) hipotesia $/ \therefore \quad \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
$\boxed{3.}$ $P(y) \to Q(y)$	$\forall x$ezab.(1) (y aske $x$rako $P(x) \to Q(x)$)
$\boxed{4.}$ $Q(y)$	MP(3,2)
$\boxed{5.}$ $P(y) \wedge Q(y)$	KK(2,4)
$\boxed{6.}$ $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists x$ sar.(5) (y aske $x$rako $P(x) \wedge Q(x)$)
7. $P(y) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$	BFE(2,3-6)

Zenbatzaileen erregelak

Zenbatzaile existentziala ezabatzearen erregela ($\exists x$ ezabatu)
$\exists x\, A(x)$ formulatik zenbatzailea kendu eta $A(y)$ ondorioztatzeko bete beharko da y ez agertzea aske ez premisetan, ez argumentuaren C ondorioan ezta indarrean dauden hipotesietan.

- Intuitiboki: $A(x)$ egiazko egiten duen x elementu hori bereiztu eta y dela $\boxed{\text{suposatzen}}$ dugu erregela aplikatzean. Suposizioak y elementua gainerako guztietatik bereizi behar du, ez dakigulako zein den $A(x)$ betetzen duen hori. Horretarako, beharrezkoa da y elementuak agerpen askerik ez izatea.
- Erregelaren aplikazioa: Baldintzak betetzen badira, $\exists x\, A(x)$ formulatik $A(y)$ suposizioa egingo dugu. Hortik ondorioztatutakoak $A(y)$ suposizioaren mende geratuko dira. Argumentuaren C ondoriora iritsi eta bertan $y$ren agerpen askerik ez dagoela ikusten bada, orduan erregelaren aplikazioa amaituko da, suposizioa ez da indarrean izango aurrerantzean eta C ontzat emango dugu.

Zenbatzaileen erregelak ($\exists x$ ezabatu)

Adibidea.

	1. $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	
	2. $\exists y\, P(y)$	$/ \therefore \quad \exists z\, Q(z)$
$\to$	$\boxed{3.}$ $P(y)$	$\exists y$ ezabatu(2) (suposizioa) (y ez da aske bi premisetan eta ondorioan)
	$\boxed{4.}$ $P(y) \to Q(y)$	$\forall x$ ezabatu(1) (y askea $x$rako $P(x) \to Q(x)$ formulan)
	$\boxed{5.}$ $Q(y)$	MP(4,3)
	$\boxed{6.}$ $\exists z\, Q(z)$	$\exists z$ sartu(5) (y askea $z$rako $Q(z)$ formulan)
	7. $\exists z\, Q(z)$	$\exists y$ ezabatu(2,3-6) erregelaren amaiera (2. premisan ezabatu dugu, 3-6 urratsetan suposizioa indarrean izan da. 6. urratseko ondorioan y ez dagoenez aske, ontzat ematen da)

Zenbatzaileen erregelak ($\exists x$ ezabatu)

Adibidea. Erregelaren erabilera okerra.

	1. $\forall x \exists y\, P(x,y)$	$/ \therefore \quad \forall y \exists x\, P(x,y)$
	2. $\exists y P(x,y)$	$\forall x$ ezabatu(1) (x askea $x$rako $\exists y P(x,y)$ formulan)
$\to$	$\boxed{3.}$ $P(x,y)$	$\exists y$ ezabatu(2) (suposizioa) (y ez da aske ez premisan ez ondorioan)
	$\boxed{4.}$ $\exists x\, P(x,y)$	$\exists x$ sartu(3) (x askea $x$rako $P(x,y)$ formulan)
	$\boxed{5.}$ $\exists x\, P(x,y)$	$\exists y$ ezabatu(2,3-4) erregelaren amaiera (Ezin da erregela amaitutzat eman!! Suposizioko y aske ageri da... Ezin dugu formula ontzat eman)
	6. $\forall y \exists x P(x,y)$	$\forall y$ sartu(5) (Ezin da! Suposizioa indarrean da, eta y aske ageri da suposizioan)

5. urrats moduan $\forall y$ sartu(4) ere ezingo nuke egin (suposizioa...)

Bibliografia

- Matemáticas Discreta y Combinatoria.
  Una introducción con aplicaciones.
  Fundamentos de lógica kapitulua
  Ralph P. Grimaldi.

- Wikipedia.
  - Lógica de primer orden.
    http://es.wikipedia.org/wiki/Lógica_de_primer_orden

Argumentuen baliozkotasunaren froga

Zenbatzaileen erregeletan agertuko diren kontzeptu eta notazioak:

- Esango dugu y aldagaia askea dela $x$rako $A(x)$ formulan x aldagaia y aldagaiaz ordezkatzean lortutako $y$ren agerpen guztiek askeak izaten segitzen badute $A(y)$ formulan ($y$ren beste agerpen aske batzuk egon daitezke).
- Notazioa:
  - $A(x)$: Formula bat
  - $A(y)$: $A(x)$ formulan x aldagaiaren agerpen aske guztiak y aldagaiaz ordezkatuz lortutako formula
- Oharrak:
  - $A(x)$ formulan x aske agertzen ez bada, orduan edozein y aldagairako $A(y) = A(x)$
  - $A(x)$ formula izanik, x askea da x aldagairako $A(x)$ formulan

Zenbatzaileen erregelak

Zenbatzaile unibertsala ezabatzearen erregela ($\forall x$ ezabatu).
$\forall x\, A(x)$ formula izanik, $A(y)$ ondoriozta dezakegu, beti ere y askea bada x aldagairako $A(x)$ formulan edo y konstantea bada.

- Intuitiboki: Unibertsoko $\forall x$ elementurako $A(x)$ egiazkoa bada, egiazko izango da unibertsoko edozein elementu horietako bat adierazten duen y elementuarentzat ere.
- Formalki: Unibertsoko edozein elementu horietako bat y aldagaiaren bidez adierazteko derrigorrezkoa da y askea izatea x aldagairako $A(x)$ formulan.

Adibidea. Txakurrak ugaztunak dira. Txuri txakurra da. Hortaz, Txuri ugaztuna da.

1. $\forall x(T(x) \to U(x))$		
2. $T(t)$	$/ \therefore \quad U(t)$	
3. $T(t) \to U(t)$		$\forall x$ ezabatu (1), t : kte.(Txuri)
4. $U(t)$		MP(3,2)

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ ezabatu)

Adibidea.

1. $\neg P(x)$	
2. $\forall y(P(y) \vee Q(y))$	$/ \therefore \quad Q(x)$
3. $P(x) \vee Q(x)$	$\forall y$ ezabatu (2) (x askea $y$rako $P(y) \vee Q(y)$ formulan)
4. $Q(x)$	SD(3,1)

Adibidea. Erregelaren erabilera okerra.

1. $\forall x \exists y P(x,y)$	$/ \therefore \quad \exists y P(y,y)$
2. $\exists y P(y,y)$	$\forall x$ ezabatu (1) (Ezin da! $\exists y P(x,y)$ formulan y ez delako askea $x$rako)

Zenbatzaileen erregelak

Zenbatzaile unibertsala sartzearen erregela ($\forall x$ sartu)
$A(y)$ formula izanik, $\forall x\, A(x)$ ondoriozta dezakegu, beti ere argumentuko premisek eta indarrean dauden hipotesi eta suposizioek ez badute y aldagaiaren agerpen askerik.

- Intuitiboki: $A(y)$ formulako y aldagaiak unibertsoko edozein elementu bat adierazi behar du. Unibertsoko edozein elementu batentzat egiazkoa dena, guztientzat egiazkoa dela esaten dugu erregela aplikatuz.
- Formalki: $A(y)$ formulako y aldagaiak unibertsoko edozein elementu adierazten duela ziurtatzeko, premisa eta hipotesietan y aske ez agertzea eskatu behar da.

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ *sartu*)

Adibidea. Hegoafrikan, norbait maite duen orok Nelson Mandela maite du. Hegoafrikan biztanle guztiek maite dute norbait. Hortaz, Hegoafrikan guztiek maite dute Nelson Mandela.

1. $\forall x(\exists y\ M(x,y) \rightarrow M(x,n))$	
2. $\forall x\ \exists y\ M(x,y)$	$/ \therefore\ \ \forall x\ M(x,n)$
3. $\exists y\ M(x,y) \rightarrow M(x,n)$	$\forall x$ ezabatu (1) (x askea xrako $\exists y M(x,y) \rightarrow M(x,n)$ formulan)
4. $\exists y\ M(x,y)$	$\forall x$ ezabatu (2) (x askea xrako $\exists y M(x,y)$ formulan)
5. $M(x,n)$	MP(3,4)
6. $\forall x\ M(x,n)$	$\forall x$ sartu (5) (1. eta 2. premisek ez dute x aske)

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ *sartu*)

Adibidea.

1. $\forall y\ P(y,y) \wedge \forall z\ R(z)$	$/ \therefore\ \ \forall y\ (P(y,y) \wedge R(y))$
2. $\forall y\ P(y,y)$	KS(1)
3. $P(y,y)$	$\forall y$ ezabatu (2) (y askea yrako $P(y,y)$ formulan)
4. $\forall z\ R(z) \wedge \forall y\ P(y,y)$	TRUK(1)
5. $\forall z\ R(z)$	KS(4)
6. $R(y)$	$\forall z$ ezabatu (5) (y askea zrako $R(z)$ formulan)
7. $P(y,y) \wedge\ R(y)$	KK(3,6)
8. $\forall y\ (P(y,y) \wedge R(y))$	$\forall y$ sartu (7) (1. premisan y aldagaia ez da aske ageri)

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ *sartu*)

Adibidea.

	1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	
	2. $\forall x\ (R(x) \rightarrow \neg Q(x))$	$/ \therefore\ \ \forall x\ (R(x) \rightarrow \neg P(x))$
$\rightarrow$	$\boxed{3.}$ $R(x)$	(BFE) hipotesia $/ \therefore\ \ \neg P(x)$
	$\boxed{4.}$ $R(x) \rightarrow \neg Q(x)$	$\forall x$ ezabatu (2) (x askea xrako $R(x) \rightarrow \neg Q(x)$ formulan)
	$\boxed{5.}$ $\neg Q(x)$	MP(4,3)
	$\boxed{6.}$ $P(x) \rightarrow Q(x)$	$\forall x$ ezabatu (1) (x askea xrako $P(x) \rightarrow Q(x)$ formulan)
	$\boxed{7.}$ $\neg P(x)$	MT(6,5)
	$\boxed{8.}$ $R(x) \rightarrow \neg P(x)$	BFE(3-7)
	9. $\forall x\ (R(x) \rightarrow \neg P(x))$	$\forall x$ sartu (8) (1. eta 2. premisetan x ez da aske ageri. 3. hipotesian bai, baina ez dago indarrean)

Zenbatzaileen erregelak ($\forall x$ *sartu*)

Adibidea. Erregelaren erabilera okerra.

	1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	$/ \therefore\ \ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)$
$\rightarrow$	$\boxed{2.}$ $P(x)$	(BFE) hipotesia $/ \therefore\ \ \forall x\ Q(x)$
	$\boxed{3.}$ $P(x) \rightarrow Q(x)$	$\forall x$ ezabatu (1) (x askea xrako $P(x) \rightarrow Q(x)$ formulan)
	$\boxed{4.}$ $Q(x)$	MP(3,2)
	$\boxed{5.}$ $\forall x\ Q(x)$	$\forall x$ sartu (4) (Ezin da! 1. premisak ez du xren agerpen askerik, baina 2.ko hipotesiak bai, eta oraindik indarrean dago)

Esaldien formalizazioa

Proposizio-logikan esaldien formalizaziorako proposizio atomikoak eta lokailuak erabiltzen dira.

- Proposizio atomikoa: Lengoaiaren oinarrizko elementu moduan esaldi edo enuntziatu bakuna hartzen da. Bere esanahia egiazkoa edo faltsua den esatea posible izan behar du. Erabiltzen diren sinboloak: $p, q, r, s, \ldots$
- Lokailua: Lengoaiaren lokailuak erabiliz, esaldi konposatuak sor daitezke esaldi bakunetatik. Sinboloak hierarkia-mailaka:
  - Ukapena, $\neg$, (1.maila): ez, ez da egia, gezurra da...
  - Konjuntzioa, $\wedge$, (2.maila): eta, baina, hala ere...
  - Disjuntzioa, $\vee$, (2.maila): edo (ez edo esklusiboa)
  - Baldintzazkoa, $\rightarrow$, (3.maila): baldin...orduan, ... baldin...
  - Baldintzabikoa, $\leftrightarrow$, (3.maila): beharrezkoa eta nahikoa, baldin eta soilik baldin...

Sintaxia. Ondo eratutako formula

Esaldi konposatuen adierazpena sinboloak konbinatuz lortzen da.

- Sintaxia: Sintaxiak sinboloen arteko erlazioak aztertzen ditu, ondo eratutako sinbolo-segidak sortzeko eta identifikatzeko.
- Alfabetoa: Alfabetoa honako sinboloek osatzen dute:
  - Proposizio atomikoak (atomoak): $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, \ldots\}$
  - Lokailuak: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - Parentesiak: $\{(,)\}$

  Hortaz, alfabetoa:

$$\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{(,)\}$$

- Formula: Formula bat $\mathcal{A}$ alfabetoko elementuz eratutako segida finitu bat da.

Sintaxia. Ondo eratutako formula

Sinbolo-segidak ondo eratuta badaude, ondo eratutako formulak eta azpiformulak izango ditugu.

- Ondo eratutako formula: Proposizio-logikan ondo eratutako formula honako hiru erregelak erabiliz eratzen da:
  1. Atomoak ondo eratutako formulak dira
  2. A eta B ondo eratutako formulak badira, $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ ere ondo eratutako formulak dira.
  3. Ondo eratutako formulak sortzeko modu bakarra aurreko bi erregelak aldi kopuru finituan aplikatzea da.
- Azpiformula: Ondo eratutako G formula emanik, A Gren azpiformula dela esango dugu A osatzen duten sinboloak ondoz-ondokoak badira Gn eta ondo eratutako formula bat osatzen badute.
- Irismena: Lokailu baten agerpen batek formularen zein azpiformulari eragiten dion adierazten du, norainokoa den haren eragina. Nahasteko arriskurik ez dagoenean, parentesiak ken daitezke formulatik.

Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna

Logikaren dedukzio-egitura zuzenak adierazteko modu bat interpretazioak erabiltzea da.

- Proposizio atomikoa: Enuntziatu bakuna adierazten du: p.
- Proposizioaren egia-balioa: Proposizioaren esanahia egiazkoa edo faltsua den esatea posible izan behar du. Egia-balioak bere egiazkotasuna edo faltsutasuna adierazten du: E (egiazkoa), F (faltsua).
- Interpretazioa: Formula batean $p_1, \ldots, p_n$ proposizioak agertzen badira, $p_i \neq p_j, i \neq j$, p_i proposizio bakoitzari E edo F egia-balioa esleituz, formularako $I = \{m_1, \ldots, m_n\}$ interpretazioa lortzen da, $m_i = p_i$ bada p_i proposizioari E esleitu zaiola esan nahi du, eta $m_i = \neg p_i$ bada aldiz, F. n atomo eta 2 egia-balio izanik, formulak 2^n interpretazio ditu.

Oharra: Hemendik aurrera formula aipatzean ondo eratutako formula bati buruz ari garela ulertuko da.

Proposizio-Logika

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Titulazioa: Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Informatika fakultatea
Donostia

Aurkibidea

Sarrera

Esaldien formalizazioa

Sintaxia. Ondo eratutako formula

Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna
- Baliokidetza logikoak
- Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak

Semantika. Dedukzio edo froga formala. Baliozko argumentuak
- Inferentzia-erregelak
- Ordezkapen-erregela
- Baldintzazko frogaren eta Absurdora eramatearen erregelak

Sarrera

Hizkuntza bat erabiltzean, ezagutza bi modutara lor daiteke: esaldi deklaratzaileek zuzenean emanda edo logika erabiliz.

- Logikaren helburua: dedukzioa, hau da, ezaguna den informaziotik abiatuz (premisak) informazio berria lortzea (ondorioa).
- Logika formala: arrazonamenduen forman oinarrituz (ez edukian), arrazonamenduen baliozkotasuna aztertzen duen zientzia.
- Baliozko arrazonamendua. Premisak egiazko izanik ondorioa ere egiazkoa bada, orduan arrazonamendua baliozkoa da. Ez da onartzen premisak egiazko izanik ondorioa faltsu izatea (premisen edukia egiazko edo faltsu izateak ez du arrazonamenduaren baliozkotasuna baldintzatzen).

Sarrera. Logika formala

Esaldiak formalizatzea: esaldiaren forma sinboloen bidez adieraztea.
Analisiaren konplexutasunaren arabera, bi formalizazio maila:

- Proposizio-logika: Formalizaziorako oinarrizko elementuak esaldi deklaratzaile bakunak (proposizioak) dira.
- Predikatu-logika: Formalizazioan terminoak eta predikatuak erabiltzen dira.

Logikaren dedukzio-egitura zuzenak adierazteko:

- Interpretazioak: Proposizioen esanahiak definitu (egiazko/faltsu) eta esanahi horietan oinarrituz dedukzio-egitura zuzenak definitu.
- Dedukzio edo froga formala: Dedukzio-egitura zuzenak definitu, eta horietatik abiatuz dedukzio-egitura zuzen berriak lortzeko erregelak definitu.

MATEMATIKA DISKRETUA

2014-2015 IKASTURTEA

(EUSKARA TALDEA)

Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

Informatika fakultatea

Donostia

informatika fakultatea facultad de informática

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Ondorio Logikoa

$$A_1, A_2, A_3 \ldots A_n \Rightarrow B$$

A_n eta B formulak izanik helburua da ondorio logikoa deduzitzea.

$V(A_1, A_2 \ldots A_n, I) = E \Rightarrow$ Beraz, $V(B\,I) = E$ izango da.

$P_1, P_2, \ldots P_n, C$ formula multzo bat argumentu bat da.

$P_1, \ldots, P_n$ formulak premisak direla eta C ondorioa. Argumentu bat baliozkoa da ondorioa premisen ondorio logikoa bada.

Elkartze-logikoak (Elkar)

$$(A \lor B) \lor C \equiv A \lor (B \lor C) \qquad (A \land B) \land C \equiv A \land (B \land C)$$

Trukatze-legeak (Truk)

$$A \land B \equiv B \land A \qquad A \lor B \equiv B \lor A$$

Banatze legeak (BANA)

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$

$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

Tautologiak (TAUT)

$$A \land A \equiv A \qquad A \lor A \equiv A$$

Ukapen bikoitza (UB)

$$\neg\neg A \equiv A$$

De Morganen legeak (DeM)

$$\neg(A\land B)\equiv\neg A\lor\neg B \qquad \neg(A\lor B)\equiv\neg A\land\neg B$$

transposizioa (TRANS)

$$A\to B\equiv\neg B\to\neg A$$

Inplikazio Materiala (INP)

$$A\to B\equiv\neg A\lor B$$

Baliokidetza Materiala (BALIO)

$$A\leftrightarrow B\equiv(A\to B)\land(B\to A)$$

$$A\leftrightarrow B\equiv(A\land B)\lor(\neg A\land\neg B)$$

Esportazioa (ESP)

$$(A\land B)\to C\equiv A\to(B\to C)$$

Baliozko argumentuak

Modus Ponens (MP)
$$\begin{array}{l} A\to B\\ A\\ \hline B\end{array}$$

Dilema Suntsitzailea (DS)
$$\begin{array}{l} (A\to B)\land(C\to D)\\ \neg B\lor\neg D\\ \hline \neg A\lor\neg C\end{array}$$

Modus tollens (MT)
$$\begin{array}{l} A\to B\\ \neg B\\ \hline \neg A\end{array}$$

Silogismo Hipotetikoa (SH)
$$\begin{array}{l} A\to B\\ B\to C\\ \hline A\to C\end{array}$$

Konjuntzioaren Sinplifikazioa (KS
$$\begin{array}{l} A\land B\\ \hline A\end{array}$$

Silogismo Disjuntiboa (SD)
$$\begin{array}{l} A\lor B\\ \neg A\\ \hline B\end{array}$$

Konjuntzio Konbinazioa (KK)
$$\begin{array}{l} A\\ B\\ \hline A\land\end{array}$$

Disjuntzio Batuketa (DB)
$$\begin{array}{l} A\\ \hline A\lor B\end{array}$$

Dilema eraikitzailea (DE)
$$\begin{array}{l} (A\to B)\land(C\to D)\\ A\lor C\\ \hline B\lor D\end{array}$$

Proposizio-logika. Ariketak

1. Sintaxia proposizio-logikan

1.1 Honako argumentuetako esaldien formalizazioa egin ezazu proposizio-logikarako:

a) Euria egiten duenean etxean geratzen gara. Euria ari du. Hortaz, etxean geratuko gara.

b) $a > 2$ bada, $a^2 > 4$ izango da, eta, $a < -2$ bada, $a^2 > 4$ izango da. Hortaz, $|a| > 2$ denean, $a^2 > 4$ betetzen da.

c) Matematika ikasten duenak azterketa gaindituko du eta azterketa gainditzen duenak badaki integralak kalkulatzen. Hortaz, matematika ikasi duenak badaki integralak kalkulatzen.

d) Donostiara Tolosatik edo Zarauztik joan gaitezke. Tolosako bidea itxita dagoenez, Donostiara bagoaz, Zarauztik joango gara.

e) Jone datorrenean Izaskun ere badator. Eta Ainhoa datorrenean Gaizka ere badator. Bietako bat, Izaskun edo Gaizka, kanpoan da. Hortaz, Jone edo Ainhoa ez da etorriko.

f) Mikelek edo Jonek hil zuten. Mikel herritik kanpo zegoen hilketa gertatu zenean. Mikel herritik kanpo bazegoen hilketa gertatu zenean orduan ez zegoen hilketa gertatutako lekuan. Mikel hilketa gertatutako lekuan ez bazegoen orduan ezin zuen hilketa burutu. Hortaz, Jonek hil zuen.

g) Gogotsu saiatzen banaiz eta gaitasun berezia badut musikari ona izango naiz. Musikari ona banaiz zoriontsua izango naiz. Hortaz, zoriontsua ez banaiz gogotsu saiatu ez naizelako edo gaitasun berezia ez dudalako izango da.

1.2 Honako formuletako lokailuen agerpen bakoitzaren irismena adieraz ezazu.

a) $(\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

b) $\neg p \wedge q \leftrightarrow (r \wedge \neg\neg(p \vee q) \to s)$

c) $p \wedge (p \vee q \to (r \to \neg p))$

2. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna. Baliokidetza logikoak

2.1 Izan bitez A eta B formulak eta $I_1 = \{p, q, \neg r\}$ eta $I_2 = \{\neg p, q, \neg r\}$ interpretazioak. Kalkula itzazu $V(A, I_1)$, $V(A, I_2)$, $V(B, I_1)$ eta $V(B, I_2)$ egia-balioak.

$$A = p \vee \neg r \to r \wedge q, \qquad B = \neg p \vee q \to (\neg(p \wedge r) \to \neg p)$$

2.2 Honako formulen egia-taulak eraiki itzazu, eta baliozkotasunari buruz, esan formulak kontsistente/inkontsistente(kontraesan) eta baliozko(tautologia)/baliogabe diren, erabakia arrazoituz.

a) $p \vee \neg q \leftrightarrow s$

b) $(\neg p \to q) \wedge (q \to p)$

c) $(p \to q) \to (\neg(q \wedge r) \to \neg(r \wedge p))$

d) $(p \leftrightarrow \neg q) \to r \vee s$

2.3 Formula bakoitzerako 2 interpretazio aurki itzazu, formula egiazko egingo duen bat eta faltsu egingo duen beste bat, horretarako egia-taulak eraiki gabe.

a) $(p \to q) \vee q$

b) $(p \vee \neg q) \wedge p$

c) $(p \to r) \to ((q \to s) \to (p \vee q \to r))$

2.4 Honako formulen baliozkotasuna azter ezazu, kontsistente/inkontsistente(kontraesan) eta baliozko(tautologia)/baliogabe diren erabakiz, egia-taulak eraiki gabe. Zure erantzuna frogatuko duten interpretazioak aurki itzazu.

a) $\neg p \to q \wedge (q \to p)$

b) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

c) $p \wedge (p \vee q \to (r \to \neg p))$

d) $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)$

2.5 Formulen baliozkotasunari buruzko honako baieztapenak egiazkoak ala faltsuak diren erabaki ezazu, erantzuna arrazoituz:

a) $\neg A$ tautologia bada, A ez da tautologia izango.

b) A ez bada tautologia, $\neg A$ tautologia izango da.

c) $A \vee B$ tautologia bada, A tautologia da edo B tautologia da.

d) A tautologia bada edo B tautologia bada, $A \vee B$ tautologia izango da.

e) $A \wedge B$ tautologia da baldin eta soilik baldin A eta B tautologiak badira.

2.6 Formulak baliokideak direla froga ezazu 10 baliokidetza logikoak erabiliz.

a) $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \equiv q \wedge (p \vee r)$

b) $\neg(\neg p \vee \neg(r \vee s)) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s)$

c) $(p \vee r) \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge s)$

d) $p \to (q \to r) \equiv q \to (p \to r)$

e) $p \wedge q \to r \equiv \neg(p \wedge q \wedge \neg r)$

2.7 Egia-taulak eraikiz edo baliokidetza logikoak erabiliz, honakoak egiazko edo faltsu diren erabaki ezazu.

a) $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to q \wedge r$

b) $(p \to q) \to p \wedge q \equiv (\neg p \to q) \wedge (q \to p)$

c) $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$

d) $(p \wedge q) \vee r \equiv p \wedge (q \vee r)$

3. Ondorio logikoak. Argumentuen dedukzio formala

3.1 Erabaki ezazu beheko ondorio logikoak egiazkoak ala faltsuak diren. Horretarako, emandako formulen egia-taula eraiki eta zure erabakia arrazona ezazu.

a) q formula $p \wedge q$ formularen ondorio logikoa da.

b) q formula $p \vee q$ formularen ondorio logikoa da.

c) q formula $p \vee q$ eta $\neg p$ formulen ondorio logikoa da.

d) p formula $p \vee q$ eta q formulen ondorio logikoa da.

3.2 Honako argumentuen baliozkotasuna azter ezazu baliokidetasun logikoak erabiliz. Baliozko direla frogatzeko, $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow C$ tautologia dela edo $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg C$ inkontsistentzia dela frogatu beharko duzu. Baliogabea dela ikusten baduzu, argumentua faltsu egiten duen interpretazio bat aurki ezazu (ez eraiki egia-taularik).

a) $p \to q \quad / \therefore \neg(q \wedge r) \to \neg(r \wedge p)$

b) $p \to q \quad / \therefore (p \to \neg r) \to \neg p$

c) $(p \wedge q) \to r \quad / \therefore (p \to (q \to r))$

3.3 Honako argumentuen baliozkotasuna azter ezazu (baliozkoak/baliogabeak), egia-taulak eraiki gabe. Zure erantzuna frogatuko duten interpretazioak aurkitu.

a) $a \to d$
$d \to c$
$a \quad / \therefore d \wedge c$

b) $a \to b$
$c \to d$
$b \vee c \quad / \therefore a \vee d$

c) $p \to \neg q$
$p \vee r$
$\neg r \quad / \therefore q$

d) $\neg p \vee q$
$r \to s$
$q \vee r \quad / \therefore p \vee s$

3.4 Honako argumentuen baliozkotasunaren froga formalak egin itzazu, 9 inferentzia-erregelak soilik erabiliz.

a) $h \to (i \to j)$
$k \to (i \to j)$
$\neg h \wedge \neg k \to \neg l \vee \neg m$
$(\neg l \to \neg n) \wedge (\neg m \to \neg o)$
$(p \to n) \wedge (q \to o)$
$\neg(i \to j) \quad / \therefore \neg p \vee \neg q$

b) $\neg b \to (d \leftrightarrow \neg h)$
$(d \to e) \to f$
$e \wedge a \to \neg b$
$\neg f \vee \neg(d \leftrightarrow \neg h)$
$c \to (d \to e) \quad / \therefore \neg c \vee \neg(e \wedge a)$

c) $(p \to \neg q) \wedge (\neg r \to s)$
$(t \to u) \wedge (\neg v \to \neg x)$
$(\neg q \to t) \wedge (s \to \neg v)$
$u \vee \neg x \to y \wedge z$
$p \vee \neg r \quad / \therefore y \wedge z$

3.5 Argumentuen baliozkotasunaren froga formala egin ezazu 9 inferentzia-erregelak eta ordezkapen-erregela (10 baliokidetza logikoak) soilik erabiliz.

a) $\neg(p \to q)$
$r \to q$
$p \to s \quad / \therefore s \wedge \neg r$

b) $\neg p \vee q$
$r \wedge s \to p$
$\neg q \wedge s \; / \therefore \neg r$

c) $\neg q \wedge s$
$s \to \neg r$
$\neg r \to \neg p \vee q \quad / \therefore \neg p$

d) $p \to r$
$s \wedge \neg r$
$\neg q \wedge s \to p \quad / \therefore q$

3.6 Dedukzio formala erabiliz, argumentuen baliozkotasunaren froga formala egin ezazu. Horretarako 9 inferentzia-erregelak, ordezkapen-erregela (10 baliokidetza logikoak), absurdura eramatearen erregela (AEE) eta baldintzazko frogaren erregela (BFE) erabil ditzakezu. Froga modu bat baino gehiagotan egin.

a) $p \wedge (q \vee r) \to q \wedge r \; / \therefore p \to (q \to r)$

b) $a \; / \therefore b \vee (b \to c)$

c) $d \vee e \to (f \to g)$
$\neg g \vee h \to d \wedge f \quad / \therefore g$

d) $s \to \neg r$
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \; / \therefore q \vee \neg s$

e) $o \to (p \to q)$
$p \to (q \to r) \quad / \therefore o \to (p \to r)$

f) $p \vee q \to (r \wedge s)$
$\neg(\neg p \vee \neg r)$
$\neg t \to \neg(p \wedge s) \quad / \therefore t$

g) $p \wedge s$
$\neg r \to \neg p \vee q$
$p \vee r \to s \wedge \neg q \quad / \therefore r$

h) $(h \to i) \wedge (j \to k)$
$(i \vee k) \to l$
$\neg l \quad / \therefore \neg(h \vee j)$

i) $p \to \neg q$
$\neg r \wedge s \to p$
$s \wedge q \quad / \therefore r$

j) $a \wedge b \to c$
$c \to d$
$b \wedge \neg d \quad / \therefore \neg a$

k) $x \to (y \to z)$
$x \to (a \to b)$
$x \wedge (y \vee a)$
$\neg z \quad / \therefore b$

l) $(v \to \neg w) \wedge (x \to y)$
$(\neg w \to z) \wedge (y \to \neg a)$
$(z \to \neg b) \wedge (\neg a \to c)$
$v \wedge x \quad / \therefore \neg b \wedge c$

m) $(l \vee m) \vee (n \wedge o)$
$(\neg l \wedge o) \wedge \neg(\neg l \wedge m) \; / \therefore \neg l \wedge n$

Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna

Interpretazioen bidez formulen baliozkotasuna azter daiteke.

- Formularen egia-balioa interpretazio baterako, $V(G,I)$: G formula bat eta I interpretazio bat izanik, formularen $V(G,I)$ egia-balioa I interpretaziorako honako 5 erregelen bidez (lokailu bakoitzeko bat) kalkulatzen da. A eta B ondo eratutako formulak izanik,

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
E	E	F	E	E	E	E
E	F	F	F	E	F	F
F	E	E	F	E	E	F
F	F	E	F	F	E	E

$V(G,I)=E$ bada G formula I interpretaziorako egiazkoa dela esango dugu (edo I interpretazioak G betetzen duela), eta $I \models G$ notazioaz adieraziko dugu. $V(G,I)=F$ bada G formula I interpretaziorako faltsua dela esango dugu.

Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna

Formula bat ez da berez egiazko edo faltsu; interpretazio baterako izango da $V(G,I)=E$ edo $V(G,I)=F$.

- Formularen egia-taula: G formula baten $V(G,I)$ egia-balio guztiak (interpretazio guztietarako) erakusten dituen taula da.

G formularen egia-taula aztertuz, zera esan dezakegu:

- Kontsistente/inkontsistente (kontraesana): G formula kontsistentea da formula egiazko egiten duen interpretazio bat existitzen bada gutxienez. Bestela, interpretazio guztietarako formula faltsua bada, formula inkontsistente (kontraesana) da.
- Baliozkoa (tautologia)/baliogabea: G formula baliozkoa (tautologia) da interpretazio guztietarako formula egiazkoa bada. Bestela, gutxienez interpretazio bat existitzen bada G formula faltsu egiten duena, G formula baliogabea da.

Semantika. Interpretazioak. Formulen baliozkotasuna

G formularen egia-taula aztertuz, zera esan dezakegu:

- Baliozkoa (tautologia) eta kontsistentea: G formula $V(G,I)=E$ da I interpretazio guztietarako.
- Kontsistentea eta baliogabea: G formula $V(G,I)=E$ da interpretazio batzuetarako eta $V(G,I)=F$ beste batzuetarako.
- Inkontsistentea (kontraesana) eta baliogabea: G formula $V(G,I)=F$ da I interpretazio guztietarako.

Zera betetzen da:

- G tautologia baldin eta soilik baldin $\neg G$ inkontsistentea.
- G inkontsistentea baldin eta soilik baldin $\neg G$ tautologia.
- G tautologia bada, G kontsistentea da.
- G inkontsistentea bada, G baliogabea da.

Semantika. Baliokidetza logikoak

Izan bitez A eta B formulak eta beren egia-taulak.

- Baliokidetza logikoak: A eta B formulak logikoki baliokideak dira I interpretazio guztietarako $V(A,I)=V(B,I)$ bada, hau da, formulen egia-taulak berdinak badira. Baliokidetza logikoa $A \equiv B$ notazioaz adieraziko dugu.

Badira oso ezagunak diren baliokidetza logiko batzuk.

- Elkartze-legeak (ELKAR):

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \qquad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

- Trukatze-legeak (TRUK):

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \qquad A \vee B \equiv B \vee A$$

Semantika. Baliokidetza logikoak

- Banatze-legeak (BANA):

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- Tautologiak (TAUT):

$$A \wedge A \equiv A, \qquad A \vee A \equiv A$$

- Ukapen Bikoitza (UB):

$$\neg\neg A \equiv A$$

- De Morganen legeak (DeM):

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Semantika. Baliokidetza logikoak

- Transposizioa (TRANS):

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$

- Inplikazio materiala (INP):

$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$

- Baliokidetza materiala (BALIO):

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

- Esportazioa (ESP):

$$(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$$

Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak

Ondorio logikoa, $(A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B)$
$A_1, \ldots, A_n$ eta B formulak izanik, B formula $A_1, \ldots, A_n$ formulen ondorio logikoa da edo formuletatik logikoki deduzitzen da ($A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ notazioaz adieraziko da) baldin,

$$V(A_1, I) = \ldots = V(A_n, I) = E \quad \Longrightarrow \quad V(B, I) = E,$$

hau da

$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ formula inkontsistentea bada.

Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak

Definizioa (Argumentua)
$P_1, \ldots, P_n, C$ formula multzo bat argumentu bat da. $P_1, \ldots, P_n$ formulak premisak direla esaten da eta C ondorioa.

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline C \end{array} \qquad \begin{array}{l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \ / \therefore C \end{array}$$

Definizioa (Baliozko argumentua, ondo eraikitako argumentua)
Argumentu bat baliozkoa da ondorioa premisen ondorio logikoa bada (premisetatik logikoki deduzitzen bada, ezinezkoa bada premisak egiazko eta ondorioa faltsu izatea).

$$P_1, \ldots, P_n \Rightarrow C.$$

Baliozkoa ez den argumentua baliogabea edo gaizki eraikitakoa da.

Semantika. Dedukzio edo froga formala

Definizioa (Baliozkotasunaren froga formala)

$P_1, \ldots, P_n, C$ argumentuaren baliozkotasunaren froga formal bat formula segida finitu bat da, $S_1, \ldots, S_m$, non:

1. azken formula argumentuaren ondorioa den, $S_m = C$.
2. S_i premisa bat den edo aurreko formuletatik inferentzia-erregelen bidez deduzitutako formula bat den, $i = 1, \ldots, m$

Interpretazio jakin baterako $P_1, \ldots, P_n$ premisak egiazkoak direla suposatzen badugu, haietatik abiatuz eta inferentzia erregelak aplikatuz lortutako $S_1, \ldots, S_m$ formulak ere egiazkoak izango dira interpretazio horretarako.
Hortaz, $S_m = C$ ere egiazkoa izango da interpretazio horretarako.

Dedukzio edo froga formala. Ordezkapen-erregela

Baliozkoak diren hainbat argumenturen baliozkotasuna 9 inferentzia-erregelak soilik erabiliz frogatzea ez da posible izaten.

Definizioa (Ordezkapen-erregela)

Izan bitez A formula bat, Aren azpiformula bat den B eta logikoki baliokidea den $B' \equiv B$ beste formula bat. A formulan B azpiformula B' azpiformulaz ordezkatuz lortzen den A' formula A formularen dedukzioa da (Atik ondorioztatzen da).
$A' \equiv A$ betetzen da, beren egia-taulak berdinak direlako.

- Ordezkapen-erregelari esker, formula baten baliozkotasunaren froga formala egitean 9 inferentzia-erregelez gain 10 baliokidetza logikoak erabil ditzakegu.
- Inferentzia-erregelak formula osoari aplikatzen zaizkio. Ordezkapen-erregelaren bidez baliokidetza logikoak, aldiz, formula osoari edo azpiformula bati aplikatuko zaio.

Dedukzio edo froga formala. Baldintzazko frogaren eta Absurdora eramatearen erregelak

- Argumentu baten baliozkotasuna frogatzean $P \to C$ itxurako baldintzazko formula bat deduzitu nahi denean baldintzazko frogaren erregela (BFE) erabil daiteke.

Definizioa (Baldintzazko frogaren erregela (BFE))

$P_1, \ldots, P_n, P \to C$ argumentua baliozkoa da baldin eta soilik baldin $P_1, \ldots, P_n, P, C$ argumentua baliozkoa bada.
Argumentu berria: premisak $P_1, \ldots, P_n, P$ eta ondorioa C.

- Absurdura eramatearen erregela (AEE) aplikatzean, frogatu nahi denaren kontrakoa suposatzen da, kontraesan bat deduzitzeko.

Definizioa (Absurdura eramatearen erregela (AEE))

$P_1, \ldots, P_n, C$ argumentua baliozkoa da baldin eta soilik baldin $P_1, \ldots, P_n, \neg C, \Box$ argumentua baliozkoa bada, $\Box$ formula inkontsistentea (kontraesana) izanik.

Bibliografia

- Lógica Computacional. E. Paniagua..., Thomson, (2003)
- Matemáticas Discreta y Combinatoria. Una introducción con aplicaciones. Ralph P. Grimaldi.
- Wikipedia. (euskarazkoak motzago, baina badaude)
  - Logica. http://es.wikipedia.org/wiki/Lógica
  - Lógica proposicional. http://es.wikipedia.org/wiki/Lógica_proposicional
  - Logic in computer science, Logic applications for computers. http://en.wikipedia.org/wiki/Logic_in_computer_science
- http://en.wikibooks.org/wiki/Logic_for_Computer_Science
- Why Logic is Important for Computer Science. http://www.cs.utexas.edu/~rlc/whylog.htm

Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak

Oso ezagunak eta erabilgarriak diren 9 baliozko argumentu:

- Modus Ponens (MP) $\dfrac{A \to B \quad A}{B}$
- Modus Tollens (MT) $\dfrac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$
- Silogismo Hipotetikoa (SH) $\dfrac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$

Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak

- Silogismo Disjuntiboa (SD) $\dfrac{A \vee B \quad \neg A}{B}$
- Dilema Eraikitzailea (DE) $\dfrac{(A \to B) \wedge (C \to D) \quad A \vee C}{B \vee D}$
- Dilema Suntsitzailea (DS) $\dfrac{(A \to B) \wedge (C \to D) \quad \neg B \vee \neg D}{\neg A \vee \neg C}$

Ondorio logikoak. Baliozko argumentuak

- Konjuntzioaren Sinplifikazioa (KS) $\dfrac{A \wedge B}{A}$
- Konjuntzioaren Konbinazioa (KK) $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$
- Disjuntzioaren Batuketa (DB) $\dfrac{A}{A \vee B}$

Semantika. Dedukzio edo froga formala

Argumentuetan proposizio eta premisa asko daudenean, argumentuaren baliozkotasuna egia-taulen bidez frogatzea (interpretazioetan oinarrituz) oso astuna egiten da.

- Inferentzia-erregelak: Baliozkoak diren argumentu batzuk dira, erregela moduan erabiltzen direnak konplexuagoak diren beste argumentu batzuren baliozkotasuna frogatzeko.

Erabiliko ditugun inferentzia-erregelak:

1. Modus Ponens(MP)
2. Modus Tollens(MT)
3. Silogismo Hipotetikoa(SH)
4. Silogismo Disjuntiboa(SD)
5. Dilema Eraikitzailea(DE)
6. Dilema Suntsitzailea(DS)
7. Konjuntzioaren Sinplif.(KS)
8. Konjuntzioaren Konbin.(KK)
9. Disjuntzioaren Batuketa(DB)