2. GAIKO ARIKETEN SOLUZIOAK
PROGRAMEN ESPEZIFIKAZIOA ETA DOKUMENTAZIOA

AURKIBIDEA

a) Formulak, predikatuak eta aldagai aske eta lotuak

1. **bikoitia**
   $bikoitia(x) \equiv x \bmod 2 = 0$
   Aldagai askeak: x Aldagai lotuak: ---

2. **bakoitia**
   (i) $bakoitia(x) \equiv \neg bikoitia(x)$
   Aldagai askeak: x Aldagai lotuak: ---
   (ii) $bakoitia(x) \equiv x \bmod 2 \neq 0$
   Aldagai askeak: x Aldagai lotuak: ---

3. **berredura**
   $berredura(x, w) \equiv \exists k(k \geq 0 \wedge x = w^k)$
   Aldagai askeak: x, w Aldagai lotuak: k

4. **biber**
   (i) $biber(x) \equiv berredura(x, 2)$
   Aldagai askeak: x Aldagai lotuak: ---
   (ii) $biber(x) \equiv \exists k(k \geq 0 \wedge x = 2^k)$
   Aldagai askeak: x Aldagai lotuak: k

5. **denakhand**
   $denakhand(x, A(1..n)) \equiv \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow A(k) > x)$
   Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

6. **positiborenbat**
   $positiborenbat(A(1..n)) \equiv \exists k(1 \leq k \leq n \wedge A(k) > 0)$
   Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

7. **denakpos**
   (i) $denakpos(A(1..n)) \equiv denakhand(0, A(1..n))$
   Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: ---
   (ii) $denakpos(A(1..n)) \equiv \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow A(k) > 0)$
   Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

8. **digituak**
   $digituak(A(1..n)) \equiv \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow 0 \leq A(k) \leq 9)$
   Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k
   $0 \leq A(k) \leq 9$ idatzi beharrean $A(k) \geq 0 \wedge A(k) \leq 9$ ere idatz daiteke.

9. **bikop**
   $bikop(x, A(1..n)) \equiv Nk(1 \leq k \leq n \wedge bikoitia(A(k))) = x$
   Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

10. denakbik

(i) $denakbik(A(1..n)) \equiv bikop(n, A(1..n))$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: ---

(ii) $denakbik(A(1..n)) \equiv \forall k(1 \le k \le n \rightarrow bikoitia(A(k)))$

Variables libres: A(1..n) Aldagai lotuak: k

11. denakbikdira

(i) $denakbikdira(p, A(1..n)) \equiv p \leftrightarrow denakbik(A(1..n))$

Variables libres: p, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

(ii) $denakbikdira(p, A(1..n)) \equiv p \leftrightarrow \forall k(1 \le k \le n \rightarrow bikoitia(A(k)))$

Aldagai askeak: p, A(1..n) Aldagai lotuak: k

12. aldiztartean

$aldiztartean(pos1, pos2, x, v, A(1..n)) \equiv$

$1 \le pos1 \le n + 1 \wedge 0 \le pos2 \le n \wedge Nk(pos1 \le k \le pos2 \wedge A(k) = x) = v$

Aldagai askeak: pos1, pos2, x, v, A(1..n) Aldagai lotuak: k

13. aldiz

(i) $aldiz(x, v, A(1..n)) \equiv aldiztartean(1, n, x, v, A(1..n))$

Aldagai askeak: x, v, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

(ii) $aldiz(x, v, A(1..n)) \equiv Nk(1 \le k \le n \wedge A(k) = x) = v$

Aldagai askeak: x, v, A(1..n) Aldagai lotuak: k

14. denakdesb

(i) $denakdesb(pos1, pos2, A(1..n)) \equiv$

$1 \le pos1 \le n + 1 \wedge 0 \le pos2 \le n \wedge$

$\forall k(pos1 \le k \le pos2 \rightarrow aldiztartean(pos1, pos2, A(k), 1, A(1..n)))$

Aldagai askeak: pos1, pos2, A(1..n) Aldagai lotuak: k

(ii) $denakdesb(pos1, pos2, A(1..n)) \equiv$

$1 \le pos1 \le n + 1 \wedge 0 \le pos2 \le n \wedge$

$\forall k(pos1 \le k \le pos2 \rightarrow \forall \ell(pos1 \le \ell \le pos2 \wedge \ell \ne k \rightarrow A(\ell) \ne A(k)))$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

Bigarren bertsio honetan $\forall$ bat bestearen barruan dagoenez, bakoitzak aldagai desberdina behar du (adibidez k eta ℓ).

15. gehiagotan

$gehiagotan(x, y, A(1..n)) \equiv$

$\equiv Nk(1 \le k \le n \wedge A(k) = x) > N\ell(1 \le \ell \le n \wedge A(\ell) = y)$

Aldagai askeak: x, y, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

Kasu honetan N funtzioaren agerpen biak independenteak dira, ez baitaude bata bestearen barruan. Horregatik, N bientzat aldagai bera erabil daiteke (adibidez k):

$gehiagotan(x, y, A(1..n)) \equiv$

$\equiv Nk(1 \le k \le n \wedge A(k) = x) > Nk(1 \le k \le n \wedge A(k) = y)$

Aldagai askeak: x, y, A(1..n) Aldagai lotuak: k

16. kopurubera

kopurubera(x, y, A(1..n)) ≡

$\equiv x \neq y \wedge Nk(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = x) = N\ell(1 \leq \ell \leq n \wedge A(\ell) = y)$

Aldagai askeak: x, y, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

Kasu honetan ere N funtzioaren agerpen biak independenteak dira, ez baitaude bata bestearen barruan kabiatuta, eta horregatik N bientzat aldagai bera erabil daiteke (adibidez k):

kopurubera(x, y, A(1..n)) ≡

$\equiv Nk(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = x) = Nk(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = y)$

Aldagai askeak: x, y, A(1..n) Aldagai lotuak: k

17. gutxienezbi

gutxienezbi(A(1..n)) ≡

$\equiv \exists k(1 \leq k \leq n \wedge \exists \ell(1 \leq \ell \leq n \wedge k \neq \ell \wedge A(\ell) = A(k)))$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

Kasu honetan ∃ zenbatzaileetako bat bestearen esparruaren barruan dagoenez, ∃ bakoitzak aldagai desberdina behar du (adibidez k eta ℓ).

18. justubi

justubi(A(1..n)) ≡

$\equiv Nk(1 \leq k \leq n \wedge \exists \ell(1 \leq \ell \leq n \wedge k \neq \ell \wedge A(\ell) = A(k))) = 2$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

Kasu honetan N funtzioak eta ∃ zenbatzaileak aldagai desberdina behar dute (adibidez k eta ℓ) ∃ zenbatzailea N funtzioaren esparruaren barruan baitzago.

19. denakbigehi

denakbigehi(A(1..n)) ≡

$\forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow \exists \ell(1 \leq \ell \leq n \wedge \ell \neq k \wedge A(\ell) = A(k)))$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

∃ zenbatzailea ∀ zenbatzailearen esparruaren barruan agertzen denez, k eta ℓ letrak beharrezkoak dira.

20. denakjustubi

(i)

denakjustubi(A(1..n)) ≡ $\forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow$ aldiz(A(k), 2, A(1..n)))

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

(ii)

denakjustubi(A(1..n)) ≡

$\equiv \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow (N\ell(1 \leq \ell \leq n \wedge \ell \neq k \wedge A(k) = A(\ell))= 1))$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

Kasu honetan N funtzioa ∀ zenbatzailearen esparruaren barruan agertzen denez, k eta ℓ letrak beharrezkoak dira.

21. lehena

lehena(x) ≡ $x \geq 1 \land Nk(1 \leq k \leq x \land x \bmod k = 0) = 2$

Aldagai askeak: x Aldagai lotuak: k

22. batujarraian

batujarraian(z) ≡ $\exists k(k \geq 1 \land z = \sum_{\ell=1}^{k} \ell)$

Aldagai askeak: z Aldagai lotuak: k, ℓ

Kasu honetan Σ funtzioa ∃ zenbatzailearen esparruaren barruan agertzen denez, k eta ℓ letrak beharrezkoak dira

23. tartebatura

tartebatura(x, w, s, A(1..n)) ≡ $1 \leq x \leq w \land x \leq w \leq n \land s = \sum_{k=x}^{w} A(k)$

Aldagai askeak: x, w, s, A(1..n) Aldagai lotuak: k

$1 \leq x \leq w \land x \leq w \leq n$ ipini beharrean $1 \leq x \leq w \leq n$ ere ipin daiteke.

24. tartebatura2

tartebatura2(x, y, A(1..n)) ≡ tartebatura(x, y, n, A(1..n))

Aldagai askeak: x, y, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

Predikatu hau aurreko predikatuaren kasu partikular bat da, batura A(1..n) bektoreko elementu-kopuruaren berdina denekoa hain zuzen ere.

25. batuposbik

batuposbik(s, A(1..n)) ≡ $s = \sum_{1 \leq k \leq n \land bikoitia(k)} A(k)$

Aldagai askeak: s, A(1..n) Aldagai lotuak: k

26. batubik

batubik(s, A(1..n)) ≡ $s = \sum_{1 \leq k \leq n \land bikoitia(A(k))} A(k)$

Aldagai askeak: s, A(1..n) Aldagai lotuak: k

27. batuhand

batuhand(s, x, A(1..n)) ≡ $s = \sum_{1 \leq k \leq n \land A(k) > x} A(k)$

Aldagai askeak: s, x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

28. lehenakbider

lehenakbider(sp, A(1..n)) ≡ denakpos(A(1..n)) ∧ $sp = \prod_{1 \leq k \leq n \land lehena(A(k))} A(k)$

Aldagai askeak: sp, A(1..n) Aldagai lotuak: k

29. batuhur

batuhur(s, A(1..n)) ≡ s = $\sum_{1 \le k \le n-1 \wedge A(k)+1=A(k+1)} A(k)$

Aldagai askeak: s, A(1..n) Aldagai lotuak: k

Elementuak binaka hartzen direnez eta azkeneko bikotea k-ren balioa n – 1 denean daukagunez (n – 1 eta n posizioek osatzen duten bikotea), k aldagaia 1 eta n – 1 balioen artean mugituko da.

30. agertzenda

(i) agertzenda(pos1, pos2, x, A(1..n)) ≡
≡ 1 ≤ pos1 ≤ pos2 ≤ n ∧ ∃k(pos1 ≤ k ≤ pos2 ∧ A(k) = x)

Aldagai askeak: pos1, pos2, x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

(ii) agertzenda(pos1, pos2, x, A(1..n)) ≡
≡ 1 ≤ pos1 ≤ pos2 ≤ n ∧ Nk(pos1 ≤ k ≤ pos2 ∧ A(k) = x) ≥ 1

Aldagai askeak: pos1, pos2, x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

31. biakagertzen

biakagertzen(x, y, A(1..n)) ≡
≡ x ≠ y ∧ agertzenda(1, n, x, A(1..n)) ∧ agertzenda(1, n, y, A(1..n))

Aldagai askeak: x, y, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

32. hand_desb

(i) hand_desb(x, w, A(1..n)) ≡
≡ x ≠ w ∧ denakhand(x, A(1..n)) ∧ ¬agertzenda(1, n, w, A(1..n))
Aldagai askeak: x, w, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

(ii) hand_desb(x, w, A(1..n)) ≡
≡ x ≠ w ∧ ∀k(1 ≤ k ≤ n → (A(k) > x ∧ A(k) ≠ w))
Aldagai askeak: x, w, A(1..n) Aldagai lotuak: k

33. bihiruaniz

bihiruaniz(x, w, A(1..n)) ≡
≡ Nk(1 ≤ k ≤ n ∧ A(k) mod x = 0) = 2 ∧ Nℓ(1 ≤ ℓ ≤ n ∧ A(ℓ) mod w = 0) = 3
Aldagai askeak: x, w, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

N funtzioaren agerpenak ez daudenez bata bestearen esparruaren barruan, kasu bietan aldagai bera erabil daiteke, adibidez k:

bihiruaniz(x, w, A(1..n)) ≡
≡ Nk(1 ≤ k ≤ n ∧ A(k) mod x = 0) = 2 ∧ Nk(1 ≤ k ≤ n ∧ A(k) mod w = 0) = 3
Aldagai askeak: x, w, A(1..n) Aldagai lotuak: k

34. posaniz

posaniz(A(1..n)) $\equiv \forall k(1 \le k \le n \rightarrow (A(k) > 0 \wedge A(k) \bmod k = 0))$
Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

35. posbikpos

posbikpos(A(1..n)) $\equiv \forall k(1 \le k \le n \wedge \text{bikoitia}(k) \rightarrow A(k) > 0)$
Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

36. handtxik

handtxik(x, A(1..n)) $\equiv$
$\equiv \exists k(1 \le k \le n \wedge A(k) > x) \wedge \exists \ell(1 \le \ell \le n \wedge A(\ell) < x)$
Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

$\exists$ zenbatzaileak ez daudenez bata bestearen barruan kabiatuta, kasu bietan aldagai bera erabil daiteke, adibidez k:
handtxik(x, A(1..n)) $\equiv$
$\equiv \exists k(1 \le k \le n \wedge A(k) > x) \wedge \exists k(1 \le k \le n \wedge A(k) < x)$
Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

37. negbat_zeroez

(i) negbat_zeroez(pos, A(1..n)) $\equiv 1 \le pos \le n \wedge$
$N k(pos \le k \le n \wedge A(k) < 0) = 1 \wedge$ aldiztartean(pos, n, 0, 0, A(1..n))
Aldagai askeak: pos, A(1..n) Aldagai lotuak: k

(ii) negbat_zeroez(pos, A(1..n)) $\equiv 1 \le pos \le n \wedge$
$(N k(pos \le k \le n \wedge A(k) < 0) = 1) \wedge (N \ell(pos \le \ell \le n \wedge A(\ell) = 0) = 0)$
Aldagai askeak: pos, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ
N funtzioaren agerpenak ez daudenez bata bestearen barruan kabiatuta, k letra erabil daiteke kasu bietan.

38. lehenager

(i) lehenager(pos, x, A(1..n)) $\equiv$
$1 \le pos \le n \wedge A(pos) = x \wedge \neg$agertzenda(1, pos – 1, x, A(1..n))
Aldagai askeak: pos, x, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

(ii) lehenager(pos, x, A(1..n)) $\equiv$
$1 \le pos \le n \wedge A(pos) = x \wedge \forall k(1 \le k \le pos - 1 \rightarrow A(k) \ne x)$
Aldagai askeak: pos, x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

39. agertzen_al_da

(i) agertzen_al_da(esta, x, A(1..n)) $\equiv$ badago $\leftrightarrow$ agertzenda(1, n, x, A(1..n))
Aldagai askeak: badago, x, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

(ii) agertzen_al_da(esta, x, A(1..n)) $\equiv$ badago $\leftrightarrow \exists k(1 \le k \le n \wedge A(k) = x)$
Aldagai askeak: badago, x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

40. lehenago

lehenago(aurre, pos, x, A(1..n)) ≡

$1 \le pos \le n \wedge (aurre \leftrightarrow agertzenda(1, pos - 1, x, A(1..n)))$

Aldagai askeak: aurre, pos, x, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

41. zerobikote

zerobikote(z, A(1..n)) ≡

$\equiv Nk(1 \le k \le n - 1 \wedge A(k) = 0 \wedge A(k + 1) = 0) = z$

Aldagai askeak: z, A(1..n) Aldagai lotuak: k

Elementuak binaka hartzen direnez eta azkeneko bikotea k-ren balioa n – 1 denean daukagunez (n – 1 eta n posizioek osatzen duten bikotea), k aldagaia 1 eta n – 1 balioen artean mugituko da.

42. denakbiber

denakbiber(A(1..n)) ≡ $\forall k(1 \le k \le n \rightarrow biber(A(k)))$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

43. txikiena

txikiena(x, A(1..n)) ≡ $\exists k(1 \le k \le n \wedge A(k) = x) \wedge \forall \ell(1 \le \ell \le n \rightarrow A(\ell) \ge x)$

Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

∃ eta ∀ zenbatzaileak ez daudenez bata bestearen barruan kabiatuta, bientzat aldaga bera erabil daiteke (adibidez k).

44. sekziokohand

sekziokohand(i, j, x, A(1..n)) ≡

$1 \le i \le n \wedge i \le j \le n \wedge \exists k(i \le k \le j \wedge A(k) = x) \wedge \forall \ell(i \le \ell \le j \rightarrow A(\ell) \le x)$

Aldagai askeak: i, j, x, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

$1 \le i \le n \wedge i \le j \le n$ idatzi beharrean $1 \le i \le j \le n$ idatz daiteke. Bestalde ∃ eta ∀ zenbatzaileak ez daudenez bata bestearen esparruaren barruan, bientzat aldagai bera erabil daiteke (adibidez k).

45. sekziolehenkop

sekziolehenkop(i, j, x, A(1..n)) ≡

$\equiv 1 \le i \le j \le n \wedge denakpos\ (A(1..n)) \wedge Nk(i \le k \le j \wedge lehena(A(k))) = x$

Aldagai askeak: i, j, x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

46. azkenberdinak

azkenberdinak(pos, A(1..n)) ≡

$\equiv 1 \le pos \le n - 1 \wedge A(pos) = A(pos + 1) \wedge$

$\forall k(pos + 1 \le k \le n - 1 \rightarrow A(k) \ne A(k + 1))$

Aldagai askeak: pos, A(1..n) Aldagai lotuak: k

47. desberdinposizioraino

desberdinposizioraino(pos, A(1..n)) ≡ denakdesb(1, pos, A(1..n))

Aldagai askeak: pos, A(1..n) Aldagai lotuak: ---

Kasu honetan $1 \le pos \le n$ ipini beharrik ez dago "denakdesb" predikatuaren definizioagatik $1 \le pos \le n$ beteko baita. Hala ere, ipiniko balitz ere ondo legoke:

desberdinposizioraino(pos, A(1..n)) ≡

≡ $1 \le pos \le n \wedge$ denakdesb(1, pos, A(1..n))

48. ezkerretikjarraian

(i) ezkerretikjarraian(x, A(1..n)) ≡

$\exists k(1 \le k \le n \wedge$ aldiztartean(1, k, x, k, A(1..n)) $\wedge$ aldiztartean(k + 1, n, x, 0, A(1..n)))

Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

(ii) ezkerretikjarraian(x, A(1..n)) ≡

$\exists k(1 \le k \le n \wedge \forall \ell(1 \le \ell \le k \rightarrow A(\ell) = x) \wedge \forall h(k + 1 \le h \le n \rightarrow A(h) \ne x))$

Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ, h

Formula horretan $\forall$ zenbatzaile biak $\exists$ zenbatzailearen esparruaren barruan daudenez, $\forall$ zenbatzaileek ezin dute eraman $\exists$ zenbatzailearen aldagai bera, aldagai desberdinak behar dituzte (adibidez k eta ℓ eta k eta h). Bestalde $\forall$ zenbatzaileak elkarren artean independenteak direnez, zenbatzaile horiek aldagai bera erabil dezakete (adibidez biek ℓ erabil dezakete batak ℓ eta besteak h erabili beharrean).

49. ezkerretikjarraian2

(i) ezkerretikjarraian2(x, A(1..n)) ≡

$\exists k(0 \le k \le n \wedge$ aldiztartean(1, k, x, k, A(1..n)) $\wedge$ aldiztartean(k + 1, n, x, 0, A(1..n)))

Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

(ii) ezkerretikjarraian2(x, A(1..n)) ≡

$\exists k(0 \le k \le n \wedge \forall \ell(1 \le \ell \le k \rightarrow A(\ell) = x) \wedge \forall h(k + 1 \le h \le n \rightarrow A(h) \ne x))$

Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ, h

48 eta 49 ariketetako formulen arteko desberdintasun bakarra k-ren tarteak dira: batean k [1..n] tartekoa da eta bestean [0..n] tartekoa.

50. eskuinbiraketa

eskuinbiraketa(A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$) ≡

$A(1) = a_n \wedge \forall k(2 \le k \le n \rightarrow A(k) = a_{k-1})$

Aldagai askeak: A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ Aldagai lotuak: k

51. ezkerbiraketa

ezkerbiraketa(A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$) ≡

$A(n) = a_1 \wedge \forall k(1 \le k \le n - 1 \rightarrow A(k) = a_{k+1})$

Aldagai askeak: A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ Aldagai lotuak: k

52. disjuntuak

(i) $disjuntuak(A(1..n), B(1..m)) \equiv$
$\forall k(1 \le k \le n \rightarrow \neg agertzenda(1, m, A(k), B(1..m)))$
Aldagai askeak: A(1..n), B(1..m) Aldagai lotuak: k

(ii) $disjuntuak(A(1..n), B(1..m)) \equiv$
$\forall k(1 \le k \le n \rightarrow \neg\exists \ell(1 \le \ell \le m \wedge A(k) = B(\ell)))$
Aldagai askeak: A(1..n), B(1..m) Aldagai lotuak: k, ℓ
Kasu honetan k eta ℓ beharrezkoak dira kabiaketa dela eta.

<u>Beste aukera bat</u>:
$disjuntuak(A(1..n), B(1..m)) \equiv$
$\forall k(1 \le k \le n \rightarrow \forall \ell(1 \le \ell \le m \rightarrow A(k) \ne B(\ell)))$
Aldagai askeak: A(1..n), B(1..m) Aldagai lotuak: k, ℓ
Kasu honetan ere k eta ℓ beharrezkoak dira kabiaketa dela eta.

53. posgehiago

$posgehiago(A(1..n)) \equiv$
$Nk(1 \le k \le n \wedge A(k) < 0) < N\ell(1 \le \ell \le n \wedge A(\ell) > 0) \wedge \neg agertzenda(1, n, 0, A(1..n))$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ

Kabiaketarik ez dagoenez, k bakarrik erabiliz ere idatz daiteke formula hori:
$Nk(1 \le k \le n \wedge A(k) < 0) < Nk(1 \le k \le n \wedge A(k) > 0) \wedge \neg agertzenda(1, n, 0, A(1..n))$

54. permutazioa

$permutazioa(A(1..n), B(1..n)) \equiv$
$$\forall k(1 \le k \le n \rightarrow (\underbrace{N\ell(1 \le \ell \le n \wedge A(k) = A(\ell))}_{\text{A(k) balioa A(1..n) bektorean zenbat aldiz agertzen den}} = \underbrace{Nh(1 \le h \le n \wedge A(k) = B(h))}_{\text{A(k) balioa B(1..n) bektorean zenbat aldiz agertzen den}}))$$

Aldagai askeak: A(1..n), B(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ, h

N funtzioaren agerpenak ez daudenez bata bestearen barruan, bientzat ℓ erabil daiteke:
$\forall k(1 \le k \le n \rightarrow (N\ell(1 \le \ell \le n \wedge A(k) = A(\ell)) = N\ell(1 \le \ell \le n \wedge A(k) = B(\ell))))$

55. palindromoa

$palindromoa(A(1..n)) \equiv \forall k(1 \le k \le n \rightarrow A(k) = A(n - k + 1))$
Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

56. gutxienezbidesb

gutxienezbidesb(A(1..n)) ≡ ∃k(1 ≤ k ≤ n – 1 ∧ A(k) ≠ A(k + 1))

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

57. justubidesb

justubidesb(A(1..n)) ≡ Nk(1 ≤ k ≤ n – 1 ∧ A(k) ≠ A(k + 1)) = 1

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

58. balioberakop

balioberakop(A(1..n), B(1..m)) ≡

np = Nk(1 ≤ k ≤ n ∧ 1 ≤ k ≤ m ∧ A(k) = B(k))

Aldagai askeak: A(1..n), B(1..m) Aldagai lotuak: k

Ez dakigu zein den handiagoa, n ala m, eta horregatik k aldagai lotuak 1 eta n eta 1 eta m balioen artean egon behar duela esan beharko da. Horrela k balioa [1..n] eta [1..m] tarteetatik tarte txikienaren barruan egongo dela ziurtatuko dugu eta k balioak beti A eta B bektoreen mugen barruan egongo da.

59. agerpenkopbera

agerpenkopbera(x, A(1..n), B(1..p)) ≡

Nk(1 ≤ k ≤ n ∧ A(k) = x) = Nℓ(1 ≤ ℓ ≤ p ∧ B(ℓ) = x)

Aldagai askeak: x, A(1..n), B(1..p) Aldagai lotuak: k, ℓ

N-ren agerpenak kabiatuta ez daudenez, k aldagaia erabil daiteke bientzat:

Nk(1 ≤ k ≤ n ∧ A(k) = x) = Nk(1 ≤ k ≤ p ∧ B(k) = x)

Aldagai askeak: x, A(1..n), B(1..p) Aldagai lotuak: k

60. zenbakia

zenbakia(x, A(1..n)) ≡ x = $\sum_{k=1}^{n}(A(k)*10^{n-k})$

Aldagai askeak: x, A(1..n) Aldagai lotuak: k

61. kapikua

kapikua(A(1..n)) ≡ digituak(A(1..n)) ∧ palindromoa(A(1..n)) ∧

∧ (A(1) = 0 → n = 1)

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: ---

62. kopurua

(i) $\text{kopurua}(A(1..n), B(1..n)) \equiv$
$\forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow B(k) = \text{aldiz}(A(k), A(1..n)))$
Aldagai askeak: A(1..n), B(1..n) Aldagai lotuak: k

(ii) $\text{kopurua}(A(1..n), B(1..n)) \equiv$
$$\forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow B(k) = \underbrace{N\ell(1 \leq \ell \leq n \wedge A(k) = A(\ell))}_{\substack{\text{A(k) balioa A(1..n) bektorean} \\ \text{Zenbat aldiz agertzen den}}})$$

Aldagai askeak: A(1..n), B(1..n) Aldagai lotuak: k, ℓ
Kabiaketa dela eta, k eta ℓ aldagaiak beharrezkoak dira.

63. sekzioazpibek

$\text{sekzioazpibek}(A(1..n), B(1..p), i, j) \equiv (1 \leq n \leq p) \wedge (1 \leq i \leq j \leq p) \wedge$
$\wedge (j - i = n - 1) \wedge \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow A(k) = B(i + k - 1))$
Aldagai askeak: A(1..n), B(1..p), i, j Aldagai lotuak: k

Beste aukera bat:

$\text{sekzioazpibek}(A(1..n), B(1..p), i, j) \equiv (1 \leq n \leq p) \wedge (1 \leq i \leq j \leq p) \wedge$
$\wedge (j - i = n - 1) \wedge \forall k(i \leq k \leq j \rightarrow B(k) = A(k - i + 1))$
Aldagai askeak: A(1..n), B(1..p), i, j Aldagai lotuak: k

64. azpibek

(i) $\text{azpibek}(A(1..n), B(1..p)) \equiv$
$\exists h(1 \leq h \leq n \wedge \exists g(1 \leq g \leq n \wedge \text{sekzioazpibek}(A(1..n), B(1..p), h, g)))$
Aldagai askeak: A(1..n), B(1..p) Aldagai lotuak: h, g

(ii) $\text{azpibek}(A(1..n), B(1..p)) \equiv (1 \leq n \leq p) \wedge (1 \leq i \leq j \leq p) \wedge$
$\exists h(1 \leq h \leq n \wedge \exists g(h \leq g \leq n \wedge g - h = n - 1 \wedge$
$\forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow B(h + k - 1) = A(k))))$
Aldagai askeak: A(1..n), B(1..p) Aldagai lotuak: h, g, k
Kasu honetan h, g eta k aldagai lotuak beharrezkoak dira kabiaketa dela eta.

65. gutxienezbikotebat

$\text{gutxienezbikotebat}(mp, A(1..n), B(1..m)) \equiv$
$mp \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq n - 1 \wedge 1 \leq k \leq m - 1 \wedge A(k) = B(k) \wedge A(k + 1) = B(k + 1))$
Aldagai askeak: mp, A(1..n), B(1..m) Aldagai lotuak: k
Kontuan hartu beharreko elementu berdinek A eta B bektoreetan posizio berean egon behar dutenez, bektore bientzat k aldagaia erabili behar da.

66. justubikotebat

justubikotebat(b, A(1..n), B(1..m)) ≡

$b \leftrightarrow Nk(1 \leq k \leq n-1 \wedge 1 \leq k \leq m-1 \wedge A(k) = B(k) \wedge A(k+1) = B(k+1)) = 1$

Aldagai askeak: b, A(1..n), B(1..m) Aldagai lotuak: k

Kontuan hartu beharreko elementu berdinek A eta B bektoreetan posizio berean egon behar dutenez, bektore bientzat k aldagaia erabili behar da.

67. gutxienezbikotebat2

gutxienezbikotebat2(dp, A(1..n), B(1..m)) ≡

$dp \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq n-1 \wedge \exists \ell(1 \leq \ell \leq m-1 \wedge A(k) = B(\ell) \wedge A(k+1) = B(\ell+1)))$

Aldagai askeak: dp, A(1..n), B(1..m) Aldagai lotuak: k, ℓ

Kontuan hartu beharreko elementu berdinek A eta B bektoreetan posizio desberdinetan ager daitezkeenez, k eta ℓ aldagaiak erabili behar dira.

68. justubikotebat2

justubikotebat2(c, A(1..n), B(1..m)) ≡

$c \leftrightarrow Nk(1 \leq k \leq n-1 \wedge \exists \ell(1 \leq \ell \leq m-1 \wedge A(k) = B(\ell) \wedge A(k+1) = B(\ell+1))) = 1$

Aldagai askeak: c, A(1..n), B(1..m) Aldagai lotuak: k, ℓ

Kontuan hartu beharreko elementu berdinek A eta B bektoreetan posizio desberdinetan ager daitezkeenez, k eta ℓ aldagaiak erabili behar dira.

69. lehenakjarraian

lehenakjarraian(u, v) ≡ $u < v \wedge$ lehena(u) $\wedge$ lehena (v) $\wedge$

$\forall k(u < k < v \rightarrow \neg$lehena(k))

Aldagai askeak: u, v Aldagai lotuak: k

70. indizehand

indizehand(i, C(1..m)) ≡ $1 \leq i \leq m \wedge$ sekziokohand(1, m, C(i), C(1..m))

Aldagai askeak: i, C(1..m) Aldagai lotuak: ---

71. indizetxik

indizetxik(i, C(1..m)) ≡ $1 \leq i \leq m \wedge$ txikiena(C(i), C(1..m))

Aldagai askeak: i, C(1..m) Aldagai lotuak: ---

72. gorantz

gorantz(B(1..m), C(1..m)) ≡ permutazioa(B(1..m), C(1..m)) $\wedge$

$\forall k(1 \leq k \leq m-1 \rightarrow B(k) \leq B(k+1))$

Aldagai askeak: B(1..m), C(1..m) Aldagai lotuak: k

73. alder

alder(B(1..m), C(1..m)) ≡ $\forall k(1 \leq k \leq m \rightarrow B(k) = C(m-k+1))$

Aldagai askeak: B(1..m), C(1..m) Aldagai lotuak: k

74. ezerrepikatuta

ezerrepikatuta(C(1..m)) ≡ denakdesb(1, n, C(1..m))

Aldagai askeak: C(1..m) Aldagai lotuak: ---

75. ezbaturazero

ezbaturazero(C(1..m)) ≡

$\forall k(1 \le k \le m \rightarrow \forall \ell(k \le \ell \le m \rightarrow \neg$tartebatura$(k, \ell, 0, C(1..m))))$

Aldagai askeak: B(1..m), C(1..m) Aldagai lotuak: k, ℓ

76. ezzerobik

ezzerobik(C(1..m)) ≡ zerobikote(0, C(1..m))

Aldagai askeak: C(1..m) Aldagai lotuak: ---

77. denakbialdiz

denakbialdiz(C(1..m)) ≡ denakjustubi(C(1..m))

Aldagai askeak: C(1..m) Aldagai lotuak: ---

78. hirudisjuntu

(i) hirudisjuntu(C(1..n), D(1..m), E(1..p)) ≡

$\forall k(1 \le k \le n \rightarrow ($aldiz$(C(k), 0, D(1..m)) \wedge$ aldiz$(C(k), 0, E(1..p)))) \wedge$

$\forall \ell(1 \le \ell \le m \rightarrow$ aldiz$(D(\ell), 0, E(1..p)))$

Aldagai askeak: C(1..n), D(1..m), E(1..p) Aldagai lotuak: k, ℓ

$\forall$ zenbatzaileak ez daudenez bata bestearen barruan kabiatuta, bigarrenarentzat ere k aldagaia erabil daiteke ℓ aldagaia erabili beharrean.

(ii) hirudisjuntu(C(1..n), D(1..m), E(1..p)) ≡ disjuntuak(C(1..n), D(1..m)) $\wedge$ disjuntuak(C(1..n), E(1..p)) $\wedge$ disjuntuak(D(1..m), E(1..p))

Aldagai askeak: C(1..n), D(1..m), E(1..p) Aldagai lotuak: ---

79. positibohautaketa

positibohautaketa(B(1..p), C(1..m)) ≡ positiborenbat(C(1..m)) $\wedge$

denakdesb(B(1..p)) $\wedge$ denakdesb(B(1..p)) $\wedge$

$\forall k(1 \le k \le p \rightarrow$ agertzenda$(1, m, B(k), C(1..m)))$

Aldagai askeak: B(1..p), C(1..m) Aldagai lotuak: k

80. partiketa

partiketa(C(1..m), D(1..p), E(1..q)) ≡ sekzioazpibek(C(1..m), E(1..q), 1, m) $\wedge$ sekzioazpibek(D(1..p), E(1..q), m + 1, m + p)

Aldagai askeak: C(1..m), D(1..p), E(1..q) Aldagai lotuak: ---

81. lehenakgorantz

lehenakgorantz(A(1..n)) ≡ A(1) = 2 $\wedge$

$\forall k(1 \le k \le n - 1 \rightarrow$ lehenakjarraian$(A(k), A(k + 1)))$

Aldagai askeak: A(1..n) Aldagai lotuak: k

82. handtxikbehin

handtxikbehin(max, min, B(1..m)) ≡

sekziokohand(1, m, max, B(1..m)) $\wedge$ txikiena(min, B(1..m)) $\wedge$ aldiz (max, 1, B(1..m)) $\wedge$ aldiz(min, 1, b(1..m))

Aldagai askeak: max, min, B(1..m)   Aldagai lotuak: ---

b) Programen aurre-ondoetako espezifikazioa

1. A(1..n) eta B(1..n) bektoreetan balio bera duten posizio-kopurua c aldagaian zenbatu

$\{\varphi\} \equiv \{n \geq 1\}$
$\{\psi\} \equiv \{c = Nk(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = B(k))\}$

2. A(1..n) eta B(1..n) bektoreek balio bera duen posiziorik ba al duten erabaki w aldagaian

$\{\varphi\} \equiv \{n \geq 1\}$
$\{\psi\} \equiv \{w \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = B(k))\}$

3. A(1..n) bektoreko elementu denak berdinak al diren erabaki *berdinak* aldagaian

$\{\varphi\} \equiv \{n \geq 1\}$
$\{\psi\} \equiv \{berdinak \leftrightarrow \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow A(k) = B(k))\}$

4. A(1..n) eta B(1..n) bektoreetan balio bera duten posizioen kopurua balio desberdina dutenen kopurua baino handiagoa al den erabaki d aldagai boolearrean

$\{\varphi\} \equiv \{n \geq 1\}$
$\{\psi\} \equiv \{d \leftrightarrow (Nk(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = B(k)) > N\ell(1 \leq \ell \leq n \wedge A(\ell) \neq B(\ell)))\}$

N funtzioaren agerpenak elkarren artean independenteak direnez, batentzat k eta bestearentzat ℓ aldagaia erabili beharrean bientzat aldagai bakarra erabil daiteke, adibidez k. Beharrezkoak ez izan arren batzutan aldagai desberdinak erabiltzen dira formula argiagoa edo ulertzen errazagoa izan dadin.

5. A(1..n) bektorean batekoen kopurua zero-kopurua baino handiagoa al den erabaki b aldagai boolearrean

$\{\varphi\} \equiv \{n \geq 1 \wedge \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow (A(k) = 0 \vee A(k) = 1))\}$
$\{\psi\} \equiv \{b \leftrightarrow (Nk(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = 1) > N\ell(1 \leq \ell \leq n \wedge A(\ell) = 0))\}$

N funtzioaren agerpenak elkarren artean independenteak direnez, batentzat k eta bestearentzat ℓ aldagaia erabili beharrean bientzat aldagai bakarra erabil daiteke, adibidez k. Beharrezkoak ez izan arren batzutan aldagai desberdinak erabiltzen dira formula argiagoa edo ulertzen errazagoa izan dadin.

6. A(1..n) bektorean batekoen kopurua zero-kopurua baino handiagoa baldin bada, *geh* aldagaian batekoen kopurua itzuli eta bestela zero-kopurua

$\{\varphi\} \equiv \{n \geq 1 \wedge \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow (A(k) = 0 \vee A(k) = 1))\}$
$\{\psi\} \equiv \{$
$(Nk(1 \leq k \leq n \wedge A(k)=1) > N\ell(1 \leq \ell \leq n \wedge A(\ell)=0)) \rightarrow geh = Nh(1 \leq h \leq n \wedge A(h)=1)$
$\wedge$
$(Nk(1 \leq k \leq n \wedge A(k)=1) \leq N\ell(1 \leq \ell \leq n \wedge A(\ell)=0)) \rightarrow geh = Nh(1 \leq h \leq n \wedge A(h)=0)$
$\}$

ψ formulan k, ℓ eta h aldagaiak erabili beharrean, k bakarrik ere erabil daiteke, N funtzioaren hiru agerpenak elkarren artean independenteak baitira. Beharrezkoak ez izan arren batzutan aldagai desberdinak erabiltzen dira formula argiagoa edo ulertzen errazagoa izan dadin.

7. A(1..n) bektorean 1 dagoen leku bakoitzean B(1..n) bektorean 0 balioa eta A(1..n) bektorean 0 dagoen leku bakoitzean B(1..n) bektorean 1 balioa gorde

$\{\varphi\} \equiv \{n \geq 1 \wedge \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow (A(k) = 0 \vee A(k) = 1))\}$
$\{\psi\} \equiv \{\forall k(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = 1 \rightarrow B(k) = 0) \wedge$
$\forall k(1 \leq k \leq n \wedge A(k) = 0 \rightarrow B(k) = 1)\}$

Kasu honetan $\forall$ zenbatzailearen agerpen bietan k aldagaia erabili da, ez baitaude bata bestearen barruan. Beste aukera bi aldagai desberdin erabiltzea izango litzateke, baina ez da beharrezkoa.

8. Batekoen ordez zeroak eta zeroen ordez batekoak ipini A(1..n) bektorean

$\{\varphi\} \equiv \{n \geq 1 \wedge \forall k(1 \leq k \leq n \rightarrow (A(k) = a_k \wedge (A(k) = 0 \vee A(k) = 1)))\}$
$\{\psi\} \equiv \{\forall k(1 \leq k \leq n \wedge a_k = 1 \rightarrow A(k) = 0) \wedge$
$\forall k(1 \leq k \leq n \wedge a_k = 0 \rightarrow A(k) = 1)\}$

Kasu honetan ere $\forall$ zenbatzailearen agerpen bietan k aldagaia erabili da, ez baitaude bata bestearen barruan. Beste aukera bi aldagai desberdin erabiltzea izango litzateke, baina ez da beharrezkoa.