7

$n \in \mathbb{Z}^+$

$$n = r_k 10^k + r_{k-1} 10^{k-1} + \dots + r_1 10 + r_0$$

7.1

$2|n$ ~~$\Leftrightarrow$~~ $2|r_0$ ~~$\Leftrightarrow$~~ 5. prop

$n = r_0$

$2|2 \rightarrow$ 1. prop

$2|n \rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \frac{n}{2} = k$

Solte dauden r-ek batux

$n = r_0$

Zatig 5. prop

$2|r_0 \rightarrow 2|n$ egia bada $2|r_0$ ere

7.2

$4|n \Leftrightarrow 4|(r_1 10 + r_0)$

$n = r_0 + r_1 \cdot 4 + 6r_1$

Baldintza $\rightarrow$ • $4|4$ (Zatig. 1. prop)

• 4. prop $\forall x \in \mathbb{Z}$ $4|x4$

$n = 4r_1 + (r_0 + 6r_1)$

Zatig 5. prop

$4|4r_1$

egia izateko $4|n$ egia izan behar da $4|(r_1 10 + r_0)$

Matematika diskretua

Zenbakien teoria. Ariketak

1.3

$x, y, z \in \mathbb{Z}$ zenbaki osoak non $5x + 10y + 20z = 1003$

$5|5$ $\exists\ \frac{5}{5} = 1 \in \mathbb{Z}$

eta

$5|10$ $\exists\ \frac{10}{5} = 2 \in \mathbb{Z}$ $\xrightarrow[\text{5. prop}]{\text{zati.}}$ $5/5x+10y+20z$

eta

$5|20$ $\exists\ \frac{20}{5} = 4 \in \mathbb{Z}$

$5x+10y+20z = 1003 \rightarrow$ egia da $5/1003$

$\hookrightarrow \nexists k \in \mathbb{Z}$ non $1003 = k \cdot 5$

Beraz, ez dira existitzen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ non, ekuazio hori betetzen duten.

4

$a, b \in \mathbb{Z}^+$ bakoitiak

Frogatu a^2+b^2 2ren multiploa dela.

$\cancel{2|(a^2+b^2)} \xrightarrow[\text{5. prop}]{\text{zati.}}$ $\cancel{2 \nmid a^2}$ eta $\cancel{2 \nmid (a^2+b^2)}$

$a, b \in \mathbb{Z}^+$

a Bak $\Rightarrow a = 2x+1$

b Bak $\Rightarrow b = 2y+1$

$\Rightarrow (2x+1)^2 + (2y+1)^2 = a^2+b^2 \Rightarrow 4x^2+4x+4y^2+4y+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(2x^2+2x+2y^2+2y+1) \Rightarrow$ Beraz, $2|(2x+1)^2+(2y+1)^2 \Rightarrow 2|a^2+b^2$ betetzen da, 2-rekin zatitzen baitu 2-ren edozein ekuazio proportzional.

2.1

$2|n$ Baldin eta soilik baldin $2|r_0$

$n = r_0 + r_1 10 + \dots + r_{K-1} 10^{K-1} + r_K 10^K$

$n = r_0 + r_1 8 + 2r_1 + \dots + r_{K-1} 9\dots8 + 2r_{K-1} + r_K 9\dots8 + 2r_K$

Trukatze legearen bidez,

$n = (r_0 + 2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_{K-1} + 2r_K) + (8r_1 + 98r_2 \dots + 9\dots8r_K)$

5. prop esaten duen bezala, $d|a \Rightarrow d|ax$ ere beraz, horrela geratuko zen n:

$n = (r_0 + 2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_{K-1} + 2r_K)$

Berriz 5. prop erabiliz,

$n = r_0$ izango zen

$2|n$ beteko da baldin eta soilik baldin $2|r_0$

Beraz frogatuta geratzen da.

2.2

$4|n$ baldin eta soilik baldin $4|(r_0 + 10r_1)$

$n = r_0 + 10r_1 + 10^2 r_2 + \dots + r_{K-1} 10^{K-1} + r_K 10^K$

$n = r_0 + 10r_1 + 96r_2 + 4r_2 + \dots + r_{K-1} 9\dots6 + 4r_{K-1} + r_K 9\dots96 + 4r_K$

trukatze legearen bidez horrela geratuko da.

$n = (r_0 + 10r_1 + 4r_2 + \dots + 4r_K) + (96r_2 + \dots + 9\dots96r_K)$

$4|n$ beteko $4|r_0 + 10r_1 + 4r_2 + \dots + 4r_K$ betetzea nahikoa da 5. prop arabera

Baina berriz txikitze egind.

$n = (r_0 + 10r_1) + 4r_2 + \dots + 4r_k$

$4|4$ betetzen denez honen konbinazio lineal guztietan ere betetzen da.

Beraz, $n = r_0 + 10r_1$ garatuko dugu

$4 | r_0 + 10r_1$ bete beharko da $4|n$ betetzeko.

(13)

a eta b zenbaki lehen erlatiboak dira, $ZKH(a,b)=1$

Frogatuko dugu $ZKH(a-b, a+b)=1$ edo $ZKH(a-b, a+b)=2$

$ZKH(a,b)=1 \underset{def}{\Rightarrow} 1 = xa+yb$

$d = ZKH(a-b, a+b) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a-b \underset{5.prop}{\Rightarrow} d \mid (a+b)-(a-b) \Rightarrow d \mid 2b \\ \text{eta} \\ d \mid a+b \Rightarrow d \mid (a-b)+(a+b) \Rightarrow d \mid 2a \end{cases}$ def 5. prop

$d \mid xa2 + yb2 \Rightarrow d \mid 2(xa+yb) \Rightarrow d \mid 2 \cdot 1 \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ \text{edo} \\ d=2 \end{cases}$

Beraz, Frogatuta gelditzen da, $ZKH(a-b, a+b)=1$ edo $ZKH(a-b, a+b)=2$

(18)

$a, b, k \in \mathbb{Z}^+$ Frogatuko dugu $ZKH(ka, kb) = ZKH(a,b) \cdot k$

$d = ZKH(ka, kb) \underset{Def}{\Rightarrow} \begin{cases} d \mid ka \\ \text{eta} \\ d \mid kb \end{cases} \underset{5.prop}{\Rightarrow} d \mid kax + kby \Rightarrow d \mid k \cdot (xa+by) \Rightarrow d \mid kd'$

$d' = ZKH(a,b) \underset{def}{\Rightarrow} \begin{cases} d' \mid a \\ \text{eta} \\ d' \mid b \end{cases} \Rightarrow 5. prop \Rightarrow d' \mid xa+by \Rightarrow d' = xa+yb$

~~$d'' = ZKH(a,b) \cdot k \Rightarrow d'' \mid a$~~

$d'' = ZKH(a,b) \cdot k \Rightarrow \cancel{d'' = d' \cdot k}$ $\begin{cases} d'' \mid ka \\ \text{eta} \\ d'' \mid kb \end{cases} \Rightarrow d'' \mid xka + xkb \Rightarrow d'' \mid k \cdot (xa+xb) \Rightarrow$

$\Rightarrow d'' \mid k \cdot d' = \cancel{d}$

$\begin{rcases} d \mid kd' \\ \text{eta} \\ d'' \mid k \cdot d' \end{rcases} \Rightarrow d = d''$ edo $d = -d'' \Rightarrow$ ezinezkoa da $\mathbb{Z}^+$ multzoan gabiltzalako

Beraz $d = d''$ izango da eta $ZKH(ka, kb) = ZKH(a,b) \cdot k$

$1 = 19 - 9 \cdot 2 = 19 - 2(28 - 19) = -2 \cdot 28 + 3 \cdot 19$

$1 = 3(47 - 28) - 2 \cdot 28 = 3 \cdot 47 - 5 \cdot 28$

$1 = 3 \cdot 47 - 5(65 - 1 \cdot 47) = 8 \cdot 47 - 5 \cdot 65$

$1 = 8 \cdot (1312 - 2 \cdot 65) - 5 \cdot 65 = 8 \cdot 1312 - 172 \cdot 65$

$1 = 8 \cdot 1312 - 172(2689 - 2 \cdot 1312) = 352 \cdot 1312 - 172 \cdot 2689$

$1 = 352 \cdot (4001 - 1 \cdot 2689) - 172 \cdot 2689 = 352 \cdot 4001 - 524 \cdot 2689$

$ZKH(a,b) = x \cdot 2689 + y\,4001$

$1 = -524 \cdot 2689 + 352 \cdot 4001$

10

$ZKH(-187, 154) = ?$

$-187 \;\lfloor 154$, $-033 \;\; -1 \Rightarrow -187 = -1 \cdot 154 - 33$

$154 \;\lfloor -33$, $22 \;\; -4 \Rightarrow 154 = -4 \cdot -33 + 22$

$-33 \;\lfloor 22$, $-11 \;\; -1 \Rightarrow -33 = -1 \cdot 22 - 11$

$22 \;\lfloor -11$, $0 \;\; -2 \Rightarrow 22 = -2 \cdot -11$

$ZKH(-187, 154) = -11$

13

$d = ZKH(a-b, a+b)$

$d \mid a-b \Rightarrow d \mid a-b+a+b \Rightarrow d \mid 2a$

eta 5. prop

$d \mid a+b \quad d \mid a+b-(a-b) \Rightarrow d \mid 2b$ eta 5. prop

$d \mid x2a + 2by \Rightarrow d \mid 2(ax+by) \Rightarrow$ 5. Klausula $ax+by=1$

$\Rightarrow d \mid 2 \cdot 1 \Rightarrow d \mid 2$

$\Downarrow$

$d=1$ edo $d=2$

13

a eta b zenbaki deken erlatiboak frogatu $ZKH(a,b)=1$

$ZKH(a-b, a+b) = 1$ edo $ZKH(a-b, a+b) = 2$ $\quad xa + yb = 1$

5. propietatea $\Rightarrow x(a-b) + y(a+b) = 1$ ~~$\Rightarrow a-b-a-b = 1 \Rightarrow -b = 1 \quad b = -\frac{1}{2}$~~

$1 = ZKH(a-b, a+b) \underset{def}{\Rightarrow} \begin{cases} 1 \mid a-b \\ \text{eta} \\ 1 \mid a+b \end{cases}$

9

9.3

$a = 2689 \quad b = 4001; \quad \text{lnko}(a,b) = ?$

Az Euklideszi algoritmus

~~2689~~

$4001 \,\lfloor\, 2689$, maradék 1312, hányados 1 $\to 4001 = 1 \cdot 2689 + 1312 \Rightarrow 1312 = 4001 - 1 \cdot 2689$

$2689 \,\lfloor\, 1312$, maradék 0065, hányados 2 $\to 2689 = 2 \cdot 1312 + 65 \Rightarrow 65 = 2689 - 2 \cdot 1312$

$1312 \,\lfloor\, 65$, 112, $\boxed{47}$, hányados 21 $\to 1312 = 21 \cdot 65 + 47 \Rightarrow 47 = 1312 - 21 \cdot 65$

$65 \,\lfloor\, 47$, 28, 1 $\to 65 = 47 + 28 \Rightarrow 28 = 65 - 1 \cdot 47$

$47 \,\lfloor\, 28$, 19, 1 $\to 47 = 28 + 19 \Rightarrow 19 = 47 - 1 \cdot 28$

$28 \,\lfloor\, 19$, 09, 1 $\to 28 = 19 + 9 \Rightarrow 9 = 28 - 1 \cdot 19$

$19 \,\lfloor\, 9$, 1, 2 $\to 19 = 9 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 19 - 9 \cdot 2$

$9 \,\lfloor\, 1$, 0, 9 $\to 9 = 1 \cdot 9$

$\text{lnko}(a,b) = x \cdot a + y b \Rightarrow 1 = x \cdot 2689 + y \cdot 4001$

$1 = 19 - 9 \cdot 2 = 19 - 2(28 - 1 \cdot 19) = 19 \cancel{-56+28} = -2 \cdot 28 + 38$

~~1 = 19 - 56 + 28 = 42 - 28 - 56 + 28 = 42 - 56~~

$1 = \cancel{1312 - 21 \cdot 65 - 56 = 1312 - 21(2689 - 2 \cdot 1312)} - 56 =$

$\cancel{= -21 \cdot 2689 + 43 \cdot 1312 - 56}$

$1 = 47 - 1 \cdot 28 - 2 \cdot 28 + 38 = 47 - 3 \cdot 28 + 38 =$

$1 = 47 - 3(65 - 1 \cdot 47) + 38 = -3 \cdot 65 + 4 \cdot 47 + 38$

$$h = zkh(a,b) \underset{\boxed{\text{zkh-ren Definizioa}}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} h \mid a \\ \text{eta} \\ h \mid b \end{array} \right. \xrightarrow[\text{zatig. 5. prop}]{} \forall x,y \in \mathbb{Z}^+ \; h \mid xa + yb \Rightarrow h \mid \underbrace{a + cb}_{d} \Rightarrow h \mid d$$

$h \mid d$ eta $h \mid b$ beraz, frogatute geratuko da $g = h$ izango da. $h \in \mathbb{Z}^+$

$$\left. \begin{array}{l} h \mid b \\ \text{eta} \\ h \mid d \end{array} \right\} \underset{\boxed{\text{zkh-ren def}}}{\Longrightarrow} h = zkh(b,d) \Rightarrow h \mid g$$

Aritmetika. Matematika Diskretua

(17)

$$a = d + (-c)b \quad c \in \mathbb{Z}^+$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \quad d = a + bc \Rightarrow \underbrace{ZKH(b,d)}_{g \in \mathbb{Z}^+} = \underbrace{ZKH(a,b)}_{h \in \mathbb{Z}^+}$$

Frogatu behar dugu $g, h \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki oso eta positiboak berdinak direla.

Zatigarritasunaren 2. propietatetik esan dezakegu

$g \mid h$ eta $h \mid g \Rightarrow g = h$ (ezingo dira izan zeinuz kontrakoak definizioz ~~bia~~ $g, h \in \mathbb{Z}^+$ baitira)

$$g = ZKH(b,d) \underset{\text{ZKH gabili}}{\Rightarrow} \begin{cases} g \mid b \\ \text{eta} \\ g \mid d \end{cases} \xrightarrow{\text{5. zatig prop}} g \mid xb + yd \Rightarrow g \mid d + (-c)b$$

$$\Downarrow a = d + (-c)b$$

$$\left.\begin{array}{l} g \mid a \\ \text{eta} \\ g \mid b \end{array}\right\} *$$

$$h = ZKH(a,b) \underset{\text{ZKH-ren definizioz}}{\Rightarrow} \begin{cases} h \mid b \\ \text{eta} \\ h \mid a \end{cases}$$

$$* \left.\begin{array}{l} g \mid a \\ \text{eta} \\ g \mid b \end{array}\right\} \underset{\text{ZKH-ren Def}}{\Rightarrow} g \mid ZKH(a,b) \Rightarrow g \mid h$$

Aritmetika. Zenbakien teoria

(14)

$n \in \mathbb{Z}^+$, $zkh(n, n+1) = ?$

$\cancel{zkh}\ mkt(n, n+1) = ?$

$d = zkh(n, n+1) \underset{Def}{\Rightarrow} \begin{cases} d \mid n \\ eta \\ d \mid n+1 \end{cases} \Rightarrow$ Zatigarritasunaren 5. prop

$\forall x, y \in \mathbb{Z}\quad d \mid xn + y(n+1)$

$x = -1, \quad y = 1$

Adb

$d \mid n+1-n \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$

$\hookrightarrow$ 1 zatitzen duen zenbaki bakarra 1-a delako.

n eta n+1 zenbaki lehen erlatiboak dira.

(15)

15.1

$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

a eta b zenbaki erlatiboak: $zkh(a,b) = 1 \Rightarrow xa + yb = 1$

$a \mid c$ eta $b \mid c \Rightarrow ab \mid c$

Teorema: $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \cdot b = mkt(a,b) \cdot zkh(a,b)$

Gure kasuan, $zkh(a,b) = 1$ dela esaten digunez, $ab = mkt(a,b)$ izango da

Teorema: $a, b, m \in \mathbb{Z}^+$, $m = mkt(a,b)$

$\forall c \in \mathbb{Z}^+$, $a \mid c$, $b \mid c \Rightarrow m \mid c$

Hortaz, ab balioak zatituko du c, $ab \mid c$, bera delako c multiplo ~~komun~~ horien arteko txikiena.

15.2

a eta b zenbakiak ez badira lehen erlatiboak, $zkh(a,b) \neq 1$

$a|c$ eta $b|c \Rightarrow ab|c$

Kontra adibidea

$a=6$, $b=3 \rightarrow$ ez dira zenbaki lehen erlatiboak

$zkh(6,3) \neq 1 = 3$, $3|6$, $3|3$

Har dezagun a ren eta b ren multiplo bat: $c=12$

$c = 12 = 2 \cdot 6$

$c = 12 = 4 \cdot 3$ egia ote da $18/c \Rightarrow ab/c$? $\rightarrow$ EZ

Adb

a eta b zenbakiak lehen erlatiboak direnean betetzen da.

$a=6$ eta $b=5$ 6 eta 5 zenbaki lehen erlatiboak dira, $zkh(6,5)=1$

$ab = 6 \cdot 5 = 30$

Har dezakegu 6 eta 5-en edozein multiplo komun ($c = 6 \cdot 5 \cdot 5$, $c = 66 \cdot 5 \ldots$) beti beteko da ab/c beti izango da 30en multiplo.

11

$a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ a eta b zenbaki lehen erlatiboak izanik, hau da $zkh(a,b)=1$

Frogatu $a/bc \Rightarrow a|c$

zkh-ren 5. propietatetik zera dakigu:

$zkh(a,b) = xa + ~~+~~ yb = 1$

Beraz, Berdintzaren bi atalak $c \in \mathbb{Z}^+$ balioaz biderkatuz,

$c = xac + ybc$

Zatigarritasunaren propietatetik zera dakigu: $a|a$, $a|a \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, a|ax$

$\Rightarrow c \in \mathbb{Z}, a|axc$

Arikketak dio, ~~orduan~~ $a|bc$

~~$\forall y$~~ $\forall y \in \mathbb{Z}$ $a|bcy \rightarrow$ Zat. 5. propr $a|axc$ eta $a|bcy \Rightarrow a|\underbrace{axc+bcy}_{=c}$

eta

Hortaz, $a|c$

Aritmetika. Zenbakien teoria

5

5.1

$m \geq 2$, konposatua $\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}^+$ zenbaki lehena non $p \mid m$ eta $p \leq \sqrt{m}$

m zenbaki konposatua $\underset{Def}{\Rightarrow}$ $\left\{ \exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+ \text{ non } m = m_1 \cdot m_2 \quad 1 < m_1 < m \quad 1 < m_2 < m \right\}$

Frogatuko dugu $m_1 \leq \sqrt{m}$ edo $m_2 \leq \sqrt{m}$ Bete behar dela (Absurdura eramanez).

Hipotesi absurdoa suposatus $m_1 > \sqrt{m}$ eta $m_2 > \sqrt{m}$

$m = m_1 \cdot m_2 > \sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m$

$\boxed{m > m}$ kontraesana

Hipotesia absurdoa zen, frogatuta geratzen da, $m_1 \leq \sqrt{m}$ edo $m_2 \leq \sqrt{m}$

Izan dadila adibidez $m_1 \leq \sqrt{m}$

$m_1 \leq \sqrt{m}$. m_1 nolakoa da?

m_1 lehena da $\Rightarrow$ Hala bada frogatuta geratzen da.

m_2 konposatua da.

Teoremari esker dakigu $\exists p \in \mathbb{Z}^+$, p lehena, $p \mid m_1$. Hortaz, $p \mid m$ eta frogatuta geratuko da.

5.2

$m = 811$ lehena al da?

Zenbakia lehena den edo ez jakiteko:

$811/2 \in \mathbb{Z}^+$

$811/3 \in \mathbb{Z}^+$

$\vdots$

Gehienez $\sqrt{m}$ baino txikiagoa edo berdin diren zenbaki lehenekin probatuz.

$\sqrt{811} = 28'42$

28-ra arteko zenbaki lehenekin = 2 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23

Bat bera ere ez da 811ren zatitzailea.

Beraz, 811 zenbaki lehena da.

(12)

$a, b, d \in \mathbb{Z}^+$; $d = zkh(a,b)$ Frogatuko dugu. $zkh\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

$d = zkh(a,b) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z}^+ \text{ non } a = k_1 \cdot d \Rightarrow k_1 = \frac{a}{d} \in \mathbb{Z} \\ \text{eta} \\ d \mid b \end{cases}$

zkh-ren 5. propietatearekin dakigu, $zkh(a,b) = xa + yb$

Berdintzaren bi aldeak d-rekin $\to d = xa + yb$

zatituz, $\to \frac{d}{d} = \frac{xa}{d} + \frac{yb}{d} \Rightarrow 1 = \underbrace{x\frac{a}{d}}_{\in\mathbb{Z}} + y\frac{b}{d} \to \in \mathbb{Z}$

Frogatuta geratzen da,

$zkh\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

(8)

$a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a+b=60 \quad zkh(a,b)=12$

Zatigarritasunaren 5. propietatea erabiliz, $12 = x a + y b$ ($x = -1$, $y = 1$)

$12 = -a + b \Rightarrow b = 12 + a$
$a + b = 60$

$b = 12 + a$, $a + 12 + a = 60$

$2a = 48 \Rightarrow a = 24$

$b = 12 + 24 = 36$

$a + b = 75 \quad zkh(a,b) = 12$

Zati. 5. prop erabiliz $12 = x a + y b$ ($x = -2$, $y = 1$)

$12 = -2a + b$
$a + b = 75$

$b = 12 + 2a$, $12 + a + 2a = 75$

$3a = 63 \Rightarrow a = 21$

$b = 12 + 41 = 53$

(16)

$mkt(500, 120)$

$$\frac{1}{500} + \frac{1}{120} = \frac{500 + 120}{60000}$$

$500 \mid 10$, $50 \mid 2$, 25

$120 \mid 10$, $12 \mid 2$, 6

Aritmetika Zenbaki teoriak

5.2

$n = 467$, zenbakia lehena den edo ez jakiteko

~~$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ $d = zkh(a,b)$~~

$467/2 \in \mathbb{Z}^+$

$467/3 \in \mathbb{Z}^+$

$\vdots$

$467/\sqrt{467} \in \mathbb{Z}^+ \to 21'61$

21 arteko zenbaki lehenekin probatuko dugu: eta konturatuko gara bat bera ere ez dela 467-ren zatitzailea, beraz, 467 zenbaki lehena da

$n = 911$, zenbaki lehena den edo ez ~~kadal~~ jakiteko, $467/n$ egingo dugu eta horrela ikusi ea badagoen zenbaki batik 467 zatitzea $\in \mathbb{Z}^+$ den.

Horretarako, $\sqrt{~~467~~} = 30'18$ beraz, letik 30 era dauden zenbaki lehen guztiekin zatituko dugu eta zatidura $\in \mathbb{Z}^+$ bada zenbaki ez lehena izango da.

Ez du betetzen hori beraz, zenbaki lehena da 911

1.2

Izan bitez, $a, b, d \in \mathbb{Z}^+$, non $d = zkh(a,b)$ Frogatu $zkh(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$

$$d = zkh(a,b) \begin{cases} d \mid a \overset{Def}{\Longrightarrow} a = k_1 \cdot d \quad k_1 \in \mathbb{Z}^+ \quad k_1 = \frac{a}{d} \\ \text{eta} \\ d \mid b \overset{Def}{\Longrightarrow} b = k_2 \cdot d \quad k_2 \in \mathbb{Z}^+ \quad k_2 = \frac{b}{d} \end{cases}$$

zkh-ren 5. propietatetik dakigu, $zkh(a,b) = xa + yb \Rightarrow d = xa + yb$

$$\frac{d}{d} = \frac{xa}{d} + \frac{yb}{d} \Rightarrow 1 = \underbrace{x\frac{a}{d}}_{\in \mathbb{Z}^+} + \underbrace{y\frac{b}{d}}_{\in \mathbb{Z}^+}$$

beraz frogatu dugu $zkh(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$

$$zkh(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{xa}{d} + \frac{yb}{d} \Rightarrow zkh(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$$

Orain a eta b-ren konbinazio lineal honetako koefizienteak kalkulatuko ditugu: $zkh(a,b) = x \cdot a + y \cdot b$

$$1 = x \cdot 1369 + y \cdot 2597$$

$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1(5 - 1 \cdot 3) = 3 - 5 + 3 = 2 \cdot 3 - 5$

$1 = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot (18 - 3 \cdot 5) = 2 \cdot 18 - 6 \cdot 5 - 5 = 2 \cdot 18 - 7 \cdot 5$

$1 = 2 \cdot 18 - 7 \cdot 5 = 2 \cdot 18 - 7(41 - 2 \cdot 18) = 2 \cdot 18 - 7 \cdot 41 + 14 \cdot 18 = 16 \cdot 18 - 7 \cdot 41$

$1 = 16 \cdot 18 - 7 \cdot 4 = 16(100 - 2 \cdot 41) - 7 \cdot 41 = 16 \cdot 100 - 32 \cdot 41 = 16 \cdot 100 - 39 \cdot 41$

$1 = 16 \cdot 100 - 39 \cdot 41 = 16 \cdot 100 - 39(141 - 100) = 16 \cdot 100 - 39 \cdot 141 + 39 \cdot 100 = 55 \cdot 100 - 39 \cdot 141$

$1 = 55 \cdot 100 - 39 \cdot 141 = 55(1228 - 8 \cdot 141) - 39 \cdot 141 = 55 \cdot 1228 - 440 \cdot 141 - 39 \cdot 141 =$
$= 55 \cdot 1228 - 479 \cdot 141$

$1 = 55 \cdot 1228 - 479 \cdot 141 = 55 \cdot 1228 - 479(1369 - 1 \cdot 1228) = 55 \cdot 1228 - 479 \cdot 1369 + 479 \cdot 1228$
$= 534 \cdot 1228 - 479 \cdot 1369$

$1 = 534 \cdot 1228 - 479 \cdot 1369 = 534(2597 - 1369) - 479 \cdot 1369 = 534 \cdot 2597 - 534 \cdot 1369$
$- 479 \cdot 1369 = 534 \cdot 2597 - 1013 \cdot 1369$

$y = 534$ $\quad$ $x = -1013$

Zera dakigu

- $9|9$ (Zatig. 1 prop)
- 4. Prop. $\forall x \in \mathbb{Z}$ $9|x9$

Sobte ofzitello R batuz.

$r = (9r_1 + 99r_2 + \dots 9\dots 9r_m) + (r_0 + r_1 + \dots + r_m)$

Zatig. 5. prop

$9 | 9r_1 + 99r_2 + \dots + 99\dots 9r_m$

Egia izatello $9|r$ egia izan behar da, $9|(r_0 + r_1 + \dots + r_n)$

<u>Adb</u>

$r = 2115$ $\quad r = \underset{r_3}{2 \cdot 10^3} + \underset{r_2}{1 \cdot 10^2} + \underset{r_1}{1 \cdot 10} + \underset{r_0}{5}$

Egia al da $9 | 2115$?

ikus dezagun, $2+1+1+5 = 9$

$9|9 \Rightarrow$ Bai $9 | 2115$

<u>9.2</u>

$a = 1369$, $b = 2597$ $\quad zkh(a,b) = ?$

euklidesen algoritmoa

$2597 \,\underline{|1369}$
$1228 \quad 1$ $\Rightarrow 2597 = 1 \cdot 1369 + 1228$

$1228 = 2597 - 1369$

$1369 \,\underline{|1228}$
$141 \quad 1$ $\Rightarrow 1369 = 1 \cdot 1228 + 141$

$141 = 1369 - 1 \cdot 1228$

$1228 \,\underline{|141}$
$100 \quad 8$ $\Rightarrow 1228 = 8 \cdot 141 + 100$

$100 = 1228 - 8 \cdot 141$

$zkh(a,b)$, zero den desbardina izan den zatitzaile komun handiena izango da,

$141 \,\underline{|100}$
$41 \quad 1$ $\Rightarrow 141 = 1 \cdot 100 + 41 \Rightarrow 41 = 141 - 100$

$100 \,\underline{|41}$
$18 \quad 2$ $\Rightarrow 100 = 2 \cdot 41 + 18 \Rightarrow 18 = 100 - 2 \cdot 41$

$41 \,\underline{|18}$
$5 \quad 2$ $\Rightarrow 41 = 2 \cdot 18 + 5 \Rightarrow 5 = 41 - 2 \cdot 18$

$18 \,\underline{|5}$
$3 \quad 3$ $\Rightarrow 18 = 3 \cdot 5 + 3 \Rightarrow 3 = 18 - 3 \cdot 5$

$5 \,\underline{|3}$
$2 \quad 1$ $\Rightarrow 5 = 1 \cdot 3 + 2 \quad 2 = 5 - 1 \cdot 3$

$3 \,\underline{|2}$
$1 \quad 1$ $\Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 3 - 1 \cdot 2$

$2 \,\underline{|1}$
$0 \quad 2$ $\Rightarrow 2 = 1 \cdot 2 + 0$

Zenbakien teoria Aritmetika

①

$\nexists x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$6x + 9y + 15z = 102$$

$\left\{\begin{array}{ll} 3|6 & \exists\, 6/3 = 2 \in \mathbb{Z} \\ \text{eta} & \\ 3|9 & \exists\, 9/3 = 3 \in \mathbb{Z} \\ \text{eta} & \\ 3|15 & \exists\, 15/3 = 5 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$ $\xrightarrow{\text{Zatigarritasunaren 5. propietatea}}$ $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ $\quad 3 \mid 6x + 9y + 15z.$

$6x + 9y + 15z = 102 \to$ egia da $3 | 102$?

$\downarrow$ $\quad$ Ez $\nexists\, k \in \mathbb{Z}$ non $102 = k \cdot 3$

Ez da existitzen berdintza hori betetzen dituen hiru zenbaki oso.

③

$a, b \in \mathbb{Z}^+$ $\quad b|a$ eta $b|(a+2) \Rightarrow b=1$ edo $b=2$

$\left\{\begin{array}{l} b|a \\ \text{eta} \\ b|(a+2) \end{array}\right.$ Zatia 5. prop $\quad b | xa + y(a+2)$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$

$x = -1,\ y = 1$
$-a + a + 2 = 2$ $\to b|2 \Rightarrow b=1$ edo $b=2$

⑥

$$r = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \dots + r_{m-1} \cdot 10^{m-1} + r_m \cdot 10^m$$

Zatigarritasunaren propietateak erabiliz, frogatu:

$$9 | r \iff 9 | r_m + r_{m-1} + \dots + r_1 + r_0$$

Beste modu batera idatzia:

$$r = r_0 + r_1 \cdot 9 + r_1 + 99r_2 + r_2 + 999r_3 + r_3 + \dots + \overset{9\ldots9}{\cancel{10^{m-1}}}\, r_{m-1} + r_{m-1} + 9\ldots9\, r_m + r_m$$

(4)

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $C = \{7, 8, 9\}$

$A \cap B = \{x : x \in A$ eta $x \in B\} = \{3, 4, 5\}$

$A \cup B = \{x : x \in A$ edo $x \in B\} = \{1, 2, 6, 7\}$

$B \cap C = \{\cancel{x:} 7\}$

$A \cap C = \emptyset$ disjuntuak dira.

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 \cancel{10}\}$

$B - A = \{x : x \in B$ eta $x \notin A\} = \{6, 7\}$

$A - B = \{x : x \in A$ eta $x \notin B\} = \{1, 2\}$

$A - C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C - A = \{7, 8, 9\}$

$A - A = \{\emptyset\}$

$U - A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

(5)

5.1

$A \subseteq B$ eta $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Froga

$\underbrace{\forall x \in A \Rightarrow \forall x \in B}_{\text{Illuda } A \subseteq B} \Rightarrow \forall x \in C$

$B \subseteq C$

$\forall x \in A \Rightarrow \forall x \in C \Rightarrow A \subseteq C$ Betetzen da

Multzoen teoria

①

$\{0\} \in A$ F $\emptyset \in A$ F $\{0\} \subsetneq A$ E $0 \in A$ E $0 \subseteq A$ F $\emptyset \subseteq A$ E $\{\emptyset\} \subseteq A$ F

$A = \{0, 1\}$

②

$A = \{1, 2, \{2\}\}$

$1 \in A$ E $\{1\} \in A$ F $\{1\} \subseteq A$ E $\{\{1\}\} \subseteq A$ F

$\{2\} \in A$ E $\{2\} \subseteq A$ E $\{\{2\}\} \subseteq A$ E $\{\{2\}\} \subset A$ F

③

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$D = \{3, 4, 5\}$ $E = \{3, 5\}$

3.1 x eta B disjuntuak = X eta B-ek ez dute elementu komunik, beraz, X, C edo E izan daiteke.

3.2

$X \subseteq D$ eta $X \not\subseteq B$ $X = E$ izango da.

3.3 $X \subseteq A$ eta $X \not\subseteq C$ $X = B$ izango da.

3.4

$X \subseteq C$ eta $X \not\subseteq A$ X hori ez da existitzen dauzkagun ~~azpi~~multzo guztiak baitira A-ren azpimultzoak.

Multzoen teoria

7.3

$A, B, C \subseteq U$

$(A \cap C = B \cap C)$ eta $(A \cup C = B \cup C) \Rightarrow A = B$ Frogatuko dugu betetzen dela.

$A = B$ izateko: $A \subseteq B$ eta $B \subseteq A$

$\underline{A \subseteq B}$

$$\forall x \in A \underset{\text{Bildura def}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ \text{edo} \\ x \in C \end{array}\right. \underset{}{\overset{\text{Bild def}}{\Rightarrow}} x \in A \cup C \underset{\substack{\text{Jellinde} \\ A \cup C = B \cup C}}{\Rightarrow} x \in B \cup C \underset{\text{Bild def}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ \text{edo} \\ x \in C \end{array}\right.$$

$x \in B$ bada $\Rightarrow$ $A = B$ Frogatu dugu.

$x \in C$ badago, orduan, $\left.\begin{array}{l} x \in A \\ \text{eta} \\ x \in C \end{array}\right\} \underset{\text{ebak def}}{\Rightarrow} x \in A \cap C \underset{\substack{\text{Jellinde} \\ A \cap C = B \cap C}}{\Rightarrow} x \in B \cap C \underset{\text{def}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ \text{eta} \\ x \in C \end{array}\right.$

Beraz, kasu bietan $x \in A \Rightarrow x \in B$ betetzen da.

$\underline{B \subseteq A}$

$$\forall x \in B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ \text{eta} \\ x \in C \end{array}\right. \underset{\text{Bild def}}{\Rightarrow} x \in B \cup C \underset{\substack{\text{Jellinde} \\ A \cup C = B \cup C}}{\Rightarrow} x \in A \cup C \underset{\text{Bild def}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ \text{edo} \\ x \in C \end{array}\right.$$

$x \in A$ betetzen bada, orduan $B \subseteq A$ betetzen da.

$x \in C$ betetzen bada, orduan $\left.\begin{array}{l} x \in B \\ \text{eta} \\ x \in C \end{array}\right\} \Rightarrow x \in B \cap C \underset{\substack{\text{Jellinde} \\ A \cap C = B \cap C}}{\Rightarrow} x \in A \cap C \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ \text{eta} \\ x \in C \end{array}\right.$

Beraz, kasu bietan betetzen da, $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$, beraz, $A \subseteq B$ eta $B \subseteq A$ betetzen da, eta $A = B$ ~~iza~~ frogatu dugu.

9.2

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ Frogatullo dugu.

$\underbrace{A}_{x} \times \underbrace{(B \cap C)}_{y} \underset{\text{Bider Kartesiarra}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x \in A \\ \text{eta} \\ y \in B \cap C \end{cases} \underset{\text{ebaki det}}{\Longrightarrow} \begin{cases} y \in B \\ \text{eta} \\ y \in C \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{eta} \\ y \in B \end{cases} \underset{\text{Bider Karte}}{\Longrightarrow} (x,y) \in A \times B \Longrightarrow$

eta

$\Longrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{eta} \\ y \in C \end{cases} \Longrightarrow (x,y) \in A \times C \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left.\begin{matrix} (x,y) \in A \times B \\ \text{eta} \\ (x,y) \in A \times C \end{matrix}\right\} \underset{\text{Bild det}}{\Longrightarrow} (A \times B) \cap (A \times C)$

2 Ariketak

7.1 $A, B, C \subseteq U$

$A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$

Faltsua! Kontra adibide bat

$\begin{cases} A = \{1\} \\ B = \{2\} \\ C = \{3\} \end{cases}$ $\quad A \cap C = B \cap C \quad \emptyset = \emptyset$ $\quad A \neq B \quad \{1\} \neq \{2\}$

7.2 Faltsua

$A \cup C = B \cup C$

$\begin{cases} A = \{1\} \\ B = \{2\} \\ C = U \end{cases}$ $\quad A \cup C = B \cup C \quad U = U$ $\quad A \neq B \quad \{1\} = \{2\}$

9

9.1 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Bi multzoak berdinak direla frogatzeko,

$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ eta $A \times (B \cup C) \supseteq (A \times B) \cup (A \times C)$

~~$\forall x \in A \times (B \cup C)$~~

Hartu lehenengo multzoko elementu bat

$\forall (x,y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{eta} \\ y \in (B \cup C) \end{cases}$ Bid kart

$x \in A \xrightarrow{\text{Biderkadura kartesiarra}} (x,y) \in A \times B$

$y \in (B \cup C) \Rightarrow$ Bid def $\begin{cases} y \in B \\ \text{edo} \\ y \in C \end{cases}$

$y \in C,\ x \in A \rightarrow (x,y) \in A \times C$

$(x,y) \in A \times B,\ (x,y) \in A \times C$ Bild def $\rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

~~$B \cap A \subseteq A$~~ $B \subseteq A \cup B$

$\forall x \in B \underset{\text{Bildura definizios}}{\Longrightarrow} x \in A \cup B$

$B \subseteq A \cup B$

$A \cup B \subseteq A$ $\Rightarrow$ Frogatuta geratzen da $A \cup B = B$

$\boxed{ii \Rightarrow iii}$

¿$A \cup B = B$ izanik $A \cap B = A$ Frogatu

$A \cap B = A \Rightarrow$ Frogatzeko

$A \cap B \subseteq A$ eta $A \subseteq A \cap B$ Frogatu behar

$A \cap B \subseteq A \Rightarrow$ frogatzeko $\forall x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$

$\forall x \in A \cap B \underset{\text{Ebakidura definizioa}}{\Longrightarrow} x \in A$ eta $x \in B \Rightarrow x \in A$

$A \subseteq A \cap B$ Frogatzeko $\forall x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$

$\forall x \in A$, eta $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Downarrow$ Bildura definizioa

$x \in A$ edo $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow \underbrace{A \cup B = B}_{\text{Salduda}} \Rightarrow x \in B$

$\boxed{iii \Rightarrow iv}$ $A \cap B = A \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

$\forall x \in B^c \underset{\text{Bildura definizioa}}{\Longrightarrow}$ ~~B~~ $\cap\, x \in A^c$ edo $x \in B^c \Rightarrow$ $x \in A^c$

$\Downarrow$

$x \in A^c \cup B^c$

$\Downarrow$ DeM

$(A \cup B)^c \xrightarrow{\text{Salduda } A \cap B = A} x \in A^c$

$\boxed{iv \Rightarrow iii}$

$\forall x \in A \underset{\text{osagarri def}}{\Longrightarrow} x \notin A^c \underset{B^c \subseteq A^c \text{ izanik}}{\Longrightarrow} x \notin B^c \underset{\text{osagarri def}}{\Longrightarrow} x \in B$

Ariketak

①

$A=\{0,1\}$

$\{0\}\in A$	$\emptyset\in A$	$\{0\}\subseteq A$	$0\in A$	$0\subseteq A$	$\emptyset\subseteq A$	$\{\emptyset\}\subseteq A$
F	F	E	E	F	E	F

5.1

A, B eta C multzoak

$A\subseteq B$ eta $B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$

$A\subseteq C$ Frogatzeko

$\forall a\in A \underset{\substack{\text{Jakinda}\\ A\subseteq B}}{\Rightarrow} \forall x\in B \underset{\substack{\text{Jakinda}\\ B\subseteq C}}{\Rightarrow} \forall x\in C$

Beraz $\forall x\in A \Rightarrow \forall x\in C$, orduan $A\subseteq C$

6.

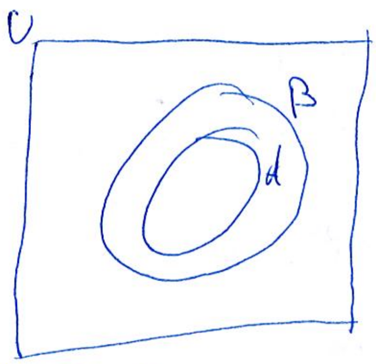
$A,B\subseteq U$

(i) $A\subseteq B$

(ii) $A\cup B=B$

(iii) $A\cap B=A$

(iv) $B^c\subseteq A^c$



$\boxed{i \Rightarrow ii}$ $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B=B$

~~$A\subseteq B \Rightarrow$~~

$A\cup B=B$ Frogatzeko, $A\cup B\subseteq B$ eta $B\subseteq A\cup B$

$A\cup B\subseteq B$, $\forall x\in A\cup B \Rightarrow$ $\qquad \Rightarrow x\in B$

$\forall x\in A\cup B \xrightarrow[\text{Bildduraren definizioa}]{} x\in A$ edo $x\in B$

$x\in A \underset{\substack{\text{Jakinda}\\ A\subseteq B}}{\Rightarrow} x\in B$

5.2

$A \subset B$ eta $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Froga

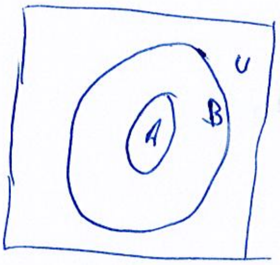
$\forall x \in A \Rightarrow \forall x \in B \Rightarrow \forall x \in C$

Jakinda $A \subset B$
hau da, $A \subseteq B$ dela
baina $A \neq B$

Beraz, $\forall x \in A \Rightarrow \forall x \in C \xRightarrow{\text{orduan}} A \subseteq C$

6

$A, B \subseteq U$



$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

$A \cup B \subseteq B$ eta $B \subseteq A \cup B$

$A \cup B \subseteq B$, $\forall x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ edo $x \in B$ $\Rightarrow$ $\forall x \in B$

Bildura definizioz

Jakinda $A \subseteq B$ $\forall x \in A \Rightarrow \forall x \in B$

$B \subseteq A \cup B$

$\forall x \in B \Rightarrow \forall x \in B$ edo $x \in A \Rightarrow \forall x \in A \cup B$

Bildura definizioz

$A \cup B = B$ emanik $A \cap B = A$ frogatu

$A \cap B \subseteq A$ eta $A \subseteq A \cap B$

$\forall x \in A \cap B \Rightarrow \forall x \in B$

$\underset{\text{Ebaki det}}{A \cap B \subseteq A} \Rightarrow x \in A$ eta $x \in B \Rightarrow x \in A$

$A \subseteq A \cap B$

$\forall x \in A \Rightarrow \forall x \in A \cap B$

$x \in A \xRightarrow{\text{Ebaki det}} x \in A$ eta $x \in B \xRightarrow{\text{Ebaki det}} A \cap B$

$\Rightarrow$ Bildura det $\Rightarrow x \in A$ edo $x \in B \Rightarrow \underbrace{A \cup B = B}_{\text{Jatkinde}} \Rightarrow x \in B$

$A \cap B = A \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

$\forall x \in B^c \xRightarrow{\text{Bildura det}} x \in A^c \cup B^c \xRightarrow{\text{DeM}} \cancel{(A \cap B)^c} \in (A \cap B)^c \xRightarrow{\substack{\text{Ebakinde} \\ A \cap B = A}} x \in A^c$

Orduan, $\forall x \in B^c \Rightarrow \forall x \in A^c$ Beraz, $B^c \subseteq A^c$

$\forall x \in A \xRightarrow{\text{Osagarri det}} x \notin A^c \xRightarrow{\notin\, B^c \subseteq A^c} x \notin B^c \xRightarrow{\text{Osagarri det}} x \in B$

7.1

$A \cap B = A \cap C \Rightarrow A = B$

Kontra adibidea

$\begin{cases} A = \{1\} \\ B = \{2\} \\ C = \{3\} \end{cases}$ $A \cap B = \emptyset = A \cap C \Rightarrow A \neq B$

Multzoen teoria. Ariketak

1. $A = \{0, 1\}$ multzoa izanik, esan ondorengoak egiazkoak ala faltsuak diren.
   $\{0\} \in A \quad \emptyset \in A \quad \{0\} \subseteq A \quad 0 \in A \quad 0 \subseteq A \quad \emptyset \subseteq A \quad \{\emptyset\} \subseteq A$

2. $A = \{1, 2, \{2\}\}$ multzoa izanik, esan ondorengoak egiazkoak ala faltsuak diren.
   $1 \in A \quad \{1\} \in A \quad \{1\} \subseteq A \quad \{\{1\}\} \subseteq A$
   $\{2\} \in A \quad \{2\} \subseteq A \quad \{\{2\}\} \subseteq A \quad \{\{2\}\} \subset A$

3. Honako multzoak izanik, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$, $E = \{3, 5\}$. Esan horietako zein izan daitezkeen X, honako baldintzak izanik:
   (3.1) X eta B disjuntuak dira. (3.2) $X \subseteq D$ eta $X \not\subseteq B$.
   (3.3) $X \subseteq A$ eta $X \not\subseteq C$. (3.4) $X \subseteq C$ eta $X \not\subseteq A$.

4. Izan bitez $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ unibertsoan definitutako honako hiru multzoak: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ eta $C = \{7, 8, 9\}$. Multzoen arteko honako eragiketak kalkula itzazu: $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B - A$, $A - B$, $A - C$, $C - A$, $A - A$, $U - A$.

5. A, B eta C multzoak izanik, honakoak froga itzazu:
   5.1 $A \subseteq B$ eta $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
   5.2 $A \subset B$ eta $B \subseteq C \Longrightarrow A \subset C$

6. $A, B \subseteq U$ multzoak izanik, froga ezazu (i), (ii), (iii) eta (iv) baliokideak direla:
   (i) $A \subseteq B$. (ii) $A \cup B = B$. (iii) $A \cap B = A$. (iv) $B^c \subseteq A^c$.

7. $A, B, C \subseteq U$ multzoak izanik, honakoak egiazkoak ala faltsuak diren azter ezazu:
   7.1 $A \cap C = B \cap C \Longrightarrow A = B$
   7.2 $A \cup C = B \cup C \Longrightarrow A = B$
   Galdetu
   7.3 $(A \cap C = B \cap C)$ eta $(A \cup C = B \cup C) \Longrightarrow A = B$

8. Jaki gozoak jateko ohiturei buruzko ikerketa bat dela eta, hiri bateko biztanleen artean inkesta bat egin dute. Biztanleei galdetu zaie ea azukrea, izozkia eta pastelak gustatzen zaizkien, eta honako emaitzak lortu dira: 816 biztanlek azukrea gustatzen zaiela esan dute, 723 biztanleri izozkia gustatzen zaie eta 645 biztanleri pastelak gustatzen zaizkie. Inkesten emaitzak hobeto aztertuta ikusi da biztanle askori jaki gozo mota bat baino gehiago gustatzen zaiola. Horrela, 562 biztanleri azukrea eta izozkiak gustatzen zaizkie, 463 biztanleri azukrea eta pastelak, 470 biztanleri pastelak eta izozkia. Guztira 310 biztanle izan dira hiru jaki motak atsegin dituztela aitortu dutenak. Zenbat biztanlek hartu du parte inkestan?

9. Honakoak froga itzazu:
   9.1 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
   9.2 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

3.2

a) 1- $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$ /∴ $\forall x\,(Q(x) \to R(x)) \to (P(y) \to R(y)))$

2- $\forall x\,(Q(x) \to R(x))$ BFE hipotesic /∴ $P(y) \to R(y)$ 1.arg

3- $P(y) \to Q(y)$ $\forall x$ ezabatu y: konst

4- $Q(y) \to R(y)$ $\forall x$ ezabatu y: konst

5- $P(y) \to R(y)$ SH(3,4)

6- $\forall x(Q(x) \to R(x)) \to (P(y) \to R(y))$ BFE frogatu 1.arg egiaztatu

c) 1- $\exists x\, P(x) \to \forall y\,(P(y) \vee Q(y) \to R(y))$

2- $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, R(x)$ /∴ $\exists x\,(P(x) \wedge R(x))$ 1.arg

3- $\neg \exists x\,(P(x) \wedge R(x))$ AEE hipotesia /∴ $\square$ 2.arg

5- $\forall x\, \neg(P(x) \wedge R(x))$ 2. Baliok

~~6- $\neg(P(z) \wedge R(z))$ $\forall x$ ezabatu konst: z~~

~~7- $\neg P(z) \vee \neg R(z)$ DeM(6)~~

8- $\exists x\, P(x) \to P(z) \vee Q(z) \to R(z)$ ~~$\forall x$ ezabatu konst: z~~

9- $\exists x\, P(x)$ KS(2)

10- $P(z) \vee Q(z) \to R(z)$ MP(8, 9)

11- $P(z)$ $\exists x$ ezabatu konst z

12- $\neg R(z) \vee \neg P(z)$ Trukk (7)

13- $\neg R(z)$ SD(11, 12)

14- $\neg(P(z) \vee Q(z))$ MP(10, 13)

15- $\neg P(z) \wedge \neg Q(z)$ DeM(14)

16- $\neg P(z)$ KS(15)

17- $\square$ AEE ~~konprobatu~~ frogatuta, 2.arg

18- $\exists x\,(P(x) \wedge R(x))$ 1.arg

9) $\vdash \exists_x P(x) \vee \forall y(P(y) \to Q(y))$

2- $\forall x (R(x) \to \neg P(x)) \;/\therefore\; \forall x (P(x) \to R(x)) \to \forall y (P(y) \to Q(y))$ 1. Arg

~~3- $\forall x (P(x) \to R(x))$~~ BFE hipotesia $/\therefore \forall y(P(y) \to Q(y))$ 2. arg

$\neg \forall y (P(y) \to Q(y))$ AEE hipotesia $/\therefore \square$ 3. arg

4- $\forall x (\neg R(x) \vee \neg P(x))$ INP (2)

5- $\forall x \neg (R(x) \wedge P(x))$ DeM (4)

6- $\neg \exists x (R(x) \wedge P(x))$ 2. Baliok

~~7- $\forall x (\neg P(x) \vee R(x))$~~

7- $\forall x (\neg R(x) \to \neg P(x))$ trans(3)

8- $\forall x (\neg\neg R(x) \vee \neg P(x))$ INP(7)

9- $\forall x \neg (\neg R(x) \wedge P(x))$ DeM(8)

10- $\neg(\neg R(\cancel{x}) \wedge P(\cancel{x}))$ $\forall x$ ezabatu y: konst

11- $\neg (R(\cancel{x}) \wedge P(\cancel{x})$ $\forall x$ ezabatu y: konst

---

9)

1- $\exists x P(x) \vee \forall y (P(y) \to Q(y))$

2- $\forall x (R(x) \to \neg P(x)) \;/\therefore\; \forall x(P(x) \to R(x)) \to \forall y (P(y) \to Q(y))$

3- $\forall x (P(x) \to R(x))$ BFE ~~sar~~ hipotesia $/\therefore \forall y (P(y) \to Q(y))$

4- $P(\cancel{x}) \to R(\cancel{x})$ $\forall x$ ezabatu konst: ~~x~~

5- $\neg P(y) \vee R(y)$ INP(4)

6- $R(y)$ ~~$\vDash$~~ $\to \neg P(x)$ $\forall x$ ezabatu konst 6 y

7- $\neg R(y) \vee \neg P(x)$

3.2 Dedukzio formala

Frogapena

a)

1- $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$ / $\therefore$ $\forall x[(Q(x) \to R(x)] \to (P(y) \to R(y))]$ Arg 1

2- $\forall x\,(Q(x) \to R(x)$ (BFE) Hipotesia / $\therefore$ $P(y) \to R(y)$ 2 arg

3- $P(y) \to Q(y)$ $\forall x$ Ezabatu (1), y: Kte

4- $Q(y) \to R(y)$ $\forall x$ ezabatu (2), y: Kte

5- $P(y) \to R(y)$ SH(3,4) 2. Arg frogatuta

6- $\forall x\,(Q(x) \to R(x) \to P(y) \to R(y)$ BFE (2-5) 1 Arg frogatuta.

3.2

b)

1- $\exists x P(x) \to \forall y\, Q(y)$ / $\therefore$ $\forall x\,(P(x) \to \forall y\, Q(y))$ 1. Arg

2- $\neg\forall x\,(P(x) \to \forall y\, Q(y))$ AEE Hipot / $\therefore$ $\square$ 2. Arg

3- $\exists x\,\neg(P(x) \to \forall y\, Q(y)$ Baliok 1.

4- $\exists x\,\neg(\neg P(x) \lor \forall y\, Q(y)$ InP (3)

5- $\exists x\,\neg\neg P(x) \land \neg\forall y\, Q_y$ DeM(4)

6- $\exists x\,(P(x) \land \underbrace{\neg\forall x\, Q_y}_{\exists}$ UB (5)

7- $\exists x\; P(x) \land \neg\forall y\, Q(y)$ 6.2 Baliok

8- $\exists x\; P(x)$ KS (2)

9- $\forall y\, Q(y)$ MP(1,8)

10- $\neg\forall y\, Q(y) \land \exists x\, P(x)$ truk (2)

11- $\neg\forall y\, Q(y)$ Ks (10)

12- $\forall y\, Q(y) \land \neg\forall y\, Q(y)$ KK(9,11)

inkonsistentzia, 2.arg frogatu

13- $\forall x (P(x) \to \forall y\, Q(y))$ AEE anciera (2:18)

1. Arg Frogatite.

3.1

a)

1- $\forall x\, A(x) \to L(x)$

2- $\forall x\, (L(x) \wedge D(x) \to I(x))$

3- $A(p)$

4- $D(p)$ / $\therefore I(p)$

5- $\forall x\, (A x$

6- $A(p) \to L(p)$ — $\forall x$ erabato (1) (P ostelee da xretha $A(x) \to L(x)$)

7- $L(p)$ — MP (5,3)

(2)

b) $\forall x (P(x) \to \exists y\, Q(y)) \equiv \exists x\, P(x) \to \exists y\, Q(y)$

$\forall x (P(x) \to \exists y\, Q(y)) \overset{INP}{\underset{Trule}{\equiv}} \forall x\, (\neg P(x) \vee \underbrace{\exists y\, Q(y)}_{J}) \underset{Balio\ 6.1}{\equiv} \forall x \neg P(x) \vee \exists y\, Q y \equiv$

$\underset{Baliok\ 2}{\equiv} \neg \forall x\, P(x) \vee \exists y\, Q(y) \underset{Baliok\ 1}{\equiv} \exists x\, P(x) \vee \exists y\, Q(y)$

d) $\forall x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y)$

$\forall x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)) \underset{Trule}{\equiv} \forall x \exists y\, (Q(y) \wedge \underbrace{P(x)}_{J}) \underset{Baliok\ 6.2}{\equiv} \forall x\, (\exists y\, (Q(y)) \wedge P(x)) \equiv$

$\underset{trule}{\equiv} \forall x\, (P(x) \wedge \exists y\, Q(y)) \underset{Baliok\ 6.1}{\equiv} \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y)$

3.1 Dedukzio formala

b) **Frogapena**

1. $\forall x (\neg M(x,0) \to \neg A(x))$

2- $\forall x \, \neg M(i,x)$ $\quad /\therefore \neg A(i)$

3- $\neg M(i,0) \to \neg A(i)$ $\quad$ $\forall x$ ezabatzearen(1) erregela aplikatu, i=kte

4- $\neg M(i,0)$ $\quad$ $\forall x$ ezabatu (2), 0: kte

5- $\neg A(i)$ $\quad$ MP (3,4)

e) **Frogapena**

1- $\forall x (I(x) \to A(x))$

2- $\exists x (\neg A(x) \wedge P(x)) /\therefore \exists x (\neg I(x) \wedge P(x))$

3- $I(x) \to A(x)$ $\quad$ $\forall x$ ezabatu (1), x askea x aldagaiekiko $I(x) \to A(x)$ formulan.

$\boxed{4}$- $\neg A(x) \wedge P(x)$ $\quad$ $\exists x$ ezabatu (2), x ez ageri premisetan eta ondorioan aske $\boxed{\text{Suposizioa}}$

$\boxed{5}$- $\neg A(x)$ $\quad$ KS (4)

$\boxed{6}$- $\neg I(x)$ $\quad$ MT (3,5)

$\boxed{7}$- $P(x) \wedge \neg A(x)$ $\quad$ trukL (4)

$\boxed{8}$- $P(x)$ $\quad$ KS (7)

$\boxed{9}$- $\neg I(x) \wedge P(x)$ $\quad$ KK (6,8)

$\boxed{10}$- $\exists x (I(x) \wedge P(x))$ $\quad$ $\exists x$ sartu (9), x aske x-rekiko $\exists x (I(x) \wedge P(x))$ formulan

11- $\exists x (\neg I(x) \wedge P(x))$

$\exists x$ ezabatzea amaitu (2, 4-10)

c) Funtzio proposizionala

$D(x)$: ~~do~~ x donostiarra da

$T(x)$: x txelotzen dute

Konstanteak

G : Gorka

T : txilida

$\forall x D(x) \rightarrow \forall x T(x)$

$\exists g \neg T(g) \quad / \therefore \neg D(g)$

d) Funtzio proposizionala

~~L(x): legun bat~~

~~N(x): x norbaiten aita da~~

S(x) : x ~~Seme edo alaba~~ norbaiten

A (x) : x Alaba da. norbaiten

Konstantea

~~E: Edurta~~

L: legun bat

~~$\exists L N(L) \rightarrow$~~

Funtzio ...

$A(x)$: x Aita da

$S(x)$: x Semea da

$L(x)$: x Alaba da

Konstante

Edurta : $\mathcal{E}$

Legun ~~bat~~ : L

Norbait : N

$\exists L\, A(n) \rightarrow \exists n\, S(L) \land L(L)$

$\exists \mathcal{E}\, A(n)$

$\neg S(\mathcal{E}) \quad / \therefore L(\mathcal{E})$

e) Funtzio proposizionalak

Konstanteak

$I(x)$: x informatikariak ~~gogoko~~

$A(x)$: x abestea gogoko

$P(x)$: x Pianoa jotzen du.

$\forall x (I(x) \rightarrow A(x))$

$\exists x (\neg A(x) \land P(x)) \quad / \therefore \exists x (\neg I(x) \land P(x))$

1.2

e) $\underbrace{\exists_x P(x,y)}\wedge_1 \underbrace{Q(z)}$

$\exists_x {}_2 P(x,y) \quad Q(z)$

$P(x,y)$

x lotua da, eta z eta y askeak dira.

3.1 Dedukzio formala

a) Funtzio proposizionala

$A(x)$: x Atleta da

$L(x)$: x Longilea da

$D(x)$: x adimentsua da

$I(x)$: x Ikasleetako buletineko ditu

Konstanteak

P: Pello

1 – $\forall x (A(x) \to L(x))$

2 – $\forall x (L(x) \wedge D(x) \to I(x))$

3 – $A(p)$

4 – $D(p) \quad / \therefore I(p)$

5 – $A(p) \to L(p)$ $\forall$ ezabatu p: konst

6 – $L(p) \wedge D(p) \to I(p)$ $\forall_x$ ezabatu p: konst

7 – $L(p)$ MP (5, 3)

8 – $L(p) \wedge D(p)$ KK (7, 4)

9 – $I(p)$ MP (6, 8)

b) Funtzio proposizionala

$M(x)$: x mirentsi

$A(x)$: x artezale

Konstanteak

O: oteiz.

I: izero

$\neg M(o) \to \neg A(x)$

$\neg M(I) \quad / \therefore \neg A(I)$

c)

$$\underbrace{\forall x\, \exists y\, P(x,y,z)}_{1} \to \underbrace{\exists x\, \neg Q(x,y) \vee R(z)}$$

$\forall x_2 \exists y\, P(x,y,z)$

$\exists y_3\, P(x,y,z)$

$P(x,y,z)$

$\exists x_3\, \neg Q(x,y) \vee_4 R(z)$

$\cancel{\neg Q(x,\ldots}$

$\exists x_5\, \neg Q(x,y)\ \cancel{\vee}\ R(z)$

$\neg_6 Q(x,y)$

$Q(x,y)$

x lotua da

y aslea eta lotua da

z aslea da.

2-

a) $\forall x\, (N(x) \to \neg G(x)) \equiv \neg \exists x\, (N(x) \wedge G(x))$

$\forall x\, (N(x) \to \neg G(x)) \underset{INP}{\equiv} \forall x\, (\neg N(x) \vee \neg G(x)) \underset{DeM}{\equiv} \forall x\, \neg (N(x) \wedge G(x)) \equiv$

$\equiv \neg \exists x\, (N(x) \wedge G(x))$

$\forall x\, \neg (A_x) \equiv \exists x\, (A(x))$

c) $\forall x\, \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)) \equiv \exists y\, \forall x\, (P(x) \wedge Q(y))$

$\forall x\, \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)) \underset{trukatu}{\equiv} \forall x\, \exists y\, (Q(x) \wedge P(x)) \underset{Baliok}{\equiv} \forall x (\exists y\, Q_x \wedge P(x)) \underset{trukatu}{\equiv} \forall x\, (P(x) \wedge \exists y\, Q(y)) \underset{\substack{Baliok\\6.1}}{\equiv}$

1.2 $\equiv \forall x\, P(x) \wedge \exists y\, Q(y) \underset{truk}{\equiv} \exists y\, Q(x) \wedge \forall x\, P(x) \underset{6.2}{\equiv} \exists y (Q(x) \wedge \forall x\, P(x)) \underset{truk}{\equiv} \exists y\, (\forall x\, P(x) \wedge Q(x)) \underset{6.2}{\equiv}$

$\exists x\, A(x) \wedge J \equiv \exists x\, (A(x) \wedge J)$

$\equiv \exists y\, \forall x\, (P(x) \wedge Q(y))$

d) $\underbrace{\exists x\, (\neg P(x,y) \to R(x,z))}_{1} \vee \underbrace{\neg P(x,y)}$

$\exists x_2 (\neg P(x,y) \to R(x,z))$

$\neg P(x,y) \underset{3}{\to} R(x,z)$

$\neg_4 P(x,y)$ $\quad R(x,z)$

$P(x,y)$

$\neg_5 P(x,y)$

$P(x,y)$

x lotua eta aslea da

y eta z asleak dira.

Predikatu Logikoa

<u>Ariketak</u>

<u>1.2</u>

a) $\forall z_1 \exists y_1 (P(z,y) \land \forall z Q(z,x) \to R(z))$

$\exists y_2 (P(z,y) \land \forall z Q(z,x) \to R(z)$

$\underbrace{P(z,y) \land \forall z Q(z,x)} \to_3 \underbrace{R(z)}$

$\underbrace{P(z,y)} \land_4 \underbrace{\forall z Q(z,x)} \qquad R(z)$

$P(z,y)_5 \qquad \forall z_5 Q(z,x)$

$Q(z,x)$

x askea da.

y lotua da.

z lotua da.

b)

$\exists z_1 \forall x_1 (P(z,x) \lor \forall z Q(x,y,z))$

$\forall x_2 P(z,x) \lor \forall z Q(x,y,z$

$(\underbrace{P(z,x)} \lor_2 \underbrace{\forall z Q(x,y,z)})$

$P(z,x) \qquad \forall z_3 Q(x,y,z)$

$Q(x,y,z)$

x lotua da.

y askea da

z lotua da..

Ez dira baliokidetza-logikoak

1. $\forall x\, A[x] \lor \forall x\, B[x] \not\equiv \forall x\, (A[x] \lor B[x])$

2. $\exists x\, A[x] \land \exists x\, B[x] \not\equiv \exists x\, (A[x] \land B[x])$

Ariketak

1.1

Formalizazioa:

$N(x)$: x zenbaki arrunta

$B(x)$: x bikoitia

$I(x)$: x Bakoitia

$M(x)$: X Negatiboa

$Z(x,y)$ x zenbakiak y zatitzen

$A(x,y,z)$ x zenbakia eta z zenbakien biderkadura

a) $\forall x\, (B(x) \rightarrow N(x))$

b) $\forall x\, (N(x) \rightarrow B(x))$

c) $\neg \exists x\, (N(x) \land M(x)) \equiv \forall x\, (N(x) \rightarrow \neg M(x))$

d) $\exists x\, (I(x) \land \forall y\, (B(x) \rightarrow Z(y,x)))$

e) $\forall x\, (N(x) \rightarrow \exists \cancel{x}\, (B(y) \land Z(x,y)))$

f) $\forall x\, (\exists y, \exists z\, (A(x,y,z) \land B(y) \land B(z)) \rightarrow B(x))$

g) $\neg \exists x, \forall y\, (I(x) \land B(x) \rightarrow \neg Z(x,y))$

Predikatu Logikoa

Predikatu logikoan esaldiaren egitura aztertzen da.

Terminoak: Banakoak (pertsonak, zenbakiak...). Hizki xeheak: a, b, c...

Predikatuak: Banakoen ezaugarriak (animalia izatea, mendira joatea,...)

Hizki larriak: P, Q...

Aldagaia: x

Proposizioa: $P(k)$, $P(b)$,

Funtsio proposizionala: Aldagaiez osatutako proposizioak. $P(x)$

Aldagaiak kuantifikatzea: Proposizio orokorrak adierazteko,

Zenbatzaile unibertsala: $\forall$: $\forall x\ P(x)$

Zenbatzaile existentziala: $\exists$: $\exists x\ P(x)$

4 proposizio mota

Baiezko unibertsala, $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

Baiezko partikularra, $\exists (P(x) \wedge Q(x))$

Ezezko unibertsala, $\forall x [P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$

Ezezko partikularra, $\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Zenbatzaileen baliokidetza-logikoak

1- $\neg \forall x\ A[x] \equiv \exists x \neg A[x]$

2- $\forall x \neg A[x] \equiv \neg \exists x\ A[x]$

3- $\forall x\ A[x] \wedge \forall x\ B[x] \equiv \forall x (A[x] \wedge B[x])$

4- $\exists x A[x] \vee \exists x B[x] \equiv \exists x (A[x] \vee B[x])$

5- $\forall x\ A[x] \vee J \equiv \forall x (A[x] \vee J)$

$\exists x\ A[x] \vee J \equiv \exists x (A[x] \vee J$

6- $\forall x\ A[x] \wedge J \equiv \forall x (A[x] \wedge J)$

$\exists x\ A[x] \wedge J \equiv \exists x (A[x] \wedge J)$

3.3

c)

$p \to \neg q$
$p \vee r$
$\neg r \;/\therefore\; q$

p	q	r	$p \to \neg q$	$p \vee r$	$\neg r$	q
E	E	E	F	E	F	E

Beraz, formula baliogabea da.

d)

$\neg p \vee q$
$r \to s$
$q \vee r \;/\therefore\; p \vee s$

p	q	r	s	$\neg p \vee q$	$r \to s$	$q \vee r$	$p \vee s$
F	E	E	E	E	E	E	E

Beraz, formula baliozkoa da.

3.4

b)

1- $\neg b \to (d \leftrightarrow \neg h)$
2- $(d \to e) \to f$
3- $e \wedge a \to \neg b$
4- $\neg f \vee \neg(d \leftrightarrow \neg h)$
5- $c \to (d \to e) \;/\therefore\; \neg c \vee \neg(e \wedge a)$
~~6- $c \to f$~~ SH(5,2)
7- e
~~Konjuntzio simplifikazioa (3)~~
6 - $((d \to e) \to f) \wedge (\neg b \to (d \leftrightarrow \neg h))$ KK(2,1)
7 - $\neg(d \to e) \vee \neg\neg b$ DS(6,4)
8 - $(c \to (d \to e)) \wedge (e \wedge a \to \neg b)$ KK(5,3)
9 - $\neg c \vee \neg(e \wedge a)$ DS(8,7)

3.5

c)
1- $\neg q \wedge s$
2- $s \rightarrow \neg r$
3- $\neg r \rightarrow \neg p \vee q$ $/\therefore \neg p$
4- $\neg s \vee \neg r$ INP(2)
5- $s \wedge \neg q$ trull(1)
6- s KS(5)
7- $\neg r$ MP(2,6)
8- $\neg p \vee q$ MP(3,7)
9- $\neg q$ KS(1)
10- $\neg p$ SD(8,9)

d)
1- $p \rightarrow r$
2- $s \wedge \neg r$
3- $\neg q \wedge s \rightarrow p$ $/\therefore q$
4- $\neg r \wedge s$ trull(2)
5- $\neg r$ KS(4)
6- $\neg p$ ~~SD(1)~~ MT(1,5)
7- $\neg q \rightarrow (s \rightarrow p)$ Esp(3)
8- $r \rightarrow s$ INP(4)
9-

7.- $\neg(\neg q \wedge s)$ MT(3,6)
8.- $\neg\neg q \vee \neg s$ DeM(7)
9.- $q \vee \neg s$ UB(8)
10.- s KS(2)
11.- $\neg s \vee q$ TRUK(9)
12.- $\neg\neg s$ UB(10)
13.- q SD(11,12)

Ordezkapen erregela

A formula bat daukagu A-ren azpiformula, B, baliokide logikoa bada $B' \equiv B$ beste formula bat

3.5

a) 1- $\neg(p \to q)$
2- $r \to q$
3- $p \to s$ /∴ $s \land \neg r$

4 → $\neg(\neg p \lor q)$ INP(1)
5 → $\neg\neg p \land \neg q$ DeM(4)
6 → $p \land \neg q$ UB(5)
7 → p KS(6)
8 → $\neg q$ KS(6) → Trukatu(6) $(\neg q \land p)$ KS(6) → $\neg q$
9 → s MP(3,7)
10 → $\neg r$ MT(2,8)
11 → $s \land \neg r$ KK(9,10)

b) 1- $\neg p \lor q$
2- $r \land s \to p$
3- $\neg q \land s$ /∴ $\neg r$
4 → $\neg q$ KS(3)
5 → $q \lor \neg p$ truk(1)
6 → $\neg p$ SD(4,5)
7 → $\neg(r \land s)$ MT(2,6)
8 → $\neg r \land \neg s$ DeM(7)
9 → $s \land \neg q$ truk(3)
10 - s KS(9)
11 → $\neg s \lor \neg r$ truk(8)
12 → $\neg\neg s$ UB(10)
13 → $\neg r$ SD(11,12)

Baliozkotasunaren froga formala

Premisak egiazkotzat hartuz, haien bidez eta inferentzia-erregelak aplikatuz, ondoriora heltzen bagara ondorioa Baliozkoa izango da.

3.4

a)

1- $h \to (i \to j)$

2- $k \to (i \to j)$

3- $\neg h \wedge \neg k \to \neg l \vee \neg m$

4- $(\neg l \to \neg n) \wedge (\neg m \to \neg o)$

5- $(p \to n) \wedge (q \to o)$

6- $\neg(i \to j)$ $/\therefore \neg p \vee \neg q$

7- $\neg h$ MT(1,6)

8- $\neg k$ MT(2,6)

9- $\neg h \wedge \neg k$ KK(7,8)

10- $\neg l \vee \neg m$ MP(3,9)

11- $\neg n \vee \neg o$ DE(4,10)

12- $\neg p \vee \neg q$ DS(11,5)

c)

1- $(p \to \neg q) \wedge (\neg r \to s)$

2- $(t \to u) \wedge (\neg v \to \neg x)$

3- $(\neg q \to t) \wedge (s \to \neg v)$

4- $u \vee \neg x \to y \wedge z$

5- $p \vee \neg r$ $/\therefore y \wedge z$

6- $\neg q \vee s$ DE(1,5)

7- $t \vee \neg v$ DE(3,6)

8- $u \vee \neg x$ DE(2,7)

9- $y \wedge z$ MP(4,8)

Baldintzazko frogaren erregela

Premisak eta baldintzazkoa izanik, beste argumentu bat osatu, hau frogatu ezkero hasierako ere egiazkoa izango da, Premisa berak dituelako.

3.6

a)

1- $p \wedge (q \vee r) \to q \wedge r$ /∴ $p \to (q \to r)$

2- p Baldintzazko frogaren Erregelaren Hipotesia. /∴ $q \to r$

3- q (BFE) Hipotesia /∴ r

4- $q \vee r$ DB(3)

5- $p \wedge (q \vee r)$ KK(2,4)

6- $q \wedge r$ MP(1,5)

7- $r \wedge q$ trukk(6)

8- r KS(7)

9- $q \to r$ BFE(3-8)

10- $p \to (q \to r)$ BFE(2,9)

Absurdora eramatearen erregela (AEE)

$P_1, \ldots P_n, C$ argumentua baliozkoa bada eta baldin eta soilik baldin $P_1, \ldots P_n, C$ □ kontraesana bada, □ inkontsistentea den formula.

b)

1- a /∴ $b \vee (b \to c)$

2- $\neg(b \vee (b \to c))$ (AEE) Hipotesia /∴ □

3- $\neg(b \wedge \neg(b \to c))$ DeM(2)

4- $\neg b \wedge \neg(\neg b \vee c)$ INP(3)

5- $\neg b \wedge (\neg\neg b \vee \neg c)$ DB(4)

$6 \to \neg b$ KS(5)

$7 \to \neg\neg b \lor \neg\neg c$ DeM (5)

$8 \to \neg\neg b \land \neg c$ ~~KS~~(7)

$9 \to \neg\neg b$ ~~EB~~(KS)(8)

$10 \to b$ UK (9)

$11 \to \boxed{b \land \neg b}$ KK (5,10)

□ , formula inkontsistentea 2. Argumentua frogatuta.

$12 - b \lor (b \to c)$ AEE (2-11) 1. Argumentua frogatuta

c)

$1 - d \lor e \to (f \to g)$

$2 - \neg g \lor h \to d \land f$ /∴ g 1arg

$3 - \neg g$ (AEE) Hipot /∴ □ 2arg

$4 \to \neg g \lor h$ DB (3)

$5 \to d \land f$ MP(2,4)

$6 \to d$ KS (5)

$7 \to d \lor e$ DB(6)

$8 \to f \to g$ MP(1,7)

$9 \to \neg f$ MT(3,8)

$10 \to f \land d$ Trukk (5)

$11 \to f$ KS (10)

$12 \to f \land \neg f$ KK (9,11)

formula inkontsistentea da.

□ Kontraesan 2.Arg frogatuta

$13 \to g$ AEE (3,12) 1. Arg frogatuta

5.6

e)

1- $o \rightarrow (p \rightarrow q)$

2- $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ $/ \therefore o \rightarrow (p \rightarrow r)$

3- o BFE hipotesis $/ \therefore p \rightarrow r$

4- $p \rightarrow q$ MP (1,3)

5- p BFE hipotesis $/ \therefore r$

6- q MP (4,5)

7- $\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$ ~~Tra~~ tranposició (2)

8- $\neg\neg(q \rightarrow r)$ MT (7,5)

9- $q \rightarrow r$ UD (8)

10- r MP (6,9)

11- $p \rightarrow r$ BFE (5-10)

12- $o \rightarrow (p \rightarrow r)$ BFE (3-11)

3.6

d) 1- $s \to \neg r$

2- $(p \lor q) \land (\neg p \lor r)$ /∴ $q \lor \neg s$] 1.arg

3- $\neg\neg r \to \neg s$ trans(1)

4- $r \to \neg s$ UB(3)

5- $(p \lor q) \land (\neg p \lor r)$

6-

AEE - rai hipotesio /∴ $\square$] 2.arg

4- $\neg(q \lor \neg s)$

DeM(4)

5- $\neg q \land \neg\neg s$

UB(5)

6- $\neg q \land s$

trull(6)

7- $s \land \neg q$

KS(7)

8- s

MP(1,8)

9- $\neg r$

10- $(\neg p \lor r) \land (p \lor q)$ trull(2)

KS(10)

11- $\neg p \lor r$

trull(11)

12- $r \lor \neg p$

SD(9,12)

13- $\neg p$

KS(2)

14- $p \lor q$

SD(14,13)

15- q

KS(6)

16- $\neg q$

KK(15,16) $\square$ 2.arg Ccoag.lite

17- $q \land \neg q$

AEE aplikatu(4-18)

18- $q \lor \neg s$

3.3

a) $a \to d$

$d \to c$

a /∴ $d \wedge c$

~~a→d~~	a d c	P1 Premisa $a \to d$	P2 Premisa $a \to c$	P3 a	Ondorioa $d \wedge c$
	E E E	E	E	E	~~F~~ Beti E

b)

$a \to b$

$c \to d$

$b \vee c$ /∴ $a \vee d$

a b c d	$a \to b$	$c \to d$	$b \vee c$	$a \vee d$
F E F F	E	E	E	F

Baliogabea da

3.1 c) d)

3.2 c

3.3. c) d)

Balio Log inferentzia

$\equiv \underbrace{p \wedge q \wedge r \wedge \neg q}_{\text{inkontsistentea}}$

3.2

b) $(p \to q) /\therefore ((p \to \neg r) \to \neg p$

1. Modua

$p \to q \to ((p \to \neg r) \to \neg p)$ tautologia?

$p \to q \to ((p \to \neg r) \to \neg p \underset{\text{BNP}}{\equiv}$

$\equiv \neg(p \to q) \vee (\neg(p \to \neg r) \vee \neg p) \equiv$

DeM

$\equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee ((\neg\neg p \wedge \neg\neg r) \vee \neg p) \equiv$

$\underset{\text{oB}}{\equiv} (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee \neg p \equiv$

Elkor

$\underset{\text{Trukl}}{\equiv} \neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \equiv$

$\underset{\text{Bana}}{\equiv} (\underbrace{\neg p \vee p}_{\text{Taut}}) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge r) \equiv$

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge r) \underset{\text{Truk}}{\overset{\text{Bana}}{\equiv}}$

$\equiv (\neg p \cancel{\wedge} p) \cancel{\wedge} (\neg q \cancel{\wedge} \vee r) \equiv \neg p \vee r \vee \neg q \Rightarrow$ Ez da tautologia bat

$I = \{ \cancel{\neg} p, \cancel{\neg} q, \neg r \}$

Beraz argumentuk ez da baliozkoa.

$\overset{\equiv}{\text{DeM}} (\cancel{\ } p \land \neg q) \lor (\cancel{\neg q \land \neg r \lor} (q \land r) \lor (\neg r \lor \neg p)) \equiv$

LB

$\underset{\text{elkartze}}{\equiv} (p \land \neg q) \lor (q \land r) \lor \neg r \lor \neg p \equiv$

$\underset{\text{Trukatze}}{\equiv} \neg p \lor (p \land \neg q) \lor \neg r \lor (q \land r) \equiv$

$\underset{\text{Banc}}{\equiv} ((\underbrace{\neg p \lor p}_{\text{tautologia}}) \land (\neg p \lor \neg q)) \lor ((\neg r \lor q) \land \underbrace{(\neg r \lor r)}_{\text{Tautol}})) \equiv$

$\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor (\neg r \lor q) \equiv$

$\underset{\text{Elkar}}{\equiv} \neg p \lor \neg q \lor \neg r \lor q \equiv$

tautologia

Formula osoa tautologia da.
Hortaz argumentua baliozkoa da.

(2)
Beste modu batera

Frogatzeko dugu $(p \to q) \land \neg(\neg(q \land r) \to \neg(r \land p)) \equiv$

$\underset{\text{Inp}}{\equiv} \neg(p \cancel{\to} q) \land \neg(\neg\neg(q \land r) \cancel{\to} \neg(r \land p)) \equiv$ LB, DeMorgan, Elkar

$\equiv (\neg p \lor q) \land \neg(q \land r) \cancel{\land} \cancel{\neg} r \land p \equiv$ DeM

$\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor \neg r) \land \cancel{\neg} r \land p \equiv$

$\underset{\text{Banc}}{\equiv} \cancel{\neg} p \land (\neg p \lor q) \land r \land (\neg q \lor \neg r) \equiv$

$\equiv ((\underbrace{p \land \neg p}_{\text{faltsua}}) \lor (p \land q)) \land (r \land \neg q) \lor (\underbrace{r \land \neg r}_{\text{faltsua}}) \equiv$

3.1

a) q formula $p \land q$ formularen ~~egiaz~~ ondorio logikoa da.

Egia taula

p	q	$p \land q$	q
E	E	E	E
E	F	F	F
F	E	F	E
F	F	F	F

$\to \forall I \; V(p \land q, I) = E$

$\Downarrow$

$V(q, I) = E$

b) q formula $p \lor q$ formularen ondorio logikoa da.

p	q	$p \lor q$	q
E	E	E	E
E	F	E	F
F	E	E	E
F	F	F	F

$\to$ q ez da $p \lor q$ formularen ondorio logikoa.

3.2

a)

$p \to q \quad \therefore \neg(q \land r) \to \neg(r \land p)$

Bi modu

① ikusi dezagun $P_1 \to c$ tautologia den

$(p \to q) \to (\neg(q \land r) \to \neg(r \land p))$ tautologia?

(INP)

$\equiv \neg(p \to q) \lor (\neg(q \land r) \to \neg(r \land p)) \equiv$

$\equiv \neg(\neg p \lor q) \lor (\neg\neg(q \land r) \lor \neg(r \land p)) \equiv$

3.1

d)

p formula $p \vee q$ eta q formulen ondorio logikoa da

p	q	$p \vee q$	q	$(p \vee q) \wedge q$
E	E	E	E	E
E	F	E	F	F
F	E	E	E	E
F	F	F	F	F

p formula ez da $p \vee q$ eta q ren ondorio-logikoa.

3.2

c) $(p \wedge q) \to r \;/\therefore\; (p \to (q \to r))$

ikusi dezagun ea tautologia den

$$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)) \underset{IMP}{\equiv} (\neg(p \wedge q) \vee r) \to (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \equiv$$

$$\equiv \neg(\neg(p \wedge q) \vee r) \vee (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \underset{DeM}{\equiv} (\neg\neg(p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \equiv$$

$$\underset{\substack{UB\\DeM}}{\equiv} ((p \vee q) \wedge (\neg r) \vee \neg p) \vee \neg q \vee r \underset{\substack{\cancel{Trat}\\\cancel{Bate}\\\cancel{Tault}}}{\equiv} \cancel{(\neg p \vee q) \wedge \neg r) \vee r} \; (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p) \vee (\neg q \vee r)$$

$$\underset{Trull}{\equiv} \cancel{(\neg p \vee q) \wedge \neg q} \vee \neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \vee \neg r) \underset{\substack{Taut\\Bana}}{\equiv} \neg p \vee \underbrace{(\neg q \wedge q)}_{Faltsu} \vee \underbrace{(\neg r \wedge \neg r)}_{Faltsu} \equiv$$

$$\equiv \neg p \vee \underbrace{(\quad)}_{E} \to \text{Formula hau tautologia bat da}$$

Egia taula bera dute beraz berdintza betetzen da, hau da, baliokideak dira.

2.2

d)

$(p \land q) \lor r \equiv p \land (q \lor r)$

Egia taula

p	q	r	$p \land q$	$(p \land q) \lor r$	$q \lor r$	$p \land (q \lor r)$
E	E	E	E	E	E	E
E	E	F	E	E	E	E
E	F	E	F	E	E	E
E	F	F	F	F	F	F
F	E	E	F	E	E	F
F	E	F	F	F	E	F
F	F	E	F	E	E	F
F	F	F	F	F	F	F

Egia taulak ez dira berdinak beraz ez da betetzen baliokidetasuna.

3.1

c) q formula $p \lor q$ eta $\neg p$ formularen ondorio logikoa da.

Egia taula

p	q	$p \lor q$	$\neg p$	$p \lor q \land \neg p$	q
E	E	E	F	F	E
E	F	E	F	F	F
F	E	E	E	E	E
F	F	F	E	F	F

c)

$\neg p \wedge \neg q \equiv \neg (p \wedge q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$
E	E	F	F	F	E	F
E	F	F	E	F	F	E
F	E	E	F	F	F	E
F	F	E	E	E	F	E

Egic tadell ez dire ~~[illegible]~~ logillali boliallideall.

b) 2.6

$\neg(\neg p \vee \neg(r \vee s)) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s)$

$\neg(\neg p \vee \neg(r \vee s)) \equiv_{DeM} \neg(\neg p \vee (\neg r \wedge \neg s)) \equiv_{DeM} \neg\neg p \wedge \neg(\neg p \wedge \neg s) \equiv$

$\underset{\substack{UB \\ DeM}}{\equiv} p \wedge \neg\neg p \vee \neg\neg s) \underset{UB}{\equiv} p \wedge (r \vee s) \underset{BANA}{\equiv} (p \wedge r) \vee (p \wedge s)$

2.7

a) $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to q \wedge r$

Egia taula

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$q \wedge r$	$p \to q \wedge r$
E	E	E	E	E	E	E	E
E	E	F	E	F	F	F	F
E	F	E	F	E	F	F	F
E	F	F	F	F	F	F	F
F	E	E	E	E	E	E	E
F	E	F	E	E	E	F	E
F	F	E	E	E	E	F	E
F	F	F	E	E	E	F	E

Bi formulen egia taula berdina dute, beraz, logikoki baliokideak dira.

$(p \to q) \wedge (p \to r) \underset{IM}{\equiv} \overbrace{(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)}^{(A \vee B) \wedge (A \vee C)} \underset{BANA}{\equiv} \overbrace{\neg p \vee (q \vee r)}^{\neg A \vee B} \underset{IM}{\equiv} p \to (q \wedge r)$

e)

$$p \land q \to r \equiv \neg(p \land q \land \neg r)$$

$$\left(\cancel{p \land q \to r \underset{INP}{\equiv} (\neg p \land \neg q) \lor r \equiv \neg(p \land q) \lor r \equiv} \right)$$

$$(p \land q) \to r \underset{Esp}{\equiv} p \to (q \to r) \overset{trans}{\underset{INP}{\equiv}} \cancel{p \to (\neg q \to \neg r)}$$

$$\equiv \neg p \to \neg(\neg q \lor r) \equiv \neg p \lor \neg q \lor r \underset{DeM}{\equiv} \neg(p \land q) \lor r \equiv$$

$$\not\equiv$$

$$p \land q \to r \underset{trans}{\equiv} \neg r \to \neg(p \land q) \underset{INP}{\equiv} \neg\neg r \lor \neg(p \land q) \equiv$$

$$\underset{DeM}{\equiv} \neg\neg r \lor \neg p \lor \neg q \underset{Trukl}{\equiv} \neg p \lor \neg q \lor \neg\neg r \underset{DeM}{\equiv} \neg(p \land q \land \neg r)$$

2.7

b) $$(p \to q) \to p \land q \equiv (\neg p \to q) \land (q \to p)$$

$$(p \to q) \to p \land q \underset{INP}{\equiv} \neg(p \to q) \lor (p \land q) \underset{\substack{INP \\ Trukl}}{\equiv} \neg(p \to q) \lor (\cancel{p}\, q \to p) \equiv$$

$$\underset{Trans}{\equiv} \neg(p \to q) \lor (\neg p \to \neg q) \equiv \neg(p \to q) \lor \neg(p \to q) \equiv \neg(p \to q \land p \to q)$$

Egin taula

p	q	$p \to q$	$p \land q$	$p \to q \to p \land q$	$\neg p \to q$	$q \to p$	$A \land B$
E	E	E	E	E	E	E	E
E	F	F	F	E	E	E	E
F	E	E	F	F	E	F	F
F	F	E	F	F	F	E	F

Ariketak MD

2.4

b) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$\exists I$ non $V(G, I) = E$

$$\begin{cases} V(p \wedge q, I) = E \Rightarrow \begin{cases} V(p, I) = E \rightarrow p \\ V(q, I) = E \rightarrow q \end{cases} \\ \text{eta} \\ V(\neg p \vee \neg q, I) = E \Rightarrow \begin{cases} V(\neg p, I) = E \rightarrow \neg p \\ \text{edo} \\ V(\neg q, I) = E \rightarrow q \end{cases} \end{cases}$$

Bi baldintzak ezin direnez bete, formula inkonsistentea izango da.

$\exists I$ non $V(G, I) = F$

$$\begin{cases} V(p \wedge q, I) = F \Rightarrow \begin{cases} V(p, I) = F \Rightarrow \neg p \\ \text{edo} \\ V(q, I) = F \Rightarrow \neg q \end{cases} \\ \text{edo} \\ V(\neg p \vee \neg q) = F \end{cases}$$

Beraz, $I = \{\neg p, \neg q\}$ faltsua da formula, beraz baliogabea da.

2.6

d) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \underset{\text{Elkar}}{\equiv} q \rightarrow (p \rightarrow r)$

Banatzea legeak

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Tautologiak

$$A \wedge A \equiv A \quad A \vee A \equiv A$$

Ukapen bikoitza

$$\neg\neg A \equiv A$$

Demorganen legeak

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

Trasposizioa

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$

Inplikazio materiala

$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$

Baliokidetza materiala

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

Esportazioa

$$(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$$

2.6

a) $\underbrace{(p \wedge q)}_{\text{trukatze}} \vee (q \wedge r) \equiv q \wedge (p \vee r)$

$$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \underset{\text{truk}}{\equiv} \overset{A \wedge B}{(q \wedge p)} \vee \overset{(A \wedge C)}{(q \wedge r)} \overset{\text{Bana}}{\equiv} A \wedge (B \vee C) \underset{\text{Bana}}{\equiv} q \wedge (p \vee r)$$

d) $G = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)$

$\exists I$ non $(G, I) = \mathcal{E}$?

$$\begin{cases} V((\neg p \wedge \neg q), I) = \mathcal{E} \\ \text{edo} \\ V((p \wedge q), I) = \mathcal{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(\neg p, I) = \mathcal{E} \rightarrow \neg p \\ \text{eta} \\ V(\neg q, I) = \mathcal{E} \rightarrow \neg q \end{cases}$$

$I = \{\neg p, \neg q\}$

Interpretazioak formula egiazko egiten du, hortaz formula ez da beti faltsua, formula kontsistentea da.

$\exists$ non $(G, I) = F$?

$$\begin{cases} V((\neg p \wedge \neg q), I) = F \Rightarrow \begin{cases} V(\neg p, I) = F \rightarrow p \\ \text{edo} \\ V(\neg q, I) = F \rightarrow q \end{cases} \\ \text{eta} \\ V((p \wedge q), I) = F \Rightarrow \begin{cases} V(p, I) = F \rightarrow \neg p \\ \text{eta} \\ V(q, I) = F \rightarrow \neg q \end{cases} \end{cases}$$

Ez da existitzen interpretaziorik formula faltsu egiten duenik, beraz formula tautologia da.

<u>Baliokidetza-logikoa</u>

A eta B-ren formulak baliokideak baldin I guztietarako $V(A, I) = V(B, I)$ → egia taula berdinak $A \equiv B$

Elkartze-legeak

$(A \wedge B) \wedge C\} \equiv A \wedge (B \wedge C$

Trukatze legea

$$I_E = \{p, q, r, s\} = \{\neg p, q, r, s\} = \{p, \neg q, r, s\}$$

Formula hau faltso egiten duen interpretazioa: I_F

$$V((p \to r) \to ((q \to s) \to (p \vee q \to r)), I_F) = F \Rightarrow \begin{cases} V(\neg r, I_F) = F \\ \text{edo} \\ V(\neg s, I_F) = F \end{cases} \Rightarrow$$

$$I_F = \{p, q, \neg r, s\} = \{p, q, r, \neg s\} = \{\neg p, \neg q, r, s\}$$

<u>2.4</u>

a) $G: \neg p \to q \wedge (q \to p)$

$\exists I$ non $V(G, I) = E$?

$$\begin{cases} V(\neg p, I) = F \to V(p, I) = E \\ \text{edo} \\ V(q \wedge (q \to p), I) = E \end{cases}$$

$\to$ Nahikoa da interpretazioan p izatea formula egiazkoa izateko.

Adib $= I_1 = \{p, q\}, I_2 = \{p, \neg q\}$

Beraz, formula kontsistentea izango da.

$\exists I$ non $V(G, I) = F$?

$$\begin{cases} V(\neg p, I) = E \to V(p, I) = F \to \neg p \\ \text{eta} \\ V(q \wedge (q \to p), I) = F \Rightarrow \begin{cases} V(q, I) = F \to \neg q \\ \text{edo} \\ V(q \to p, I) = F \Rightarrow \begin{cases} V(q, I) = E \to q \\ \text{eta} \\ V(p, I) = F \to \neg p \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$I = \{\neg p, \neg q\}$$

Beraz, Formula Baliogabea da.

(5)

$$I_E = \{\neg p, q\} = \{p, q\}$$

Formula faltsua egingo duen interpretazio bat: I_F

$$V((p \to q) \cancel{\vee} q, I_F) = F \Rightarrow \begin{cases} V(p \to q, I_F) = F \\ \text{eta} \\ V(q, I_F) = F \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(p, I_F) = E \to p \\ V(q, I_F) = F \to \neg q \end{cases}$$

b)

$$(p \vee \neg q) \wedge p$$

Formula hau egiazko egingo duen interpretazioa: I_E

$$V((p \vee \neg q) \wedge p, I_E) = E \Rightarrow \begin{cases} V(p, I_E) = E \\ \text{eta} \\ V(p \vee \neg q, I_E) = E \end{cases}$$

$$I_E = \{p, q\} = \{p, \neg q\}$$

Formula faltsua egiten duen interpretazioa: I_F

$$V((p \vee \neg q) \wedge p, I_F) = F \Rightarrow \begin{cases} V(p, I_F) = F \to \neg p \\ V(p \vee \neg q, I_F) = F \end{cases}$$

$$I_F = \{\neg p, q\} = \{\neg p, \neg q\}$$

c) $(p \to r) \to ((q \to s) \to (p \vee q \to r))$

Formula egiazkoa egingo duen interpretazioa: I_E

$$V((p \to r) \to ((q \to s) \to (p \vee q \to \cancel{s}))), I_E) = E \Rightarrow \begin{cases} V(r, I_E) = E \\ \text{eta} \\ V(s, I_E = E \end{cases}$$

p	q	r	s	$p \to \neg q$	$r \vee s$	$p \to \neg q \to r \vee s$
E	E	E	E	F	E	E
E	E	E	F	F	E	E
E	E	F	E	F	E	E
E	E	F	F	F	F	E
E	F	E	E	E	E	E
E	F	E	F	E	E	E
E	F	F	E	E	E	E
E	F	F	F	E	F	F
F	E	E	E	E	E	E
F	E	E	F	E	E	E
F	E	F	E	E	E	E
F	E	F	F	E	F	F
F	F	E	E	F	E	E
F	F	E	F	F	E	E
F	F	F	E	F	E	E
F	F	F	F	F	F	E

- <u>Kontsistentea / inkontsistentea</u>
  Formula hau kontsistentea da
- <u>Baliozkoa (tautologia) / Baliogabea</u>
  Formula hau Baliogabea da.

<u>2.3</u>

a) $(p \to q) \vee q$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \vee q$
E	E	E	E
E	F	F	F
F	E	E	E
F	F	E	E

$$V((p \to q) \vee q, I_E) = E \Rightarrow \begin{cases} V(p \to q, I_E) = E \\ \text{edo} \\ V(q, I_E) = E \end{cases}$$

Formula egiazkoa bihurtzen duen interpretazio bat: I_8

(4)

- <u>Kontsistentea / Kontraesana</u>

  Formula kontsistentea da.

- <u>Baliozkoa (tautologia) / Baliogabea</u>

  Formula tautologia da.

b)

$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$\neg p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
E	E	E	E	E
E	F	E	E	E
F	E	E	F	F
F	F	F	E	F

- <u>Kontsistentea / inkontsistentea</u>

  Formula hau kontsistentea da, gutxienez formula bat dagoelako egiazkoa egiten duena.

- <u>Baliozkoa (tautologia) / baliogabea</u>

  Formula hau baliogabea da, zeren eta, faltsu egiten duen gutxienez interpretazio bat dago.

d) $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow r \vee s$

$p \ q \ r \ s$

Arill

2.2

a) Formula: $(p \vee \neg q) \leftrightarrow s$

p	q	s	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \leftrightarrow s$
E	E	E	F	E	E
E	E	F	F	E	F
E	F	E	E	E	E
E	F	F	E	E	F
F	E	E	F	E	E
F	E	F	F	F	E
F	F	E	E	E	E
F	F	F	E	F	F

• Kontsistente / inkontsistente

Formula hau kontsistentea da, gutxienez egiazkoa egiten duen interpretazio bat dagoelako.

• Baliozkoa (tautologia) / Baliogabe

Formula hau Baliogabea da, zeren eta, faltsu egiten duen gutxienez interpretazio bat dagoelako.

c)

Formula: $(p \to q) \to (\neg(q \wedge r) \to \neg(r \wedge p))$

p	q	r	$p \to q$	$q \wedge r$	$\neg(q \wedge r)$	$r \wedge p$	$\neg(r \wedge p)$	$\neg(q \wedge r) \to \neg(r \wedge p)$	osoa
E	E	E	E	E	F	E	F	E	E
E	E	F	E	F	E	F	E	E	E
E	F	E	F	F	E	E	F	F	E
E	F	F	F	F	E	F	E	E	E
F	E	E	E	E	F	F	E	E	E
F	E	F	E	F	E	F	E	E	E
F	F	E	E	F	E	F	E	E	E
F	F	F	E	F	E	F	E	E	E

③ 2.1 Ariketak

$A = p \lor \neg r \rightarrow r \land q$

$I_1 = \{p, q, \neg r\}$ $I_2 = \{\neg p, q, \neg r\}$

I_1, I_2-o guztiak egiak dira

p	q	r	$\neg r$	$p \lor \neg r$	$r \land q$	$p \lor \neg r \rightarrow r \land q$
E	E	F	E	E	F	F
F	E	F	E	E	F	F

$B = \neg p \lor q \rightarrow (\neg(p \land r) \rightarrow \neg p)$

$I_1 = \{p, q, \neg r\}$ $I_2 = \{\neg p, q, \neg r\}$

I_1 ez zen izango egiazkoa, baina I_2 bai

p	q	r	$\neg p \lor q$	$\neg(p \land r)$	$\neg(p \land r) \rightarrow \neg p$	formula osoa
E	E	F	E	F	F	F
F	E	F	E	E	E	E

Orduan, $V(B, I_2)$ formula egiazkoa izango da b

1.2 Ariketak Proposizio logikoak

b) $\neg p \wedge q \leftrightarrow_1 (r \wedge \neg\neg(p \vee q) \rightarrow s)$

$\dfrac{\neg p \wedge_2 q}{1}$ $\dfrac{(r \wedge \neg\neg(p \vee q) \rightarrow_4 s)}{1}$

$\dfrac{\neg_3 p}{2}$ $\dfrac{q}{2}$ $\dfrac{r \wedge_5 \neg\neg(p \vee q)}{4}$ $s/4$

$p/3$ $\dfrac{r}{5}$ $\dfrac{\neg_6\neg(p \vee q)}{5}$

$\dfrac{\neg_7(p \vee q)}{6}$

$\dfrac{p \vee q}{7}$

$\dfrac{p}{8}$ $\dfrac{q}{8}$

$p/3$, $p/8$, $q/8$, $r/5$, $s/4$

c)

$p_1 \wedge (p \vee q \rightarrow (r \rightarrow \neg p))$

$p/1$ $\dfrac{p \vee q_2 \rightarrow (r \rightarrow \neg p)}{1}$

$\dfrac{p \vee q}{2}$ $\dfrac{(r \rightarrow \neg p)}{2}$

$\dfrac{p}{3}$ $\dfrac{q}{3}$ $\dfrac{r}{4}$ $\dfrac{\neg p}{4}$

$p/1$, $p/3$, $p/5$, $q/3$, $r/4$ $p/5$

Modus tollens (MT) $\dfrac{\begin{array}{l}A \rightarrow B \\ \neg B\end{array}}{\neg A}$

Silogismo hipotetikoa (SH) $\dfrac{\begin{array}{l}A \rightarrow B \\ B \rightarrow C\end{array}}{A \rightarrow C}$

Silogismo Disjuntiboa (SD) $\dfrac{\begin{array}{l}A \vee B \\ \neg A\end{array}}{B}$

Dilema Eraikitzailea (DE) $\dfrac{\begin{array}{l}(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \\ A \vee C\end{array}}{B \vee D}$

Dilema ~~Eraikitzailea~~ Suntsitzailea (DS) $\dfrac{\begin{array}{l}(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \\ \neg B \vee \neg D\end{array}}{\neg A \vee \neg C}$

Konjuntzioaren sinplifikazioa

$\dfrac{A \wedge B}{A}$

Konjuntzioaren Konbinazioa (KK)

$\dfrac{\begin{array}{l}A \\ B\end{array}}{A \wedge B}$

Disjuntzioaren Batuketa (DB) $\dfrac{A}{A \vee B}$

1. $\neg \forall x\, A(x) \equiv \exists x\, \neg A(x)$
2. $\forall x\, \neg A(x) \equiv \neg \exists x\, A(x)$
3. $\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \equiv \forall x\, (A(x) \wedge B(x))$
4. $\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \equiv \exists x\, (A(x) \vee B(x))$

5. 5.1 $\forall x\, A(x) \vee J \equiv \forall x\, (A(x) \vee J)$

   5.2 $\exists x\, A(x) \vee J \equiv \exists x\, (A(x) \vee J)$

6. 6.1 $\forall x\, A(x) \wedge J \equiv \forall x\, (A(x) \wedge J)$

   6.2 $\exists x\, A(x) \wedge J \equiv \exists x\, (A(x) \wedge J)$

Elkartze legeak (Elkar)

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

trukatze-legeak (truk)

$A \wedge B \equiv B \wedge A \qquad A \vee B \equiv B \vee A$

Banatze legea (Bana)

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Tautologiak (taut)

$A \wedge A \equiv A \quad A \vee A \equiv A$

Ukapen Bikoitza (UB)

$\neg\neg A \equiv A$

De Morganen legea (DeM)

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Transposizioa (trans)

$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

Inplikazio materiala (INP)

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Baliokidetza materiala (Balio)

$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (B \wedge A)$

Esportazioa (ESP)

$(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$