# 1. Erlazio Bitarrak

## Definizioa

A multzoa izanik, Aren gaineko erlazio bitarra $A \times A$-ren parte den edozein $R$ azpimultzoa da, $R \subseteq A \times A$

Baldin $(a,b) \in R$, a eta b erlazionatuta daude.

Biderkadura kartesiarra:

A eta B-ren arteko biderkadura kartesiarra $(x,y)$, bikote ordenatuen multzoa da, non

$$A \times B := \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

$(a,b) \neq (b,a)$ , $\{a,b\} = \{b,a\}$

## Erlazioen propietateak

- $R$ bihurkorra: $(\forall x \in A) \quad (x,x) \in R$
- $R$ simetrikoa
  $(\forall x,y \in A) \quad (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$
- $R$ antisimetrikoa
  $(\forall x,y \in A) \quad (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$
- $R$ iragankorra
  $(\forall x,y,z \in A) \quad (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

## Ordena Erlazioa

Ordena erlazioa da A multzoaren gaineko R erlazioa, baldin, bihurkorra, antisimetrikoa eta iragankorra bada.

- R ordena erlazio totala dela esango dugu baldin,

$$\boxed{(\forall x,y \in A) \quad (x,y) \in R \vee (y,x) \in R}$$

- Bestela, R ordena erlazio partziala dela esango dugu.

## Baliokidetasun erlazioak

A multzoaren gaineko R erlazioa emanik, Baliokidetasun erlazioa izango da Bihurkorra, simetrikoa eta Iragankorra bada.

A multzoaren gaineko R baliokidetasun erlazioa izanik eta, $a \in A$ izanda, aren Baliokidetasun klasea, azpimultzo hau da

$$[a] := \{x \in A : (x,a) \in R\}$$

teorema:

A-ko R baliokidetasun erlazioa,

1. $(\forall x \in A) \quad x \in [x]$
2. $(\forall x, y \in A) \quad xRy \iff [x] = [y]$
3. $(\forall x, y \in A) \quad [x] \neq [x] \Rightarrow [x] \cap [x] = \emptyset$
4. $\bigcup_{x \in A} [x] = A$

Bildura

A multzoko R baliokidetasun erlazio batek sortutako baliokidetasun klase guztien bildurak A-ren partizio bat osatzen dute.

$$A/R = \{[x] : x \in A\}$$

[a]-ren ordezkaria: [a]-ko edozein elementu.

## Multzo baten partizioa

A multzoaren partizioa: A-ren azpimultzo ez-hutsen familia bat da, azpimultzo horiek haien artean disjuntuak dire eta guztien bildura A da.

$\boxed{P = \{A_i : i \in I\}}$ (I: indize multzoa)

$(\forall i \in I)$ $\emptyset \neq A_i \subseteq A$ azpimultzo ez-hutsak.

$(\forall i,j \in I)$ $A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

$\bigcup_{i \in I} A_i = A$. ($A_i$: Partizioaren klaseak)

## Modulu finituko osoko<u></u>ak

$n \in \mathbb{Z}$ eta $n \geq 1$ izanik, $a, b \in \mathbb{Z}$ osoko kongruenteak izango dira.

$a \equiv b \pmod{n}$, baldin $n \mid a-b$

$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} / a = b + kn}$

$n$ osokoak $(a-b)$ zatitzen du.

Teorema:

$n \in \mathbb{Z}$ eta $n \geq 1$. $n$ modulurako kongruentzia $\mathbb{Z}$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa izango da.

Osokoen partizioa: $\mathbb{Z}_n = \{[x] : x \in \mathbb{Z}\}$

$n$ modulurako kongruentziak sortutako klaseak kalkulatzeko: $x \in \mathbb{Z}$, $x$ osokoa $n \in \mathbb{Z}$-rekin zatituz, $x = qn + r$, $[x]$ klasearen ordezkari bat lortzen da: $r$ hondarra $0 \leq r < n$, $x \equiv r \pmod{n}$

$$\boxed{\begin{aligned}[x] = [r] &= \{r + kn : k \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{\dots, r-2n, r-n, r, r+n, r+2n, \dots\} = \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : r \text{ izanik } y \text{ eta } n \text{ arteko zatiketaren hondarra}\}\end{aligned}}$$

n klase ditugu, hondar posibleak adina. n moduluko kongruentziari dagokion $\mathbb{Z}$-ren partizioa:

$$\boxed{\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}}$$

## *Funtzioen konposaketa. Propietateak*

Funtzioen konposaketa, oro har, ez da trukakorra. Elkarkorra bada. Funtzio konposaketaren propietateak:

1. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ eta $h : C \longrightarrow D$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

2. $f : A \longrightarrow B$ funtzioa emanik,

$$f \circ id_A = f \qquad id_B \circ f = f$$

3. Izan bedi $f : A \longrightarrow B$ funtzio bijektiboa,

$$f^{-1} \circ f = id_A \qquad f \circ f^{-1} = id_B$$



## *Funtzioen konposaketa. Propietateak*

4. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$,

$$f, g \text{ injektiboak} \implies g \circ f \text{ injektiboa}$$

5. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$,

$$f, g \text{ suprajektiboak} \implies g \circ f \text{ suprajektiboa}$$

6. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$,

$$f, g \text{ bijektiboak} \implies g \circ f \text{ bijektiboa}$$

7. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$ bijektiboak (ondorioz $g \circ f$ bijektiboa)

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Kalkulus

$1 \in \mathbb{Z}_5^* \Rightarrow \exists\, 1^{-1} \bmod 5$, Hav des bate behar de $(1 \cdot 1^{-1}) \bmod 5 = 1$

Eukli desen algoritmoa

$1 \,\underline{|\, 5}$ ; $\boxed{1}\ 0$ $\Rightarrow 1 = 5 \cdot 0 + 1 \Rightarrow 1 = 1 - 5 \cdot 0$

$\Rightarrow zkh(1,5) = 1 = x\,1 + y\,5$, $x = \boxed{1}$, $y = 0$

$1^{-1} \bmod 5 = 1$

$\Rightarrow 2^{-1} \bmod 5 = 3$

$2 \in \mathbb{Z}_5^* \Rightarrow \exists\, 2^{-1} \bmod 5$, betetzo de $(2 \cdot 2^{-1}) \bmod 5 = 1$

$2 \,\underline{|\, 5}$ ; $2\ 0$ $\Rightarrow 2 = 5 \cdot 0 + 2 \Rightarrow 2 = 2 - 5 \cdot 0$

$5 \,\underline{|\, 2}$ ; $\boxed{1}\ 2$ $\Rightarrow 5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - (2 - \cancel{5 \cdot 0}) \cdot 2 =$

$2 \,\underline{|\, 1}$ ; $\boxed{0}\ 2$ $\quad 1 = 5 \boxed{-2} \cdot 2$

$x = 2^{-1} \bmod 5 = \boxed{-2}$

negatiboa

$-2 + 5 = \boxed{3}$

(4)

15:00-ak dira.

24 moduluko kongruentzia ⇒ $\mathbb{Z}_{24}$ multzoan, lanean.

$\mathbb{Z}_{24} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 23\}$

15 orduan kokatu dugu bidaia

~~15~~ $356 + 15 \mod 24$

$((356 \mod 24) + (15 \mod 24)) \mod 24$

$356 \,|\, 24$ ... $14$

$371 \,|\, 24$
$131$ $\boxed{15}$ → 15 egun
$\boxed{11}$ → 11 ordu

(5) Alderantzizko modularra

$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\mathbb{Z}_5^* = ?$ → Alderantzizkoa badutenak $\mathbb{Z}_5$-eko elementuak daude.

$\phi(5) = ?$ Teoremak dioenez, $a^{-1}$ modn-en existitzeko $zkh(a, n) = 1$ izan behar da, hau da, lehen erlatiboak izan behar dute

$0 \in \mathbb{Z}_5 \to zkh(0, 5) = 5 \neq 1 \nexists\, 0^{-1} \mod 5$

$1 \in \mathbb{Z}_5 \to zkh(1, 5) = 1 = 1 \quad 1^{-1} \mod 5$

$2 \in \mathbb{Z}_5 \to zkh(2, 5) = 1 \Rightarrow 2^{-1} \mod 5$

$3 \in \mathbb{Z}_5 \to zkh(3, 5) = 1 \Rightarrow 3^{-1} \mod 5$

$4 \in \mathbb{Z}_5 \to zkh(4, 5) = 1 \Rightarrow 4^{-1} \mod 5$

$\mathbb{Z}_5^* = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\phi(5) = 4 = n-1 \quad n = 5$

5 mod. Rango

## n modulo kongruentzia

$n \in \mathbb{Z}$ $n \geq 1$ $a, b \in \mathbb{Z}$ kongruenteak modulo $n$. $a \equiv b \mod n$

$n \mid \underset{a-b}{\cancel{b-a}}$ $\exists k \in \mathbb{Z} / a = b + kn$, beraz, $a$-k $n$-ren multiploa

$a$ eta $b$-k hondar bera $n$ ez zatitzean

## Zatiketa euklidestarra

$a, b \in \mathbb{Z}$ $b > 0$ $\exists! q \in \mathbb{Z}$ eta $\exists! r \in \mathbb{Z}$ non $\cancel{a = b + kn}$
$a = qb + r$

$r \Rightarrow 0 \leq r < b$

$a = r + qn$, $0 \leq r < n$ $a \equiv r \mod n$

$n$ modulo hondarren multzoa: $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

# *Erlazioak eta funtzioak*

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Titulazioa: Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Informatika fakultatea
Donostia



## *ERLAZIOAK ETA FUNTZIOAK*





## *1. Erlazio bitarrak*

### *1.1. Definizioak*

*Definizioa (Erlazio bitarra)*

*A multzoa emanik, A-ren gaineko erlazio bitarra $A \times A$-ko parte den edozein $\mathcal{R}$ azpimultzo da, hau da, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.*

*Baldin $(a,b) \in \mathcal{R}$: a elementua b-rekin erlazionatuta dagoela esango dugu, $a\mathcal{R}b$.*

*Definizioa (Biderkadura kartesiarra)*

*A eta B multzoen biderkadura kartesiarra $(x,y)$ bikote ordenatuen multzoa da, non*

$$A \times B := \{(x,y) \ : \ x \in A, \ y \in B\}$$

*Ez nahastu:* $(a,b) \neq (b,a), \quad \{a,b\} = \{b,a\}$



## *Erlazioen propietateak*

$A$ multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ erlazioa emanik,

- $\mathcal{R}$ bihurkorra: $(\forall x \in A) \quad (x,x) \in \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}$ simetrikoa:

$$(\forall x, y \in A) \quad (x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$$

- $\mathcal{R}$ antisimetrikoa:

$$(\forall x, y \in A) \quad (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$$

- $\mathcal{R}$ iragankorra:

$$(\forall x, y, z \in A) \quad (x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$$

## 1.2 Ordena erlazioak

*Definizioa (Ordena erlazioa)*
*A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ erlazioa ordena erlazioa da baldin bihurkorra, antisimetrikoa eta iragankorra bada.*

*A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ ordena erlazioa emanik,*

- *$\mathcal{R}$ ordena erlazio totala dela esango dugu baldin:*

$$(\forall x, y \in A) \qquad (x,y) \in \mathcal{R} \ \vee \ (y,x) \in \mathcal{R}$$

- *Bestela, $\mathcal{R}$ ordena erlazio partziala dela esango dugu.*



## 1.3. Baliokidetasun erlazioak

*Definizioa (Baliokidetasun erlazioa)*
*A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ erlazioa emanik, $\mathcal{R}$ baliokidetasun erlazioa da baldin bihurkorra, simetrikoa eta iragankorra bada.*

*Izan bitez A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ baliokidetasun erlazioa eta $a \in A$ elementua. a-ren baliokidetasun klasea honako azpimultzoa da:*

$$[a] := \{x \in A \ : \ (x,a) \in \mathcal{R}\}$$



## Baliokidetasun erlazioak

*Teorema*
*Izan bedi A-ko $\mathcal{R}$ baliokidetasun erlazioa,*

1. $(\forall x \in A) \quad x \in [x]$
2. $(\forall x, y \in A) \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [x] = [y]$
3. $(\forall x, y \in A) \quad [x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$
4. $\bigcup_{x \in A}[x] = A$ → Bildura

A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ baliokidetasun erlazio batek sortutako baliokidetasun klase guztien bildumak A-ren partizio bat osatzen dute; A-ren zatidura multzoa.

$$A/\mathcal{R} = \{[x] \ : \ x \in A\}$$

$[a]$-ren ordezkaria: $[a]$-ko edozein elementu.



## Multzo baten partizioa

A multzoaren partizioa: A-ren azpimultzo ez-hutsen familia bat da, non azpimultzo hauek elkarren artean disjuntuak diren eta guztien bildura A den.

$$\mathcal{P} = \{A_i \ : \ i \in I\} \qquad (I : \text{indize multzoa})$$

- $(\forall i \in I) \quad \emptyset \neq A_i \subseteq A$ azpimultzo ez-hutsak.
- $(\forall i, j \in I) \quad A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

$A_i$: partizioaren klaseak.

## 1.4. *Modulu finituko osokoak. n moduluko kongruentzia*

Izan bedi $n \in \mathbb{Z}$ osokoa, $n > 1$ izanik. $a, b \in \mathbb{Z}$ osokoak kongruenteak modulu $n$ direla esango dugu, $a \equiv b \pmod{n}$, baldin $n \mid a - b$, hau da,

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad / \quad a = b + kn.$$

$n$ osokoak $(a - b)$ zatitzen duela esaten da.

*Teorema*
*Izan bedi $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. $n$ moduluko kongruentzia $\mathbb{Z}$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa da.*

Osokoen partizioa: $\mathbb{Z}_n = \{[x] \ : \ x \in \mathbb{Z}\}$



$n$ moduluko kongruentziak sortutako klaseak kalkulatzeko: $x \in \mathbb{Z}$ izanik, $x$ osokoa $n \in \mathbb{Z}$-rekin zatituz, $x = qn + r$, $[x]$ klasearen ordezkari bat lortzen da: $r$ hondarra, $0 \leq r < n$. Horrela, $x \equiv r \pmod{n}$.

$$[x] = [r] = \{r + kn \ : \ k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \{\ldots, r - 2n, r - n, r, r + n, r + 2n, \ldots\} =$$

$$= \{y \in \mathbb{Z} : r \text{ izanik } y \text{ eta } n \text{ arteko zatiketaren hond.}\}$$

$n$ klase ditugu, hondar posibleak adina. $n$ moduluko kongruentziari dagokion $\mathbb{Z}$-ren partizioa:

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$$



## 2. *Funtzioak*

### 2.1. *Definizioak*

A $\xrightarrow{f}$ B

ezinda egon funtziorik A-n b-n elementurik ez duela

*Definizioa (Funtzioa)*
*A eta B multzoak emanik, A-tik B-rako f funtzioa edo aplikazioa A-ko elementu bakoitzari B-ko elementu bat, eta bakarra, elkartzen dion legea da.*

$$f : A \longrightarrow B \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

$f$ funtzioaren iturburu multzoa: $A$, helburu multzoa: $B$.
Baldin $a \in A$ elementuari $f$ funtzioak $b \in B$ elementua elkartzen badio: $a$-ren irudia $b$ da eta $a$ elementua $b$-ren aurreirudi bat. $(f(a) = b \quad , \quad a \longmapsto b)$.



### *Funtzioak*

$f$ eta $g$ bi funtzio berdinak dira $(f = g)$ baldin,

1. $A$ iturburu multzo berbera badute.
2. $B$ helburu multzo berbera badute.
3. $(\forall x \in A) \quad f(x) = g(x)$.

$A$ multzoa emanik, $A$ multzoaren gaineko identitate funtzioa: $id_A$, $\mathbf{1}_A$

$$id_A : A \longrightarrow A$$

funtzioa da non $id_A(x) = x$ betetzen den $\forall x \in A$.

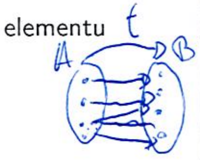
## 2.2. Azpimultzoen irudi eta aurreirudiak

- Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $A_1 \subseteq A$ azpimultzoa. $f$-ren bidezko $A_1$-en irudia, $A_1$-eko elementuen $f$-ren bidezko irudiek osatzen duten multzoa da. $f(A_1) := \{f(x) \ : \ x \in A_1\}$
  $f(A_1) \subseteq B$. Akordioa: $f(\emptyset) := \emptyset$.
- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa izanik, $f$-ren irudi multzoa, $\mathrm{Im} f := f(A)$, honela definitzen da. $\mathrm{Im} f := \{f(x) \ : \ x \in A\}$
- Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $B_1 \subseteq B$ azpimultzoa. $B_1$-en $f$ funtzioaren bidezko aurreirudia, honela definitzen da: irudia $B_1$ multzoan duten $A$-ko elementuek osatutako multzoa.
  $f^{\leftarrow}(B_1) := \{x \ : \ x \in A \quad \text{eta} \quad f(x) \in B_1\}$
  $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq A$. Akordioa: $f^{\leftarrow}(\emptyset) := \emptyset$.

13

## 2.3. Funtzio-motak

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa suprajektiboa da baldin $B$-ko elementu orok aurreirudirik badu ($\mathrm{Im} f = B$).




$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad / \quad f(x) = y$$

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa injektiboa da baldin $B$-ko elementu bakoitza gehienez behin agertzen bada $A$-ko elementu baten irudi moduan, hau da, ↳ elementu desberdinek irudi desberdina izan behar dute.

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

beste era batera esanda,

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa bijektiboa da baldin injektiboa eta suprajektiboa bada.

14

Ezin da egon elementurik A-n B-n irudirik gabe, eta B-ko elementuek gutxienez gezi bat izan behar dute, bakarra.

## Funtzio-motak, 2.4. Alderantzizko funtzioa

*Teorema*
*Izan bedi $f : A \longrightarrow B$ funtzioa, $A$ eta $B$ multzo finituak izanik eta $|A| = |B|$, $\quad f \quad$ suprajektiboa $\iff$ $f \quad$ injektiboa*

elementu kopuru bera

*Definizioa (Alderantzizko funtzioa)*
*Izan bedi $f : A \longrightarrow B$ funtzio bijektiboa,*
*$\forall y \in B \quad \exists | x \in A \quad / \quad f(x) = y$.*
*$f$-ren alderantzizko funtzioa honela definitzen da.*

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

$$y \longrightarrow x$$

*$f$ suprajektiboa denez, $\exists x$ eta injektiboa ere badenez, $x$ bakarra da. Hortaz, $f^{-1}$ funtzioa da.*
$f^{-1}$ funtzioa ere bijektiboa da, eta $(f^{-1})^{-1} = f$.

15

## 2.5. Funtzioen konposaketa

*Definizioa (Funtzioen konposaketa)*
*Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$ funtzioak. $f$ eta $g$-ren funtzio konposatua honela definitzen da:*

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

*non* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A$ *izanik.*

$$\begin{array}{ccccccc} g \circ f : & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

16

## Grafoak Ariketak

### 1.2

$G = (V, \mathcal{E})$

$|V| = v$

$|\mathcal{E}| = e$

Frogatuko dugu $2e \leq v^2 - v$ betetzen dela.

~~$2e \leq v^2 - v \Rightarrow 2e \leq ...$~~

Teorema

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2e$$

### 1.4

$G = (V, \mathcal{E})$

$|V| = ? = n$

$|\mathcal{E}| = 19 = m$

Gutxienez, 4 erregularra

$\boxed{\text{Teorema}}$

$$\sum_{n \in V} d(n) = 2 \cdot m \Rightarrow 4n = 38 \Rightarrow \boxed{n = 9'5} \rightarrow \text{ezin da izan}$$

Beraz, $4(n-1) + 1 \cdot 6 = 38 \Rightarrow 4n - 4 + 6 = 38 \Rightarrow 4n = 36 \Rightarrow \boxed{n = 9}$

9 erpineko grafoa izan behar da gutxienez.

1.7

Frogatuko dugu Grafo 3-erregular orok erpin kopuru bikoitia duela.

$G=(V,E)$

$|V| = v$

$|E| = e$

teorema

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2e \Rightarrow 3\cdot v = 2e$$

~~Beti~~ ertz kopurua aldatuz;

~~$e=1 \Rightarrow v=\frac{2}{3}$ ez du balio~~

~~$e=3 \Rightarrow v = \frac{2\cdot 3}{3} = 2$~~

~~$e=6 \Rightarrow v = \frac{2\cdot 6}{3} =$~~

~~$e=$~~

$e=3 \Rightarrow v = \frac{2\cdot e}{3} \Rightarrow v = \frac{2\cdot 3}{3} = 2$

$e=4 \Rightarrow v = \frac{2\cdot 4}{3} \Rightarrow v = \cancel{2}$

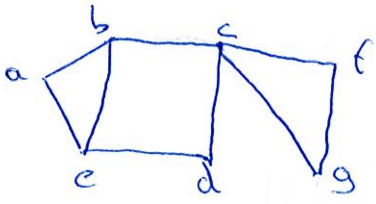
~~$e=5$~~

$e=6 \Rightarrow v = \frac{2\cdot 6\cdot 3}{3} = 6$

$e=9 \Rightarrow v = 12$

Beraz, betetzen da 3-erregularra den Grafo orok erpin kopurua bikoitia duela, zeren eta, ~~3n~~ erpin kopurua kalkulatzeko $\frac{2\cdot e}{3}$ egin behar da eta.

1.10




a) b tik d-ra, ez ukitea

~~b, a, e, d, b, e, d, b, c, d.~~

b) a b,

## Grafoak Ariketak

13 Grafo/Multigrafo baten erpin kopurua?

a)

9 ertz, erpin guztiak 3 gradukoak

$|E| = m = 9$

$|V| = ? = n$

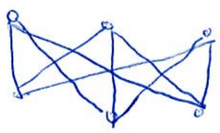
Teorema aplikatuko dugu: $\sum_{x \in V} d(x) = 2m$

$\underbrace{3+3+3 \dots +3}_{3n} = 2m$

$3n = 2m \Rightarrow 3n = 2 \cdot 9 \Rightarrow \boxed{n = 6}$

Grafo 3 erregularra

$\downarrow$



b)

G erregularra, m = 15 ertz

$G = (V, E)$

$|V| = n = ?$ $\quad \forall x_1, x_2 \in V \quad d(x_1) = d(x_2)$

$|E| = m = 15$ $\quad$ Teorema

$\sum_{x \in V} d(x) = 2m \Rightarrow n \cdot d(x) = 2m \Rightarrow n \cdot d(x) = 30$

Aukerak

$d(x) = 1 \rightarrow$

$d(x) = 2 \rightarrow$

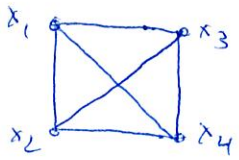
$\vdots$

## Grafo Osotua

$V=\{x_1, \dots, x_n\}$ erpin multzoak izanik

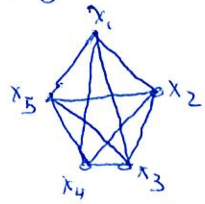
V-ren gaineko grafo osotua ($K_n$): erpinen arteko ertz guztiak dituen begizta gabeko grafo ez zuzendua, hau da,

$\forall x, y \in V \quad x \neq y \Rightarrow \{x,y\}$ ertza existitzen da.



$K_4$ Grafo Osotua

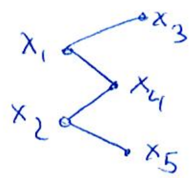
$K_5$ Grafo osotua



## Gatibiko grafoa

$G=(V,\mathcal{E})$ grafo ez zuzendu, begizta gabe non

$\exists V_1, V_2 \,/\, V_1 \cup V_2 = V, \; V_1 \cap V_2 = \emptyset$



$\mathcal{E} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_2, x_5\}\}$

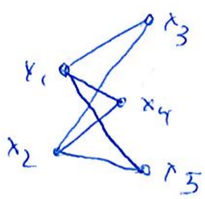
$V_1 = \{x_1, x_2\}$

$V_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$

$V_1 \cup V_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

### Gatibiko grafo Osotua:



$K_{2,3}$

# Grafoak Ariketak

1.3

b) Grafo erregularra 15 ertz. $\rightsquigarrow G(V,E)$

$\forall v_1, v_2 \in V \quad d(v_1) = d(v_2)$

$|V| = n$

$|E| = m = 15$ ertz

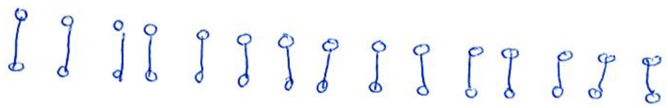
teorema: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$

$n \cdot d(v) = 2m = 2 \cdot 15 = 30$

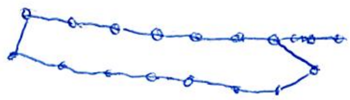
$n \cdot d(v) = 30$

Aukerak

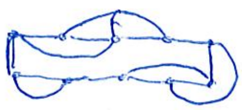
$d(v) = 1 \rightarrow n \cdot 1 = 30 \Rightarrow \boxed{n = 30}$



$d(v) = 2 \rightsquigarrow \boxed{n = 15}$

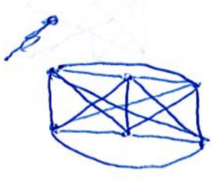


$d(v) = 3 \rightsquigarrow 3n = 30 \Rightarrow \boxed{n = 10}$

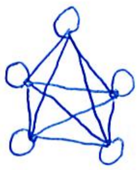


$d(v) = 4 \rightarrow 4n = 30 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$

$d(v) = 5 \rightsquigarrow 5n = 30 \Rightarrow \boxed{n = 6}$



$d(v) = 6 \Rightarrow 6n = 30 \Rightarrow \boxed{n = 5}$

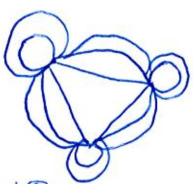


$d(v) = 7 \Rightarrow 7n = 30 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$

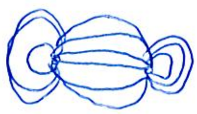
$d(v) = 8 \Rightarrow 8n = 30 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$

$d(v) = 9 \Rightarrow 9n = 30 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$

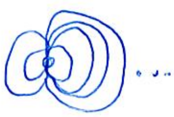
$d(v) = 10 \Rightarrow 10n = 30 \Rightarrow n = 3$



$d(v) = 15 \Rightarrow 15n = 30 \Rightarrow n = 2$



$d(v) = 30 \Rightarrow 30n = 30 \Rightarrow \boxed{n = 1}$



c)

10 ertz, 2 erpin 4 gradukoak, gainerakoak 3 gradukoak

Teorema: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$

$G(V, E)$

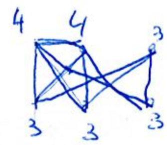
$|E| = m = 10$

$n \cdot d(v) = 20$

$|V| = n = ? \Rightarrow$ Erpin

$\exists v_1, v_2 \in V \quad d(v_1) = d(v_2) = 4$

$\forall v \in V, v \neq v_1, v \neq v_2, d(v) = 3$

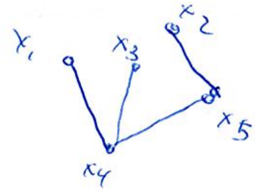



$2 \cdot 4 + V' \cdot 3 = 2m$

$V' \cdot 3 = 12 \Rightarrow \boxed{V' = 4}$ 3 graduko erpinak. Guztira 6 erpin

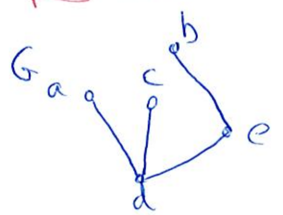
## Albokotasun Matrizea

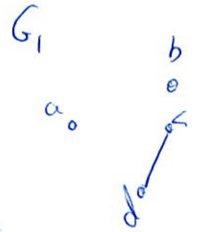
$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
\hline
x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
x_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\to d(x_1)=1 \\
d(x_2)=1 \\
d(x_3)=1 \\
d(x_4)=3 \\
d(x_5)=2
\end{array}$$

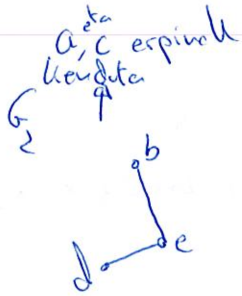


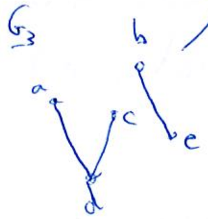

Grafoa ez zuzendua denez ea Simetrikoa izango da.

## Azpigrafoak



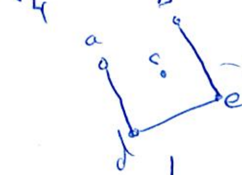




ed ertza kentzetik sortua.

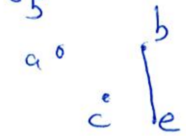
→ Azpigrafo sortzailea da.

Erpin guztiak badaude azpigrafo sortzailea izango da.




→ Azpigrafo sortzailea

{c,d} ertza kentzetik sortua.




→ d erpina kendute sortu da.

1.5

$G=(V,E)$, 3 - erregularra $\Rightarrow \forall_{x\in V}\ d(x)=3$

$|E| = 2|V| - 6 \Rightarrow m = 2n-6$

$|V| = ?$

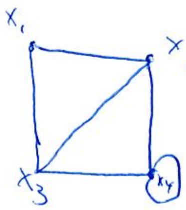
$|E| = ?$

teorema : $\sum_{v\in V} d(v) = 2m$

$3n = 2m \Rightarrow 3n = 4n - 12 \Rightarrow 12 = n \Rightarrow \boxed{n=12}$

$m = 2n - 6 \Rightarrow \boxed{m=18}$

Ibilaldiak grafoetan




Katea, Bidea, $x_1, x_2, x_3$

Katea. Bidea. ez, ~~$x_1, x_2, x_3$~~ $x_1, x_3, x_2, x_4, x_3$

$x_1\ x_3\ x_2 \rightarrow$ ibilaldi irekia, Luzera = 2

$x_1\ x_3\ x_2\ x_4\ x_3\ x_2\ x_1 \rightarrow$ ibilaldi itxia. Luzera = 6

Grafoa ez da konektatua, beraz, ez da existitzen $x_5$ erpinera eramango duen biderik.

Grafoak bi osagai konektatu ditu

$G_1 = (V_1, E_1) = V_1\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

~~$G_2=(V_2,E_2)$~~ $E_1\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_4, x_4\}\}$

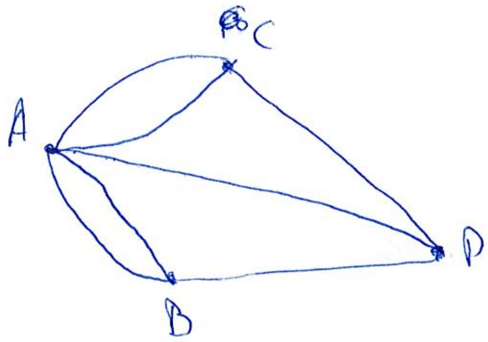
$G_2 = (V_2, E_2) = V_2\{x_5\}$

$E_2\{\ \}$

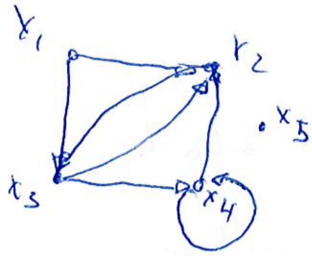
~~K~~ (G

$K(G) = 2$

## Grafo bidezko Adierazpena:




**Adb** Grafo zuzendua

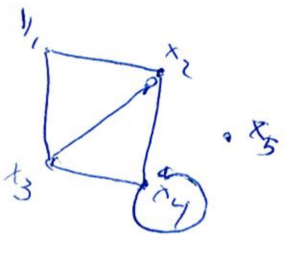



$G = (V, E)$

$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$E = \{(x_1,x_2), (x_1,x_3), (x_2,x_3), (x_3,x_2), (x_3,x_4), (x_4,x_2), (x_4,x_4)\}$

**Adb** Grafo ez-zuzendua



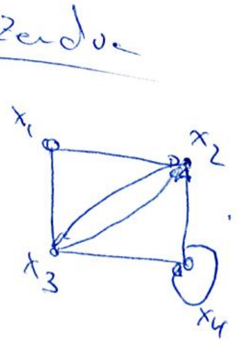

$G = (V, E)$

$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

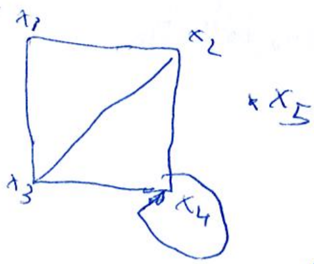
$E = \{\{x_1,x_2\}, \{x_1,x_3\}, \{x_2,x_3\}, \{x_3,x_4\}, \{x_4,x_2\}, \{x_4,x_4\}\}$

**Adb** Erpinen gradua

Grafo zuzendua




Grafo ez-zuzendua



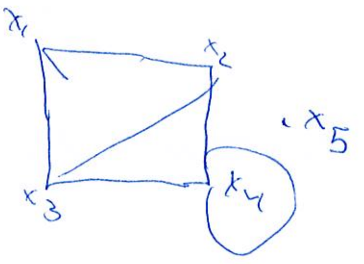

$d(x_2) = 3$

$d^+(x_2) = 1$

$d^-(x_2) = 3$

$d(x_2) = d^+(x_2) + d^-(x_2) = \boxed{4}$

Adib (teorema) $\sum_{x \in V} d(x) = 2m$



$d_{x_1} = 2$ $d_{x_4} = 4$
$d_{x_2} = 3$
$d_{x_3} = 3$ $d_{x_5} = 0$

$2+3+3+4+0 = 6 \cdot 2 = 12$

Korolarioa: $G: (V, E)$ ez-zuzendua
Grado bakoitia duten erpinen kopurua beti izango da bikoitia
Frogp: $G = (V, E) \rightarrow V_{Bik}$ = Grado bikoitiko erpinen multzoa
$V_{Bak}$ = Grado bakoitia erpinen multzoa.

Teorema: $\boxed{\sum_{x \in V} d(x) = 2m}$ → Bereiztuko ditugu

$$\underbrace{\sum_{x \in V_{Bik}} d(x)}_{\text{Zenbaki bikoitien batura (bikoitia)}} + \underbrace{\sum_{x \in V_{Bak}} d(x)}_{\text{Zenbaki bakoitien batura}} = \underbrace{2m}_{\text{Bikoitia}}$$

Kopuruak bikoitia

# Ariketak Grafoak

1.10

a) b tik de-ra, katea ez dena

- b, c, g, f, g, c, d

b)

b - d katea bidea ez dena

- b, c, f, g, c, d

c) b tik d-rako bide bat

- b, e, d

d)

b-tik bera ibilaldi itxia zirkuitua ez dena.

b, c, d, e, d, c, b

e)

b-tik b-rako zirkuitu bat zikloa ez dena

~~b, c, f, g, c, d, e, b~~ b, c, f, g, c, d, e b

f)

b tik b-rako zikloa

b, c, d, e, b

## Grafo Osagarria

$G=(V,\mathcal{E})$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $V=\{x_1, \dots, x_n\}$

$\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$ begizta gabeko grafoa, non $G$-ko erpinak dauden eta $\bar{\mathcal{E}}$: $K_n$ grafoan dauden eta $\mathcal{E}$-n ez dauden ertzak.

$G=(V,\mathcal{E})$

$\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$

## Aritketak Grafoak

2.2

$G=(V,\mathcal{E})$ Begizta gabea, ez zuzendua.

$|V| = 10 = n$

$\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$

$d(v_1)=2 \Rightarrow d(v_1) = 9-2 = 7$

$d(v_2)=3 \Rightarrow d(v_2)=6$

$d(v_3)=3 \Rightarrow d(v_3)=6$

$d(v_4)=5 \Rightarrow d(v_4)=4$

$d(v_5)=1 \Rightarrow d(v_5)=8$

$d(v_6)=2 \Rightarrow d(v_6)=7$

$d(v_7)=5 \Rightarrow d(v_7)=4$

$d(v_8)=2 \Rightarrow d(v_8)=7$

$d(v_9)=3 \Rightarrow d(v_9)=6$

$d(v_{10})=2 \Rightarrow d(v_{10})=7$

9 lotura edo ertz izan ahal ditzake, beraz, $K_{10} \to d(\mathcal{E})=9$

$\forall x \in V' \Rightarrow d(x)=9$

## 2.3

$G = (V, \mathcal{E})$ $\xrightarrow{\text{Osagarria}}$ $\bar{G} = (V, \bar{\mathcal{E}})$

$|V| = v$ erpin $\quad |V| = v$ erpin

$|\mathcal{E}| = e$ ertz $\quad |\bar{\mathcal{E}}| = |\mathcal{E}| - e \Rightarrow |\bar{\mathcal{E}}| = \frac{(v-1)v}{2} - e$

Teorema: $\sum_{x \in V} d(x) = 2m \Rightarrow d(x) = 2m \Rightarrow v-1 = 2m \Rightarrow (v-1) \cdot v = 2m \Rightarrow m = \frac{v(v-1)}{2}$

## 2.5

$G = (V, \mathcal{E})$

$|V| = n$ erpin

$|\mathcal{E}| = ?$

Frogatu behar dugu: $G \cong \bar{G} \Leftrightarrow n = 5$

$G \cong \bar{G} \Rightarrow n = 5$

$G = (V, \mathcal{E})$ $\xrightarrow{\text{Osagarria}}$ $\bar{G} = (V, \bar{\mathcal{E}})$

$|V| = n$ erpin $\quad |V| = n$ erpin

$|\mathcal{E}| = n$ ertz, zikloa delako $\quad |\bar{\mathcal{E}}| = m$

$n$ Erpineko Grafo Osatuak, zenbat ertz?

$\sum_{x \in V} d(x) = 2m \Rightarrow (n-1)n = 2m \Rightarrow m = \frac{(n-1)n}{2}$

G eta $\bar{G}$ isomorfoak badira ertz kopuru bera dute,

$n = \frac{(n-1)n}{2} - n$

$2n = \frac{(n-1)n}{2} \Rightarrow 4n = (n-1)n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow n = 0 \rightarrow 0$ erpin ezin dira egon.

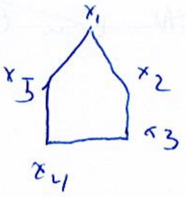
$\boxed{n = 5}$

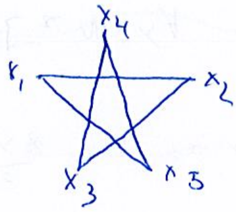
$G \cong \bar{G}$ ~~←~~ $n=5$

$G=(V,E)$

$|V| = n = 5$ erpin

$|E| = 5$ ertz

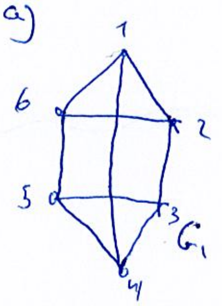


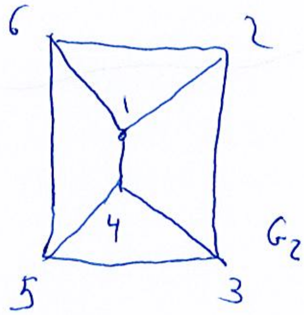




5 erpineko zikloa da G grafoa

## 2.12

a)




Isomorfoak? Bai $\boxed{G_1 \cong G_2}$

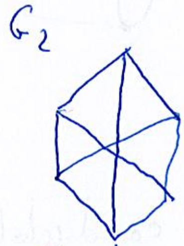
b)


Erpinak = 6

Ertzak = 9

3-erregularra

3 luzerako zikloak




Erpinak = 6

Ertzak = 9

3 erregularra

Ez dago 3 luzerako ziklorik

Isomorfoak? Ez $G_1 \not\cong G_2$

~~Aplikazioak Funtzioak~~

~~Suprajektiboa $\forall y \in \mathbb{N}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ non $f(n)=y$~~ Ez!

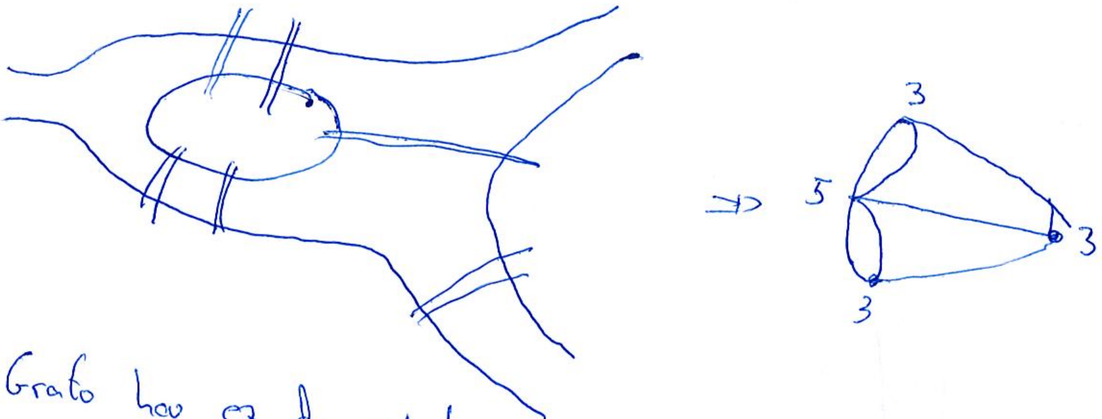
~~$f(n)=y \Rightarrow 3n=y \Rightarrow n=\frac{y}{3}$~~

~~Kontra Adibidea~~

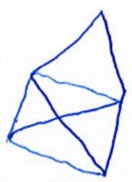
~~$y=2$ $3n=2 \Rightarrow n=\frac{2}{3} \Rightarrow n\notin\mathbb{N}$~~

~~$h(n)=\min\{n,100\}$~~

## Grafo Eulertarrak

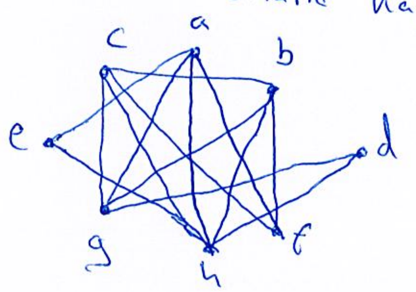



Grafo hau ez da Eulertarra Erpin guztiak ez direlako bikoitiak, beraz, Ez da zirkuitu Eulertarrik.



Grafoa ez da Eulertarra, baina Gradu bakoitiko 2 erpin baditu, Katea eulertarra du.

Zirkuitu Eulertarra Kalkulatzeko metodoa:




$C_1$ zikloa: a e h d g a → zubia $C_2$rako

$C_2$ zikloa: b a h g b → $C_3$-ra zubia

$C_3$ zikloa: a h b g c f a

$\underbrace{a\ c\ h\ \overbrace{h\ b\ \underbrace{g\ c\ f\ a\ h\ b}_{C_3}\ c\ h}^{C_2}\ d\ g\ a}_{C_1}$

# Grafo Hamiltondarrak

~~Ezkab~~

~~$G=(V,E)$~~

$G=(V,E)$ grafo ez zuzendua.

Erpin kopurua $n \geq 3$

Ziklo hamiltondarra: erpin guztiak pasatzen dituen zikloa

Ziklo hamiltondarra bilatzeko:

$G$ grafo hamiltondarra bada, $G$ konektatuan, $x \in V$ erpin guztiek $n \geq 2$ gutxienez.

Baldin $a \in V$ $d(a)=2$ badira $a$ erpinekin intzidenteak diren ertzak ziklo hamiltondarrekoak dira.

teorema: $G(V,E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua $n \geq 3$ erpinekoa

$$\forall x,y \in V \quad (x \neq y) \quad d(x)+d(y) \geq n$$

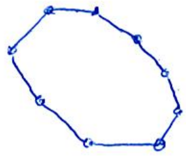
$G$ hamiltondarra da.

Bakarrik baldintza betetzean badela esateko

## 1 adb

$G = (V, E)$

$|V| = 9$ erpin



$\forall x, y \in V$

$d(x) + d(y) \geq n$

$2 + 2 \geq 9$

$4 \not\geq 9$

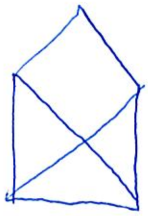
teoremak ez digu laguntzen grafo hamiltondarra den ala ez erabakitzen.

Definizioz, esan dezakegu grafoa hamiltondarra dela, ziklo hamiltondarra duelako.

## 2 adb

$G = (V, E)$

$|V| = 5$ erpin



teorema: $d(x_1) + d(x_2) \geq n$

$\forall x, y \in V$ $\quad 2 + 3 \geq 5 \Rightarrow$ Bai!

$d(x_1) + d(x_5) \geq n \Rightarrow 2 + 3 \geq 5 \Rightarrow$ Bai!

Beraz, kaso honetan teoremaren baldintza betetzen da, hau da, Grafo Hamiltondarra da.

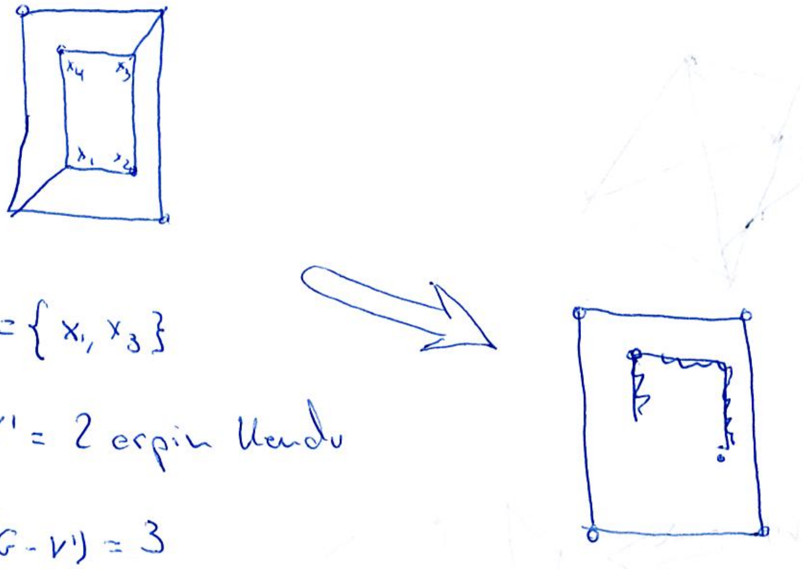
## Teorema

Baldin $G = (V, E)$ hamiltondarra, orduan $\forall V' \subset V \Rightarrow \emptyset = V' \neq V$

$k(G - V') \leq |V'|$

3.17

Frogatu ez direla Hamiltondarra

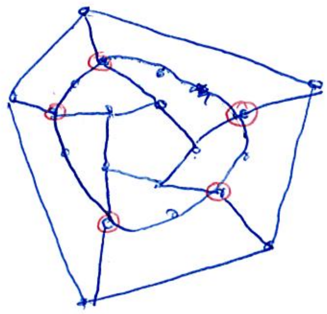



$V' = \{x_1, x_3\}$

$G - V' = 2$ erpin kendu

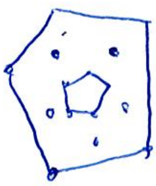
$K(G - V') = 3$

frogatuta geratzen da Ez dela hamiltondarra.



$V' = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

G - V' Grafoa



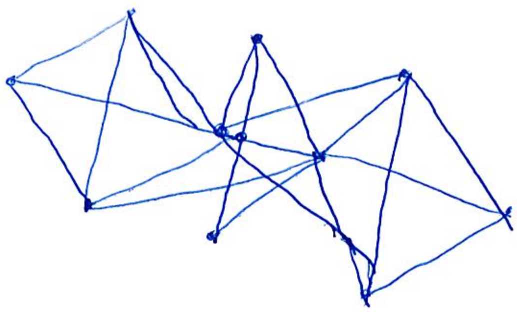
$\Rightarrow K(G - V') = 7$

$K(G - V') \leq V'$

$7 \leq 5$

## 3. Adb

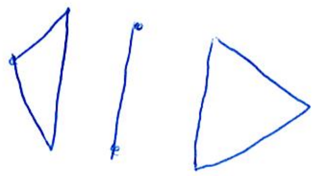
G



$V' = \{v_1, v_2\}$

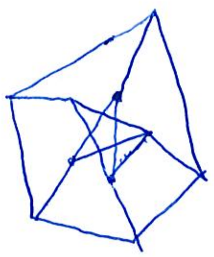
$|V'| = 2$ erpin kendu

$K(G - V') = 3$ $\Rightarrow K(G - V') \nleq |V'|$ $\Rightarrow$



Grafoa ez da hamiltondarra

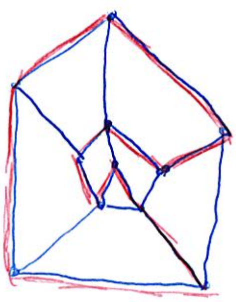
## 4. Adb

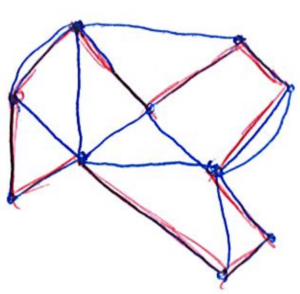


Ez da posible baldintza betetzea, ez duten V' azpimultzoa Aurkitzea

## 3.9

Aurkitu ziklo
Bide } Hamiltondarra





**3.2** $K_n \Rightarrow$ n erpineko grafo osotua

Zirkuitu eulertarra izateko, $n=?$

Grafo eulertarra $\Leftrightarrow$ Konektatua + erpinguztiek gradu bikoitiak.

$K_n$ Konektatua da. Erpinen gradua?

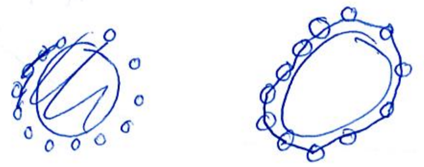
$K_n \rightarrow \forall x \in V \quad d(x) = n-1$

Gradu bikoitia bada, $n-1 \Rightarrow d(x)$ bakoitia izango da

**3.12**

12 Gonbidatu afaltzera

Bakoitzak gutxienez beste 6-ren ezaguna da.



$G = (V, E)$

$|V| = 12$

$|E| =$ ezagunak diren gonbidatuak

$\forall x \in V \quad d(x) \geq 6$

Grafo Hamiltondarra da?

Teorema

$\forall x, y \in V \quad x \neq y \quad d(x) + d(y) \geq n$

Kasurik okerrenean $d(x) = d(y) = 6$

$6 + 6 \geq 12$

Baldintza betetzen da.

Frogatuta Hamiltondarra dela.

3.15

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V| = n \geq 2K+2$

$K$-erregularra $\rightarrow \forall x \in V \; \boxed{d(x)=K}$

Osagarria

$\bar{G} = (V, \bar{\mathcal{E}})$ Hamiltondarra dela frogatu.

$|V| = n \geq 2K+2$

$|\bar{\mathcal{E}}| = \underbrace{n-1}_{K_n \Rightarrow \text{erpinen gradua}} - K = d(x) \Rightarrow d(x) = n-1-K$

Teorema aplikatuz, $\forall x \in V$ ~~x~~ ~~d(x)+d(y)~~ $d(x) = n-1-K \geq n-1-\frac{n-2}{2} =$

$= \frac{2n-2-n+2}{2} = \frac{n}{2}$

$n \geq 2K+2$

$n-2 \geq 2K$

$K \leq \frac{n-2}{2}$

$d(x) \geq \frac{n}{2}$

Frogatuta geratzen da hamiltondarra dela.

# Ariketak. Grafoak

## 1.5

$G=(V,E)$ Grafo 3-erregularra.

$|V| = ? = n$

$|E| = 2|V| - 6 = m$

teorema

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2m \Rightarrow 3|V| = 4|V| - 12 \Rightarrow |V| = 12$$

Beraz, $|E| = 2|V| - 6 \Rightarrow |E| = 18$

~~1.8~~

## 2.2

$G=(V,E)$ Begizta gabeko, grafo ez zuzendua.

$|V| = 10 = n$

Hau da, 10 erpin izanda erpin bakoitzak izan dezakeen lotura guztiak hartu eta Benetan dituenak kendu.

$\bar{G} = (V, \bar{E})$

| | |
|---|---|
| $d(v_1) = 2$ | $d'(v_1) = 9-2 = 7$ |
| $d(v_2) = 3$ | $d'(v_2) = 9-3 = 6$ |
| $d(v_3) = 3$ | $d'(v_3) = 9-3 = 6$ |
| $d(v_4) = 5$ | $d'(v_4) = 4$ |
| $d(v_5) = 1$ | $d'(v_5) = 9-1 = 8$ |
| $d(v_6) = 2$ | $d'(v_6) = 7$ |
| $d(v_7) = 5$ | $d'(v_7) = 4$ |
| $d(v_8) = 2$ | $d'(v_8) = 7$ |
| $d(v_9) = 3$ | $d'(v_9) = 6$ |
| $d(v_{10}) = 2$ | $d'(v_{10}) = 7$ |

## 2.3

$G=(V,\mathcal{E})$

$|V|=v$

$|\mathcal{E}|=m$

Osagarria

$\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$

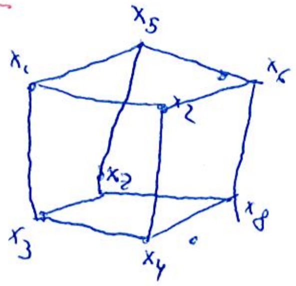
$|V|=v$

$|\bar{\mathcal{E}}|=|\mathcal{E}|-e=\frac{v(v-1)}{2}-e$

Teorema

$$\sum_{v\in V} d(v)=2e \Rightarrow d(v)=2m \Rightarrow v-1=2m \Rightarrow v(v-1)=2m \Rightarrow m=\frac{v(v-1)}{2}$$

## 2.4




$|\mathcal{E}|=\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_5\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_4\},\{x_2,x_6\},\{x_3,x_4\},\{x_3,x_7\},\{x_4,x_8\},\{x_5,x_6\},\{x_5,x_7\},\{x_6,x_8\},\{x_7,x_8\}\}$

$V_1=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

$V_2=\{x_5,x_6,x_7,x_8\}$

$V_1\cup V_2=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$

$V_1\cap V_2=\emptyset$

Beraz, kuboa grafo zatibikoa da.

## 2.5

$G=(V,\mathcal{E})$ zikloa da.

$|V|=n$ erpin

$|\mathcal{E}|=n$ ertz zikloa delako

$\bar{G}=(V,\bar{\mathcal{E}})$

$|V|=n$ erpin

$|\bar{\mathcal{E}}|=m$

Frogatuko dugu, $G$ eta $\bar{G}$ isomorfoak izango direla baldin eta soilik baldin $n=5$ bada.

$G_1\cong\bar{G}\Leftrightarrow n=5$

$G_1\cong\bar{G}\Rightarrow n=5$

Isomorfoak izateko, biek ertz kopuru bera izan behar dute:

Teorema

$$\sum_{n\in V} d(n) = 2m \Rightarrow n(n-1) = 2m \Rightarrow m = \frac{n(n-1)}{2}$$

Biak Isomorfoak izateko ertz kopuru bera izan behar dute.

$|\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} - n$ $\quad |E| = n \Rightarrow |\bar{E}| = |E| \Rightarrow n = \frac{n(n-1)}{2} - n \Rightarrow 2n = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n = n(n-1) \Rightarrow 4n = n^2 - n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n = 0 \rightarrow$ ezin da izan ertz kopurua zero

$n = 5$

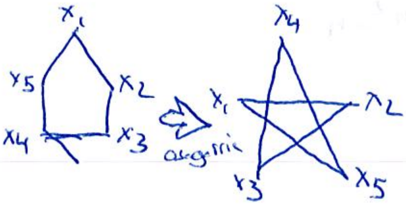
Beraz, Isomorfoak izateko ertz kopurua 5 izan behar da.

$G \cong \bar{G} \Leftarrow n = 5$

$G = (V, E)$

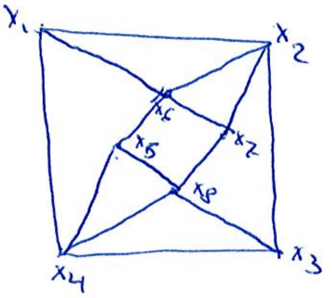
$|V| = n = 5$ erpin

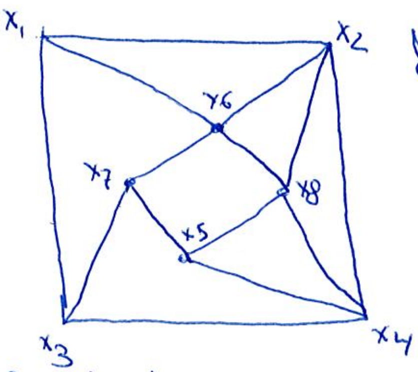
$|E| = 5$ ertz



5 erpineko zikloa da Grafoa

2.7





Beraz, biak isomorfoak dira.

$G_1 = (V, E)$

$|V| = 8 \quad |E| = 14$

$d(x_1) = 3 \quad d(x_6) = 4$

$d(x_2) = 4 \quad d(x_7) = 3$

$d(x_3) = 3 \quad d(x_8) = 4$

$d(x_4) = 4$

$d(x_5) = 3$

$G_2 = (V, E) \quad |E| = 14$

$|V| = 8$

$d(x_1) = 3 \quad d(x_7) = 3$

$d(x_2) = 4 \quad d(x_8) = 4$

$d(x_3) = 3$

$d(x_4) = 4$

$d(x_5) = 3$

$d(x_6) = 4$

## 2.9

a)

$G=(V,E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n$ erpinekoa.

$G=(V,E)$

$|V|=n$ erpin

$|E|=m$

$\xRightarrow{\text{Osagarria}}$

$\bar{G}=(V,\bar{E})$

$|V|=n$ erpin

$|\bar{E}|=?=\frac{n(n-1)}{2}-m$

Teorema

$$\sum_{u\in V} d(u)=2m \Rightarrow (n-1)n=2m \Rightarrow m=\frac{n(n-1)}{2}$$

Isomorfoak izateko $|E|=|\bar{E}| \Rightarrow m=\frac{n(n-1)}{2}-m \Rightarrow 2m=\frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow$

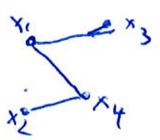
$4m=n(n-1) \Rightarrow 4m=n^2-n$

b)

$n=4$ erpin

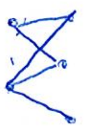
$4m=4^2-4 \Rightarrow 4m=12 \Rightarrow \boxed{m=3}$

$|E|=|\bar{E}|=3$




$n=5$ erpin

$4m=5^2-5 \Rightarrow 4m=20 \Rightarrow \boxed{m=5}$



c)

Baldintzak betetzeko, Frogatuko dugu $4k$ edo $4k+1$ izan behar dela erpin kopurua.

$\underline{4k}$

~~$4m = \frac{4k}{}(4k)^2 - 4k \Rightarrow$~~

$4m = 4k(4k-1) \Rightarrow m = 4k^2 - k$

Horrela, $k \in \mathbb{Z}$ izanda ere, $m \in \mathbb{Z}$ lortuko dugu beti,

adb

$k=3$

$m = 4 \cdot 9 - 3 \Rightarrow m = 33$

$\underline{4k+1}$

$4m = (4k+1)(4k+1-1) \Rightarrow 4m = 4k(4k+1) \Rightarrow m = 4k^2+k$ beraz, horrela ere emaitza $\mathbb{Z}$ izango da.

Frogatuta geratzen da erpin kopurua $4k$ edo $4k+1$ izan behar dela,

3.2

$K_n \Rightarrow n$ erpineko Grafo osotua

Zirkuitu eulertarra izateko, $n = ?$

Grafo eulertarra $\Leftrightarrow$ Konektatuta + erpin guztiak gradu bikoitikoak.

$K_n$ konektatua, Erpinen gradua?

$K_n \Rightarrow \forall x \in V \quad d(x) = n-1$

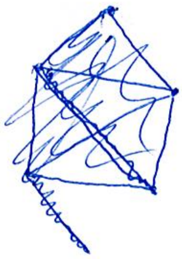
Gradu bikoitia izanik, $n-1$ bada Erpinen graduen bakoitia izango da.

3.6

a)

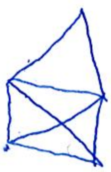
Zirkuitu eulertarrik ez: Kate eulertarra izan behar: konektatua eta gradu bakoitiko bi erpin.

Ziklo hamiltondarrik ez:



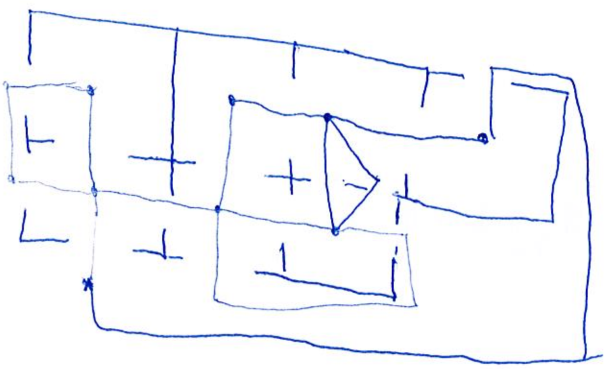
b)

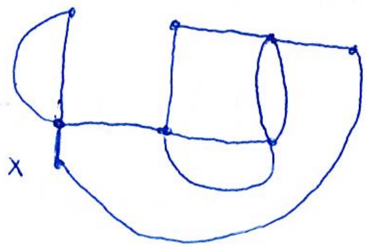
Zirkuitu eulertarra dago baina ez ziklo hamiltondarrik.



Kate itxia baita

3.8

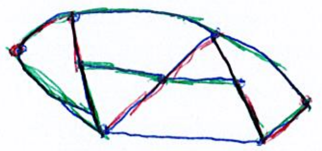


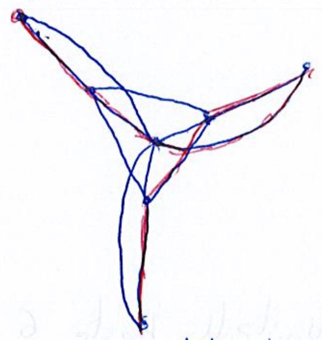



Teorema

G konektatua bada eta G-ko erpin guztien gradua bikoitia bada, G eulertarra izango da, Beraz, zirkuitu eulertarra izango du, eta gure zirkuituak hau betetzen du.

3.9





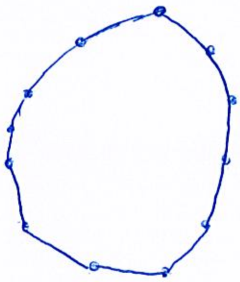
Ez dagoenez zillo hamiltondarrik, bide hamiltondarra bilatu da.

3.11

Begizta gabeko grafo bat, n erpin, bide hamiltondarra duena baina $d(x)+d(y)<n-1$ bi erpin determinaturako.

3.12

3.12



12 gonbidatu, gutxienez bakoitzak beste 6 ezagun ditu.

$G = (V, E)$

$|V| = 12$

$|E|$ = ezagunak diren gonbidatuak.

~~teorema~~

da $x \in V$ $d(x) \geq 6$

Grafo hamiltondarra da?

Teorema

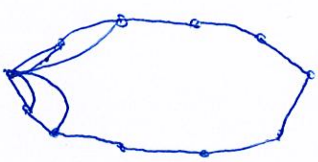
$\forall x, y$ $(x \neq y)$ $d(x) + d(y) \geq n$

$d(x) \geq 6$

$d(y) \geq 6$ $\}$ $d(x) + d(y) \geq n \Rightarrow 6 + 6 \geq 12 \Rightarrow 12 = 12$ betetzen da.

Frogatuta gelditzen da grafo hamiltondarra dela.

3.14



Ziklo hamiltondarra izateko nahikoa da bide bat bilatzea non $x = y$ puntuak berdinak diren, hau da, hasierako eta amaierako puntuak berdinak diren eta erpin guztiak behin bakarrik pasatzen duen bidea lortzea.

$G = (V, E)$

$|V| = 11$

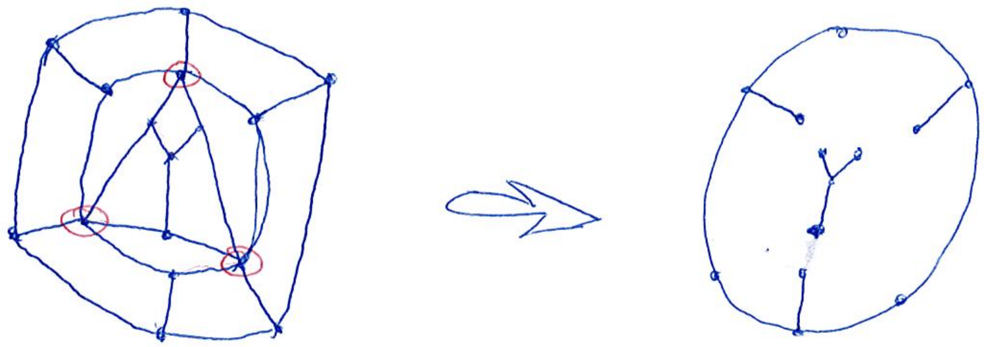
$|E|$ = 6-erregularra

$d(x) = 6$ $\forall x \in V$

horretarako nahikoa da, $d(x) > 2$ izatea eta gure kasuan $d(x) = 6$ denez betetzen da baldintza beraz, ziklo hamiltondarra duela frogatu dugu.

## 3.17

Frogatutto dugo hurrengo grafoa ez dela hamiltondarra:



$V' = \{x_1, x_3, x_5\}$

$G - V' = 3$

$K(G - V') =$

$\not\leq 3$

Beraz, frogatuta gelditzen da Grafo honek ez duela zikloa hamiltondarrik.

## Konbinatoria

1. Zenbat hitz ezberdin osa daitezke "iker" izeneko hizkiak erabiliz?
   a) Murrizketarik gabe.
   b) Zenbat hasten dira "i" hizkiaz? Zerrenda itzazu.
   c) Zenbatek dute lehenengo hizkia bokala? Zerrenda itzazu guztiak.
   d) Zenbatek dute kontsonante baten aurretik beti bokal bat? Zerrenda itzazu.
2. Zenbat hitz ezberdin osa daitezke "isabel" izeneko hizkiez, bokal baten aurretik beti kontsonante bat agertu behar bada?
3. Zenbat eratara ordena daitezke $A_1, A_2, A_3, A_4$ eta $A_5$ abestiak diska batean, $A_1$ abestia $A_2$ abestiaren ondoren kokatzea derrigorrezkoa bada?
4. Sei edukinontzi bata bestearen atzetik kokatu behar dira kamioi batean. Edukinontziak kolore desberdinekoak dira: urdina, horia, berdea, marroia, txuria eta beltza. Zenbat eratara ordena daitezke edukinontziak, urdina eta horia ezin badira elkarren ondoan egon?
5. Zenbat hitz ezberdin osa daitezke "mississipi" izeneko hizkiak erabiliz?
6. Sei ariketa egiteko elkartu dira 3 lagun. Anek 3 ariketa egingo dituela esan du, Leirek beste 2 aukeratuko ditu, eta Maitek bakarra egingo du. Zenbat modutara bana daitezke ariketak beren artean?
7. Futbol partidu batean $4-2$ izan da azken emaitza. Zenbat eratara hel daiteke emaitza horretara?
8. Zenbat kotxe-matrikula ezberdin osa daitezke 1etik 6rako zifretatik 2 aukeratuz, zifrak errepikatu gabe? Kalkula ezazu kopurua, eta matrikulen zerrenda osa ezazu. Eta, zifrak errepikatuta agertzea posible bada? Matrikulen zerrenda osa ezazu.
9. Lantegi batean 8 ataza desberdin daude, eta horietako 3 esleitu nahi zaizkie 3 langileei. Zenbat aukera posible daude?
10. Txapelketa batean 5 jokalari lehian ari dira. Zenbat eratara suerta daiteke podium-a? Zerrenda osa ezazu.
11. Kiniela egitea erabaki dugu. 14 partida jokatuko dira, eta kinielan partiden zerrenda ageri da. Zenbat apustu desberdin egin daitezke, partida bakoitzerako 1, X, 2 aukerak ditugula jakinda?
12. 1etik 9rako digitoez 4 zifrako zenbat matrikula osa daitezke, zifrak errepikatuta ager badaitezke, baina matrikulan 13 digito segidaren agerpena debekatu nahi bada?
13. Kotxe matrikula bat hizki hirukote batek osatzen du, guztira 22 letra direlarik aukeran. Hirukote bakoitzak 10000 kotxe estaltzen ditu. Hilabeteko kotxe matrikulazioa 8000 kotxekoa da batazbeste. Noiz arte izango dugu sistema indarrean?



14. 1etik 7rako zifrekin 5 digituko zenbat zenbaki osa daitezke? Zenbat dira bikoitiak? Zenbat dira palindromoak (aurretik atzera eta atzetik aurrera berdin irakurtzen direnak)?
15. 3 ikasle aukeratu behar ditugu enpresa batean praktikak egiteko. Gelako 6 ikasle onenen artean egin nahi dugu aukeraketa. Zenbat eratara egin daiteke?
16. Gela batean 10 neska eta 8 mutil daude. 2 neskaz eta 2 mutilez osatutako laukote bat osatu behar dugu. Zenbat modutara egin daiteke?
17. Lantegi batean 4 laguneko batzorde bat osatu behar da. Guztira 9 lagun ditugu aukeran. Zenbat eratara egin daiteke batzorde osaketa? Horietako zenbatetan daude Ane eta Gema elkarrekin?
18. Udalerako alkatea eta 4 zinegotzi aukeratu behar dira. Guztira 22 izen daude aukeran. Zenbat eratara egin daiteke aukeraketa?
19. Programazio-lengoaia batean identifikatzaileak honela osatzen dira: letra bat eta jarraian gehienez 7 sinbolo. Sinboloa alfabetoko 26 letratako bat edota 0tik 9rako digitu bat da. 36 hitz erreserbatu badaude, zenbat identifikatzaile osa daitezke?
20. Zenbat eratara ordena daitezke apal batean Fortran-eko 3 liburu eta C++eko 4 liburu, zazpirak desberdinak? Eta, programazio-lengoaiak txandakatuta agertu behar badira? Eta, Fortran programazio-lengoaiari buruzko 3 liburuak elkarren ondoan kokatu behar baditugu? Eta, Fortrani buruzko liburuak elkarren ondoan ipini behar badira, eta C++ lengoaiari buruzkoak ere?
21. 10 txanpon ditugu, guztiak berdinak. Zenbat modu desberdinetara bana ditzakegu 5 lagunen artean?
    a) Murrizketarik ezarri gabe.
    b) Lagun bakoitzak gutxienez txanpon bat jaso behar badu?
    c) Gazteenak gutxienez 2 txanpon jaso behar baditu?
22. Zortzi pilota txuri ditugu, zortzirak berdin-berdinak, eta lau ontzi desberdinetan banatu nahi ditugu. Kalkula ezazu zenbat modutara egin dezakegun banaketa:
    a) Ontzi bat bera ere ezin bada hutsa geratu.
    b) Laugarren ontzian sartutako pilota kopuruak bakoitia izan behar badu.
23. Jatetxe batean 3 bolako izozki-kopa zerbitzatzen dute postrerako. Bezeroak aukera dezake bola bakoitzaren zaporea: txokolatezkoa, marrubizkoa, limoizkoa edo kafezkoa. Zenbat izozki-kopa desberdin eska ditzakegu, zapore bereko bola bat baino gehiago aukeratzea posible bada?
24. Zenbat modu desberdinetara bana ditzaket txokolatezko 7 gaileta eta laranjazko 6 goxoki 4 umeren artean, ume bakoitzak gutxienez txokolatezko gaileta bat jaso behar badu?

(6)

$n=6 \begin{cases} \text{Anek: } 3 \\ \text{Leirek: } 2 \\ \text{Maitek: } 1 \end{cases}$

$$P(6) = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$$

Ordena?: Bai!

Errp? Bai!

(7)

Futbol partidan 4-2, guztira 6 gol

$n=6 \begin{cases} 4 = 1\ \text{elipo} \\ 2 = \text{elipé} \end{cases}$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

$$PR(6)_{2,4} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$$

(8)

1 etik 6-rako zifrekin, 2 digitoko zenbat zenbaki?

$n=6$

$r=2$

Ordena? Bai!

Errep? EZ

$\underline{6\text{ auk}}$ $\underline{5\text{ auk}}$

$$VR(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30 \text{ lotra matrikula}$$

Zifrak errepikatu ahal badira.

$n=6$

$r=2$

Ordena? Bai

Errep? Bai

$\underline{6\text{auk}}$ $\underline{6\text{auk}}$

$$VR(6,2) = 6^2 = 36$$

⑨

8 ataza desberdin, 3 langileren artean.

$n = 8$

$r = 3$

Ordena? Bai!

Errep? EZ!

$V_{(8,3)} = \frac{8!}{5!} = 336$

~~$C_{(8,3)} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} =$~~

⑩

5 jokalari podiuma osatzeko, zenbat eratara antola daiteke.

$n = 5$

$r = 3$

Ordena? Bai!

Errep? EZ.

5aukera
4aukera
3aukera

$V_{(5,3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$

⑪

14 partidu jokatu, kiniela egiteko. 1 x 2 aukerak zenbat eratara bete daiteke kiniela.

$n = 3$

$r = 14$

$\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3} \ldots \underline{3}$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

$VR(3,14) = 3^{14} = 4782969$

⑫

1-etik 9-ra digituez 4 zifrako zenbat zenbaki.

$n = 9$

$r = 4$

$VR(9,4) = 6561$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

13 zenbakia osoa da agertu:

13 _ _ 
_ 13 _
_ _ 13

$n = 9$
$r = 2$
Ordena? Bai
Errep? Bai

$VR(9,2) = 9^2 = 81$

$81 \cdot 3 = 243$

Baina, 1313 zenbakia bi aldiz kontatu dugu. 242

$6561 - 242 = 6319$ zenbaki osa daitezke

13

$n = 22$
$r = 3$
Ordena? Bai!
Errep.? Bai!

$VR(n,r) = n^r = 22^3 = 10648$

$10.648 \cdot 10\,000 = 106.480{,}000$ ukotine matrikula ezberdin egin daitezke.

1 hile → 80.000
x → 106.480.000

$x = 1331$

(14)

1etik 7rako 5 digituko zenbat zenbaki osa daitezke?

$\underline{7auk}$ $\underline{7auk}$ $\underline{7auk}$ $\underline{7auk}$ $\underline{7auk}$

$n = 7$

$r = 5$

$VR(7,5) = 7^5 = 16\,807$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

Horietatik zenbat dira bikoitiak?

Bikoitia izateko, pixu baxuenekoa digitua bikoitia izan behar da. Hau da, 2, 4, 6 izan beharko da.

$n = 7$

$r = 4$

$VR(7,4) = 2401$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

Azkenengo digituan 3 aukera daudenez, $VR(7,4) \cdot 3 = 7203$ ~~[illegible]~~ zenbaki bikoiti osa daitezke.

Zenbat palindromoa?

$\underline{7auk}$ $\underline{7auk}$ $\underline{7auk}$ _ _ _ _ _

Berdinak

$n = 7$

$r = 3$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

$VR(7,3) = 7^3 = 343$ zenbaki palindromo osa daitezke.

(15)

3 lagun enpresa baten praktikak egiteko.

6-ren artean.

$n=6$
$r=3$
Ordena? Ez
Errep? Ez

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$$ aukera egin daitezke.

(16)

Gelan 10 neska eta ~~10~~ 8 mutil

2 neska eta 2 mutileko taldeak.

~~Bi azpi problem~~ Bi azpiproblematan banatuko dugu!

10 neska
2 talde:

$n=10$
$r=2$
Ordena? Ez
Errep? Ez

$$C_{(10,2)} = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = 45$$ era desberdinetan egin daiteke.

8 ~~neska~~ mutil

$n=8$
$r=2$
Ordena? Ez
Errep? Ez

$$C(8,2) = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$$

$C_{(10,2)} \cdot C_{(8,2)} = 1260$ era desberdinetan egin daiteke taldea.

(17)

4 lagunekо batzordea.

9 lagun artean

$n = 9$

$r = 4$

ordena? Ez!

Errep? Ez

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{9!}{(9-4)! \cdot 4!} = 126 \text{ aukera desberdin}$$

Ane eta Gema elkarrekin egon behar badute.

Ane Gema _ _

~~Orde~~

$n = \cancel{9}\ 7$

$r = 2$

ordena? Ez!

Errep? Ez

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{7!}{\cancel{8}5! \cdot 2!} = 21 \text{ etan egongo dira elkarrekin}$$

(18)

| Atletea | 4 zinegotzi |
|---|---|
| 22 aukera | 21 aukera |

$n = 21$

$r = 4$

ordena? ~~Bai~~ Ez!

Errep? Ez

$$C(n,r) = \frac{21!}{17! \cdot 4!} = 5985 \text{ aukera zinegotzien aukeratzeko}$$

$C(n,r) \cdot \text{Atletea} = 131.670$ aukera ezberdin daude.

(21)

10 txanpon ditugu.

5 lagunen artean banatzeko

a) murrizketarik gabe

$n=5$

$r=10$

Ordena? Ez

Errep? Bai!

$$CR(n+r-1, r) = \frac{14!}{4! \cdot 10!} = 1001$$

b)

lagun bakoitzak gutxienez txanpon bat jaso behar badu 5 txanpon egongo dira 5 lagunen artean banatzeko.

$n=5$

$r=5$

Ordena? Ez!

Errep? Bai!

$$CR(n,r) = \frac{9!}{5! \, 4!} = 126 \text{ aukera ditu.}$$

c) Gazteenak gutxienez ~~bat~~ bi jaso behar badittu.

$n = \cancel{8}\ 5$

$r = \cancel{5}\ 8$

Ordena? Ez!

Errep? Bai!

$$CR(n,r) = \frac{12!}{8! \, 4!} = 495 \text{ aukera desberdin.}$$

(23)

3 bola izozki-popa.

Zaporeak: T, m, l edo K

$n = \cancel{3}\ 4$

$r=3$

Ordena?, Ez!

Errep? Bai!

$$CR(n,r) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$ izozki-ezberdin osa daitezke.

(24)

txokolatezko 7 gaileta eta laranjazko 6

4 umeren artean, bakoitzak gutxienez gaileta bat txokolatezko.

$n = 4$

$r = 9$

Ordena? Ez!

Errep? Bai!

$$CR(n, r) = \frac{12!}{3!\,9!} = 220$$ modu desberdinetara osa daiteke.

**FUNTZIOAK**

1. Erabaki ondorengo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funtzioak ondo definituta dauden, baiezko kasuan esan injektiboak eta suprajektiboak diren.

   a) $f(x) = x + 7$ b) $f(x) = 2x - 3$ c) $f(x) = -x + 5$
   d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = x^2 + x$ f) $f(x) = x^3$
   g) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

2. Izan bedi $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $S$-tik $S$-rako aplikazio hauek kontsideratuko ditugu: $1_S(n) = n$, $f(n) = 6 - n$, $g(n) = \max\{3, n\}$, $h(n) = \max\{1, n - 1\}$. Zein dira injektiboak eta zein suprajektiboak?

3. Kontsidera ditzagun $\mathbb{N}$-tik $\mathbb{N}$-rako funtzio hauek: $1_{\mathbb{N}}(n) = n$, $f(n) = 3n$, $g(n) = n + (-1)^n$, $h(n) = \min\{n, 100\}$, $k(n) = \max\{0, n - 5\}$. Aztertu injektiboak eta suprajektiboak diren.

4. Izan bitez $A$ eta $B$ multzo ez hutsak, eta $\mathrm{pr} : A \times B \to A$ aplikazioa, $\mathrm{pr}(x, y) = x$ izanik. Injektiboa da? Suprajektiboa da? Eta $B$-k elementu bakarra badu?

5. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$-tik $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-rako aplikazio hauek ditugu: $f(A, B) = A \cup B$ eta $g(A, B) = A \cap B$. Frogatu suprajektiboak direla baina ez injektiboak. Kalkulatu $\emptyset$ eta $\{0\}$-ren aurreirudiak $f$ eta $g$-rentzat.

6. Izan bitez $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ funtzioak: $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$ eta

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ bikoitia} \\ 1 & x \text{ bakoitia} \end{cases}$$

   a) Kalkulatu $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $f \circ (g \circ h)$, $(f \circ g) \circ h$.

   b) Kalkulatu $f^2$, $f^3$, $g^2$, $g^3$, $h^2$, $h^3$, $h^{500}$.

7. $\mathbb{N}$-tik $\mathbb{N}$-rako funtzio hauek ditugu: $f(n) = n + 1$ eta $g(n) = \max\{0, n - 1\}$. Aztertu injektiboak eta suprajektiboak diren. Frogatu $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ dugula baina $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$.

8. $\mathbb{N}$-tik $\mathbb{N}$-rako funtzio hauek kontsideratuko ditugu: $f(n) = 2n$, eta bestalde $g(n) = n/2$ baldin $n$ bikoitia bada eta $g(n) = (n + 1)/2$ baldin $n$ bakoitia bada. Aztertu injektiboak eta suprajektiboak diren. Frogatu $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ dugula baina $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$.

9. Izan bedi $C = \{x^2 \text{ non } x \in \mathbb{N}\}$. Kontsidera ditzagun $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to C$ eta $h : C \to \mathbb{N}$ funtzioak, $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ eta $h(x) = +\sqrt{x}$.

   a) Aztertu injektiboak eta suprajektiboak diren.

   b) Determinatu $h \circ g \circ f$ funtzioa. Aztertu injektiboa eta suprajektiboa den.

   c) Frogatu $g \circ h = 1_C$ eta $h \circ g = 1_{\mathbb{N}}$.

   d) Zein da $g^{-1}$?

10. Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ honela definitua: $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Frogatu bijektiboa dela. Kalkulatu $f^{-1}$ eta $f \circ f$.

# ERLAZIOAK ETA FUNTZIOAK

## ERLAZIOAK

1. $A = \{1,2,3\}$ multzoaren gaineko erlazio hauetako bakoitza bihurkorra, simetrikoa, antisimetrikoa edo iragankorra den azter ezazu.

$$\Re_1 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(2,3)\}, \qquad \Re_2 = \{(1,1)\}$$
$$\Re_3 = \{(1,2)\}, \qquad \Re_4 = \{(1,1),(3,2),(2,3)\}, \qquad \Re_5 = A \times A$$

2. Aztertu erlazio bitar hauetako bakoitza bihurkorra, simetrikoa, antisimetrikoa edo iragankorra den.

   a) $\mathbb{Z}^+$ multzoan $a\Re b$ baldin $a|b$
   b) $\mathbb{Z}$ multzoan $a\Re b$ baldin $a|b$
   c) $\mathbb{Z}$ multzoan $x\Re y$ baldin $x+y$ bakoitia
   d) $\mathbb{Z}$ multzoan $x\Re y$ baldin $x+y$ bikoitia
   e) $\mathbb{N}$ multzoan $a\Re b$ baldin $a \leq b$
   f) $\mathbb{N}$ multzoan $a\Re b$ baldin $a+b=10$
   g) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ multzoan $(a,b)\Re(c,d)$ baldin $a \leq c$

3. $A = \{1,2,3,4\}$ multzoa izanik, defini ezazu honako propietateak betetzen dituen $A$-ren gaineko $\Re$ erlazio bitar bat:

   a) Bihurkorra eta simetrikoa, baina ez iragankorra.
   b) Bihurkorra eta iragankorra, baina ez simetrikoa.
   c) Simetrikoa eta iragankorra, baina ez bihurkorra.
   d) Simetrikoa eta antisimetrikoa.

4. $\mathcal{R}$ ordena erlazioa emanik, $\mathcal{S}$ erlazioa definituko dugu honela:

$$x\mathcal{S}y \text{ baldin } y\mathcal{R}x$$

Frogatu $\mathcal{S}$ ordena erlazioa dela eta mota berdinekoa (totala edo partziala).

5. $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ multzoan erlazio hau dugu:

$$(x_1,y_1)\Re(x_2,y_2) \text{ baldin } x_1|x_2 \text{ eta } y_2|y_1$$

Ordena erlazioa da? Totala edo partziala?

6. Egiaztatu $\mathbb{Z}^+$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa dela hau:

$$x\Re y \text{ baldin } x = 2^n y, n\in\mathbb{Z}\text{-ren batentzat}$$

Baliokidetasun klase hauetatik zenbat dira desberdinak: [1], [2], [3], [4]?

7. $\mathbb{N}$ multzoan erlazio hau definituko dugu:

$$x\Re y \text{ baldin } 3 \mid x^2 - y^2$$

   a) Frogatu baliokidetasun erlazioa dela.
   b) Aurkitu [0] klaseko lau elementu eta [1]-ko beste lau.

8. $\mathbb{R}^2$ multzoan erlazio hau dugu: $(x_1,x_2)\Re(y_1,y_2)$ baldin $x_1x_2 = y_1y_2$. Frogatu baliokidetasun erlazioa dela. Aztertu baliokidetasun erlazioa den $\Re'$: $(x_1,x_2)\Re'(y_1,y_2)$ baldin $x_1x_2 = y_1y_2$ eta $x_1y_1 \geq 0$.

9. $E$ multzoan definitutako $\Re_1$ eta $\Re_2$ bi baliokidetasun erlazio izanik, $\Re$ honela definituko dugu:

$$x\Re y \text{ b.s.b. } x\Re_1 y \text{ eta } x\Re_2 y$$

Frogatu $\Re$ baliokidetasun erlazioa dela.

10. Egiaztatu $\mathbb{R}^2$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa dela hau:

$$(x_1,x_2)\Re(y_1,y_2) \text{ baldin } x_1 = y_1$$

11. $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ multzoan erlazio hau definituko dugu:

$$(x_1,x_2)\Re(y_1,y_2) \text{ baldin } x_1y_2 = x_2y_1$$

Egiaztatu baliokidetasun erlazioa dela eta kalkulatu klaseak.

12. Izan bedi $A = \{1,2,3,4,5\}$. Egiaztatu $A^2$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa dela hau:

$$(x_1,x_2)\Re(y_1,y_2) \text{ baldin } x_1+x_2 = y_1+y_2$$

Kalkulatu baliokidetasun klase hauek: $[(1,3)]$, $[(2,4)]$, $[(1,1)]$; eta $\Re$-k induzitutako $A^2$-ren partizioa.

13. Esan ondorengoak egiazkoak ala faltsuak diren: $2 \equiv 10 (\text{mod } 4)$, $7 \equiv 2(\text{mod } 3)$, $7 \equiv 7(\text{mod } 2)$, $3 \equiv -12(\text{mod } 5)$, $-20 \equiv 5(\text{mod } 3)$.

14. $\mathbb{Z}_6$ multzoan:

   a) Zein klasetakoa da -20?
   b) Zein dira klase hauetako elementuak [2], [3], [5]? Aurki itzazu klase bakoitzerako 4 elementu.

⑩

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x+y, x-y)$

Frogtullo dugo bijeltiboa dela:

Injeltiboa: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}$ $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2, x_2-y_2)$

$$\left.\begin{aligned} x_1+y_1 &= x_2+y_2 \\ x_1-y_1 &= x_2-y_2 \end{aligned}\right\} 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+y_1 &= x_2+y_2 \\ -1\cdot x_1-y_1 &= x_2-x_2 \end{aligned}\right\}$$

$2y_1 = 2y_2 \Rightarrow \underline{y_1 = y_2}$

Sopragjeltiboa: $\forall (n,m) \in \mathbb{R}^2$ $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ non $f(x,y) = (n,m)$ Bai!

$f(x,y) = (n,m) \Rightarrow (x+y, x-y) = (n,m) \Rightarrow \begin{cases} x+y = n \Rightarrow m+y+y = n \Rightarrow 2y = n-m \\ x-y = m \Rightarrow x = m+y \Rightarrow 2x = n+m \end{cases}$

$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 2y &= n-m \\ 2x &= n+m \end{aligned} \Rightarrow y = \frac{n-m}{2}, \quad x = \frac{n+m}{2}$$

$f^{-1}(n,m) = \left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}\right)$

$f \circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(f(x,y)) \Rightarrow (x+y+x-y, x+y-x+y) = (2x, 2y)$

b)

$h \circ g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$h \circ g \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h \circ (\,|x|^2) = +\sqrt{|x|^2} = +|x|$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Ez!

$h(g(f(x_1))) = h(g(f(x_2))) \Rightarrow |x_1| = |x_2|$

Kontra Adibidea:

$x_1 = -1 \qquad h(g(f(-1))) = h(g(f(1))) = 1$
$x_2 = 1$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow -1 \neq 1$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow |x_1| = y$

c)

$g \circ h = 1_C$

$g \circ h : C \to C$

$g \circ h(x) = g(h(x)) = (\sqrt{x})^2 = +x \in C$

$h \circ g = 1_{\mathbb{N}}$

$h \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$h \circ g(x) = h(g(x)) = h(x^2) = \sqrt{x^2} = x \in \mathbb{N}$

d)

$g^{-1} : C \to \mathbb{N}$

$g(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$g^{-1} = \sqrt{y}$

7)

$f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = n+1$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N}$ non $f(x) = y$ Ez!

$f(n) = m \Rightarrow n + 1 = m \Rightarrow n = m - 1$

Kontra Adibidea:

$m = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow n = m - 1 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}$

$g(n) = \max\{0, n-1\}$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} \quad g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Ez!

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow \max\{0, n_1 - 1\} = \max\{0, n_2 - 1\}$

Kontra Adibidea:

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = \max\{0, 1-1\} = 0 \\ g(0) = \max\{0, -1\} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow g(1) = g(0) \Rightarrow 1 \neq 0$$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N}$ non $g(x) = y$ Bai!

$$g(n) = m \Rightarrow \max\{0, n-1\} = m \Rightarrow \begin{cases} n - 1 = m \Rightarrow n = m+1 \\ m = 0 \end{cases}$$

Frogatu behar dugu $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ betetzen dela

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$g \circ f(n) = g(f(n)) = \max\{0, n\} \underset{n \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} n$

Beraz, $g \circ f(n) = n \in \mathbb{N}$

⑨

$C = \{x^2 \text{ non } x \in \mathbb{N}\}$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

a) $f(x) = |x|$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Ez!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 \neq x_2$

Kontra Adibidea:

$f(-1) = f(1) = 1$

$x_1 = -1 \quad x_1 \neq x_2$

$x_2 = 1$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow |x| = y$

$g(x) = x^2$

$g: \mathbb{N} \to C$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} \quad g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \underset{x \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in C \quad \exists x \in \mathbb{N}$ non $g(x) = y$ Bai!

$g(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y} \underset{y \in C}{\Rightarrow} x = y$

$h: C \to \mathbb{N}$

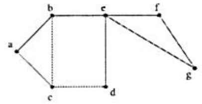
$h(x) = +\sqrt{x}$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in C \quad h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

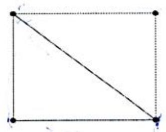
Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in C$ non $h(x) = y$ Bai!

$h(x) = y \Rightarrow \sqrt{x} = y \underset{x \in C}{\Rightarrow} x = y$



1.11. Izan bedi $G$ begizta gabeko grafo ez zuzendua non erpin bakoitzaren gradua $k$ edo handiagoa den, $k$ osoko positibo bat izanik. Frogatu $G$-n badagoela $k$ luzerako bide irekia.

1.12. Irudiko grafoa izanik, esan erpin bikote bakoitzerako 5 luzerako zenbat ibilaldi dauden.



## 2. Azpigrafoak. Osagarria. Isomorfismoak.

2.1. Izan bedi $G$ begizta gabeko grafo konektatu ez zuzendua eta $\{a, b\}$ bere ertz bat. Frogatu $\{a, b\}$ ertza ziklo baten zatia dela baldin eta soilik baldin ertz hau kenduz (baina ez $a$ eta $b$ erpinak) grafoak konektatuta jarraitzen badu.

2.2. Izan bedi $G$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, 10 erpinekoa, non $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 5$, $d(v_5) = 1$, $d(v_6) = 2$, $d(v_7) = 5$, $d(v_8) = 2$, $d(v_9) = 3$, $d(v_{10}) = 2$. Kalkulatu erpinen gradua grafo osagarrian.

2.3. Izan bedi $G$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $v$ erpin eta $e$ ertz dituena. Zenbat ertz ditugu $\overline{G}$ grafoan?

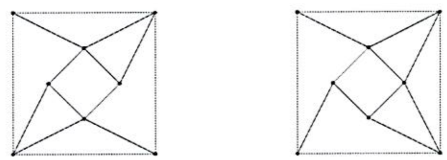
2.4. Frogatu kuboa grafo zatibikoa dela.

2.5. Izan bedi $G$, $n$ erpineko zikloa. Frogatu $G$ eta $\overline{G}$ isomorfoak direla baldin eta soilik baldin $n = 5$.



2.6. Honela definitzen da $W_n$ grafoa, $n \geq 3$ erradioko gurpila: $n$ luzerako zikloa dugu eta gainera beste erpin bat zikloko $n$ erpinei albokoa dena. Badago grafo osatu bati isomorfoa den $W_n$ graforik?

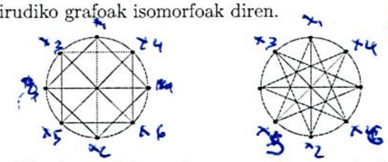
2.7. Irudiko bi grafoentzat kalkulatu erpin bakoitzaren gradua. Isomorfoak dira?



2.8. (a) $G_1$ eta $G_2$ begizta gabeko grafo ez zuzenduak izanik, frogatu $G_1$ eta $G_2$ isomorfoak direla baldin eta soilik baldin $\overline{G_1}$ eta $\overline{G_2}$ isomorfoak badira.

(b) Aztertu irudiko grafoak isomorfoak diren.

Ez dira isomorfoak

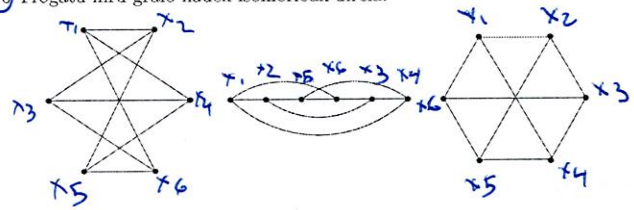


2.9. (a) Izan bedi $G$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n$ erpinekoa. Baldin $G$ eta $\overline{G}$ isomorfoak badira, zenbat ertz ditu $G$ grafoak?

(b) Aurkitu lau eta bost erpinerako adibideak.

(c) Frogatu erpin kopurua $4k$ edo $4k + 1$ izan behar dela, $k$ izanik osokoren bat.

2.10. Frogatu hiru grafo hauek isomorfoak direla.



# GRAFOAK

## 1. Definizioak. Graduak. Ibilaldiak.

1.1. Gizon batek ibaia zeharkatu behar du ezkerreko aldetik eskuinekora txalupa batez, eta berarekin eraman behar ditu otso bat, ardi bat eta zaku aza. Txalupan gizona eta beste objektu batentzat bakarrik dago lekua (otsoa edo ardia edo zaku aza). Gainera gizonak ezin du utzi ardia bakarrik otsoarekin, ezta ere zaku aza ardiarekin. Nola zeharkatuko du ibaia? Eraiki grafo ez zuzendua non erpinek adieraziko duten eman daitezkeen konfigurazio guztiak: gizona eta hiru objektuak ezkerrean eta eskuinean ezer ez, gizona, otsoa eta ardia ezkerrean eta zaku aza eskuinean, etab. Bi erpinen artean ertza ipiniko dugu baldin konfigurazio batetik bestera igaro badaiteke txalupaz ibaia behin zeharkatuz. Determinatu gizonak bere objektuekin ibaia zeharkatzeko era desberdinak.

1.2. Baldin $G$ begizta gabeko grafo ez zuzenduan $v$ erpin eta $e$ ertz baditugu, frogatu $2e \leq v^2 - v$ betetzen dela.

1.3. Deduzitu grafo edo multigrafo hauen erpin kopurua.

(a) $G$-k bederatzi ertz ditu eta erpin guztiak 3 gradukoak dira.

(b) $G$ erregularra da eta 15 ertzekoa.

(c) $G$-k 10 ertz ditu, bi erpin 4 gradukoak eta beste guztiak 3 gradukoak.

1.4. Izan bedi $G$ grafo ez zuzendua. Zein da erpin kopururako litekeen balio handiena baldin 19 ertz baditugu eta erpin bakoitzaren gradua gutxienez 4 bada?

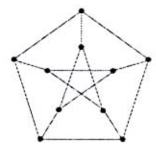
1.5. Izan bedi $G$ begizta gabeko grafo ez zuzendua eta 3-erregularra. Baldin $|E| = 2|V| - 6$, kalkulatu $|V|$ eta $|E|$.

1.6. Izan bedi $G$ grafo ez zuzendua, $n$ erpin eta $e$ ertz dituena, $\delta$ izanik grafoko erpinen graduetatik txikiena eta $\Delta$ handiena. Frogatu $\delta \leq 2e/n \leq \Delta$ betetzen dela.

1.7. Frogatu grafo 3-erregular orok erpin kopuru bikoitia duela.



1.8. Izan bedi $G$ grafo ez zuzendu konektatua. Bi erpinen arteko *distantzia* deituko diogu hauen arteko bide motzenaren luzerari. Grafoaren *diametroa* deituko diogu erpinen arteko distantzia handienari.



(a) Zein da irudiko grafoaren diametroa?

(b) Grafoaren erpinek konputagailuak adierazten badituzte eta ertzek hauen arteko komunikazio lineak, nola interpretatuko genuke grafoaren diametroa?

(c) Grafoaren diametroa $d$ bada, $n$ erpin kopurua eta $\delta$ erpinen gradurik handiena, frogatu:

$$n \leq 1 + \delta + \delta(\delta - 1) + \delta(\delta - 1)^2 + \ldots + \delta(\delta - 1)^{d-1}$$

(d) Interpretatu emaitza hau konputagailu sarearen adibiderako.

1.9. Jauregiko gelak iratxoz josita daude, baina ohitura bitxia dute: ate kopuru bikoitiko geletan bakarrik daude. Jauregiak sarrerako ate bakarra du. Frogatu beti joan gaitezkeela iratxorik gabeko gela batera.

1.10. Irudiko grafoan definitu

(a) $b$-tik $d$-rako ibilaldi bat katea ez dena.

(b) $b - d$ kate bat bidea ez dena.

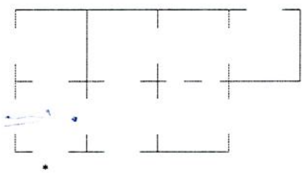
(c) $b$-tik $d$-rako bide bat.

(d) $b$-tik $b$-rako ibilaldi itxi bat zirkuitua ez dena.

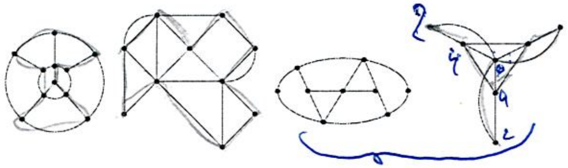
(e) $b$-tik $b$-rako zirkuitu bat zikloa ez dena.

(f) $b$-tik $b$-rako ziklo bat.

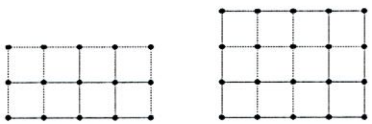
3.8. Irudiko labirintuan izarra dagoen puntutik abiatuz itzul gaitezke berriz puntu honetara gela guztietatik igaro ondoren, inguruko pasabidea barne, baldin ate bakoitza gehienez behin zeharkatu behar bada?



3.9. Irudiko grafoetan bilatu ziklo hamiltondarra. Ez badago bilatu bide hamiltondarra.

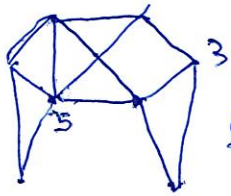


3.10 (a) Grafo hauek badute ziklo hamiltondarrik?



(b) Izan bedi grafo bat $p$ lerro eta $q$ zutabeko sarea. Frogatu ziklo hamiltondarra duela baldin eta soilik baldin $p$ edo $q$ bikoitia bada.

3.11 ?(a) Marraztu begizta gabeko grafo bat, $n$ erpinduna, bide hamiltondarra duena baina $d(x)+d(y) < n-1$ izanik bi erpin determinaturako.






Marraztu begizta gabeko grafo bat ziklo hamiltondarra duena baina $d(x)+d(y) < n$ izanik albokoak ez diren bi erpin determinaturako.

3.12. Hamabi gonbidatu datoz afaltzera. Hauetako bakoitza gutxienez beste seirekin elkar ezaguna da. Mahai baten inguruan eser daitezke baldin gonbidatu bakoitzaren bi aldeetan honen ezagunak egon behar badira?

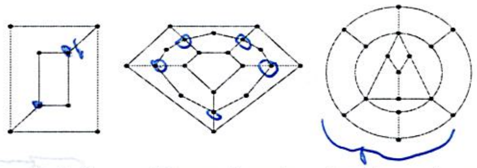
3.13. Hamaika ikasle afaltzera aterako dira egun batzutan. Mahaiaren inguruan eseriko dira eta afari bakoitzean ikasle bakoitzak mahaikide desberdinak izan behar ditu ondoan. Zenbat egunetan egin daiteke hau? Idatzi aukera denak.

3.14. Izan bedi $G$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, 6-erregularra eta 11 erpinekoa. Frogatu baduela ziklo hamiltondarra.

3.15. Izan bedi $G$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $k$-erregularra eta $|V| \geq 2k+2$ izanik. Frogatu grafo osagarriak ziklo hamiltondarra duela.

3.16. Izan bedi $C_n$ ziklo ez zuzendua, $n \geq 5$ erpinekoa. Frogatu grafo osagarriak ziklo hamiltondarra duela.

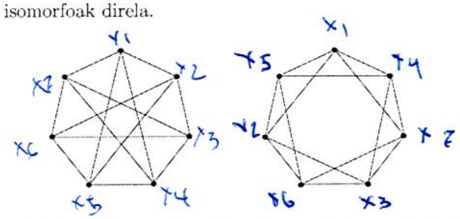
? 3.17. Frogatu grafo hauek ez dutela ziklo hamiltondarrik.



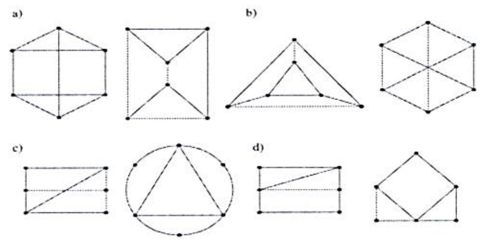
3.18 (a) Izan bedi $K_{m,n}$ zatibiko grafo osatua, dagokion erpin partizioa $\{V_1, V_2\}$ izanik. (i) Zein da $V_1$-eko erpinen gradua eta $V_2$-ko erpinena? (ii) Noiz du grafoak zirkuitu eulertarra $m$ eta $n$ erpin kopuruen arabera? (iii) Noiz du grafoak ziklo hamiltondarra $m$ eta $n$-ren arabera?

(b) Izan bedi $K_{m,n}$ zatibiko grafo osatua, 16 ertz dituena. Aurkitu $m$ eta $n$ erpin kopuruak, $m \leq n$, bi kasu hauetan: (i) grafoak zirkuitu eulertarra eta ziklo hamiltondarra du, (ii) grafoak zirkuitu eulertarra du baina ez ziklo hamiltondarra.

2.11. Frogatu isomorfoak direla.



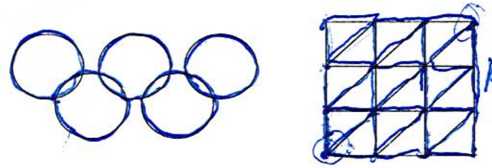
2.12. Grafo hauek binaka hartuz (lau bikote), aztertu isomorfoak diren edo ez.




## 3. Grafo Eulertar eta Hamiltondarrak.

3.1. Datozen bi grafoetarako esan ea zirkuitu edo kate eulertarrik duten.

Zirkuitu eulertarra



Kate eulertarra 2 ertz bakoiti ditu soilik

3.2. Aztertu $n$-ren zein baliotarako $K_n$-k duen zirkuitu eulertarra. Zein baliotarako du kate eulertarra baina ez zirkuitu eulertarra?

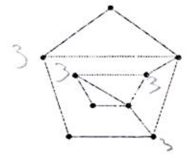


3.3. Dominoko honako 10 piezak ditugu:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}$$

Posible al da pieza guztiak errenkada itxi bat osatuz jartzea? Hala bada, eman ezazu piezen kokapena.

3.4. (a) Irudiko grafoan aurkitu bi kate (ireki), disjuntuak eta grafoko ertz guztiak hartzen dituztenak.



(b) Izan bedi $G$ grafo konektatua, $k$ erpin gradu bakoitikoak dituena. Frogatu existitzen direla $k/2$ kate (ireki), disjuntuak eta ertz guztiak hartzen dituztenak.

(c) Izan bedi $G$ grafo konektatua, $k$ erpin gradu bakoitikoak dituena. Zenbat ertz gehitu behar dizkiogu, gutxienez, zirkuitu eulertarra izan dezan? Nola erantsiko dizkiogu ertz hauek?

3.5. Mugi dezakegu zaldia xake-taulan, honek urrats batean egin ditzakeen mugimendu guztiak, bakoitza behin, burutuz? Xake-taulak $8 \times 8$ lauki ditu, eta bestalde bi laukiren arteko mugimendua osatutzat emango dugu zaldiak urratsa noranzko batean edo bestean ematean.Egin gauza bera alfilarentzat eta dorrearentzat.

3.6. Grafo konektatuen adibideak eman non:

(a) Ez dago zirkuitu eulertarrik eta ziklo hamiltondarrik ere ez.

(b) Zirkuitu eulertarra dago baina ez ziklo hamiltondarrik.

(c) Ziklo hamiltondarra dago baina ez zirkuitu eulertarrik.

(d) Ziklo hamiltondarra eta zirkuitu eulertarra daude.

3.7. Grafo batek zirkuitu eulertarra badu eta hau baita ere ziklo hamiltondarra bada, nolakoa da grafoa?

(3.15)

$G=(V,E)$ $\qquad\qquad$ $\overline{G}=(V,\overline{E})$

$|V|=n\geq 2k+2$ $\quad\xrightarrow[\text{Osagarria}]{}\quad$ $|V|=n\geq 2k+2$

$|E|=m$ $\qquad\qquad$ $|\overline{E}|=n-1-k\Rightarrow$

$\cancel{\sum d(x)=2m\Rightarrow kn=2m\Rightarrow m=\frac{kn}{2}}$

G hamiltondarra:

$d(x)\geq\frac{n}{2}\Rightarrow n-1-k\geq\frac{n}{2}\Rightarrow n-1-\frac{n+2}{2}\geq\frac{n}{2}\Rightarrow\frac{2n-2-n+2}{2}\geq\frac{n}{2}$

$\frac{n-2}{2}\geq k$

$\frac{n}{2}\geq\frac{n}{2}$

(3.16)

$G=(V,E)$ $\qquad\qquad$ $\overline{G}=(V,\overline{E})$

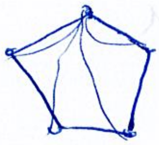
$|V|=n\geq 5$ $\quad\Rightarrow\quad$ $|V|=n\geq 5$

$|E|=n\geq 5$ $\qquad\qquad$ $|\overline{E}|=$ ~~...~~ $\frac{n(n-1)}{2}-n$ en ?

$d(x)\geq\frac{n}{2}\Rightarrow$

$\sum d(x)=2n\Rightarrow n(n-1)=2n\Rightarrow n^2-n=2n\Rightarrow n^2-3n=0$ $\boxed{n=3}$

$|\overline{E}|=\cancel{(n-1)-m}\ \frac{n(n-1)}{2}-n$

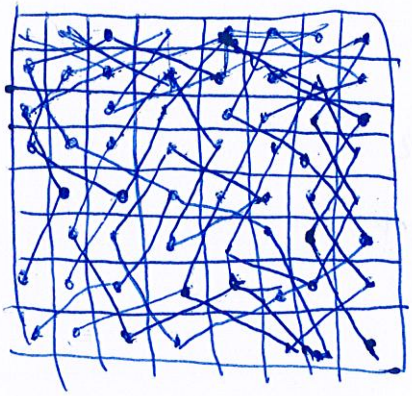


$\cancel{d(x)\geq\frac{n}{2}\Rightarrow(n-1)-n\geq\frac{n}{2}}\Rightarrow 5-1-5\geq\frac{5}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2}\geq 5$

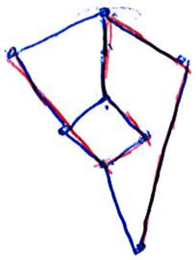
$d(x)\geq\frac{n}{2}\Rightarrow\frac{n(n-1)}{2}-n\geq\frac{n}{2}\Rightarrow\frac{n^2-3n}{2}\geq\frac{n}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow n^2-3n\geq n\Rightarrow n^2-5n\geq 0\Rightarrow\boxed{n\geq 5}$

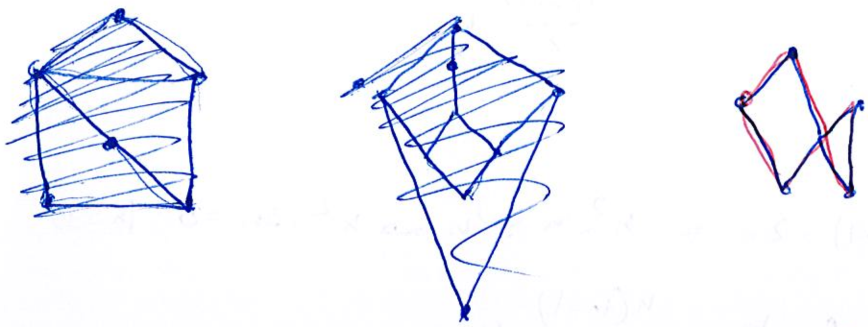


3.6

a) Ez dago zirkuitu eulertarrik eta ziklo hamiltondarrik.



b) Zirkuitu eulertarra dago baina ez ziklo hamiltondarrik.



c) Ziklo hamiltondarra bai baina ez zirkuitu eulertarrik

d)

$n = 5 \Rightarrow G \cong \overline{G}$

$G = (V, E)$

$|V| = 5$

$|E| = m = 5$

Zikloa denez, $m = 5$

Osagarria

$\overline{G} = (V, \overline{E})$

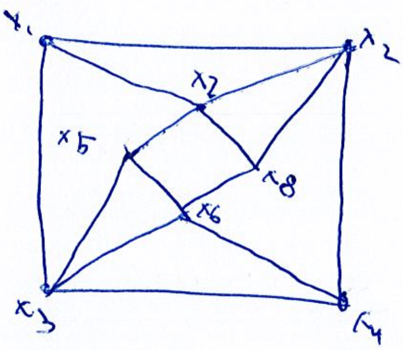
$|V| = 5$

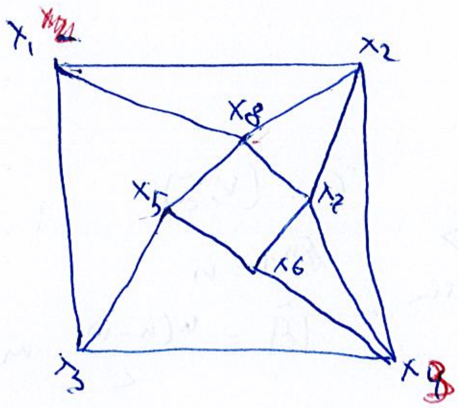
$|\overline{E}| = \frac{n(n-1)}{2} - m = \frac{5(4)}{2} - 5 = 5$

Beraz, $|V| = |V|$ eta $|E| = |\overline{E}|$ beraz, isomorfoak direla esan ahal dira

$G \cong \overline{G}$

2.2



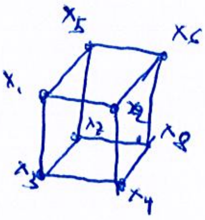




$d(x_1) = 3$
$d(x_2) = 4$
$d(x_3) = 4$
$d(x_4) = 3$
$d(x_5) = 3$
$d(x_6) = 4$
$d(x_7) = 4$
$d(x_8) = 3$

$d(x_1) = 3$
$d(x_2) = 4$
$d(x_8) = 3$
$d(x_4) = 4$
$d(x_5) = 3$
$d(x_6) = 3$
$d(x_7) = 4$
$d(x_8) = 4$

Ez dira isomorfoak bi grafoen gradualak eta erpinen inguruak eta lotenagoak ez direlako berdinak.

(2.4)



Zatibiko grafoa izateko:

$V_1 \cup V_2 = V$ eta $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $V_2 = \{x_5, x_6, x_7, x_8\}$

$\mathcal{E} = \{\{x_1, x_5\}, \{x_2, x_6\}, \{x_3, x_7\}, \{x_4, x_8\}\}$

(2.5)

$G = (V, \mathcal{E})$

$|V| = n$ $\bar{G} = (V, \bar{\mathcal{E}})$

$|\mathcal{E}| = m$ $\xRightarrow{\text{osagarria}}$ $|V| = n$

$|\bar{\mathcal{E}}| = \frac{n(n-1)}{2} - m$

Frogatzeko $\underline{G \cong \bar{G} \Leftrightarrow n = 5}$

$\underline{G \cong \bar{G} \Rightarrow n = 5}$

$G \cong \bar{G}$ izateko $|V| = |V|$ eta $|\mathcal{E}| = |\bar{\mathcal{E}}|$ izan behar dira.

$|\mathcal{E}| = |\bar{\mathcal{E}}| \Rightarrow m = \frac{n(n-1)}{2} - m \Rightarrow 2m = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow m = \frac{n(n-1)}{4}$

Zikloa bada, $n = m$

$n = \frac{n(n-1)}{4} \Rightarrow 4n = n(n-1) \Rightarrow 4n = n^2 - n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ \underline{\underline{n = 5}} \end{cases} \Rightarrow$ ezin da izan 0 erpineko zikloa

1.10

a) b tik d-rako ibilbide luzeena ez dena.

b, e, g, e, d

b) b-d luzeena bidea ez dena.

b, e, f, g, e, d

c) b tik d-rako bide bat

b, a, c, d

d) b tik b-rako ibilbidi itxi bat zirkuitua ez dena

b, e, g, e, b

e) b tik b-rako zirkuitu bat ziklioa ez dena.

b, e, g, f, e, b

f) b tik b-rako ziklo bat.

b, a, c, d, e, b.

23

$G = (V, E)$

$|V| = v$

$|E| = e$

$\Longrightarrow$

$\bar{G} = (V, \bar{E})$

$|V| = v$

$|\bar{E}| = \frac{v(v-1)}{2} - e$

$\sum d(x) = 2m \Rightarrow (v-1)v = 2e \Rightarrow e = \frac{v(v-1)}{2}$

(1.4)

$G=(V,E)$

$|V|=n$

$|E|=19$

$d(x)\geq 4$

teorema: $\sum d(x)=2\cdot m \Rightarrow 4n=38 \Rightarrow n=\frac{38}{4}=9'5$ ezinda izan.

$\sum d(x)=2\cdot m \Rightarrow 4(n-1)+6=38 \Rightarrow 4n-4+6=38 \Rightarrow 4n=36 \Rightarrow \boxed{n=9}$

$n=9$ izango da gehienez.

(1.5)

$G=(V,E)$

$|V|=n=12$

$|E|=2n-6 \Rightarrow 18$

3-erregularra

$\sum d(x)=2m \Rightarrow 3n=4n-12 \Rightarrow \boxed{n=12}$

(1.7)

$G=(V,E)$

$|V|=n$

$|E|=m$

3-erregularra

teorema: $\sum d(x)=2m \Rightarrow 3n=2m \Rightarrow n=\frac{2m}{3}$

n positiboa izateko 3-ren multiploa izango behar da erta kopurua, eta hori birekin biderkatu eskero beti zenbaki bikoitia lortuko d

(18)

alkatea eta 4 zinegotzi aukeratu, Guztira 22 izen.

<u>alkatetzako</u> <u>zinegotziak</u>

22 aukera   21 auk

~~n = 22~~

r = 1

Ordena? Bai! ~~Ez!~~

Errep? Ez!

$$V_{(n,r)} = \frac{22!}{(22-21)!} = \frac{22!}{20!} = 462$$

$$\cancel{C_{(n,r)} = \frac{V_{(n,r)}}{P_{(r)}} = \frac{22!}{21!\cdot 1!} = 22 \text{ aukera}}$$

Zinegotzi izateko:

n = 21

r = 4

Ordena? Ez!

Errep? Ez

$$C_{(n,r)} = \frac{21!}{17!\cdot 4!} = 5985 \text{ aukera}$$

$C_{(n,r)} + V_{(n,r)} = 5985 + 462 = 6442$ era desberdin daude.

(21)

Fortran - 3 eta C++ - 4

Guztira 7

<u>7auk</u> <u>6auk</u> <u>5auk</u> <u>4auk</u> <u>3auk</u> <u>2auk</u> <u>1auk</u>

n = 7

r = 7

ordena? Bai!

Errep? Ez

$P(7) = 7! = 5040$ era desberdin

txandakatuta agertzeko era bakarra

<u>C++</u> <u>For</u> <u>C++</u> <u>F</u> <u>C++</u> <u>F</u> <u>C++</u>

Bi azpiproblematan banatuko ditugu.

C++

n = 4

r = 4

Ordena? Bai!

Errep? Ez!

$P(4) = 4! = 24$

Fortrain

n = 3

r = 3

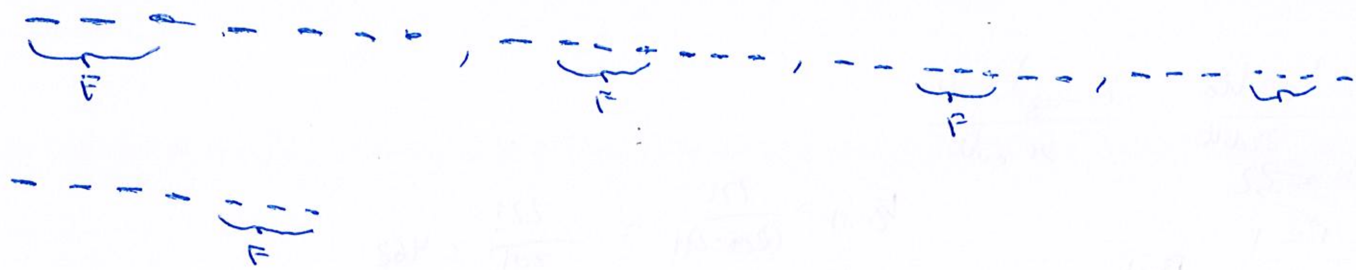
ordena? Bai

Errep? Ez

$P(3) = 3! = 6$

$P(4)\cdot P(3) = 144$ aukera desberdin.

Fortrain-en liburuak elkarren ondoan egon behar badira.




Beraz, $144 \cdot 5 = 720$ aukera.

(21)

10 txanpon

5 lagun

a)

$n = 5$ murrizketa gabe

$r = 10$

Ordena? Ez

Errep? Bai!

$\cancel{CR(\ldots)}$ $CR(n,r) = C(n-1+r, r) = \dfrac{14!}{4!\,10!} =$

$= 1001$ aukera desberdin daude.

b)

$n = 5$

$r = 5$

Ordena? Ez

Errep? Bai!

$CR(n,r) = C(n+r-1, r) = \dfrac{9!}{4!\,5!} = 126$ aukera desberdin.

c)

$n = 5$

$r = 8$

Ordena? Ez

Errep? Bai!

$Cr(n,r) = C(n+r-1, r) = \dfrac{12!}{4!\,8!} = 495$ aukera desberdin.

# Permutazioak. Ariketak

1

"IKER"

a) murrizketarik gabe

$n = 4$ elementu

$r = 4$

Ordena garrantzitsua da? Bai!

Errepikapenak? Ez!

Beraz, Permutazio bat izango dugu $\Rightarrow P(4) = 4! = 24$

b) Zenbat hasi "i" hizkiaz.

$n = 3$

$r = 3$

Ordena? Bai!

Errepikapenik? Ez!

Beraz, Permutazioa izango da $\Rightarrow P(3) = 3! = 6$

IKer, IKre

Irke, Irek

Ierk, Iekr

c) Lehenengo hizkia bokala?

Problema bi azpiproblematan deskonposatuko dugu.

$\underline{I}$ _ _ _ $\rightarrow P_r \left. \begin{matrix} n=3 \\ r=3 \end{matrix} \right\} P(3) = 3! = 6$

$\underline{E}$ _ _ _ $\rightarrow \left. \begin{matrix} n=3 \\ r=3 \end{matrix} \right\} P(3) = 3! = 6$

ordena Bai!

errepikapena Ez!

Batuketaren erregela erabiliz $P_{(3)} + P_{(3)} = 12$ izango dira.

d)

Zenbatek izango dituzte kontsonante aurretik bokale.

Bi azpiproblematan banatuko ditugu:

- Bokalen ordenamenduak ($n=2$, $r=2$, Bai, Ez) $\Rightarrow P_{(2)} = 2! = 2$

- Kontsonanteen ordenamenduak ($n=2$, $r=2$, Bai, Ez) $\Rightarrow P_{(2)} = 2! = 2$

Biderketaren erregelarekin konbinatuko ditugu. $P_{(2)} \cdot P_{(2)} = \boxed{4}$

3

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ abestiak

$A_2 A_1$ _ _ _

$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=3 \\ \text{Bai} \\ \text{Ez} \end{array}\right\} P(3) = 3! = 6$

_ $A_2 A_1$ _ _

$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=2 \\ \text{Bai} \\ \text{Ez} \end{array}\right\} P(3) = 3! = 6$

_ _ $A_2 A_1$ _

$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=3 \\ \text{Bai} \\ \text{Ez} \end{array}\right\} P(3) = 3! = 6$

_ _ _ $A_2 A_1$

$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ r=3 \\ \text{Bai} \\ \text{Ez} \end{array}\right\} P(3) = 3! = 6$

Batuketaren erregela $= P(3) \cdot 4 = \boxed{24}$

Edo

$\boxed{A_2, A_1}, A_3, A_4, A_5$

$\left.\begin{array}{l} n=4 \\ r=4 \\ \text{ordena? Bai} \\ \text{Errep? Ez} \end{array}\right\} P(4) = 4! = \boxed{24}$

1)

U, H, B, M, T, Be

~~Bi zazpi multzotan ordenatuta ditugu!~~

~~U H~~ - - -

$$\left.\begin{array}{l} n=6 \\ r=6 \\ \text{Bai!} \\ \text{Ez!} \end{array}\right\} P(6) = 6!$$

$\overset{\frown}{U\,H}$ _ _ _ _ $\rightarrow P(4) = 4! \Rightarrow 2 \cdot 4! \Rightarrow 10 \cdot 4! = 240$

$6! - 240 = 480$

5

Mississipi

$n = 10$

$r = 10$

Ordena? Bai

Errepikatu? Bai

$n_1 = 4$ ('s' Hizkia)

$n_2 = 4$ ('i' Hizkia)

$n_3 = 1$ ('p')

$n_4 = 1$ ('M')

$$PR(10) = \frac{10!}{4! \cdot 4!} = 6300$$

Konbinazioak. Aribetak

(1) 10 Lagun daude Lantegi batean: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.
Hauteskundeak antolatu dira:

3 kide aukeratu.

$n = 10$

$r = 3$

ord? Bai!

Errep? Ez

$P_{(10)} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

$V_{(10,3)} = \frac{10!}{\cancel{3!}(10-3)!} = 720$

(2)

3 kideko ostututako batzorde bat aukeratu, 3 kideek maila bera.

$n = 10$

$r = 3$

ordenak? Ez

Errepikak? Ez

$C_{(n,r)} = C_{(10,3)} = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = 120$

(15)

$n = 6$

$r = 3$

ordena: Ez!

Errep Ez!

$C_{(6,3)} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \boxed{20}$

(16)

10 neska 8 mutil

Laukotea: 2 neska + 2 mutil

$n = 10$

$r = 2$

$\cancel{P}\ C_{(10,2)} = \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} =$

$n = 8$

$r = 2$

$C_{(8,2)} = \frac{8!}{(\cancel{10}8-2)! \cdot 2!} =$

$C_{(10,2)} \cdot C_{(8,2)} = 1260$

Ariketak,

(8)

Elementuak : 1, 2, 3, 4, 5, 6

2 ta mailako

Ordena Garrantzitsua? Bai!

Elementuak errepikatu? Ez!

$n = 6$

$r = 2$

6 aukl ~~6-1~~ 5 auker

~~$n = 10$~~

~~$r = 6$~~

$V_{(n,r)} = V_{(6,2)} = 30$

Zerrenda: 12, 13, 14, 15, 16, 21, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 56, 61, 62, 63, 64, 65

Bikoteak errepikatzea posible izanik

$n = 6$

$r = 2$

ordena garrantzitsua da

Elementuak errepikatu daitezke

$VR(n,r) = VR(6,2) = 6^2 = 36$

Konbinatoriac (Adibidea & Aldakuntza)

10 Elementu ditugu: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J
4 tamainako Aldakuntzak osatu nahi ditugu: 4 luzera
Zenbat modu Desberdinetara ~~ordenatu~~ Osa daitezke?

$\begin{cases} n = 10 \text{ elem} \\ r = 4 \\ \text{errepikapenik ez} \end{cases}$

A

10 aukera | 9 aukera | 8 aukera | 7 aukera

Ordena garrantzitsua da.

Guztira,

$V(10,4) = 10(10-1)\cdot(9-1)\cdot\ldots = 10\cdot9\cdot8\cdot7 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$

Zerrenda = ~~5040~~ ABCD, ABCE, A…, GHIJ

10 Elemen

Errepikatuzko Aldakuntzak

10 Elementu ditugu: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.
4 tamainako Aldakuntzak
Ordena Garrantzitsua da.
Elementuak Errepikatuta agert daitezke

10 aukera | 10 aukera | 10 aukera | 10 aukera

~~$V(10,4) = 10^4$~~

$VR(10,4) = n^r = 10^4$

Zerrenda: ~~A, A, A, A, …, A, A, A, B~~ AAAA, AAAB, …, JJJJ.

Adibidea (Permutazioekin)

10 Lagun aulki lerro batean eseri nahi ditugu, Bata bestearen aldamenean argazki bat ateratzeko. Zenbat aukera desberdin daude?

$\underbrace{10 aukera \quad 9 aukera \quad 8 a \quad 7 aukera \quad 6 aukera \quad 5 aukera \quad 4 aukera \quad 3 aukera \quad 2 aukera \quad 1 aukera}$

$n=10$

ordena? bai!

Errepikatu? Ez!

Zerrenda: 3628800

Adibidea (Errepikatuzko Permutazioak)

"AMA" hitzaren hizkiak zenbat modutara ordena daitezke?

Hitzak dituen 'A' horiek desberdinak direla pentsatuko dugu

'A'M'A'

Orain Permutazio arrunta dut:

$n=3$ ordena? Bai $P(3)=3!=3\cdot 2=\boxed{6}$

$r=3$ Errepik? Ez

Zerrenda: $\underbrace{A'MA'', A''MA'}_{AMA}, \underbrace{A'A''M, A''A'M}_{AAM}, \underbrace{MA'A'', MA''A'}_{MAA}$

Kontuan hartuta Behin Errepikatuta agertu da, 2A horiek berdinak Direnez hortaz,

$$PR_{2,1}(3)=\frac{P(3)}{2!}=\frac{6}{2}=\boxed{3}$$

(10)

$n=5$

$r=3$

$\overline{\phantom{x}}$ 5 cull $\overline{\phantom{x}}$ 4 cull $\overline{\phantom{x}}$ 3 cull

ordena garrantzitsua? Bai!

Errepika daitezke? Ez!

$V(5,3) = \cancel{5\cdot 3} = \boxed{\cancel{15}}\ 5\cdot 4\cdot 3 = 60$

Zerrenda: $J_1 J_2 J_3$, $J_1 J_2 J_4$, $J_1 J_2 J_5$, ~~$J_1 J_4 J_3$~~, ~~$J_2 J_1$~~

$J_1 J_3 J_4$, $J_1 J_3 J_5$, $J_1 J_4 J_5$, $J_1 J_4 J_2$, $J_1 J_4 J_3$,

(12)

$n=9$

$r=4$

Ordena garrantzitsua da

Errepikapenak egin daitezke.

$VR(9,4) = 9^4 = 6561$

$6561 - 243 = \boxed{6318}$

$VR(9,2) + VR(9,2) + VR(9,2) =$

$= 9^2 + 9^2 + 9^2 = \boxed{243}$

$1\,3\,\overline{9}\,\overline{9}$

$+\ \overline{9}\,1\,3\,\overline{9}$

$+\ \overline{9}\,\overline{9}\,1\,3$

Beste Adib bat (Errepik Permu)

3 marratxo eta 2 puntu

$n=5$ $\underbrace{-\ -\ -}_{n_1=3}\ \underbrace{\cdot\ \cdot}_{n_2=2}$

$r=5$

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

$PR_{3,2} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \boxed{10}$

8

Atzadi: 8

10

~~14~~ Partiduak: 14

aukerak: 3

$n = 3$

$r = 14$

$\underline{3}\ \underline{3}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

Ordenak? Bai

Errep? ~~E~~ Bai!

$V(n, r) = n^r = 3^{14} = 4782969$

9

atzadi: 8

Beneta: 3 esleito, 3 langileri

$n = \cancel{8}\cancel{3}\,8$

$r = \cancel{3}\cancel{8}\,3$

Ordena: ~~Ez~~ Bai

Errepikatu? Ez

$\underline{8\,\text{auk}}\ \ \underline{7\,\text{auk}}\ \ \underline{6\,\text{auk}}$

langileak

$V(\cancel{8}, 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

## Konbinazioak Ariketak

⑥

Ariketak: a, b, c, d, e, f

Ariketak : 6

pertsonak: 3

$\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$

$\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}$

$n = 6$

$r = 3$

~~$V(6,3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$~~

Ordena? ~~Ez! Bai! Ez!~~ Bai!

Errepikatu? Ez!

abc de f

abc df e

abc de f

abc df e

abc fd e

abf cd e

abf dc e

abf de c

abf de c

abcfed

afbedc

afbecd

afebcd

abc $\underline{de}$ $\underline{f}$

Anek ditu~~en~~ ~~kantak~~ ~~kopurua~~.

~~$C(6,3) = \frac{V(n,r)}{P(r)} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!}$~~ $= \boxed{20}$

---

~~$\frac{2!}{(3-2)! \cdot 2!} =$~~

~~abcdef~~

⑦

Gelak : 6

lekuak : 2

$n = 6$

$r = 2$

ordena? Bai

Errep? Ez

$\underline{4}\ \underline{2}$

a elipsoa: ~~$P(4)$~~ ~~$V(4$~~, $P(4) = 4! = 24$

b elipsoa: $P(2) = 2! = 2$

$a \cdot b = 48$

(14)

7 zifra

5 Digitu

$n = 7$     7 aukera 7 aukera 7 aukera 7 aukera 7 aukera

$r = 5$

$V(n,r) = n^r = 7^5 = 16\,807$ a zenbaki osatu daitezke

Ordena? Bai!

Errep? Bai!

Zenbat bikoiti?

$n = 7$

$r = 4$

$V(n,r) = n^r = 7^4 = 2401$

ordena? Bai!

Errep? Bai!

azken digituan 3 posibilitate egongo dira.

Beraz, $2401 \cdot 3 = 7203$ izango dira bikoitiak

Palindromoak izatekoa

$n = 7$

$r = 3$

7 7 7

Ordena? Bai

Errep? ~~Ez~~ Bai

$V(n,r) = n^r = 7^3 = 343$ izango dira palindromoak

(17)

4ko batzordea

9 lagun konteatzeko

$n = 9$

$r = 4$

$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$

Ordena? ~~Bai~~ Ez!

Errep? Ez!

Zenbatetan Ane eta Gema elkarrekin?

A G 7 7

$\boxed{C(7,2) = 21}$

(18)

5 lelu — 1 alkatea, 4 zinegotzi

22 izen

$n = 22$

$r = 4$

Ordena? Ez

Errep? Ez

$C(n,r) = V(22,4) = \cancel{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 175560}$

$= \frac{22!}{(22-4)! \cdot 4!} = 7315$

$n = 22$

$r = 1$

Ordena? Bai

Errep? Ez

$V(n,r) = \frac{22!}{21!} = 22$

$7315 \cdot 22 = \boxed{160930}$

(20)

Fortran 3 → F', F, F''

C++ 4 → $C^{++}, C^{++}_1, C^{++}_2, C^{++}_3$

7 elementu

$n = 7$

Ordena? Bai

Errep? Ez

$P(7) = 7! = \underline{5040}$ eratara

20

<u>Txandaketa</u>

| $C^{++}$ | F | $C^{++}$ | F | $C^{++}$ | F | $C^{++}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~3ault~~ | ~~4ault~~ | ~~2ault~~ | ~~3ault~~ | ~~1ault~~ | | |
| 9ault | 3ault | 3ault | 2ault | 2ault | 6ault | 1ault |

n = 4
r = 4

$P_{(4)} = 4! = 24$

$P_{(3)} = 3! = 6$ → ~~30~~ 144 aukera

Fortran-en liburuak elkarren ondoan.

$\underline{F}$ $\underline{F'}$ $\underline{F''}$ $\underline{\cancel{C^{++}}}$ _ _ _

n = 3
r = 3
Ordena? Bai
Errep? Ez

$\cancel{V_{(n,n)}}\ P_{(3)} = 3! = 6$ aukera daude Fortran-en liburuak jartzeko

$\underbrace{- - -}_{F}\ \underbrace{- - - -}_{C^{++}}$

→ $C^{++}$ $\underbrace{- - -}_{F}$ - - - 2. era

n = 4
r = 4
Ordena? Bai
Errep? Ez

$P_{(4)} = 4! = 24$ → - - $\underbrace{- - -}_{F}$ - - 3. era

→ - - - $\underbrace{- - -}_{F}$ - 4. era

- - - - $\underbrace{- - -}_{F}$ 5. era

Batuketaren-erregela: $P_{(4)} \cdot 5 = 120$

Biderketaren-erregela: $120 \cdot 6 = 720$ modu daude.

?

Fortran-en liburuak eta C++-en liburuak ordenan.

$n = 3$

$r = 3$ $\qquad P(3) = 3! = 6$

Ordena? Bai!

Errep? Ez

$n = 4$

$r = 4$ $\qquad P(4) = 4! = 24$

Ordena? Bai

Errep? Ez

~~Batuketaren erregela = 30~~

Biderketaren - erregela = 144

Bi modutara bestelik jarri ~~ezin~~ daitezkeenez, 288 modu daude

Kodeketa aldatzearekin zera lortu dugu: Errepikatuzko konbinazioen kontaketatik konbinazio arrunten kontaketara pasatzea.

Lehen

Elem: {a, b, c, d, e, f}

$n=6$

Tamaina: $r=4$

Ordena? Ez,

Errepika? Bai!

$CR(n, r) = CR(6,4)$

Orain

Elem {a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3}

$n=9$

$r=4$

Ordena: Ez

Errep: Ez

$CR(n', r) = CR(9,4)$

$n' = n + r - 1$

(23)

8 Bolalo izozki-ulope

Zaporeak: T, M, L, K

$n = 4$

$r = 3$

Ord? Ez

Errep? Bai

T T T, TTM, ..., KKK

| | | |
|---|---|---|
| TTT | T12 | T → TT<br>TT → TTT |
| KTL | KTL | |
| KKL | K1L | K → KK<br>KKL |

$$CR(4,3) = C(4+3-1,3) = C(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \boxed{20}$$

# Errepikatuzko Konbinazioak Adibidea

Demagun $E=\{a,b,c,d,e,f\}$ multzoa dugula, $n=6$ elementu, $r=4$ tamaina. Errepikatuzko Konbinazioak osatu nahi ditugu

Adb: aaaa, aaab, aaac, ..., ffff
aaab = abaa = aaba

Kontaketa egin ahal izateko, honako beste kodeketa hau erabiliko dugu errepik. Konbinazio bakoitza adierazteko

1. Hasteko ordenatuta adieraziko dugu, orden bat finkatuz.

aaaa < aaab < aaac < aaad...

2. Errepikatuzko konbinaketa bakoitza adierazteko; bertan agertzen diren hizkiak eta errepikatzen diren elementuen posizioak adieraziko ditugu.

Adb

| Errepik Konb | Kodeketa berria | azalpena |
| --- | --- | --- |
| aaab → | ab12 → | ab → aab<br>aab → aaab |
| aacc → | ~~ac~~ → ac13 → | ac → aac<br>aac → aacc |
| abcd → | abcd | |
| accc → | ac23 → | acc → acc<br>acc → accc |

Errepikatuak Konbinazioak. Ariketak

(22)

8 pilota txuri

4 ontzi

$n=4$

$r=8$

Ordenak garrantzia? Ez

Errepikapenak? Bai

$CR(4,8) = C(4+8-1,8) = C(11,8) = \frac{11!}{(11-8)!\,8!} = 165$

Ontzi bat bera ere ezin da geratu hutsik

$n=4$ (ontziak)

$r=4$ (kanpote)

Ordena? Ez

Errep? Bai $\quad C_r(4,4) = C(7,4) = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \boxed{35}$

$n=3$ (3 ontzi $Q_1\ Q_2\ Q_3$)

$r=7$

Ordena? Ez

Errep? Bai

$C_r(3,7) = C(9,7) = \frac{9!}{2\cdot 7!} = 36$ $\quad$ Denak batuz: 70

$n=3$

$r=5$

ord ez

Errep Bai

$C_r(3,5) = C(7,5) = \cancel{56}\ 21$

$n=3$

$r=3$

$C_r(3,3) = C(5,3) = 10$

$C_r(3,1) = C(3,1) = 3$

## Kriptografia

### Mezua Kodetu / DesKodetu

"Kaixo" → Mezu hau kodetzea da hizki bakoitzari dagokion zenbakizko $M_i$ lortzea

Zein kodeketa?

Otik 25-erako alfabetoa:

| a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | L | m | ñ | o | p | q | r | s | t | u | v | x | z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |

Kaixo
10 0 8 23 14

Ascii kodeketa erabiliz

| K | a | i | x | o |
|---|---|---|---|---|
| 107 | 97 | 105 | 120 | 111 |

### Mezua Zifratu / Deszifratu

Zifratu

"Kaixo" mezuari Otik 25erako alfabetoan dagokion mezua kodetu

$M_1 = 10 \rightarrow R_1 = 10^3 \bmod 85 = 65$

$M_2 = 0 \rightarrow R_2 = 0^3 \bmod 85 = 0$

$M_3 = 8 \rightarrow R_3 = 8^3 \bmod 85 = 2$

$M_4 = 23 \rightarrow R_4 = 23^3 \bmod 85 = 12$

$M_5 = 14 \rightarrow R_5 = 14^3 \bmod 85 = 24$

$p = 5 \quad q = 15 \quad m = 85, \ r = 3, \ s = 43$

Kaixo = 65 0 2 12 24

Deszifratu

Mezu zifratua hartu

$R_1 = 65 \rightarrow M_1 = 65^{43} \bmod 85 = 10$

$R_2 = 0 \rightarrow M_2 = 0^{43} \bmod 85 = 0$

$R_3 = 2 \rightarrow M_3 = 2^{43} \bmod 85 = 8$

$R_4 = 12 \rightarrow M_4 = 12^{43} \bmod 85 = 23$

$R_5 = 24 \rightarrow M_5 = 24^{43} \bmod 85 = 14$

# Funtzioak

①

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

a)

$f(x) = x + 7$

Funtzioa - $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists f(x)$ Bai!

Injektiboa $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \cancel{7} = x_2 + \cancel{7} \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa $\forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow x + 7 = y \Rightarrow x = y - 7$, Beraz, $y \in \mathbb{Z}$ bada ~~xxx~~ $y - 7 \in \mathbb{Z}$ betetko da.

b)

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = 2x - 3$

Injektiboa $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(x) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - \cancel{3} = 2x_2 - \cancel{3} \Rightarrow \cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa $\forall y \in \mathbb{Z}$ ~~da~~ $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Ez!

$f(x) = y \Rightarrow 2x - 3 = y \Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$

Kontra Adibidea

$y = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} + 3 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

d)

$f(x) = x^2$

Injektiboa: $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Ez!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$

Kontra Adibidea:

$x_1 = -3 \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 9 = 9$

$x_2 = 3$

$x_1 \neq x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists_{x \in \mathbb{Z}} \, f(x_1) = y$ Ez!

$f(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$

Kontra Adibidea:

$y = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

(3)

$g(n) = n + (-1)^n \qquad g(n): \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Injektiboa $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \cancel{f}\, n_1 = n_2$

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + (-1)^{n_1} = n_2 + (-1)^{n_2} \Rightarrow n_1 \cancel{\neq} n_2$

~~Kontra Adibidea~~

$n_1 \in \mathbb{Z}$

Kasuak bereiztu:

$n_1$ Bik $= n_2$ Bik $\Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

$n_1$ Bak $= n_2$ Bak $\Rightarrow n_1 - 1 = n_1 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

$n_1$ Bak $= n_2$ Bik $\Rightarrow n_1 - 1 = n_2 + 1$ - (Kontraesana) $f(n_1) \neq f(n_2)$

Suprajelltiboa $\forall y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}$ non $f(x) = y$

$n + (-1)^n = y \Rightarrow$

~~Ariozo Bakoitza n Bakl denean sorta akot da tere etc,~~ $\cancel{\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}}$
~~da.~~
~~Baina ...~~

$\cancel{y=0} \Rightarrow n=1$

Kasuak bereiztu:

- $n$ Bikoitiak, $n+1 = y \Rightarrow n = y-1$
- $n$ Bakoitiak, $n-1 = y \Rightarrow n = y+1$

①

g)

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

Injelltiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 3} = \frac{1}{x_2 - 3} \Rightarrow x_2 - 3 = x_1 - 3 \Rightarrow x_2 = x_1$

funtzioa: $\forall x \in \mathbb{Z} \to \exists f(x)$ Ez!

Kontra Adibidea:

$x = 3 \Rightarrow \nexists f(3)$ Ez dago ongi definituta.

②

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$g: S \to S$

$g(n) = \max\{3, n\}$

funtzioa. $x \in S \to \exists g(n)$ Bai!

Injelltiboa $\forall (x_1, x_2) \in S \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow \max\{3, n_1\} = \max\{3, n_2\} \Rightarrow$ Kontra Adibidea $n_1 = 2 \Rightarrow \max\{3, 2\} = 3$
$n_2 = 3 \Rightarrow \max\{3, 3\} = 3$

Suprajekttiboa $\forall y \in S\ \exists n \in S$ non $g(n) = y$

$g(n) = y \Rightarrow \max\{3, n\} = y$

Kontra Adibidea

$y = 1 \Rightarrow \max\{3, n\} \neq 1$ max $y \geq 3$ izango da beti.

③

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

~~Ezta~~ Injekttiboa $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n + (-1)^n = n + (-1)^n \Rightarrow \underline{n_1 = n_2}$

Posibilitateak

$n_1$ Bikoitia $= n_2$ Bikoitia $\Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

$n_1$ Bakoitia $= n_2$ Bakoitia $\Rightarrow n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

$n_1$ Bikoitia $= n_2$ Bakoitia $\Rightarrow n_1 + 1 \neq n_2 - 1 \Rightarrow$ (Kontraesana)

Suprajekttiboa: $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ non $g(n) = m$ Bai!

$g(n) = m$

Bi aukera

$n_1$ Bikoitia: $n + 1 = m \Rightarrow n = m - 1$

$n_2$ Bakoitia: $n - 1 = m \Rightarrow n = m + 1$

6

$f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = x-1$, $g(x) = 3x$ eta $h(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ bikoitia} \\ 1 & x \text{ bakoitia} \end{cases}$

a)

$f \circ g \Rightarrow f(g(x)) \Rightarrow 3x-1$

$g \circ f \Rightarrow g(f(x)) = 3x-3$

$g \circ h \Rightarrow g(h(x)) = \begin{cases} g(0) & x \text{ bikoitia} = 0 \\ g(1) & x \text{ bakoitia} = 3 \end{cases}$

$h \circ g \Rightarrow h(g(x)) = \begin{cases} 0 & 3x \text{ bikoitia} \\ 1 & 3x \text{ bakoitia} \end{cases}$

$f \circ (g \circ h) \Rightarrow f(g(h(x))) = \begin{cases} f(0) & x \text{ bikoitia} = -1 \\ f(3) & x \text{ bakoitia} = 2 \end{cases}$

$f(g(x)) \circ h \Rightarrow f(g(x)) = 3x-1$

$f'(h(x)) = \begin{cases} f'(0) & x \text{ bik} = -1 \\ f'(1) & x \text{ bak} = 2 \end{cases}$

b)

$f^2 \Rightarrow f \circ f \Rightarrow f(f(x)) = x-2$

$f^3 \Rightarrow f \circ f^2 \Rightarrow f(f^2(x)) = x-3$

$g^2 \Rightarrow g \circ g \Rightarrow g(g(x)) = 3 \cdot (3x) = 9x$

$g^3 \Rightarrow g \circ g^2 \Rightarrow g(g^2(x)) = 27x$

$h^2 \Rightarrow h \circ h \Rightarrow h(h(x)) \begin{cases} h(0) & x \text{ bik} = 0 \\ h(1) & x \text{ bak} = 1 \end{cases}$

$h^3 \Rightarrow h \circ h^2 \Rightarrow h(h^2(x)) = \begin{cases} h(0) & x \text{ bik} = 0 \\ h(1) & x \text{ bak} = 1 \end{cases}$

(7)

$f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = \cancel{2n}\ n+1$ , $g(n) = \begin{cases} \max\{0, n-1\} \end{cases}$

Injektiboa $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Bai!

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \overset{n_1+1 = n_2+1}{\cancel{2n_1 = 2n_2}} \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa $\forall m \in \mathbb{N} \to \exists n \in \mathbb{N}$ non $f(n) = m$ Ez!

$m = f(n) \Rightarrow \cancel{m = 2n \Rightarrow n = \frac{m}{2}}$ $m = n+1 \Rightarrow n = m-1$

Kontra Adibidea

$m = 0 \Rightarrow \cancel{n = \frac{0}{2} \in \mathbb{N}}$ $n = -1 \notin \mathbb{N}$

$g(n) = \max\{0, n-1\}$

Injektiboa $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

Kontra Adibidea

$n_1 = 1 \Rightarrow \max\{0, 1-1\} = 0$
$n_2 = 0 \Rightarrow \max\{0, -1\} = 0 \quad n_1 \neq n_2$

Suprajektiboa $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ non $g(n) = m$ Bai!

$g(n) = m \Rightarrow \max\{0, n-1\} = m \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \Rightarrow n = 0 \\ m = n-1 \Rightarrow \boxed{n = m+1} \end{cases}$

Frogatuko dugu existitzen dela $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$

$g \circ f = g(f(x)) = \max\{0, \overset{n+1-1}{\cancel{2n-1}}\}$ Baldin, $n \in \mathbb{N}$ , $\max\{0, \cancel{2n-1}\} \in \mathbb{N}$

$\cancel{\max\{0, 2-1\} = \max\{0, 1\} = 1 \in \mathbb{N}}$ $\max$ $\underline{g(f(n)) = n \in \mathbb{N}}$

$f \circ g = f(g(n)) =$

(8)

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = 2n$

Injektiboa $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{N} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Bai!

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ non $f(n) = m$ Ez!

$f(n) = m \Rightarrow 2n = m \Rightarrow n = \frac{m}{2}$

Kontra Adibidea

$m = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ bikoitia} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ bakoitia} \end{cases}$$

Injektiboa $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Ez!

Kontra Adibidea

$n_1 = 2 \Rightarrow g(2) = \frac{2}{2} = 1$

$n_2 = 1 \Rightarrow g(1) = \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow \boxed{n_1 \neq n_2}$

Suprajektiboa $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad g(n) = m$ Bai!

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \ n \text{ Bik} & \Rightarrow \frac{n}{2} = m \Rightarrow n = 2m \in \mathbb{N} \\ \frac{n+1}{2} \ n \text{ Bak} & \Rightarrow \frac{n+1}{2} = m \Rightarrow n = 2m - 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Konposizioa

$$g \circ f = 1_{\mathbb{N}} \Rightarrow g(f(n)) = \begin{cases} \frac{(2n)}{2} = n \Rightarrow g(f(n)) = n \in \mathbb{N} \\ \frac{2n+2}{2} \Rightarrow n+1 = g(f(n)) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(9)

$C = \{x^2 \text{ που } x \in \mathbb{N}\}$

$f: \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{N}$

$f(x) = |x|$

Injektikos $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}$ η $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Εξ!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |x_1| = |x_2|$

Kontra Adibidea

$x_1 = -2$ $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ ~~2=2~~ $|x| = |x| \Rightarrow |-2| = |2| \Rightarrow 2 = 2$

$x_2 = 2$ $\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow -2 \neq 2$

Surjektikos $\forall y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}\ f(x) = y$

$f(x) = y \Rightarrow |x| = y \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

(10)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x+y, x-y)$

Frogatuko dugu bijektiboa dela.

Injektiboa $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix}$ Bai!

$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2, x_2-y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ x_1-y_1 = x_2-y_2 \end{cases} \Rightarrow \Big\{ \; 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = x_2}}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ x_1-y_1 = x_2-y_2 \end{cases} \Rightarrow 2y_1 = 2y_2 \Rightarrow \underline{\underline{y_1 = y_2}}$

Suprajektiboa $\forall (m,n) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists (x,y)$ non $f(x,y) = (n,m)$ Bai!

$f(x,y) = (n,m) \Rightarrow (x+y, x-y) = (n,m) \Rightarrow \begin{cases} x+y = n \\ x-y = m \end{cases}$

$f^{-1}$

$\left.\begin{matrix} x+y = n \\ x = m+y \end{matrix}\right\} \; 2y = n-m$

$2x = n+m$

Funtzioa bijektiboa izanik alderantzizkoa lortu genezake.

$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(z,t) = \left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right)$

## Aplikazio Funtzioak

$g(x) = x^2$

Injektiboa: $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{N} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \cancel{\mathbb{N}}^{C} \quad \exists x \in \cancel{C}^{\mathbb{N}}$ non $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{\underset{\substack{\parallel \\ y \in C}}{x^2}} \in \mathbb{N} \Rightarrow x = x \in \mathbb{N}$

~~Kontra Adibidea~~

$\cancel{y = 2}$

$h(x) = \sqrt{x}$

Injektiboa: $\forall (x_1, x_2) \in C \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in C$ non $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow x \in C \Rightarrow x^2 \in \mathbb{N} \quad x^2 = y^2 \Rightarrow y = x \in \mathbb{N}$

b)

$h \circ g \circ f \Rightarrow h \circ g(f(x)) \Rightarrow h \circ g(f(x)) = h(g(x)) = h(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

$h \circ g \circ f = x$

⑩

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x+y, x-y)$

Frogatullo dugo bijeltiboa dela:

Injeltiboa: $\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix}$ Bai!

$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2, x_2-y_2)$

$$\begin{matrix} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ -1(x_1-y_1 = x_2-y_2) \end{matrix} \Big\} \; 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$2y_1 = 2y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Suprajeltiboa: $\forall (m,n) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists (x,y)$ non $f(x,y) = (m,n)$

$f(x,y) = (m,n) \Rightarrow (x+y, \cancel{x}\, x-y) = (m,n) \Rightarrow \begin{matrix} x+y = m \Rightarrow y = m-x \\ x-y = n \Rightarrow x = n+y \end{matrix}$

$f^{-1} \Rightarrow \begin{matrix} y = m-x \\ x = n+y \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} y = m-n-y \Rightarrow 2y = m-n \Rightarrow y = \frac{m-n}{2} \\ x = n+m-x \Rightarrow 2x = n+m \Rightarrow x = \frac{m+n}{2} \end{matrix}$

$f^{-1}(mn, m) = \left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}\right)$

$f \circ f = f(f(x,y)) = ((x+y)+x-y, x+y-x+y) = \cancel{f}(2x, 2y)$

Suprajektiboa: $\forall y \in C \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}$ non $g(x) = \cancel{y}$ Bai!

$g(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x^2 = \cancel{y}^2 \Rightarrow x = y$

$C = \{x^2 \text{ non } x \in \mathbb{N}\}$

$h : C \to \mathbb{N}$

$h(x) = \sqrt{x}$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in C \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \underset{x \in C}{\Rightarrow} \sqrt{y_1^2} = \sqrt{y_2^2} \Rightarrow y_1 = y_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in C$ non $h(x) = y$ Bai!

$h(x) = y \Rightarrow \sqrt{x} = y \underset{x \in C}{\Rightarrow} \sqrt{z^2} = y \Rightarrow z = y$

b)

$h \circ g \circ f$

$h \circ g(f(x)) = h \circ (|x|^2) = \sqrt{|x|^2} = |x|$

beraz, $h \circ g \circ f(x) = f(x)$

Beraz, bijektiboa da.

c)

Frogatuko dugu $g \circ h = 1_C$

$g \circ h \Rightarrow g(h(x)) = (\sqrt{x})^2 = x \in C$

$h \circ g = 1_{\mathbb{N}}$

$h \circ g \Rightarrow h(g(x)) = \sqrt{x^2} = x \in \mathbb{N}$

d)

$g^{-1}$

$g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Suprajeltiboe: $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad f(n) = m$ Bai!

$$f(n) = m \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} = m \Rightarrow n = 2m \in \mathbb{N} \\ \frac{n+1}{2} = m \Rightarrow n+1 = 2m \Rightarrow n = 2m-1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$

$$g(f(x)) = \begin{cases} \frac{2n}{2} \quad n \text{ bikoitia} \Rightarrow n \in \mathbb{N} \\ \frac{2n+2}{2} \quad n \text{ bakoitia} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(4) $\boxed{Ez!}$

$C = \{x^2 \text{ non } x \in \mathbb{N}\}$

a)

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$f(x) = |x|$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Ez!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |x_1| = |x_2|$

Kontra Adibidea:

$x_1 = -1 \quad f(1) = f(-1) = 1 \Rightarrow 1 \neq -1$
$x_2 = 1$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = y$ ~~Ez!~~ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow |x| = y$

~~Kontra Adibidea:~~

~~$y = -2 \Rightarrow f(x) = -2 \Rightarrow x = \sqrt{-2} \notin \mathbb{N}$~~

$g: \mathbb{N} \to C$

$g(x) = x^2$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} \quad g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \quad x \in \mathbb{N}$

frogatullo dugu betetzen dela $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$

$g \circ f = g(f(x)) = \{ \max\{0, n+1-1\} = \max\{0, n\}$, Beraz, $n \in \mathbb{N}$ denez,

$g \circ f = n$ da.

8

$f, g : \mathbb{N}$ -tik $\mathbb{N}$

$f(n) = 2n$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Bai!

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa: $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad f(n) = m$ Ez!

$f(n) = m \Rightarrow 2n = m \Rightarrow n = \frac{m}{2}$

Kontra Adibidea:

$m = 3 \Rightarrow f(n) = 3 \Rightarrow n = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ bikoitia} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ bakoitia} \end{cases}$$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ Ez!

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow$

Aukerak

$g(n_1)$ bik $= g(n_2)$ bik $\Rightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$

$g(n_1)$ bak $= g(n_2)$ bak $\Rightarrow \frac{n_1+1}{2} = \frac{n_2+1}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$

$g(n_1)$ bik $= g(n_1)$ bak $\Rightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2+1}{2} \Rightarrow$ (~~Kontraesaka~~)

Konta Adibidea:

$n_1 = 1 \quad n_2 = 2$

$g(n_1) = \frac{1+1}{2} = 1$

$g(n_2) = \frac{2}{2} = 1$

$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow 1 \neq 2$

$f(g(x))\circ h \Rightarrow \left\{ (3x-1)\circ h \Rightarrow \begin{cases} -1 & x \text{ bik} \\ 3x-1 & x \text{ bak} \end{cases} \right.$

7

$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$f(n) = n+1 \qquad g(n) = \max\{0, n-1\}$

$f(n) = n+1$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ <u>Bai!</u>

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

Suprajektiboa: $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad f(n) = m$ Ez <u>~~Bai~~</u>!

$f(n) = m \Rightarrow n+1 = m \Rightarrow n = m-1$

<u>Kontra Adibidea:</u>

$m = 0 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}$

$g(n) = \max\{0, n-1\}$

Injektiboa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ <u>Ez!</u>

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \max\{0, n_1 - 1\} = \max\{0, n_2 - 1\}$

<u>Kontra Adibidea:</u>

$f(0) = \max\{0, -1\} = 0$

$f(1) = \max\{0, 0\} = 0$

$f(0) = f(1) \Rightarrow \boxed{0 \neq 1}$

<u>Suprajektiboa:</u> $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad f(n) = m$ <u>Bai!</u>

$f(n) = m \Rightarrow \max\{0, n-1\} = m$

Bi aukera:

$m = 0$

$m = n-1 \Rightarrow m+1 = n$

6

$f, g, h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = x-1$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ Bai!

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1-1=x_2-1 \Rightarrow x_1=x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \quad f(x)=y$ Bai!

$f(x)=y \Rightarrow x-1=y \Rightarrow x=y+1 \in \mathbb{Z}$

$g(x)=3x$

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ Bai!

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \quad f(x)=y$ Ez!

$f(x)=y \Rightarrow 3x=y \Rightarrow x=\frac{y}{3}$

Kontra adibidea:

$y=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

a)

$f \circ g \Rightarrow f(g(x)) \Rightarrow 3x-1$

$g \circ f \Rightarrow g(f(x)) = 3(x-1) = 3x-3$

$g \circ h \Rightarrow g(h(x)) = \begin{cases} g(0) & x \text{ bik} \\ g(1) & x \text{ bak} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 & x \text{ bik} \\ 3 & x \text{ bak} \end{cases}$

$h \circ g \Rightarrow h(g(x)) = \begin{cases} 0 & 3x \text{ bik} \\ 1 & 3x \text{ bak} \end{cases}$

$f \circ (g \circ h) \Rightarrow f \circ (g(h(x))) = f \circ \begin{cases} g(0) & x \text{ bik} \\ g(1) & x \text{ bak} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 & x \text{ bik} \\ 2 & x \text{ bak} \end{cases}$

# Ariketak Funtzioak

①

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = x+7$

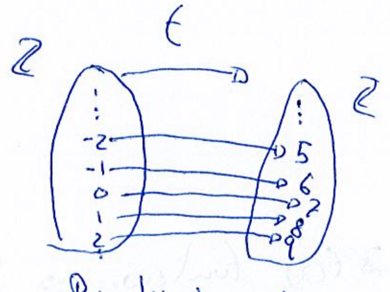
Funtzioa $x \in \mathbb{Z} \quad \exists f(x)$ Bai!

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Bai!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 7 = x_2 + 7 \Rightarrow x_1 = x_2$

Suprajektiboa: $\forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Bai!

$f(x) = y \Rightarrow x + 7 = y \Rightarrow x = y - 7 \to y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ guztientzat beti existitzen da $\exists x \in \mathbb{Z}$




Bijektiboa da.

d)

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = x^2$

Funtzioa: $x \in \mathbb{Z} \quad \exists f(x)$ Bai!

Injektiboa: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \quad x_1 = x_2$ Ez!

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \not\Rightarrow x_1 = x_2$

Kontra Adibidea:

$x_1 = 2$ $\quad (-2)^2 = 2^2 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$x_2 = -2$

Suprajektiboa? $\forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists x \in \mathbb{Z}$ non $f(x) = y$ Ez!

$f(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \not\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$

Kontra Adibidea:

$y = 2 \quad x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

g)

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = \frac{1}{x-3}$

Funtzioa: $x \in \mathbb{Z} \quad \exists f(x)$ . !

Kontra Adibidea: $x = 3 \quad \nexists f(3)$ funtzioa ez dago ondo definituta

~~Injektiboa?~~ $\cancel{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$

$\cancel{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 3} = \frac{1}{x_2 - 3}}$

2

$g: S \to S \qquad S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$g(n) = \max\{3, n\}$

Funtzioa: $\forall n \in S \quad \exists g(n)$ Bai!