4. Gaia, Bektore espazio egitura aljebraikoa — Aljebra

Definizioa:

Izanda K eta V bi multzo desberdinak eta $*$ bi multzo hoien arteko definitutako eragiketa: $\forall k \in K$ eta $\forall v \in V$ izanik,

$$* : K \times V \to V$$
$$(k, v) \to k * v$$ kanpoko eragiketa deritzogu

Definizioa:

$(V, \oplus)$ talde trukakor bat izanda eta $(K, +, \cdot)$ gorputz bat eta $*$ kanpoko eragiketa bat, esan dezakegu V multzoak K-ren gaineko betore-espazioa duela, hau da, $(V, \oplus, *)$ baldin eta $*$ eragiketarako honako 4 propietateak betetzen baditu:

$(\forall k, \in K)$ $(\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V)$ $k * (\bar{v}_1 \oplus \bar{v}_2) = k * \bar{v}_1 \oplus k * \bar{v}_2$

$(\forall k_1, k_2 \in K)$ $(\forall \bar{v} \in V)$ $(k_1 + k_2) * \bar{v} = k_1 * \bar{v} \oplus k_2 * \bar{v}$

$(\forall k_1, k_2 \in K)$ $(\forall \bar{v} \in V)$ $(k_1 \cdot k_2) * \bar{v} = k_1 * (k_2 * \bar{v})$

$1 \in K$ (unitatea izanik) $(\forall v \in V)$ non $1 * \bar{v} = \bar{v}$ den

V elementuak bektoreak dira eta K multzoak Eskalarrak

Bektore-espazioaren adibidea:

$$\mathbb{R} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(k, \bar{v}) \to \underset{\in \mathbb{R}}{k \cdot \bar{v}}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad k = 3 \in \mathbb{R}$

orduan,

$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ den

Bektore - espazioen ariketak

(1)

a)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 0 \right\}$$

$\forall w_1, w_2 \in W \,/\, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad k_1 \cdot \bar{w}_1 + k_2 \cdot \bar{w}_2 \in W$

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \cdot x_2 \\ k_1 \cdot x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 y_2 \\ k_2 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \cdot x_2 + k_2 y_2 \\ k_1 \cdot x_3 + k_2 y_3 \end{pmatrix} \in W$$

Beraz, bektore azpiespazioak dira.

Bektore azpiespazioak

Definizioa

Izan bedi K-ren gainekko $(V, \oplus, *)$ bektore-espazioa.

$\emptyset \neq U \subseteq V$ azpimultzoa V-ren azpiespazioa $(U \leq V)$ dela esango dugu, baldin:

Itxia bada $\oplus$-rekiko:

$$\forall \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U \Rightarrow \bar{u}_1 \oplus \bar{u}_2 \in U$$

$*$-rekiko itxia bada:

$$\forall k \in K,\ \forall \bar{u} \in V \Rightarrow k * \bar{u} \in U$$

Edo:

$$\forall \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U,\ \forall k_1, k_2 \in K \Rightarrow k_1 * \bar{u}_1 \oplus k_2 * \bar{u}_2 \in U$$

Ondorioz, U. V-ren azpiespazioa bada U bektore - espazioa da, bi motatakoak izan daitezke.

V-ren azpiespazio inpropioak: $\{\bar{0}\}$ azpiespazioetatik txikiena eta V azpiespazioetatik handiena.

Gainerakoak azpiespazio propioak:

Definizioa

$W_1, W_2 \in V$-ren bi azpiespazio izanik, azpiespazio horiekin ondoko bi azpi espazioak osatu ditzakegu, Batura-azpiespazioa eta Bildura-azpiespazioa:

Batura-azpiespazioa:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 / w_i \in W_i, i = 1,2\}$$

Bildura-azpiespazioa:

$$W_1 \cap W_2 = \{w : w \in W_1 \text{ eta } w_i \in W_2\}$$

Batura zuzena dela esaten da baldin $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ betetzen bada eta kasu honetan $W_1 \oplus W_2$ moduan deitatuko dugu.

Azpiespazioaren adibidea:

$\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala izanik eta W_1, W_2 azpiespazioak:

$W_1 = \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$ eta $W_2 \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R}\}$.

Batura azpiespazioa $W_1 + W_2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^2 / x, y \in \mathbb{R}\}$ da eta gainera batura zuzena da.

Azpiespazioak eta batura zuzena, teorema

W_1, W_2 V-ren azpiespazioak izanik. Orduan:

$W_1 + W_2$ eta $W_1 \cap W_2$ V-ren azpiespazioak izango dira.

W_1 eta W_2-ren arteko batura zuzena da baldin eta soilik baldin

$\forall w \in W_1 + W_2, \exists! w_i \in W_i, i = 1, 2$ non $w = w_1 + w_2$ betetzen den

Azpiespazioak Ariketak.

1

b)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 1 \right\}$$

$\forall w_1, w_2 \in W \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad k_1 \cdot w_1 + k_2 \cdot w_2 \in W$

$$k_1 \cdot w_1 + k_2 \cdot w_2 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 \cdot x_2 \\ k_1 \cdot x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \\ k_2 \cdot y_2 \\ k_2 \cdot y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 \cdot x_2 + k_2 \cdot y_2 \\ k_1 \cdot x_3 + k_2 \cdot y_3 \end{pmatrix} \notin W$$

Ondorioz, ez da izango azpiespazioa.

c)

$$W = \left\{ \bar{x} \in \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \right\} \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 x_2 \\ k_1 x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 y_1 \\ 0 \\ k_2 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 y_1 \\ k_1 y_2 \\ k_1 y_3 \end{pmatrix} \notin W$$

Bektoreen menpekotasuna eta independentzia lineala.

Izan bedi $\mathbb{R}$-ren gaineko V bektore espazioa eta eta $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \in V$ izanik.

$\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ bektoreak linealki independienteak dira baldin,

$$k_1 \bar{v}_1 + \ldots + k_n \bar{v}_n = \bar{0} \Rightarrow k_1 = \ldots = k_n = 0$$

Betetzen bada.

$\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$ bektoreak linealki menpekoak dira baldin eta existitzen bada $k_i \in \mathbb{R}$ eskalar ez nulua non $k_1 \bar{v}_1 + \ldots + k_n \bar{v}_n = 0$

Ondorioak

1. Bektore-multzo batean $\bar{0}$ bektorea badago, orduan linealki menpekoak dira.
2. Multzo bateko bektoreak linealki menpekoak dia, baldin eta soilik baldin, bektoreetako bat besteen konbinazio lineala bada.
3. Linealki independienteak diren bektore-multzo batean, beste bektore bat sartzen badiogu eta linealki menpeko bihurtzen bada, bektore hori beste bektoreen konbinazio lineala izango da.

Errenkada eta zutabeen independentzia lineala Matrizeetan

Independentzia linealaren definizioan erabilitako ekuazioa erabiltzen da, matrize-forman emanda.

$$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ekuazioaren adierazpen matriziala, sistema homogeneo baten ekuazioa da: $A\bar{x} = \bar{0}$.

non $\bar{v}_i$ matrizeak A koefiziente matrizearen zutabeak diren eta $k_i = \bar{x}$ ezezagunak.

Teorema

r pibotedun $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrize mailakatua izanik, esan dezakegu r pibota duten zutabeak linealki independienteak direla.
Ez nulu diren r errenkadak, $\mathbb{R}^n$-ko bektore gisa hartuta, linealki independienteak dira.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrizetik ekazpen gaussiarra erabiliz lortutako U matrize mailakatua r pibotedunа erabiliko da A matrizearen zutabeen eta errenkaden independentzia lineala aztertzeko.

A matrizearen espazio nulua $A\bar{x} = \bar{0}$ sistema homogeneoaren soluzioen multzo bezala definituko da.

$$N(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

A-ren zutabeak linealki menpekoak izango dira $\Leftrightarrow N(A) \neq \{\bar{0}\} \Rightarrow r < n$

pibote kopurua txikiagoa zutabe kopurua baino

A-ren zutabeak linealki independienteak izango dira $\Leftrightarrow N(A)=\{\bar{0}\} \Rightarrow r=n$

Adibidea

$V \subset \mathbb{R}^2$ $\quad V=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$

$A\bar{x}=\bar{0} \Rightarrow$ ekuazioa erabiliko dugu.

$$V\bar{x}=\bar{0} \Rightarrow v_1 \cdot k_1 + v_2 \cdot k_2 + v_3 \cdot k_3 = \bar{0} \Rightarrow k_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}k_1\\k_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2k_2\\k_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_3 \cdot 3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}k_1+2k_2+3k_3\\k_1+k_2+2k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

3 ezezagun daude eta bi ekuazioak ondorioz sistema bateragarri indeterminatua da

A matrizearen espazio ezker-nulua $A^t\bar{x}=\bar{0}$ sistema homogeneoaren soluzioen multzo bezala definitzen da.

$$N(A^t)=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^m : A^t\bar{x}=\bar{0}\}\subset\mathbb{R}^m$$

A-ren errenkadak linealki menpekoak $\Leftrightarrow N(A^t)\neq\{\bar{0}\}$ $r<m$

Aren errenkadak linealki independienteak $\Leftrightarrow N(A^t)\neq\{\bar{0}\}$ $r=m$

Sistema Sortzaileak

Izan bitez, $\mathbb{R}$-rekiko V bektore espazio bat non $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \in V$ bektoreak osatzen duten.

$\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n \in V$ bektoreak V bektorearen sistema sortzaileak direla esango dugu, eta $V = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle$ notazioaz idatzi baldin, V-ko bektore bakoitza $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ bektoreen konbinazio lineal bada.

$V = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle$ sistema sortzailea $\Leftrightarrow \forall \bar{v} \in V \; \exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R} / \bar{v} = \bar{v}_1 \cdot k_1 + \dots + k_n \bar{v}_n$

Ekuazioaren matrize forma $\Rightarrow A \cdot \bar{k} = \bar{v}$

Adibidea

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \text{ multzoa}$$

esan dezakegu

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ eta } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ S-ren sistema sortzaileak direla,

$\exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ non $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ multzoa lortzen dugun.

Matrize baten errenkada edo zutabe-bektoreek osatutako sistema sortzaileak

Izan bedi $A = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrizea. A-ren zutabe-espazioa definitzen da A matrizearen zutabeen konbinazio lineal guztien multzo bezala.

$$R(A) = \{ A\bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^n \} \in \mathbb{R}^m$$

Beraz,

$R(A) = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle$ sistema sortzailea da.

$\bar{b} \in \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{b}$ sistemak soluzioa badu.

Adibidea

Izan bedi $V \in \mathbb{R}^3$ multzoa honela definituta:

$$V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aztertu V multzoan dauden bektoreek $\mathbb{R}^3$ espazioko sistema sortzailea osatzen duten.

Sistema sortzailea izan dadin $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ bektoreen konbinazio linealaren bidez $\mathbb{R}^3$ multzoko edozein bektore lortu ahal izan behar da.

Kontra adibidea

$$k_1 \cdot \bar{v}_1 + k_2 \cdot \bar{v}_2 = \bar{b} \Rightarrow k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 - k_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

k_1 eta k_2 edozein izanda ere inoiz ez dugu lortuko emaitza $\bar{b}$ bektorea ondorioz, $\bar{b} \notin \langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle$.

Izan bedi $A = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{pmatrix} \mathbb{R}^{m \times n}$ matrizea, A-ren errenkada espazioa definituko da A matrizearen errenkaden konbinazio lineal guztien multzoa bezala:

$$R(A^T) = \{A^T \bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$$

Beraz,

$R(A^T) = \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m \rangle$ sistema sortzailea da.

$\bar{b} \in \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m \rangle \Leftrightarrow A^T \bar{x} = \bar{b}$ sistemak soluzioa badu.

Teorema

Bektore-multzo batek ~~ost~~ sortzen duen espazioa ez da aldatzen multzoari bektore horien konbinazio linealak diren bektoreak gehitzen edo kentzen.

$$\bar{b} \in \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle \Rightarrow \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n, \bar{b} \rangle = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle$$

Ekuazio Sistemen matrizeetan: $A = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$ koefiziente matrizea eta $A\bar{b} = [v_1 | \dots | v_n | \bar{b}]$ matrize zabaldua izanik,

$$\bar{b} \in R(A) \Rightarrow R(A) = R(A\bar{b})$$

Ondorioz, Sistema Sortzaile bati bektoreak gehitzearen ondorioz lortzen den bektore-multzoak sistema sortzaile izaten jarraitzen du.

Adibidea

Aztertu S sistemak $\mathbb{R}^3$ espazioa sortzen duen

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$S \cdot \bar{x} = \bar{b}$ betetzen den aztertu behar dugu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = r(A\bar{b}) = 3 < 4 = n$$

matrize zabaldua

Sistema bateragarri indeterminatua.

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ondorioz, } R(S) = R(S\bar{b})$$

Oinarriak. Bektore-espazio baten Dimentsioa

Esango dugu $B=\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ bektore multzoa V espazioaren oinarria dela, baldin eta,

Bektoreak linealki independienteak badira.

Bektoreak V espazioa sortzen badute.

teorema

$B=\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n\}$ bektore multzoa V espazio baten oinarria bada, orduan espazioko $\forall \bar{v}\in V$ bektore oinarriko bektoreen konbinazio lineala da, eta konbinazio linealaren koefizienteak bakarrak dira.

$\bar{v}$ bektorearen koordenatuak B oinarriaren ~~koefizientearen~~ bektoreen konbinazio linealaren koefizienteak dira:

$$k_1\cdot\bar{v}_1+\dots+k_n\cdot\bar{v}_n=\bar{v}$$

eta matrize forma erabiliz honela adierazi daiteke:

$$B\cdot\bar{k}=\bar{v}$$

Definizioa

$\mathbb{R}^n$ espazioaren oinarri kanonikoa n dimentsioko, $\bar{e}_1,\dots\bar{e}_n$ bektore unitarioek osatzen duten multzoa da.

$$B_{\mathbb{R}^n}=\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Korolarioa

V bektore-espazioaren oinarri guztiek bektore-kopuru bera dute.

Definizioa

V-ren dimentsioa (dim V): V-ren oinarrien bektore kopurua da.

Adibidez, dim $\{\bar{0}\} = 0$.

Dimentsioak bi gauza adierazten dizkigu:

Espazio baten sistema sortzaile izateko bektore sistema batek izan behar duen gutxieneko bektore kopurua.

Espazio baten bektoreak linealki independienteak izateko gehieneko bektore kopurua.

Dimentsio eta bektore kopurua

~~Korolarioa~~
Korolarioa

Izan bedi V, n dimentsioko bektore-espazioa.

Baldin, $G = \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p \rangle$ bektoreek V sortzen badute $p \geq n$.

Baldin, $L = \langle \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m \rangle$ bektoreak linealki independienteak badira, $m \leq n$.

Izan bitez, n dimentsioko V bektore-espazioaren G eta L bektore-sistemak, p, m, bektoreak dituztenak.

$G = \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p \rangle$ Sistema sortzailearen bektore kopurua V bektore-espazioaren dimentsioaren berdina bada ($p = n$), G V-ren oinarria da.

$L = \langle \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m \rangle$ linealki independienteak diren bektore-kopuru V bektore-espazioaren dimentsioaren berdina bada, L V-ren oinarria da.

Dimentsioa eta azpiespazioak

Korolarioa

Izan bedi V bektore-espazioa eta U bere azpiespazio bat. $\dim U \leq \dim V$.

Korolarioa

Izan bedi V bektore-espazioa eta U bere azpiespazioa

$$\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$$

Azpiespazio betegarrien dimentsioak

Definizioa

Izan bitez, V bektore-espazioa eta U_1 eta U_2 bere bi azpiespazio, U_1 eta U_2 betegarriak dira, $V = U_1$ ~~eta~~ $\oplus$ U_2 betetzen bada.

Eta ondoko berdintza betetzen dute:

$$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$$

Matrize bati atxikitutako azpiespazioa

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrize bateko, Lau funtsezko azpiespazio ditu:

A-ren zutabe espazioa: Zutabe guztien konbinazio lineal guztien multzoa.

$$R(A) = \{A\bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

A-ren espazio nulua: $A\bar{x} = \bar{0}$ sistema homogeneoaren soluzioen multzoa.

$$N(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

A-ren errenkada espazioa: $R(A^t)$: A-ren errenkadak sortzen duten espazioa da, errenkadak $\mathbb{R}^m$ espazioko bektore moduan hartuta.

$$R(A^t) = \{A^t\bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$$

A-ren espazio ezker-nulua:

$$N(A^t) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m : A^t\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{R}^m$$

teorema:

Izan bedi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrizea non,

1. Bere $R(A)$ zutabe-espazioa $\mathbb{R}^m$-ren bektore-azpiespazioa da,
$R(A) \leq \mathbb{R}^m$

2. Bere ~~R R(A)~~ $N(A)$ espazio nulua $\mathbb{R}^n$-ren bektore-azpiespazioa da,
$N(A) \leq \mathbb{R}^n$

Korolarioa

Izan bedi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrizea.

1. Bere $R(A^t)$ errenkada-espazioa $\mathbb{R}^n$-ren bektore-azpiespazioa da
$R(A^t) \leq \mathbb{R}^n$

2. Bere $N(A^t)$ espazio ezker-nulua $\mathbb{R}^m$-ren bektore-azpiespazioa da,
$N(A^t) \leq \mathbb{R}^m$.

teorema

Izan bedi: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrizetik ebazpen gaussiarra erabiliz lortutako U matrize mailakatua r pibotaduna.

1. Pibota duten r zutabeek $R(U)$-ren oinarri bat osatzen dute, eta beraz, $\dim(U) = r$

2. U-ren r errenkada ez nuluek U-ren errenkada-espazioaren oinarri bat osatzen dute, eta beraz, $\dim R(U^t) = r$

3. $U\bar{x} = \bar{0}$ sistema ebaztean, aldagai aske baloitzari 1 balioa ematean eta gainerako askeei 0 balioa ematean lortzen diren n-r soluzioek, $N(U)$-ren oinarri bat osatzen dute eta $\dim(U) = n-r$.

4. $U^t \cdot \bar{x} = \bar{0}$ sistema ebaztean, aldagai aske baloitzari 1 balioa eta gainerako askeei 0 balioa emateratekoan lortzen diren m-r soluzioek $N(U^t)$-ren oinarri bat osatzen dute eta $\dim(U^t) = m-r$

7

a)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+y+z+t=0 \right\}$$

U espazioaren dimentsioa aurkitu.

Sistema homogeneoa izango da: $x = -y - z - t$

$$S_H = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ondorioz, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ izango da sistema sortzailea.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Behe triangeluarra lortuko dugu.

$$P_{12} \cdot P_{23} \cdot P_{34} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{41}(1) \\ E_{42}(1) \\ E_{43}(1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ondorioz, $r(U) = 3 = n \Rightarrow \boxed{\bar{k} = \bar{0}}$

Eta sistema bateragarri determinatua:

$\dim U = 3$

7

b)

$$N(I) = \left\{ I_4 \bar{x} = 0 \,/\, \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ondorioz, sistema bateragarri determinatua eta linealki independientea da.

Beha triangeluarra kalkulatillo dugu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\mathcal{E}_{21}(1)\\ \mathcal{E}_{32}(1)\\ \mathcal{E}_{43}(1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A) = 3$$

Beraz, Sistema Bateragarri indeterminatua da.

Sistema homogeneoa

$$\bar{S}_H = k_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k_4 = 3$$

$$3(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + 3(\bar{v}_2 - \bar{v}_3) + 3(\bar{v}_3 - \bar{v}_4) + 3(\bar{v}_4 - \bar{v}_1) = \bar{0}$$

c)

$\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(x,y,z)\}\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

illusillo dugu ea $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ eta $\bar{v}_3$ linealki independenteak diren.

$$k_1 \cdot \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + k_3 \bar{v}_3 = \bar{0} \Rightarrow (v_1\ v_2\ v_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Beha triangeluarra lortillo dugu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{E}_{21}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r(A) = 3 = n$$

Ondorioz, sistema bateragarri determinatua da.

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ betetzen denez, Linealki independenteak dira.

c)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots a_{44}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Guztira 16 bektore daude, linealki independienteak diren frogatzeko $\vec{k}=\vec{0}$ izan behar da. Ondorioz espazioaren dimentsioa 16 da.

18

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pibote. bektorea

$R(A)$: Zutabe espazioa, dim $R(A) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_{R(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Pibotearen zutabea

$N(A)$: Espazio nulua, dim $N(A) = 3$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -4x_3 \right.$

$\Rightarrow x_2 = 0 \cdot x_1$

$x_2 = 0 \cdot x_4$

$$\vec{S}_4 = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$R(A^T)$: errenkada espazioa, dim $R(A^T) = 1 \Rightarrow$ ~~$B_{R(A^T)} = \{$~~

$$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-4)]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{R(A^T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$N_{(A^T)}$: espazio ezker nulua, $\dim N_{(A^T)} = 1 \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$

$\bar{S}_H = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{N(A^T)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = A$

$R_{(A)}$: zutabe-espazioa, $\dim R(A) = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{R(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$N_{(A)}$: espazio nulua, $\dim N(A) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{S}_H = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$R_{(A^T)}$: errenkada espazioa, $\dim R_{(A^T)} = 2, \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_{R(A^T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$N_{(A^T)}$: espazio ezker nulua: $\dim N_{(A^T)} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{S}_H = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

26

b)

$R(A)$: Zutabe espazioa $\dim R(A) = 3$ $\quad U = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$ $\quad B_{R(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$N(A)$: $\dim N(A) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = \cancel{4x_2} - 12x_3 + 2x_3 \Rightarrow 2x_1 = -10x_3 \Rightarrow x_1 = -5x_3 \\ x_2 = +3x_3 \end{cases}$

$S_H = x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$R(A^t)$: $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{21}(-2) \\ E_{31}(-1) \\ E_{41}(-\frac{1}{2})}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{42}(-2) \\ E_{32}(3)}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim R(A^t) = 3 \Rightarrow B_{R(A^t)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

$N(A^t)$:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -4x_4 \Rightarrow x_1 = -2x_4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$S_H = x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{N(A^t)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

⑥

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ eta $\bar{v}_3$ linealki independienteak dira

$$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \quad \bar{w}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_3 \quad \bar{w}_3 = \bar{v}_2 + \bar{v}_3$$

$$k_1 \cdot \bar{v}_1 + k_2 \cdot \bar{v}_2 + k_3 \cdot \bar{v}_3 = \bar{0} \Rightarrow$$

$$k_1' \bar{w}_1 + k_2' \bar{w}_2 + k_3' \bar{w}_3 = \bar{0} \Rightarrow k_1'(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + k_2'(\bar{v}_1 + \bar{v}_3) + k_3'(\bar{v}_2 + \bar{v}_3) = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{w}_1, \bar{w}_2\ \bar{w}_3)\begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beraz, sistema bateragarri determinatua da.
Eta ondorioz, linealki independienteak dira.

⑩

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Frogatzeko biak linealki independienteak direla:

$$k_1 \cdot \bar{v}_1 + k_2 \cdot \bar{v}_2 = \bar{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$$

$$(\bar{v}_1\ \bar{v}_2)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema bateragarri determinatua da
$k_1 = k_2 = 0$, beraz, linealki independienteak dira.

b) $\vec{v}_3$ eta $\vec{v}_4$ bektoreak $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ $\mathbb{R}^4$ espazioaren oinarria izateko

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ $\mathbb{R}^4$ espazioaren oinarri izango dira: linealki independienteak badira eta $\mathbb{R}^4$ sortzen badute $\mathbb{R}^4 = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\varepsilon_{31}(-1)]{\varepsilon_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema bateragarri Determinatua da, beraz, linealki independienteak.

Eta $\mathbb{R}^4$ ko edozein bektore lortu genezake haien konbinazio linealaren bidez.

Egitura Aljebraikoak

①

a) $x * y = 3x + 2y$, non $x, y \in \mathbb{Z}$ diren

Barne eragiketa: Bai!

$* \; \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \; (\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$

$x, \cancel{z} \in \mathbb{Z} \to x * \cancel{z} \in \mathbb{Z}$!

$3, 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x, 2y \in \mathbb{Z} \underset{(\mathbb{Z},+)}{\Rightarrow} 3x + 2y \in \mathbb{Z}$

Elkartze-Legea Ez!

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad (x * y) * z = x * (y * z)$

①

$(x * y) * z \underset{def}{=} (3x + 2y) * z \underset{def}{=} 3(3x + 2y) + 2z = 9x + 6y + 2z$

Ez da betetzen elkartze legea

②

$x * (y * z) \underset{def}{=} x * (3y + 2z) \underset{def}{=} 3x + 2(3y + 2z) = 3x + 6y + 4z$

Elementu neutroa Ez!

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists e \in \mathbb{Z} \quad x * e = e * x = x$

$x * e = 3x + 2e = x \Rightarrow e = -x$ Ez dago elementu neutrorik.

Elementu simetrikoa: ez dadelako elementu neutrorik berez, elementu simetrikorik ere ez.

Trukatze-legea: Ez!

$\forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x * y = y * z$

①

$x * y = 3x + 2y$

②

$y * x = 3y + 2x$

b)

$x \odot y = xy+1$, non $x,y \in \mathbb{Q}$

Elkartze-legea: ~~Bai~~ Ez!

$\forall x, z, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$

1

$x \odot (y \odot z) \underset{\odot def}{=} x \odot (yz+1) = x(yz+1) = xyz + \cancel{1} + x$

2 $(x \odot y) \odot z \underset{\odot def}{=} (xy+1) \odot z \underset{def}{=} xyz + 1 + z$

Elemento Neutroa: Ez!

$\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exists e \in \mathbb{Q}$ non $x \odot e = e \odot x = x$

$x \odot e = x$ bete behar da

$xe + 1 = x \Rightarrow xe = x - 1 \Rightarrow e = \frac{x-1}{x}$

Elementro Simetrikoa: Ez!

Trukatze legea: Bai!

$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x \odot y = y \odot x$

1
$x \odot y = xy + 1$

2
$y \odot x = yx + 1$ $\Rightarrow$ Bai berdintza betetzen da

②

a) $a * b = b - a$, $a, b \in \mathbb{Z}$

Elkartze-legea: Ez!

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad (a*b)*c = a*(b*c)$

① $(a*b)*c = (b-a)*c = c-(b-a) = c-b+a$

② $a*(b*c) = a*(c-b) = (c-b)-a = c-b-a$

Barne-eragilleta $(\mathbb{Z}, *)$

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a, (-b) \in \mathbb{Z} \xrightarrow[\{\mathbb{Z}, +\}]{} b + (-a) \in \mathbb{Z}$

Eragilkai Neutro. Ez!

$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists e \in \mathbb{Z}$ non $a*e = a$

$a*e = a \Rightarrow e - a = a \Rightarrow e = 2a$

Simetrikoa: Ez!

$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists a' \in \mathbb{Z}$ non $a*a' = a'*a = e$

Trukatze-legea: Ez!

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a*b = b*a$

① $a*b = b-a$

② $b*a = a-b$

Ez da betetzen

(2)

b) $a \oplus b = \dfrac{b-a}{2} \quad a,b \in \mathbb{Q}$

Barne Eragiketa:

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$,

$b, (-a), \in \mathbb{Q} \rightarrow \dfrac{b-a}{2} \in \mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q}-\{0\}, \cdot)$

$(\mathbb{Q}, +)$

Elkartze legea: Ez!

$\forall a,b,c \in \mathbb{Q}, \quad a^*(b^*c) = (a^*b)^*c$

(1) $(a^*b)^*c = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^*c = \dfrac{c-\left(\frac{b-a}{2}\right)}{2} = \dfrac{2c-b+a}{4}$

(2) $a^*(b^*c) = a^*\left(\dfrac{c-b}{2}\right) = \dfrac{\frac{c-b}{2}-a}{2} = \dfrac{c-b-2a}{4}$

Neutroa? Ez!

$\forall a \in \mathbb{Q} \quad \exists e \in \mathbb{Q}$ non $a^*e = a$

$a^*e = a \Rightarrow \dfrac{e-a}{2} = a \Rightarrow e-a = 2a \Rightarrow e = 3a$

Trukatze: Ez!

$\forall a,b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^*b = b^*a$

(1) $a^*b = \dfrac{b-a}{2}$

(2) $b^*a = \dfrac{a-b}{2}$

⑧

$a \oplus b = a+b-8$

$a * b = a+b-a \cdot b$

Aratati $(\mathbb{Z}, \oplus, *)$ crestune dau

① teldle abeldorre $(\mathbb{Z}, \oplus)$

② Eillerllorre etc bendlorre $(\mathbb{Z}, *)$

①

Berhe oregillete: $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad a, b, 8 \in \mathbb{Z}$

Ellertze legea: $\forall a, b, \in \mathbb{Z}$ $\quad (a*b)*c = a*(b*c)$ Bai!

① $(a*b)*c \underset{def}{=} (a+b-8)*c \underset{def}{=} a+b-8+c-8 = a+b+c-16$

② $(a*(b*c) \underset{def}{=} a*(b+c-8) \underset{def}{=} a+b+c-16$

Elementu neutroa? $\forall a \in \mathbb{Z}$ $\quad \exists e \in \mathbb{Z}$ non $a*e = a$ Bai!

$a*e = a \underset{def}{\Rightarrow} a+e-8 = a \Rightarrow \boxed{e = 8}$

Elementu simetrikoa? $\forall a \in \mathbb{Z}$ $\quad \exists a' \in \mathbb{Z}$ non $a \oplus a' = a' \oplus a = 8$ Bai!

① $a \oplus a' = 8 \Rightarrow a+a'-8 = 8 \Rightarrow a'+a = 16 \Rightarrow a' = 16-a$

~~$e \oplus a = 8 \Rightarrow a+$~~

$a' \oplus a = (16-a)+a-8 = 8 \Rightarrow 16-8 = 8 \Rightarrow 8 = 8$

Trukatze legea: Bai!

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \oplus b = b \oplus a$

① $a \oplus b = a+b-8$

② $b \oplus a = b+a-8$

(2)

$(\mathbb{Z}, *)$ Elkarkorra eta banakorra

Elkarkorra? $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ $(a*b)*c = a*(b*c)$ Bai!

$(a*b)*c = (a+b-a.b)*c = ((a+b-ab)+c - (a+b-ab)c) = a+b+c-ab-c(a+b)+abc$

$a*(b*c) = a(b+c-bc) = a+(b+c-\cancel{abc}\ (bc)) = a\cdot(b+c-bc) =$

Banakorra? Ez!

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

$a*(b \oplus c) = a*b \oplus a*c$

(1) $a*(b \oplus c) = a*(b+c-8) = a+b+c-8-(a(b+c-8)) = a+b+c-8-a(b+c-8)$

(2) $a*b \oplus a*c = (a+b-ab) \oplus (a+c-ac) = a+b-ab+a+c-ac-8 =$

$= 2a+b+c-ab-ac-8$

(6)

$x, y \in \mathbb{Q}$ Frogatzeko dugu ondoko matrizeak gorputza egitura duela.

$$\begin{pmatrix} x-3y & 4y \\ -4y & x+3y \end{pmatrix}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x-3y & 4y \\ -4y & x+3y \end{pmatrix} / x,y \in \mathbb{Q} \right\} \quad M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3y & 4y \\ -4y & 3y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$(M, +)$ talde Abeldarra

$+ : M \times M \to M$

$\forall M_1, M_2 \in M \quad (M_1, M_2) \to M_1 + M_2 \in M$

$M_1 = x_1 I + y_1 A \quad x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$

$M_2 = x_2 I + y_2 A \quad x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$

$M_1+M_2 = (x_1 I + y_1 A) + (x_2 I + y_2 A) = x_1 I + x_2 \cancel{A} + y_1 A + y_2 A = I(x_1+x_2) + A(y_1+y_2)$

Beraz, barne eragiketa da.

<u>Elkartze-legea</u> $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ <u>Bai!</u>

$\forall M_1, M_2, M_3 \in M \quad M_1+(M_2+M_3) = (M_1+M_2)+M_3$

$M_1 = x_1 I + y_1 A$

$M_2 = x_2 I + y_2 A \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$M_3 = x_3 I + y_3 A$

① $M_1+(M_2+M_3) = M_1 + (x_2 I + y_2 A + \cancel{M} x_3 I + y_3 A) = M_1 + [\cancel{I}(x_2+x_3) + A(y_2+y_3)] =$

$= x_1 I + y_1 A + (I(x_2+x_3) + A(y_2+y_3)) = I(x_1+x_2+x_3) + A(y_1+y_2+y_3)$

② $(M_1+M_2)+M_3 = (\cancel{I}(x_1+x_2) + A(y_1+y_2)) + M_3 = I(x_1+x_2+x_3) + A(y_1+y_2+y_3)$

Elementu neutroa Bai!

$\forall M_1 \in M \quad \exists z \in M$ non $M_1 + z = M_1$

$M_1 + z = M \Rightarrow x_1 I + y_1 A + \cancel{z_1} \cancel{I} + z_2 A \Rightarrow (x_1+z_1) I + (y_1+z_2) A = M_1$

$x_1 + z_1 = x_1 \Rightarrow z_1 = 0$

$x_2 + z_2 = x_2 \Rightarrow z_2 = 0$

Elementu Simetrikoa

$\forall M \in M \quad \exists \bar{M}_1 \in M \quad M_1 + \bar{M}_1 = \bar{M}_1 + M_1 = 0$

$M_1 + \bar{M}_1 = x_1 I + x_2 A + \bar{x}_1 I + \cancel{\bar{x}_2} A = (\bar{x}_1 + x_1) I + (\cancel{\bar{y}_2} + y_1) A = 0$

$x_1 + \bar{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\bar{x}_1$

$\cancel{x_2} + \bar{y}_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -\bar{y}_1$

Trullobze - leogea Bail

$$\forall M_1, M_2 \in M \qquad M_1 + M_2 = M_2 + M_1$$

① $x_1 I + y_1 A + x_2 I + y_2 A = (x_1 + x_2) I + (y_1 + y_2) A$

② $x_2 I + y_2 A + x_1 I + y_1 A = (x_2 + x_1) I + (y_2 + y_1) A$

$(M - \{0\}, \cdot)$ Eragilletardlo trullellossa dela frogeto

Trullellossa

$$M \times M \longrightarrow M \qquad (M_1, M_2) \longrightarrow M_1 \cdot M_2 \in M$$

$M_1 = x_1 I + y_1 A$

$M_2 = x_2 I + y_2 A$ $\qquad M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} x - 3y & 4y \\ -4y & x + 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - 3y_2 & 4y_2 \\ -4y_2 & x_2 + 3y_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (x - 3y)(x_2 - 3y_2) + 4y \cdot 4y_2 & 4y_2(x - 3y) + (x_2 + 3y_2) 4y \\ -4y(x_2 - 3y_2) - 4y_2(x + 3y) & -16 y \cdot y_2 + (x + 3y)(x_2 + 3y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 x_2 - 3y_2 x_1 - 3y x_2 + 9 y_1 y_2 & 4y_2 x_1 - \cancel{12 y_2 y_1} + 4y x_2 + \cancel{16 y_1 y_2} \\ -4y_1 x_2 + \cancel{12 y_1 y_2} - 4y_2 x_1 - \cancel{12 y_1 y_2} & -16 y_1 y_2 + x_1 x_2 + 3y_2 x_1 + 3y_1 x_2 + 9 y y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 x_2 - 3y_2 x_1 - 3y_1 x_2 + 9 y_1 y_2 & 4y_2 x_1 + 4y_1 x_2 \\ -4y_1 x_2 - 4y_2 x_1 & \cancel{16 y_1 y_2} + x_1 x_2 + 3y_2 x_1 + 3y_1 x_2 - 7 y_1 y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 x_2 & 0 \\ 0 & x_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 y_1 y_2 & 0 \\ 0 & -7 y_1 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3(x_1 y_2 + x_2 y_1) & 4(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ -4(x_1 y_2 + x_2 y_1) & 3(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 x_2 - 7 y_1 y_2) I + (x_1 y_2 + x_2 y_1) A$$

$(x_1 I + y_1 A) \cdot (x_2 I + y_2 A) = x_1 x_2 I^2 + x_1 y_2 IA + y_1 x_2 AI + y_1 y_2 A^2 =$

$= x_1 x_2 I + x_1 y_2 A + y_1 x_2 A + y_1 y_2 (-7I) =$

$= (x_1 x_2 - 7 y_1 y_2) I + (x_1 y_2 + y_1 x_2) A$

Elkartze legea

$\forall M_1, M_2, M_3 \in M \quad M_1 (M_2 \cdot M_3) = (M_1 M_2) M_3$

(1) $M_1 (M_2 \cdot M_3) = M_1 \cdot (x_2 I + y_2 A)(x_3 I + y_3 A) = M_1 [(x_2 x_3 - 7 y_2 y_3) I + (x_2 y_3 + y_2 x_3) A] =$

$= (x_1 I + y_1 A)((x_2 x_3 - 7 y_2 y_3) I + (x_2 y_3 + y_2 x_3) A) = x_1 (x_2 x_3 - 7 y_2 y_3) I + x_1 (x_2 y_3 + y_2 x_3) A +$

$+ y_1 A (x_2 x_3 - 7 y_2 y_3) I + (x_2 y_3 + y_2 x_3) \cdot y_1 A^2 = (x_1 x_2 x_3 - 7 x_1 y_2 y_3 + 7 y_1 x_2 y_3 - 7 y_1 y_2 x_3) I +$

$+ (x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3$

(12)

a) $(G, \odot)$ taldea $\quad$ E. neutroa : e

$(G', *)$ taldea $\quad$ E. Neutroa : n

$f : G \to G'$ Isomorfismoa

$\begin{cases} \forall a, b \in G \quad f(a \odot b) = f(a) * f(b) \\ \text{Bijektiboa} \end{cases}$

$f(e) = n \qquad f(a \odot e) = f(a) * f(e) = f(a)$

$\qquad\qquad f(e \odot e) = n * f(a) = f(a) * n$

b)

$f(a \odot \bar{a}) = f(a) * f(\bar{a})$

Homomorfismoa

$f(a \odot \bar{a}) = f(e)$

$\Rightarrow f(a) * f(\bar{a}) = f(e) = u \Rightarrow f(\bar{a}) = f(a)'$

$a \in G \Rightarrow \bar{a} \in G$ $\quad G'$ taldearen simetrikoa

$(G, \odot)$ $\quad f(\bar{a}) = f(a)'$

G taldearen e. simetrikoa

$\forall a \in G \ \exists \bar{a} \in G \quad a \odot \bar{a} = \bar{a} \odot a = e$

$\forall g \in G . \ \exists \bar{g} \in G \quad g \odot \bar{g} = \bar{g} \odot g = u$

$f(\bar{a})$ G' taldearen $f(a)'$ simetrikoa

(13)

Frogatu $(\mathbb{R}, \odot)$ taldea dela

$x \odot y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Barne-eragiketa

$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x \odot \cancel{y} \in \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \to x^3, y^3 \in \mathbb{R} \to x^3 + y^3 \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ eraztuna $\to \sqrt[3]{x^3 + y^3} \in \mathbb{R}$

Elkartze legea bai

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$

(1) $x \odot (y \odot z) = x \odot \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3}\right) = \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3}\right)^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$

(2) $(x \odot y) \odot z = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right) \odot z = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$

Elemento neutro

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists e \in \mathbb{R}$ non $x \oplus e = e \oplus x = x$

$x \oplus e = x \Rightarrow \sqrt[3]{x^3+e^3} = x \Rightarrow x^3+e^3 = x^3 \Rightarrow e^3 = 0 \Rightarrow \boxed{e = 0}$

~~Eiteo~~

Elemento simetrico

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists \bar{x} \in \mathbb{R}$ $x \oplus \bar{x} = \bar{x} \oplus x = 0$

$x \oplus \bar{x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3+\bar{x}^3} = 0 \Rightarrow x^3 + \bar{x}^3 = 0 \Rightarrow \bar{x}^3 = -x^3 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = -x}$

Esomorfismo

$f : (\mathbb{R}, \oplus) \to (\mathbb{R}, +)$

$x \to f(x) = x^3$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$ $f(x \oplus y) = f(\sqrt[3]{x^3+y^3}) = (\sqrt[3]{x^3+y^3})^3 = x^3+y^3 = f(x)+f(y)$

Bijeltiba Bai!

$\begin{cases} f(x) = f(y) \Rightarrow x = y & \text{(Injeltiba)} \\ \forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \text{ non } f(x) = y & \text{(Suprajeltiba} \end{cases}$

Injeltiba:

$f(x) = f(y) = x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$

Suprajeltiba

$f(x) = y \underset{def}{\Rightarrow} x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$

2011 ekaina

(3)

$$y \oplus x = y + x - 1$$

$$x \odot y = x + y - xy$$

Lehenengo, $(\mathbb{Z}, \oplus)$ taldea?

Barne eragiketa: Bai!

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \underset{\oplus def}{\Rightarrow} x + y - 1 \in \mathbb{Z}$$

Elkartze legea? Bai!

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

$$x \oplus (y \oplus z) \underset{\oplus def}{=} x \oplus (y + z - 1) \underset{\oplus def}{=} x + y + z - 1 - 1 = x + y + z - 2$$

$$(x \oplus y) \oplus z \underset{\oplus def}{=} (x + y - 1) \oplus z \underset{\oplus def}{=} (x + y + z - 1 - 1) = x + y + z - 2$$

Eragigai Neutroa: Bai!

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \oplus \bar{x} = \bar{x} \oplus x = x$$

$$x \oplus \bar{x} = x \Rightarrow x + \bar{x} - 1 = x \Rightarrow \bar{x} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 1}$$

Elementu Simetrikoa: Bai!

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{Z} \text{ non } x \oplus \bar{x} = e$$

$$x \oplus \bar{x} = 0 \Rightarrow x + \bar{x} - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 2 - x}$$

Trukatze-legea: Bai!

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \oplus y = y \oplus x$$

$$x \oplus y = x + y - 1$$

$$y \oplus x = x + y - 1$$

Ondoren, $(\mathbb{Z}, \odot)$ taldea

Barne eragiketa

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \to x+y \in \mathbb{Z} \to xy \in \mathbb{Z} \to x+y-xy \in \mathbb{Z}$$

Elkartze-legea: Bai!

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$$

$$x \odot (y \odot z) = x \odot (\cancel{y}+z-yz) = x+y+z-yz - x(y+z-yz) = x+y+z-yz-xy-xz+xyz$$

$$(x \odot y) \odot z = (x+y-xy) \odot z = (x+y-xy+z) - z(x+y-xy) = x+y+z-xy-xz-yz+xyz$$

Elementu Neutroa: Ez

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \exists e \in \mathbb{Z} \text{ non } x \odot e = e \odot x = x$$

$$x \odot e = x \Rightarrow x+e-xe = x \Rightarrow e-xe = 0 \Rightarrow xe = e \Rightarrow e=0, \ x=1$$

Bi garren eragiketak elementu Neutrorik ez duenez ez dauka talde bat

Azkenik eraztuna den ikusteko banatze legea frogatuko dugu ~~bienak~~ bateratzaileekin

Banakor? Bai!

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad x \odot (y \odot z) = \cancel{(x \odot y) \odot z} \ (x \odot y) \odot (x \odot z)$$

$$x \odot (y \odot z) = x \odot (y+z-1) = x+y+z-1 - x(y+z-1) = x+y+z-xy-xz+x = 2x+y+z-xy-xz$$

$$(x \odot y) \odot (x \odot z) = (x+y-xy) \odot (x+z-xz) = x+y-xy+x+z-xz-1$$

Frogatuta geratzen da eraztuna dela. $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftarrow c_2+c_3+c_1]{} \cancel{\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1-\lambda & a+b-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix}}$$

$$\xrightarrow[c_1 \leftarrow c_2+c_3+c_1]{} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ a-1-\lambda & -1-\lambda & a \\ 3+b-\lambda & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} \longrightarrow (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & a \\ 1 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & a \\ 0 & b-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(-1-\lambda)(b-\lambda) \Rightarrow (5-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} a-1=5 \\ 3+b=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=6 \\ b=2 \end{array} \qquad \lambda_1=5 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=2$$

①

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ Balio propioa eta autobektoreak

$$[A - l \cdot I] = \begin{vmatrix} 1-l & -1 \\ 2 & 4-l \end{vmatrix} \underset{2er\ 1e}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1-l & -1 \\ 3-l & 3-l \end{vmatrix} \rightarrow (3-l)\begin{vmatrix} 1-l & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-l)[1-l+1)$$

$$= (1-l)(4-l)+2 =$$

$$= 4 - 4l - l + l^2 + 2 = (3-l)(2-l)$$

$l_1 = 3$ $\quad$ $l_2 = 2$

Anizkoiztasuna 1 $\quad$ Anizkoiztasuna 1

$tr(A) = 1+4 = 3+2$

$|A| = 6 = 3 \cdot 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|B - l \cdot I| = \begin{vmatrix} 6-l & -1 \\ 2 & -3-l \end{vmatrix} \underset{2er\ 1e}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} -6-l & -1 \\ -4-l & -4-l \end{vmatrix} \rightarrow (-4-l)\begin{vmatrix} -6-l & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4-l)[(-6-l+1] =$$

$$= (-4-l)(-5-l)$$

$l'_1 = -4$ $\quad$ $l'_2 = -5$

Anizkoiztasuna 1 $\quad$ Anizkoiztasuna 1

$l'_1 = l_1 - 7 = -4$ $\quad$ $l'_2 = l_2 - 7 = -5$

② $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A - \ell \cdot I| = \begin{vmatrix} 3-\ell & 4 & 2 \\ 0 & 1-\ell & 2 \\ 0 & 0 & -\ell \end{vmatrix} = (3-\ell)(1-\ell)(-\ell)$$

$\ell_1 = 3 \quad \ell_2 = 1 \quad \ell_3 = 0$

$tr(A) = 4$

$|A| = 0 = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$|B - \ell \cdot I| = \begin{vmatrix} -\ell & 0 & 2 \\ 0 & 2-\ell & 0 \\ 2 & 0 & -\ell \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -\ell \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$

[illegible] 2 [illegible] 1

$tr(B) = 2 = 2+2-2 = 2$

$|B| = 2 \cdot 2 \cdot -2 = -8$

(16)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_o = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$$

$$|u_1| = \sqrt{\bar{u}^t \cdot \bar{u}} = \sqrt{(1\,0\,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\bar{v}_1^t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$B_o = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \right\} \Rightarrow B_o = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \bar{v}_3$$

$$\begin{cases} \bar{w}_2 = \bar{u}_2 + \lambda \bar{v}_1 \\ \bar{v}_1 \cdot \bar{w}_2 = 0 \end{cases} \quad \lambda = -\bar{v}_1 \cdot \bar{u}_2$$

$$\bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad |w_2| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\; 0\; -\tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}{\left(1/\sqrt{2}\right)} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \bar{w}_3 = u_3 + \lambda \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 \\ \bar{v}_1 \cdot \bar{w}_3 = 0 \\ \bar{v}_2 \cdot \bar{w}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\beta = -\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_3$$

$$\lambda = -\bar{v}_1 \cdot \bar{u}_3 = -\left(1/\sqrt{2}\; 0\; 1/\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cancel{\alpha} \quad \lambda = \frac{-5}{\sqrt{2}}$$

(12)

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[1e+2e+3e \to 1e]{} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 7-\lambda & 7-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \to (7-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[\substack{2e-2(1e) \to 2e \\ 3e-2(1e) \to 3e}]{} (7-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\boxed{\lambda = 7}$

$$N(A - 7\lambda) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{21}(\frac{1}{2}) \\ E_{31}(\frac{1}{2})}]{} \begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$ $\quad N(A - 1 - I) \quad S_H = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$