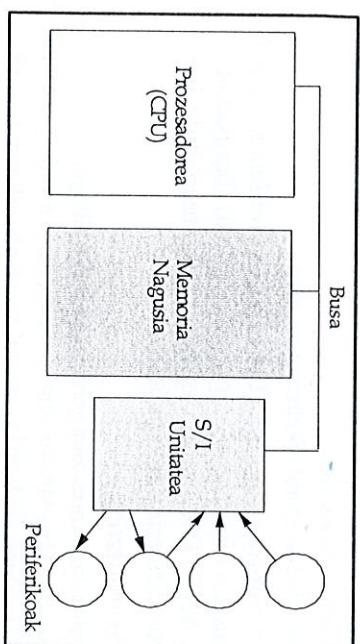


Von Neumann egitura

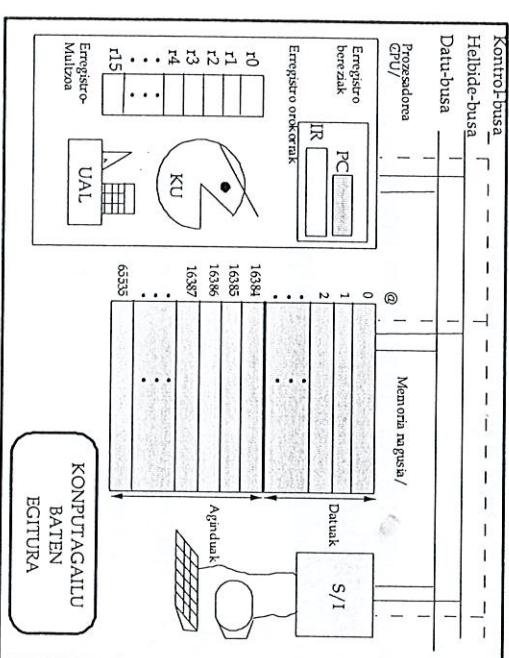
- John von Neumann-ek 1945ean finkatu zuen



Konputagailuen Egitura
1. gaia

Von Neumann egitura

- Konputagailua: informazioa prozesatzeko makina
 - orden (agindu) batzuk uitetzeko (exekutatzeko) gai
 - datu batzuen gain exekutatu behar dira
- programak (aginduak + datuak) exekutatzeko makina
- Oinarritzko osagaiak:
 - Memoria nagusia (MN): programen biltegia
 - Prozesurako Unitate Zentrala (CPU, *Central Processing Unit*)
 - edo prozesadoreoa: aginduak exekutatzeko arduraduna
 - egin beharrekoa erabakitzetan eta konputagailuaren unitateei zereginak betearazten dizkie
 - aginduak: oinarritzko funtziokoak, aritmetikoak eta logikoak, datuen gain egin beharreko ekintzak zehazten dituztenak
 - Sarerra/irteerako unitatea: konputagailuaren eta kanpo aldearen arteko informazio-transferentzia gauzatzen du (SI-ko gaiuak edo periferikoak)
 - Busak: osagaien arteko conexio-lerroak



Konputagailu funtzionala

- Prozesadorea: aginduak exekutatzeko arduraduna
 - Kontrol-unitatea (KU): bere ardurak
 - memoria nagusitik agindu bat lortu (irakurri)
 - agindua aztertu eta konputagailuak agindua exekutatzeko behar duen kontrol-informazioa sortu
 - hurrengo aginduaren irakurketarako prestatu
 - Unitate aritmetiko-logikoa (UAL/AIU, *Arithmetic and Logic Unit*): datuekin oinarritzko eragiketak egiteko (batuketak, kentketak, AND, OR, etab.). Agindu konkretuen ondorioz exekutatzzen dira eragiketa hauek.
 - Erregistro-multzoa:
 - Behin behineko informazioa gordetzeko barne biltegia
 - Biltegi azkarra (1ns MN-ko 50ns aurrean), baina edukiera txikikoa (bitak)
 - Bi mota: helburu orokorreko erregistroak eta helburu bereziko erregistroak

5

Konputagailu funtzionala

- Memoria nagusia: datuen eta aginduen gordailua (programak)
 - informazio asko gordetzea posible (edukiera handia)
 - atzipen-denbora “handia”
- Sarrera/irteera unitatea: konputagailuaren eta kanpo aldearen arteko informazio trukaketa posible egiten du
 - periferikoetako datu-transferentziaz arduratu (diskoak, teklatura, pantaila...)
- Busak: informazio trukaketa gauzatzea posible egiteko konputagailuaren osagaiaik elkarrekintzat lotzen dituzten lerroak
 - helbideen (@) lerroak, informazioaren kokagunea, adibidez datu edo agindu bat zein memoria-helbidearen dagoen
 - datuen lerroak, datuak trukatzeko, adibidez memoriaiko edukia, datu memorian badago, edo periferiko baten edukia, etab.
 - Kontrolen lerroak, kontrol informazioarako, bete behar den ataza zehazteko (irakurketa, idazketa, etab.)

6

Memoriak sarrera

- Memorian: programa+datuak

Arazoa:

- Memoria-sistema eta prozesu-unitatearen arteko abiadura desberdintasuna
- Edukiera handiaren beharra atzipen-denbora baxuarekin

Aztergai:

- Memoria-sistemen atzipen-denbora nola murriztu
 - Memoria-hierarkia
 - Memoriaren egitura: moduluuen arteko konexioak

Memoriaren antolaketa

Memoria-egitura:

- Memoria-egitura:
 - bit bat (0,1) gordetzeko gai diren osagai fisikoez osatua
 - n biteko gelaxkatan banatua (gelaxkaren indizea), memoria gelaxka bakoitzak bere helbidea du (gelaxkaren indizea), memoria atzitzu nahi den bakoitzean helbide-busetik transmititzen dena
 - gelaxka = helbidera daiteteen unitate minimoa
 - Helbide-busaren zabalera (busaren tamaina bitetan) gelaxken kopuruarekin erlazionatuta, gelaxkaren tamainarekiko independentea
 - Datu-busaren zabalera memoriako atzipen bakoitzean lortzen den informazio kantitate maxima da; beste ezaugarriekiko independentea
 - hitza = datu tamaina esanguratsua (egun 64 bitekoa), prozesadorearen barne-arkitektura mugatzzen du (erregistroen tamaina, busak, ALU, etab.)
 - byte, hitz erdi, hitza, hitz bikoitzta, etab.

7

8

Memoriaren antolaketa

Edukiera unitateak:

- Bit (Binary digit)
digitu bitar $\rightarrow 0/1$

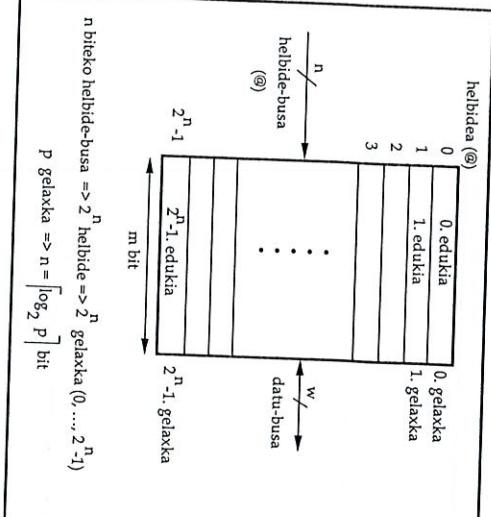
- Byte, karaktere $\rightarrow 8$ bit

- Kilobyte (Kbyte) \rightarrow
 2^{10} byte, 1024 byte

- Megabyte (Mbyte) \rightarrow
 2^{20} Kbyte, 2^{20} byte

- Gigabyte (Gbyte) \rightarrow
 2^{30} Mbyte, 2^{30} byte

- Terabyte (Tbyte) \rightarrow
 2^{40} Gbyte, 2^{40} byte



9

Memoriaren antolaketa

• Byterako helbideratzea:

- memoriak byte bakotzeko helbide bat du = helbidera daitetkeen unitate txikiena bytea da = gelaxkaren tamaina bytekoa da
- byteak helbideraten dituen memoria hitzaren tamainaren menpe ere ikus daitetke: hitz bat n byteko taldeek osatzten dute



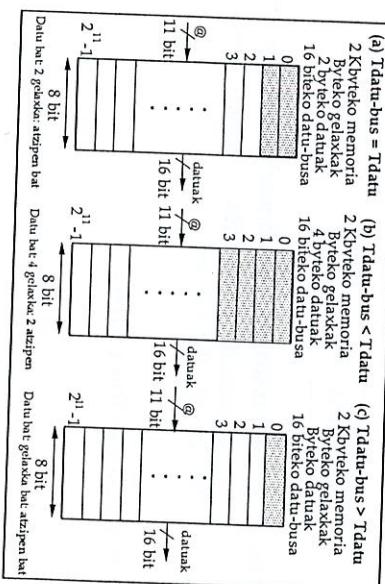
\circledast hitza = @byte \div hitzaren tamaina (bytetan)
byte/hitz = @byte \mod hitzaren tamaina (bytetan)

- byterako helbiderazeak ez du esan nahi memoriako atzipenetan byteak lortzen direnik
- memoriako atzipenetan hitzak baino txikiagoak diren uniteak lor daitezke (bytea, 2 byte, hitz erdi, hitza, etab.) [agindu-kodearen arabera]
- atzipen lerrokatuak erabiltzen dira: hitzen hasierako helbideak ematen dira lerrokatuta ez dagoen atzipena \rightarrow memorian jarraian dauden bi hitzen atzipena hitz bakarra lortzeko

Memoriaren antolaketa

• Datuaren tamaina / memoriako atzipen-kopurua:

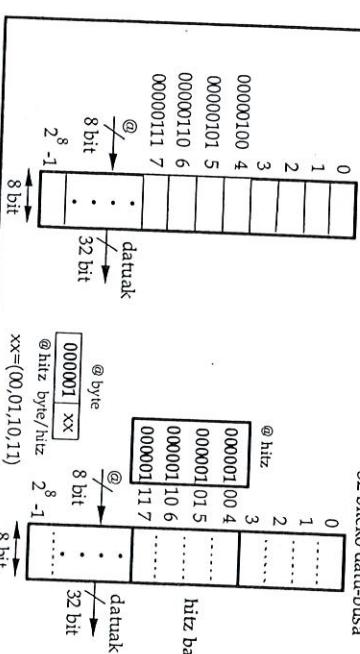
- Eragiketa batean prozesadoreak behar duen informazio kantitatea mugatzzen du datua lortzeko egin behar den memoriako atzipenen kopurua baldin $T_{datu} \leq T_{datu_bus}$ $\Rightarrow \lceil \frac{T_{datu}}{T_{datu_bus}} \rceil$ atzipen



10

Memoriaren antolaketa

• Byterako helbideratzea:



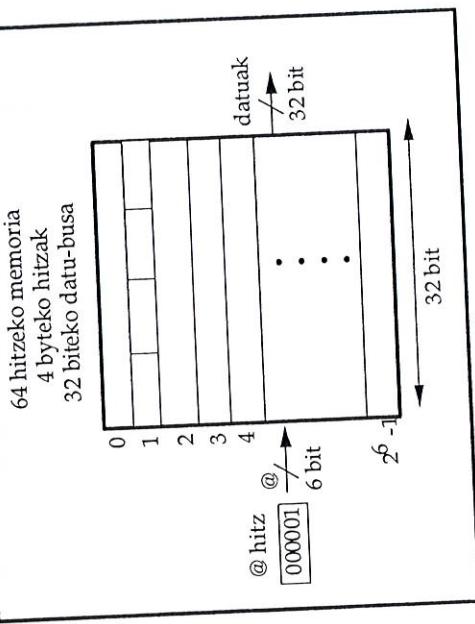
12

Memoriaren antolaketa

Memoriaren antolaketa

- Hitzerako helbideratza:
 - memorian hitz bakoitzeko helbide bat dago = helbidera daitkeen unitate txikiena hitza da = gelaxkaren tamaina hitzekoa da
- @hitza
- nola lortu atzitzea hitza baino txikiagoa den informazioa, adibidez 1 byte?
 - software bidez: prozesadoreak desplazamendu-aginduak eta maskarak beharko ditu hitzaren barruko bytea lortzeko
- Normalean → byterako helbideratza

- Hitzerako helbideratza:



13

14

1. GAIA- MEMORIAREN OINARRIZKO ANTOLAKETA.

1. 4 Mbyteko memoria batean gelaxkak 4 bytekoak dira. Esan:

a) Zenbat gelaxka dauzka? $\rightarrow \frac{4\text{Mbyte}}{4\text{byte}} = \frac{2^{20}}{2^2} = 2^{20}$

b) Zein da helbide handiena? 2^{20-1}

c) Zenbat bitekoa da helbide-busa? 2^{20-1}

$$\text{a)} \frac{4\text{Mbyte}}{2\text{byte}} = \frac{2^{20}}{2} = 2^{20-1}$$

Erantzun galdera berdinak suposatuz gelaxkak 2 bytekoak direla.

- ② 2 byteko gelaxkak eta 8 biteko helbide-busa dituen memoria bat dugu. Esan: c) 2^{20-1} elkarrekin.

a) Zenbateko da memoriaren edukiera bytetan?

b) Hitza 2 bytekoak bada, zein da memoriaren tamaina hitzetan?

- ③ Memoria jakin batek 4096 hitz ditu; hitzak bi bytekoak dira, eta byteak helbideratzen dira. Esan:

a) Zenbateko da memoriaren tamaina bytetan?

b) Zenbat gelaxka ditu memoriak?

c) Zenbateko da helbide-busaren tamaina?

d) Zein da helbide handiena?

4. Hitzak helbideratzen dituen memoria dugu, eta bere helbide handiena 65.535 da. Esan:

a) Zenbat gelaxka ditu memoriak hitzak 4 bytekoak badira?

b) Zenbateko da memoriaren tamaina hitzetan eta bytetan adierazita?

c) Zenbateko da helbide-busaren tamaina?

- ⑤ Memoria jakin baten ezaugarriak hauek dira: hitzak 2 bytekoak dira; helbideratze-unitatea hitza da; helbide-busa 15 bitekoak da, eta datu-busa 16 bitekoak. Esan:

a) 4 byteko zenbat datu gorde ditzakegu memorian?

b) Zenbat atzipen behar ditugu 4 byteko datu bat irakurtzeko?

c) Zenbateko da memoriaren edukiera bytetan?

e) Zenbat hitz eta gelaxka ditu memoriak?

- ⑥ 16Kbyteko memoria eta 32 biteko datu-busa daukaten bi konputagailu dauzkagu. Bi konputagailuetan hitzak 4 bytekoak dira baina lehenean helbideratze unitatea bytea da eta bigarrenean hitza.

a) Zein da memoriako helbide altuena kasu bakoitzean?

b) Zenbat bit izango ditu memoriako helbideak kasu bakoitzean?

c) Zenbat atzipen behar dira kasu bakoitzean 4 byteko datu bat irakurtzeko?

Zenbat posizio eta zenbat hitz okupatzen ditu datu honek makina bakoitzean?

7. Konputagailu batek 32 biteko hitzak ditu. Memoriako helbideak 0 eta 511 artean daude, eta byteak helbideratzen dira. Esan:

a) Memoriaren tamaina gelaxkatan

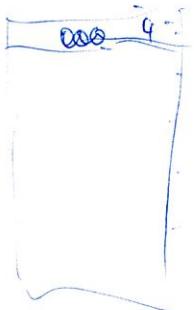
b) Helbideen bit-kopurua

c) Memoriaren edukiera bytetan

d) Memoriaren edukiera hitzetan

- ⑧ 4 byteko hitzak helbideratzen dituen konputagailu baten memoria edukiera 1 Mbytekoa da eta 18 byteko helbide-busa eta 32 byteko datu-busa ditu. Memoriako atzipen-denbora 100ns da eta erlojuaren maiztasuna 200 MHz.
- Zenbat ziklo behar dira 250 byte irakurtzeko?
 - Zenbat gelaxka eta hitz okupatzen ditu 250 byteko datu batek?
 - Errepika ezazu ariketa honako aldaketa hauek kontuan hartuz: byteak helbideratzen dira, eta hitzaren tamaina 4 bytekoa da. Zenbat bitekoia izango da helbide-busa?
- ⑨ Honako helbide hauek byteak helbideratzen dituen memoria batekoak dira, hitzak 4 bytekoak izanik. Kalkulatu zein memoria-hitzari dagokion bakoitza eta zehaztu zein byte den hitzaren barruan.

560	1070	315	427	112	729
-----	------	-----	-----	-----	-----



Konputagailuen egituren

1. Gaia. Memoriaren oinarriak autoelkete

Ariketa

Memoria 2Mbyte

helbideren tze unitatea bytea
n? \rightarrow helbide busa

2Mbyte, 2^{20} byte

$$\text{Posizio -kooruna} = \frac{2\text{Mbyte}}{1\text{byte}} = \frac{2^{20} \cdot 2}{1} = 2^{21}$$

$$n=21$$

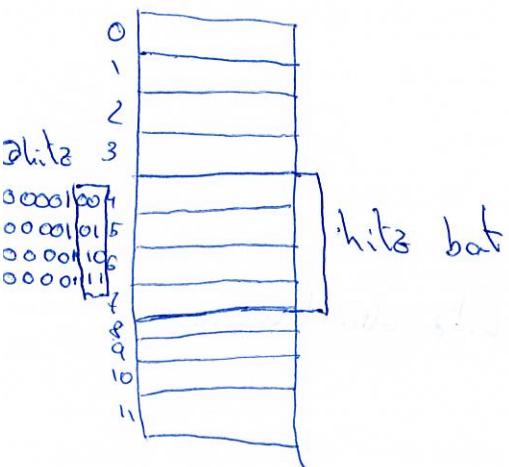
Memoria 2Mbyte

helbideren tze unitatea hitza = 4Mbyte
n? \rightarrow helbide busa.

$$\text{Posizio -kooruna} = \frac{2\text{Mbyte}}{4\text{Byte}} = \frac{2^{20} \cdot 2}{4 \cdot 2^2} = 2^{19}$$

$$n=19$$

Byteko helbiderak:



$@=9$ bytaren helbidea izanik

$$\text{hitza} = 9 \text{ div } 4 = 2$$

4byteloak direkto
hitza

Hitza batzuko bytea:

$$\text{bytea/hitza} = 9 \text{ mod } 4 = 1$$

Aritmetika

①

4Mbytello memoriau 4bytello gelaixkak daude:

a) Zenbat gelaixka dauska?

$$\text{gelaixka kopurua} = 2^{n-1} \text{ da}$$

$$\text{guztira } 2^n \text{ helbide ditu} = \frac{4\text{byte}}{4\text{byte}} = \frac{2^2 \cdot 2^{20}}{2^2} = 2^{20} \text{ helbide gelaixka}$$

Bera, $2^{20}-1$ gelaixka ditu.

b) Zein da helbide landiera?

$2^{20}-1$ gelaixka dituenez, 2^{n-1} da baita ere helbiderik landiera bera,
 $2^{20}-1$ da helbide landiera.

c) Zenbat biteloa da helbide-buse?

helbide-busak n bit ditu bera, $n=20$ izango d..

②

2bytello gelaixkak eta 8bitello helbide-busak

Hou da, 2^8 gelaixka

$$\text{Memorizaren edukiare: } 2 \cdot 2^8 = 2^9 \text{ byte}$$

Hitzen tamaina 2bytelloe bede: $\frac{2^9}{2} = 2^8$ hitz-ello tamaina
izango da.

③

Memoria 4096 byte hitz, hitzak 2 bytelloak, eta byteak helbiderak.

a) memorizaren tamaina: $4096 \text{ hitz} \cdot 2 = 2^{12} \cdot 2 = 2^{13}$

b) 2^{13} gelaixka izango ditu, gelaixka bolaitzean trakki byte bat badago.

c) helbide-buse: $n=13$

d)

$$\text{Habide handien: } 2^n - 1 = 2^{13} - 1 = 8191$$

(5)

Hitzkell 2 bytello, habiderde-unitas hitz; Habide-busc 15 bit, dta dtr.-busc 16 bit.

a) 4 bytello zeiset datu memorien? $\rightarrow \text{Mem tamire} = \frac{2^{15} \cdot 2}{2^2} = 2^{16}$

$$\text{dtr.-kell: } \frac{2^{16}}{2^2} = 2^{14} \text{ dtr. gorda ditzakagu.}$$

b) 4 bytello datua indurakello 2 atzipek beharrko ditugu.

c) Memorien edukier.: 2^{16} izango da.

d) Hitzkell: $\frac{2^{16}}{2} = 2^{15}$ Hitz ditu

$$\text{geldakello: } 2^{15} \text{ geldakella}$$

(6)

16 K bytello memoria eta 32 dtr.-busc, bi komputagailu. Biak 4 bytello hitzak, lehen-habiderde bytak bestea hitz.

a) Habide altuen

1) $16 \cdot 2^{10} = 2^{14}$, beraz, $2^{14}-1$ da habide ~~altuen~~ negatze

2) $\frac{2^{14}}{2^2} = 2^{12}$, beraz, $2^{12}-1$ da habide ~~altuen~~ negatze

b)

Memoriako habideren bit kopuru?

$$1) n=14$$

c) 4 bytello datua indurakello, 1) 4 atzipek

2) atzipek beharrke

D) Hitz beharrke, baina 4 posizio
Hitz etc posizio beharrke.

(8)

4 byte ladede hældesat., memorie 1Mbytes etc 18 bit hældesat.-bus
 32 bit ladede databus, at zyklus tidsbereg 100ns da de er løjtet med tidsvur
 200 MHz

a) Zerst 250 250 byte i en hældesat. $\rightarrow \frac{250}{4} = 63$ arbejdsatzes hældesat.
~~630ns~~ $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{200 \text{MHz}} = \frac{1}{200} \mu\text{s} = 0.005 \mu\text{s} = 5 \text{ ns}$

b) $\frac{250}{4} = 63$ hertz da $\frac{63 \text{ lcons}}{\text{ns}} = 1260 \text{ zilks}$ ~~1260 zilks~~
 $\frac{250}{4} = 63$ hertz da $\frac{63 \text{ lcons}}{\text{ns}} = 1260 \text{ zilks}$ dit.

c)

2^{20} byte $\Rightarrow n = 20$ i bane af hældesat.

a) $\frac{250}{4} = 63$ sat. $\Rightarrow 260$ zilks $\Rightarrow \frac{100 \text{ ns} \cdot 13}{5 \text{ ns}} = 260$ zilks
 1260 zilks

b) $\frac{250}{4} = 250$ gældende
 $\frac{250}{4} \approx 63$ hertz okupelle dit.

(9)

Hældesat. byttes hældesat., hæld 4 byteskud.

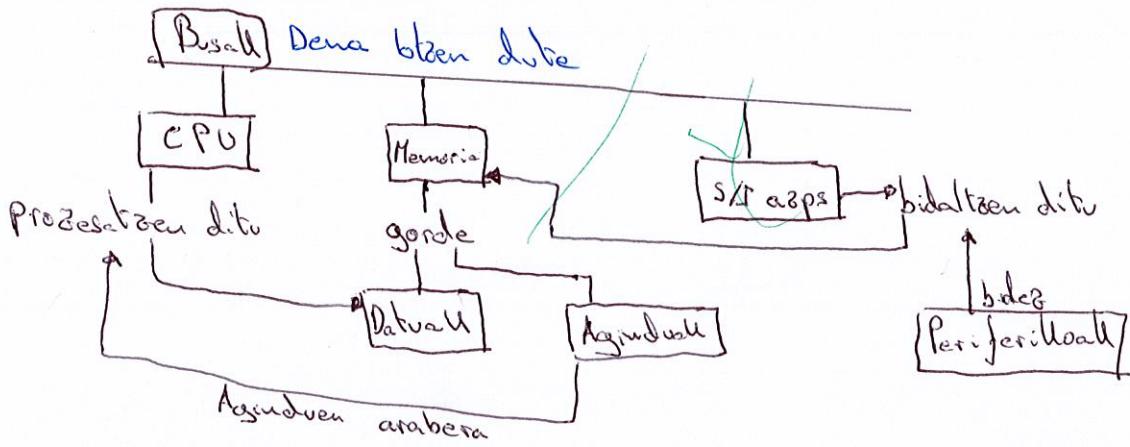
$$\frac{560}{4} = 140 \text{ hertz} \quad 560 \bmod 4 = 0 \text{ byte}$$

$$\frac{1670}{4} = 267 \dots \quad 1670 \bmod 4 = 2 \text{ byte}$$

2. Zeinen Von Neumann makina

Konputagailuen
egitura

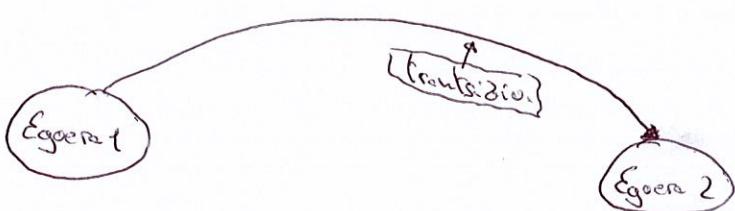
Von Neumann Makina



Egoera Makina

Egoera batean egoera, beste egoera batera pasatu nahi badu, gertzean bidez egiten da horrela gailu edo periferikoa sortzen ditute. Eta gertzean bidez transizioa gertzen da. egoera baterik bestean pertsona transizioa gertatzeko erantzun behar dira, periferikoen bidez.

Gertzea f. Elkarrean





Ariketak

KE

1.

a)

Bus Sintzunoa da, Multiplexatura hain eran ere. Eta hau, horietan helburudetako erreserue batzaldu da.

b)

c)

Memoria notekoen erabiliz aldi izabello, Ready seinalea gelituko
gertuko.

1.2

③

$$f(x,y) = (x^2+y^2) \sin \frac{1}{xy}$$

limite jelerri:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{y=mx \\ x \rightarrow 0}} (x^2+m^2x^2) \sin \frac{1}{mx^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 (1+m^2) \sin \frac{1}{mx^2} = \textcircled{0}$$

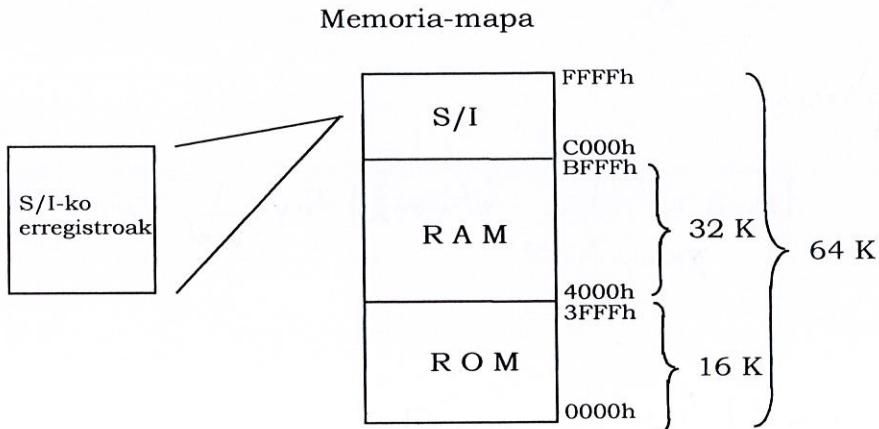
Limite libertoa existitzenetik eratorri.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \| (x,y) - (0,0) \| < \delta \Rightarrow | f(x,y) - 0 | < \varepsilon$$

$$| f(x,y) - 0 | = | (x^2+y^2) \sin \frac{1}{xy} | = \cancel{|x^2+y^2|} \cdot \cancel{|\sin \frac{1}{xy}|}$$

$$\leq |x^2+y^2| \Rightarrow \sin \frac{1}{xy} \leq 1$$

$$|x^2+y^2| \leq |x^2| + |y^2|$$



3.3 Irudia: Memorian mapeatutako S/I erakusten duen memoria-mapa.

Ikus dezagun adibide bat non, 2^6 hitzeko RAM memoria bat eta 3 erregistrotun teklatua konektatu nahi ditugun makina batean. Helbide fisikoak honakoak izango dira:

@ datu-erregistroa =	1XXXX11 (irakurketa)
@ kontrol-erregistroa =	1XXXX11 (idazketa)
@ egoera-erregistroa =	1XXXX10
@ RAM =	0XXXXXX

Makina honen memoriako helbideak 7 bitekoak dira, beraz makinaren helbideratze-espazioa 2^7 posiziokoa da. Zeroz hasten den memoria-helbide bat atzitzen denean (nahiz irakurtzeko nahiz idazteko) RAM memoria atzitzen da (beraz, helbideratzeko 7 bit erabili arren, pisu altuenekoa beti 0 izango da eta horregatik memoriaren tamaina $2^6=64$ hitzetakoa da). 1XXXX01 helbidean egindako irakurketa batean datu-erregistroa irakurtzen da. 1XXXX11 helbidean idazten bada, orduan kontrol-erregistroan idazten da. 1XXXX10 helbidean irakurtzen denean kontroladorearen egoera-erregistroa irakurtzen da.

Diseinua egin den moduan, aurreikusi da teklatua sarrerako periferikoa dela eta inoiz ez dugula datu-erregistroan, hau da 1XXXX11 helbidean idatziko. Era berean kontrol-erregistroan burutuko den eragiketa irakurketa izango denez, posiblea da bi erregistro hauek helbide berean mapeatzea. Beste aukera bat izango litzateke bi erregistro horiek helbide desberdinetan egotea, horrela bietan idatzi eta irakurri ahal izango litzateke. Helbideak honela geratuko lirateke:

- datu-erregistroa 1XXXX01 helbidean mapeatuta,
- kontrol-erregistroa 1XXXX11 helbidean mapeatuta,
- egoera-erregistroa 1XXXX10 helbidean mapeatuta.

3.4 irudian, erregistroen konexioa nola gauzatzen den ikus dezakegu.

Ondoren, S/Iko erregistroak memorian mapeatzearen abantaila eta desabantailak aurkeztuko ditugu:

Abantailak:

S/I-ko erregistroak memoria posizioak bezalaxe atzitzen dira, hots, edozein agindu eta edozein helbideratze-modu erabil daitezke. Izan ere, memorian mapeatutako erregistroak memoria fisikoaren posizioak bailira maneiatzenten dira eta CPUa ez da enteratzen erregistro ala memoria-posizioa den.

Desabantailak:

Espazioa galtzen da memoria fisikorako.

Sistema sortabilo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b \in \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\langle e_1, e_2, b \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Abhängig

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b = S \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad r(A) = r(AB) = 3 < 4 = n$$

Sistema heterogéneo indeterminado.

$$S = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(S) = R(AB)$$

B beliebige - multipe ielenh Koeffizienten zwingt direktes
lineales independentes teilen

~~B~~ beliebige - sorten sistema sortabelo

$$B_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad B_2 \cdot x = b \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$k\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ $\exists \bar{x} = \bar{x}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} k_1 + k_2 + k_3 = x_1 \\ k_2 + k_3 = x_2 \\ k_3 = x_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim W_1 = 1$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim W_2 = 1$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim W_3 = 1$$

$$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \Rightarrow \dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 = 3$$

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4$$

$$\dim (W_1 \oplus W_2 \oplus W_3) + \dim W_4 \neq \dim \mathbb{R}^4$$

$$B(W_1 \oplus W_2 \oplus W_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N_{(A)} = N(A)$$

$$A\bar{x} = \bar{0} \quad N(A)\bar{x} = \bar{0}$$

Bektore-Espazielle eta aspi espazielle

Algebra

(4)

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linealmente independientes de acuerdo

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 + k_4 \vec{v}_4 = \vec{0} \Rightarrow k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E}_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E}_{32}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & k_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k_4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E}_{43}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad |(A)| = 3$$

Beta $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sistema linealmente dependiente.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E}_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E}_{32}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E}_{43}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad |(A)| = 3$$

Beta, sistema Beta regalari indeterminante de.
Sistema homogeneo:

$$\hat{s}_4 = k_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k_4 = 3$$

(5)

a)

$$(1, 1, 1) \quad (1, 2, 3) \quad (3, 1, 1)$$

linealmente independientes de acuerdo:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Linealmente independientes de acuerdo con el resultado ilus: beta de
 $k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ betetzen den edo es.

$$k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + k_3 \bar{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow (\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3) \text{ hat } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

\Leftrightarrow

beggi triangolare l'ultima d'ugu

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{E}_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{E}_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad r(A) = 3 = n$$

$\mathcal{E}_{31}(-2)$

Ondoriosi, sistemi heterogenei determinati da

Etc. bereb. linealii independenti chia.

b)

$\{\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \bar{v}_3 - \bar{v}_4, \bar{v}_4 - \bar{v}_1\}$ soni $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \in \mathbb{R}^5$ linealii independenti
ezi direi fragedu.

$$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \quad \bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \quad \bar{w}_3 = \bar{v}_3 - \bar{v}_4, \quad \bar{w}_4 = \bar{v}_4 - \bar{v}_1$$

$$k_1 \cdot \bar{w}_1 + k_2 \cdot \bar{w}_2 + k_3 \cdot \bar{w}_3 + k_4 \cdot \bar{w}_4 = \vec{0}$$

$$(\bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \bar{w}_4) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$(\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \bar{v}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$