Analisi Matematikoa

Zenbaki-multzoak

Zenbaki Konplexuak

December 20, 2016

Aurkibidea

1. Gaia
Zenbaki-multzoak

1.1 Zenbaki konplexuak

1.1. Definizioa. *Zenbaki konplexuen* $\mathbb{C}$ *multzoa honako hau da:*

1. $\mathbb{C} = \{a + bi/a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$
   a *zati erreala,* b *zati irudikaria eta* i *unitate irudikaria dira.*

1.2. Definizioa. $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *zenbaki konplexua emanik,*

1. $\sqrt{a^2 + b^2}$ *balioari* z*-ren modulua deritzo eta* ρ *edo* $|z|$ *idazten da.*

2. $\arctan \frac{b}{a}$ *balioari* z*-ren argumentu deritzo eta* θ *edo* $\arg(z)$ *idazten da.*

3. $\theta \in [0, 2\pi)$ *edo* $\theta \in (-\pi, \pi]$ *badago, argumentu nagusia dugu eta* $\mathrm{Arg}(z)$ *idazten da.*

1.3. Definizioa. $\mathbb{C}$ *multzoan,* $z = a + bi$ *eta* $w = c + di$ *zenbakiak berdinak dira,* $z = w$*,* $a = c$ *eta* $b = d$ *direnean.*

1.4. Definizioa. $z = a + bi$ *emanik,* $\overline{z} = a - bi$ *zenbakiari* z*-ren konjugatu deritzo.*

1. $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$*, hau da, modulu bera dute.*

2. $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = \arctan \frac{-b}{a} = -\arctan \frac{b}{a} = -\mathrm{Arg}(z)$*, hots, argumentuak zeinuz aurkakoak dituzte.*

1.1.1 Adierazpideak

1.1.1.1 Binomiala

$z = a + bi$ z-ren adierazpen binomiala da.

1.1.1.2 Geometrikoa

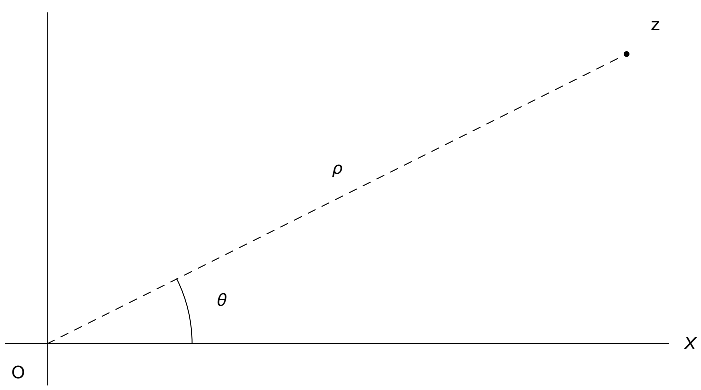
Pentsa dezakegu $z = a+bi$ zenbakia OXY planoko (a, b) puntua dela, non a OX ardatzean kokatzen den, eta b OY ardatzean.

Orduan, $(c, 0)$ zenbakia OX ardatzean dago eta c $\in \mathbb{R}$ da. Hortik, beraz, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ondoriozta dezakegu. Horregatik deritzo OX ardatzari ardatz erreala.
Bestalde, $(0, d) \in \mathbb{C}$ zenbakia OY ardatzean dago eta irudikari puru deritzo. Horregatik deritzo OY ardatzari ardatz irudikaria.

$\boxed{(0, 1) = i}$ unitate irudikaria da.

1.1.1.3 Polarra

$z = a + bi \subset \mathbb{C}$ zenbakia ρ eta θ parametroen bidez ere koka daiteke OXY planoan.



$a = \rho \cos\theta$ eta $b = \rho \sin\theta$ izanik,
 ρ_θ z-ren adierazpen polar deritzo.

1.1.1.4 Trigonometrikoa

z-ren adierazpen binomialean a-ren eta b-ren balioak ordezkatuz,
$z = a + bi = \rho \cos\theta + (\rho \sin\theta)i = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, z-ren adierazpen trigonometrikoa lortzen dugu.

1.1.1.5 Esponentziala

Euler-en formula: $e^{bi} = \cos b + \sin b$.
z-ren adierazpen trigonometrikoan Euler-en formula erabiliz, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{\theta i}$ z-ren adierazpen esponentziala dugu.

a, b	$\rho\ ,\ \theta$
$a + bi$ (a, b)	ρ_θ $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\rho e^{\theta i}$
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\theta = \arctan\frac{b}{a}$ $a, b \in \mathbb{R}$	$a = \rho\cos\theta$ $b = \rho\sin\theta$ $0 \leq \rho$ $\theta \in \mathbb{R}\ ,\ \theta \in (-\pi\ ,\ \pi]$ $\theta \in [0\ ,\ 2\pi)$

1.1.2 Eragiketak

1.5. Definizioa. *z eta w zenbakien arteko batuketa/kenketa honela definitzen da:*

1. *Adierazpen binomiala:* $z \pm w = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$.

1.6. Adibidea. $z + w = (1 + \sqrt{3}i) + (-2 + 2i) = -1 + (\sqrt{3} + 2)i$.

1.7. Definizioa. *z eta w zenbakien biderketa honela definitzen da:*

1. *Adierazpen binomiala:* $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
2. *Adierazpen polarra:* $z \cdot w = (\rho_\theta) \cdot (\rho'_{\theta'}) = \rho \cdot \rho'\ _{\theta+\theta'}$.
3. *Adierazpen esponentziala:* $z \cdot w = (\rho e^{\theta i}) \cdot (\rho' e^{\theta' i}) = \rho \cdot \rho'\ e^{\ (\theta+\theta')i}$.

1.8. Adibidea.

1. $z * w = (1 + \sqrt{3}i) * (-2 + 2i) = -2 + 2i - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i^2 = -2 + 2i - 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3} = (-2 - 2\sqrt{3}) + (2 - 2\sqrt{3})i$.
2. $z * w = (2_{\frac{\pi}{3}}) * (2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}) = 4\sqrt{2}_{\frac{13\pi}{12}}$.

1.9. Definizioa. *z eta w zenbakien arteko zatiketa honela definitzen da:*

1. *Adierazpen binomiala:* $\dfrac{z}{w} = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{(ac - bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}$.
2. *Adierazpen polarra:* $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}_{\theta-\theta'}$.
3. *Adierazpen esponentziala:* $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho e^{\theta}}{\rho' e^{\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{(\theta-\theta')i}$.

1.10. Adibidea.

1. $\frac{z}{w} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-2+2i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} = \frac{(-2+2\sqrt{3})+(-2-2\sqrt{3})i}{4+4} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{8} + \frac{-2-2\sqrt{3}}{8}i.$

2. $\frac{z}{w} = \frac{2_{\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)_{\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}_{\frac{-5\pi}{12}}.$

1.11. Definizioa. *z zenbakiaren berreketa honela definitzen da, $n \in \mathbb{N}$ izanik:*

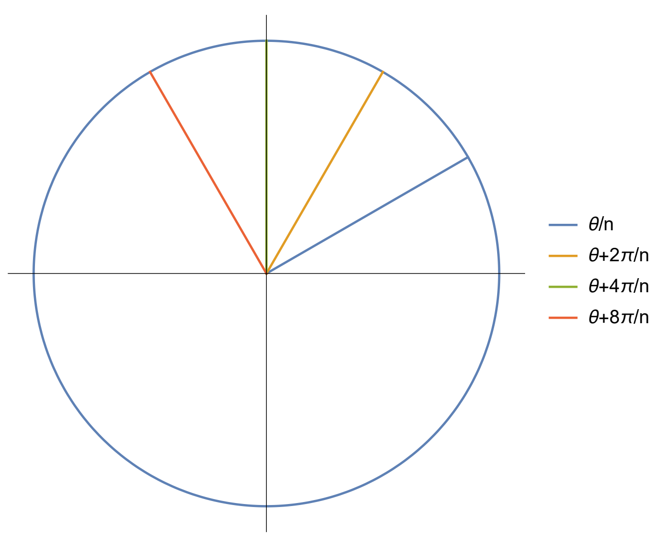
1. *Adierazpen polarra:* $z^n = (\rho_\theta)^n = {\rho^n}_{n\theta}$.

2. *Adierazpen trigonometrikoa:* $z^n = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

1.12. Adibidea. *z'' kalkulatuko dugu:* $z'' = [2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]^4 = 16(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$

1.13. Definizioa. *z zenbakiaren erroketa honela definitzen da, $n \in \mathbb{R}$ izanik:*

1. *Adierazpen polarra:* $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho_\theta} = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $\boxed{k \in \mathbb{Z}}$ *edo* $\boxed{k = 0, 1, ..., n-1}$

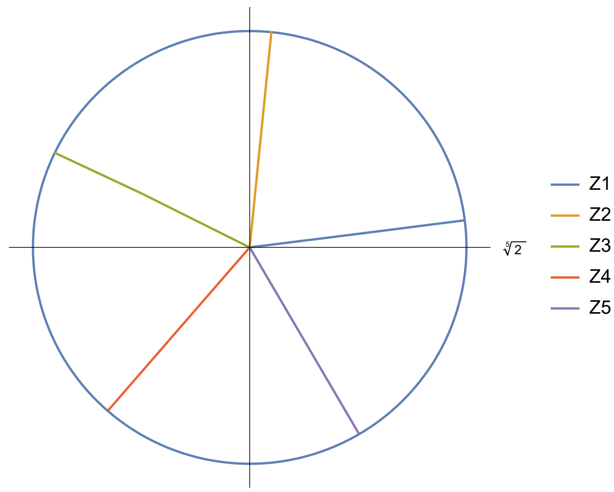


1.14. Adibidea. $\sqrt{w} = \sqrt{-2+2i} = x + yi \Rightarrow -2 + 2i = (x+yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \Rightarrow$ $\begin{cases} -2 = x^2 - y^2 \\ 2 = 2xy \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{x}$, $= x = 0$ *delako; beraz* $x^2 - (\frac{1}{x})^2 = -2 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ $x^2 = t$, *hartuz,* $t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = -1 \pm \sqrt{2}$ *izateko, kenketa baztertu behar dugu, beraz,* $x^2 = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$

Hortik, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$.

Ondorioz, bi soluzio hauek ditugu: $\sqrt{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ *eta* $-\sqrt{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

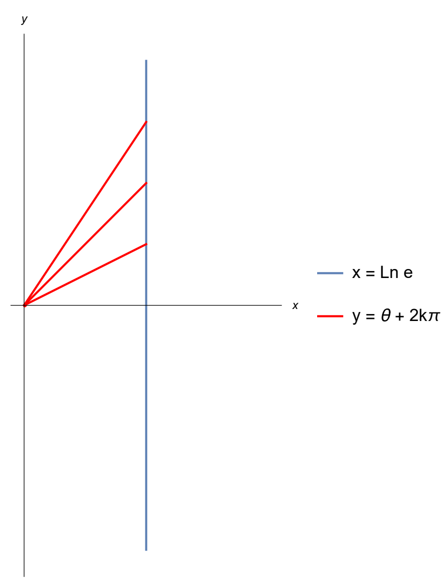
1.15. Adibidea. $\sqrt[5]{z}$ *kalkulatuko dugu:* $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$, $\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{2_{\frac{\pi}{3}}} = \sqrt[5]{2}_{\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}} = \sqrt[5]{2}_{\frac{\pi+6k\pi}{15}}$,
$k \in \mathbb{Z}$; $k = 0, 1, ..., n-1$
$\boxed{k=0}$ $z_1 = \sqrt[5]{2}_{\frac{\pi}{15}}$ $\boxed{k=1}$ $z_2 = \sqrt[5]{2}_{\frac{7\pi}{15}}$ $\boxed{k=2}$ $z_3 = \sqrt[5]{2}_{\frac{13\pi}{15}}$ $\boxed{k=3}$ $z_4 = \sqrt[5]{2}_{\frac{19\pi}{15}}$
$\boxed{k=4}$ $z_5 = \sqrt[5]{2}_{25\frac{\pi}{15}}$



1.16. Definizioa. *z zenbakiaren logaritmo nepertarra honela definituko dugu,* $\boxed{z = \rho_e{}^{\theta i}}$ *bada:*

1. *Adierazpen exponentziala:* $\ln z = \ln \rho_e{}^{\theta i} = \ln \rho + \ln{}_e{}^{\theta i} = \ln \rho + (\theta + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

* *Emaitza adierazpen binomialean ematen da.*
* *Infinitu logaritmo nepertar daude.*
* *Infinitu logaritmoek zati erreal bera dute. Hortaz, denak daude zuzen bertikal batean:* $x = \ln e$
* *Infinitu logaritmoen artean* 2π *aldea dago.*



1.17. Adibidea. $z = 2_{\frac{\pi}{3}} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$
$\ln z = \ln(2e^{\frac{\pi}{3}i}) = \ln 2 + (\frac{\pi}{3} + 2k\pi i)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\boxed{k=0}$ *denean, logaritmo nepertarraren balio nagusia lortzen da:* $\ln 2 + \frac{\pi}{3}i$.

1.1.3 Ariketak

1.18. Adibidea.

$\boxed{14.}$ Froga ezazu berdintza hauek betetzen direla (z_1 , $z_2 \in \mathbb{C}$) :

3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

<u>EZKERREKO ATALA:</u>

$\overline{z_1 z_2} = \overline{[(a+bi)(c+di)]} = \overline{ac+adi+bci+bdi^2} = \overline{(ac-bd)+(ad+bi)i} =$

$\boxed{(ac-bd)-(ad+bi)i}$

<u>ESKUINEKO ATALA:</u>

$\overline{z_1}\ \overline{z_2} = \overline{a+bi}\ \overline{c+di} = (a-bi)(c-di) = ac-adi-bci-bd = \boxed{(ac-bd)-(ad+bi)i}$

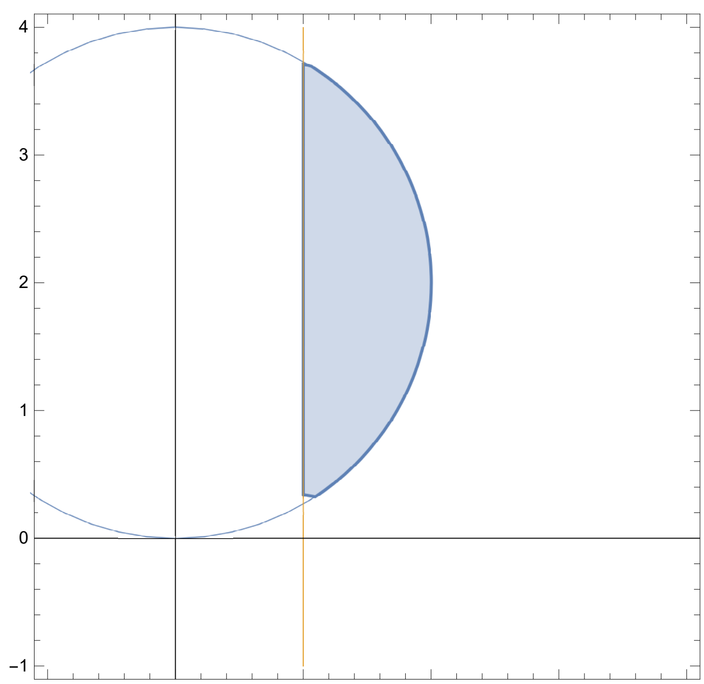
Ondorioz, froga dezakegu berdintza, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$, betetzen dela.

1.19. Adibidea.

$\boxed{18.}$ Irudika itzazu planoan erlazio hauek betetzen dituzten zenbaki konplexuen multzoak:

19) $\{z \in \mathbb{C} / |z-2i| \leq \text{Re}\ (z) \text{ eta } \text{Re}\ (z) \geq 1\}$, $z = a+bi$

$|z-2i| = 2 \Rightarrow |a+bi-2i| = 2 \Rightarrow |a+(b-2)i| = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2+(b-2)^2} = 2 \Rightarrow$
$(\sqrt{a^2+(b-2)^2})^2 = 2^2 \Rightarrow a^2+(b-2)^2 = 2^2 \Rightarrow \boxed{(a-0)^2+(b-2)^2 = 2^2} \begin{cases} zentroa : (0,2) \\ erradioa : 2 \end{cases}$



Honako irudian azter dezakegunez, urdinez marraztatuta dagoen esparrua izango litzateke eskatutako erlazioak betetzen dituzten zenbaki konpletxuen multzoa; hau da, $|z-2i| \leq \text{Re}\ (z)$ eta $\text{Re}\ (z) \geq 1$ betetzen dutenen multzoa.

1.20. Adibidea.

$\boxed{20.}$ Ebatz itzazu ekuazio hauek eta adieraz itzazu grafikoen bidez soluzioak:

13) $z^{3/4} = 1$

$z^{3/4} = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{1^4} \Rightarrow z = \sqrt[3]{1}$

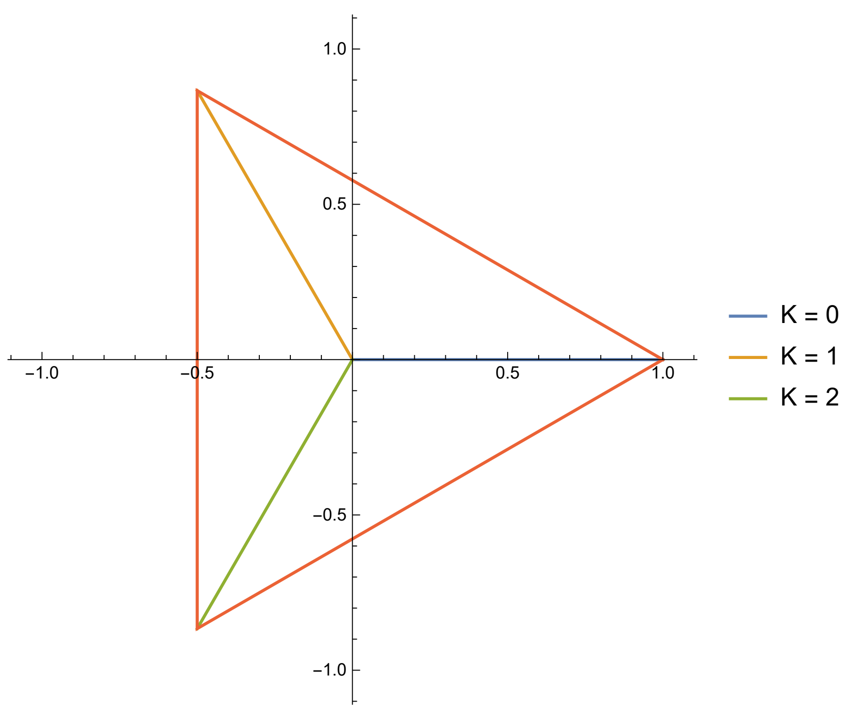
$\boxed{Polarrean} \Rightarrow \sqrt[3]{1_0} \Rightarrow \sqrt[3]{1}_{\frac{0+2k\pi}{3}}$

K=0,1,2 kasuak analizatu behar ditugu orain:

$\boxed{k=0} \Rightarrow \sqrt[3]{1}_{\frac{0+2*0*\pi}{3}} = 1_0$

$\boxed{k=1} \Rightarrow \sqrt[3]{1}_{\frac{0+2*1*\pi}{3}} = 1_{\frac{2\pi}{3}}$

$\boxed{k=2} \Rightarrow \sqrt[3]{1}_{\frac{0+2*2*\pi}{3}} = 1_{\frac{4\pi}{3}}$

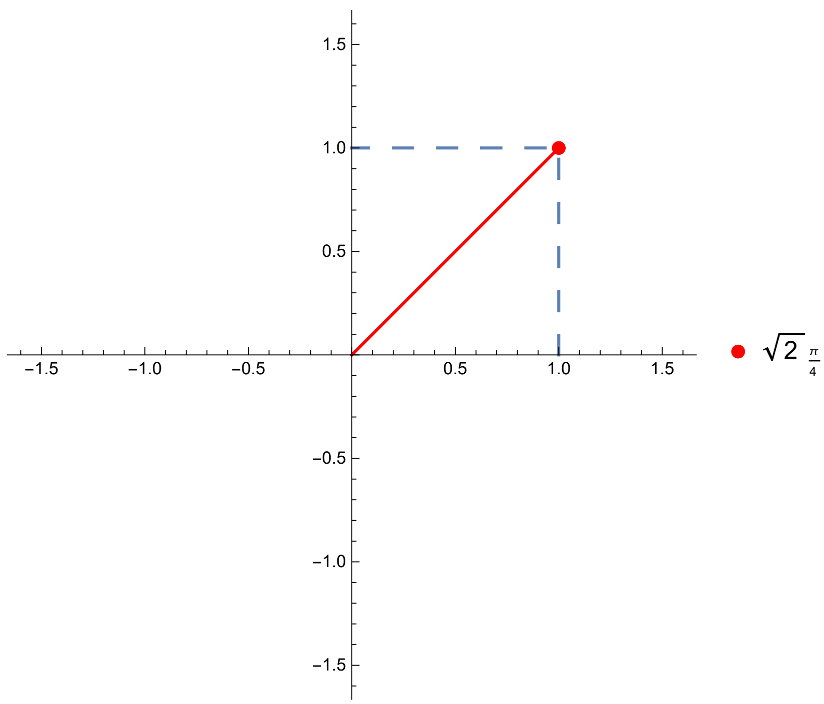


1.21. Adibidea.

$\boxed{21.}$ Ebatz ezazu $z^3 = 1 + i$ ekuazioa logaritmoa erabiliz.

$z^3 = 1 + i$

$\ln z^3 = \ln(1+i) \Rightarrow 3\ln z = \ln(1+i) \Rightarrow \ln z = \frac{\ln(1+i)}{3}$



$1 + i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$ da.

$z = e^{\frac{\ln(1+i)}{3}} \Rightarrow z = e^{\frac{\ln\sqrt{2}+(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}{3}} \Rightarrow z = e^{\frac{\ln\sqrt{2}+\frac{(\pi+8k\pi)i}{4}}{3}} \Rightarrow z = e^{\frac{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi(1+8k)i}{4}}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = e^{\frac{\ln\sqrt{2}}{3}} e^{\frac{\pi(1+8k)i}{12}} \Rightarrow z = e^{\ln\frac{\sqrt{2}}{3}} e^{\frac{\pi(1+8k)i}{12}} \Rightarrow z = e^{\ln(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} e^{\frac{\pi(1+8k)i}{12}} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = e^{\ln\sqrt[6]{2}} e^{\frac{\pi(1+8k)i}{12}} \Rightarrow z = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{\pi(1+8k)i}{12}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{z = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{\pi(1+8k)i}{12}} \text{ , } k = 0, 1, 2 \in \mathbb{Z}}$

K-ren balioak ondorioztatzeko, $\theta = \frac{\pi(1+8k)}{12}$ garatu beharko dugu.

$\theta = \frac{\pi(1+8k)}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{8k\pi}{12}$

Orain, K-ri balio desberdinak emanaz, kalkulatu behar dugu bira osoa eman baino lehen zenbat balio desberdin har ditzakeen.

$\boxed{\text{K=0 denean}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + 0 = \frac{\pi}{12} = 15°$

$\boxed{\text{K=1 denean}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} = 135°$

$\boxed{\text{K=2 denean}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{16\pi}{12} = \frac{17\pi}{12} = 255°$

$\boxed{\text{K=3 denean}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{24\pi}{12} = \frac{25\pi}{12} = 375°$

Beraz, ondoriozta dezakegu K=3 denean errepikatzen dela bira; eta, ondorioz, K=0,1,2 denean lehen biran gaudela.