Grafoak eta zuhaitzak

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Titulazioa: Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Informatika fakultatea
Donostia

GRAFOAK eta ZUHAITZAK

1.1. Sarrera

Grafo teoriaren sorrera: 1736. Euler.
Königsberg-eko zazpi zubien problema:
7 zubiren bidez komunikatutako 4 zonalde.
Zubi bakoitzetik behin pasata hasierako puntura itzuli.

Helburua: Elkarren artean erlazionatuta dauden objektu kopuru finitua duten egoerak eredutzea.

Aplikazioak informatikan: sareen diseinua, zirkuitu integratuen diseinua, etab.

1.2 Definizioak

Grafo zuzendua: $G = (V, E)$ bikotea, non

- V multzo finitu ez hutsa erpin multzoa den.
- $E \subseteq V \times V$ ertz multzoa den (erpin bikote ordenatuak).

(a, b) ertza emanik:

- ertza a eta b erpinekin intzidentea.
- a eta b erpinak albokoak dira.
- a erpina ertzaren jatorria da.
- b erpina ertzaren amaiera da.
- Baldin $a = b$ orduan (a, a) begizta da.

Erpin bakartua: ertz intzidenterik ez duena.

Definizioak

Grafo ez zuzendua: ertzak erpin bikote ez ordenatuak dira. Ertzen noranzkoa ez da kontuan hartzen, $(a,b) \in E \Rightarrow (b,a) \in E$.
Ertz ez zuzendua: $\{a,b\} = \{(a,b),(b,a)\}$.
Begizta: $\{a,a\} = (a,a)$

Izan bedi $G = (V,E)$ grafo zuzendua, dagokion grafo ez zuzendua: ertzen norantza kontuan hartu gabe G-tik lortutako grafoa (ertz bakoitza behin bakarrik).

$G = (V,E)$ multigrafo: existitzen badira $a, b \in V$, $a \neq b$ bi erpin, beren artean ertz bat baino gehiago dutelarik.
Anizkoiztasuna: (a,b) ($\{a,b\}$) moduko ertz kopurua.
k-grafoa: k anizkoiztasuna baino handiagoa duen ertzik ez dago.
Kontrakorik esaten ez bada, grafoa sinplea da, ez multigrafoa.

1.3. Erpinen graduak

- $G = (V,E)$ grafo zuzendua eta $a \in V$ erpina.
  a-ren graduerdiak:
  $d^+(a) = \#\{b \mid (a,b) \in E\}$: jatorria a-n (irteera gr.).
  $d^-(a) = \#\{b \mid (b,a) \in E\}$: amaiera a-n (sarrera gr.).
  a-ren gradua: $d(a) = d^+(a) + d^-(a)$.

- $G = (V,E)$ grafo ez zuzendua eta $a \in V$ erpina.
  a erpinaren gradua: $d(a) = a$-rekin intzidenteak diren ertzen kopurua. (Erpinean $\{a,a\}$ begizta badago, bi ertz intzidentetzat hartuko ditugu). a erpina zintzilikatua: $d(a) = 1$. a erpina bakartua: $d(a) = 0$.

Erpinen graduak

Teorema
Izan bedi m ertz duen $G = (V,E)$ grafo ez zuzendua.

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2m$$

Korolarioa
$G = (V,E)$ grafo ez zuzendua izanik, gradu bakoitiko erpin kopurua beti bikoitia da.

$G = (V,E)$ grafo ez zuzendu erregularra: erpin guztiek gradu bera dute. k-erregularra: erpin guztiek k gradua dute.

1.4 Ibilaldiak grafoetan

$G = (V,E)$ grafo ez zuzendua eta $x, y \in V$ erpinak izanik
G-ko $x - y$ ibilaldia: honelako sekuentzia finitua

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \cdots, e_{p-1}, x_{p-1}, e_p, x_p = y$$

- $x_0, x_1, \cdots, x_p$ erpinak;
- $e_1, \cdots, e_p$ ertzak. $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$

Ibilaldiaren luzera: ertz kopurua, p.

- Baldin $p = 0$ orduan $x = y$: Ibilaldi nabaria.
- Baldin $x = y$ eta $p \geq 1$: Ibilaldi itxia.
- Baldin $x \neq y$: Ibilaldi irekia.

Ibilaldiak grafoetan

Izan bedi $G = (V, E)$ grafo ez zuzenduko $x - y$ ibilaldia:

- Katea: Ertz errepikaturik ez dago.
- Zirkuitua: Kate itxia ($x = y$).
- Bidea: Erpin errepikaturik ez dago.
- Zikloa: Bide itxia ($x = y$).

Akordioa: Zirkuituetan gutxienez ertz bat. Zikloetan gutxienez 3 ertz desberdin.

Grafo zuzenduetan: ibilaldi zuzenduak, kate zuzenduak, bide zuzenduak, etab.

Ibilaldiak grafoetan

Teorema
Izan bedi $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua eta $x, y \in V$ bi erpin, $x \neq y$. $x - y$ ibilaldia existitzen da baldin eta soilik baldin $x - y$ bidea existitzen bada.

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua konektatua: $x, y \in V$ edozein bi erpinetarako $x \neq y$ izanik, $x - y$ bidea baldin badago beti.

Grafo zuzendu konektatua: Dagokion grafo ez zuzendua konektatua bada.
Grafo ez konektatua: kontrako kasuan.

Ibilaldiak grafoetan

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua izanik, V-ren gaineko erlazio hau baliokidetasun erlazioa da.

$$x \mathcal{R} y \text{ baldin eta soilik baldin } x - y \text{ ibilaldia badago}$$

Baliokidetasun klaseak: $V_1, \cdots, V_q$
G-ren osagaiak: $G_1 = (V_1, E_1), \cdots, G_q = (V_q, E_q)$
non $i = 1, \cdots, q$, eta E_i diren V_i baliokidetasun klase bakoitzeko erpinei intzidente diren ertz guztiek osatutako multzoak.

G-ren osagai kopurua: $\kappa(G)$.
G konektatua baldin eta soilik baldin $\kappa(G) = 1$.

1.5 Grafoei lotutako matrizeak

Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $V = \{x_1, \cdots, x_n\}$.
Albokotasun matrizea: $n \times n$ tamainako $A = (a_{ij})$ matrizea

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{baldin } x_i, x_j \text{ albokoak} \\ 0 & \text{baldin } x_i, x_j \text{ ez albokoak} \end{cases}$$

A simetrikoa da. Diagonal nagusian: 0-ak.

$$d(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$$

Teorema
Izan bitez $G = (V, E)$ begiztarik gabeko grafo ez zuzendua, $V = \{x_1, \cdots, x_n\}$ eta A dagokion albokotasun matrizea.
A^p matrizeko (i, j) elementua: p luzerako $x_i - x_j$ ibilaldi kopurua.

1.6 Azpigrafoak. Grafo osagarria

Izan bedi $G = (V, E)$ grafoa (zuzendua edo ez)
$G_1 = (V_1, E_1)$ grafoa G-ren azpigrafo da baldin

- $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$
- $E_1 \subseteq E$ (E_1-eko ertz bakoitza V_1-eko erpinekin intzidentea da).

Baldin $V_1 = V$ orduan G_1 grafoa G-ren azpigrafo sortzailea da.
(G-k m ertz badu: 2^m azpigrafo sortzaile posible dago).

$G = (V, E)$ grafoa emanik (zuzendua edo ez); $\emptyset \neq U \subseteq V$.
U erpin azpimultzoak induzitutako G-ren azpigrafoa ($< U >$):

- Erpin multzoa: U
- Ertz multzoa: $E \cap (U \times U)$ (U-ko erpinekin intzidente diren E-ko ertzak).

Azpigrafoak. Grafo osagarria

$G = (V, E)$ (zuzendua edo ez).

- $x \in V$ erpina kenduz gero, $G - x = (V_1, E_1)$
  - $V_1 = V - \{x\}$
  - E_1: x erpinari intzidente diren ertzak ezik, E-ko gainontzeko ertz guztiak.

  ($G - x$ grafoa V_1-ek induzitutako azpigrafoa da).
- $e \in E$ ertza kenduz gero, $G - e = (V_1, E_1)$
  - $V_1 = V$
  - $E_1 = E - \{e\}$

$V = \{x_1, \cdots, x_n\}$ erpin multzoa izanik.

- V-ren gaineko grafo osotua (K_n): erpinen arteko ertz guztiak dituen begizta gabeko grafo ez zuzendua, hau da,

$$(\forall x, y \in V) \quad x \neq y \implies \{x, y\} \text{ ertza existitzen da}$$

Azpigrafoak. Grafo osagarria

Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua,
$V = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

- G-ren osagarria: $\overline{G} = (V, \overline{E})$ begizta gabeko grafoa, non G-ko erpinak dauden eta $\overline{E}$: K_n grafoan dauden eta E-n ez dauden ertzak.

Baldin $G = K_n$ orduan $\overline{G}$: grafo nulua (n erpin, 0 ertz).

$G = (V, E)$ zatibiko grafoa: grafo ez zuzendua, begizta gabea, non

- Existitzen dira V_1, V_2 non $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- G-ko $\{x, y\}$ ertz bakoitza: $x \in V_1$ eta $y \in V_2$.

Horretaz gain, $(\forall x \in V_1, \forall y \in V_2)\ \exists \{x, y\}$ ertza, orduan G zatibiko grafo osotua. V_1-ek n_1 erpin badu eta V_2-k n_2,
$G = K_{n_1, n_2}$.

1.7 Grafo isomorfismoa

$G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ grafo ez zuzenduak emanik,
$f : V_1 \longrightarrow V_2$ funtzioa grafo isomorfismoa da baldin

- f bijektiboa.
- $(\forall x, y \in V_1)\ \{x, y\} \in E_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in E_2$, hau da, erpinen arteko albokotasunak mantentzen baditu.

G_1 eta G_2 isomorfoak. $G_1 \cong G_2$.

Isomorfia erlazioa grafoen multzoaren gaineko baliokidetasun erlazioa da.

G_1 eta G_2 isomorfoak: funtsean berdinak. Erpinen izenean eta grafoak marrazteko moduan desberdintzen dira soilik; erpin kopuru bera, ertz kopuru bera, gradu bereko erpin kopuru bera, ziklo kopuru bera, etab.

1.8 Kate eta zirkuitu eulertarrak

Izan bedi $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua, erpin bakarturik gabea.

- Zirkuitu eulertarra: G grafoko ertz guztietatik behin eta bakarrik behin igarotzen den zirkuitua.
- Kate eulertarra: G grafoko ertz guztietatik behin eta bakarrik behin igarotzen den kate irekia.

Grafo eulertarra: zirkuitu eulertarra badu.

Teorema

Izan bedi $G = (V, E)$ grafo ez zuzendua, erpin bakarturik gabea.
G eulertarra da baldin eta soilik baldin G konektatua bada eta G-ko erpin guztien gradua bikoitia bada.

Kate eta zirkuitu eulertarrak

Korolarioa

$G = (V, E)$ ez zuzendua eta erpin bakartu gabea.
G-k kate eulertarra du baldin eta soilik baldin konektatua bada eta zehazki gradu bakoitiko bi erpin baditu.

Teorema

$G = (V, E)$ grafo zuzendua, erpin bakartu gabea.
G-k zirkuitu eulertar zuzendua du baldin eta soilik baldin konektatua bada eta edozein $x \in V$ erpinerako $d^+(x) = d^-(x)$ betetzen bada.

(Zirkuitu eulertar zuzendua: G-ko ertz bakoitzetik behin bakarrik pasatzen den zirkuitu zuzendua).

1.9 Bide eta ziklo hamiltondarrak

$G = (V, E)$ grafo ez zuzendua.
Erpin kopurua $= n \geq 3$.

- Ziklo hamiltondarra: erpin guztiak dituen zikloa.
- Bide hamiltondarra: erpin guztiak dituen bide irekia.

Ziklo hamiltondar bati ertz bat kentzean bide hamiltondarra lortzen da.
Grafo hamiltondarra: ziklo hamiltondarra duen grafoa.

Bide eta ziklo hamiltondarrak

- G grafoa hamiltondarra bada, orduan G konektatua da eta $x \in V$ erpin guztiek $d(x) \geq 2$ gradua dute.
- Baldin $a \in V$ eta $d(a) = 2$ orduan a erpinarekin intzidenteak diren bi ertzak ziklo hamiltondarrean daude.
- Baldin $a \in V$ eta $d(a) > 2$ orduan ziklo hamiltondarra eraikitzeko, behin a erpinetik pasa garela ez ditugu a-ra intzidente diren eta erabili ez ditugun ertzak kontuan izango.
- G-rentzat ziklo hamiltondarra eraikitze-prozesuan erpin guztiak ez dituen ziklo bat ezin daiteke itxi.

Bide eta ziklo hamiltondarrak

Grafo hamiltondarra karakterizatzeko ez dago beharrezkoa eta nahikoa den baldintzarik.

Teorema
Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua n erpinekoa. Baldin

$$\forall x, y \in V \quad (x \neq y) \quad d(x) + d(y) \geq n - 1$$

orduan G-k bide hamiltondarra du.

Korolarioa
Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, n erpin dituena. Baldin

$$\forall x \in V, \quad d(x) \geq \frac{n-1}{2}$$

orduan G-k badu bide hamiltondarra.

Bide eta ziklo hamiltondarrak

Teorema
Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n \geq 3$ erpinekoa. Baldin

$$\forall x, y \in V \quad (x, y \text{ ez albokoak}) \quad d(x) + d(y) \geq n$$

orduan G hamiltondarra da.

Korolarioa
$G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, $n \geq 3$ erpinekoa. Baldin

$$\forall x \in V \quad d(x) \geq \frac{n}{2}$$

orduan G hamiltondarra da.

Bide eta ziklo hamiltondarrak

Teorema
Baldin $G = (V, E)$ hamiltondarra, orduan edozein $V' \subset V$ azpimultzorentzat, $\emptyset \neq V' \neq V$,

$$\kappa(G - V') \leq |V'|$$

($G - V' = (V_1, E_1)$ non $V_1 = V - V'$ eta E_1 multzoan V'-ko erpinekin intzidente diren ertzak ezik gainontzeko Eko ertz guztiak daude).

2. Zuhaitzak

2.1 Sarrera. 2.2 Definizioak

- Hastapenak: Kirchhoff (1847). Cayley (1857).
- Aplikazioak: Datu egiturak, sailkapen teknikak, kodifikazio teoria, optimizazio problemak...

Izan bedi $T = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua.

- Zuhaitza da baldin konektatua bada eta ziklorik ez badu.
- Basoa da baldin grafoaren osagai bakoitza zuhaitza bada.
- Grafo konektatu baten zuhaitz sortzaile esaten zaio zuhaitza den azpigrafo sortzaile orori.

Zuhaitzak
2.2 Propietateak

Teorema
T zuhaitzaren edozein bi erpin a eta b, $a \neq b$ emanik, $a - b$ bide bat eta bakarra dago erpin hauen artean.

Ondorioz, T zuhaitzari ertz bat kenduz deskonektatu egiten da eta zuhaitz diren bi osagai konektatu sortuko dira.

Teorema
G grafo ez zuzendua izanik, G konektatua da baldin eta soilik baldin zuhaitz sortzailea badu.

Teorema
T zuhaitzak n erpin eta m ertz baditu, orduan $n = m + 1$.

Zuhaitzak
2.2 Propietateak

Teorema
T zuhaitzak $n \geq 2$ erpin baditu, orduan gutxienez 2 erpin zintzilikatu (bat gradukoak) ditu.

Teorema
Izan bedi $G = (V, E)$ begizta gabeko grafo ez zuzendua, n erpin eta m ertz dituena. Honakoak baliokideak dira.

i) *G zuhaitza da.*
ii) *G grafoak ez du ziklorik eta $n = m + 1$.*
iii) *G konektatua da eta $n = m + 1$.*

2.3 Errodun zuhaitzak

Izan bedi T grafoa.

- T zuhaitz zuzendua: zuhaitz ez zuzendu bateko ertzei noranzkoa emanaz lortzen den grafo zuzendua.
- T errodun zuhaitza: r erpina badago, erro deitua, 0 sarrera gradua duena ($d^-(r) = 0$), eta beste x erpin guztien sarrera gradua 1 bada ($d^-(x) = 1$).

Zuhaitz errodunetarako terminologia:

- Hostoa: 0 irteera gradua duten v erpinak: $d^+(v) = 0$.
- Gainontzekoak barne erpinak dira.
- v erpina zuhaitzaren l mailan dago, baldin r errotik v erpinerako bidearen luzera l bada. Hostoen mailarik handienari zuhaitzaren altuera esaten zaio.
- Zuhaitz errodunak (v_1, v_2) ertza badu, v_1 erpina v_2-ren ama da; v_2 erpina v_1-en alaba.
- Baldin v_1-etik v_2-rako bide zuzendua badago, v_1 erpina $v_2$ren arbasoa da eta v_2 erpina $v_1$en ondorengoa.

Errodun zuhaitzak

Izan bitez $T = (V, E)$ zuhaitz erroduna, $p \in \mathbb{Z}^+$ $(p \geq 1)$.

- T zuhaitz p-tarra: $d^+(x) \leq p$ edozein $x \in V$-rako, hau da, barne erpin bakoitzak gehienez p alaba baditu.
- T zuhaitz p-tar osotua: $d^+(x) = 0$ edo $d^+(x) = p$ edozein $x \in V$, hau da, barne erpin bakoitzak zehazki p alaba baditu.

Teorema
Izan bedi $T = (V, E)$ zuhaitz p-tar osotua, n erpin dituena, hauetatik h hostoak eta i barne erpinak izanik. Honako erlazioak betetzen dira.

- $n = p \cdot i + 1$
- $h = (p - 1) \cdot i + 1$