6. Gaia
Funtzioen deribagarritasuna

6.1 Funtzio deribagarriak

6.1 Definizioa. *$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa $x = a \in A$ puntuan deribagarria da limite hau existitzen bada:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{edo} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Limiteari a puntuko deribatu deritzogu, eta $f'(a)$ idatziko dugu.

6.2 Adibidea. Izan bedi $f(x) = e^x$ funtzioa. Ikus dezagun deribagarria den ala ez $x = a$ puntuan.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^a(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} e^a = e^a.$$

Hortaz, deribagarria da $x = a$ puntuan, eta deribatua $f'(a) = e^a$ da.

6.3 Propietatea. *$f(x)$ funtzioa deribagarria bada $x = a$ puntuan, jarraitua ere izango da bertan.*

6.4 Definizioa. *Ezker-deribatua*

Limite honi $f(x)$ funtzioaren a puntuko ezker-deribatu deritzogu:

$$f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

6.5 Definizioa. *Eskuin-deribatua*

Limite honi $f(x)$ funtzioaren a puntuko eskuin-deribatu deritzogu:

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

6.6 Definizioa. *Deribatu funtzioa*

Deribatua existitzen denean, $a \in A$ puntuari bertako deribatua, $f'(a)$, egokitzen dion funtzioari deribatu funtzio deritzogu, eta $f'(x)$ idatziko dugu.

6.7 Adibidea. Azter dezagun $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ 2x & 0 \le x \end{cases}$ funtzioaren deribagarritasuna $x = 0$ puntuan.

Lehenago, puntu horretan funtzioaren jarraitutasuna aztertuko dugu.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0 = \lim_{x\to 0^+} 2x = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ eta $f(0) = 0$; beraz, jarraitua da.

$x = 0$ puntuaren ezkerrean eta eskuinean funtzio desberdinak ditugunez, ezker- eta eskuin-deribatuak kalkulatu behar ditugu:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin h - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2.$$

Hortaz, $f(x)$ funtzioa ez da deribagarria $x = 0$ puntuan.

Gainerako puntuetan funtzioa deribagarria dela ikus genezake. Bere deribatu funtzioa, beraz, hau da:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ 2 & 0 < x \end{cases}.$$

$f(x)$ funtzioaren $f'(x)$ deribatu funtzioa ere deribagarria bada, bere deribatuari $f(x)$ funtzioaren bigarren ordenako deribatu deritzogu, eta $f''(x)$ idatzi.

Era berean definitzen dira hirugarren, laugarren, ..., n. ordenako deribatuak, eta $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, ..., $f^{n)}(x)$ adieraziko ditugu.

6.2 Funtzio deribagarrien propietateak

6.8 Propietatea. *Funtzio elementalak deribagarriak dira beren definizio-eremuetan.*

6.9 Propietateak. *$f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak deribagarriak badira $x = a$ puntuan, $f \pm g$, $f \cdot g$ eta $f \div g$ $(g \neq 0)$ deribagarriak dira bertan, eta deribatuak hauek dira:*

1. *Batuketa, kenketa:* $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.
2. *Biderketa:* $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. *Zatiketa:* $(f \div g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *$g(a) \neq 0$ izanik.*

6.10 Teorema. *Funtzio konposatuaren deribatua*

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa deribagarria bada $x = a$ puntuan eta $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa deribagarria bada $y = b = f(a)$ puntuan, $f(A) \subset B$ izanik, $(g \circ f) : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio konposatua deribagarria izango da $x = a$ puntuan, eta deribatua hau izango da:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

6.11 Teorema. *Alderantzizko funtzioaren deribatua*

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa hertsiki monotonoa bada A multzoan eta deribagarria bada $x = a$ puntuan, $f'(a) \neq 0$ izanik, $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alderantzizko funtzioa existitu eta hertsiki monotonoa izango da $f(A)$ multzoan, eta deribagarria izango da $y = b = f(a)$ puntuan, eta

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \quad b = f(a) \text{ izanik.}$$

6.12 Adibidea. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ ondoko taulak definitutako funtzioak:

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0
$f'(x)$	1	0	3	2
$g(x)$	1	3	0	2
$g'(x)$	0	1	2	3

$(g \circ f)'(2)$, $(f^{-1})'(2)$ eta $(f^{-1})'(3)$ kalkulatuko ditugu.

Funtzio konposatuaren deribatuaren teorema aplikatuko dugu:

$$(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(1) \cdot f'(2) = 1 \cdot 3 = 3.$$

Alderantzizko funtzioaren deribatuaren teorema aplikatu nahi badugu, $2 = f(1)$ dela kontuan izan behar dugu; baina $f'(1) = 0$ denez, ezin dugu teorema aplikatu.

$(f^{-1})'(3)$ kalkulatzeko $3 = f(0)$ dela kontuan izango dugu; beraz, $f'(0) = 1$ denez, $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(0)}$ izango dugu; eta $(f^{-1})'(3) = 1$ lortuko dugu.

6.13 Teorema. *Rolle-ren teorema*

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua eta (a,b) tarte irekian deribagarria bada eta $f(a) = f(b)$ betetzen badu, $\exists c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$.

6.14 Adibidea. Ikus dezagun $e^x \sin x = 1$ ekuazioaren bi soluzioren artean $e^x \cos x = -1$ ekuazioaren soluzio bat dagoela.

Lehenago, ekuaziotik funtzio bat sor dezagun:

$$e^x \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = e^{-x} \Rightarrow \sin x - e^{-x} = 0;$$

hortik $f(x) = \sin x - e^{-x}$ funtzioa hartuko dugu.

Ekuazioaren soluzioa izateak funtzioa anulatzea esan nahi du. Hau da, x_1 eta x_2 badira ekuazioaren bi soluzio, $x_1 < x_2$ izanik, $f(x_1) = f(x_2) = 0$ beteko da. Bestalde, $f(x)$ funtzioa jarraitua eta deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan, funtzio elementalen arteko eragiketa delako. Hortaz, Rolleren teoremaren hipotesiak betetzen ditu. Ondorioz, $\exists c \in (x_1, x_2) \,/\, f'(c) = 0$.

Ikus dezagun zehazki zer gertatzen den deribatua $x = c$ puntuan anulatzen denean.

$$f'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \cos c + e^{-c} = 0 \Rightarrow \cos c = -e^{-c} \Rightarrow e^c \cos c = -1,\ c \in (x_1, x_2).$$

Hortaz, $e^x \cos x = -1$ ekuazioak soluzio bat du (x_1, x_2) tartean; hau da, $e^x \sin x = 1$ ekuazioaren bi soluzioren artean.

6.15 Teorema. *Batez besteko balioaren teorema edo Lagrange-ren teorema*

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua eta (a,b) tarte irekian deribagarria bada, $\exists c \in (a,b) \,/\, f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

6.16 Ondorioak. *Monotoniaren baldintza nahikoa*

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua eta (a,b) tarte irekian deribagarria bada,

1. $\forall x \in (a,b)$ $\;f'(x) > 0$ *bada, $f(x)$ hertsiki gorakorra da (a,b) tartean.*

2. $\forall x \in (a,b)$ $\;f'(x) < 0$ *bada, $f(x)$ hertsiki beherakorra da (a,b) tartean.*
3. $\forall x \in (a,b)$ $\;f'(x) = 0$ *bada, $f(x)$ konstantea da (a,b) tartean.*
4. $\forall x \in (a,b)$ $\;f'(x) = g'(x)$ *bada, $f(x) = g(x) + k$ izango da (a,b) tartean.*

6.17 Adibidea. Ikus dezagun $x^2 = x \sin x + \cos x$ berdintza x-ren bi baliotarako soilik betetzen dela.

Pasa gaitezen ekuaziotik funtzio batera: $f(x) = x \sin x + \cos x - x^2$. Orain, funtzioa bi puntutan anulatzen dela frogatu beharko dugu. Horretarako Bolzanoren teorema erabiliko dugu.

$f(x)$ funtzio jarraitua da funtzio elementalez osatuta dagoelako. Orain, funtzioaren balioak kalkulatuko ditugu puntu batzuetan:

$$f(0) = 1; \quad f(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi - \pi^2}{4} < 0; \quad f(\tfrac{-\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi - \pi^2}{4} < 0.$$

Beraz, $f(x)$ funtzioa $(0, \frac{\pi}{2})$ eta $(\frac{-\pi}{2}, 0)$ tarteetan anulatzen da.

Ikus dezagun ez dela puntu gehiagotan anulatzen.

$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x - 2x = x \cos x - 2x = x(\cos x - 2)$. Parentesien artekoa beti da negatiboa, $\cos x < 2$ delako. Beraz,

$x < 0$ denean, $f'(x) = x(\cos x - 2) > 0$ da; hortaz, $f(x)$ gorakorra da;

$x > 0$ denean, $f'(x) = x(\cos x - 2) < 0$ da; hortaz, $f(x)$ beherakorra da.

Ondorioz, $x < 0$ denean, behin bakarrik anula daiteke $f(x)$ funtzioa; eta beste behin ere $x > 0$ denean.

6.18 Teorema. *L'Hôpital-en erregela*

$f(x)$ eta $g(x)$ funtziock baldintza hauek betetzen badituzte:

1.a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, *hau da, jarraituak badira $x = a$ puntuan, ($a = \pm\infty$ izan daiteke)*

1.b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ *bada,*

2) $\exists \varepsilon > 0$, *non* $\forall x \in \mathcal{E}^*(a, \varepsilon)$ $\;f'(x), g'(x)$ *existitzen diren, eta $g'(x) \neq 0$ bada, eta*

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *limitea existitzen bada,*

berdintza hau beteko da: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

6.19 Adibidea. Kalkula dezagun $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin x - \sin^3 x}{x^5}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin x - \sin^3 x}{x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x) \sin x}{x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x) x}{x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(2x - 2 \sin x \cos x)}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(2x - \sin 2x)}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(2 - 2\cos 2x)}{12x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(2 \sin 2x)}{12x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}.$$

Lehenengo berdintzan, $\sin x$ atera dugu faktore komun gisa; bigarrenean, $x = 0$ puntuan, $\sin x \sim x$ baliokidetza erabili dugu; hirugarrenean sinplifikatu eta, laugarrenean, L'Hôpitalen erregela aplikatu dugu; gero, $2\sin x\cos x = 2\sin 2x$ berdintza ordezkatu dugu; seigarren eta zazpigarren berdintzetan, L'Hôpitalen erregela aplikatu dugu; eta zortzigarren berdintzan, $x = 0$ puntuan, $\sin 2x \sim 2x$ baliokidetza erabili dugu.

6.3 Taylor-en formula

Atal honen helburua funtzio bat polinomioen bidez hurbiltzea izango da. Hurbilpena bilatzean erroreren bat sortuko dugu; hori ere aztertuko dugu eta hurbilpenaren zehaztasuna polinomioaren mailaren mende egongo dela ikusiko dugu.

6.20 Teorema. *Taylor-en teorema*

$x = a$ puntuaren $\mathcal{E}(a,\varepsilon)$ ingurune batean $f(x)$ funtzioa n+1 aldiz deribagarria bada, $\forall x \in \mathcal{E}^*(a,\varepsilon)$ $\exists c \in (x,a)$ (edo $c \in (a,x)$), non

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

beteko den.

Berdintzaren bigarren atalari $f(x)$ funtzioaren *Taylorren garapena* deritzogu; azkeneko batugaiari *gai osagarri* deritzogu; gai osagarria kenduta geratzen den polinomioari *Taylorren polinomio* deritzogu.

Lagrange-ren gai osagarria:

$$\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad c \in (x,a) \text{ (edo } (a,x)) \text{ izanik,}$$

edo

$$\frac{f^{n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \theta \in (0,1) \text{ izanik.}$$

Gai osagarria hurbilpenaren zehaztasuna neurtzeko erabiliko dugu. Ikus dezakegunez, gai osagarria hiru balioren menpe dago: n. deribatuaren ordena, x eta a puntuen arteko distantzia ($| x-a |$) eta $c \in (x,a)$ (edo $c \in (a,x)$) balioa.

Maclaurin-en formula

$a = 0$ denean, $\forall x \in \mathcal{E}^*(0,\varepsilon)$ $\exists c \in (x,0)$ (edo $c \in (0,x)$), non

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

beteko den.

6.21 Adibidea. Kalkula dezagun $f(x) = \ln(1+x)$ funtzioaren Taylorren garapena $x = 0$ puntuan, eta laugarren ordenara arte.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x), & f(0) &= \ln 1 = 0;\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, & f'(0) &= 1;\\
f''(x) &= -(1+x)^{-2}, & f''(0) &= -1;\\
f'''(x) &= 2(1+x)^{-3}, & f'''(0) &= 2;\\
f^{IV}(x) &= -6(1+x)^{-4}, & f^{IV}(0) &= -6;\\
f^{V}(x) &= 24(1+x)^{-5}, & f^{V}(c) &= 24(1+c)^{-5}.
\end{aligned}$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-0) - \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{2}{3!}(x-0)^3 - \frac{6}{4!}(x-0)^4 + \frac{24}{5!(1+c)^5}(x-0)^5 =$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5(1+c)^5}x^5, \quad c \in (0,x) \text{ edo } c \in (x,0).$$

Adierazpen horren $\left|\frac{1}{5(1+c)^5}x^5\right|$ gai osagarriak emango digu zehaztasunaren maila. Kontura gaitezen gai osagarria balio hauen menpe dagoela: $n = 5$ deribatuaren ordena, x eta $a = 0$ puntuen arteko distantzia ($| x-0 |$) eta $c \in (0,x)$ (edo $c \in (x,0)$) balioa.

Kalkula dezagun $\ln 1,1$ adierazpenaren balio hurbildua, eta ezter dezagun zer errore egiten dugun.

$\ln 1,1 = \ln(1+0,1) \Rightarrow x = 0,1$ da.

Balio hori polinomioan ordezkatuz, logaritmoaren balio hurbildua kalkulatuko dugu:

$$\ln 1,1 = 0,1 - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{3}(0,1)^3 - \frac{1}{4}(0,1)^4 = 0,0953083333...$$

Balio horren zehaztasuna, beraz, $n = 5$ deribatuaren ordenaren, $x = 0,1$ puntuaren eta $0 < c < 0,1$ balioaren menpe dago.

Hortaz, $\left|\frac{1}{5(1+c)^5}(0,1)^5\right|$ errorea dugu, $0 < c < 0,1$ izanik. Borna dezagun errorea:

$$0 < c < 0,1 \Rightarrow 1 < 1+c < 1,1 \Rightarrow 1 < (1+c)^5 < 1,1^5 \Rightarrow \frac{1}{1,1^5} < \frac{1}{5(1+c)^5} < 1.$$

Beraz, $\left|\frac{1}{5(1+c)^5}(0,1)^5\right| < \frac{1}{5}(0,1)^5 = 0,000002$ dugu.

Laburbilduz, logaritmoaren balio hurbildua $\ln 1,1 = 0,0953083333...$ da eta errorea $0,000002$ baino txikiagoa da.

DERIBATUEN TAULA

Eragiketen deribazioa

Batuketa/kenketa	$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
Biderketa	$(f \cdot g)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Zatiketa	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Funtzio konposatua	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Alderantzizko funtzioa	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Funtzioen deribatuak

1. Funtzio konstanteak

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$

2. Funtzio potentzialak

$f(x) = g(x)^a$	$f'(x) = ag(x)^{a-1}g'(x)$
$f(x) = x^a$	$f'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$

3. Funtzio irrazionalak

$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{g(x)^{n-1}}}$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. Berreketa funtzioak eta funtzio esponentzialak

$f(x) = h(x)^{g(x)}$	$f'(x) = h(x)^{g(x)}g'(x)\ln h(x) + g(x)h(x)^{g(x)-1}h'(x)$
$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)}g'(x)\ln a$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

5. Funtzio logaritmikoak

$f(x) = \log_a g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\ln a}$
$f(x) = \ln g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

6. Funtzio trigonometrikoak

$f(x) = \sin g(x)$	$f'(x) = g'(x)\cos g(x)$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos g(x)$	$f'(x) = -g'(x)\sin g(x)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan g(x)$	$f'(x) = g'(x)(1 + \tan^2 g(x)) = \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \cot g(x)$	$f'(x) = -g'(x)(1 + \cot^2 g(x)) = \frac{-g'(x)}{\sin^2 g(x)}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

7. Funtzio ziklometrikoak

$f(x) = \arcsin g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - g^2(x)}}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \arccos g(x)$	$f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1 - g^2(x)}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \arctan g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{1 + g^2(x)}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$
$f(x) = \text{arccot}\ g(x)$	$f'(x) = \frac{-g'(x)}{1 + g^2(x)}$
$f(x) = \text{arccot}\ x$	$f'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$

6.4 Ariketak

1. Kalkula itzazu hurrengo adierazpenen deribatuak:

1) $\dfrac{1}{x+1}$ 2) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 3) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

4) $\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}$ 5) $a\sin^3\dfrac{x}{3}$ 6) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

7) $a\sqrt{\cos 2x}$ 8) $(a+x)\sqrt{a-x}$ 9) $2\sin x+\cos 3x$

10) $(2x-1)(3x+2)x$ 11) $\sin^2 x$ 12) x^x

2. Eman ezazu puntu batean jarraitua baina deribagarria ez den funtzio bat.

3. Azter ezazu ondoko funtzioen jarraitutasuna eta deribagarritasuna. Kalkula ezazu deribatu funtzioa.

1) $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-e^{1/(1-x)}} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ \ln(1+x^2) & 0\leq x\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\leq 0\\ x & 0<x<1\\ 3x^2+5x-7 & 1\leq x\end{cases}$

7) $f(x)=\dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$ 8) $f(x)=x^2e^{1/x}$

9) $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ 10) $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

4. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ ondoko taulek definitutako funtzioak:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	6	5	4	3	2	1
$f'(x)$	-2	-1	-3	-4	-5	-6

y	1	2	3	4	5	6
$g(y)$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$g'(y)$	2	1	3	4	5	6

$f:X\to Y$ eta $g:Y\to Z$ jarraituak, deribagarriak eta monotonoak [0,6] tartean. Bila itzazu:

(a) f^{-1} funtzioaren deribatua $y=3$ puntuan;

(b) g^{-1} funtzioaren deribatua $z=-4$ puntuan;

(c) $(g\circ f)$ funtzioaren deribatua $x=4$ puntuan;

(d) $(g\circ f)^{-1}$ funtzioaren deribatua $z=-4$ puntuan.

5. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapenak faltsuak ala egiazkoak diren:

(a) $f(x)+g(x)$ funtzioa a puntuan deribagarria da baldin eta soilik baldin $f(x)$ eta $g(x)$ deribagarriak badira a puntuan;

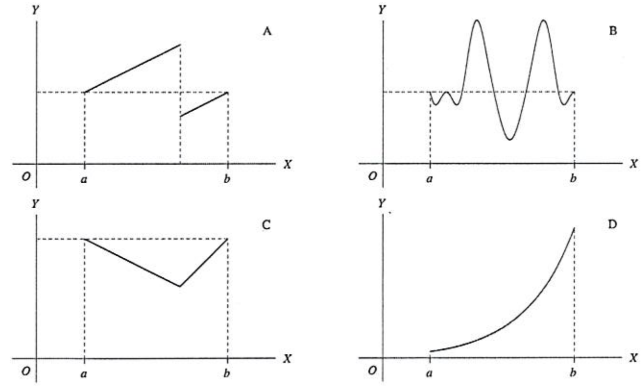
(b) $f(x)\cdot g(x)$ eta $f(x)$ funtzioak deribagarria badira a puntuan, $g(x)$ ere deribagarria izango da a puntuan.

6. Izan bedi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funtzio alderanzkarria eta deribagarria, $f(2)=1$ eta $f'(2)=-1$ betetzen dituena. Kalkula ezazu $g'(1)$ balioa,

$$g(x)=\frac{8}{f^{-1}(x)}\quad \text{izanik.}$$

7. Kalkula itzazu a eta b $y=2x$ zuzena $y=x^2+ax+b$ kurbaren ukitzailea izan dadin $P(2,4)$ puntuan.

8. Aplika dakieke Rolle-ren teorema ondoko funtzioei? Zergatik?



9. Froga ezazu $e^x\sin x=1$ ekuazioaren bi soluzioren artean $e^x\cos x=-1$ ekuazioaren soluzio bat existitzen dela.

10. Froga ezazu $x^3-3x+b=0$ ekuazioak gehienez soluzio bat duela [-1,1] tartean.

11. $y=\ln x$ kurbako zer puntutan da ukitzailea $M(1,0)$ eta $M(e,1)$ puntuak lotzen dituen kordarekiko paraleloa?

12. $y=x^n$ kurbako zer puntutan da ukitzailea $M(0,0)$ eta $M(a,a^n)$ puntuak lotzen dituen kordarekiko paraleloa?

13. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & -2\leq x<-1\\ \dfrac{x^2-3}{2} & -1\leq x\leq 0\end{cases}$ emanik,

(a) aplika daiteke batez besteko balioaren teorema [-2,0] tartean?

(b) Baiezkoan, batez besteko balioaren teorema erabil ezazu jakiteko zer puntutan diren paralelo funtzioaren ukitzailea eta AB korda, puntuak $A=(0,-3/2)$ eta $B=(-2,-1/2)$ izanik.

14. Froga ezazu $\sin x \leq x$ dela $\forall x \geq 0$ eta $\sin x \geq x$ dela $\forall x \leq 0$.

15. Froga ezazu $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funtzioa hertsiki beherakorra dela $[0,\pi/2]$ tartean.

16. Froga ezazu $x^2 = x\sin x + \cos x$, x-ren bi baliotarako soilik betetzen dela.

17. Kalkula itzazu, L'Hôpital-en erregela erabiliz, ondoko limiteak:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln x$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$

4) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\cot x}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x}$

10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ 11) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\tan x}{\tan 5x}$ 12) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^5}$

13) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ 15) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\tan x)$

16) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ 17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{1/x}+1\right)^{e^{-1/x}}$ 18) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$

19) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6}\right)$ 20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$ 22) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{12-x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}$

23) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$ 24) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{5}{\ln x}\right)$

18. Kalkula itzazu ondoko limiteak:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \tan x}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n - 1}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{1/x}$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} xe^{1/x}$

7) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(2x\sec x - \tan x)$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \cot x\right)$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x-1}\right)$ 11) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x(a^{1/x} - 1)$ 12) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}(3^x - 2^x)^{\tan\frac{x+1}{2}\pi}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x + \sin x)^{1/x}$ 15) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}$

19. Kalkula ezazu n ondoko berdintza bete dadin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan x}{x^n} = k, \quad k \neq 0 \text{ eta } k \neq \infty \text{ izanik.}$$

20. Gara ezazu $x^3 + 4x^2 - 5x + 8$ polinomioa $(x-2)$ berreturatan.

21. Kalkula itzazu funtzio hauen 4. ordenako Taylor-en garapena emandako puntuetan:

1) $f(x) = \sin x$, $x = 0$ eta $x = \pi/2$ 2) $f(x) = \tan x$, $x = 0$

3) $f(x) = e^{\sin x}$, $x = 0$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x = 0$

5) $f(x) = \ln x$, $x = 1$ 6) $f(x) = e^x$, $x = 0$ eta $x = 1$

7) $f(x) = \cos x$, $x = 0$ 8) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x = 0$

9) $f(x) = e^x \sin x$, $x = 0$ 10) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x = 1$

22. Idatz itzazu $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioen Maclaurin-en garapenak eta borna itzazu erroreak funtzioen baliotzat garapenetako lehenengo hiru gai ez-nuluen baturak hartzen direnean.

23. Zenbat gai hartu behar dira e^x funtzioaren Maclaurin-en garapenean, e zenbakia 10^{-5} baino errore txikiagoz hurbiltzeko?

24. Bila itzazu balio hurbilduak Taylor-en garapena erabiliz:

(a) $\sin 20°$, milarena baino errore txikiagoa eginez;

(b) $\ln 1,1$, 0,0003 baino errore txikiagoa eginez;

(c) $\cos 1$, milarena baino errore txikiagoa eginez.

7. Gaia
Funtzioen estudio lokala

Gai honetan funtzioen adierazpen grafikorako behar ditugun elementuak aztertuko ditugu. Horien artean, definizio-eremua, jarraitutasuna eta deribagarritasuna jadanik aztertu ditugu. Orain, gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, maximo eta minimo erlatiboak, ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak eta inflexio-puntuak bilatzeko metodoak ikusiko ditugu. Bukatzeko, funtzioak hainbat kasutan duen joera ere azertuko dugu asintoten bidez.

7.1 Funtzioen muturrak

7.1 Teorema. *Mutur erlatiboa existitzeko baldintza beharrezkoa*

$f(x)$ funtzio deribagarriak $x = a$ puntuan mutur erlatiboa badu, $f'(a) = 0$ beteko da.

7.2 Teorema. *Mutur erlatiboa existitzeko baldintza nahikoa*

$f(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan $n+1$ aldiz deribagarria, $f'(a) = \cdots = f^{n)}(a) = 0$ eta $f^{n+1)}(a) \neq 0$ badira,

1. *n bakoitia bada eta*

   (a) *$f^{n+1)}(a) > 0$ bada, $f(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan minimo erlatiboa izango du;*

   (b) *$f^{n+1)}(a) < 0$ bada, $f(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan maximo erlatiboa izango du;*

2. *n bikoitia bada, $f(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan inflexio-puntua izango du.*

7.3 Adibidea. Kalkula ditzagun $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ funtzioaren muturrak.

Lehendabizi definizio-eremua emango dugu: $D_f = \mathbb{R}$. Horrez gain, funtzioa jarraitua eta infinitu aldiz deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan. Beraz, aurreko bi teoremak erabili ahal izango ditugu $\mathbb{R}$ osoan. Ondorioz, mutur erlatibo guztiak lortuko ditugu.

Aurrera egin baino lehen, lehenengo hiru deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-12x^4+8x^3+30x^2+8x-6}{(1+x^2)^4}.$$

Muturra izateko baldintza beharrezkotik, $f'(x) = 0$, $1 - x^2 = 0$ aterako dugu; eta hortik $x = \pm 1$ bi soluzioak. Horietan bakarrik egon daitezke funtzioaren mutur erlatiboak.

Muturra izateko baldintza nahikotik aterako dugu maximoa, minimoa edo inflexio-puntua dagoen.

$f''(1) = \frac{-1}{2} < 0$; beraz, maximoa dago eta maximoa $f(1) = \frac{1}{2}$ da.

$f''(-1) = \frac{1}{2} > 0$; beraz, minimoa dago eta minimoa $f(-1) = \frac{-1}{2}$ da.

Inflexio-puntuak lortzeko $f''(x) = 0$ ekuazioa ebatzi behar dugu lehenago; hau da, $2x^3 - 6x = 0$ ekuaziotik $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ eta $x = -\sqrt{3}$ puntuak lortu. Gero, hirugarren deribatua ez dela anulatzen egiaztatu beharko dugu. $f'''(0) = -6 \neq 0$, $f'''(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}-3}{32} \neq 0$ eta $f'''(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}-3}{32} \neq 0$. Hortaz, hiru puntu horietan funtzioak inflexio-puntuak ditu.

7.4 Teorema. *Ahurtasunaren eta ganbiltasunaren baldintza nahikoa*

$f(x)$ funtzioa bi aldiz deribagarria bada (a, b) tartean, $f''(x) > 0$ bada, funtzioa ahurra da, eta $f''(x) < 0$ bada, funtzioa ganbila da.

7.5 Adibidea. Aurreko adibideko $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ funtzioaren ahurtasun- eta ganbiltasun-eremuak bilatuko ditugu.

Horretarako bigarren deribatuaz baliatuko gara:

$$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}.$$

Badakigu bigarren deribatua $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ eta $x = -\sqrt{3}$ puntuetan anulatzen dela; beraz, puntu horiek sortzen dituzten tarteetan bigarren deribatua positiboa edo negatiboa izango da beti.

Tarte bakoitzeko puntu bat hartuko dugu, eta bigarren deribatuaren balioak kalkulatuko ditugu. Balio horiek esango digute tarte bakoitzean bigarren deribatuak duen zeinua; gero, azken teorema erabiliko dugu funtzioa ahurra edo ganbila den erabakitzeko.

$-2 < -\sqrt{3}$ hartuko dugu: $f''(-2) = \frac{-4}{125} < 0$.

$-\sqrt{3} < -1$ hartuko dugu: $f''(-1) = \frac{4}{8} > 0$.

$1 < \sqrt{3}$ hartuko dugu: $f''(1) = \frac{-4}{8} < 0$.

$\sqrt{3} < 2$ hartuko dugu: $f''(2) = \frac{4}{125} > 0$.

Ondorioz, funtzioa ahurra da $(-\sqrt{3}, 0)$ eta $(\sqrt{3}, \infty)$ tarteetan eta ganbila da $(-\infty, -\sqrt{3})$ eta $(0, \sqrt{3})$ tarteetan.

7.2 Asintotak

7.6 Definizioa. *Asintota*

Zuzen bat kurba baten asintota da kurba eta zuzenaren arteko distantzia zerorantz badoa, baina zuzenak kurba ukitu gabe.

Hiru asintota-mota bereiziko ditugu, eta kalkulatzeko metodoak emango ditugu.

Horizontalak: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ denean, $y = l$ zuzena $f(x)$ funtzioaren asintota da.

Bertikalak: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ denean, $x = a$ zuzena $f(x)$ funtzioaren asintota da.

Zeiharrak: $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx - b) = 0$ denean, $y = mx + b$ zuzena $f(x)$ funtzioaren asintota da.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{eta} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx).$$

7.7 Adibidea. Irudika dezagun $f(x) = xe^x$ funtzioa.

Lehendabizi, definizio-eremua zehaztuko dugu: $D_f = \mathbb{R}$ da, x eta e^x funtzio elementalak $\mathbb{R}$ osoan definiturik daudelako, eta biderketak ez duelako arazorik sortzen.

Gero, $f(x)$ funtzioa $\mathbb{R}$ osoan da jarraitua eta deribagarria, funtzio elementalen arteko biderketa delako.

$f(x)$ funtzioa $\mathbb{R}$ osoan da jarraitua eta deribagarria; beraz, mutur erlatibo guztiak deribatuaren bidez aurki ditzakegu.

Mutur erlatiboa izateko baldintza beharrezkoa $f'(x) = 0$ izatea da.

$f'(x) = (1+x)e^x$ da; beraz, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$; hau da, izatekotan, mutur bakarra $x = -1$ puntuan izango du.

$f''(x) = (2+x)e^x$ da; hortik, $f''(-1) = 1/e > 0$ da; hortaz, minimoa dago $x = -1$ puntuan, eta funtzioaren minimoa $f(-1) = -1/e$ da.

Azter ditzagun beste ezaugarri batzuk:

$f'(x) > 0$ da $x > -1$ denean. Hortaz, $f(x)$ gorakorra da $(-1, \infty)$ tartean.

$f'(x) < 0$ da $x < -1$ denean. Hortaz, $f(x)$ beherakorra da $(-\infty, -1)$ tartean.

Ondorioz, $f(-1) = -1/e$ funtzioaren minimo absolutua da, ezkerrean beherakorra eta eskuinean gorakorra delako.

Maximo absolutua ez da existitzen, $\lim\limits_{x\to\infty} xe^x = +\infty$ delako.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2$; hortaz, inflexio-puntua izan dezake $x = -2$ puntuan; eta hala da, $f'''(x) = (3+x)e^x$ izanik, $f'''(-2) = (3-2)e^{-2} \neq 0$ delako. Azkenik, $f(-2) = -2/e^2$ denez, inflexio-puntua $(-2, -2/e^2)$ da.

Horrez gain,

$f''(x) > 0$ da $x > -2$ denean. Hortaz, $f(x)$ ahurra da $(-2, \infty)$ tartean.

$f''(x) < 0$ da $x < -2$ denean. Hortaz, $f(x)$ ganbila da $(-\infty, -2)$ tartean.

Orain, funtzioaren asintotak bilatuko ditugu:

$f(x) = xe^x$ funtzioa jarraitua denez $\mathbb{R}$ osoan, ez du asintota bertikalik.

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^x = +\infty$. Hortaz, ez dago asintota horizontalik $+\infty$ aldera.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. Beraz, $y = 0$ zuzena asintota horizontala da $-\infty$ aldera.

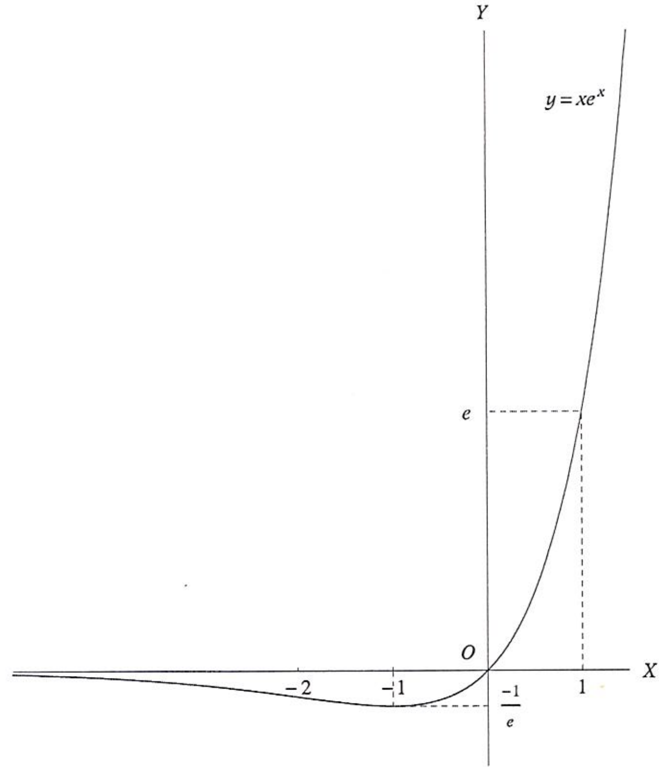
Asintota zeiharrak aurkitzeko limite hauek kalkulatuko ditugu:

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty.$

$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Beraz, ez dago asintota zeiharrik.

Hortaz, ez dago asintota zeiharrik ez $+\infty$ aldera ez $-\infty$ aldera.

Ondorioz, asintota bakarra $y = 0$ zuzen horizontala da, $x \to -\infty$ denean.



7.3 Ariketak

1. Esan ezazu, arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak ala faltsuak diren:

   (a) $f(x)$ funtzioak a puntuan minimo erlatiboa dauka eta ez da deribagarria;

   (b) $f'(a) = 0$ bada, $f(x)$ funtzioak badu mutur erlatiboa a puntuan;

   (c) $f'(a)$ existitzen bada eta a puntuan mutur erlatiboa badago, $f'(a) = 0$ izango da.

2. Kalkula itzazu $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 23$ funtzioaren mutur erlatiboak [0,5] tartean.

3. Bila itzazu ondoko funtzioaren mutur erlatibo eta absolutuak:

$$f(x) = \frac{3}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

4. (a) Froga ezazu ondoko funtzioak badituela maximoa eta minimoa [-1,1] tartean.

   (b) Kalkula itzazu bere mutur erlatiboak eta absolutuak emandako tartean.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \le x \le 0 \\ |\, x \ln x \,| & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

5. Kalkula itzazu [-1,2] tartean $f(x)$ funtzioaren mutur absolutu eta erlatiboak:

$$f(x) = x^2 e^{1/x} \text{ izanik.}$$

6. Bila itzazu ondoko funtzioen mutur erlatiboak:

   1) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ 2) $y = x \ln x$

   3) $y = x - \arctan x$ 4) $y = 2 \sin 2x + \sin 4x$

   5) $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ 6) $y = \dfrac{e^x}{x}$

7. Bila itzazu $y = 2 \sin x + \cos 2x$ funtzioaren mutur erlatiboak $[0,2\pi]$ tartean.

8. Zer neurri eduki behar du zilindro batek bere azalera osoa minimoa izan dadin bere bolumena B bada?

9. a aldeko latorrizko xafla karratu batekin bolumenik handiena duen kajoi irekia egin nahi da. Latorriaren angeluetan karratuak moztutakoan tolestu egiten da kajoia eratzeko. Zenbat izango da luze moztutako karratuen aldea?

10. Egin itzazu ondoko funtzioen adierazpen grafikoak:

    1) $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$ 3) $f(x) = x^2 e^{1/x}$

    4) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 2x^2 + 1}$ 5) $f(x) = 2\,|\,x\,| - x^2$ 6) $f(x) = x^2 \ln x$

    7) $f(x) = e^{2x \ln x}$ 8) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ 9) $f(x) = x^2(x-3)$

11. Izan bedi $f(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ funtzioa,

    (a) azter itzazu definizio-eremua, limiteak eremuaren murturretan eta jarraitutasuna;

    (b) azter ezazu deribagarritasuna, n. ordenako deribatuaren formula orokorra emanez;

    (c) eman ezazu $x = 1$ puntuko Taylor-en garapena, n. ordenako errorearen gaia barne;

    (d) irudika ezazu grafikoa;

    (e) azter ezazu f^{-1} alderantzizko funtzioa: definizio-eremua, limiteak eremuaren muturretan, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta irudia.

12. Esan ezazu, arrazoituz, hurrengo baieztapenak faltsuak ala egiazkoak diren:

    (a) tarte bornatu batean definitutako funtzio oro bornatua da; faltsua,

    (b) $f(x)$ funtzioa a puntuan deribagarria bada, jarraitua izango da bertan;

    (c) a puntuan jarraitua den funtzio oro deribagarria da bertan;

    (d) $f(x)$ funtzioak a puntuan maximoa badu, $f'(a) = 0$ da.

    (e) $f(x)$ funtzioa a puntuan hertsiki gorakorra bada, $f'(a) > 0$ da;

    (f) $f(x)$ funtzioak a puntuan maximoa badu eta deribagarria bada, $f''(a) < 0$ da;

    (g) $f'(a) = 0$ bada, $f(x)$ funtzioak mutur bat izango du a puntuan.

13. Izan bedi $f(x)$ funtzioa jarraitua $I = [a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean. Esan ezazu, laburki arrazoituz, ondoko baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:

    (a) $f(x)$ funtzioak onartzen du alderantzizkoa I tartean;

    (b) $f(a) = f(b)$ bada, $f'(x) = 0$ izango da I tarte osoan;

    (c) $f'(c) = 0$ bada, $x = c$ puntuan funtzioak mutur erlatiboa dauka;

    (d) $f(a) < r < f(b)$ bada, $c \in (a, b)$ existituko da, non $f(c) = r$ baita;

    (e) $f(a) = f(b) = 0$ bada, $c \in (a, b)$ existituko da, non $f'c) = 0$ baita;

    (f) $f(x)$ bornaturik dago (a, b) tartean;

    (g) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$;

    (h) $\{x_n\} \to x_0$ bada, $\{f(x_n)\} \to f(x_0)$ beteko da, $x_0 \in (a, b)$ izanik;

    (i) $f(a) = f(b) = 0$ bada, $c \in (a, b)$ existituko da, non $f'c) > 0$ baita;

    (j) $0 \in I$ bada, $\lim_{x \to 0} x f(x) = 0$ izango da;

    (k) $\log f(x)$ jarraitua da I tartean;

    (l) $e^{f(x)}$ jarraitua da I tartean;

    (m) $\dfrac{f(x)}{\sin x}$ jarraitua da I tartean;

Funtzioen adierazpen grafikoa

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzio erreala.

1. Definizio-eremua

   $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \text{ existitzen da}\}$.

2. Funtzioaren jarraitutasuna

   Funtzioa $x = a$ puntuan jarraitua da $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ denean.

3. Etenuneak

   (a) *Etenune gaindigarria*

   $\lim_{x \to a} f(x) = l$ eta $f(a) \neq l$.

   (b) *Lehen mailako etenunea*

   $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ betetzen da.

   i. $f(a^-), f(a^+) \in \mathbb{R}$ bada, $f(a^+) - f(a^-)$ jauzi finitua da.

   ii. $f(a^-) = \pm\infty$ edota $f(a^+) = \pm\infty$ bada, jauzi infinitua da.

   (c) *Bigarren mailako etenunea*

   $\lim_{x \to a^-} f(x)$ edota $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ez da existitzen.

4. Funtzioaren deribagarritasuna

   Funtzioa $x = a$ puntuan deribagarria da

   $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{edo} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

   limitea existitzen denean.

5. Funtzioaren puntu kritikoak

   Funtzioa $x = a$ puntuan deribagarria bada eta $f'(a) = 0$ bada, $x = a$ funtzioaren puntu kritiko bat da.

6. Funtzioaren gorakortasuna eta beherakortasuna

   Teorema Funtzioa $x = a$ puntuan deribagarria bada,

   (a) $f'(a) > 0$ bada, $f(x)$ gorakorra da $x = a$ puntuan;

   (b) $f'(a) < 0$ bada, $f(x)$ gorakorra da $x = a$ puntuan.

7. Funtzioaren mutur erlatiboak eta inflexio-puntuak

   Teorema *(Muturra existitzeko baldintza beharrezkoa)*

   $f(x)$ funtzio deribagarriak $x = a$ puntuan mutur erlatiboa badu, $f'(a) = 0$ beteko da.

   Teorema *(Muturren baldintza nahikoa)*

   $f(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan $n+1$ aldiz deribagarria bada, eta $f'(a) = \cdots = f^{n)}(a) = 0$ eta $f^{n+1)}(a) \neq 0$ badira,

   (a) n bakoitia bada eta

   i. $f^{n+1)}(a) > 0$ bada, $f(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan minimo erlatiboa izango du;

   ii. $f^{n+1)}(a) < 0$ bada, $f(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan maximo erlatiboa izango du;

   (b) n bikoitia bada, $f(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan inflexio-puntua izango du.

8. Funtzioaren ahurtasuna eta ganbiltasuna

   Teorema Funtzioa $x = a$ puntuan bi aldiz deribagarria bada,

   (a) $f''(a) > 0$ bada, $f(x)$ ahurra da $x = a$ puntuan;

   (b) $f''(a) < 0$ bada, $f(x)$ ganbila da $x = a$ puntuan.

9. Funtzioaren asintotak

   Zuzen bat kurba baten asintota da kurbaren eta zuzenaren arteko distantzia zerorantz badoa, baina zuzenak kurba ukitu gabe.

   Horizontalak: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ denean, $y = l$ zuzena asintota da.

   Bertikalak: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ denean, $x = a$ zuzena asintota da.

   Zeiharrak: $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx - b) = 0$ denean, $y = mx + b$ zuzena asintota da,

   $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{eta} \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) \quad \text{izanik.}$$

Lugares geométricos

1) $|z| > |z-1|$

2) $|z+2| > 1 + |z-2|$

3) $1 < |z+i| < 2$

4) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$

5) $[-1 \leq Re(z) \leq 1] \cap [0 < |z| < 2]$

6) $Im(z+2i) = Re(z-3)$

7) $|z-i| \leq 1 \quad \cap \quad Re(z) \leq 2\, Im(z)$

8) $|z-3| - |z+3| = 4$

9) $|z-2i| \leq 2 \quad \cap \quad Re(z) \geq 1$

10) $(|z-2| \leq 2) \cap (|z-4| \leq 2$

11) $|z-3| \leq 1 \quad \cap \quad Re(z) \geq \frac{5}{2} \quad \cap \quad Re(z) \leq \frac{7}{2}$

12) $z + \bar{z} = 1$

13) $Im(z^2) > 0$

14) $Re\ \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$

15) $1 < |z-2i| < 2$

16) $\underline{z^3 \bar{z} = 1}$

17) $|z| < 1 - Re\, z$

18) $Re\ \frac{1}{z} < \frac{1}{4}$

19) $Re\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2}$

20) $Im\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2}$

Indukzioa:

1) $a \neq 1$ $\quad 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

2) $7 + 6 \cdot 7 = 7^2$

$7 + 6 \cdot (7 + 7^2) = 7^3$

$7 + 6 (7 + 7^2 + 7^3) = 7^4$

3) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

5) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2 (n+1)^2}{4}$

6) $3^n - 1$ es multiplo de 2.

7) $1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3}$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 9}$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 27}$

8) $3^{2n} + 4^{n+1}$ es multiplo de 5

Konplexuak:

1) $z = z_1^{z_2}$

2) $z = i^i$

3) $e^{4z} = i$

4) z? Erreala izateko

$\dfrac{z+i}{z-i}$

5) $z_1 = -1 - i$

$z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$

1) $z_1 \cdot z_2$

2) $(z_1 - z_2)^8$

3) $(z_2)^{103}$

6) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right)$

7) $\sin z = 2$

8) $\operatorname{sh} z = 2i$

9) $\operatorname{tg} z = 2$

10) $\operatorname{ctg} z = 1 + i$

11) $z = \ln(\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i)^5$

12) $z = \dfrac{3 - 2ai}{4 - 3i}$, kalkulatu "a":

1) z erreala izateko $(y=0)$

2) z imaginarioa izateko $(x=0)$

3) "Bisektriz"-ean egoteko (1. kuadrantekoa)

13) $\ln\left[(1+i) \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right]$

14) $\cos^2 z = \dfrac{1+i}{2}$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cos z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

$\tan z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} (-i)$

33) $\left(1+\ln\frac{n^2-3n+5}{n^2+an}\right)^{\frac{2n^2+3}{n+1}}$

34) $n\left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$

35) $\frac{1^a+2^a+3^a+\dots+n^a}{n^a+1}$

36) $\binom{2n}{n}4^{-n}\sqrt{n}$

37) $(n+\sqrt{n})\cos\frac{\pi}{n}\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$

38) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

39) $\sqrt[n]{\frac{[(2n)!]^\alpha}{n!}}$

40) $\left[(n^x-n)^{\frac{1}{x}}-n\right]$

41) $L\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

42) $\frac{\sqrt{2!}\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}+\sqrt[3]{3!}\,\mathrm{tg}\frac{1}{3}+\sqrt[4]{4!}\,\mathrm{tg}\frac{1}{4}+\dots+\sqrt[n]{n!}\,\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$

43) $\frac{\sqrt{1\cdot2\cdot3}+\sqrt{2\cdot3\cdot4}+\dots+\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{n^2\sqrt{n}}$

Sucesiones (Donde $\lim_{n\to\infty}$)

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{\ln n}$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}$

3) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \frac{\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

4) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right)$

5) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

6) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)\sqrt{n}}{(2n+1)!}$

7) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{\sqrt{n}}$

8) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ EVA FUCKER !!

9) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{3n^2+1}$

10) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+5}$

11) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$

12) $\frac{\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a}}{n\sqrt[n]{a}}$ $(a, b > 0)$

13) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}\right)$

14) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1-n}{1-2n}}\right)^{\frac{2n-1}{3n+1}}$

15) $\left(\frac{an+5}{n}\right)^{\ln n}$

16) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[k]{n+a} - \sqrt[k]{n+b}}{\sqrt[k]{n}\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}$ $k \in \mathbb{N}$

17) $\frac{\sin(n^2)\left[\sqrt[3]{1+n^2} - \sqrt[3]{(2+n)^2}\right]}{\sqrt[3]{1+n^2}\ \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

18) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[4]{n^4+2n^2-1} - pn\right)$

19) $\frac{\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c} - \sqrt{n+d}}$

20) $\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n!}$

21) $\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$

22) $\frac{2 + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$

23) $\frac{4}{n}\left[\left(\frac{4}{n}\right)^2 + \left(\frac{8}{n}\right)^2 + \left(\frac{12}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4n}{n}\right)^2\right]$

24) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1-n}{1-2n}}\right)^{\frac{2n-1}{3n+1}}$

25) $\frac{1+2^p+3^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$ $p \in \mathbb{R}$

26) $\frac{n(n+1)}{1!+2!+3!+\dots+n!}$

27) $\frac{\left(\mathrm{arc\,sen}\,\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{1}{n^2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{n}\ \cos^3\frac{2}{n^3}}$

28) $\left[\frac{2}{n+1}\right]^{\frac{2}{2+\ln n}}$

29) $\frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$

30) $\sqrt{\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}}$

31) $\frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+n+n^2+n^3}$

32) $\left(\sqrt{n^2+an+b} - n\right)$

Feo

B)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n+1}\left(\frac{\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n+1}\left(\frac{\sqrt[8]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n+1}\ \ln\left(\frac{\sqrt[8]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{n+1}\ \ln\left(\sqrt[8]{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{8}\ \cancel{\ln}\left\{\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}-1\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{8}\left(\frac{n^2+1}{(n+1)^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{8}\cdot\frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}-2n-1}{(n+1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{8}\cdot\frac{-2n}{(n+1)^2}=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{1/4}\cdot -2n}{(n+1)^2}=\boxed{0}$$

D)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=a_n$$

D'Alembert $\Rightarrow$ $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}=\frac{[(n+1)!]^2\cdot\cancel{(2n)!}}{(\cancel{n!})^2\cdot(2n+2)!}=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)^2}=\frac{n^2+2n+1}{4n^2+8n+4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+8n+4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$ $\frac{1}{4}<1$ Konvergentea da.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)}{(n-2)}\left(\frac{e}{3}\right)^n = a_n$

Cauchy-ren irizpidea $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n+5}{n-2}\left(\frac{e}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{\frac{n+5}{n-1}} \cdot \frac{e}{3}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n+5}{n-2}}}_{1} \cdot \frac{e}{3} = \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow e < 3 \Rightarrow$ konbergentea da

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}} = a_n$

D'Alembert $\Rightarrow \cancel{\frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cancel{\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+11)}}}{}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}} = \boxed{0} < 1$ konbergentea

~~$R_k \le$~~

$\sum_n a_n$ konbergentea da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ bada.

$\forall n > k \quad \sqrt[n]{a_n} \le l$ bada, $R_k \le \frac{l^{k+1}}{1-l}$

Σ cu konvergentee de $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$

1)

$\forall n>k,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le l$ bede, $\boxed{R_k \le \frac{a_{k+1}}{1-l}}$

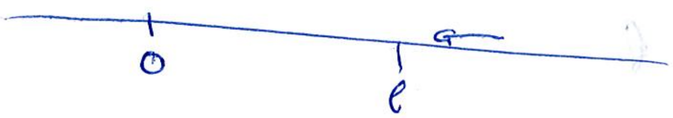
$$R_k \le \frac{a_{k+1}}{1-l}$$

2)

a) ~~$\forall n>k\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\ge l$~~

$\frac{a_{k+1}}{a_k}<1$ $\boxed{R_k \le \frac{a_{k+1}}{1-\frac{a_{k+1}}{a_k}} = \frac{a_k a_{k+1}}{a_k-a_{k+1}}}$

$$R_k \le \frac{a_k \cdot a_{k+1}}{a_k-a_{k+1}}$$



b)

$\frac{a_{k+1}}{a_k}\ge 1$ bede, $\frac{a_{j+1}}{a_j}<1$ $\quad j>k$

$$\boxed{R_k \le a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_j+\frac{a_{j+1}}{1-\frac{a_{j+1}}{a_j}} = a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_j+\frac{a_j + a_{j+1}}{a_j-a_{j+1}}}$$

$$R_k \le a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_j+\frac{a_{j+1}}{1-\frac{a_{j+1}}{a_j}} = a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_j+\frac{a_j\cdot a_{j+1}}{a_j-a_{j+1}}$$

1) $R_K \leq \dfrac{\rho^{K+1}}{1-\rho}$

2)

a) $R_K \leq \dfrac{\left(\sqrt[k]{a_K}\right)^{K+1}}{1-\sqrt[k]{a_K}}$

b) $R_K \leq a_{K+1} + a_{K+2} + a \ldots + a_j + \dfrac{\left(\sqrt[j]{a_j}\right)^{j+1}}{1-\sqrt[j]{a_j}}$

<u>Taylor-en formula.</u>

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(c)}{1!}\cancel{(x-)} \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f_n^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} = \cancel{\dfrac{1}{x^2+2x+1}}$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \cancel{\dfrac{-2x-2}{x^2+2x+1}} = +\dfrac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f'''(0) = 2$

$f^{IV}(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4}$ $\qquad f^{IV}(0) = -6$

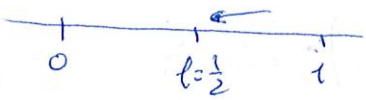
$f^{V}(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5}$ $\qquad f^{V}(c) = \dfrac{24}{(1+c)^5}$

$$f(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-0) + \frac{f''(x)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x^3) + \frac{f^{IV}(x)}{4!}x^4 + \frac{f^{V}(c)}{5!}c^5 =$$

$$f(0) = 0 + x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{24}{5!(1+c)^5}c^5$$

$$\sum_{n} \frac{n}{2^n}, \; k=3$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3}$$



Zatiduraren irizpidea:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$ konbergentea da.

$\frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2n+2 > 2n$, segida eskuinetik hurbiltzen da.

$k=3 \Rightarrow \frac{a_{3+1}}{a_3} = \frac{3+1}{2\cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \cancel{\leq \frac{1}{2}}$ 2a kasua l-ra eskuinetik

$\frac{2}{3} < 1$

$$R_k \leq \frac{a_{k+1}}{1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}} = \frac{a_k \cdot a_{k+1}}{a_k - a_{k+1}}$$

$$R_k \leq \frac{\frac{k}{2^k} \cdot \frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k} - \frac{k+1}{2^{k+1}}} = \frac{k(k+1)}{k\,2^{k+1} - 2^k(k+1)} = \frac{k(k+1)}{2^k(k-1)}$$

$$R_3 = \frac{3(3+1)}{2^3(3-1)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \qquad R_3 \leq 0'75$$

(1)

1)

$$\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) = \sum_n \frac{2}{n-1} \qquad \frac{2}{n-1} >>> \frac{1}{n} \text{ frogatuko dugu.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{(\sqrt{n}+1)-(\sqrt{n}-1)}{n-1} = \frac{2}{n-1}$$

$$\frac{2}{n-1} > \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2n > n-1 \Leftrightarrow n > -1, \ n \in \mathbb{N}^*$$

$\sum_n \frac{1}{n}$ dibergentea, ondorioz konparaziozko irizpidea erabiliz,

$\sum_n \frac{1}{n}$, $\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$ dibergentea da.

(4)

3) $$\frac{3^{n+1}}{n^4+2} \cdot e^{-na}$$

D'Alembert irizpideak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{(n+1)+1}}{(n+1)^4+2} e^{-(n+1)a}}{\frac{3^{n+1}}{n^4+2} \cdot e^{-na}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{(n+1)+1} \cdot (n^4+2) e^{na}}{3^{(n+1)} [(n+1)^4 \cdot 2] \cdot e^{(n+1)a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2}{[(n+1)^4+2]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n^4+2)}{[(n+1)^4+2]e^a} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4}{e^a n^4} = \frac{3}{e^a} \quad \begin{cases} \frac{3}{e^a} < 1, \ \ln 3 < a \text{ konb} \\ \frac{3}{e^a} > 1, \ \ln 3 > a \text{ dib} \\ \frac{3}{e^a} = 1 \ \ln 3 = a \text{ Ebaluatzeko} \end{cases}$$

$$\cancel{\frac{3n^4}{e^{\ln 3} n^4}} = \frac{3^{n+1}}{n^4+2} e^{-n\ln 3} = \frac{3^{n+1}}{n^4+2} \cdot 3^{-n} = \frac{3^{n+1}}{(n^4+2) \cdot 3^n} = \frac{3}{n^4+2}$$

$\sum \frac{3}{n^4+2} \to \alpha = 4 > 1$ $\ln 3 = a$ denean konbergentea da.

Funtzioak eta limiteak. Ariketak

1.1

1d)

$$y = \ln \frac{x^2-4x+3}{x+3}$$

Logaritmoa existitzeko ~~da~~ argumentua positibo izan behar da eta zatitzailea ere ezin da izan 0 beraz $x > -3$ bete behar da.

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} = \frac{4\pm2}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$x=2$ denean, $y = 2^2-4\cdot2+3 = -1 \Rightarrow$ beraz, $x\in(1,3)$ tartean funtzioa negatibo izango da.

Ondorioz, $D_f = (-3,1)\cup(3,\infty)$ izango da.

1.4

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = 4$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ non $x\in A$ eta $0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}-4\right|<\varepsilon$

Balio absolutua sinplifikatuko dugu:

$$\left|\frac{x^2-4}{(x-1)(x-2)}-4\right| = \left|\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)\cancel{(x-2)}}-4\right| = \left|\frac{(x+2)-4(x-1)}{(x-1)}\right| =$$

=

$$= \left|\frac{-3(x-2)}{x-1}\right| = \left|\frac{-3x+6}{x-1}\right| = \left|\frac{(-3x+6)}{(x-1)}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}\right| = \left|\frac{-3x^2+3x+6}{(x-1)(x+1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{3(-x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)}\right| = \left|\frac{3(-x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}\right| = \left|\frac{-3(x-2)}{x-1}\right|$$

1.6

14

$$\lim_{x\to 0} x^x = 0^0 \Rightarrow \text{Indeterminazioa} = l$$

$$\ln l = \lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \ln x$$

40

8

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2.2

3 $f(x) = \ln(x^2-4)$

Badakigu Logaritmoaren argumentua ezin da 0 edo txikiagoa izan, beraz, funtzio honen definizio eremua

$D_f \in (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ izango da.

$x=2$ puntuan ezker eta eskuin limiteak kalkulatuko ditugu.

$$\lim_{x\to 2^+} \ln(x^2-4) = -\infty \quad \lim_{x\to 2^-} \ln(x^2-4) = \text{Ez da existitzen}$$