MATRIZEAK

Informatika Fakultatea

2014-2015

Aurkibidea

Matrizearen Kontzeptua eta Notazioa I

Definizioa

Matrizea zenbakiz (eskalarrez) osatutako taula bat da. *m* errenkada (lerro) eta *n* zutabe dituen taulari $m \times n$ tamainako matrizea esaten zaio:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m eta *n* matrizearen dimentsioak dira. Bi dimentsioko matrizeen multzoa $M(m,n)$ idatziko da. Matrizeak $m = n$ dimentsio berdinak baditu, orduan matrizea *m* **ordenako matrize karratu** bat dela da esaten da.

Matrizearen Kontzeptua eta Notazioa II

Adibideak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{23} = 2$, A matrizearen 2.errenkadan eta 3.zutabean dagoen elementuaren balioa.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_{21} = 0$, B matrizearen 2.errenkadan eta 1.zutabean dagoen elementuaren balioa.

Matrizearen Kontzeptua eta Notazioa III

Definizioa

A eta B matrizeak berdinak dira baldin eta A eta B dimentsio berekoak izanik a_{ij} guztiak eta dagozkien b_{ij} berdinak badira.

Matrizearen Kontzeptua eta Notazioa IV

Definizioa

Matrize karratuaren **diagonal nagusia** goiko ezkerreko elementutik beheko eskuineko elementura osatutako multzoari deitzen zaio.

$$diag(A) = a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} = a_{ii}, i = 1, \ldots, n$$

Definizioa

Matrize karratuaren **bigarren diagonala** goiko eskuineko elementutik beheko ezkerreko elementura osatutako multzoari deitzen zaio.

$$a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$$

Matrizearen Kontzeptua eta Notazioa V

Definizioa

Matrize karratu baten **aztarna** bere diagonal nagusiko elementuen batura da.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Aztarnaren propietateak:

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(k \cdot A) = k \cdot tr(A)$, $k \in \mathbb{R}$ eskalar bat izanik.
- $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

Matrize mota batzuk I

Lerro eta zutabe kopuruei begira ondoko matrize motak bereiz daitezke:

- **Bektoreak:** $(1 \times n)$ edo $(m \times 1)$ tamainako matrizea **lerro-bektorea** edo **zutabe-bektorea** da.

$$\mathbf{v} = (v_1 v_2 \ldots v_n) \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Adibidez, (1×3) **eta** (2×1) **tamainako matrizeak**

$$\mathbf{v} = (3\ 5\ 2) \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matrize mota batzuk II

Edozein matrize idatz daiteke zutabe-bektore edo lerro-bektoreen bidez:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\ \bar{u}_4) = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix}$$

Matrize mota batzuk III

- **O, Matrize nulua**. Matrize nuluaren elementu guztiak zero dira, $a_{ij} = 0$, edozein $i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$. Adibidez, $\mathbf{O} \in M(4,5)$ matrize nulua:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D_n, **Matrize diagonala**: diagonal nagusian ez dauden elementuak zero dira. $\mathbf{D}_n$ matrizea karratua da.

$$\mathbf{D_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrize mota batzuk IV

- I_n, **Identitate matrizea**: matrize diagonal bat da eta diagonal nagusian dauden elementuak bat dira.

$$\mathbf{I_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3\ \bar{e}_4)$$

Aurreko matrizea osatzen dute 4 *dimentsioko* 4 *bektore unitarioek*: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$

Matrize mota batzuk V

- **Matrize triangeluarra:** goi-triangeluarra dela esaten da diagonal nagusiaren azpian dauden elementu guztiak zero badira ($a_{ij} = 0, (\forall i > j)$) eta behe-triangeluarra dela esaten da diagonal nagusiaren goian dauden elementu guztiak zero badira ($a_{ij} = 0, (\forall i < j)$).

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ Goi-triangeluarra}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ Behe-triangeluarra}$$

Matrize mota batzuk VI

- **Matrize baten azpimatrizea** lortzen da hasierako matrizearen zenbait errenkada eta zutabe aukeratuz eta errenkada eta zutabe horietan dauden elementuekin beste matrize bat osatuz. Ondoko adibidean A matrizearen 1,2 errenkadak eta 1,3 zutabeak aukeratuz B matrizea lortzen da.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrize irauliaren propietateak I

A^t, **Matrize iraulia**, A matrizearen lerroak A^t matrizean zutabeak dira. Ez da beharrezkoa karratua izateko, $n \neq m$.

$$\mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- $(kA)^t = kA^t$
- A^{-1} alderantzizko matrizea izanik: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Matrize irauliaren propietateak II

S, Matrize simetrikoa: $S = S^t$ eta karratua da, $n = m$. Simetria diagonal nagusiarekikoa da.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

T, Matrize antisimetrikoa: matrize karratua da eta $T = -T^t$ betetzen du. Diagonal nagusiko elementuak zero dira, $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -7 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \\ 9 & -8 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T^t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & -2 & -8 \\ -7 & 2 & 0 & -1 \\ -9 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrize karratuaren propietateak

Teorema
A matrize karratu oro deskonposa daiteke matrize simetriko eta matrize antisimetriko baten batura bezala.

$$A = \frac{(A+A^t)}{2} + \frac{(A-A^t)}{2}$$

Matrize eragiketak

Matrize eta eskalarren arteko ondoko eragiketak ikusiko ditugu:

- Matrize batuketa.
- Matrize biderketa: eskalar batezko biderketa.
- Matrize biderketa: bektore batezko biderketa.
- Matrize biderketa: matrizeen arteko biderketa

Matrize batuketa I

$A, B \in M(m,n)$ tamaina bereko bi matrize izanik:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$= (a_{ij} + b_{ij}), \forall i = 1, \cdots, m \; \forall j = 1, \cdots, n$ batuketa osagaiz osagai

egiten da.

Matrize batuketa II

Adibidea: $A, B \in M(2,3)$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Batuketa egiteko bi matrizeek dimentsio berdinak izan behar dituzte.

Matrize batuketa III

$M(m,n)$ MATRIZE MULTZOAREN BATUKETAREKIKO PROPIETATEAK

- Elkartze-propietatea.
$$A + (B + K) = (A + B) + K$$
- Trukatze-propietatea.
$$A + B = B + A$$
- Gai neutroa(O matrize nulua). Edozein A matrizerako betetzen da
$$A + O = O + A = A$$
- Gai simetrikoa (A matrizearen aurkako elementua: $-A$). Edozein A matrizerako betetzen da:
$$A + (-A) = O$$

Beraz, $(M(m,n), +)$ egitura aljebraikoa talde abeldarra da.

Matrize biderketa. Eskalar batezko biderketa. I

Izan bitez $k \in \mathbb{R}$ eskalar bat eta $A \in M(m,n)$ matrize bat, eskalar batezko biderketa honela definituko da:

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{A}k$$

Matrize biderketa. Eskalar batezko biderketa. II

Adibidea: $k = 5 \in \mathbb{R}$ eta $A \in M(2,3)$ izanik

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & -10 \\ 10 & -5 & 20 \end{pmatrix}$$

Matrize biderketa. Eskalar batezko biderketa. III

Propietateak
Izan bitez $k, t \in \mathbb{R}$ eskalarrak eta $A, B \in M(m,n)$ matrizeak:

- $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$ matrize-batuketarekio banatze-propietatea.
- $(k + t) \cdot A = k \cdot A + t \cdot A$ eskalar-batuketarekiko banatze-propietatea.
- $k(t \cdot A) = (kt) \cdot A$ eskalar batezko biderketarekiko elkartze-propietatea
- $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$ eskalar batezko biderketarekiko gai neutroa.

$(M(m,n), +, \cdot_{\mathbb{R}})$ egitura algebraikoa bektore-espazio bat da.

Matrize biderketa. Bektore batezko biderketa. I

Izan bitez $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ bektore bat eta $A \in M(m,n)$ matrize bat, bektore batezko biderketa honela definituko da:

$$A\bar{x} = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \bar{a}_n$$

Matrize biderketa. Bektore batezko biderketa. II

Adibidea: $A \in M(2,3)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Matrize biderketa. Matrizeen arteko biderketa II

Adibidea: $A \in M(2,3)$, $B \in M(3,3)$ eta $A \cdot B \in M(2,3)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 15 & 25 & 1 \end{pmatrix}$$

Orokorrean, $A \cdot B \neq B \cdot A$ eta aurreko adibidean ezin da kalkulatu $B \cdot A$.

$\underset{2\times 3}{A}$ $\underset{3\times 3}{B}$ $\Rightarrow \underset{2\times 3}{A \cdot B}$ $\cdot (a \cdot b)_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} \cdot b_{k1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{1 \cdot 4}_{k=1} + \underbrace{3 \cdot 1}_{k=2} + \underbrace{-2 \cdot 2}_{k=3} = \boxed{3}$

Matrize biderketa. Matrizeen arteko biderketa I

Izan bedi A matrizea $m \times n$ tamainakoa eta B matrizea $n \times p$ tamainakoa, $A \cdot B$ matrizea $m \times p$ tamainakoa izango da, bere $(a \cdot b)_{ij}$ osagai bakoitza ondokoa izanik:

$$(a \cdot b)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Adibidez,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Aurreneko matrizetik (*biderkatua*) i lerro bektorea eta bigarren matrizetik (*biderkatzailea*) j zutabe bektorea hartuz, elementuz elementuko haien arteko biderketa emango digu matrizearen $(a \cdot b)_{ij}$ elementua.

Matrize biderketaren propietateak I

- Biderketa elkarkorra da:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Matrize-batuketarekiko banatze-propietatea:

$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

$$(B + C) \cdot A = BA + CA$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

- Gai neutroa: I unitate-matrizeak edozein A matrizerako betetzen du, $IA = AI = A$.
- Matrize-biderketarekiko eskalar batezko biderketaren banatze-propietatea:

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

$(M(m,n), +, \cdot)$ egitura algebraikoa eraztun bat da.

- Eugene A. Herman Michael D. Pepe.
  Visual Linear Algebra.
  2005.
- Iñaki Zurutuza.
  Oinarrizko Aljebra.
  2004.

MATRIZEAK. ARIKETAK.

1. Aurkitu A eta B matrizeak 3×4 dimentsiokoak eta ondoko sistema betetzen dutenek:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3A + 4B & = & \begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 & 15 \\ 28 & 19 & 26 & -19 \\ -3 & -8 & 13 & 16 \end{pmatrix} \\ \\ 5A - 3B & = & \begin{pmatrix} 18 & 10 & 30 & -4 \\ 8 & 22 & 24 & -22 \\ -5 & 6 & 12 & 17 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

2. Aurkitu $X^2 + Y^2$ matrize karratua. Non X-k eta Y-k ondoko sistema betetzen dute:

$$\left. \begin{array}{rcl} 5X + 3Y & = & A \\ 3X + 2Y & = & B \end{array} \right\} \text{non: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \text{ eta } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

3. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ eta $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ izanik, kalkula itzazu $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$, $\mathbf{y}^T\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\mathbf{x}^T$.

4. Izan bedi M matrizea:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & bd & -cd & bc \\ -ae & 0 & ce & ac \\ af & -bf & 0 & ab \\ -ef & -df & -de & 0 \end{pmatrix}$$

Kalkula ezazu M^2 matrizea, a, b, c, d, e, f sei zenbaki erreal izanik eta $bcef + acdf + abde = -1$ jakinda.

5. Aurkitu 2 ordeneko matrize karratuen forma non $A^2 = A$ betetzen den.

6. Izan bedi A matrize karratu bat, $A^2 = A$ berdintza betetzen duena. Frogatu $B = 2A - I$ betetzen bada, orduan $B^2 = I$.

7. Izan bitez ondoko matrizeak:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} - \mathbf{B}^\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aurkitu A eta B matrizeak, A^t eta B^t haien matrize irauliak diren jakinik.

Algebra

Matrizeak

A matrizea izanik $A \in M(2,3)$ bada, 2 errenkadez eta 3 zutabez osatuta dagoela esan nahi du. Errenkada eta zutabe kopurua berdina bada x ordenako matrizea dela esango dugu, non, x errenkada edo zutabe kopurua den.

Definizioa: A eta B matrizeak berdinak dira baldin eta A eta B dimentsio berekoak izanik a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = B$$

$a = a'$ $\quad$ $c = c'$

$b = b'$ $\quad$ $d = d'$

Algebra. Matrizeak

(1)

$$\begin{cases} 3A+4B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 & 15 \\ 28 & 19 & 26 & -19 \\ -3 & -8 & 13 & 16 \end{pmatrix} \\ 5A-3B=\begin{pmatrix} 18 & 10 & 30 & -4 \\ 8 & 22 & 24 & -22 \\ -5 & 6 & 12 & 12 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3A+4B=C \\ 5A-3B=D \end{cases} \quad \begin{cases} 15A+20B=5C \\ -15A+9B=-3D \end{cases} \quad \{ \; 29B=5C-3D \Rightarrow B=\frac{5C-3D}{29}$$

$$\begin{cases} 3A+4B=C \\ 5A-3B=D \end{cases} \quad \begin{cases} 9A+12B=3C \\ 20A-12B=4D \end{cases} \quad \{ \rightarrow 29A=3C+4D \Rightarrow A=\frac{3C+4D}{29}$$

(2)

$$\left.\begin{array}{l} 5X+3Y=A \\ 3X+2Y=B \end{array}\right\} \text{ non } A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \text{ eta } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -15x-9y=-3A \\ 15x+10y=5B \end{array}\right\} \; y=5B-3A \Rightarrow y=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10x+6y=2A \\ -9x-6y=-3B \end{array}\right\} \; X=2A-3B \Rightarrow x=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$Y^2=Y\cdot Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

③

$x^T y \Rightarrow (3\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$

$x \cdot y^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2\ 2) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ coinciden regin

$2 \cdot 1 \ . \ 1 \cdot 2$

$y^T x \Rightarrow (2\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (8)$

$1 \cdot 2 \quad 2 \cdot 1$

$y\, x^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (3\ 1) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

$2 \times 1 \quad 1 \times 2$

④

$$M = \begin{pmatrix} 0 & bd & -cd & bc \\ -ae & 0 & ce & ac \\ af & -bf & 0 & ab \\ -ef & -df & -de & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & bd & -cd & bc \\ -ae & 0 & +ce & ac \\ af & -bf & 0 & ab \\ -ef & -df & -de & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & bd & -cd & bc \\ -ae & 0 & +ce & ac \\ af & -bf & 0 & ab \\ -ef & -df & -de & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -aebd - cdaf - bcef & bfcd - bcdf & -bdce - bcde & bdac - bacd \\ -ceaf - acef & -aebd + bfce - acdf & aecd - adeac & -aebc - ceab \\ +bf \cdot ae - abef & afbd - abdf & -afcd + bfce - ab \cdot de & afbc - bfac \\ aedf - deaf & -bdef + bfde & efcd + dfce & -efbc - dfac - abde \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{-aebd - cdaf - baef}_{1} & 0 & \cancel{2bdce}\ 0 & 0 \\ \cancel{2ceaf}\ 0 & -aebd + bfce - adf & 0 & -2adbc \\ 0 & 0 & -afcd + bfce - abde & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{efcd}\ 0 & \underbrace{-efbc - adfac - abde}_{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑤

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

$a^2 + bc = a$

$ab + bd = b \Rightarrow b(a+d) = b \Rightarrow a+d = 1$

$ca + dc = c \Rightarrow a+d = 1 \Rightarrow a = 1-d$

$cb + d^2 = d \Rightarrow cb = d - d^2$

$\cancel{cb = a - a^2 \Rightarrow d - d^2 = (1-d) - (1-d)^2 \Rightarrow d - d^2 = 1 - d - 1 + 2d - d^2}$

$\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} cb &= d - d^2 \\ cb &= (1-d) - (1-d)^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &cb = d - d^2 \\ &\cancel{cb = (1-d) - (d^2 - 2d + 1) \Rightarrow cb =} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a - a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$$

6)

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= A \\ B &= 2A - I \end{aligned}\right\} \Rightarrow B^2 = I$$

$$B^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4AI + I = 4A - 4A + I = I$$

$\boxed{B^2 = I}$

ALDERANTZIZKO MATRIZEA

Informatika Fakultatea

2014-2015

Matrize Bakuna. I

Definizioa
M matrizea **bakuna** *da, matrizearen determinantearen balioa* 0 *denean.*

$$|M| = 0$$

Indizea

Alderantzizko Matrizea. I

Definizioa
M matrizea **alderantzikagarria** *da, existitzen bada* A^{-1} *matrizea non* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ *betetzen den.*
Kalkulatzeko formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t(A)$$

$Adj(A)$: A matrizearen adjuntoekin (edo kofaktoreekin) eratutako matrizea.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Alderantzizko Matrizea. II

A matrizearen alderantzizkoa kalkulatu adjuntoen matrizea erabiliz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 4 \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Alderantzizko Matrizea. Propietateak. I

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- A alderantzikagarria bada, bere alderantzizkoa bakarra da.
- A,B matrizeak alderantzikagarriak badira

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Alderantzizko Matrizea. Propietateak. II

Teorema

A, n ordeneko matrize bat izanik, alderantzikagarria da baldin eta soilik baldin A ez bada bakuna.

Matrize Ortogonala. I

Definizioa

A matrize erregular bati **ortogonal** *deitzen zaio $A^{-1} = A^t$ betetzen bada.*

Matrize horien determinantea ± 1 da.

Oinarrizko Matrizeak I

Matrize batean errenkada edo zutabeen gaineko oinarrizko eragiketak beste matrize batez biderkatuz egin daitezke.

Matrize baten errenkaden gaineko eragiketa elementalak:

- Errenkada bat nulu ez den eskalare batez biderkatu. $2(2.e) \to 2.e$
- Errenkada bati beste errenkada baten multiploa gehitu. $2(2.e) + 1.e \to 1.e$
- Bi errenkada trukatu. $2.e \leftrightarrow 1.e$

Matrize baten zutabeen gaineko eragiketa elementalak:

- Zutabe bat nulu ez den eskalare batez biderkatu. $2(2.z) \to 2.z$
- Zutabe bati beste zutabe baten multiploa gehitu. $2(2.z) + 1.z \to 1.z$
- Bi zutabe trukatu. $2.z \leftrightarrow 1.z$

Oinarrizko Matrizeak II

Adibidez, ondoko matrizean azken errenkadan elementu guztiak 0 izatea lortzeko:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2(2.e)-1.e \to 2.e} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2(3.e)+1.e \to 3.e}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.e-2.e \to 3.e} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\{32\}}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko Matrizeak III

Oinarrizko eragiketa bakoitzari **Oinarrizko Matrize** bat dagokio. I identitate matrizetik oinarrizko eragiketak egiteko sortzen dira.

- A Matrize baten **errenkaden** gain eragiketa elementala egitea $= E$ Oinarrizko Matrize batez **aurrebiderkatzea**. $(E \cdot A)$
- A Matrize baten **zutabeen** gain eragiketa elementala egitea $=$ E Oinarrizko Matrize batez **atzebiderkatzea**. $(A \cdot E)$

Oinarrizko Matrizeak.
Errenkadak edo zutabeak trukatzea. I

P_{ij} m ordeneko **permutazio matrizea**, I_m identitate matrizea da i eta j errenkadak trukatuta.

Adibidez, $A_{3\times4}$ ondoko matrizean 2. eta 3. errenkadak trukatzeko:

$$P_{23} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eta A matrizean 2. eta 3. zutabeak trukatzeko:

$$A \cdot P_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko Matrizeak.
Errenkadak edo zutabeak trukatzea. II

- P_{ij} alderantzikagarria da eta bere alderantzizko matrizea bera da, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.
- m ordeneko P **permutazio matrizea**: m ordenako k permutazio oinarrizko matrizeen arteko biderkadura.

$$P = P_{i_1 j_1} \cdots P_{i_k j_k}$$

- P matrizeak eta I_m matrizeak errenkada berberak dituzte, baina orden ezberdinean kokatua.
- Oro har, $P \neq P^{-1}$

Oinarrizko Matrizeak.
Errenkada edo zutabe bati beste bat gehitzea. I

$E_{ij}(k)$ m ordeneko **oinarrizko matrizea**, I_m identitate matrizea da (i,j) elementua k izanik. $E_{ij}(k)$ i errenkadari j errenkada bider k gehitzeko oinarrizko eragiketari dagokion oinarrizko matrizea da.

Adibidez, ondoko A matrizean 3. errenkadari 2. errenkada kentzeko:

$$E_{32}(-1) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko Matrizeak.
Errenkada edo zutabe bati beste bat gehitzea. II

- $E_{ij}(k)$ alderantzikagarria da eta $E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k)$
- $E = E_{i_1 j_1}(k_1) \cdots E_{i_h j_h}(k_h)$ oinarrizko matrizeen biderkadura.
- E-ren alderantzizko matrizea.

$$E^{-1} = (E_{i_1 j_1}(k_1) \cdots E_{i_h j_h}(k_h))^{-1} = E_{i_h j_h}^{-1}(k_h) \cdots E_{i_1 j_1}^{-1}(k_1)$$

identitate matrizea izango da , $k_1, \cdots, k_h$ elementuak dagozkien lekuetan kokatuak, $(i_1, j_1), \cdots, (i_h, j_h)$.

Oinarrizko Matrizeak.
Errenkada edo zutabe bat zenbaki batez biderkatzea. I

$D_i(k)$ m ordeneko **matrize diagonala**, I_m identitate matrizea da i errenkadari dagokion diagonaleko elementua k izanez.

Adibidez, A matrizean 2. errenkada 2 zenbakiaz biderkatzeko:

$$D_2(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko Matrizeak.
Errenkada edo zutabe bat zenbaki batez biderkatzea. II

- $D_i(k)$ alderantzikagarria da eta $D_i^{-1}(k) = D_i(1/k)$
- $D = D_{i_1}(k_{i_1}) \cdots D_{i_h}(k_{i_h})$ matrizeen biderkadura izango da identitate matrizea, $k_i, \cdots, k_j$ elementuak dagozkien lekuetan kokatuak.
- Alderantzizko matrizea. $D^{-1} = (D_{i_1}(k_{i_1}) \cdots D_{i_h}(k_{i_h}))^{-1}$

Aurreko adibidea matrize elementalen bidez. I

Adibidez, A matrizean azken errenkadan elementu guztiak 0 izatea lortzeko:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)\cdot D_2(2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{31}(1)\cdot D_3(2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \longrightarrow E_{32}(-1) \cdot (E_{31}(1) \cdot D_3(2) \cdot (E_{21}(-1) \cdot D_2(2) \cdot A))$$

Matrize baten determinantearen kalkulua oinarrizko matrizeen bidez I

A matrizearen determinantea kalkulatuko dugu A matrizea oinarrizko matrizeez biderkatuz matrize diagonal bat lortu arte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrize baten determinantearen kalkulua oinarrizko matrizeen bidez II

Gero matrize goi-triangeluarraren determinantea kalkulatu:

$$|E_{21}(-3) \cdot E_{31}(-2) \cdot P_{23} \cdot A| = 1 \cdot (-6) \cdot (-3) = 18$$

Eta A matrizearena:

$$|E_{21}(-3) \cdot E_{31}(-2) \cdot P_{23}| \cdot |A| = |E_{21}(-3)| \cdot |E_{31}(-2)| \cdot |P_{23}| \cdot |A|$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot |A| = 18 \Longrightarrow |A| = -18$$

Alderantzizko Matrizearen kalkulua oinarrizko matrizeen bidez I

Metodo hau erabiliko da n ordeneko matrize baten alderantzizkoa kalkulatzeko.

1. A n ordeneko matrize bat izanik, ondoko matrizea osatuko dugu:

$$[A|I]$$

2. Eta osatutako matrizean oinarrizko eragiketak eginez ondoko matrizea lortuko dugu:

$$[I|A^{-1}]$$

Alderantzizko Matrizearen kalkulua oinarrizko matrizeen bidez II

Adibidea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-1)\cdot E_{21}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Alderantzizko Matrizearen kalkulua oinarrizko matrizeen bidez III

Adibidea

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)\cdot D_3(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1)\cdot D_2(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{13}(-1)\cdot D_1(4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Alderantzizko Matrizearen kalkulua oinarrizko matrizeen bidez IV

Adibidea

$$\xrightarrow{E_{12}(1)\cdot D_1(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D_3(\frac{1}{8})\cdot D_2(\frac{1}{8})\cdot D_1(\frac{1}{8})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/8 & 3/8 & (-2)/8 \\ 0 & 1 & 0 & (-5)/8 & 1/8 & 2/8 \\ 0 & 0 & 1 & (-1)/8 & (-1)/8 & 2/8 \end{array}\right]$$

Lortu dugu: $[I|A^{-1}]$

Bibliografia

Eugene A. Herman Michael D. Pepe.
Visual Linear Algebra.
2005.

Iaki Zurutuza.
Oinarrizko Aljebra.
2004.

MATRIZE ALDERANTZIKAGARRIAK. ARIKETAK.

1. Kalkula itzazu ondoko matrizeen alderantzizkoa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Azter ezazu zein balditzatan diren alderantzikagarri matrize hauek:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Azter ezazu g-ren zein baliotarako G matrizea singularra da.

$$G = \begin{pmatrix} 1-g & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1-g & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 5-g & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 5-g \end{pmatrix}$$

4. Azter ezazu zein balditzatan diren singular matrize hauek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Azter ezazu zein balditzatan den alderantzikagarri A matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alderantzizko Matrizea

Matrize bakuna

Definizioa: M matrize bakuna da, matrizearen determinantearen balioa 0 bada.

$$|M| = 0$$

Adibidea:

$$|M| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \right| = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$$

M matrizea bakuna da.

Alderantzizko Matrizea

Definizioa: M matrizea alderantzikagarria da, existitzen bada A^{-1} matrizea non $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ betetzen bada.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^{t}(A)$$

Adibidea: Adjuntuak:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad a_{12}$$

$$Adj(a_{12}) = -1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) = \boxed{2}$$

$$Adj(a_{13}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

$\vdots$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (Adj(A))^{T}$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Teorema: A, n ordenako matrize bat izanik, alderantzigarria da baldin eta soilik baldin A-ren det bada baliozkoa.

Matrize ortogonala

Definizioa: A matrize erregular bati ortogonal deritzen zaio $A^{-1} = A^T$ betetzen bada.

Matrize horien determinantea ± 1 da.

$$D_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_2(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.e - 1.e \to 2.e} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{1.e + 2(3.e)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\displaystyle (D_2(2))^{-1}}{\underset{\shortparallel}{D_2(2) \cdot D(1/2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Alderantzizko Matrizearen Kalkulua oinarrizko matrizeen bidez:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[A/I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{E}_{13}(-1)\cdot \mathcal{E}_{21}(-3)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{E}_{(32)}\cdot D_3(2)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{E}(23)\cdot D_2(2)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{E}_{13}(-1)\cdot D_1(4)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{E}_{12}(1)\cdot D_1(2)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Ariketak

1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[A/I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \cancel{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & 3/2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{5} & 3/2 & 3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{5} & 3/2 & 6 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \cancel{5} & 3/2 & 3 & \cancel{5} \end{array}\right]$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[B|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & \cancel{3}\,2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{E}_{21}(-3)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{23}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathcal{E}_{41}(2)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{E}_{42}(-\frac{7}{2})]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{E}_{43}(-13)]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 43'5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathcal{E}_{43}(-13) \cdot \mathcal{E}_{42}(-\tfrac{7}{2}) \cdot \mathcal{E}_{41}(2) \cdot P_{23} \cdot \mathcal{E}_{21}(-3) \cdot A| =$$

$$= \overset{1}{|\mathcal{E}_{43}(-13)|} \cdot \overset{1}{(\mathcal{E}_{42}(-\tfrac{7}{2})} \overset{1}{(\mathcal{E}_{41}(2))} \overset{-1}{(P_{23})} \overset{1}{|\mathcal{E}_{21}(-3)|} \cdot \overset{-128}{|A|} = \cancel{-128}\ \boxed{87}$$

Aplikazio Linealak

Trasformazio Linealak

Definizioa:

$V, W \in \mathbb{R}$ izanik, V-tik W-rako trasformazio lineala edo homomorfismoa honako bi propietateak betetzen dituzte:

$$(\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V) \quad f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2)$$

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\forall v \in V) \quad f(c\bar{v}) = c f(\bar{v})$$

Gainera, f bijektiboa bada, orduan f isomorfismoa dela esaten da eta V eta W espazioak isomorfoak. Gainera, $V = W$ bada orduan endomorfismo esaten zaio.

Adibidea:

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ eta $(\mathbb{R}^3, +, \cdot \mathbb{R})$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$ Bai!

$f(k \cdot \bar{x}) = k \cdot f(\bar{x})$ Bai!

1. Baldintza

$x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$$

2. Baldintza

$$f(k\cdot x) = f\left(k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ 0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = k f(\bar{x})$$

Trasformazio Linealaren Irudia eta Nukleoa

Irudia: $f(V)$ azpiespazioari F-ren irudia deritzo eta $\mathrm{Im} f$ idazten da:

$$\mathrm{Im} f = \{\bar{w} \in W \,/\, \exists\, f^{-1}(\bar{w})\}$$

Nukleoa: Irudia zero duten V-ko bektoreek osatzen dute eta $\mathrm{Ker} f$ idazten da:

$$\mathrm{Ker} f = \{\bar{x} \in V \,/\, f(\bar{x}) = \bar{0}\}$$

Adibidea

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im} f = \{\bar{w} \in W \,/\, \exists\, f^{-1}(\bar{w}) \in W\}$$

$$\mathrm{Ker} f = \{\bar{x} \in W \,/\, f(\bar{x}) = \bar{0}\}$$

$$\mathrm{Im} f\ \left\{\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = x_1 - x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\mathrm{Im} f} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\dim B_{\mathrm{Im} f} = 1}$$

④

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(2,3,1), (3,4,1), (1,2,2)\}$$

$$B_K = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$$

$$B_c = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3\}$$

$$f'': \mathbb{R}^3_{B_c} \xrightarrow[P]{id_{B_c}^{B_K}} \mathbb{R}^3_{B_K} \xrightarrow[A]{f} \mathbb{R}^3_{B_K} \xrightarrow[P]{id_{B_K}^{B_c}} \mathbb{R}^3_{B_c}$$

$$f''(\bar{x}_{B_c}) = \left(id_{B_K}^{B_c} \circ f \circ id_{B_c}^{B_K}\right)(\bar{x}_{B_c})$$

$$\left(M_{B_K}^{B_c}(id)\ A\ M_{B_c}^{B_K}(id)\right) \bar{x}_{B_c}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}_{B_K} = (\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \bar{c}_3) \cdot \begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix}_{B_K}$$

$$(\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \bar{c}_3) = c^t = (M\mathcal{E})^t = \mathcal{E}^t M^t$$

$$(\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \bar{c}_3)^{-1} (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}_{B_K} = \begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix}_{B_c}$$

$$(\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ c_3) = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \bar{c}_3)(\bar{x}_{B_c}) = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) \underbrace{M(\bar{x}_{B_c})}_{x_{B_K}}$$

$\mathrm{Ker}f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\bar{x}) = \bar{0} \right\}$

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = x_2$

$B_{\mathrm{Ker}f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim B_{\mathrm{Ker}f} = 1$

$B_{K\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$B_{K\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$

$f(\bar{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) = x_1 f(\bar{e}_1) + x_2 f(\bar{e}_2) = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{\bar{x}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$B_K \qquad B_K \left(M^{B_K}_{B'}\right)^{-1} \qquad B'\mathbb{R}^3$

$M^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}}(f)$

$B'_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \bar{v}_{B_K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_{1 B_K} = 1\bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0\bar{e}_3$

$(e_1, e_2\ e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3)$

$\bar{u} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + k_3 \bar{v}_3 = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \bar{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} =$

$= (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \bar{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ k_3' \end{pmatrix}$

Matrizearen alderantzizkoa lortzea behar dugu.

$$(g \circ f)(\bar{u}) = g(f(\bar{u})) = \underbrace{\left(M_B^{B_K}\right)^{-1} \cdot \underbrace{M_{B_K \mathbb{R}^2}^{B_K \mathbb{R}^3} \bar{u}}_{f(\bar{u})}}_{f(\bar{u})_{B'}}$$

Aplikazio lineal baten deskonposizio kanonikoa

f-ren gainerako deskonposizio hau egin daiteke: $f = i \circ g \circ h$

non,

$h : V \to \frac{V}{Ker f}$, $h(\bar{v}) = [\bar{v}]$ suprajektiboa

$g : \frac{V}{Ker f} \to Im f$, $g([\bar{v}]) = f(\bar{v})$ bijektiboa

$i : Im f \to W$, $i(f(\bar{v})) = f(\bar{v})$ Injektiboa

Proposizioa

S $Ker f$-en azpiespazio betegarria izanik, hau da, $V = S \oplus Ker f$.
Orduan $j : S \to V/Ker f$ aplikazioa $j(\bar{u}) = [\bar{u}]$ isomorfismoa da.

Ondorioz, $\dim V = \dim Ker f + \dim Im f$

Proposizioa:

S eta R V espazioko azpiespazio betegarriak badira, hau da, $V = S \oplus R$, orduan V/R eta S isomorfoak dira (baita V/S eta R ere)

Ondorioz, S V-ko azpiespazioa bada, $\dim(V/S) = \dim V - \dim S$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(\bar{x}) = \bar{0} \right\}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2$$

$$B_{\operatorname{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim B_{\operatorname{Ker} f} = 1$$

$$B_{K\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{K\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2$$

$$f(\bar{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f(x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2) = x_1 f(\bar{e}_1) + x_2 f(\bar{e}_2) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{\bar{\bar{x}}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{B_K}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{B_{\mathbb{R}^3}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{\left(M^{B_K}_{B'}\right)^{-1}} \underset{B'_{\mathbb{R}^3}}{\mathbb{R}^3}$$

$$M^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}}(f)$$

$$B'_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \bar{v}_{B_K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_{1 B_K} = 1\bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \bar{e}_3$$

$$(\bar{e}_1\, \bar{e}_2\, \bar{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\bar{v}_1\, \bar{v}_2\, \bar{v}_3)$$

$$\bar{u} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + k_3 \bar{v}_3 = (\bar{v}_1\, \bar{v}_2\, \bar{v}_3) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\bar{e}_1\, \bar{e}_2\, \bar{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} =$$

Trasformazio linealak

Adibidea:

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}}) \quad (\mathbb{R}^3, +, \cdot_{\mathbb{R}})$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} f(\bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}) & \underline{\text{Bai!}} \\ f(k\cdot\bar{x}) = k f(\bar{x}) & \underline{\text{Bai!}} \end{cases}$

1. baldintza

$x, y \in \mathbb{R}^2 \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$f(\bar{x}+\bar{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$

2. baldintza

$f(k\cdot x) = f\left(\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}\right) = \cancel{kf}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 k \\ x_2 k \\ 0 \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = k\cdot f(\bar{x})$

Irudia eta Nukleoa

Adibidea:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im} f = \{\bar{w} \in W \,/\, \exists f^{-1}(w) \in W\}$

$\operatorname{Ker} f = \{\bar{x} \in V \,/\, f(\bar{x}) = \bar{0}\}$

$\operatorname{Im} f \left\{\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = x_1 - x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$B_{\operatorname{Im} f} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\dim B_{\operatorname{Im} f} = 1}$

V