Kalkulua

Integral Mugatua

Integral mugatuaren propietateak. Goi-muga aldakorreko integral mugatua.

Julen Indias Garcia

April 26, 2017

Aurkibidea

1. Gaia
Integral mugatuak

1.1 Integral mugatuaren propietateak

1.1. Propietatea. *Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ funtzio bornatuak $[a,b]$ tartean.*

1. *Linealtasuna:* $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$.

2. *Monotonia:* $\forall x \in [a,b] f(x) \leq g(x)$ *bada,* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ *izango da.*

3. $f(x)$ *jarraitua bada,* $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *eta* $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *hartzen baditugu:*
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ *beteko da.*

4. *Batez besteko balioaren teorema:*
   $f(x)$ *jarraitua bada* $[a,b]$ *tartean,* $\xi \in [a,b]$ *balioa existituko da eta*
   $\int_a^b f(x)\,dx =$
   $= f(\xi)(b-a)$ *beteko da.*

5. $\forall a,b,c \quad a<c<b$ *bada,* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ *beteko da.*

6. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ *izango da, definizioz.*

7. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ *izango da.*

1.2 Goi-muga aldakorreko integral mugatua

1.2. Definizioa. *Izan bedi $f(x)$ funtzio jarraitua $[a,b]$ tartean.*
$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *integral mugatuari funtzio integral deritzo.*

1.3. Teorema. *Kalkulu integralaren oinarrizko teorema*
$f(x)$ *funtzioa jarraitua bada* $[a,b]$ *tartean,* $I(x)$ *funtzio integrala onartuko du jatorrizkotzat.*

- *Froga* :
  $I(x)$ funtzioa $f(x)$ funtzioaren jatorrizkoa izateko, $I'(x) = f(x)$ bete beharko da. Beraz, $I(x)$-ren deribatua kalkulatu beharko dugu:
  $I'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{I(x+h)-I(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(\int_a^x f(x)\,dx - \int_a^{x+h} f(t)\,dt) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$
  Orain, $[x, x+h]$ tartean Batez besteko balioaren teorema aplikatuko dugu:
  $\exists \xi \in [x, x+h] / \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi) \cdot (x+h-x) = f(\xi) \cdot h$ baita.
  Orduan, $I'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} f(\xi) \cdot h = \lim\limits_{h\to 0} f(\xi)$ eta $x \le \xi \le x+h$ denez,
  $\lim\limits_{h\to 0} x \le \lim\limits_{h\to 0} \xi \le \lim\limits_{h\to 0}(x+h) \Rightarrow x \le \lim\limits_{h\to 0} \xi \le x \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \xi = x$, hau da, $\lim\limits_{h\to 0} f(\xi) = x$
  Ondorioz, $I(x)$ funtzioa $f(x)$ funtzioaren jatorrizkoa da.

1.4. Teorema. *Barrow-ren formula*
$F(x)$ bada $f(x)$ funtzioaren jatorrizko bat $[a, b]$ tartean, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ izango da.

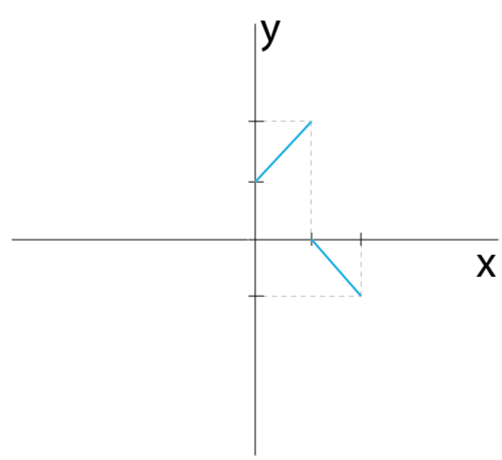
- *Froga* :

$f(x)$ jarraitua denez $[a, b]$ tartean, $I(x)$ funtzio integrala bere jatorrizko bat da. (13.T)
$F(x) = I(x) + K$ izango da, $F(x)$ eta $I(x) f(x)$-ren jatorrizkoak direlako. (4. gaiko 2.P)

$$\left.\begin{array}{l} F(b) = I(b) + K = (\int_a^b f(x)\,dx) + K \\ F(a) = I(a) + K = (\int_a^a f(x)\,dx) + K = 0 + K \end{array}\right] \Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx + K - K =$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

1.5. Adibidea.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & x \in [0,1] \\ \\ 1-x & x \in [1,2] \end{cases}$$



$\int_0^2 f(x)\,dx$ *kalkulatuko dugu:*

$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$; $\qquad F(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^2}{2} & x \in [0,1) \\ -\frac{(1-x)^2}{2} & x \in (1,2] \end{cases}$

$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ *Ikusten dugunez, funtzioa ez denez jarritua, eta horregatik -1 balioa lortzen dugu.*

Barrow-en formula etenunetan erabiliz honako emaitza hau lortuko dugu:

$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) - (F(1^+) - F(1^-)) = (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} - (0-2) = 1$

1.2.1 Barrow-ren formularen erabilera

1. *Aldagai-aldaketa :*

   $\int_a^b f(x)\,dx = \begin{bmatrix} x = \phi(t) \\ dx = \phi'(t)dt \\ a = \phi(\alpha) \\ b = \phi(\beta) \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$

2. *Zatikako integrazioa :*

   $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$

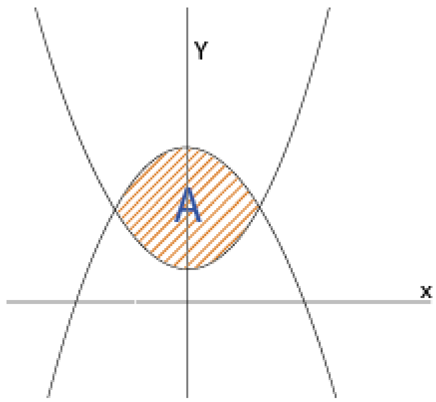
3. *Etenuneetan :*

   $c \in [a,b]$ *puntua etenune bat bada, honako hau beteko da:*

   $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - (F(c^+) - F(c^-)).$

- *Ariketak:*

1. 5) $y = x^2 + 1$ *eta* $y = 5 - \frac{x^2}{2}$ *parabolek mugatzen duten eremuaren azalera kalkulatuko dugu:*



Lehenik bi funtzioen ebaki-puntua edo puntuak bilatuko ditugu.:

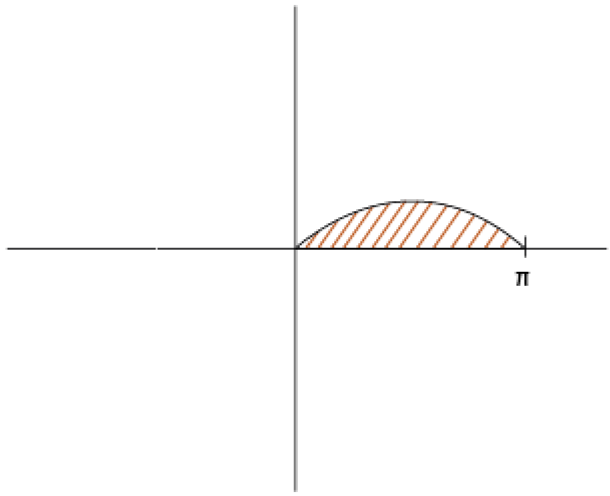
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 5 - \dfrac{x^2}{2} \end{cases} ;\ x^2 + 1 = 5 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{2} = 4 \Rightarrow 3x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$A = \int_{-\sqrt{\frac{8}{3}}}^{\sqrt{\frac{8}{3}}} (5 - \frac{x^2}{2})\, dx \text{ - } \int_{-\sqrt{\frac{8}{3}}}^{\sqrt{\frac{8}{3}}} (x^2 + 1)\, dx =$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{8}{3}}}^{\sqrt{\frac{8}{3}}} 5\, dx \text{ - } \int_{-\sqrt{\frac{8}{3}}}^{\sqrt{\frac{8}{3}}} \frac{x^2}{2}\, dx \text{ - } \int_{-\sqrt{\frac{8}{3}}}^{\sqrt{\frac{8}{3}}} x^2\, dx \text{ - } \int_{-\sqrt{\frac{8}{3}}}^{\sqrt{\frac{8}{3}}} dx = [5x - \frac{x^3}{6}]_{-\sqrt{\frac{8}{3}}}^{\sqrt{\frac{8}{3}}} \text{ - } [\frac{x^3}{3} + x]_{-\sqrt{\frac{8}{3}}}^{\sqrt{\frac{8}{3}}} =$$

(7,43-(-7,43))-(3,07-(-3,07)) = 14,86 - 6,14 = 8,72 u^2

8. 5) $y = \sin^2 x$ *funtzioak biratzean osatzen duen gorputzaren bolumena kalkulatuko dugu* $[0, \pi]$ *tartean:*



$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \pi[\frac{3x - \sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{8}]_0^\pi = \pi$*((2,36 + 0)-(0+0)) =*
= 7,41 u^3

$I_1 = \int sin^4 x\,dx = \int (\frac{1 - \cos 2x}{2})^2\,dx = \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\,dx =$
$\int \frac{1}{4}\,dx - \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx + \int \frac{\cos^2 2x}{4}\,dx = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \cos^2 2x\,dx =$
$\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 4x}{8} = \dfrac{3x - \sin 2x}{4} + \dfrac{\sin 4x}{8}$

$\int \cos^2 2x\,dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int 4\cos 4x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$