37. (2008ko ekaina) bikoitia(x) eta trukabik(C(1..r), (c_1, c_2, …, c_r), D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos) predikatuak eta 1 eta n-ren arteko posizio batean bai A(1..n) bektorean eta bai B(1..n) bektorean elementu bikoitiak badaude, bektorez trukatzen dituen programa

a) **bikoitia(x)** $\equiv$ {x mod 2 = 0}

b) **trukabik(C(1..r), (c_1, c_2, …, c_r), D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos)** $\equiv$

$\forall k\ (1 \leq k \leq pos \wedge bikoitia(c_k) \wedge bikoitia(d_k) \rightarrow (C(k) = d_k \wedge D(k) = c_k)) \wedge$
$\forall k\ (1 \leq k \leq pos \wedge (\neg bikoitia(c_k) \vee \neg bikoitia(d_k)) \rightarrow (C(k) = c_k \wedge D(k) = d_k))$

c)

(1) {Hasierako baldintza} $\equiv$ { $n \geq 1 \wedge \forall k\ (1 \leq k \leq n \rightarrow (A(k) = a_k \wedge B(k) = b_k))$}

Hasierako baldintzaren bidez A eta B bektoreek gutxienez elementu bana izango dutela eta A eta B bektoreetako hasierako balioak *a* eta b minuskulen bidez eta dagozkien azpiindezeak erabiliz adieraziko ditugula esaten da.

(2) {Tarteko asertzioa} $\equiv$ {(1) $\wedge$ i = 1}

(9) {Bukaerako baldintza} $\equiv$
{trukabik(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), n)}

Bukaerako baldintzaren bidez bektore osoan, hau da, n posizioraino egin beharreko aldaketa denak eginda daudela esaten da.

(3) {Inbariantea} $\equiv$ {$(1 \leq i \leq n + 1) \wedge$
trukabik(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i – 1)}

Inbariantearen bidez i – 1 posizioraino (posizio hori ere barne) egin beharreko aldaketa denak eginda daudela adierazten da. Beraz i posizioan gaude eta aurreko posizioraino egin beharreko aldaketak eginda daude eta berriz while-an sartzen bagara i posizioa aztertuko da orduan.

(4) {Tarteko asertzioa} $\equiv$ {$(1 \leq i \leq n) \wedge$
trukabik(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i – 1)}

while-ean sartu garenez badakigu while-aren baldintza bete egin dela eta i ez dela n + 1.

(5) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(1 \le i \le n) \land$
trukabik(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i – 1) $\land$
bikoitia(A(i)) $\land$ bikoitia(B(i)) $\land$ A(i) = a_i $\land$ B(i) = b_i}

if aginduaren **then** aukeratik sartu garenez, badakigu A(i) eta B(i) elementuak bikoitiak direla eta gainera badakigu A eta B tauletako i posizioan oraindik hasierako balioak daudela, hau da, a_i balioa eta b_i.

(5) era laburragoan honela adieraz daiteke:
(5) {Tarteko asertzioa} ≡ {(4) $\land$ bikoitia(A(i)) $\land$ bikoitia(B(i)) $\land$ A(i) = a_i $\land$ B(i) = b_i}

(6) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(1 \le i \le n) \land$
trukabik(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i – 1) $\land$
bikoitia(A(i)) $\land$ bikoitia(B(i)) $\land$ A(i) = a_i $\land$ B(i) = b_i $\land$ lag = A(i)}

lag : = A(i); esleipena burutu ondoren lag aldagaiaren balioa A(i)-ren berdina da. Esleipen hori egin arren aldaketa osoak i – 1 posizioraino bakarrik daude eginda, i posizioan erdizka gaude eta horregatik trukabik predikatuan i – 1 ipini behar da. Bestalde A eta B bektoreek i posizioan oraindik hasierako balioak dituzte a_i eta b_i hurrenez hurren.

(6) era laburragoan honela adieraz daiteke:
(6) {Tarteko asertzioa} ≡ {(5) $\land$ lag = A(i)}

(7) {Tarteko asertzioa} ≡
{$(1 \le i \le n) \land$ trukabik(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i – 1) $\land$
bikoitia(a_i) $\land$ bikoitia(B(i)) $\land$ A(i) = B(i) $\land$ B(i) = b_i $\land$ lag = a_i}

A(i) : = B(i); esleipena burutu ostean, A(i) eta B(i) berdinak dira. B taulako i posizioan oraindik hasierako balioa daukagu b_i baina A taulako i posizioan ez dago a_i. Orain a_i balioa lag aldagaian dago. Esleipen hori egin arren aldaketa osoak i – 1 posizioraino bakarrik daude eginda, i posizioan erdizka gaude eta horregatik trukabik predikatuan i – 1 ipini behar da. Bestalde badakigu a_i.balioa bikoitia dela eta baita B(i) ere.

(7) era laburragoan honela adieraz daiteke:
(7) {Tarteko asertzioa} ≡ {(4) $\land$ bikoitia(a_i) $\land$ bikoitia(B(i)) $\land$ A(i) = B(i) $\land$ B(i) = b_i $\land$ lag = a_i}

Kasu honetan (7) era laburrean ematerakoan ez (5) eta ez (6) ezin dira erabili.

(11) {Tarteko asertzioa} ≡
{$(1 \le i \le n) \land$ trukabik(A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, B(1..n), $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $i - 1) \land$
bikoitia(a_i) $\land$ bikoitia(b_i) $\land$ A(i) = b_i $\land$ B(i) = a_i $\land$ lag = a_i}

B(i) : = lag; esleipena burutu ostean, B(i)-ren balioa a_i da eta aurretik A(i)-ren balioa b_i zela bagenekienez, orain i posizioko trukaketa ere eginda dagoela esan dezakegu. Beraz (11) puntuko asertzioa honela ere eman daiteke:

(11) {Tarteko asertzioa} ≡
{$(1 \le i \le n) \land$ trukabik(A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, B(1..n), $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, i) $\land$
bikoitia(a_i) $\land$ bikoitia(b_i) $\land$ lag = a_i}

Bertsio honetan trukabik predikatuan bertan i ipiniz, i-ra arteko trukaketak eginda daudela adierazten da eta horregatik ez dago A(i) = b_i $\land$ B(i) = a_i ipini beharrik, hori predikatuaren bidez esanda baitago.

(8) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(1 \le i \le n) \land$
trukabik(A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, B(1..n), $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, i)}

Zein da (11) eta (8) puntuen arteko desberdintasuna? (11) puntuan badakigu **if** aginduko **then** aukeratik joan garela eta horregatik bikoitia(a_i) $\land$ bikoitia(b_i) $\land$ lag = a_i betetzen dela ziurta dezakegu. Baina (8) puntuan ez dakigu if aginduaren **then** aukeratik joan al garen ala **if** aginduaren baldintza ez betetzeagatik zuzenean **if** agindua bukatu egin al den eta horregatik ezin dugu ziurtatu bikoitia(a_i) $\land$ bikoitia(b_i) $\land$ lag = a_i betetzen denik, izan ere if aginduaren baldintza ez bada bete, bikoitia(a_i) $\land$ bikoitia(b_i) $\land$ lag = a_i ez da egia izango.

(12) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(2 \le i \le n + 1) \land$
trukabik(A(1..n), $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, B(1..n), $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $i - 1$)}

Zein da (8) eta (12) puntuen arteko desberdintasuna? (8) puntuan badakigu i posiziora arteko kalkuluak (i posiziokoa barne) eginda daudela, baina orain i : = i + 1; esleipena burutu denez, i aldagaiak aurrera egin du baina kalkuluek ez eta horregatik kalkuluak i – 1 posiziora arte daudela eginda esan beharko da.

(10) E = n + 1 – i

Inbariantea betetzen den lekuan gauden bakoitzean E espresioak while agindua bukatzeko zenbat buelta falta diren adierazi behar du. Taula ezkerretik eskuinera zeharkatzen denean E espresioa "i aldagaiak hartuko duen azkeneko balioa" ken "i" izango da. Azken batean E espresioa n + 1 eta i-ren arteko distantzia da. Horrela i-ren balioa handitzen denean, n + 1 eta i-ren arteko distantzia txikiagoa izango da eta eman beharreko buelta-kopurua ere txikiagoa izango da.

Koloreen bidez asertzio batetik bestera dauden aldaketak nabarmendu dira.