4. Gaia: Serieak $\mathbb{R}$ multzoan

4.1 Serieak. Serieen izaerak.

Izan bedi $\{a_n\}$ segida. Helburua bere gai guztiak batzea da. (Posible al da?)

Batutakoak	Falta direnak
$S_1 = a_1$	$R_1 = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$
$S_2 = a_1 + a_2$	$R_2 = a_3 + a_4 + \cdots$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$R_3 = a_4 + \cdots$
$\vdots$	$\vdots$
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$

Batura osoa lortzeko $\{S_n\}$ segidaren limitea kalkulatu beharko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1+a_2+\cdots+a_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Hori infinitu batugai duen batuketa da.

1) Definizioa

$\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ segida bat emanik, bere gai guztien batuketari $(a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots)$ <u>seriea</u> deritzo eta $\sum_n a_n$ idatziko dugu.

→ a_n: seriearen gai orokorra da.

→ S_n: $a_1+a_2+\cdots+a_n$ batura partziala da.

→ R_n: $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$ n hondarra da.

$$\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{batura}} \neq \underbrace{\sum_n a_n}_{\text{seriea}} \Big)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearen batura da eta honela kalkulatuko dugu.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Oharra! serieen arazoak bi dira:

* a_n gai orokorra ezagutuz, seriearen izaera ezagutzea.

* Serieak batura finitua badu, kalkulatzea.

2) Adibideak

$\{1\}$ segida, $\sum_n 1 = 1+1+1+\cdots = ?$

$\{\frac{1}{n}\}$ segida, $\sum_n \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots = ?$

$\{\frac{1}{2^{n-1}}\}$ segida, $\sum_n \frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = ?$

$\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$ segida, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = ?$

$\{(-1)^{n-1}\}$ segida, $\sum (-1)^{n-1} =$

3) Definizioa

$\sum_n$ seriea konbergentea, dibergentea edo oszilatzailea da batura partzialen $\{S_n\}$ segida konbergente, dibergente edo oszilatzailea denean, hurrenez hurren.

Honek esan nahi du:

- Seriea konbergentea denean, batura finitua duela.
- Seriea dibergentea denean, batura infinitua duela.
- Seriea oszilatzailea denean, ez duela baturarik.

4) Adibidea

Serie geometrikoa

$a_n = a\cdot r^{n-1}$ gai orokorra duen serieari serie geometriko deritzo, $a\neq 0$ eta $r\in\mathbb{R}$ izanik. r balioa serie geometrikoaren arrazoia da.

$$\sum_n a\cdot r^{n-1} = a+ar+ar^2+\dots$$

n batura partziala hau da: $S_n = a+ar+\dots+ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & r\neq 1\\ na & r=1\end{cases}$

orain, $\lim_{n\to\infty} S_n$ kalkulatuko dugu r-ren arabera:

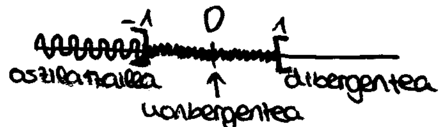
(1) $r<-1$ denean, $\nexists \lim_{n\to\infty} r^n \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \sum_n ar^{n-1}$ oszilatzailea da.

(2) $r=-1$ denean, $\nexists \lim_{n\to\infty} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \sum_n a(-1)^{n-1}$ oszilatzailea da.

(3) $|r|<1$ denean, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} \Rightarrow \sum_n ar^{n-1}$ konbergentea da eta batura $\sum_n^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ da.

(4) $r=1$ denean, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty \Rightarrow \sum_n a(1)^{n-1}$ dibergentea da.

(5) $1<r$ denean, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Longrightarrow \sum_n ar^{n-1}$ dibergentea da.



5) Adibidea (2) Adibidekoa)

$\sum_n \frac{1}{2^{n-1}}$, $a=1$, $r=\frac{1}{2}$ konbergentea eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$\sum_n (-1)^{n-1}$, $a=1$, $r=-1$ oszilatzailea denez ez du baturarik

$\sum_n 1$, $a=1$, $r=1$ dibergentea, $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$

6) Teorema: Cauchy-ren irizpidea serieetarako.

$\sum_n a_n$ seriea konbergentea baldin eta soilik baldin hau betetzen badu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \geq n_0(\varepsilon) \quad |S_q - S_p| = |a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_q| < \varepsilon$$

7) Korolarioa (ondorioa)

$\sum_n a_n$ seriea konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ izango da.

(erabilera: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ bada $\Rightarrow \sum_n a_n$ ezin da konbergentea izan)

8) Korolarioa

$\sum_n a_n$ konbergentea da baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ bada.

9) Adibidea (2) Adibideak)

$\sum_n 1$ eta $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_n 1$ ez da konbergentea.

$\sum_n (-1)^{n-1}$ eta $\nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \Rightarrow \sum_n (-1)^{n-1}$ ez da konbergentea.

$\sum_n \frac{1}{n}$ serie harmonikoa da; ez du Cauchyren baldintza betetzen (6) Teorema) beraz ez da konbergentea; hala ere $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ da. KONTUZ!

4.2 Gai positiboko serieak

4.2.1 Definizioa eta propietateak

10) Adibidea

$\sum_n a_n$ seriea gai positiboko seriea da $\forall n \geq n_0 \;\; a_n > 0$ bada.

11) Propietateak

(1) Batura partzialen $\{S_n\}$ segida hertsiki gorakorra da.

(2) $\sum a_n$ seriea konbergentea edo dibergentea da, hau da, ez oszilakorra.

(3) Elkartze-legea: $\sum_n a_n$ seriearen izaera eta batura ez dira aldatzen ondoz ondoko gaien taldeen ordez bere batura jartzen badugu.

(4) Banatze-legea: $\sum_n a_n$ seriearen izaera ez da aldatzen bere gai guztiak $\lambda \neq 0$ konstante batez biderkatzen baditugu. Horrez gain, $\sum_n^{\infty} a_n = a$ bada $\sum_n^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_n^{\infty} a_n = \lambda a$ da.

(5) Trukatze-legea: $\sum_n a_n$ serieak bere gaien edozein berrordenatzo onartzen du izaera eta batura aldatu gabe.

4.2.2 Konparaziozko irizpide orokorrak

13) Definizioa

a) $\sum_n b_n$ seriea $\sum_n a_n$ seriearen maiorantea da $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq b_n$ bada.

b) $\sum_n b_n$ seriea $\sum_n a_n$ seriearen minorantea da $\forall n \geq n_0$ $b_n \leq a_n$ bada.

14) Teorema: Konparaziozko irizpide orokorra (KIO)

1. $\sum_n a_n$ serieak serie maiorante konbergente bat onartzen badu, $\sum_n a_n$ seriea ere konbergente izango da.
2. $\sum_n a_n$ serieak serie minorante dibergente bat onartzen badu, $\sum_n a_n$ seriea ere dibergentea izango da.

15) Aplikazioa

Serie harmoniko orokorra

$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, gai orokorra duen seriea serie harmoniko orokorra da

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots$$

(1) $\alpha = 1$ denean, $\sum_n \frac{1}{n}$ serie harmonikoa da, badakigu ez dela konbergentea (9) Adibidea) gai positiboa denez, dibergentea da.

(2) $0 < \alpha < 1$ denean, $n^\alpha < n^1 = n$ betetzen da eta hortik $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ ateratzen da. Hortaz, $\sum_n \frac{1}{n}$ seriea $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ serie harmoniko orokorraren serie minorantea eta dibergentea da.

Ondorioz, $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ ere dibergentea da, KIO-2. arabera.

(3) $\alpha > 1$ denean, $\sum_n \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{8^\alpha} + \cdots + \frac{1}{15^\alpha}} + \cdots \leq$ (maiorantea)

$$\leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \cdots + \frac{1}{8^\alpha} + \cdots = \text{(elkartze legea)}$$

$$= 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \cdots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{(2)^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^2)^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^3)^{\alpha-1}} + \cdots = \sum_n \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1} \ *$$

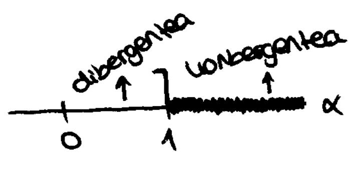
* $\sum_n \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$ serie geometrikoa da, non $a = 1$ eta $r = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$

$\Downarrow$

$r = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ da, $1 < \alpha$

$$1 < \alpha \Rightarrow 0 < \alpha - 1 \Rightarrow 2^0 < 2^{\alpha-1} \Rightarrow 1 < 2^{\alpha-1} \Rightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$$

Ondorioz, $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ serieak $\sum_n \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$ serie maiorante konbergentea onartzen duenez, $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ ere konbergentea da, KIO-1. arabera.



16) Korolarioa

Izan bitez $\sum_n a_n$ eta $\sum_n b_n$ serieak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0 \text{ bada, } \sum_n a_n \text{ eta } \sum_n b_n \text{ serieek izaera bera dute.}$$

$l=1$ denean, $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ izango dira, beraz, segida baliokideei dagozkien serieak izaera berekoak dira.

17) Adibidea

$\sum_n \frac{1}{n^2-n+1}$ seriearen izaera determinatuko dugu

$\left\{\frac{1}{n^2-n+1}\right\} \sim \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^2-n+1}$ eta $\sum_n \frac{1}{n^2}$ izaera berekoak izango dira.

$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ serie harmoniko orokorra da eta $\alpha = 2 > 1$ denez, konbergentea izango da eta, beraz, $\sum_n \frac{1}{n^2-n+1}$ ere konbergentea izango da.

4.2.3 KIOren aplikazioak

18) Teorema: Cauchyren edo erroen irizpidea

$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ bada,

$l < 1$ bada, a_n konbergentea da.

$l > 1$ bada, a_n dibergentea da.

$l = 1$ denean, zalantzazko kasua izango da.

19) Teorema: D'Alembert-en edo zatiduren irizpidea

$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ bada,

$l < 1$ bada, a_n konbergentea da.

$l > 1$ bada, a_n dibergentea da.

$l = 1$ denean, zalantzazko kasua izango da.

20) teorema: Raabe-ren irizpidea

$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ denean,

$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l$ bada,

$l > 1$ denean, seriea konbergentea da.

$l < 1$ denean, seriea dibergentea da.

$l = 1$ denean, zalantzazko kasua.

21) Adibidea

Aztertu dezagun $\sum_n \frac{a^{\ln n}}{b^n}$ seriearen izaera, $a,b>0$ izanik.

Cauchy-ren irizpidea erabiliz,

$$a_n = \frac{a^{\ln n}}{b^n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a^{\ln n}}{b^n}} = \frac{a^{\frac{\ln n}{n}}}{b} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^0}{b} = \frac{1}{b}$$

$\frac{1}{b} < 1$ edo $b > 1$ denean, $\sum_n \frac{a^{\ln n}}{b^n}$ konbergentea da

$1 < \frac{1}{b}$ edo $b < 1$ denean, $\sum_n \frac{a^{\ln n}}{b^n}$ dibergentea da.

D'Alembert-en irizpidea erabiliz

$b = 1$ denean, $\sum_n a^{\ln n}$ seriea dugu

$$a_n = a^{\ln n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}} = a^{\ln(n+1) - \ln n} = a^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = 1, \text{ zalantza kasua da.}$$

Raabe-ren irizpidea erabiliz

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - a^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right) \sim \lim_{n\to\infty} -n\left(\ln a^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty} -n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \ln a \sim$$

$$\sim \lim_{n\to\infty} -n \cdot \frac{1}{n} \cdot \ln a = -\ln a = \ln \frac{1}{a}$$

$\ln \frac{1}{a} > 1$ edo $a < \frac{1}{e}$ denean, $\sum_n a^{\ln n}$ konbergentea da

$\ln \frac{1}{a} < 1$ edo $a > \frac{1}{e}$ denean, $\sum_n a^{\ln n}$ dibergentea da.

$\ln \frac{1}{a} = 1$ edo $a = \frac{1}{e}$ denean, zalantzazkoa da.

Baina, $a = \frac{1}{e}$ denean, $\sum_n \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \sum_n \frac{1}{e^{\ln n}} = \sum_n \frac{1}{n}$ seriea dugu (serie harmonikoa), dibergentea dena.

4.2.4 Serieen batura hurbildua

Serieen batura hurbildua kalkulatzeko bi emaitzatan oinarrituko gara:

① $\forall k \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{S_k}_{\text{batura hurbildua}} + \underbrace{R_k}_{\text{errorea}} = S$

② "Korolarioa": $\sum_n a_n$ konbergentea $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$ $\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0 \ |R_n| < \varepsilon\right)$

Honetan oinarrituz bi problema mota ebatziko ditugu:

1. k ezaguna da, hots, S_k ezaguna da, R_k bornatu behar dugu.
2. k ezezaguna da, baina R_k ezaguna da, k kalkulatu behar dugu.

(4. Ariketa orriko pormuak)

23) Adibidea

$$\sum_n \frac{300}{n^n}$$ serea emanik, R_3 bornatuko dugu.

1. Erroaren irizpidea (Cauchy)

(A) Gai positiboko serea denez, erroaren irizpidea erabil dezakegu.

$$a_n = \frac{300}{n^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{300}{n^n}} = \frac{\sqrt[n]{300}}{n} \; ; \; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{300}}{n} = \overset{\ell}{0} < 1, \text{ konb.}$$

(B) Nondik hurbiltzen da $\frac{\sqrt[n]{300}}{n}$ limitera?

$$\forall n \quad \frac{\sqrt[n]{300}}{n} > \overset{\ell}{0} \text{ beraz, 2. kasuan gaude.}$$

(C) $\sqrt[k]{a_k}$ kalkulatu behar dugu

$k = 3$ denez, $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[3]{a_3} = \frac{\sqrt[3]{300}}{3} = 2'23 > 1$, beraz 2(b) kasuan gaude.

$j = 4$ bada $\sqrt[4]{a_4} = \frac{\sqrt[4]{300}}{4} = 1'04 > 1$; ez du balio

$j = 5$ bada $\sqrt[5]{a_5} = \frac{\sqrt[5]{300}}{5} = 0'62 < 1$, beraz $j = 5$ da.

$$R_3 \leq \underbrace{a_4 + a_5}_{\text{seriaren gaietan!}} + \frac{(\sqrt[5]{a_5})^6}{\underbrace{1 - \sqrt[5]{a_5}}_{\sqrt[k]{a_k} \to (C)}} = \frac{300}{4^4} + \frac{300}{5^5} + \frac{0'62^6}{1 - 0'62} = 1'428\text{-ko errorea}$$

2. Zatiduraren irizpidea (D'Alembert)

(A) G.P.S. denez, zatiduraren irizpidea erabili dezakegu

$$a_n = \frac{300}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{300}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{300}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \text{ denez konbergentea izango da}$$

(B) $\forall n \; \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} > 0$, beraz, 2. kasuan gaude.

(C) $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ kalkulatu behar dugu

$k = 3$ denez, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3^3}{4^4} = 0'1 < 1$, beraz 2(a) kasuan gaude.

$$R_3 \leq \frac{a_3 a_4}{a_3 - a_4} = \frac{\frac{300}{3^3} \cdot \frac{300}{4^4}}{\frac{300}{3^3} - \frac{300}{4^4}} = 1'31\text{-ko errorea}$$

4.3 Serie alternatuak

25) Definizioa

Izan bedi $\{a_n\}$ segida, non $\forall n \geq n_0$ $a_n > 0$ baita:

$\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ serieari alternatua deritzo.

$\sum_n (-1)^{n-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$

Oharra: $\{a_n\}$ segidaren gaiak positiboak dira $\forall n \geq n_0$, baina $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ seriearen gaiak positiboak eta negatiboak dira txandaka $\forall n \geq n_0$

26) Teorema: Leibniz-en irizpidea

Izan bedi $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ serie alternatua $\{a_n\}$ monotono beherakorra bada eta $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bada, $\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ seriea konbergentea izango da.

27) Adibidea

$\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serie alternatua izanda $a_n = \frac{1}{n} > 0$ monotono beherakorra da eta $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ da. Leibniz-en irizpidearen arabera $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ seriea konbergentea da.

Oharra: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ balitz, $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ez litzateke existituko, beraz ezin da konbergentea izan.

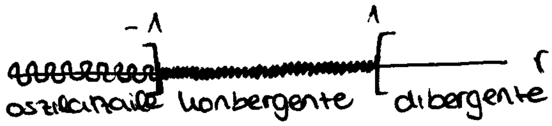
- Errorearen bornapena

$\sum_n (-1)^{n-1} a_n$ serie alternatuetako $|R_k| < a_{k+1}$

SERIEAK

1) Geometrikoak

$$\boxed{a_n = a \cdot r^{n-1}}$$



2) Gai positiboko serieak

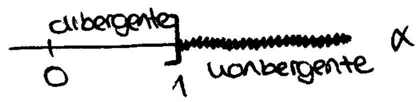
$$\boxed{\forall n \geq n_0 \quad a_n > 0}$$

konbergente / dibergente

⊛ Konparaziozko irizpide orokorrak

3) Serie harmoniko orokorra

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n^\alpha}} \quad \alpha > 0$$



4) Serie alternatuak

$$\boxed{\sum_n (-1)^{n-1} a_n}$$

⊛ Leibniz-en irizpidea

Serieak izaeraren arabera

1) Konbergenteak:

→ Geometrikoak $(-1 < r < 1)$

$$\sum_n \frac{1}{2^{n-1}} \ ; \ \sum_n \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^{n-1}$$

→ Serie harmoniko orokorra $(\alpha > 1)$

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \ ; \ \sum_n \frac{1}{n^2-n+1} \quad \left(\left\{\frac{1}{n^2-n+1}\right\} \sim \left\{\frac{1}{n^2}\right\}\right)$$

→ Besteak:

$$\sum_n (x^{1/n}-1)^3, \ x > 1$$

2) Dibergenteak:

→ Geometrikoak $(r \geq 1)$

$$\sum_n 1 \ ; \ \sum_n \frac{2}{2^{n-1}}$$

→ Serie harmoniko orokorra $(0 < \alpha \leq 1)$

$$\sum_n \frac{1}{n} \ ; \ \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

→ Besteak:

$$\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \ ; \ \sum_n \frac{2}{n-1}$$