2. Gaia: Topologia

2.1 Espazio metrikoak

1 Def. Izan bedi E multzoa ez-hutsa, $d: E\times E \to \mathbb{R}$ aplikazioa distantzia edo metrika da ondoko propietateak betetzen baditu:

M.1 ~~Bi~~ $\forall x,y \in E \quad d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

M.2 $\forall x,y \in E \quad d(x,y)=d(\cancel{x}\, x)$

M.3 $\forall x,y,z \in E \quad d(x,y) \leq d(x,y) + d(z,y)$ (desbardintza triangeluarra)

(E,d) bikoteari espazio metriko deritzo

Hortik, ondorioztatu dezakegu $\forall x,y \in E \ d(x,y) \geq 0$

2 Adb (1) $2.4 \to (1)$

$\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{m \text{ aldiz}}$. $x \in \mathbb{R}^m$ bada, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$ izanik x_i horiek x-ren koordenatuak dira.

$\mathbb{R}^m$ multzoan distantzia euklidearra honela definitzen da: $x,y \in \mathbb{R}^m$, $x=(x_1,x_2,\dots x_m)$ eta $y=(y_1,y_2,y_3,\dots y_n)$.

$$d(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\dots+(y_m-x_m)^2}$$

Honela $(\mathbb{R}^m,d)$ espazio metrikoa da

Adibidez, $\mathbb{R}^2$ multzoan, $d((1,2),(-1,0)) = \sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2} = \sqrt{8}$

$m=1$ denean, $x,y \in \mathbb{R}$ $d(x,y)=\sqrt{(y-x)^2}=|y-x|$

2 Adb (2)

$E \neq \emptyset \quad x,y \in E \quad d(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x\neq y \end{cases}$ metrika diskretua

$\mathbb{R}$ $\quad$ E

M1 $x, y \in E$ $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ betetzen da.
$x=y \Rightarrow d(x,y)=0$ betetzen da.

M2 $x, y \in E$ $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow y=x \Rightarrow d(y,x)=0$
$d(x,y)=1 \Rightarrow x \neq y \Rightarrow y \neq x \Rightarrow d(y,x)=1$

M3 E

			$d(x,y)$		$d(x,z)$	$d(z,y)$
$x=y$	$x=z$	$y=z$	0	$\leq$	0	0
		$y \neq z$				
	$x \neq z$	$y=z$				
		$y \neq z$	0	$\leq$	1	1
$x \neq y$	$x=z$	$y=z$	1	$\leq$	0	
		$y \neq z$				0
	$x \neq z$	$y=z$	1	$\leq$	1	1
		$y \neq z$	1	$\leq$	1	

3 Def: (E,d) espazio metrikoa, $a \in E$ eta $\underset{\mathbb{R}}{r>0}$ emanik, multzo hauek definitzen ditugu:

Bola irekia $B(a,r)=\{x \in E / d(a,x)<r\}$

Bola itxia: $\bar{B}(a,r)=\{x \in E / d(a,x)\leq r\}$

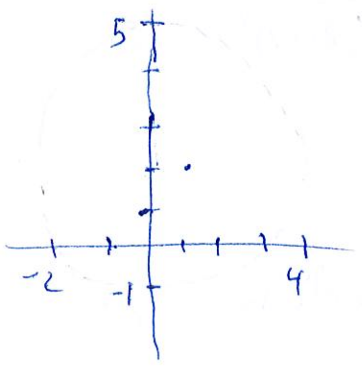
Esfera : $S(a,r)=\{x \in E / d(a,x)=r\}$

a bolen eta esferaren zentroa, eta r erradioa

4 Adb: (1) $\mathbb{R}^2$ eta distantzia euklidearra.

$B((1,2),3)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / d((1,2),(x,y))<3\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-1)^2+(y-2)^2<9\}$



C.4 Ariketak

2-

$E \neq \emptyset$ $a \in E$ eta metrika diskretua

$r = 0'1$ [$r \geq 1$ eta $r = 1'01$

$B(a, 0'1) = \{x \in E / d(a, x) < (r = 0'1)\} = \{x \in E / d(a,x) = 0\}$

$= \{x \in E / a = x\} = \{a < 0'1\}$

$\bar{B}(a, 0'1) = \{x \in E / d(a,x) \leq (r = 0'1)\} = \{x \in E / d(a,x) = 0\} =$
$= \{x \in E / a = x\} = \{a\}$

$S(a, 0'1) = \{x \in E / d(a,x) = 0'1\} \neq \{x \in E / d(a,x) = 0\}$

Beraz, $r = 0'1$ denean ez da betetzen propietatea.

$r = 1$

$B(a, 1) = \{x \in E / d(a,x) \leq r = 1\} = \{x \in E / d(a,x) = 0\} =$
$= \{x \in E / a = x\}$.

$\bar{B}(a,1) = \{x \in E / d(a,x) \leq r = 1\} \overset{\text{Biak}}{=} \{x \in E / d(a,x) = 0\}$
$\{x \in E / d(a,x) = 1\}$

Hau da, $a \neq x$ edo $a = x$ izan daitezke.

$S(a,1) = \{x \in E / d(a,x) = r = 1\} = \{x \in E / d(a,x) = 1\} = \{x \in E / a \neq x\}$

4Adb

② $E \neq \emptyset$, $a \in E$ metrika diskretua

$r = 0'1$ $B(a,0'1) = \{a\}$

$\bar{B}(a,0'1) = \{x \in E / d(a,x) \leq 0'1\} = \{x \in E / d(a,x) = 0\} = \{a\}$

$S(a,0'1) = \{x \in E / d(a,x) = 0'1\} = \emptyset$

③

$m=1$ denean, $\mathbb{R}$ multzoa dugu. Bolei ingurune deritze eta $\mathcal{E}(a,r)$ idazten dira

Ingurune irekia: $\mathcal{E}(a,r) = \{x \in \mathbb{R} / d(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R} / |x-a| < r\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} / -r < x-a < r\} = \{x \in \mathbb{R} / a-r < x < a+r\} = (a-r, a+r)$

Adb

Ingurune irekia: $\mathcal{E}_{(5,1)} = (4,6)$

Ingurune itxia: $\bar{\mathcal{E}}_{(5,1)} = [4,6]$

Esfera : $S(5,1) = \{4,6\}$

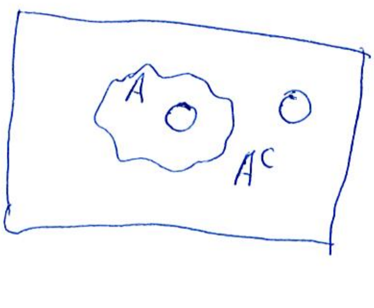
5 Def

(E,d) espazio metrikoa bada eta $A \subseteq E$ azpimultzo bat

a) $x \in E$ A-ren barne-puntua da $\exists r > 0 / x \in B(x,r) \subseteq A$ betetzen den. $[B(x,r) \cap A^c = \emptyset]$

b) $x \in E$ A-ren kanpo-puntua da $\exists r > 0 / x \in B(x,r) \subseteq A^c$ betetzen den. $[B(x,r) \cap A = \emptyset]$

c) $x \in E$ A-ren muga puntua $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ eta $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$



A eta A^c ello bi bolak e.b. dute elkar ikutzen.

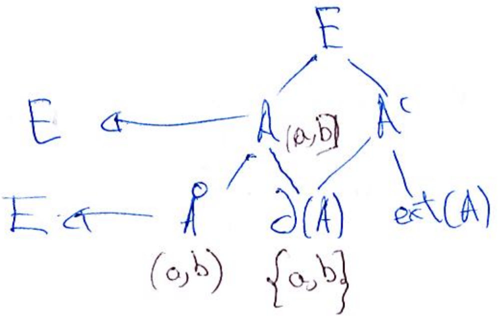
6Def (E,d) Espazio metrikoa bedi eta, $A \subseteq E$ azpimultzo bat,

a) A-ren barne-puntu guztien multzoa barnealdea da, eta $\mathring{A}$ idatziko dugu.

b) A-ren kanpo-puntu guztien multzoa kanpoaldea da eta $ext(A)$ idatziko dugu.

c) A-ren muga-puntu guztien multzoa muga da, eta $\partial(A)$ dugu.

Definizioetatik ondorioztatzen dira: $\mathring{A} \subseteq A$ eta $ext(A) \subseteq A^c$



7Adb ① $\mathbb{R}$, $A = (a,b]$

$x \in \mathbb{R}$ $\left[a < x < b \Rightarrow \exists r > 0 / \; \varepsilon(x,r) \subseteq (a,b] \Rightarrow x \in \mathring{A} \right.$

$r = \frac{1}{2}\min\{|x-a|, |x-b|\}$

$\ulcorner x = a \quad \forall r > 0 \quad \varepsilon(a,r) = (a-r, a+r)$ eta $(a-r, a) \subset A^c$, $(a, a+r) \subset A \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \partial(A)$

$\llcorner x = b$

$\left[\begin{array}{l} x < a \\ \text{edo} \\ b < x \end{array}\right. \quad \exists r = \frac{1}{2}\min\{|x-a|, |x-b|\} / \varepsilon(x,r) \subseteq A^c \Rightarrow x \in ext(A)$

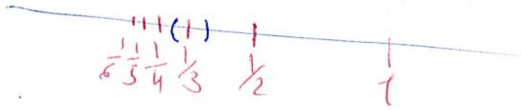
$\mathring{A} = (a,b)$

$\partial(A) = \{a,b\}$

$ext(A) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

7A

(2) $B=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$



$\frac{1}{n}\in B$ — $\frac{1}{n}\in\mathring{B}$

$\qquad\qquad$ — $\frac{1}{n}\in\partial(B)$

$\mathcal{E}(\frac{1}{n}, r)\not\subset B$ $\forall r>0 \Rightarrow \frac{1}{n}\in\partial(B)$ $\cdot\ \forall n \Rightarrow$

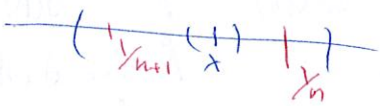
$\cancel{\not\subset B^c}$ $\qquad \mathring{B}=\emptyset$

A — $\mathring{A}$, $\partial(A)$; A^c — $\partial(A)$, $ext(A)$

Beti $1/n$ zentroa izanda bere ondoan dauden zenbaki ia guztiak B^c multzokoak baitira.

$x\in B^c$ — $x=0$

$\qquad$ — $x\neq 0$ — $\cancel{\partial(B)}$, $ext(B)$



$\frac{1}{2}\min\left\{d(x,\frac{1}{n}),\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$

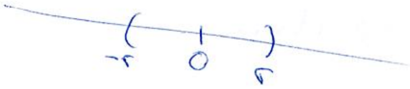
$\mathcal{E}(x,r_0)\subset B^c \Rightarrow x\in ext(B)$

$x=0$

$\mathcal{E}(0,r)$

$\quad\parallel$

$(-r_0, r)$



$\forall r>0\quad \mathcal{E}(0,r)\cap B^c\neq\emptyset$

$\forall r>0 - \exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \frac{1}{n_0}<r \Rightarrow \frac{1}{n_0}\in\mathcal{E}(0,r)\cap B\neq\emptyset$

$\Rightarrow 0\in\partial(B)$

$\mathring{B}=\emptyset$

$\partial(B)=B\cup\{0\}$

$ext(B)=\mathbb{R}-B\cup\{0\}$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow x \in \mathcal{E}(x,r) \subset A$

$x \in (x-r, x+r) \subset A$

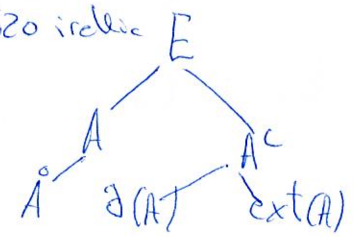
8 Def

(E,d) espazio metrikoa bada eta $A \subseteq E$ azpimultzo bat,

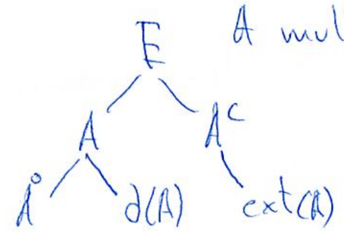
a) A multzo irekia da $A = \mathring{A}$ bada.

b) A multzo itxia da $A = \mathring{A} \cup \partial(A)$ bada

A multzo irekia



A multzo itxia



$A = \mathring{A}$ izanez gero An ez dago muga puntuik, baizik eta $\mathring{A}$.

$\mathring{A}$ eta $\partial(A)$ A ren barruan badaude $A = \mathring{A} \cup \partial(A)$, beraz, A^cn ez dago muga puntuik.

9 Adib

① $A = (a,b]$ $\quad \mathring{A} = (a,b) \quad \partial(A) = \{a,b\} \quad ext(A) = \mathbb{R} - [a,b]$

$A \neq \mathring{A}$ $\quad A \neq \mathring{A} \cup \partial(A)$

$\Downarrow$

ez da irekia

ez itxia.

② $B = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $\quad \mathring{B} = \emptyset \quad \partial(B) = B \cup \{0\} \quad ext(B) = \mathbb{R} - \{0\}$

$B \neq \mathring{B}$ $\quad B \neq \mathring{B} \cup \partial(B)$

ez da ez irekia

ez itxia

10 Def Izan bedi (E,d) espazio metrikoa; $A \subseteq E$ multzo bornatua da, $\exists k \in \mathbb{R}$

$\forall x,y \in A \quad d(x,y) \leq k$

11 T Baldintza nahikoa multzo batek maximoa eta minimoa izateko $\mathbb{R}$ multzoan.

$A \subset \mathbb{R}$ multzo bornatu eta itxi bada baditu maximoak eta minimoak

~~2.2~~

2.2 Espazio normaldunak

12 Def Izan bedi: $(E,+,\cdot)$ bektore-espazioa $\mathbb{R}$ gainean, $\|\circ\|: E \to \mathbb{R}$ aplikazioa norma da hiru propietate hauek betetzen baditu:

N_1 $\forall x \in E$ $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (elementu neutroa)

N_2 $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

N_3 $\forall x, y \in E$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desberdintza triangeluarra)

$(E, \|x\|)$ bikoteari espazio normadun deritzo.

13 Adb

$\mathbb{R}^m$ multzoan hiru norma hauek erabiltzen dira

a) $x \in \mathbb{R}^m$ $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_m|\}$ gorenaren norma

b) $x \in \mathbb{R}^m$ $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|$ batuaren norma

c) $x \in \mathbb{R}^m$ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$ norma euklidearra

$(2,-5,6) \in \mathbb{R}$

a) $\|(2,-5,6)\| = \max\{|2|, |-5|, |6|\} \Rightarrow \max\{6\}$

$\|(2,-5,6)\| = |2| + |-5| + |6| \Rightarrow 13$

$\|(2,-5,6)\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 6^2} \Rightarrow \sqrt{65}$

$\mathbb{R}$ multzoan hiru normak bat datoz, eta $|\cdot|$ balio absolutua da.

14 Prop

Izan bedi: $(E, \|\cdot\|)$ espazio normaduna; $d: E \times E \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|y-x\|$ aplikazioa distantzia da

15 Adib $\mathbb{R}$ multzoan, balio absolutua norma da, eta $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|y-x|$ distantzia

16 Def $(E, \|\cdot\|)$ espazio normaduna bada, $A \subseteq E$ multzo bornatua da. $\exists k \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in E \quad \|x\| \leq k$$

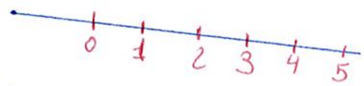
2.4 Ariketak

Analisi Matematikoa

5-

b)

$A=\mathbb{N} \to A=[0,\infty)$



$n\in\mathbb{N}$ bada, orduan, $n\in A \to n\in\mathring{A}$

$\downarrow$

$n\in\partial(A)$

$\mathcal{E}(n,r)\not\subset A \quad \forall r>0 \Rightarrow n\in\partial(A) \quad \forall n \Rightarrow \mathring{A}=\emptyset$

n beti zentro izango balitz ondoko zenbaki ia guztiak A^c multzoan egongo dira.

$x\in A^c \to x\notin\mathbb{N} \to ext(A)$

$\mathcal{E}(x_0,r_0)\subset A^c \Rightarrow x\in ext(A)$

$\mathring{A}=\emptyset$, $\partial(A)=\mathbb{N}$, $ext(A)=\mathbb{R}-\{\mathbb{N}\}$

2.4 Ariketak

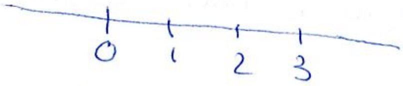
Analisi Matematikoa

5-

b) $A = \mathbb{N}$

$n \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}$

$A = [0, \infty)$



0 A-ren barruan dago eta A-ren behe borna da beraz A multzoko zenbakirik txikiena da.

Beraz, 0 A-ren muga puntu da.

$\forall n \in \mathbb{N}$ n zentrotzat hartzen badugu, bere ondoko zenbaki ia guztiak A^c multzokoak izango dira

b)

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in A$ — $n \in \mathring{A}$ / $n \in \partial(A)$

$\mathcal{E}(n, r) \not\subset B \quad \forall r > 0 \Rightarrow n \in \partial(B) \Rightarrow \forall n \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$

n beti zentro izanda bere ondoko zenbakiak A^c multzoan egongo dira.

$x \in A^c \Rightarrow x \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{ext}(A)$

$r = \frac{1}{2} \min\{d(x, n), n \in \mathbb{N}\}$

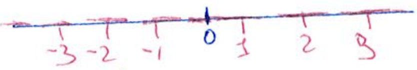
$\exists \mathcal{E}(x_1, r_0) \in A^c \Rightarrow x \in \text{ext}(A)$

$\mathring{A} = \emptyset$

$\partial(A) = A = \mathbb{N}$

$\text{ext}(A) = \mathbb{R} - \{\mathbb{N}\}$

d)



$A=\mathbb{Q}$

$n\in\mathbb{Q}$ bada, orduan, $n\in A$ $\rightarrow n\in\mathring{A}$

$\searrow n\in\partial(A)$

$\mathcal{E}(n,r)\in A \quad \forall r>0 \Rightarrow n\in\mathring{A} \Rightarrow \mathring{A}=\mathbb{Q}$

n zentrotzat hartuz gero ia beti ondoko zenbakii guztiek $\mathring{A}$ multzoan egongo dira.

$x\in A^c \quad x\in\mathbb{Q} \rightarrow ext(A)$

$r_0=\frac{1}{2}\min\{d(x,n), x\in\mathbb{Q}\}$

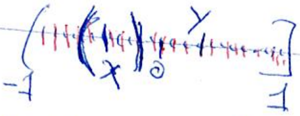
$\mathcal{E}(x,r_0)\Rightarrow x\in ext(B)$

$\mathring{A}=\mathbb{Q}$, $\partial(A)=$, $ext(A)=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

⑤

e)

$A = (-1, 1] \cap \mathbb{Q}$



$x \in \mathbb{Q}$: $\cancel{[-1 < x < r = \frac{1}{2}\min\{|x-(-1)|, |x-1|\}}$ $\forall r > 0 \quad \mathcal{E}(x,r) \not\subset A \Rightarrow x \notin \mathring{A} \Rightarrow x \in \partial(A)$

$\mathcal{E}(x,r) \subseteq (-1, 1] \to x \in \mathring{A}$

$x = -1 \quad \forall r > 0 \quad \mathcal{E}(-1,r) = (-1-r, -1+r)$ eta $(-1-r, -1) \subset A^c$

$(-1, -1+r) \subset A \Rightarrow -1 \in \partial(A)$

$x = 1 \quad \forall r > 0 \quad \mathcal{E}(1,r) = (1-r, 1+r)$ eta $(1-r, 1) \subset A$

$(1, 1+r) \subset A^c \Rightarrow 1 \in \partial(A)$

$x < -1 \quad \exists r = \frac{1}{2}\min\{|x-(-1)|, |x-1|\} \quad \mathcal{E}(x,r) \subseteq A^c \quad x \in ext(A)$

edo

$1 < x$ $\quad \mathring{A} = (1, 1) \quad \partial = \{-1, 1\} \quad ext(A) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$\mathring{A} = \emptyset \quad A \quad \partial(A) = [-1, 1] \quad ext(A) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2.4 Ariketak

1. Izan bitez E multzo ez-huts bat eta $d : E \times E \to \mathbb{R}$ aplikazio hau:
$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$
Froga ezazu d metrika dela (*metrika diskretua*).

2. Determina itzazu bola irekia, itxia eta esfera metrika diskretua erabiliz, $a \in E$ izanik eta $r = 0,1$, $r = 1$ edo $r = 1,01$ kasuetan.

3. Izan bitez $\mathbb{R}^2$ multzoa eta $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aplikazioa, non
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$
baita. Froga ezazu aplikazio hori norma dela (norma euklidearra).

4. Irudika ezazu $B((0,0),1)$ bola hurrengo kasuetan:
   a) $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ (norma euklidearra);
   b) $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$ (gorenaren norma);
   c) $\|(x,y)\| = |x| + |y|$ (baturaren norma).

5. Determina itzazu multzo hauen $\mathring{A}$, $\text{ext}(A)$ eta $\partial(A)$:
   a) $A = \{a,b,c\}$; b) $A = \mathbb{N}$;
   c) $A = \{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\}$; d) $A = \mathbb{Q}$;
   e) $A = (-1,1] \cap \mathbb{Q}$; f) $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
   g) $A = (-\infty,1] \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; h) $A = (a,b]$.

6. Esan ezazu baieztapen hauek egiazkoak ala faltsuak diren $\mathbb{R}$ multzoan, eta zergatik:
   a) multzo finitu oro itxia da;
   b) multzo batek maximoa badu, itxia da;
   c) multzo itxi orok baditu maximoa eta minimoa;

7. Froga ezazu $\mathbb{R}$ multzoaren azpimultzo ireki ez-huts guztiek zenbaki arrazionalak eta irrazionalak badauzkatela.

8. Irudika itzazu $\mathbb{R}^2$ espazioaren azpimultzo hauek, eta esan ezazu irekiak, itxiak edo bornatuak diren; kalkula itzazu multzoen diametroak:
   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x < 3 \text{ eta } 0 \leq y \leq 4\}$;
   b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3 \text{ eta } y = 5\}$;
   c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x < 3 \text{ eta } y = 5\}$;
   d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y) - (0,3)\| > 1\}$.

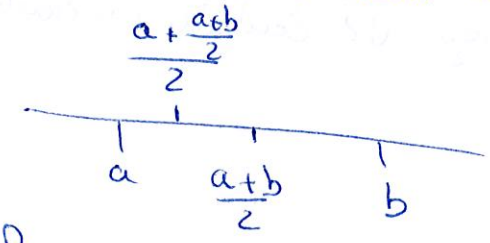
9. Froga ezazu $a \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ multzoaren goi-bornea bada eta $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{E}(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ bada, $a = \sup(A)$ izango dela.

10. Izan bedi $A \subseteq \mathbb{R}$ multzo irekia, ez-hutsa eta bornatua. $a = \inf(A)$ eta $b = \sup(A)$ badira, egiazta ezazu $a \notin A$ eta $b \notin A$ beteko direla.

(3)

$a, b \in \mathbb{Q}$ $\quad a \neq b$

(a,b) tartean ∞ zenbaki arrazional ezberdin daude.



Beraz, a eta ~~b~~ zenbaki arrazionalen artean ~~dauda~~ zenbat zenbaki arrazional egon daitezkeen konprobatzeko horrengo eragiketa egingo dugu.

Lehenik a eta b puntuen erdiko puntua lortuko dugu: $\frac{a+b}{2}$ Lortutako zenbakia ere arrazionala izango da. Bi zenbaki arrazionalen artean batuketa eta zatiketa eginez beste zenbaki arrazional bat lortzen baita.

Ondoren, a eta lortutako zenbakiaren erdiko puntua lortuko dugu: $\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{2a+a+b}{4} = \frac{3a+b}{4}$

Beraz, $\frac{(n-1)a+b}{2^n}$ egin ezkero $\forall n \geq 0$ izanik $n \to \infty$ra joanda ere ez da inoiz a izango, hau da, $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)a+b}{2^n}$ a-rantz joko du. Beraz, a eta b artean infinitu zenbaki arrazional daudela frogatu dugu.

(5)

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

lehenik eta behin suposatuko dugu $\sqrt{2}$ zenbaki arrazionala dela, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\qquad \sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Suposatuz $p, q > 0$ direla.

Beraz, hurrengo hau beteko da, $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$

$$p^2 - pq = 2p^2 - pq \Rightarrow p(p-q) = q(2q-p) \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2q-p}{p-q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}$$

ikusiko dugu $0 < p-q < q$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow 1 < \left|\frac{p}{q}\right|^2 < 4 \Rightarrow 1 < \frac{p}{q} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q < p < 2p \Rightarrow 0 < p-q < q$$

ikusi dugun bezala $\sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}$ betetzen da, eragiketa bera egiten jarraituko bagenu, ~~...~~ hori beteko duten infinitu proposizio lortuko genituzke. Hori gezurra denez, hasierako suposizioa gezurra edo faltsua da. Beraz $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ izango da.

⑥

$\mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} -x & x<0 \\ x & 0\leq x \end{cases}$$

a) $|a| \geq 0 \quad \forall a$

$|x|$ ellin gertatzen den bezala $a<0$ denean $|a|$-ren balioa $-a$ izango da, hau da, $a=-2$ denean $|a|=-a \to -a=-(-2)=2$ eta $a\geq 0$ denean ~~a-ren balioa~~ $|a|=a$ izango da, beraz, $a=2$ denean $|a|=a=2$ izango da beraz edozein a denean $|a|\geq 0$ betetzo da.

b) $|a|=0 \quad a=0$

$|x|$-ellin bezala, ~~$|x|\geq x$~~ $0\leq x$ denean $|x|=x$ balioa hartzen du, hau da $|a|=0$ denean $a=0$ izango da $|a|=a$ betetzo baita.

c)

$m\geq 0$ bada, $|a|\leq m \Leftrightarrow -m\leq a\leq m$

$m\geq 0$ bada, eta $|a|\leq m$ bada, betetzo da esan dugulako balio absolutuak $-a \to a\leq 0$ denean hartzen duela. Beraz $a\leq m$ betetzen bada m-ren negatiboa ~~era~~ a baino txikiagoa izango da.

$a=2 \qquad m=4 \to |a|\leq m$ eta $m\geq 0$ betetzen dira. $|a|=2$ eta $-m=-4$ beraz $-m\leq a\leq m$ betetzen da. $-4\leq 2\leq 4$ baita.

1) $A = \{ x \in \mathbb{R} / |x| \leq 5 \}$

Propietate hori betetzen duen tartea $[-5, 5]$ dira x-en balioa.

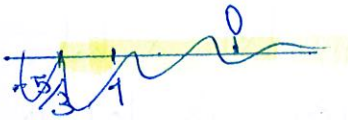
2) $B = \{ x \in \mathbb{R} / |x+2| \geq 1/3 \}$

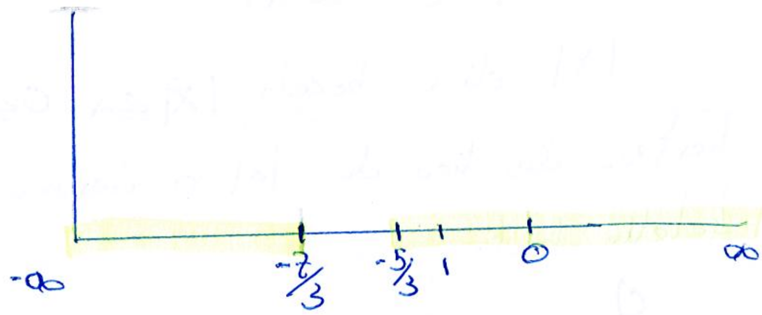
$x + 2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$ $\quad -x - 2 \geq \frac{1}{3} \rightarrow -x - 2 = \frac{1}{3}$

$x = -\frac{7}{3}$

$\cancel{-x-2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \rightarrow x = -\frac{7}{3}}$

$(\infty, -\frac{7}{3}] \cup [-\frac{5}{3}, \cancel{+\frac{7}{3}}\ \infty]$ tartea

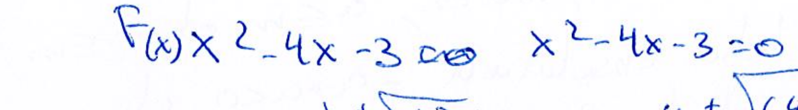




3) $C = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x - 3 > 0 \}$

$F(x)\, x^2 - 4x - 3 \cancel{=0}$ $\quad x^2 - 4x - 3 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \begin{cases} 4'65 = x_1 \\ x_2 = -0'64 \end{cases}$$



$x = 0$ denean, $F(0) = -3$ da beraz, $(2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7})$ ~~da~~ tartean funtzioa negatiboa da beraz, $(-\infty, 2-\sqrt{7}) \cup (\infty, 2+\sqrt{7})$ ~~eta~~ funtzioa baldintza betetzen du

7

4) $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^{\pi} > e\}$

$x^{\pi} = e \Rightarrow x = \sqrt[\pi]{e} \simeq 1'38$

$x \geq 1'38$ ~~denean~~ baino handiagoa denean ~~bea~~ betetzen da propietatea. Beraz, $(1'38, \infty)$ izango da tartea