Analisi Matematikoa
Ariketa ebatziak

Irati Puyadena Jauregi

2017ko abenduaren 15a

Aurkibidea

1 Gaia
Ariketa ebatziak

1.1 Zenbaki arruntak eta osoak

1.9 Froga ezazu, indukzioa erabiliz, $n^3 - n$ zenbakia beti dela 3ren multiploa.

Froga.

$n = 1$ denean, $1^3 - 1 = 0 \Rightarrow 3k = 0 \Rightarrow k = 0$

$n = 2$ denean, $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$

Demagun, $n^3 - n = 3k$ dela, frogatu behar dugu $(n+1)^3 - (n+1) = 3l$, $l \in \mathbb{Z}$

$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = \underbrace{n^3 - n}_{IH} + 3n^2 + 3n = \underbrace{3k}_{IH} + 3n^2 + 3n =$

$3(k + n^2 + n) = 3l$, k eta $n \in \mathbb{Z}$ direnez, $l \in \mathbb{Z}$

Hortaz, frogatuta geratzen da $n^3 - n$ zenbakia beti dela 3-ren multiploa.

1.2 Zenbaki konplexuak

16.10 Irudika ezazu planoan erlazio hau betetzen duen zenbaki konplexuen multzoa:
$|z+i| \leqslant 3$

Ebazpena.

$z = x + yi$ bada, orduan, $z + i = x + yi + i = x + (y+1)i$ izango da.

Orain, $z + i$-ren modulua kalkulatuko dugu.

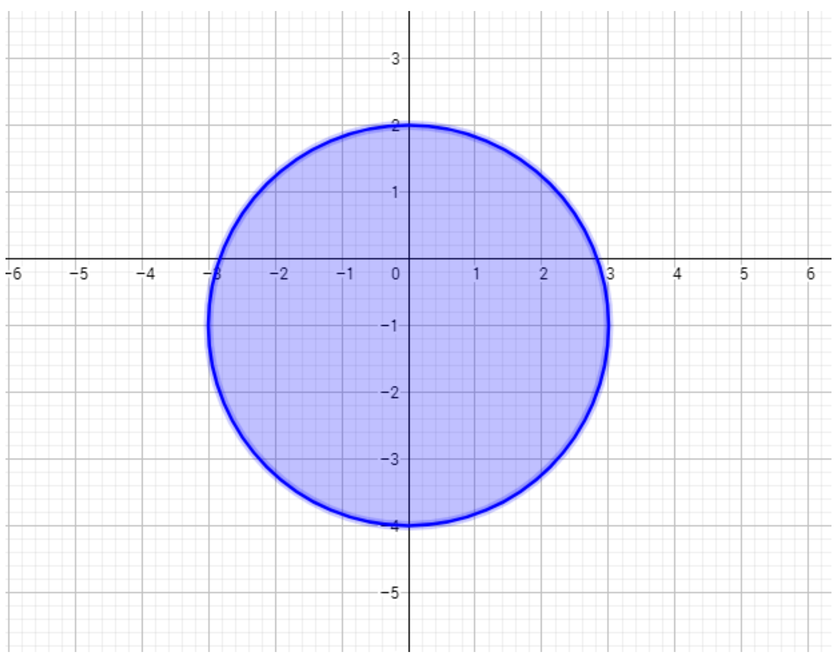
$|z+i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1}$

$\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} \leqslant 3$

$x^2 + y^2 + 2y + 1 \leqslant 9 \Rightarrow x^2 + y^2 \leqslant 8 - 2y$

Hortaz, zirkunferentzia bat da. Bere zentroa $(0, -1)$ puntua da eta erradioa 3.

Hau da bere grafikoa:



Zirkunferentziaren marrako eta barneko puntuek betetzen dute ekuazioa, horiek baitira zentrotik 3 edo distantzia txikiagora dauden puntuak.

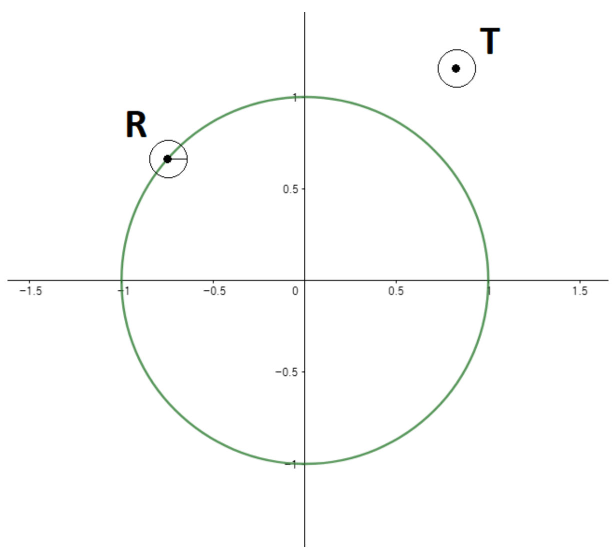
2 Gaia
Ariketa ebatziak

2.1 Topologia

10.3 Irudika ezazu $\mathbb{R}^2$ espazioaren azpimultzo hau, eta esan ezazu irekia, itxia edo bornatua den:
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 = 1\}$

Ebazpena.

Gure ekuazioa zirkunferentzia batena da, zentroa (0,0) eta erradioa 1 izanik.



Hasteko, Cren barneko puntuak aztertuko ditugu.

$\forall x \in C \;\; \forall \varepsilon > 0$

C multzoaren barneko edozein puntu hartuta, R adibidez, bere inguruko puntu guztiak ez daude Cren barnean.

$B(R, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$, adibidez $R \in C$.

$B(R, \varepsilon) \cap C^c \neq \emptyset$, adibidez, bolaren barruan eta R-ren eskuinaldean dauden puntuak.

Hortaz, $\overset{\circ}{C} = \emptyset \Rightarrow$ Ondorioz, $C \subseteq \partial(C)$ da.

Orain, Cren osagarriaren puntuak aztertuko ditugu, adibidez, T puntua.

$\forall T \in C^c \quad \varepsilon_o = \dfrac{1}{2} \min \{d(T,y)/\forall y \in C\}$

$B(T, \varepsilon_o) \cap C = \emptyset$

Hori T puntuarekin betetzen den moduan, Cren osagarriaren beste puntu guztiekin beteko da. Hortik ondorengoa ondoriozta dezakegu: $ext(C) = C^c$

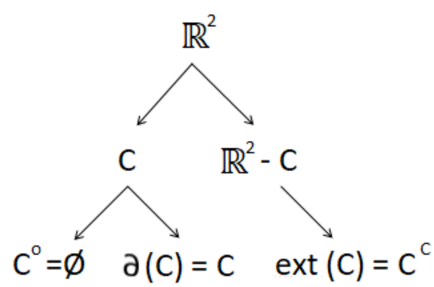
Cren osagarriaren puntu guztiak kanpo puntuak direnez, ez dira muga puntuak, hortaz, muga puntu guztiak Cren barneko puntuak dira, hots: $\partial(C) = C$

Guzti hau kontuan izanik, azpimultzoa zein motatakoa den jakiteko, teorian oinarrituko gara.

Azpimultzoa irekia da $C = \overset{\circ}{C}$ bada.

Azpimultzo itxia da $C = \overset{\circ}{C} \cup \partial(C)$ bada.

Gure kasuan, bigarren baldintza betetzen da, baina ez lehenengoa. Hortaz, C azpimultzoa itxia da, baina ez irekia.



Horrez gain, esan daiteke C azpimultzoa bornatua dela, honakoa betetzen delako:

$C \in ((0,0), 2)$

3 Gaia
Ariketa ebatziak

3.1 Segidak $\mathbb{R}$ multzoan

4.15 Kalkula ezazu segida honen limitea:

$$\frac{n^3 + 4n + 2}{3n^2 + 7}$$

Ebazpena.

Polinomioen arteko zatiduraren limitea aplikatuko dugu; honela dio:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_o}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + ... + b_1 n + b_o}$$

Zenbakitzaileko eta izendatzaileko maila handieneko gaiak konparatu behar dira.

$k > l$ denean, segidaren limitea ∞ da.

$k = l$ denean, segidaren limitea $\frac{a_k}{b_l}$ da.

$k < l$ denean, segidaren limitea 0 da.

Kasu honetan, $k = 3$ eta $l = 2$ izango lirateke.

$k > l$ betetzen denez, gure limitea ∞ da.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + 4n + 2}{3n^2 + 7} = \infty$$

4 Gaia
Ariketa ebatziak

4.1 Serieak $\mathbb{R}$ multzoan

4.37 Determina ezazu gai orokor hau duen seriearen izaera:

$$1 + \frac{1}{1.001} + \frac{1}{2.001} + \frac{1}{3.001} + \ldots$$

Ebazpena.

Seriea honako adierazpenarekin ordezkatu daiteke:

$\sum\limits_{n} \dfrac{1}{1000(n-1)+1}$, n-ren lehen balio posiblea 1 izanik.

Gai positiboko seriea da, $\forall n \geq n_o \;\; a_n > 0$ betetzen delako.

Esku artean dugun seriea, $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{n}$ seriearen antzekoa da.

$\sum\limits_{n} \dfrac{1}{n}$ serieak ez du Cauchy-ren irizpidea betetzen. Hau da, serie harmonikoaren batura partzialen $\{S_n\}$ segida ez da konbergentea; ondorioz, $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{n}$ seriea ez da konbergentea.

Konbergentea ez denez, aukera posible bakarra dibergentea izatea da.

$\sum\limits_{n} \dfrac{1}{n}$ serie harmoniko dibergentea denez, $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{1000(n-1)+1}$ seriea ere harmoniko dibergentea izango da.