41) Adibidea

$$\ln z = \ln(\rho e^{\frac{\pi}{3}i}) = \ln\rho + (\frac{\pi}{3} + 2\pi k)i \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$k=0$ denean $\ln$-ren balio nagusia: $\ln\rho + \frac{\pi}{3}i$

2. Gaia: Topologia

2.1 Espazio metrikoa

1) Definizioa

Izan bedi E multzo ez-hutsa $d: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa distantzia edo metrika da propietate hauek betetzen baditu.

M1) $\forall x,y \in E \quad d(x,y)=0 \iff x=y$ M4) $\forall x,y \in E \quad d(x,y) \geq 0$

M2) $\forall x,y \in E \quad d(x,y) = d(y,x)$

M3) $\forall x,y,z \in E \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (propietate triangeluarra)

2) Adibidea

a) $\mathbb{R}^m = \overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{m \text{ aldiz}}$ multzoa da. $x \in \mathbb{R}^m \Rightarrow x = (x_1, x_2, \dots x_m)$ mango da,

non $x_i \in \mathbb{R}$ den $i = 1, \dots, m$

x_i: x-ren koordenatuak dira

$\mathbb{R}^m$ multzoa euklidearra honela definitzen da:

$x,y \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2 \dots x_m)$ eta $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

$$d(x,y) = d[(x_1,x_2,\dots,x_m),(y_1,y_2,\dots y_m)] = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_m-y_m)^2}$$

Adibidez, $\mathbb{R}^3$ multzoan

$(1,-2,3),(0,2,-1)$ puntuen arteko distantzia:

$$d((1,-2,3),(0,2,-1)) = \sqrt{1+16+16} = \sqrt{31}$$

b) Sare batean honela definituko dugu distantzia:

$(i,j),(k,l) \in S \quad d((i,j),(k,l)) = |i-k| + |j-l|$

c) $E \neq 0$ emanik, $d: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa honela definituko dugu:

$x,y \in E \quad d(x,y) \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$ distantzia diskretua

Froga

M1 $\quad x,y \in E \quad d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

$\quad x,y \in E \quad x=y \Rightarrow d(x,y)=0$

M2 $\quad x,y \in E \quad \left.\begin{array}{l} x=y \Rightarrow d(x,y)=0 \\ y=x \Rightarrow d(y,x)=0 \end{array}\right\} d(x,y)=d(y,x)$

$\quad \left.\begin{array}{l} x\neq y \Rightarrow d(x,y)=1 \\ y\neq x \Rightarrow d(y,x)=1 \end{array}\right\} d(x,y)=d(y,x)$

M3 $\quad \forall x,y,z \in E$

Aukera posibleak aztertu.

d) $E=\mathbb{R}$ denean

$x,y\in\mathbb{R}$ $\quad d(x,y)=\sqrt{(y-x)^2}=|y-x|$ distantzia euklidearra

3) Definizioa

(E,d) espazio metrikoa emanik, $a\in E$ puntua harturik multzo hauek definituko ditugu, $r\geq 0$ izanik,

1) Bola irekia: $B(a,r)=\{x\in E \,/\, d(a,x)<r\}$

2) Bola itxia: $\bar{B}(a,r)=\{x\in E \,/\, d(a,x)\leq r\}$

3) Esfera: $S(a,r)=\{x\in E \,/\, d(a,x)=r\}$

4) Adibidea

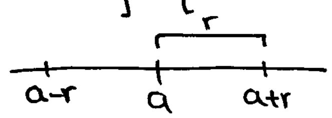
a) $\mathbb{R}^2$ $\quad B((-1,2),3)$

$B((-1,2),3)=\{(x,y)\in\mathbb{R} \,/\, d((1,2)(x,y))<3\}=\{(x,y)\in\mathbb{R} \,/\, (x-1)^2+(y-2)^2<9\}$

b) $\mathbb{R}$ multzoan bolak ingurunea dira eta $E(a,r)$ idatziko dugu.

$E(a,r)=\{x\in\mathbb{R} \,/\, d(a,x)<r\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, |x-a|<r\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, -r<x-a<r\}=$

$=\{x\in\mathbb{R} \,/\, a-r<x<a+r\}=(a-r,a+r)$



$\bar{E}(a,r)=[a-r,a+r]$ eta $S(a,r)=\{a-r,a+r\}$

$E(-2,3)=(-5,1)$

5) Definizioa

Izan bitez (E,d) espazio metrikoa eta $A\subseteq E$ azpimultzo bat

a) $x\in E$ A-ren barne-puntua da $\exists r>0 \,/\, B(x,r)\subset A$ edo $B(x,r)\cap A^c=\emptyset$

b) $x\in E$ A-ren kanpo-puntua da $\exists r>0 \,/\, B(x,r)\subset A^c$ edo $B(x,r)\cap A=\emptyset$

c) $x\in E$ A-ren muga-puntua da $\forall r>0$ $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$ eta $B(x,r)\cap A^c\neq\emptyset$

6) Definizioa

Izan bitez (E,d) espazio metrikoa eta $A\subseteq E$ azpimultzo bat

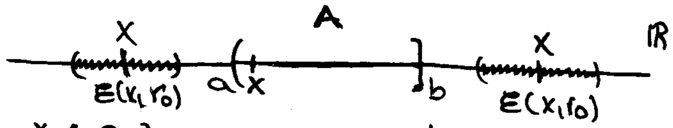
a) A-ren barne-puntu guztiek A-ren barnealdea osatzen dute eta $\mathring{A}$ idatziko dugu.

b) A-ren kanpo-puntu guztiek A-ren kanpoaldea osatzen dute eta $ext(A)$ idatziko dugu.

c) A-ren muga-puntu guztiek A-ren muga osatzen dute eta $\partial(A)$ idatziko dugu.

7) Adibidea

a) $(\mathbb{R},d)$ espazio metrikoan $A=(a,b]$ multzoa dugu



$x\in\mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} x<a \\ x>b \end{matrix}\right] x\in A^c$ $\left.\begin{matrix} r_0=\frac{1}{2}d(x,a) \\ r_0=\frac{1}{2}d(x,b)\end{matrix}\right\}$ $E(x,r_0)\subset A^c$ betetzen da, berat kanpo-puntuak dira

$a<x<b \longrightarrow x\in A$ $\quad r_0=\frac{1}{2}\cdot\min\{d(x,a),d(x,b)\}$ hartut $E(x,r_0)\subset A$ betetzo da.

$x=b \longrightarrow x\in A$

$\forall r>0 \quad E(b,r)=(b-r,b+r)$

$\forall x \quad b-r<x<b \quad x\in A \longrightarrow E(b,r)\cap A\neq\emptyset$

$\forall x \quad b<x<b+r \quad x\in A^c \longrightarrow E(b,r)\cap A^c\neq\emptyset$

$\Downarrow$

muga-puntua da

8) Definizioa

(E,d) espazio-metrikoa emanik, $A\subseteq E$ azpimultzoa hartu

a) A multzoa irekia da $A=\mathring{A}$ bada.

b) A multzoa itxia da $A=\mathring{A}\cup\partial(A)$ bada

9) Adibidea

$A=[a,b)$ $\quad B=[a,b]$ $\quad C=(a,b)$

$\partial(A)=\{a,b\}$ $\quad \partial(B)=\{a,b\}$ $\quad \partial(C)=\{a,b\}$

ez da irekia $\quad$ itxia da. $\quad$ irekia da.

ez da itxia

10) Definizioa

(E,d) espazio metrikoa emanik, $A\subseteq E$ multzoa bornatua $\exists k\geq 0$ / $\forall x,y\in A \quad d(x,y)\leq k$ bada.

11) Teorema

$\mathbb{R}$ multzoan maximoa eta minimoa existitzeko baldintza nahikoa $A\subset\mathbb{R}$ multzoa bornatua eta itxia bada, A multzoak maximoak eta minimoak izango ditu.

2.2 Espazio Normaldunak

12) Definizioa

Izan bedi $(E,+,\cdot)$ bektore espazioa $\mathbb{R}$ gainean $\|\cdot\|\cdot E \to \mathbb{R}$ aplikazioa norma da propietate hauek baditu:

N1 $\forall x \in E$ $\|x\| = 0 \longleftrightarrow x = \theta_E$ (elementu neutroa) bada.

N2 $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

N3 $\forall x, y \in E$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\boxed{\text{distantzia (bi puntu)} \neq \text{norma (puntu bat)}}$

orduan $(E, \|\cdot\|)$ bikoteari espazio normaldun deritzo.

13) Adibidea

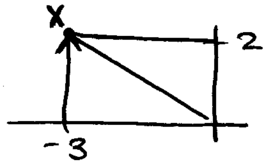
$\mathbb{R}^m$ espazioan, $x = (x_1, x_2 \cdots x_m)$ bada,

$\|x\| = \|(x_1, x_2 \cdots x_m)\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|\}$ gorenaren norma

$\|x\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_m)\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$ baturaren norma

$\|x\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_m)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$ norma euklidearra

$$\|(-3,2)\| = \begin{cases} 3 & \text{gorena} \\ 5 & \text{batura} \\ \sqrt{13} & \text{euklidearra} \end{cases}$$



Beraz, ondorioztatu daiteke $\forall x \in E$ $\|x\| \geq 0$ izango dela.

14) Propietatea

$(E, \|\cdot\|)$ espazio normalduna emanik, $d: E \times E \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|y - x\|$ aplikazioa distantzia da. Ondorioz:

Espazio normaldunak espazio metrikoak dira.

15) Adibidea

$\mathbb{R}$ multzoan $|\cdot|$ balio absolutua norma da

$|-3| = 3$

$d(x,y) = |y - x|$

$d(-3,2) = |2 - (-3)| = |2+3| = 5$

16) Definizioa

$(E, \|\cdot\|)$ espazio normaldunean, $A \subset E$ multzoa bornatua da

$\exists k \geq 0 \,/\, \forall x \in A$ $\|x\| \leq k$ bada.