Analisi matematikoa

1. gaia: Zenbaki-Multzoak

1.1 Zenbaki arruntak eta osoak

1 Def: P multzoa $0 \in P$ eta $S: P \to P$ doan, $S(x) = x+1$ (horrengoa) aplikazioa emanik baldintza hauek betetzen badira

a) $\forall x \in P$ $S(x) \neq 0$ (zero ez da inongo elementuren horrengoa)

b) $\forall x, y \in P$ $x \neq y$ bada, $S(x) \neq S(y)$ da (elementu desberdinek horrengo desberdinak izango dituzte, S aplikazio injektiboa

c) indukzio-axioma

$$A \subseteq P, \text{ non } 0 \in A \quad x \in A \Rightarrow S(x) \in A \text{ bete}, A = P$$

P multzoa zenbaki arrunten multzoa da, eta $\mathbb{N}$ idatziko dugu.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

Indukzioaren bidez jakin dezakego prozedura etengabe errepikatu dezakegula, zeroren horrengo zenbaki guztiek balio dutelako.

2 Prop: $\mathbb{N}$ multzoa itxia da + batuketarako eta $\cdot$ biderketarako, hau da, zenbaki arrunt batekin beste zenbaki arrunt bat lortuko dugu.

3. Def: $\mathbb{N}$ multzoan $\leq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioa honela definituko da. ~~$\forall a, b \in \mathbb{N}$ $a \leq b / \exists c \in \mathbb{N} / a+c=b$~~

$$\forall a\ b \in \mathbb{N} \quad a \leq b / \exists c \in \mathbb{N} / a+c=b$$

4 Prop: $\mathbb{N}$ multzoa ongi ordenatua da, beraz, $\mathbb{N}$-ren azpimultzo ez huts guztiek lehen elementua dute.

5 Prop: Indukzio-printzipioa

Propietate bat $k \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen bada eta $k \leq n \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen dela pentsatuz, eta $(n+1) \in \mathbb{N}$ zenbakirako beteko dela frogatzen bada, propietatea k edo handiago diren zenbaki guztietarako beteko da.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ P(k) \text{ egiazko da} \\ 2)\ n \geq k \quad P(n) \text{ egiazkoa} \Rightarrow P(n+1) \text{ egiazkoa} \end{array}\right\} \forall n \geq k \quad P(n) \text{ egiazkoa}$$

Froga

Absurdura eramanez frogatuko dugu.

Demagun k edo handiagoa diren zenbaki guztiek ez dutela propietatea betetzen, hau da, zenbakiren batek ez duela propietatea betetzen.

Orduan multzo hau osa genezake

$$F = \{ m \in \mathbb{N} / m \geq k \text{ eta } P(m) \text{ faltsua} \}$$

$F \neq \emptyset$ eta $F \subset \mathbb{N} \Rightarrow$ badira k baino handiago den zenbakiak ez dituzte betetzen propietateak, eta F multzoak lehenengo zenbaki bat du, $\mathbb{N}$ ongi ordenatuta dagoelako.

4 prop: F multzoa ongi ordenatuta dagoenez, F multzoko ez huts guztiek dute lehen elementua.

Beraz, honako hau betetzen da:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \ P(k) \text{ egiazkoa da} \\ m_1 \ P(m) \text{ faltsua} \end{array}\right\} m_1 \neq k_1 \Rightarrow m_1 > k \Rightarrow m_1 - k \geq k \Rightarrow$$

$\Rightarrow m_1 - 1 \in \mathbb{N}$

Bigarren hipotesian, $n = m_1 - 1 \geq k$ hartuz gero, $P(n) = P(m_1 - 1)$ egiazkoa da, $P(n+1)$ egiazkoa da eta $P(n+1) = P(m_1)$ egiazkoa da.

Hori da kontraesana $P(m_1)$ aldi berean faltsutzat zein egiazkotzat hartzea.

Ondorioz, ez dute beti "k baino handiagoak diren zenbaki batzuk propietatea betetzen.

Hortaz, k baino handiago diren zenbaki guztiek betetzen dute propietatea. Hau da, $\forall n \geq k$, $P(n)$ egiazkoa da.

Adb

6 A

Har ditzagun $a_n = ar^{n-1}$ zenbakiak, $a, r \in \mathbb{R}$ eta $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$.

Frogatuko dugu lehenengo n zenbaki horien batura, S_n, batura hau dela:

$$S_n \begin{cases} na & r = 1 \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \end{cases}$$

$r \neq 1$ denean, froga indukzioa erabiliz egingo dugu, moduzo hau, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ denean, $a_1 = a \cdot 1^0 = a$, $a_2 = a \cdot r^1 = ar = a$

beraz, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underbrace{a + a + a \dots + a}_{n} = na$

1) $P(k)$

2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geq k$ $P(n)$

1)

Ez beda ezer esaten lehenengo zenbaki hori beti izango da bat.

<u>$n=1$</u> denean, $S_{(1)} = a_1 = a \cdot r^0 = a$ (ezkerreko atala)

$$S_{(1)} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a\cancel{(1-r)}}{\cancel{1-r}} = a \text{ (eskuineko atala)}$$

Beraz berdintza betetzen da.

$n=2$ denean,

$$S_{(2)} = a_1 + a_2 = a + ar = a(1+r)$$

$$S_{(2)} = \frac{a(1-r^2)}{1-r} = \frac{a\cancel{(1-r)}(1+r)}{\cancel{1-r}} = a(1+r)$$

$n=3$ denean,

$$S_{(3)} = a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = a(r^2+r+1)$$

$$S_{(3)} = \frac{a(1-r^3)}{1-r} = \frac{a(r^2+r+1)\cancel{(1-r)}}{\cancel{1-r}} = a(r^2+r+1)$$

Beraz, ikusi dugun bezala berdintza $\forall n$-tan beteko da $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) $n \geq 1$ pentsatuko dugu $\underline{S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}}$ egia dela;
eta frogatu beharko dugu

$\underline{S_{n+1} = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}}$ gezurra dela

AM

$$S_{n+1} = \underbrace{a_1+a_2+\dots+a_n}_{S_n}+a_{n+1} = \underbrace{S_n+a_{n+1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}+a_{n+1}}_{\text{Indukzio-hipotesia}} =$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}+ar^n = \frac{a(1-r^n)+ar^n-ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a(1-r^n+r^n-r^{n+1})}{1-r} =$$

$$= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

7 Def

Zenbaki osoen multzoa $m=n+x$ ekuazioen soluzioen multzoa da, $m,n \in \mathbb{N}$ izanik. Hau da, $\mathbb{Z} = \{\dots -3,-2,-1,0,1,2,3\dots\}$ da zenbaki osoen multzoa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ eta $\mathbb{Z}$ ez da ongi ordenatua, beraz, bez du hasierako zenbakirik.

8 Prop

$\mathbb{Z}$ multzoa itxia da + batuketarako, · biderketarako eta - kenketarako.

9 Def

$\mathbb{Z}$ multzoako $\leq$ ordena-erlazioa honela definitzen da.

$\forall a,b \in \mathbb{Z}$ $a \leq b$ da $\exists c \in \mathbb{N} / a+c=b$ betetzen badu.

Zenbaki arrazionalak

10 Def Zenbaki arrazionalen multzoa $nx=m$ ekuazioen soluzioen multzoa da, non $m,n \in \mathbb{Z}$ $n>0$ eta gainera $ZKH\{m,n\}=1$ diren.

Hau da, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} / m,n \in \mathbb{Z}, n>0$ eta $\frac{m}{n}$ laburtezina

Hortik ondoriozta daiteke $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ dela.

11 Prop $\mathbb{Q}$ multzoa itxia da, + batuketarako, · biderketarako, - kenketarako eta / zatiketarako. Zati zero izan ezik.

12 Def $\mathbb{Q}$ multzoa $\leq$ ordena erlazioa honela definituko dugu

$\forall \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ izango da, $m \cdot q \leq n \cdot p$ denean betetzen da.

Zenbaki osoak direnez 4 zenbaki osok $m \cdot q \leq n \cdot p$ betetzen badute $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ ere.

Hortik ateratzen da zenbaki arrazionalak zuzen batean ordena dezakegu.

13. Prop $\mathbb{Q}$ multzoak propietate hauek ditu:

1) $\mathbb{Q}$ multzoa zenbakigarria da, horrek esan nahi du $\mathbb{Q}$ multzoak $\mathbb{N}$ multzoak adina elementu dituela.

2) $\forall a,b \in \mathbb{Q}$ $a \neq b$, $\exists c \in \mathbb{Q} / a < c < b$. Ondorioz, bi zenbaki arrazionalen artean infinitu zenbaki arrazional daude.

3) Zenbaki arrazionalek adierazpen hamartar finitua edo infinitua periodikoa dute.

Adb

$0'25 = \frac{3}{4}$ $\frac{1}{7} = 0'142857142857\ldots$

14 Def

$A \subseteq \mathbb{Q}$ multzoa emanik,

a) A multzoa goitik bornatua da $\exists k \in \mathbb{Q} / \forall x \in A$ $x \leq k$ betetzen badu eta k horri A-ren goi-bornea deritzo.

b) A multzoa behetik bornatua da $\exists K \in \mathbb{Q} \,/\, \forall x \in A \; K \leq x$ betetzen bada eta K horri A-ren behe bornea deritzo

c) A multzoa bornatua da (goitik eta behetik) bornatua bada, bestela multzo bornegabea dela esango dugu.

15 Adb

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

Ez da goitik bornatua, ez dagoelako zenbaki arrunt guztiak baino handiagoa den zenbaki arrazionalik.

Behetik bornatua da, $0 \in \mathbb{Q}$ existitzen delako eta $\forall x \in \mathbb{N} \; 0 \leq x$ betetzen delako

b)

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n} \,,\, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \ldots \right\}$$

zero izan ezik $= *$

behetik bornatua da, $-20\,000\,000 \in \mathbb{Q}$ eta $\forall x \in A \; -20000000 \leq x$

goitik bornatua da, $20\,000\,000 \in \mathbb{Q}$ eta $\forall x \in A \; x \leq -20\,000\,000$

ondorioz, $\mathbb{N}$ bornegabea da eta A bornatua.

1.3 Zenbaki errealak

19Def

Zenbaki errealen multzoa propietate hauek dituen zenbakien multzoa da.

a) $\mathbb{R}$ multzoa itxia da, + batuketarako, · biderketarako, - kenketarako, / zatiketarako, zati 0 izan ezik.

b) $\mathbb{R}$ multzoa ~~itxia~~ $\leq$ ordena erlazioa definituta dago.

c) $\mathbb{R}$ multzoaren $\subseteq$ bornatu guztiek gorena eta beherena dauzkate

d) $\mathbb{R}$ eta zuzeneko puntu guztien artean bijekzio bat dago

e) Zenbaki errealen adierazpen hamartarra zifra kopuru finitua, infinitua, periodikoa edo infinitu ez periodikoa dute.

Definizioz, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ eta $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Arrazionalak ez diren zenbaki irrealei irrazional deritze eta horien multzoa $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ edo $\mathbb{I}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \supset \mathbb{I}$$

$\forall x \in A \quad -20\,000\,000 \leq x$ gohitik bornatua da, $\frac{2}{20\,000\,000} \in \mathbb{Q}$

eta $\forall x \in A \quad x \leq 2$
$x \leq 20\,000\,000$

Ondorioz, $\mathbb{N}$ bornegabea da eta A bornaduna da.

16 DeF $A \subset \mathbb{Q}$ multzo bornatua emanik:

a) A-ren goi-bornerik txikiena A-ren goi-muturra edo gorena da eta sup(A) idatziko dugu.

b) A-ren behe-bornerik handiena A-ren behe-muturra edo beherena da, eta inf(A) idatziko dugu.

17A

a) $\mathbb{N}$-ren beherena zero da, $\inf(\mathbb{N}) = 0$ da.
$\mathbb{N}$-ek ez du gorenik.

b) A multzoa $= \left\{ \frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\sup(A) = 2$
$\inf(A) = 1$

$\mathbb{Q}$-rekin ez ditugu problema guztiak konpontzen:

18A

a) $x^2 = 2$ ekuazioak ez du soluziorik $\mathbb{Q}$ multzoan, $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Zuzeneko puntu guztiak ez dira arrazionalak.

c) Multzo bornatu guztiek ez dute gorenik edo beherenik $\mathbb{Q}$ multzoan.

$$E = \left\{ x \in \mathbb{Q}^+ / \ x^2 \leq 2 \right\}$$

$\sup(E) = \emptyset$
$\inf(E) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

20 Prop

$\mathbb{R}$ multzoak propietate hauek ditu

1) $\mathbb{R}$ zenbakiezina da.

2) Bi zenbaki errealen artean infinitu zenbaki arrazional eta infinitu zenbaki irrazional daude.

21 Def

$A \subset \mathbb{R}$ multzoa emanik

a) A goitik bornatua bada eta $\sup(A) \in A$ bada, goranei maximoa deritzogu eta $\max(A)$ idatziko dugu.

b) A behetik bornatua bada eta $\inf(A) \in A$ bada, beheranei minimoa deritzogu eta $\min(A)$ idatziko dugu.

22 A

a) $\mathbb{N}$-ren beherena 0 da; hau da, $\inf(\mathbb{N}) = 0 \in \mathbb{N}$; beraz, $\min(\mathbb{N}) = 0$ da.

b) $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\inf(A) = 1$ eta $\sup(A) = 2$

$1 \notin A \Rightarrow$ beraz A multzoak ez du minimorik, $\nexists \min(A)$

$2 \in A \Rightarrow \max(A) = 2$

23 T

1) $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$ multzo goitik bornatua emanik, $\alpha \in \mathbb{R}$ A-ren goren da baldin eta soilik baldin

a) $\forall x \in A \ \ x \leq \alpha$ bada (goi-bornea)

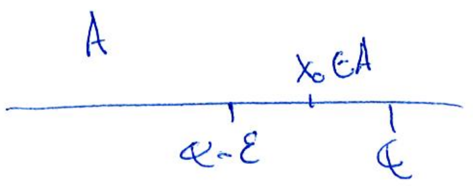
b) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x_0 \in A / \ \alpha - \varepsilon < x_0 \leq \alpha$ (txikiena)

2)

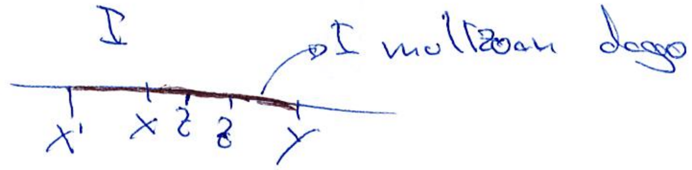
$A \subset \mathbb{R}$ multzo - behetik bornatua emanik, $\beta \in \mathbb{R}$ A-ren beheraia b.s.b

a) $\forall x \in A \quad \beta \leq x$ (behe borne

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A \,/\, \beta \leq x_0 < \beta + \varepsilon$ (handiena)



24 Def $I \subset \mathbb{R}$ multzoa tartea da $\forall x, y \in I$ $x < z < y$ bada, $z \in I$ betetzen bada.



tarte bornatu irekia: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

tarte bornatu itxiak: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

tarte bornagabe irekiak: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$

tarte bornagabe itxiak: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$

1.4 Zenbaki konplexuak

$x^2 + 1 = 0$

$x = \pm\sqrt{-1}$

$x = \pm i$

25 Def Zenbaki konplexuen multzoa hau da: $\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}$ eta $i = \sqrt{-1}\}$

a zati erreala da, b zenbaki irudikaria eta i unitate irudikaria da.

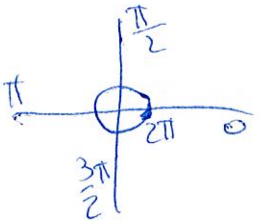
26 Def $z = a + bi$ eta $w = c + di$ zenbaki konplexuak berdinak dira, $z = w$, $a = c$ eta $b = d$ direnean

27 Def $z = a + bi \in \mathbb{C}$ emanik

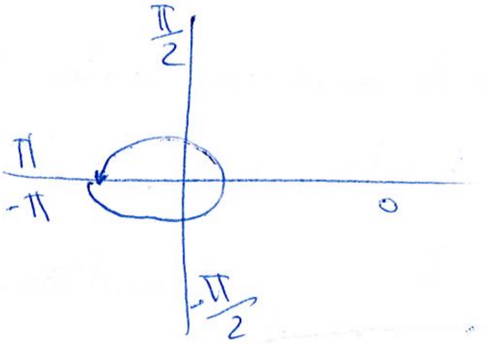
$\sqrt{a^2 + b^2}$ balioari z-ren modulua deritzo eta ρ edo $|z|$ idatziko dugu.

arctan b/a balioari z-ren argumentu deritzo eta θ edo $\arg(z)$

$\theta \in (-\pi, \pi]$ edo $\theta \in [0, 2\pi)$ denean, argumentu nagusia dugu eta $\arg(z)$ idatziko dugu.



$\rightarrow [0, 2\pi)$



28 De E

$z = a+bi \in \mathbb{C}$ emanik, $\bar{z} = a-bi$ zenbakia z-ren zenbaki konjugatua da.

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$

$$Arg(\bar{z}) = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) = -\arctan\frac{b}{a} = -Arg(z)$$

Kasu honetan, $\theta \in (-\pi, \pi]$ egokiagoa da.

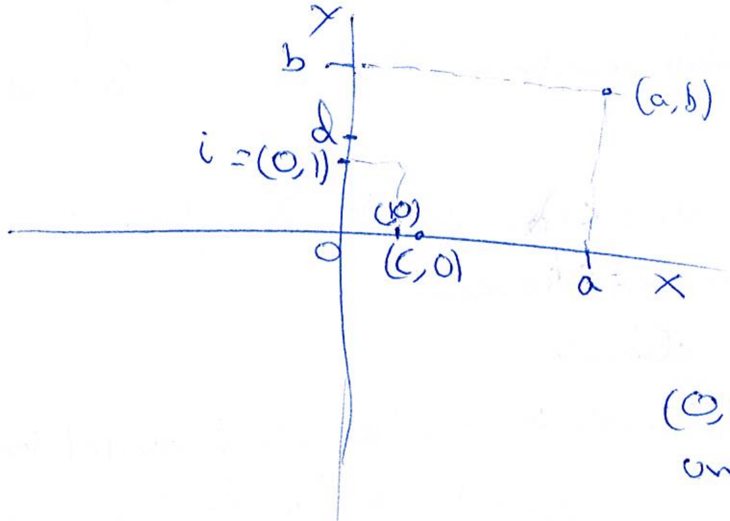
1.4.1 Adierazpideak

1) Binomiala

$z = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$ eta $i = \sqrt{-1}$

2) Geometrikoa

$z = a+bi$ zenbakia OXY planoko (a,b) puntu gisa irudika dezakegu, non a zati erreala OX ardatzean eta b zati irudikaria OY ardatzean dauden.



$(c,0) \in OX$ eta $(c,0) = c+0i = c \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$(0,d) \in OY$ eta $(0,d) = 0+di = di$ da irudikari purua

$(0,1) \in OY$ eta $(0,1) = 0+1\cdot i = i$ unitate irudikaria

3) Polarra

$z=a+bi$ zenbakia OXY planoan kokatzeko $|z|$ modulua eta $Arg(z)$ argumentua erabili ditzakegu.

Hortaz, $z=\rho_\theta$ idatz dezakegu, $\rho=|z|$ eta $\theta=Arg(z)$ izanik

4) trigonometrikoa

$z=a+bi$ adierazpena $a=\rho\cos\theta$ eta $b=\rho\sin\theta$ ordezkatzen baditugu, $z=\rho\cos\theta+(\rho\sin\theta)i=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ adierazpen trigonometrikoa

5) Exponentziala

Euler-en formula: $\underbrace{e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta}_{\text{egiaztatu bada}}$

$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{\theta i}$ adierazpen esponentziala da.

a, b	ρ, θ
$a+bi$	
(a,b)	ρ_θ
$-2+0i=-2$	
$(-2,0)$	$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$
	$\rho e^{\theta i}$

$\rho=2$

$\theta=\pi$

2_π

$2(\cos\pi+i\sin(\pi))$

$2e^{\pi i}$

1.4.2. Eragiketak

$z=a+bi=\rho_\theta \qquad w=c+di=\rho'_{\theta'}$

$z=1+\sqrt{3}i=2_{\pi/3} \qquad w=-2+2i=2\sqrt{2}_{3\pi/4}$

1.4.2 Eragiketak

$z = a+bi = \rho_\theta \qquad w = c+di = \rho'_{\theta'}$

$z = 1+\sqrt{3}i = 2_{\pi/3} \qquad w = -2+2i = 2\sqrt{3}_{\frac{3\pi}{4}}$

Batuketak / Kenketak

Binomiala: $z \pm w = (a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d) i$

Biderketa

Binomiala: $z \cdot w = (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc) i$

Polarra: $z \cdot w = (\rho_\theta) \cdot (\rho'_{\theta'}) = \rho \cdot \rho'_{\theta+\theta'}$

Esponentziala:

$\rho \cdot \rho' e^{(\theta+\theta')i}$

Zatiketa

Binomiala: $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} =$

$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

Polarra: $\frac{z}{w} = \frac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}_{\theta-\theta'}$

Berreketa, $n \in \mathbb{N}$

Polarra: $z^n = (\rho_\theta)^n = \rho^n_{n\theta}$ ($n=2$ denean, binomiala ere erabili daiteke)

Erroketa, $n \in \mathbb{N}$

n-erro

Polarra: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho_\theta} = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \; k \in \mathbb{Z}$

Ezaugarriak: n-erro guztiek modulu bera dute, $\sqrt[n]{\rho}$, beraz, zirkunferentzia batean daude.

infinitu n-erro daude, Baina n baino ez dira desberdinak.

$$\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \frac{\theta}{n}+2\,\frac{2\pi}{n},\ \dots,\ \frac{\theta}{n}+(n-1)\,\frac{2\pi}{n},\ \underbrace{\frac{\theta}{n}+\underbrace{n\,\frac{2\pi}{n}}_{2\pi}}_{\frac{\theta}{n}},\ \frac{\theta}{n}+(n+1)\,\frac{2\pi}{n}$$

Ondoz ondoko n-erroen arteko aldea $\frac{2\pi}{n}$ da.

Ariketa

$$w=-2+2i=2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow \sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{\rho_\theta}=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}_{\frac{3\pi+2k\pi}{4n}}=$$

$$=\sqrt[8]{8}_{\frac{(3+2k)\pi}{4n}}$$

$k=0,1,2,3,\dots,n-1$

$k=0 \quad \sqrt[4]{2\sqrt{2}}_{\frac{(3+2\cdot 0)\pi}{4n}}=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}_{\frac{3\pi}{4n}}$

$k_1=1 \quad \sqrt[4]{2\sqrt{2}}_{\frac{(3+2)\pi}{4n}}=\frac{5\pi}{4n}$

$k=2 \quad \sqrt[4]{2\sqrt{2}}_{\frac{(3+4)\pi}{4n}}=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}_{\frac{7\pi}{4n}}$

$k=3 \quad \sqrt[4]{2\sqrt{2}}_{\frac{(3+6)\pi}{4n}}=\sqrt[4]{2\sqrt{2}}_{\frac{9\pi}{4n}}$

Logaritmo nepertarra

Esponentziala: $\ln z=\ln \rho e^{\theta i}=\ln\rho+\ln e^{\theta i}=\ln\rho+\cancel{\theta i}(\theta+2k\pi)i$

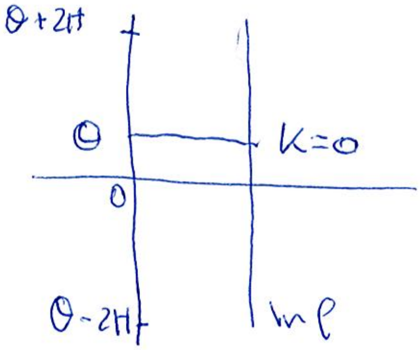
$k\in\mathbb{Z}$

Ezaugarriak: emaitza era binomikoan adierazten da

infinitu logaritmo nepertar daude

Denek zati erreal bera daukate, $\ln\rho$; zuzen bertikalean daude $x=\ln\rho$

Ondoz ondoko soluzioen arteko aldea 2π da.

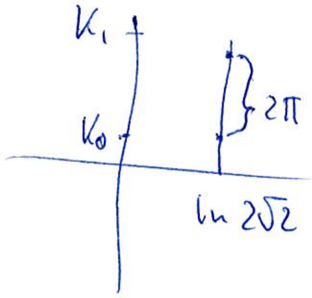


K=0 denean logaritmoaren balio nagusia lortzen da.

$\ln z$

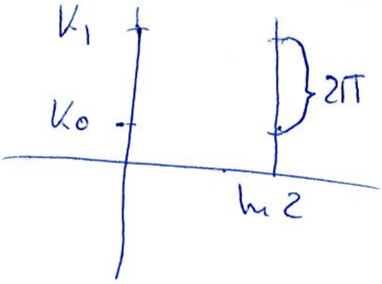
$z = 1+\sqrt{3}i = 2_{\pi/3}$

$\ln w = \ln \rho e^{\theta i} = \ln 2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} = \ln 2\sqrt{2} + \ln e^{\frac{3\pi}{4}i} = \ln 2\sqrt{2} + \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)i, \; k\in\mathbb{Z}$



$K=0 \quad \ln 2\sqrt{2} + \left(\frac{3\pi}{4}\right)i$ Balio nagusia

$\ln z = \ln \rho \cdot e^{\theta i} = \ln \rho + \ln e^{\theta i} = \ln \rho + \theta i = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i, \; k\in\mathbb{Z}$



$K=0 \quad \ln 2 + \frac{\pi}{3}i$ Balio nagusia

1.5 Ariketak

1. Froga ezazu indukzio-printzipioaren bidez:

   (a) $n! > 2^{n-1}, \quad \forall n \geq 3;$

   (b) $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad \forall n \in \mathbb{N};$

   (c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

   (d) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, r \neq 1$ eta $a \in \mathbb{R}$ izanik;

   (e) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

   (f) zenbaki errealen multzo finitu orok baditu maximoa eta minimoa;

   (g) $f(n) = G(n) - G(n-1)$ bada, $f(1) + \cdots + f(n) = G(n) - G(0)$ beteko da;

   (h) n elementuko multzoek 2^n azpimultzo dauzkate;

   (i) $m^n - 1$ zenbakia $(m-1)$ zenbakiaz zatigarria da, m zenbaki arrunta izanik;

   (j) $n^3 - n$ zenbakia beti da 3 zenbakiaren multiploa;

   (k) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = (n+1)n, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

   (l) $(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \delta > 0$ izanik;

   (m) $x = p + \sqrt{q}$ bada, $p, q \in \mathbb{Q}$ izanik, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a, b \in \mathbb{Q} \ / \ x^n = a + b\sqrt{q}$.

2. Ondoriozta ezazu lege orokorra eta froga ezazu indukzio-printzipioa erabiliz:

   1) $$\begin{aligned} 7 + 6\cdot 7 &= 7^2 \\ 7 + 6\cdot(7+7^2) &= 7^3 \\ 7 + 6\cdot(7+7^2+7^3) &= 7^4 \end{aligned}$$

   2) $$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{3} &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2\cdot 3} \\ 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2\cdot 9} \\ 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2\cdot 27} \end{aligned}$$

3. Froga ezazu bi zenbaki arrazional desberdinen artean infinitu zenbaki arrazional daudela.

4. Eman ezazu $\mathbb{Q}$ multzoan beherenik ez duen azpimultzo bornatu bat.

5. Froga ezazu $\sqrt{2}$ ez dela zenbaki arrazionala.

6. $|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aplikazioa emanik, froga itzazu propietate hauek:

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases} \quad \text{(balio absolutua)}$$

   (a) $|a| \geq 0, \forall a;$

   (b) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$

   (c) $m \geq 0$ bada, $|a| \leq m \Leftrightarrow -m \leq a \leq m;$

   (d) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (desberdintza triangeluarra);

   (e) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$

   (f) $|a| - |b| \leq |a - b|$.

7. Irudika itzazu multzo hauek zuzenaren gainean eta idatz itzazu tarteen bidez:

   1) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| \leq 5\};$ 2) $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x+2| \geq 1/3\};$
   3) $C = \{x \in \mathbb{R} \ / x^2 - 4x - 3 > 0\};$ 4) $D = \{x \in \mathbb{R} \ / x^\pi > e\};$
   5) $E = \{x \in \mathbb{R} \ / -1 \leq \ln x \leq 1\};$ 6) $F = \{x \in \mathbb{R} \ / 2 \leq x + 1/x\}$.

8. Esan ezazu, arrazoituz, baieztapen hauek egiazkoak ala faltsuak diren:

   $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ eta $\forall b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,

   1) $\sqrt{a} \in \mathbb{Q};$ 2) $x = \frac{\sqrt{a}}{3}\left(\frac{3}{4} + 2\right) \in \mathbb{Q};$
   3) $\sqrt[3]{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q};$ 4) $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q};$
   5) $a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q};$ 6) $a \cdot b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

9. Determina itzazu multzo hauen $\inf(A)$, $\sup(A)$, $\min(A)$ eta $\max(A)$:

   1) $A = \{a, b, c\};$ 2) $A = \mathbb{N};$
   3) $A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\};$ 4) $A = \mathbb{Q};$
   5) $A = (-1, 1] \cap \mathbb{Q};$ 6) $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q};$
   7) $A = (-\infty, 1] \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q};$ 8) $A = (a, b]$.

10. Egin itzazu ondoko eragiketak:

   1) $\dfrac{1}{1-i};$ 2) $\dfrac{2+i}{1-i} + \dfrac{2-i}{1+i} + i;$ 3) $\left(\dfrac{2+i}{1-i} + \dfrac{2-i}{1+i} + i\right)^2;$

   4) $\dfrac{2+i}{1-i};$ $-\frac{1}{2}\ \frac{3i}{2}$ 5) $\left(1 + i + \dfrac{1}{1+i}\right)^2;$ 6) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1041};$

   7) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3;$ 8) $\left(\dfrac{2+i}{3+4i} - \dfrac{2i}{3-4i}\right)^2$.

11. Kalkula itzazu zenbaki konplexu hauen modulua eta argumentua:

   1) $-i;$ 2) $i(1+2i)(3+4i);$ 3) $\cos\alpha + i\sin\alpha;$

   4) $3/i;$ 5) $i + \dfrac{(3+5i)(1+i)}{(3-5i)};$ 6) $\sqrt{-3i};$

   7) $-8;$ 8) $\left(\dfrac{(3+4i)(1+i)}{(3-4i)}\right)^4;$ 9) $3e^{2+i};$

   10) $\left(\dfrac{a+bi}{a-bi}\right)^n$.

12. Eman itzazu zenbaki konplexu hauen adierazpen polarra eta trigonometrikoa:

   1) $2i;$ 2) $-2i;$ 3) $1+i;$ 4) $\dfrac{1+i}{1-i};$ 5) $\dfrac{3\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-\frac{2i}{3}}$.

13. Esan ezazu, arrazoituz, egiazkoak edo faltsuak diren ondoko berdintz-

   1) $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1};$ 2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|;$
   3) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|;$ 4) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

14. Froga ezazu berdintza hauek betetzen direla ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;
3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; 4) $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$;
5) $\text{Re}\,(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = \text{Re}\,(z_1 z_2)$; 6) $\text{Im}\,(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = -\text{Im}\,(z_1 z_2)$.

15. Froga ezazu desberdintza hauek betetzen direla ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

1) $\text{Re}\,(z_1) \leq |z_1|$; 2) $\text{Re}\,(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1||z_2|$;

3) $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$ (Iradokizuna: hasi garatzen $(z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$ adierazpena);

4) desberdintza triangeluarra: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

16. Kalkula itzazu ondoko erroak:

1) $z = \sqrt{i}$; 2) $z = \sqrt{-8i}$; 3) $z = \sqrt{-7 - 24i}$;
4) $z = \sqrt[8]{1}$; 5) $z = \sqrt[3]{1 + i}$.

17. Irudika itzazu planoan erlazio hauek betetzen dituzten zenbaki konplexuen multzoak:

1) $|z - 1 + i| = 1$; 2) $\text{Re}\,(\bar{z} - i) = 2$; 3) $|z - 3| + |z + 3| = 4$;
4) $|2z - 1| = 4$; 5) $|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|$; 6) $\text{Im}\,(z + 2i) = \text{Re}\,(z - 3)$;
7) $\left|\frac{1 + z}{1 - z}\right| \leq 1$; 8) $|z| > |z - 1|$; 9) $|z + 2| > 1 + |z - 2|$;
10) $|z + i| \leq 3$; 11) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{2}$; 12) $\text{Re}\,(z) \leq \text{Im}\,(z^2)$;
13) $z^2 + \bar{z}^2 \geq 8$; 14) $\text{Re}\,(z) + \text{Im}\,(z) < 2$; 15) $1 < |z + i - 1| < 2$;
16) $1 < |z + i| < 2$; 17) $\left|\frac{z - 3}{z + 3}\right| = 2$;

18) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 8 < |z - z_1| + |z + z_2| \leq 12\}$, $z_1 = 3i$ eta $z_2 = -3i$ izanik;

19) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - 2i| \leq 2$ eta $\text{Re}\,(z) \geq 1\}$;

20) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, -1 \leq \text{Re}\,(z) \leq 1$ eta $0 < |z| < 2\}$;

21) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - 1| \leq 4$ eta $\text{Im}\,(z) \leq \text{Re}\,(z)\}$;

18. Froga itzazu,

(a) unitatearen n. erroen batura zero dela;

(b) unitatearen n. erroen biderkadura

i. -1 dela n bikoitia denean eta

ii. 1 dela n bakoitia denean.

19. Kalkula ezazu $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ ekuazioaren erroak lerro zuzenen bidez elkartuz lortzen den hexagono irregularraren perimetroa.

20. Ebatz itzazu ekuazio hauek eta adieraz itzazu grafikoen bidez soluzioak:

1) $e^z = -2$; 2) $z^5 = \bar{z}$; 3) $\ln z = \frac{\pi}{2}i$;
4) $z^4 = -i$; 5) $z^4 = i$; 6) $2z^3 - 3z^2 + 5iz = 0$;
7) $z^4 = 1$; 8) $z^4 = -1$; 9) $z^4 - z^2 - 2 = 0$;
10) $\cos z = 2i$; 11) $\sin z = 2i$; 12) $\tan z = 2$;
13) $z^{3/4} = 1$; 14) $z^2 = \bar{z}$; 15) $z^4 + 1 - i = 0$;
16) $z^{3/4} = 2^i$; 17) $e^{3z} = 1$; 18) $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$;
19) $e^{4z} = i$; 20) $z^5 = 1$.

21. Ebatz ezazu $z^3 = 1 + i$ ekuazioa logaritmoa erabiliz.

22. Kalula ezazu $x \in \mathbb{R}$, $(2e^{2i})^x$ zenbaki erreal negatiboa izan dadin.

23. Esan ezazu inplikazio hauek egiazkoak ala faltsuak diren, erantzuna arrazoituz:

(a) $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow e^z \neq 0$;

(b) $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow |e^{iz}| = 1$.

24. Egin itzazu ondoko eragiketak:

1) $i^{1/2}$; 2) $(1 + i)^i$; 3) 2^{2i}; 4) $(2 - i)^{1+i}$; 5) $(3 + 4i)^{1/3}$.

25. Egin itzazu ondoko kalkuluak:

1) $z = \sum_{k=0}^{100} i^k$; 2) $z = \frac{(3 + 2i)i^{17}}{i^{243}(1 - i)^3}$; 3) $\ln \sqrt[4]{1 - i}$;
4) $\ln(-i)$; 5) $\ln(-\sqrt{3} - i)$.

1 Indukzio-printzipioa

1.1 Aurrekariak

1.1 Definizioa. *P multzoa, $0 \in P$ elementua eta $S : P \to P$, $S(x) = x + 1$ (hurrengoa), aplikazioa emanik, hiru axioma hauek betetzen badira:*

1. *$\forall x \in P\ S(x) \neq 0$ (Zero ez da P-ren inongo elementuren hurrengoa);*
2. *$\forall x, y \in P\ x \neq y \Rightarrow S(x) \neq S(y)$ (Bi elementu desberdinak badira, bien hurrengoak ere desberdinak dira; S aplikazio injektiboa da); eta*
3. *(Indukzio-axioma)*
   $A \subseteq P$ bada, non $0 \in A$ eta $x \in A \Rightarrow S(x) \in A$ betetzen baitira, $A = P$ izango da;

P multzoa zenbaki arrunten *multzoa da, eta $\mathbb{N}$ idatziko dugu; hau da:*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

1.2 Propietatea. $\mathbb{N}$ *multzoa itxia da* + batuketarako *eta* $\cdot$ biderketarako.

1.3 Definizioa. $\mathbb{N}$ *multzoan* $\leq$ (txikiago edo berdin) ordena-erlazioa *honela definituko dugu:*

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \leq b \text{ izango da } \exists c \in \mathbb{N} \,/\, a + c = b \text{ betetzen den.}$$

1.4 Propietatea. $\mathbb{N}$ *multzoa* ongi ordenatua *da. Horrek esan nahi du* $\mathbb{N}$ *multzoaren azpimultzo ez-huts guztiek* lehen elementua *dutela.*

1.2 Teorema eta froga

1.5 Printzipioa. *(Indukzio-printzipioa)*
Propietate bat $n = k \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen bada eta $k \leq n \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen dela pentsatuz $(n+1) \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen dela frogatzen bada, propietatea beteko da k eta handiagoak diren zenbaki arrunt guztietarako.

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} 1) & P(k) \text{ egiazkoa da} \\ 2) & n \geq k,\quad P(n) \text{ egiazkoa bada, } P(n+1) \text{ egiazkoa da} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \geq k \quad P(n) \text{ egiazkoa da.}}$$

Froga.
Absurdora eramanez frogatuko dugu.
Demagun propietatea ez dela betetzen k baino handiagoak diren zenbaki guztietarako. Beraz, multzo hau defini dezakegu:

$$F = \{m \in \mathbb{N}/m \geq k \text{ eta } P(m) \text{ faltsua}\}$$

$F \subset \mathbb{N}$ eta $F \neq \emptyset$ ditugu, k baino handiagoa den zenbakiren batek ez baitu propietatea betetzen. $\mathbb{N}$ multzo ongi ordenatua denez, F multzoak badu lehen elementua, m_1.

$P(k)$ egiazkoa eta $P(m_1)$ faltsua direnez, $m_1 > k$ da eta, beraz, $m_1 - 1 \geq k$ eta $m_1 - 1 \in \mathbb{N}$ eta $P(m_1 - 1)$ egiazkoa dela aterako ditugu, m_1 baita propietatea faltsua egiten duen lehen zenbaki arrunta.
Har dezagun $n = m_1 - 1$; orduan, $P(n) = P(m_1 - 1)$ egiazkoa da.
Printzipioaren bigarren hipotesia erabiliz, $P(n)$ egiazkoa bada, $P(n+1)$ ere egiazkoa izango da. Hau da, $P(n+1) = P(m_1)$ egiazkoa da.
Hori da kontraesana, $P(m_1)$ faltsua dela esan dugulako. Beraz, hasieran esan genuen hura ezin da bete, hots, propietatea ez zela betetzen k baino handiagoak diren zenbaki guztietarako.
Ondorioz, propietatea beteko da k eta handiagoak diren zenbaki arrunt guztietarako.
□

1.3 Adibidea

1.6 Adibidea. Izan bedi $a_n = ar^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a, r \in \mathbb{R}$ izanik. Froga dezagun lehenengo n gaien batura

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \text{ denean,} \\ na & r = 1 \text{ denean} \end{cases}$$

izango dela.

$r = 1$ denean, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a + a + \cdots + a = na$.

Frogatu behar dugu, $r \neq 1$ denean, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ betetzen dela. Horretarako, indukzio-printzipioa erabiliko dugu.

$n = 1$ denean, ezkerreko atalean $S_1 = a_1 = a$ dugu eta eskuinekoan $\dfrac{a(1-r)}{1-r} = a$, $r \neq 1$ delako; beraz, kasu horretan berdintza betetzen da.

Demagun, orain, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ dela; frogatu beharko dugu $S_{n+1} = \dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$ beteko dela.
Indukzio-hipotesia erabiliko dugu eta, gero, eragiketak egingo ditugu:

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + ar^n =$$

$$= \frac{a - ar^n + ar^n - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r},$$

$a_{n+1} = ar^n$ delako.
Beraz, lehenengo berdintza $\forall n \in \mathbb{N}$ betetzen da.

1.4 Bibliografia

1.

b) $(1+\delta)^n \geq 1+n\delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ izanik frogatu behar dugu $(1+\delta)^n \geq 1+n\delta$ propietatea betetzen dela, horretarako $n=k \in \mathbb{N}$ zenbakirako bete behar da eta $k < n \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetako dela pentsatu. Horrela $(n+1) \in \mathbb{N}$ zenbakirako ere egiazkoa izango da.

1)

$P(k)$ egiazkoa da

2) $n \geq k$, $P(n)$ egiazkoa izanik, $P(n+1)$ ere $\Big\} \Rightarrow \forall n \geq k$ P egiazkoa izango da

1)

$k>0$ denean eta $\forall n \in \mathbb{N}$ izanik $P(k)$ egiazkoa izan behar da.

$\underline{k=1}$

$(1+\delta)^k \Rightarrow (1+\delta)^1 = 1+\delta$ (ezkerreko atala)

$(1+k\delta) \Rightarrow 1+1\delta = 1+\delta$ (eskuineko atala)

Berdintza lortu dugu beraz propietatea egiazkoa da.

2)

Demagun $n=k+1$ dela,

$(1+\delta)^{k+1} \geq 1+(k+1)\delta$ betetzen den frogatu behar dugu.

$$(1+\delta)^{k+1} \geq 1+(k+1)\delta = (1+\delta)^k(1+\delta) \underset{\text{Indukzio hipotesia}}{\geq} (1+\delta k)(1+\delta) =$$

$$= 1+\delta k+\delta^2 k = 1+\delta(k+1)\delta^2 k = 1+\delta(k+1)+\delta^2 k \geq 1+\delta(k+1) =$$

$$= (1+\delta)^{k+1} \geq 1+\delta(k+1)$$

Beraz, $n=k+1$ kasu honetan betetzen da.

j) n^3-n 3-ren multiploa da.

$$\frac{n^3-n}{3}=m \quad m\in\mathbb{Z}$$

1) $P(k)$ egiaztatu

2) $P(n)$ egiaztatu bada $P(n+1)$ ere $\Big\}$ $\forall n \geq k$ $P(n)$ egiaztatu da.

1)

$n=1=k$

$$\frac{n^3-1}{3}=m \rightarrow \frac{1^3-1}{3}=0=m \rightarrow m=0$$

$n=2=k$

$$\frac{n^3-1}{3}=m \rightarrow \frac{2^3-2}{3}=\frac{6}{3}=2 \rightarrow m=2$$

$P(n)$ egiaztatu dela suposatuz $\frac{n^3-n}{3}=m$ $n\in\mathbb{Z}$.

$$\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}=p \rightarrow (n+1)^3-(n+1)=3p \rightarrow n^3+3n^2+3n+1-n-1=$$

$$=\underbrace{n^3+3n^2+3n-n}_{IH}=3m+3n^2+3n \rightarrow \cancel{3}m+\cancel{3}n^2+\cancel{3}n=\cancel{3}p=$$

$$=m+n^2+n=p \rightarrow p=m+n^2+n\in\mathbb{Z} \quad m,n\in\mathbb{Z}$$

$\ell)$

$(1+\delta)^n \geq 1+n\delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ izanik frogatu behar dugu $(1+\delta)^n \geq 1+n\delta$ propietatea betetzen dela, horretarako $n=K \in \mathbb{N}$ zenbakirako bete behar da eta $K<n \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen dela pentsatu.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ P(n) \text{ egiazkoa da.} \\ 2)\ n \geq K,\ P(n) \text{ egiazkoa izanik, } P(n+1) \text{ ere} \end{array}\right\} \forall n \geq K \ P(n) \text{ egiazkoa izango da.}$$

1)

$K>0$ eta $K \in \mathbb{N}$ izanik $P(K)$ egiazkoa.

$\underline{K=1}$

$(1+\delta)^K \Rightarrow (1+\delta)^1 = 1+\delta$ (ezkerreko atala)

$1+K\delta \Rightarrow 1+\delta$ (eskuineko atala)

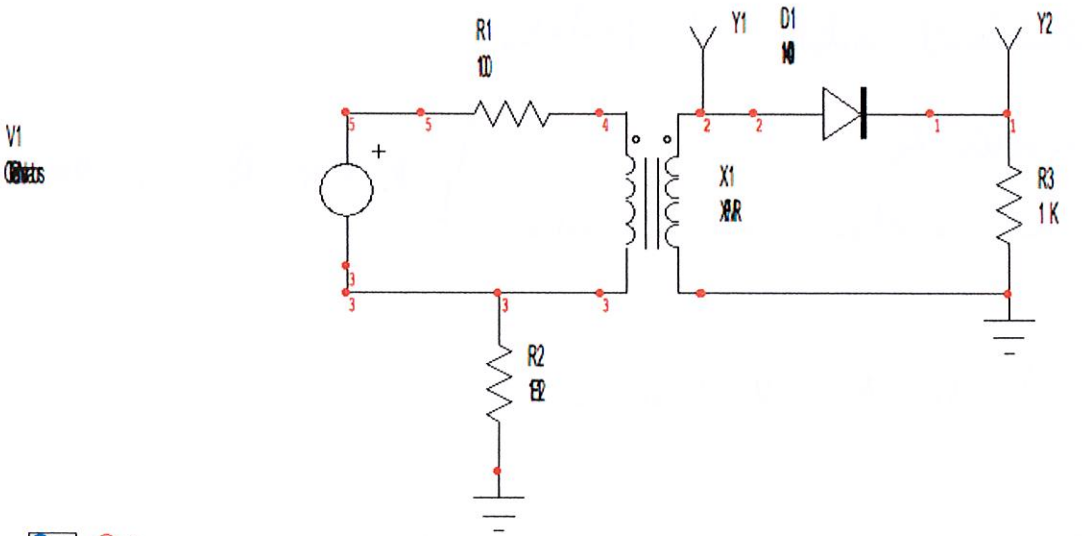
Berdintza lortu dugu beraz, propietatea egiazkoa izango da.

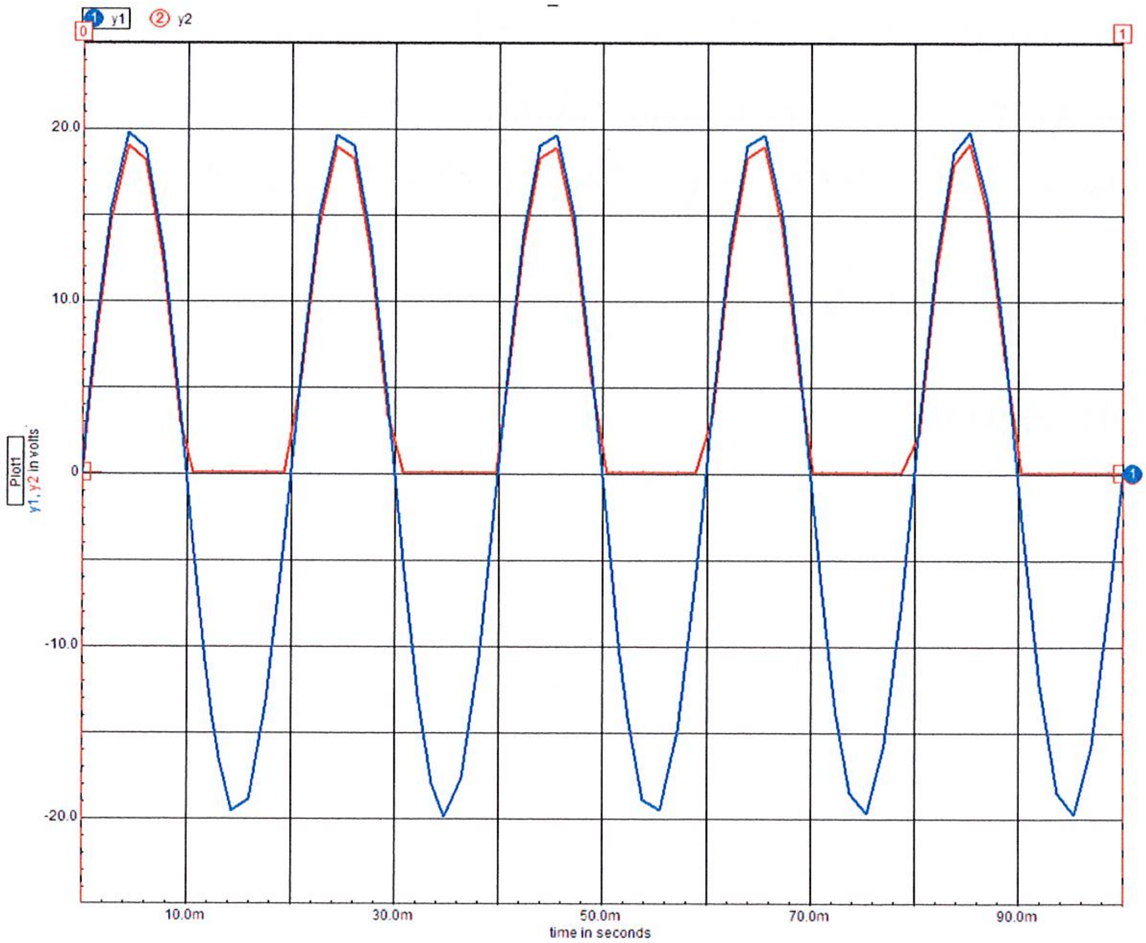
2)

Demagun $n=K+1$ dela,

$(1+\delta)^n \geq 1+n\delta$

E2


R1
100
V1
Y1
D1
Y2
X1
R3
1 K
R2


y1
y2
20.0
10.0
0
-10.0
-20.0
Plot1
y1, y2 in volts
10.0m
30.0m
50.0m
70.0m
90.0m
time in seconds

$a_n = ar^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a, r \in \mathbb{R}$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \text{ denean} \\ na & r = 1 \text{ denean} \end{cases}$$

$r = 1$ denean,

$$S_{(n)} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots + a_n = a + ar + \dots ar^{n-1} = a + a + a \dots = an$$

$r \neq 1$ denean,

$S(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ betetzen dela frogatuko dugu.

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ dela, frogatuko dugu $S_{n+1} = \dfrac{a(1-r^{(n+1)})}{1-r}$

Indukzio-hipotesia erabiliko dugu:

$$S_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{S_n} + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + ar^{(n+1)-1} =$$

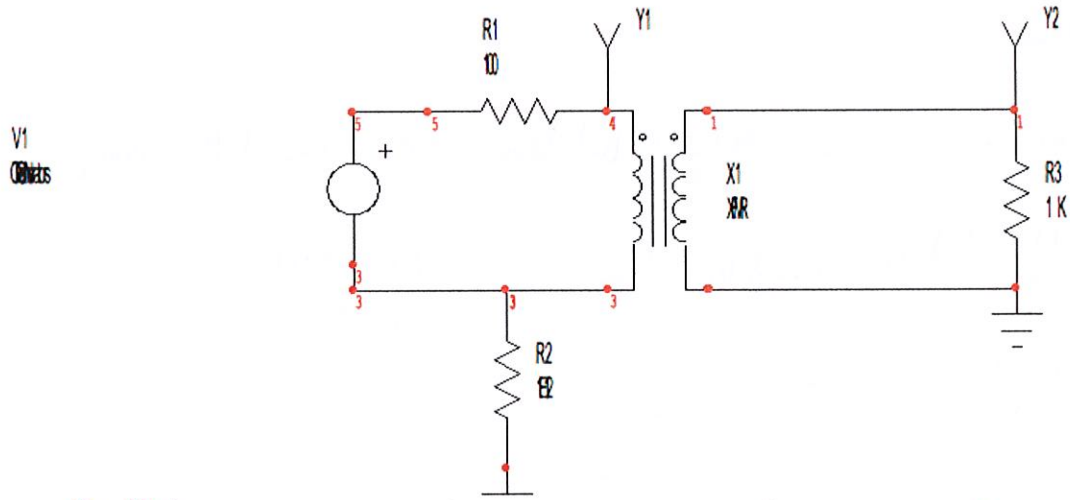
$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} + ar^n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + \frac{ar^n(1-r)}{1-r} = \frac{a(1-r^n) + ar^n - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

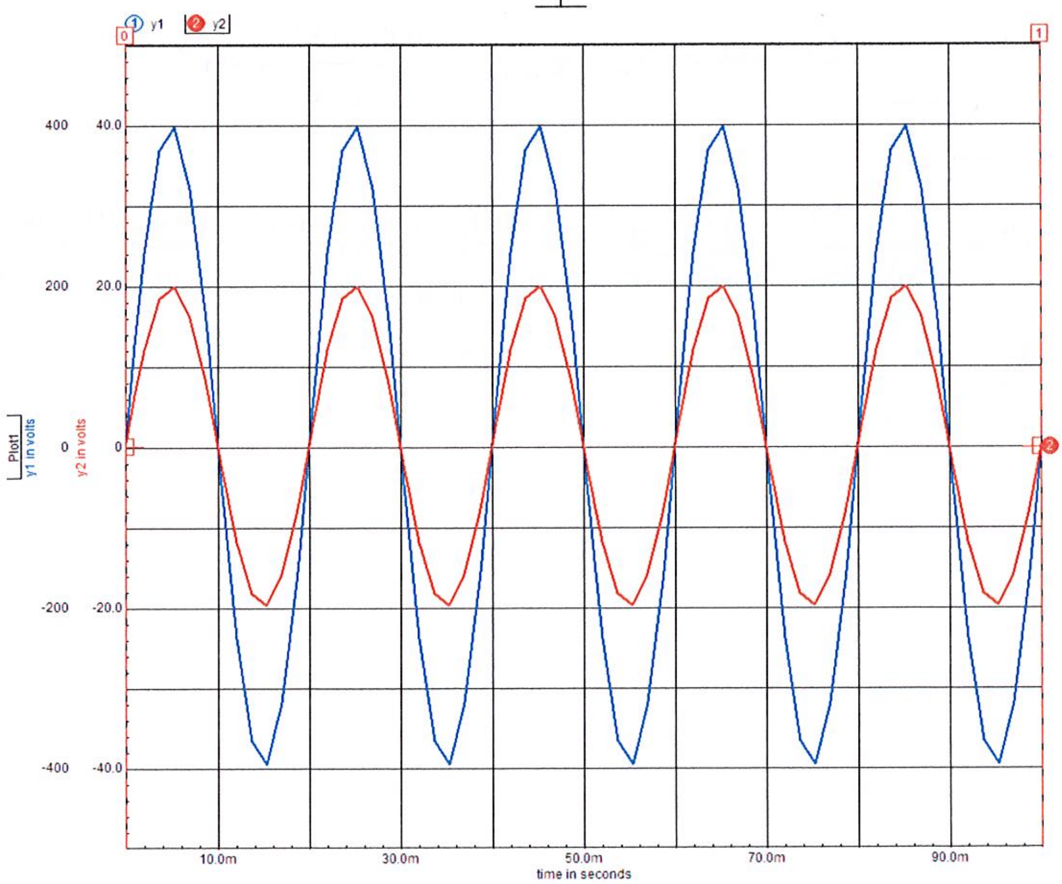
$a_{n+1} = ar^n$ delako.

Amaitzeko, simulazioaren emaitzak bistaratuko ditugu. Ondoriorik atera al daiteke Zener diodoaren portaerari buruz?

Zener diodoak tentsio maximo bat dauka eta muga hori pasatzen badugu zener diodoak berak ahal duen tentsiorik altuena ipiniko du.

E1





E2

E3

1.5 Ariketak

1

Analisi Matematikoa

Aitzol Elu

1.

a)

$$n! > 2^{n-1}, \ \forall n \geq 3$$

$\forall n \geq 3$ izanik frogatu behar dugu $n! > 2^{n-1}$ egiazkoa dela, horretarako $n = k \in \mathbb{N}$ zenbakirako bete behar da, horrela izanik $3 \leq n \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen dela pentsatuko dugu eta beraz $(n+1) \in \mathbb{N}$ zenbakirako ere egiazkoa izango da.

Horretarako ondorengo baldintzak bete behar ditu:

1) $P(k)$ egiazkoa izatea

2) $n \geq k$, $P(n)$ egiazkoa bada, $P(n+1)$ ere $\Big\} \Rightarrow \forall n \geq k \ P(n)$ egiazkoa

Frogapena egingo dugu, horretarako absurdura eramango dugu.

1)

$k = 3$

$\boxed{\cancel{P(k)}} = k! \stackrel{=}{\Rightarrow} 3! = 3(3-1)\cdot(3-2) = 6$ (ezkerreko atala)

$\boxed{\cancel{P(k)}} = 2^{k-1} \stackrel{=}{\Rightarrow} 2^{3-1} = 4$ (eskuineko atala)

Beraz, propietatea egiazkoa da ezkerreko atala > eskuineko atala baino.

2)

$P(n)$ betetzen denez eta frogasuposatuz $P(n+1)$ betetzen dela frogatuko dugu $\forall n \geq 3$ betetzen duela propietatea

$n! > 2^{n-1} \Rightarrow (n+1)! > 2^n$ egiazkoa dela frogatuz.

$n+1! \boxed{\geq 2^n} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n-1)}_{\text{Indukzio printzipioa}} (n+1) \boxed{\geq 2^n} = n! \cdot (n+1) \geq 2^n =$

hor ez

$= n+1! \geq 2^n$

Beraz, $\forall n \geq 3$-rentzako betetzen da propietatea.

Kasua ez dago ondo idatzita

(9)

5)

$A = (-1, 1] \cap \mathbb{Q}$

a) Aren beherena ez da existitzen, $-\infty$ jotzen duelako eta A-k goi borne ere ez du, tartea $\{-\infty, \infty\}$ delako

b) $A = (-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ $\inf(-1)$, $\operatorname{Sup}(1)$

$-1 \notin \mathbb{Q}$, beraz, A multzoak ez du minimorik $\nexists \min(A)$

$1 \in \mathbb{Q}$, beraz, A multzoaren maximoa, hau da, $\max(A) = 1$ da.

6) ~~Ean~~ $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Zenbaki errealei zenbaki arrazionalak kendu eskero zenbaki irrazionalak soilik geratzen dira.

$A = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

a) $\mathbb{I}$-k ez dute ez behe ez goi-bornerik $(-\infty, \infty)$ baidoa bere adierazpide tartea.

b) $(-\infty, 1) \cap \mathbb{I}$ ~~inf~~

Kasu honetan ~~Ir~~ A multzoak ez du beherenik $-\infty$-rantz egiten baitu. $\nexists \inf(A)$

Gorena bai ordea, $\operatorname{Sup}(A) = 1$ da.

Beherenik ez duenez minimorik ereez, $\nexists \min(A)$ ezta maximorik ere $\nexists \max(A)$

1) $A = \{a, b, c\}$

8) $A = (a, b]$

a) ~~$b \in A$~~ A multzoa goitik bornatua da, eta haren goi-bornerik txikiena, b, da. $\sup(A) = b$ eta behe bornerik handiena, a, da. $\inf(A) = a$.

Ordea, A multzoak ez du minimorik $a \notin A$ baita beraz, $\nexists \min(A)$, bai ordea, maximoa $\max(A) = b$ baita.

5.

a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Absurdora eramanez $\sqrt{2}$ zenbaki arrazionala ez dela frogatuko dugu;

Hipotesia: Suposatuko dugu $\sqrt{2}$ arrazionala dela, hau da, $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$. Suposatuko dugu beraz, $Z.K.H.(x,y)=1$ dela, hau da, Multiplo komun handiena bat dela. Berdintza osoa berretu egingo dugu birekin:

$$\frac{x}{y} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2$$

$x^2 = 2y^2$ egingo dugu eta beraz x^2 2-ren multiploa izanik eta beraz x ere. Hau da, $x = 2K$ izan behar da egia izateko x-en balioa berdintza horretan ordezkatuko dugu eta berdintza horretako 2-a sinplifikatu.

Hau da:

$$x^2 = 2K^2$$

Berdintza honekin, y^2 2ren multiplo dela dakigu, eta baita y-rena.

Absurdora iritsi gara, izan ere, esan dugu, x eta y-k ez zutela multiplorik komunean izan ere, $Z.K.H.(x,y)=1$ da, eta gaur, 2 zenbakia multiplo komun bezala dutela frogatu dugu.

Beraz, horrei hor kontresan

$\sqrt{2}$ zenbaki irrazionala da.

~~d)~~

$$\cancel{|a+b| \le |a| + |b|}$$

$$\cancel{|a+b| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cancel{|a| = \sqrt{a^2}}$$

$$\cancel{|b| = \sqrt{b^2}}$$

$$\cancel{|a+b| \le |a|+|b|}$$

d) $|a+b| \le |a|+|b|$ desberdintza triangeluarra.

Frogapena egiteko $a, b \in \mathbb{R}$ direla suposatuko dugu.

Balore absolutuaren propietateak kontuan izanik, $-|a| \le a \le |a|$
$-|b| \le b \le |b|$
egiazkoa dela ikusiko dugu.

Horrela bi inekuazioak batuz $-(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|)$ lortzen dugu.

Horrekin batera $|a| \le b$ balio absolutuaren propietatea erabiliz eta baldin eta soilik baldin $-b \le a \le b$ gelditzen bada:

$|a+b| \le |a|+|b|$ beteko da.

Beraz, desberdintza triangeluarra betetzen da.

Aribketak

20

19) $e^{4z}=i$

$\ln e^{4z} = \ln i \Rightarrow 4z \ln e = \ln i \Rightarrow z = \frac{1}{4}\ln i \Rightarrow z = \frac{1}{4}\ln e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i} =$
$k \in \mathbb{Z}$

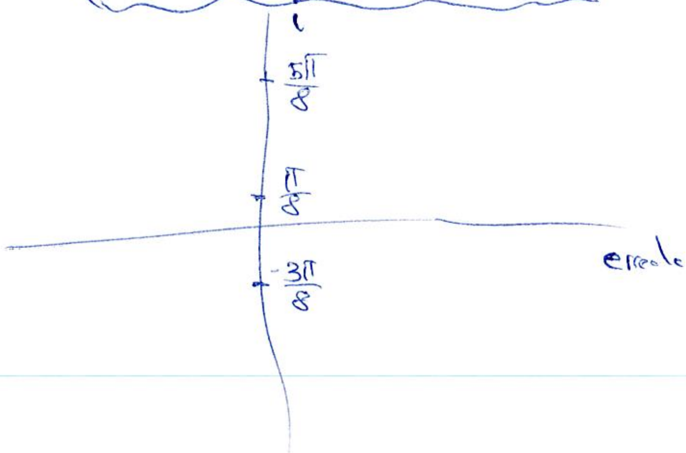
$|1 i| = \sqrt{1^2} = 1$
$Arg \to \arctan \frac{1}{0} = \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$

$k=0 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)i = \frac{\pi}{8}i$

$k=1 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)i = \frac{5\pi}{8}i$

$k=-1 \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right) = -\frac{3\pi}{8}i$



9

1) $A = \{a, b, c\}$

Amoltzailea $\forall x \in A \quad a \leq x$, Baldin $a \in A$ badago orduan, $\inf(A) = a$
$a = \min(A)$ izango da

Amoltzailo $\forall x \in A \quad c \leq x$ $\quad c \in A$ orduan, $\sup(A) = c$ eta $\max(A) = c$

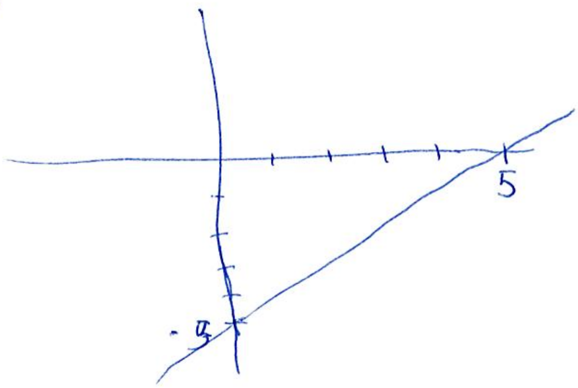
12

6) $Im(z+2i) = Re(z-3)$

~~a+b~~ $b+2 = a-3$

$b-a = -5 \quad (b=0)$

$a = 5$



Arilletall

Andisi matematikoa

(18)

16-

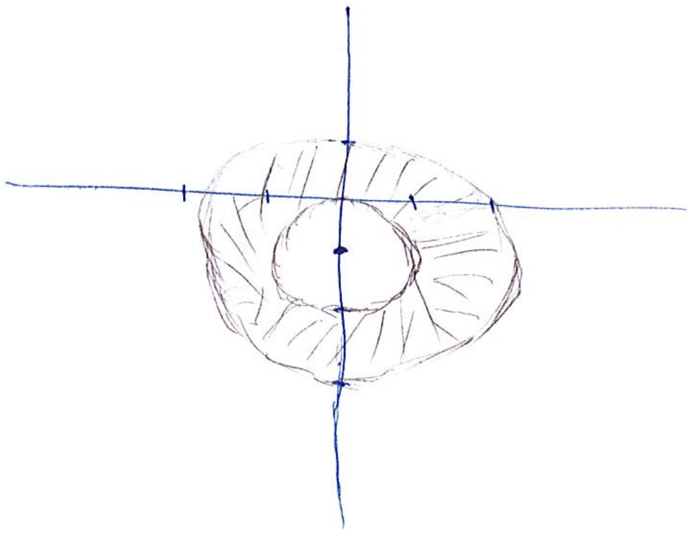
$$1 < |z+i| < 2 \Rightarrow 1 < |x+(y+1)| < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{x^2+(y+1)^2} < 2 \Rightarrow 1^2 < \left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2 < 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < x^2+(y+1)^2 < 2^2 \Rightarrow 1^2 = (x-0)^2+(y-(-1)^2) = 2^2$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2}$$

Beraz, zirkuluaren erradioa 1 eta 2 -koa izango da eta zentroa (α, β) puntua, hau da, $(0,-1)$.



3)

$$z = \sqrt{\underbrace{-7-24i}_{z'}}$$

z'-ren modulu eta argumentua kalkulatuko ditugu:

$$|z'| = \sqrt{(-7)^2+(-24)^2} = 25 = \rho$$

$$Arg(z') = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{-7}{-24}\right) = 0'28 = \theta$$

$$z = \sqrt{\rho}_{\theta} = \sqrt{25}_{0'28} = 5_{0'28}$$

$$z = 5_{\frac{0'28 + 2\pi \cdot k}{2}}$$

$k=0$ denean, $z = 5_{\frac{0'28\cancel{+2\pi}}{2}} = 5_{0'64}$

$k=1$ denean $z = 5_{3'46}$

$k=2$ denean

(5)

$z = \sqrt[3]{\underbrace{1+i}_{z'}}$

$z' = a+bi = 1+i \Rightarrow a=1 \ , \ b=1$

$|z|' = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\text{Arg } z' = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \pi/4$

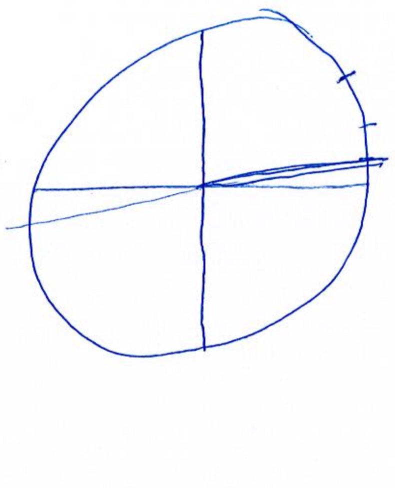
$z = \sqrt[5]{2}_{\pi/4} \Rightarrow z = \sqrt[5]{2}_{\frac{\pi/4 + k2\pi}{2}}$ $\cancel{\sqrt[5]{2}}$

$k=0$ denean, $\sqrt[5/8]{2}_{\frac{\pi/4}{2}} = \sqrt[5]{2}_{\pi/8}$

$k=1$ denean, $\sqrt[5]{2}_{\frac{\pi/4 + 2\pi}{2}} = \sqrt[5]{2}_{\frac{9\pi/4}{2}} = \sqrt[5]{2}_{\frac{9\pi}{8}}$

$k=2$ denean, $\sqrt[5]{2}_{\frac{\pi/4 + 4\pi}{2}} = \sqrt[5]{2}_{\frac{17\pi}{8}}$

$k=0$ eta $k=2$ grafikoko punto berean daude.



(17)

(1)

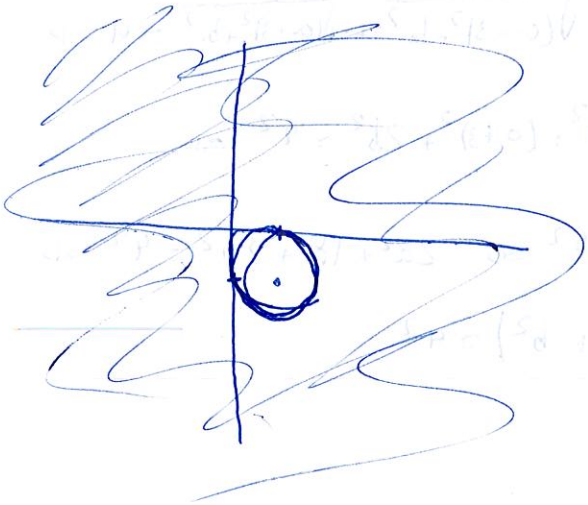
$|z-1+i|=1 \Rightarrow |a-1+bi+i|=1 \Rightarrow |a-1+(b+1)i|=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}=1^2 \Rightarrow (a-1)^2+(b+1)^2=1^2 \Rightarrow \cancel{a^2-2a}\ (a-1)^2+(b-(-1))^2=1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-\alpha)^2+(b-(\beta))^2=R^2$

$(\alpha,\beta)=(1,-1)$

$R=1$



(2)

$Re(\bar{z}-i)=2 \Rightarrow Re(a-bi-i)=2 \Rightarrow Re(a+(-b-1)i)=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=2$

$(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 3, 2)$

$3, 4, 5, 6, 8, 10, 7, 6, 1$

$(1, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$

$1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, 5$

③

$|z-3| + |z+3| = 4 \Rightarrow |a+bi\cancel{+a}-3| + |\cancel{z}\,a+bi+3| = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow |(a-3)+bi| + |(a+3)+bi| = 4 \Rightarrow \sqrt{(a-3)^2+bi^2} + \sqrt{(a+3)^2+bi^2} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(a-3)^2+(a+3)^2+2bi^2} = 4 \Rightarrow (a-3)^2+(a+3)^2+2b^2 = 4^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 \cancel{-6a} + 9 + a^2 \cancel{+6a} + 9 + 2bi^2 = 4^2 \Rightarrow 2a^2+18+2b^2 = 4^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a^2+9)+2b^2 = 4^2 \Rightarrow 2((a^2+9)+b^2) = 4^2$

④

$|2z-1| = 4 \Rightarrow |2(a+bi)-1| = 4 \Rightarrow |(2a-1)+2bi| = 4 \Rightarrow \sqrt{(2a-1)^2+(2bi)^2} = 4 \Rightarrow$

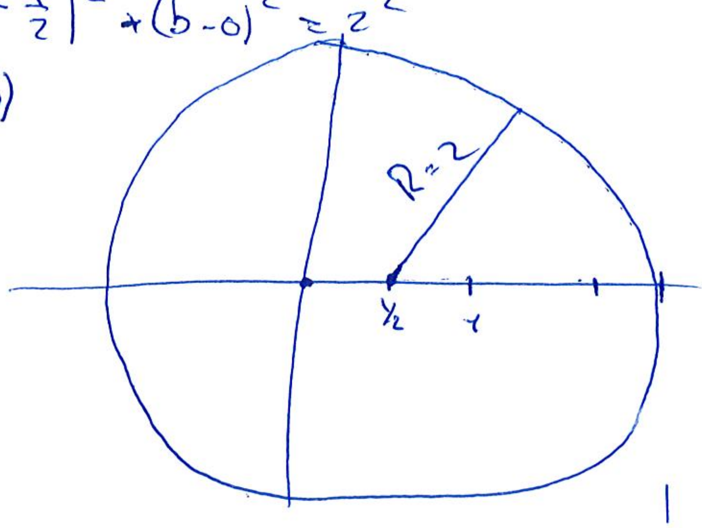
$\Rightarrow (2a-1)^2+(2b)^2 = 4^2 \Rightarrow 4a^2-4a+1+4b^2 = 4^2 \Rightarrow 4a^2-4a+4b^2 = 4^2-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(a^2-a+b^2) = 4^2-\frac{1}{\cancel{8}} \Rightarrow a^2-a+b^2 = 4-\frac{1}{4} \Rightarrow a^2-a+\frac{1}{4}+b^2 = 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-\frac{1}{2})^2+(b-0)^2 = 2^2$

$P(\frac{1}{2}, 0)$

$R = 2$

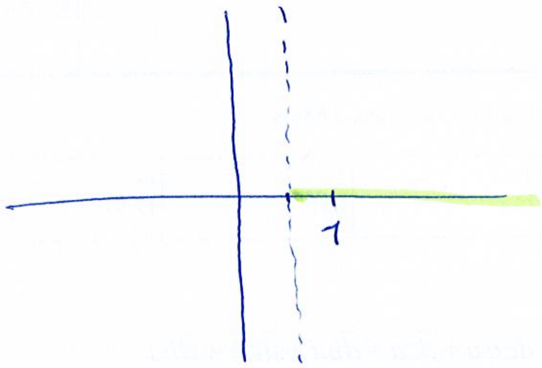


(8)

$|z| > |z-1|$

$|z| > |z-1| \Rightarrow |a+bi| > |(a-1)+bi| \Rightarrow \sqrt{a^2+bi^2} > \sqrt{(a-1)^2+bi^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2 > (a-1)^2+b^2 \Rightarrow a^2 > a^2-2a+1 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$



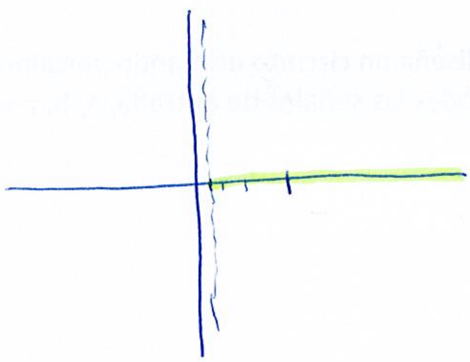
(9)

$|z+2| > 1+|z-2|$

$|z+2| > 1+|z-2| \Rightarrow |a+2+bi| > 1+|a-2+bi| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(a+2)^2+(bi)^2} > 1^2+\sqrt{(a-2)^2+(bi)^2} \Rightarrow (a+2)^2+b^2 > 1+(a-2)^2+b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{a^2}+4a+\cancel{4}\cancel{+b^2} > 1+\cancel{a^2}-4a\cancel{+4}\cancel{+b^2} \Rightarrow 8a > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{8}$



eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea
INFORMATIKA FAKULTATEA

Curso 2011/2012

Grado en Ingeniería en Informática
Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información
Principios de Diseño de Sistemas Digitales

Konputagailuen Arkitektura eta Teknologia Saila
Departamento de Arquitectura y Tecnología de Computadores

Examen de la Convocatoria Extraordinaria. **13 de junio de 2012**

Apellidos, Nombre:	*Grupo:* **castellano**

Duración estimada del examen: ***3 horas.***

1º [1]	2º [0,5]	3º [2]	4º [1]	5º [3]	6º [2,5]	

Ejercicio 1 [1 punto]

Dada la siguiente función $f(d,c,b,a) = cb + d\overline{c}\overline{b}a + \overline{d}ca + \overline{d}b\overline{a} + \overline{d}\overline{c}\overline{b} + \overline{d}ba$

a. Obtén la expresión algebraica mínima de la función *f*, utilizando para ello un **Mapa de Karnaugh**.

dc \ ba	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

`f(d,c,b,a) =`

b. A partir de la expresión que has obtenido, diseña un **circuito** utilizando únicamente puertas de tipo **NOR**. Ten en cuenta para ello que todas las señales de entrada, a, b, c y d, están en lógica negativa.

(5)

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |1-z|$$

$$|a+bi| = \frac{1}{|a+bi|} = |(1-a)-bi| \Rightarrow \sqrt{a^2+(bi)^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+bi^2}} = \sqrt{(1-a)^2-(bi)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{a^2+b^2 = \frac{1}{a^2+b^2} = (1-a)^2 - b^2 \Rightarrow 0 = \frac{1}{(a^2+b^2)(a^2+b^2)} = (1-a^2)-b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 = \frac{1}{a^2+b^2} = (1-a)^2 - b^2 \Rightarrow a^2+(1-a)^2 \cancel{+b^2-b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{a^2}\ a^2+a^2-2a+1 = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow 2a^2-2a+1 = \frac{1}{a^2+b^2}$$

(6)

$$\operatorname{Im}(z+2i) = \operatorname{Re}(z-3)$$

$$\operatorname{Im}(a+bi+2i) = \operatorname{Re}(a-3+bi) \Rightarrow \operatorname{Im}(a+(b+2)i) = \operatorname{Re}((a-3)+bi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+2)i = (a-3) \Rightarrow (3-a)+(b+2)i = 0 \Rightarrow b \quad a=0$$

(7)

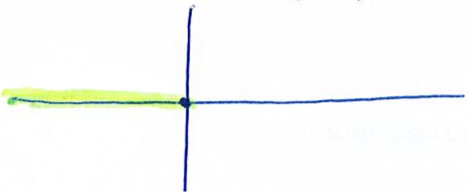
$$\frac{|1+z|}{|1-z|} \leq 1 \Rightarrow \cancel{\frac{|(1+a)+bi|}{|(1-a)-bi|} \leq 1} \Rightarrow \cancel{\frac{\sqrt{(a+1)^2+(bi)^2}}{\sqrt{(1-a)^2+(-bi)^2}} \leq 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{(a+1)^2+b^2}{(1-a)^2+b^2} \leq 1} \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{(a+1)^2+b^2}{(1-a)^2+b^2} \cdot \frac{(1-a)^2-b^2}{(1-a)^2-b^2} = \frac{(a+1)^2\cdot(1-a)^2-b^4}{(1-a)^4+b^4} = \frac{(a^2+2a+1)(a^2-2a+1)-b^4}{}}$$

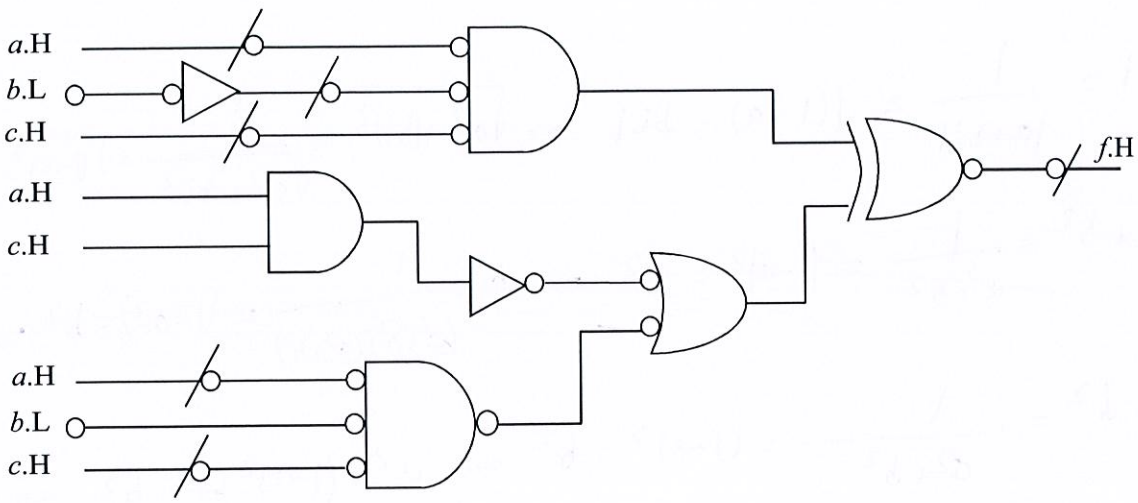
$$\frac{|1+z|}{|1-z|} \leq 1 \Rightarrow |1+z| \leq |1-z| \Rightarrow (a+1)^2+b^2 \leq (1-a)^2+b^2 \Rightarrow \cancel{a^2}+2a+1+b^2 \leq a^2-2a+1+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$$



Ejercicio 2 [0,5 puntos]

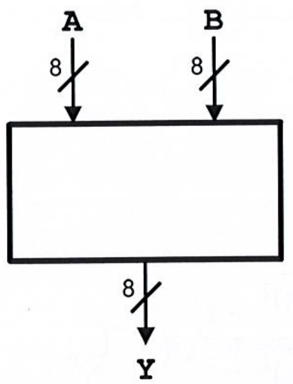
Dado el siguiente esquema:



Sean los valores lógicos de las señales de entrada del circuito de la figura los siguientes: `a = 1`, `b = 0` y `c = 1`. Señala en cada tramo del esquema el valor lógico correspondiente (`0/1`) así como el valor físico (`H/L`).

Ejercicio 3 [2 puntos]

a. Diseña un circuito **combinacional** de acuerdo al esquema adjunto para procesar dos números **naturales** de **8 bits** (`A` y `B`). La salida (`Y`) también es un número **natural** de **8 bits** y debe responder al algoritmo indicado:




```
if A = B then Y := 2A
   else if A > B then Y := A - B
                 else Y := B - A
```

En este apartado, no tengas en cuenta el desbordamiento (*overflow*) que pudiera tener lugar.

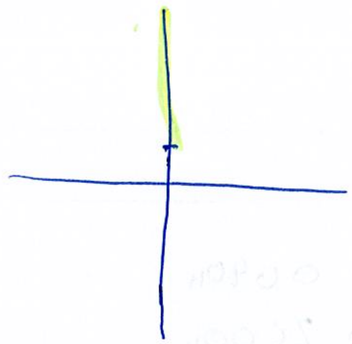
b. Analiza si en alguno de los casos puede ocurrir desbordamiento (*overflow*). En caso afirmativo, propón un ejemplo y genera una nueva señal de salida en el circuito que indique que se ha producido esa excepción. Razona tu respuesta.

(12)

$\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z^2)$

$\mathrm{Re}(a+bi) \leq \mathrm{Im}((a+bi)^2) \Rightarrow a \leq \mathrm{Im}(\cancel{(a+bi)}\ a^2+2abi-b) \Rightarrow$

$\Rightarrow a \leq 2ab \Rightarrow \frac{a}{2a} \leq b \Rightarrow b \geq \frac{1}{2}$

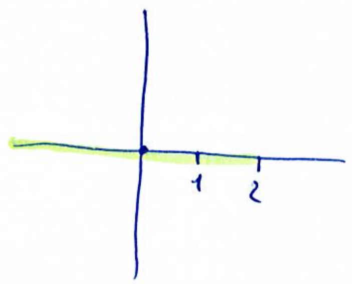


(14)

$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 2$

$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) < 2 \Rightarrow \mathrm{Re}(a+bi) + \mathrm{Im}(a+bi) < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b < 2 \underset{b=0}{\Rightarrow} a < 2$

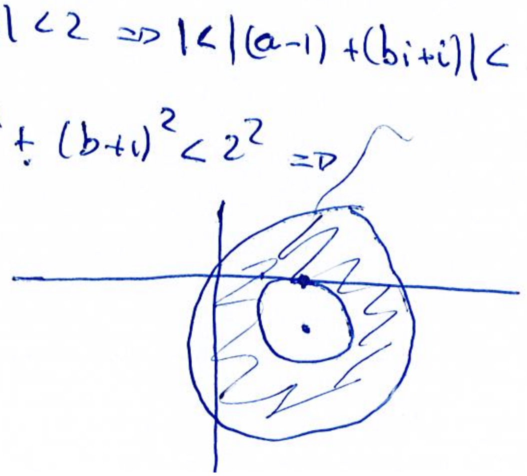


15)

$1 < |z+i-1| < 2$

$1 < |z+i-1| < 2 \Rightarrow 1 < |(a-1) + (bi+i)| < 2 \Rightarrow 1 < \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1^2 < (a-1)^2 + (b+1)^2 < 2^2 \Rightarrow$



Ejercicio 6 [6 puntos; *puntuación mínima: 2 punto*]

a.

3E03h helbidean dagoenean: Bit 2 estadoan. Beraz, mov r3 eb8ten arillo 8en.

IR1: 6861h IR2: 2C00h

b.

M/E-LD: Egoeran bedago ordean: IR1: 0640h
IR2: 2C00h

c.

d.

(10)

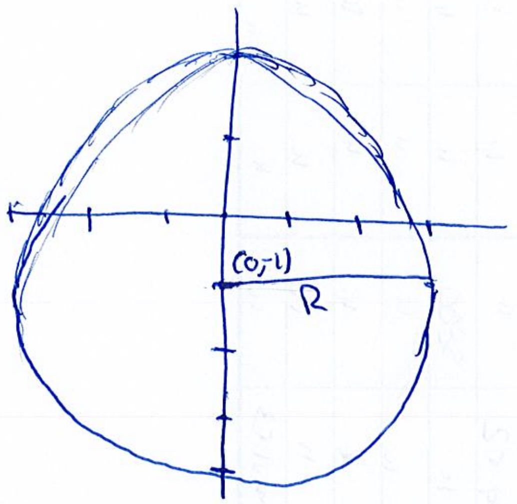
$|z+i| \leq 3$

$|z+i| \leq 3 \Rightarrow |a+bi+i| \leq 3 \Rightarrow |a+(b+1)i| \leq 3 \Rightarrow \sqrt{a^2+(b+1)^2} \leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+(b+1)^2 \leq 3^2 \Rightarrow (a-0)^2+(b-(-1))^2 \leq 3^2$

Zirkunferentziaren ekuazioa dugu hau: $(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2 \leq R^2$

non (α,β) zirkunferentziaren erdiko puntua den eta R erradioa



(11)

$Re\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{2}$

$Re\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{Re\left(\frac{1}{z}\right)} \Rightarrow \cancel{Re}\ Re\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + \cancel{Im\left(\frac{-bi}{a^2+b^2}\right)} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}}$$

$\Rightarrow \frac{a}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a \geq \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow 2a \geq a^2+b^2 \Rightarrow$

e.

	estado	PC	@MEM	MEM oper	MEM DAT_{out}	IR_1	IR_2	BR[r2]	BR[r3]	R_o1	R_o2	R_ual
	busq1	3E00h	3E00h	RD	ld r2	-	-	-	-	-	-	-
	Bi1 2	3E01h	3E01h	RD	2C00h	ld r2	-	-	-	-	-	-
	Desk	3E02h	3E02h	-	Z	"	2C00h	-	-	-	-	-
	M/EL ~~E~~ 1Q	3 "	2C00h	RD	0004H	"	"	"	"	"	"	"
	Bi1 1	3E02h	3E02h	RD	mov r3	"	"	0004H	-	-	-	-
	Bi1 2	3E03h	3E03h	RD	0000h	mov r3	~~0000h~~ "	"	-	-	-	-
	Desk	3E04h	3E04h	-	Z	"	0000H	"	-	-	-	-
	L_OP	3 "	"	-	Z	"	"	"	-	-	-	-
	A_OP	"	"	-	Z	"	"	"	-	0001H	0000H	-
	E_OP	"	"	-	Z	"	"	"	-	"	"	0001H
	Bi1 1	"	"	RD	beq r2	"	"	"	0001H	"	"	"
	Bi1 2	3E05H	3E05	RD	3E0CH	beq r2	"	"	"	"	"	"
	Desk	3E06H	3E06H	-	Z	"	3E0CH	"	"	"	"	"
	L_Beq	+1	"	-	Z	"	"	"	"	"	"	"
	A_Beq	"	"	-	Z	"	"	"	"	0004H	"	"
	Bi1 1	"	"	RD	mul r3	"	"	"	"	"	"	"
	Bi1 2	3E0C4	3E0?4	RD	~~0~~/2	mul r3	"	"	"	"	"	"

8)

$\sin z = 2$

$\sin z = 2 \Rightarrow \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = 2 \Rightarrow e^{zi} - e^{-zi} = 4i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~zi - 1 - zi = 4i => 2zi - 4i = 0~~

$\Rightarrow e^{zi} - \frac{1}{e^{zi}} = 4i \Rightarrow \frac{e^{2zi} - 1}{e^{zi}} = 4i \Rightarrow \cancel{e^{2z} - 1 = 4i}$

$\Rightarrow e^{2zi} - 1 = 4ie^{zi} \Rightarrow t^2 - 4it - 1 = 0$

$t = \frac{+4i \pm \sqrt{(4i)^2 - 4 \cdot -1 \cdot 1}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-16 + 4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4i \pm 2\sqrt{3}i}{2} =$

$= (2 \pm \sqrt{3})i$

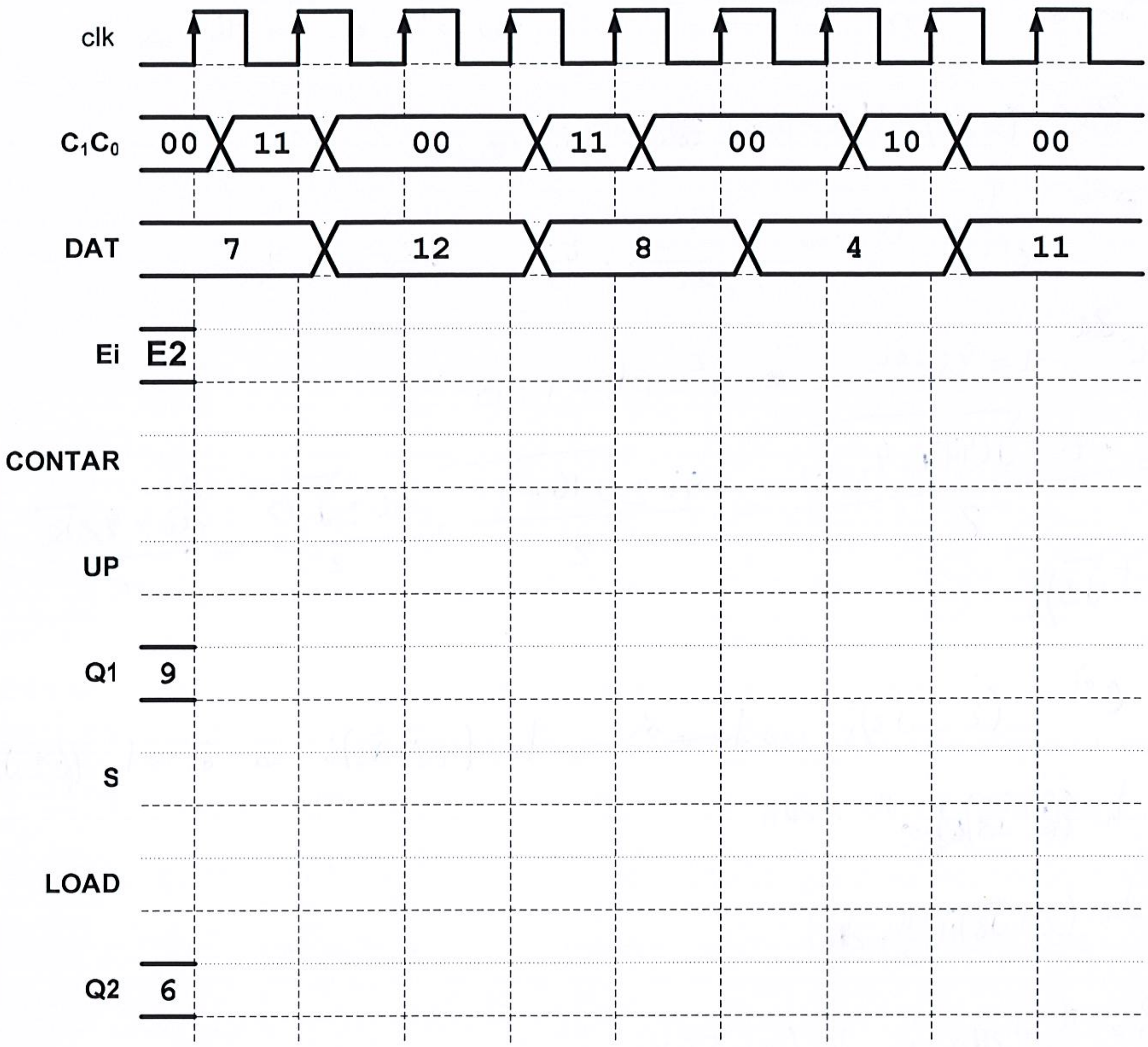
$zi \quad e^{zi} = (2 \pm \sqrt{3})i \Rightarrow zi = \ln(2 \pm \sqrt{3})i \Rightarrow zi = \ln((2 \pm \sqrt{3})i e^{(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)})$

$zi = \ln (2 \pm \sqrt{3}) e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$zi = \ln(2 \pm \sqrt{3}) i + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \ln(2 \pm \sqrt{3})i$

(por si te hubieras equivocado, aquí tienes una segunda copia del cronograma)



(4)

$$Re\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$$

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{a+(b+1)i}{a+(b-1)i} = \frac{a+(b+1)i}{a+(b-1)i} \cdot \frac{a-(b-1)i}{a-(b-1)i} = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b-1)^2}$$

$$Re\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{a^2}{a^2+(b-1)^2} = 0$$

2)

$$z = i^i$$

$$z = i^i \Rightarrow \ln z = \ln i^i \Rightarrow \ln z = i \ln \underset{w}{i} \Rightarrow \ln z = i \cdot \cancel{\ln e}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i \Rightarrow$$

$$|z'| = \sqrt{0^2+1^2} = 1 = \rho$$

$$Arg(z') = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2} = \theta$$

$$\Rightarrow \ln z = i^2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \Rightarrow \ln z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \cancel{e}^{\ln z} = e^{\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

$k=0$ donen, $z = e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0'21$

$K=1$ donen, $z = e^{\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)} = 111'3$

3)

$$e^{4z} = i \Rightarrow$$

$$e^{4z} = i \Rightarrow \cancel{\ln} e^{4z} = \ln i \Rightarrow 4z = \ln i \Rightarrow z = \frac{1}{4} \ln \underset{z'}{i}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |z'| = \sqrt{0^2+1^2} = 1 \\ \arg(z') = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

$$z = \frac{1}{4} \cancel{\ln e}^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i} \Rightarrow z = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) i$$

Ejercicio 2 [6 puntos; *puntuación mínima: 2 puntos*]

1.

Ez, ez dago ondo eginda, zeren eta, Ld_el gauzatzeko gutxienez ziklo bat behar dugu, eta LD_ei-eko zenbakiak determinatzen duenez E_PC Egoerara joan edo ez, ezinezkoa izango litzateke A_Beq egoerarik gabe & R_el = 0 den edo ez determinatzea, beraz emaitzak gaizki emateko arriskua dago

2.

Bai, hori egin daiteke, orduan determinatuta badago z=0 edo z=1 izango den eta horrela Egoera bat aurrezten ahalko genuke.

3.

40Ah: Egoeran egoteko, edo Add-eko ~~Bt~~ Desk, L_OP, A_OP, ID_OP-n edo St agindua Bil1 egoeran egon behar da.

4.

Ir_~~1~~: ld r2 x : 00040H

Ir_2: 1000H

@1: 00000 @h: 00010 @2: 00010

Dat_Br: Ezezaguna

r2 = 0008H

16- Aritketak Aitzol Elo Etxano Analisi Matematikoa

1- $z = \sqrt{i}$; $i \to z'$

$z' = a + bi \Rightarrow z' = 1 \cdot i \Rightarrow z' = i$

z'-ren modulu eta argumentua kalkulatuko dugu ρ eta θ lortzeko.

$|z'| = \sqrt{1^2} = 1$

Argumentua $\Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \arctan\frac{b}{a} = \theta \Rightarrow \arctan\frac{1}{0} = \theta$ infinitorantz jotzen du beraz, $\pi/2$ da lehenengo kuadrantean tangente infinito duen puntua.

$\theta = \pi/2$

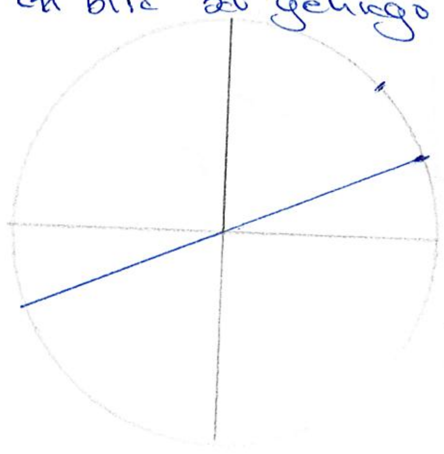
$z = \sqrt{i} \Rightarrow z = \sqrt{\rho_\theta} \Rightarrow z = \sqrt{1}_{\frac{\pi/2 + 2\pi \cdot k}{2}} \Rightarrow z = 1_{\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2}}$

$k=0$ denean, $z = 1_{\frac{\pi/2 + 2\pi \cdot 0}{2}} = 1_{\pi/4}$

$k=1$ denean, $z = 1_{\frac{\pi/2 + 2\pi \cdot 1}{2}} = 1_{5\pi/4}$

$k=2$ denean, $z = 1_{\frac{\pi/2 + 2\pi \cdot 2}{2}} = 1_{9\pi/4}$

Beraz, $k=0$ eta $k=2$ puntu berdinean daude soilik $k=2$ denean ~~##~~ bira bat gehiago eman duelako.



2-

$$z = \sqrt{\underbrace{-8i}_{z'}}$$

$z' = a + bi \Rightarrow z' = 0 \cancel{+} -8i \Rightarrow z' = -8i$

z'-ren Modulua eta argumentua kalkulatuko ditugu, ρ eta θ kalkulatzeko.

$$|z'| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0+(-8)^2} = 8$$

Argumentua $\Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \arctan\frac{b}{a} = \theta \Rightarrow \theta = \arctan\frac{-8}{0}$
arctan infiniturantz jotzen du, beraz, tangente infinitu den puntu bakarra $\theta = 3\pi/2$ da. Beraz, argumentua $\theta = 3\pi/2$ da.
3. kuadrantean

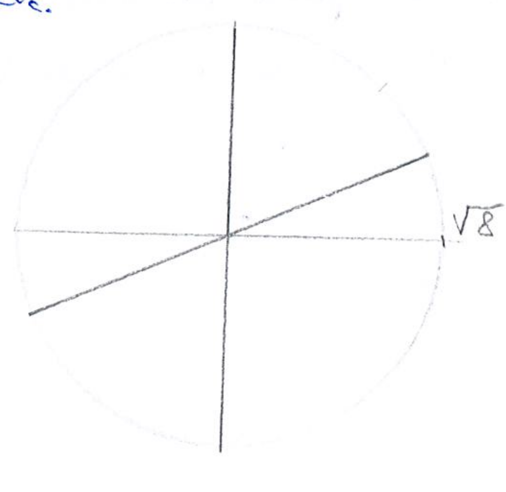
$$z = \sqrt{\rho_\theta} \Rightarrow z = \sqrt{8}_{\frac{3\pi/2 + 2\pi k}{2}}$$

$k=0$ denean, $z = \sqrt{8}_{\frac{3\pi/2 + 2\pi\cdot 0}{2}}$ $\quad z = \sqrt{8}_{3\pi/4}$

$k=1$ denean, $z = \sqrt{8}_{\frac{3\pi/2 + 2\pi\cdot 1}{2}}$ $\quad z = \sqrt{8}_{7\pi/4}$

$k=2$ denean, $z = \sqrt{8}_{\frac{3\pi/2 + 2\pi\cdot 2}{2}}$ $\quad z = \sqrt{8}_{11\pi/4}$

$k=2$ eta $k=0$ puntu berean daude, soilik $k=2$-k bira bat gehiago duela.



21-

$z^3 = 1+i \qquad z' = 1+i \qquad z' = a+bi$

Lehenengo, ρ eta θ zeintzuk diren kalkulatuko dugu.

ρ, kalkulatzeko z'-ren modulua aterako dugu.

$\rho = |z'| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

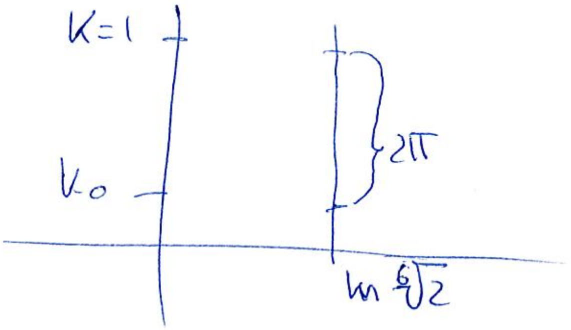
θ, kalkulatzeko z' argumentua kalkulatu behar dugu.

~~$\theta =$~~ Argumentua $\Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \theta \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$
$\Rightarrow \theta = \pi/4$

$z' = \rho_\theta \Rightarrow z' = \sqrt{2}_{\pi/4}$

$z^3 = \rho_\theta \Rightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{\pi/4}} \Rightarrow z = \sqrt[6]{2}_{\pi/4}$

$\ln z = \ln \rho e^\theta = \ln \sqrt[6]{2} + (\pi/4 + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$



$k=0$ ~~za~~ $\ln \sqrt[6]{2} + \pi/4$

Aritketak Analisi Matematikoa

16 -

5 -

$z = \sqrt[3]{\underbrace{1+i}}$

$z' = a+bi = 1+i$

$z' = 1+i = 1+1\cdot i$

z'-ren moduloa eta argumentua kalkulatuko dugu ρ eta θ lortzeko.

$|z'| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow |z'| = \rho = \sqrt{2}$

Argumentua $\Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt[3]{\rho}_{\theta} \Rightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\pi/4} \Rightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}_{\frac{\pi/4 + 2\pi k}{3}} \Rightarrow$

$z = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi/4 + 2\pi k}{3}}$

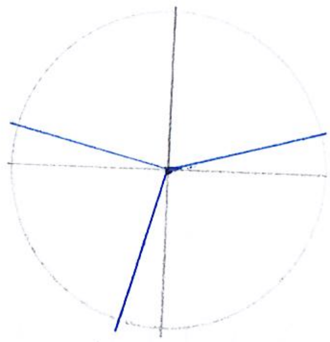
$k = 0, 1, 2$

$k=0 \quad z = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi/4 + 2\pi\cdot 0}{3}} = \sqrt[6]{2}_{\pi/12}$

$k=1 \quad z = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi/4 + 2\pi\cdot 1}{3}} = \sqrt[6]{2}_{3\pi/4}$

$k=2 \quad z = \sqrt[6]{2}_{\frac{\pi/4 + 2\pi\cdot 2}{3}} = \sqrt[6]{2}_{12\pi/12}$

$k=3$ denean $k=0$ ~~de~~-ren emaitza bera emango du bira bat gehiagorekin.



$k=0$ denean $\theta = \pi/12$

$k=1$ denean $\theta = 3\pi/4$

$k=2$ denean $\theta = 17\pi/12$

17

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \Rightarrow \left|\frac{x-3+yi}{(x+3)+yi}\right| = 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2-9+y^2}{(x+3)^2+y^2}\right| = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{x-3+yi}{(x+3)+yi}\cdot\frac{(x+3)-yi}{(x+3)-yi} = \frac{x^2-9+y^2}{(x+3)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{x^2-9+y^2}{(x+3)^2+y^2} = 4 \Rightarrow x^2-9+y^2 = 4(x^2+3)^2+y^2}$$

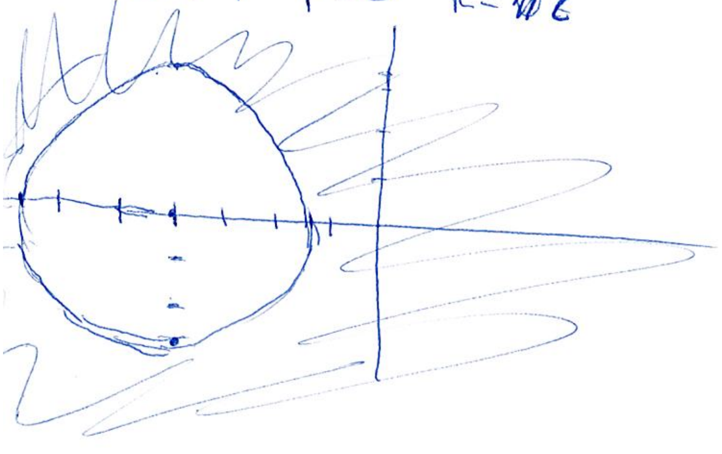
$$Re\left[\frac{x^2-9}{(x+3)^2+y^2}\right] + Im\left[\frac{y^2}{(x+3)^2+y^2}\right]i = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-9+y^2}{(x+3)^2+y^2} = 4 \Rightarrow x^2-9+x^2 = 4\left((x+3)^2+y^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-9+y^2 = 4x^2+24x+36+4y^2 \Rightarrow 3x^2+24x+45+3y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x^2+8x+9+y^2) = 0 \Rightarrow 3\left((x+4)^2-7+y^2\right) = 0 \Rightarrow (x+4)^2+y^2 = 4$$

$\alpha = -4 \quad \beta = 0 \quad R = 2$



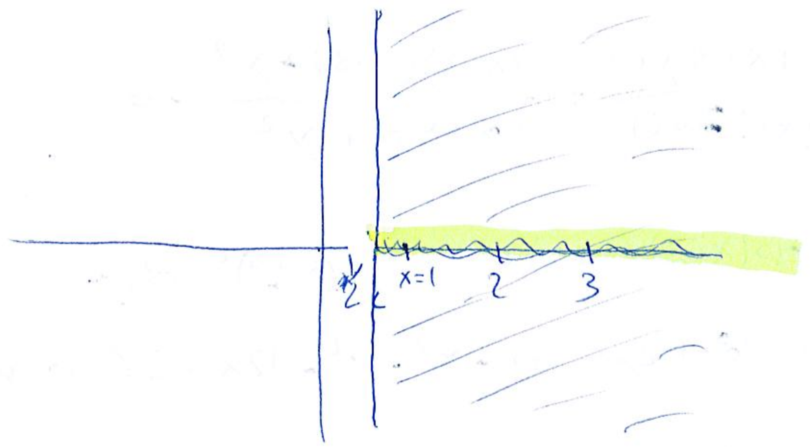
(9) Aitzol Elu Etxano

$|z| > |z-1| \Rightarrow |x+yi| > |x-1+yi| \Rightarrow \sqrt{x^2+(yi)^2} > \sqrt{(x-1)^2+(yi)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2 > (x-1)^2+y^2 \Rightarrow x^2+\cancel{y^2} = (x-1)^2+\cancel{y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x^2}+ = \cancel{x^2}-2x+1 \Rightarrow -2x+1=0 \quad x=\frac{1}{2}$

$x=1$ denean betetzen da propietatea beraz



(10)

$|z+i| \leq 3 \Rightarrow |x+(y+1)i| \leq 3 \Rightarrow \sqrt{x^2+((y+1))^2} \leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2 \leq 3^2 \Rightarrow x^2+(y+1)^2 \leq 9 \Rightarrow x^2+y^2+2y+1 \leq 9 \Rightarrow$

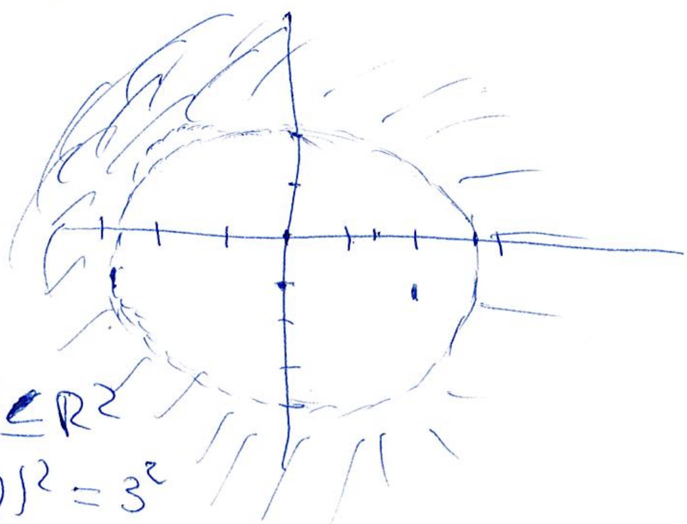
$\Rightarrow x^2+y^2+2y+1=9 \Rightarrow x^2+y^2+2y=8 \Rightarrow \cancel{y^2+2y=8} \Rightarrow$ $\cancel{x=0}$

$\Rightarrow \cancel{y(y+2)=8 \Rightarrow y+2=8 \Rightarrow x=6}$ $\cancel{x=0}$

~~x=0 denean,~~

$\cancel{x=0} \Rightarrow \cancel{x^2=8 \Rightarrow x=\sqrt{8}}$

$x=$ ~~R4~~



$x^2+(y+1)^2 \leq 9$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leq R^2$

$(x-0)^2+(y-(-1))^2 = 3^2$

17.

12. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \Rightarrow |$

$$\frac{z-3}{z+3} = 2 \Rightarrow \frac{(z-3)(z-3)}{(z+3)(z-3)} = 2 \Rightarrow \frac{(z-3)^2}{z^2-9} = 2 \Rightarrow (z-3)^2 = 2(z^2-9)$$

$$\frac{x-3+yi}{x+3+yi} = \frac{(x-3+yi)(x+3-yi)}{(x+3+yi)(x+3-yi)} = \frac{(x-3)(x+3)+y^2}{(x+3)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+3)+y^2}{(x+3)^2+y^2} = 2 \Rightarrow (x-3)(x+3)+y^2 = 2((x+3)^2+y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 9 + \cancel{y^2} = \cancel{2}x^2 + 12x + 18 + \cancel{2}y^2 \Rightarrow -x^2 - y^2 - 12x - 27 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 12x + 27 = 0$$

$$(x-3+yi)^2 =$$

Analisi matematikoa

Azterketako ariketak

2014 enero

a) $Re\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2}$

b) $Im\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2}$

a) $Re\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow Re\left(\frac{1}{x-1+yi}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{z-1}$

$$\frac{1}{(x-1)+yi} = \frac{1}{(x-1)+yi} \cdot \frac{(x-1)-yi}{(x-1)-yi} = \frac{(x-1)-yi}{(x-1)^2+y^2} =$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - \left[\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right] i$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-1 = \frac{(x-1)^2+y^2}{2} \Rightarrow 2x-2 = (x-1)^2+y^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $2x-2 = x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$y=0$

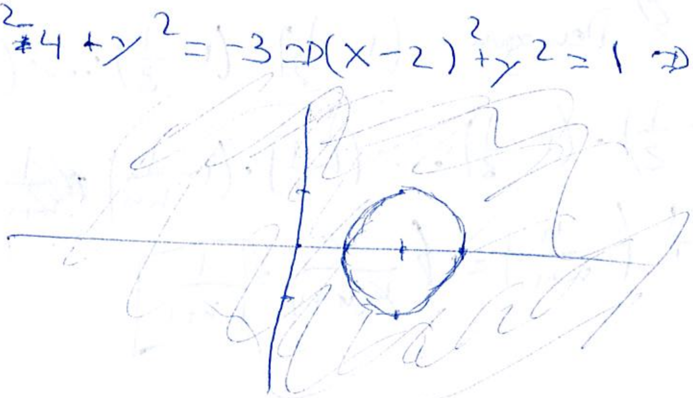
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2} = \frac{4\pm2}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2-4x+y^2=-3 \Rightarrow (x-2)^2-4+y^2=-3 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2+y^2<1$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 < R^2$

Beraz, $R=1$, $\alpha=2$, $\beta=0$



2014 enero

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

$k=n$ izanik,

1) $P(k)$ egiazkoa bada

2) ~~P~~ $n\geq k$ izanik eta $P(n)$ egiazkoa bada, $P(n+1)$ $\Big\}$ $\forall n\geq k$ ~~a~~ $P(n)$ egiazkoa

1)

$k=3$

Ezkerreko atala: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Eskuineko atala: $\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$

Beraz, betetzen da.

2) Demagun, $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ egia izanik

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cancel{=\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n}{n(n+1)}=\boxed{\frac{1}{n+1}}$$

b)

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(x-1)+yi}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{(x-1)^2-yi}{(x-1)^2+y^2}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)+yi}\cdot\frac{(x-1)-yi}{(x-1)-yi} \Rightarrow \frac{(x-1)-yi}{(x-1)^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left[\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}\right] - \left[\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]i \Rightarrow \frac{y}{(x-1)^2+y^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{(x-1)^2+y^2}{2} \Rightarrow 2y = (x-1)^2+y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 - 2y \cancel{+1} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \mp 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$\alpha = 1 \quad \beta = 1 \quad R = 1$