IRAKASLEA: Patxi Angulo Martin (339 bulegoa)

1. Gaia: Zenbaki-multzoak
   - 1.1. Zenbaki arruntak eta osoak.
   - 1.2. Zenbaki arrazionalak.
   - 1.3. Zenbaki errealak.
   - 1.4. Zenbaki konplexuak.
2. Gaia: Topologia
   - 2.1. Espazio metrikoak.
   - 2.2. Espazio normadunak.
3. Gaia: Segidak $\mathbb{R}$ multzoan
   - 3.1. Segidak. Segiden limiteak.
   - 3.2. Segida konbergenteak.
   - 3.3. Segiden arteko eragiketak eta limiteak. Indeterminazioak.
   - 3.4. Indeterminazioak ebazteko metodoak.
   - 3.5. Cauchy-ren segidak.
4. Gaia: Serieak
   - 4.1. Serieak. Serieen izaerak.
   - 4.2. Gai positiboko serieak.
     - 4.2.1. Definizio eta propietateak.
     - 4.2.2. Konparaziozko irizpide orokorra.
     - 4.2.3. Konparaziozko irizpide orokorraren aplikazioak.
     - 4.2.4. Serie baten batura hurbildua.
   - 4.3. Serie alternatuak.
5. Gaia: Aldagai errealeko funtzioak. Jarraitutasuna
   - 5.1. Aldagai errealeko funtzioak.
   - 5.2. Funtzioen limiteak. Limiteen propietateak.
   - 5.3. Funtzioen arteko eragiketak eta limiteak.
   - 5.4. Indeterminazioak ebazteko metodoak.
   - 5.5. Funtzio jarraituak.
   - 5.6. Funtzio jarraituen propietateak.

6. Gaia: Aldagai errealeko funtzioak. Deribagarritasuna
   - 6.1. Funtzioen deribagarriuak.
   - 6.2. Funtzio deribagarrien propietateak.
   - 6.3. Taylor-en formula.
7. Gaia: Aldagai errealeko funtzioak. Adierazpen grafikoa
   - 7.1. Funtzioen muturrak.
   - 7.2. Asintotak.

BIBLIOGRAFIA

Teoria

J. I. Barragués etab.: *Analisi Matematikoa*, Pearson, Madril, 2012
N. Piskunov: *Kalkulu Diferentziala eta Integrala.* 2. arg., UEU, Bilbo, 2009
M. J. Zarate: *Matematika Orokorra I, 1. partea.* UEU, Bilbo, 1980

L. Abellanas, A. Galindo: *Métodos de Cálculo.* Mc Graw-Hill, Madril, 1989
T. M. Apostol: *Análisis Matemático.* Ed. Reverté, Bartzelona, 1977
F. Galindo etab.: *Guía práctica de cálculo infinitesimal en una variable.* Thomson, Madril, 2003
F. Garcia, A. Gutierrez, *Cálculo Infinitesimal I, 1 eta 2.* Pirámide, Madril, 1987
F. Granero, *Cálculo.* Mc Graw-Hill, Madril, 1990
J. Martínez Salas: *Elementos de Matemáticas.* Valladolid, 1979

Ariketak

J. Aizpurua, P. Angulo, *Bektoreak eta zenbaki konplexuak.* Elhuyar, Usurbil, 1994
P. Angulo, *Deribatuak eta integralak.* Elhuyar, Usurbil, 1994
P. Angulo, *Funtzioen adierazpen grafikoa.* Elhuyar, Usurbil, 1994

L. Abellanas, A. Galindo, *Métodos de Cálculo.* Mc Graw-Hill, Madril, 1989
F. Ayres Jr., *Cálculo Diferencial e Integral.* Mc Graw-Hill, Mexiko, 1987
F. Granero, *Cálculo.* Mc Graw-Hill, Madril, 1990

Web-orriak

http://zthiztegia.elhuyar.org/
hiru.com matematika: http://www.hiru.com/matematika
WolframMathWorld: http://mathworld.wolfram.com/
Wikipedia
DivulgaMAT: http://divulgamat.ehu.es/
Maths online Gallery: http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie.html

AH

1. Gaia: Zenbaki multzoak

1.1. Zenbaki arruntak eta osoak

1) Definizioa

Izan bitez P multzoa, $0 \in P$ elementua $S: P \longrightarrow P$ aplikazioa, non $S(x) = x + 1$ (hurrengoa) baita. Hiru baldintza hauek betetzen badira:

1. $\forall x \in P \quad s(x) \neq 0$ izango da
2. $\forall x, y \in P \quad x \neq y$ boda, $S(x) \neq S(y)$ izango da
3. Indukzio - axioma

   edozein zenbakik badu hurrengoa ere

   $A \subseteq P$ boda, non $0 \in A$ eta $x \in A$ boda, $S(x) \in A$ izango du. Orduan $A = P$ izango da.

Kasu honetan, P zenbaki arrunten multzoa dela eta honela idazten da:

$\boxed{\text{Zenbaki arrunten multzoa } (\mathbb{N})}$ $(\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\})$

2) Propietateak

- $\mathbb{N}$ multzoa itxia da $\oplus$ eta $\otimes$ egitean, hau da, beti arrunta izango da emaitza.

3) Definizioa

$\mathbb{N}$ multzoa $\leq$ ordena - erlazioa honela definitzen da:

$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \leq b$ da $\exists c \in \mathbb{N}$ non $a + c = b$

4) Propietateak

- $\mathbb{N}$ multzoa ongi ordenatua da. Hau da, $\mathbb{N}$-ren edozein multzo ez-hutsek lehen elementua du. Adb.:

  {Bakoitiak} $\rightarrow$ lehen elementua 1

  $\{3^n\} \longrightarrow$ lehen elementua 1

5) Printzipioa (Indukzio - printzipioa)

Propietate bat $k \in \mathbb{N}$ zenbakirako betetzen bada eta $n \geq k$ zenbakirako betetzen dela pentsatuz, $n + 1 \in \mathbb{N}$ (hurrengoa) zenbakirako betetzen dela frogatzen bada, k edo handiago edo berdinak diren zenbaki arrunt guztietarako beteko da propietatea.

6) Adibidea: 1ρ arlketa

(ρ) Zenbaki errealen multzo finitu orok badituzte maximo eta minimoak

Hautakuak hobeto ulertzeko

① $n=1$ $\quad A_1=\{a_1\}$ bada, $\max(A_1)=a_1$ da

$n=2$ $\quad A_2=\{a_1,a_2\}$ bada, $a_1 \geq a_2$ $\quad \max(A_2)=\max(A_1)$

$a_1 < a_2$ $\quad \max(A_2)=a_2$

$n=3$ $\quad A_3=\{a_1,a_2,a_3\}$ bada, $a_3 \geq \max(A_2)$ $\quad \max(A_3)=a_3$

$a_3 < \max(A_2)$ $\quad \max(A_3)=\max(A_2)$

② Demagun $A_n=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ multzoak maximoa duela ($P(n)$ egia)

Frogatu beharko dugu $A_{n+1}=\{a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1}\}$ multzoak maximoa izango duela. ($P(n+1)$ egia dela frogatu)

Badakigu $\max(A_n)$ existitzen dela:

$a_{n+1} \geq \max(A_n)$ bada, $\max(A_{n+1})=a_{n+1}$ izango da.

$a_{n+1} < \max(A_n)$ bada, $\max(A_{n+1})=\max(A_n)$ izango da

③ Hortaz, beti existitzen da $\max(A_{n+1})$. Ondorioz propietatea betetzen da $\forall n \geq 1$

"Zenbaki arrunten ($\mathbb{N}$) multzoan $3+x=1$ moduko ekuazioak ez dute soluziorik. Hortaz, $\mathbb{N}$ multzoa zabaldu behar dugu.

Multzo berrian $m+x=n$ moduko ekuazioen soluzioak sartuko ditugu, $\forall m,n \in \mathbb{N}$"

7) Definizioa

Zenbaki osoen ($\mathbb{Z}$) multzoa hau da $\mathbb{Z}=\{x \mid m+x=n$ baita, $\forall m,n \in \mathbb{N}\}$

Ondorioz, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ da eta $\mathbb{Z}$ ez da ongi ordenatua (lehen elementurik ez dago beti)

8) Propietatea

$\mathbb{Z}$ multzoa itxia da $\oplus$ $\ominus$ eta $\otimes$, hau da, emaitza zenbaki osoa izango da.

9) Definizioa

$\mathbb{Z}$ multzoan ordena-erlazioa honela definitzen da:

$\forall a,b \in \mathbb{Z}$ $\quad a<b$ izango da $\quad \exists c \in \mathbb{N} \,/\, a+c=b$ baita

“$\mathbb{Z}$ multzoan $m = n \cdot x$ moduko ekuazioek ez dute soluziorik, $\forall m,n \in \mathbb{Z}$ $n > 0$ izanik. Horrelako ekuazioen soluzioak diren multzoa definitu behar dugu”

1.2 Zenbaki arrazionalak

10) Definizioa

Zenbaki arrazionalen ($\mathbb{Q}$) multzoa hau da $\mathbb{Q} = \{x \mid m = n \cdot x \ \forall m,n \in \mathbb{Z},\ n > 0\}$. Errepikapenik ez izateko z.k.h $\{m,n\} = 1$ eskatuko dugu.

Hortaz, $\mathbb{Q}$ multzoa hau izango da: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid \forall m,n \in \mathbb{Z},\ n > 0$ eta $\frac{m}{n}$ laburtezina badira$\}$

Ondorioz, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ betetzen da

11) Propietatea

$\mathbb{Q}$ multzoa itxia da $\oplus$ $\otimes$ $\ominus$ eta $\oslash$ (zati 0 izan ezik), hau da, emaitza beti arrazionala izango da.

12) Definizioa

$\mathbb{Q}$ multzoan $\leq$ ordena-erlazioa honela definitzen da

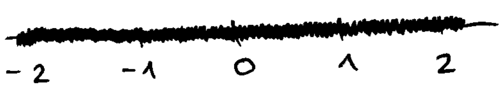
$\forall \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ izango da $m \cdot q \leq n \cdot p$ betetzen bada

Ordenak aukera ematen digu zenbaki arrazional guztiak zuzen batean ordenatzeko.

13) Propietatea

$\mathbb{Q}$ multzoak propietate hauek ditu:

1. $\mathbb{Q}$ multzoa zenbakigarria da, hau da, $\mathbb{Q}$ multzoak $\mathbb{N}$ multzoak adina elementu ditu.
2. $a, b \in \mathbb{Q}$ badira, $a < b$ izanik, $\exists c \in \mathbb{Q} \mid a < c < b$ baita. Ondorioz, bi zenbaki arrazional desberdinen artean infinitu zenbaki arrazional daude



3. Zenbaki arrazionalek hamartarren ugaru finitu edo infinitu periodikoa dute.

$$\frac{1}{4} = 0'25 \qquad \frac{1}{7} = 0'\overline{142857}\dots$$

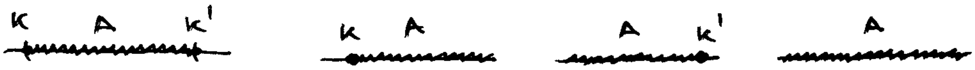
14) Definizioa

$A \subset \mathbb{Q}$ multzoa emanik,

a) A goitik bornatua da $\exists k \in \mathbb{Q} \,/\, \forall x \in A \quad x \leq k$ baita
k-ri A-ren goi-borne deritzo.

b) A behetik bornatua da $\exists k \in \mathbb{Q} / \forall x \in A \quad k \leq x$ baita
k-ri A-ren behe-borne deritzo.

c) A bornatua da goitik eta behetik bornatua bada, bestela
A bornegabea da.



bornatua — bornegabeak

15) Adibidea

a) $\mathbb{N}$ eta $\mathbb{Z}$ bornegabeak dira, baina $\mathbb{N}$ behetik bornatua da: $k = -1, -2'5, -20.000$

b) $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots \right\} \rightarrow$ A bornatua da

0 eta 1 Aren behe borneak / 3 eta 4 Aren goi borneak

16) Definizioa

$A \subset \mathbb{Q}$ multzo bornatua emanik,

a) Aren goi-borne txikiena goi-muturra edo gorena da eta
$\sup(A)$ idatziko dugu.

b) Aren behe-borne handiena behe-muturra edo beherena da
eta $\inf(A)$ idatziko dugu

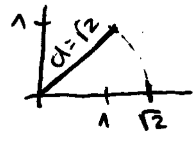
17) Adibidea

a) $\mathbb{N}$ multzoak ez du gorenik, ez duelako goi-bornerik.
$\inf(\mathbb{N}) = 0$ da, behe-bornerik handiena.

b) $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \rightarrow \sup(A) = 2$ da eta $\inf(A) = 1$ da

"$\mathbb{Q}$ multzoa ez da oraindik nahikoa problema guztiak ulopantzeko;
adibide bat hiru ilusgarritan:

a) $x^2 = 2$ ekuazioak ez du soluziorik $\mathbb{Q}$ multzoan ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

b) 

$\mathbb{Q}$ multzoan ez du zuzena beteten

c) $A = \{ x \in \mathbb{Q}^+ / 0 \leq x^2 < 2 \} \rightarrow \sup(A) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ "

1.3 Zenbaki errealak

19) Definizioa

Zenbaki errealen ($\mathbb{R}$) multzoa hiru propietate hauek betetzen dituen multzoa da:

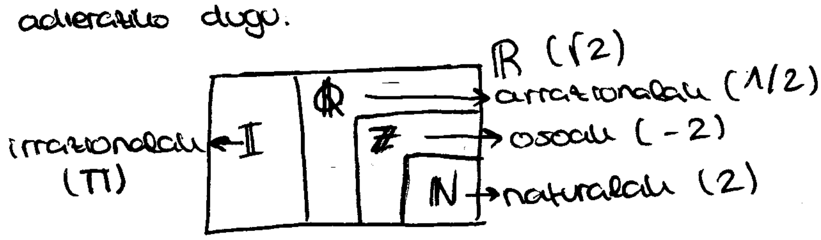
a) $\mathbb{R}$ multzoan $\oplus, \otimes, \ominus$ eta $\oslash$ (zati 0 izan ezik) definiturik daude (gorputzaren axioma)

b) $\mathbb{R}$ multzoan $\leq$ ordena-erlazioa definiturik dago (ordenaren axiomak)

c) $\mathbb{R}$-ren azpimultzo bornatu guztiek gorena eta beherena daukate ($\pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$) (osotasun-axioma)

Definizio honetatik ondorio hauek atera ditzakegu:

* $\mathbb{R}$ multzoaren eta zuzenaren artean aplikazio bijektibo bat defini daiteke, hau da, zuzena osoa definituta dago.
* Zenbaki errealek zifra hamartarren kopuru finitua, infinitu periodikoa edo ez-periodikoa dute.
* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ betetzen da. Arrazionalak ez diren zenbaki errealei irrazionalak deritze eta horien multzoa $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ edo $\mathbb{I}$ adierazten dugu.



20) Propietatea

$\mathbb{R}$ multzoak propietate hauek ditu:

1. $\mathbb{R}$ multzoa zenbakiezina da ($\mathbb{I}$ multzoaren ondorioz)
2. Bi zenbaki erreal desberdinen artean infinitu zenbaki arrazional eta infinitu zenbaki irrazional daude.

21) Definizioa

$A \subset \mathbb{R}$ multzo bornatua emanik,

a) A-ren gorena A-ren elementua bada, maximo deritzo eta $\max(A)$ idatziko dugu.

b) A-ren beherena A-ren elementua bada, minimo deritzo eta $\min(A)$ idatziko dugu.

22) Adibidea

a) $\mathbb{N}$ multzoan, $\inf(\mathbb{N}) = 0$ eta $0 \in \mathbb{N}$ denez, $\min(\mathbb{N}) = 0$ da

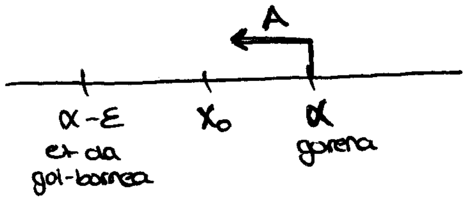
b) $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\sup(A) = 2$ eta $2 \in A$ denez, $\max(A) = 2$ da
$\inf(A) = 1$ eta $1 \notin A$ denez, $\min(A)$ ez da existitzen

23) Teorema

1. $A \subset \mathbb{R}$ multzo goitik bornatua emanik, $\alpha \in \mathbb{R}$ Aren gorena da baldin, eta soilik baldin,

   a) $\forall x \in A \quad x \le \alpha$ (Goi-bornea)

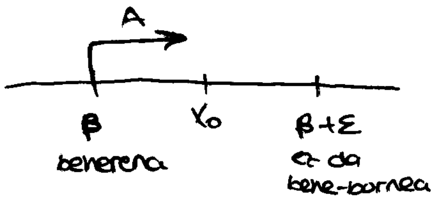
   b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A \quad \alpha - \varepsilon < x_0 \le \alpha$ (txikiena)



2. $A \subset \mathbb{R}$ behetik bornatua emanik, $\beta \in \mathbb{R}$ Aren beherena da baldin, eta soilik baldin (b.s.b.),

   a) $\forall x \in A \quad x \ge \beta$ (Behe-bornea)

   b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A \quad \beta \le x_0 < \beta + \varepsilon$ (handiena)



24) Definizioa

$I \subset \mathbb{R}$ multzoa tartea da $\forall x, y \in I$ $x < z < y$ bada, $z \in I$ betetzen bada.

Tarte bornatuak: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ Tarte irekia

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ Tarte itxia

Tarte bornegabeak: $\pm\infty$ aldera hurbiltzen direnak

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ Tarte irekia

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$ Tarte itxia

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ Tarte irekia

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ Tarte itxia

"$\mathbb{R}$ multzoan ezin dira ebatzi $x^2+1=0$ moduko ekuazioak. Horregatik ekuazio horiek ebazteko beste multzo bat behar dugu: $\mathbb{C}$ multzoa"

1.4 Zenbaki konplexuak

25) Definizioa

zenbaki konplexuen $\mathbb{C}$ multzoa hau da:

$$\mathbb{C}=\{a+bi \,/\, a,b\in\mathbb{R},\ i=\sqrt{-1}\}$$

a: zati erreala ; b: zati irudikaria ; i: unitate irudikaria

26) Definizioa

$z=a+bi\in\mathbb{C}$ zenbaki konplexua emanez, $\sqrt{a^2+b^2}$ balioari z-ren modulu deritzo eta ρ edo $|z|$ idazten da. $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ balioari z-ren argumentu deritzo eta θ edo $\arg(z)$ idazten da.

$\theta\in[0,2\pi)$ edo $\theta\in(-\pi,\pi]$ tartean badago argumentu nagusia dugu eta $\mathrm{Arg}(z)$ idazten da ($\arg(z)\neq\mathrm{Arg}(z)$).

27) Definizioa

$\mathbb{C}$ multzoan, $z=a+bi$ eta $w=c+di$ zenbakiak berdinak dira ($z=w$) $a=c$ eta $b=d$ direnean.

28) Definizioa

$z=a+bi\in\mathbb{C}$ zenbakia emanda $\bar{z}=a-bi$ zenbakiari z-ren konjokatu deritzo.

$|\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$, hau da, modulu bera dute.

$\mathrm{Arg}(\bar{z})=\arctan\left(\frac{-b}{a}\right)=-\arctan\left(\frac{b}{a}\right)=-\mathrm{Arg}(z)$, hots, argumentuak zeinuz aurkakoak dira.

1.4.1 Adierazpideak

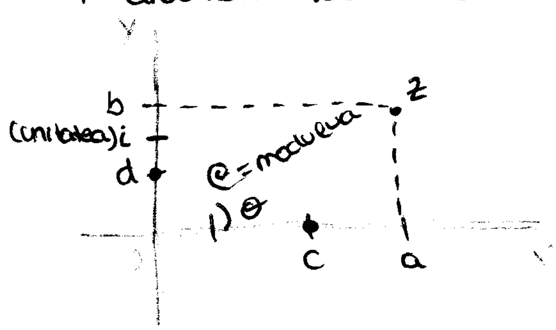
- Binomikoak

$z=a+bi$ z-ren adierazpen binomikoa

- Geometrikoa

Pentsa dezakegu $z=a+bi$ zenbakia OXY planoko (a,b) puntua dela, non a OX ardatzean kokatzen den eta b OY ardatzean. Orduan, $(c,0)$ zenbakia OX ardatzean dago eta $c\in\mathbb{R}$ da. Hortik, beraz, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ dela esan daiteke eta horregatik deritzo OX ardatzari "ardatz erreala".

Bestalde, $(0,d)$ zenbakia OY ardatzean dago eta irudikari puru deritzo. Horregatik OY ardatzari "ardatz irudikaria" deritzo.



- Polarra

$z = a+bi \in \mathbb{C}$ zenbakia ρ eta θ zenbakien bidez ere idatz daiteke OXY planoan, $a = \rho \cdot \cos\theta$ eta $b = \rho \cdot \sin\theta$ izanik. ρ_θ adierazpenari, z-ren adierazpen polar deritzo.

- Trigonometrikoa

z-ren adierazpen binomikoan a-ren eta b-ren balioak ordezkatuz

$z = a+bi = \rho\cos\theta + (\rho\sin\theta)i = \rho(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$ lortzen dugu, z-ren adierazpen trigonometrikoa.

- Exponentziala

Euler-en formula: $e^{bi} = \cos b + i\cdot\sin b$

z-ren adierazpen trigonometrikoan Eulerren formula erabiliz, $z = \rho(\cos\theta + i\cdot\sin\theta) = \rho\cdot e^{\theta i}$ lortzen dugu, z-ren adierazpen exponentziala hain zuzen.

Aldagaiak:	a, b	ρ, θ
Adierazpideak:	$a+bi$ (a, b)	ρ_θ $\rho(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$ $\rho\cdot e^{\theta i}$
Erlazioak:	$a = \rho\cos\theta$ $b = \rho\sin\theta$	$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
Balio-tarteak:	$a, b \in \mathbb{R}$	$0 \le \rho$ $\theta \in \mathbb{R}, \theta \in (-\pi, \pi]$

1.4.2 Eragiketak

$z = a+bi = \rho_\theta$ eta $w = c+di = \rho'_{\theta'}$ formula teorikoetan

$z = 1+\sqrt{3}\,i = 2_{\frac{\pi}{3}}$ eta $w = -2+2i = 2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$ adibideetan

2a) Definizioa

z eta w zenbakien batuketa/kenketa honela definitzen da:

(Ad. binomikoa) $z \pm w = (a+bi) \pm (c+di) = (a\pm c) + (b \pm d)i$

3a) Adibidea

$1+\sqrt{3}\,i + (-2+2i) = -1 + (\sqrt{3}+2)i$

31) Definizioa

z eta w zenbakien biderketa honela definitzen da:

(Ad. binomiala) $z \cdot w = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

(Ad. polarra) $z \cdot w = (\rho_{\theta})\cdot(\rho'_{\theta'}) = \rho \cdot \rho'_{\boxed{\theta+\theta'}}$

(Ad. esponentziala) $z \cdot w = (\rho \cdot e^{\theta i})\cdot(\rho' e^{\theta' i}) = \rho \cdot \rho' e^{(\theta+\theta')i}$

32) Adibidea:

$z \cdot w = (1+\sqrt{3}\,i)(-2+2i) = (-2-2\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})i$

$z \cdot w = (2_{\frac{\pi}{3}})\cdot(2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}) = 4\sqrt{2}_{(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4})} = 4\sqrt{2}_{(\frac{13\pi}{12})}$

33) Definizioa

z eta w zenbakien zatiketa honela definitzen da:

(Ad. binomiala) $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{}{c^2+d^2} = \frac{}{c^2+d^2} + \frac{}{c^2+d^2}i$

(Ad. polarra) $\frac{z}{w} = \frac{\rho_{\theta}}{\rho_{\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}_{\boxed{\theta-\theta'}}$

34) Adibidea

$\frac{z}{w} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-2+2i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} = \frac{(-2+2\sqrt{3})}{4+4} + \frac{(-2\sqrt{3}-2i)\,i}{8}$

$\frac{z}{w} = \frac{2_{\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)_{(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2}_{-\frac{5\pi}{12}}$

35) Definizioa

z zenbakiaren berreketa honela definitzen da, $n \in \mathbb{N}$ izanik:

(Ad. polarra) $z^n = (\rho_{\theta})^n = \rho^n_{n\theta}$ ⟶

(Ad. trigonometrikoa) $z^n = (\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

36) Adibidea

$z^4 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 16(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$

$z^4 = 2^4_{\frac{4\pi}{3}} = 16_{\frac{4\pi}{3}}$

37) Definizioa

z zenbakiaren erroketa honela definitzen da, $n \in \mathbb{N}^*$ izanik:

(Ad. polarra) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho_{\theta}} = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$
$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

38) Adibidea

$$\sqrt{w} = \sqrt{-2+2i} = x + yi \longrightarrow -2+2i = (x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xyi$$

$$\begin{cases} -2 = (x^2-y^2) \\ 2 = 2xy \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{x}, \; x \neq 0 \text{ adela}$$

$$-2 = \left(x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) \rightarrow x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \qquad \boxed{x^2 = t} \; t > 0 \text{ izango da}$$

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \qquad t = -1 \pm \sqrt{2} \qquad x^2 = -1 \pm \sqrt{2} > 0 \text{ izan behar da}$$

$$x^2 = -1 + \sqrt{2}$$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}} \qquad \boxed{y = \pm\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}}$$

Bi soluzio hauek ditugu:

$$x = \sqrt{\sqrt{2}-1} \text{ eta } y = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \longrightarrow \sqrt{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\,i$$

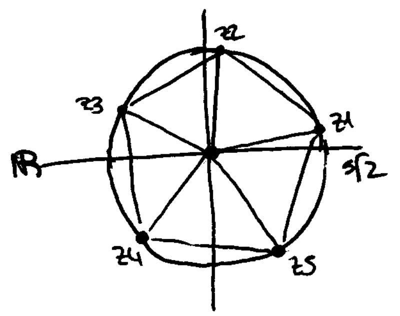
$$x = -\sqrt{\sqrt{2}-1} \text{ eta } y = -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \longrightarrow -\sqrt{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\,i$$

39) Adibidea

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{2_{\frac{\pi}{3}}} = \sqrt[5]{2}_{\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}} = \sqrt[5]{2}_{\frac{\pi+6\pi k}{15}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \; k = 0,1,2,3,4$$

$$z_1 = \sqrt[5]{2}_{\frac{\pi}{15}} \qquad z_2 = \sqrt[5]{2}_{\frac{7\pi}{15}} \qquad z_3 = \sqrt[5]{2}_{\frac{13\pi}{15}} \qquad z_4 = \sqrt[5]{2}_{\frac{19\pi}{15}} \qquad z_5 = \sqrt[5]{2}_{\frac{25\pi}{15}}$$

Erroak guztiek modulu bera dute. Honek esan nahi du guztiak $\sqrt[n]{\rho}$ erradioko zirkunferentzian daudela.



40) Definizioa

z zenbakiaren logaritmo nepertarra honela kalkulatuko dugu:

(Ad. esponentziala) $\ln z = \ln(\rho \cdot e^{\alpha i}) = \ln\rho + \ln e^{\alpha i} = \ln\rho + (\theta + 2\pi k)i$, $k \in \mathbb{Z}$

- Emaitza adierazpide binomikoan ematen da $(a+bi)$.
- ∞ ln daude, baina zati erreala bera dute ($\ln\rho$), hortaz, denak zuzen bertikal batean $x = \ln\rho$
- ∞ ln artean 2π aldea dago.