Aljebra

3. eta 4. gaiak

Eskema laburra

Anonim.

2017.eko apirilaren 4

Gaien Aurkibidea

1. Gaia
3. Gaia

1.1 Taldeak eta Gorputzak

Erditaldea izango da baldin:

1. Barne-eragiketa bada
2. Elkarkorra $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Talde abeldarra izango da baldin:

1. Barne-eragiketa bada
2. Elkarkorra $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. Trukakorra da : $a+b=b+a$.
4. Elementu neutroa existitzen da: $a+z=z+a=a$.
5. Elementu simetrikoa existitzen da: $a-a=-a+a=z$

$(A,+,\cdot)$ **eraztuna** baldin:

1. eragiketa:

1. Barne-eragiketa bada
2. Elkarkorra $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. Trukakorra da : $a+b=b+a$.
4. Elementu neutroa existitzen da: $a+z=z+a=a$.
5. Elementu simetrikoa existitzen da: $a-a=-a+a=z$

2.eragiketa:

1. Barne-eragiketa bada
2. Elkarkorra $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Banakorra 1. eragiketarekiko: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ eta $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Hala ere, trukakorra ere bada 2. eragiketa, eraztuna trukakorra izango da.
Eta, baita ere, elementu neutroa badu, eraztun unitateduna izango da.

$(K, \cdot, +)$ **gorputz** bat da baldin:

1. Barne-eragiketa bada
2. Trukakorra da $(K, +)$.
3. Trukakorra da $(K - \{0\}, \cdot)$.
4. 1. eragiketa banakorra da 2. eragiketarekiko.

Potentzia multzoa:

U multzoaren potentzia multzoa, $P(U)$ deituko diogu. Honek U-ren azpimultzoeen konbinazio posible guztien bilduma izango du U bera eta $\bar{0}$ barne.

Adibidez $U = \{0, 1, 2\}$ izanik, bere Potentzia multzoa hau da:
$P(U) = \{\bar{0}, U, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}\}$

2. Gaia

4. Gaia

2.1 Azpiespazioak

Izan bedi $\mathbb{K}$-ren gaineko $(V, \ominus, \star_{\mathbb{K}})$ bektore-espazioa. $\bar{0} \neq U \subseteq V$ azpimultzo ez hutsa V-ren azpiespazioa ($U \leqslant V$) dela esango dugu baldin,

$$\forall \bar{u_1}, \bar{u_2} \in U, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow k_1 \star_{\mathbb{K}} \bar{u_1} \ominus k_2 \star_{\mathbb{K}} \bar{u_2} \in U$$

Hau da, U multzoan dauden edozein bi elementuren konbinazio lineala U multzoan dago.

- Bi bektoreren arteko batura zuzena ($\oplus$) izango da baldin bien arteko ebakidurak ($\cap$) $\bar{0}$ ematen badu (ez dutela ezer harremanean) eta batura existitzen bada $\rightarrow$ bektore horiek betegarriak izango dira.

- Maximala: Ia bektore guztiak dituen bektore-azpiespazioa. $U \leqslant V$ izanik, V espazioak izango du bektore bat U-k ez duena, hau da, $\exists \bar{v} \in V (\bar{v} \neq \bar{0})$ eta $\bar{v} \notin U$.

2.2 Menpekotasuna

- Bektoreak linealki independente $\Leftrightarrow$ konbinazio lineala $= 0$
eta koefiziente guztiak $= 0$.

- Bektoreak linealki menpekoak $\Leftrightarrow$ konbinazio lineala $= 0$.
Eta koefizienteren bat $\neq 0$.

Hau da, Independente: Bateragarri Determinatua.

Menpekoak: Bateragarri Indeterminatua.

A matrizearen espazio nulua definituko da $A\bar{x} = \bar{0}$ sistema homogenoaren soluzioen multzoa bezala.

$$N(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^n : A\bar{x} = \bar{0}\}$$

A matrizearen espazio ezker-nulua definituko da $A^T\bar{x} = \bar{0}$ sistema homogenoaren soluzioen multzoa bezala.

$$N(A^T) = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^m : A^T\bar{x} = \bar{0}\}$$

2.3 Sistema Sortzaileak

$V = < \bar{v_1}, \cdots, \bar{v_n} >$ moduko sistemak sortzaileak dira. Bektore arteko konbinazio linealekin V-ko edozein bektore **sortzen** da.

A matrizearen zutabe-espazioa A matrizearen zutabeen konbinazio lineal guztien multzoa da. Hau da, $R(A)$ A sortzeko (sortzailea baita) behar diren zutabe-bektoreen multzoa da.
Nola lortu? $A \to U$ eta U-ren piboteei dagozkien A matrizearen zutabe-bektoreak izango dira $R(A)$-ren barne.

A matrizearen errenkada-espazioa A matrizearen errenkaden konbinazio lineal guztien multzoa da. Hau da, $R(A^T)$ A sortzeko (sortzailea baita) behar diren errekakada-bektoreen multzoa da. (KONTUZ! Matrize irauliaren zutabeak, hau da, matrize ez-irauliaren errenkadak landuko dira).
Nola lortu? $A \to U$ eta U-ren piboteei dagozkien A matrizearen errenkada-bektoreak izango dira $R(A^T)$-an barne.

2.4 Bektore-espazioen dimentsioak eta Oinarriak

Bektore sistema bat oinarria izango da baldin:

- Bektoreak **linealki independenteak** badira.
- Bektoreek V espazioa **sortzen** badute. (Sortzailea)

Oinarri kanonikoa:

$$B_{\mathbb{R}^n} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Dimentsioak:

dim V = V-ren oinarrien bektore kopurua. *Oharra:* $dim\{\bar{0}\} = 0$

Gainera, $dim\, R(A) = dim\, R(A^t)$. Hau da, heina.

$dim\, R(A) = dim\, R(A^t) = he(A) = rank(A) = r(A)$

2.5 Laburpena:

Izan bedi $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ matrizea, errenkada eta zutabe espazioak horrela banatu dira:

- **A**-ren zutabe-espazioa: **A**-ren zutabeen konbinazio lineal guztien multzoa.
$$R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\bar{x} \ : \ \bar{x} \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m$$
- **A**-ren espazio nulua: $A\bar{x} = \bar{0}$ sistema homogenoaren soluzioen multzoa da.
$$N(\mathbf{A}) = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^n \ : \ \mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{K}^n$$
- **A**-ren errenkada-espazioa $R(\mathbf{A}^T)$: A-ren errenkadek sortzen duten espazioa da, errenkadak $\mathbb{K}^m$ espazioko bektore moduan hartuta.
$$R(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{A}^T\bar{x} \ : \ \bar{x} \in \mathbb{K}^m\} \subset \mathbb{K}^n$$
- **A**-ren espazio ezker-nulua:
$$N(\mathbf{A}^T) = \{\bar{x} \in \mathbb{K}^m \ : \ \mathbf{A}^T\bar{x} = \bar{0}\} \subset \mathbb{K}^m$$