Erlazioak eta funtziak

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Titulazioa: Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Informatika fakultatea
Donostia

ERLAZIOAK ETA FUNTZIOAK

1. Erlazio bitarrak

1.1. Definizioak

Definizioa (Erlazio bitarra)

A multzoa emanik, A-ren gaineko erlazio bitarra $A \times A$-ko parte den edozein $\mathcal{R}$ azpimultzo da, hau da, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Baldin $(a, b) \in \mathcal{R}$: a elementua b-rekin erlazionatuta dagoela esango dugu, $a\mathcal{R}b$.

Definizioa (Biderkadura kartesiarra)

A eta B multzoen biderkadura kartesiarra (x, y) bikote ordenatuen multzoa da, non

$$A \times B := \{(x, y)\ :\ x \in A,\ y \in B\}$$

Ez nahastu: $(a, b) \neq (b, a)$, $\quad \{a, b\} = \{b, a\}$

Erlazioen propietateak

A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ erlazioa emanik,

- $\mathcal{R}$ bihurkorra: $\forall x \in A \quad x\mathcal{R}x$
- $\mathcal{R}$ simetrikoa:

$$\forall x, y \in A \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

- $\mathcal{R}$ antisimetrikoa:

$$\forall x, y \in A \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

- $\mathcal{R}$ iragankorra:

$$\forall x, y, z \in A \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

1.2 Ordena erlazioak

Definizioa (Ordena erlazioa)

A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ erlazioa ordena erlazioa da baldin bihurkorra, antisimetrikoa eta iragankorra bada.

A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ ordena erlazioa emanik,

- *$\mathcal{R}$ ordena erlazio totala dela esango dugu baldin:*

$$\forall x, y \in A \qquad x\mathcal{R}y \quad \vee \quad y\mathcal{R}x$$

- *Bestela, $\mathcal{R}$ ordena erlazio partziala dela esango dugu.*

1.3. Baliokidetasun erlazioak

Definizioa (Baliokidetasun erlazioa)

A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ erlazioa emanik, $\mathcal{R}$ baliokidetasun erlazioa da baldin bihurkorra, simetrikoa eta iragankorra bada.

Izan bitez A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ baliokidetasun erlazioa eta $a \in A$ elementua. a-ren baliokidetasun klasea honako azpimultzoa da:

$$[a] := \{x \in A \ : \ x\mathcal{R}a\}$$

Baliokidetasun erlazioak

Teorema

Izan bedi A-ko $\mathcal{R}$ baliokidetasun erlazioa,

1. $(\forall x \in A) \quad x \in [x]$
2. $(\forall x, y \in A) \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [x] = [y]$
3. $(\forall x, y \in A) \quad [x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$
4. $\bigcup_{x \in A}[x] = A$

A multzoaren gaineko $\mathcal{R}$ baliokidetasun erlazio batek sortutako baliokidetasun klase guztien bildumak A-ren partizio bat osatzen dute; A-ren zatidura multzoa.

$$A/\mathcal{R} = \{[x] \ : \ x \in A\}$$

$[a]$-ren ordezkaria: $[a]$-ko edozein elementu.

Multzo baten partizioa

A multzoaren partizioa: A-ren azpimultzo ez-hutsen familia bat da, non azpimultzo hauek elkarren artean disjuntuak diren eta guztien bildura A den.

$$\mathcal{P} = \{A_i \ : \ i \in I\} \qquad (I : \text{indize multzoa})$$

- $(\forall i \in I) \quad \emptyset \neq A_i \subseteq A$ azpimultzo ez-hutsak.
- $(\forall i, j \in I) \quad A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

A_i: partizioaren klaseak.

1.4. Modulu finituko osokoak. n moduluko kongruentzia

Izan bedi $n \in \mathbb{Z}$ osokoa, $n > 1$ izanik. $a, b \in \mathbb{Z}$ osokoak kongruenteak modulu n direla esango dugu, $a \equiv b \pmod{n}$, baldin $n \mid a - b$, hau da,

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad / \quad a = b + kn.$$

n osokoak $(a - b)$ zatitzen duela esaten da.

Teorema

Izan bedi $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. n moduluko kongruentzia $\mathbb{Z}$-ren gaineko baliokidetasun erlazioa da.

Osokoen partizioa: $\mathbb{Z}_n = \{[x] \ : \ x \in \mathbb{Z}\}$

n moduluko kongruentziak sortutako klaseak kalkulatzeko: $x \in \mathbb{Z}$ izanik, x osokoa $n \in \mathbb{Z}$-rekin zatituz, $x = qn + r$, $[x]$ klasearen ordezkari bat lortzen da: r hondarra, $0 \leq r < n$. Horrela, $x \equiv r \pmod{n}$.

$$[x] = [r] = \{r + kn \ : \ k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \{\ldots, r - 2n, r - n, r, r + n, r + 2n, \ldots\} =$$

$$= \{y \in \mathbb{Z} : r \text{ izanik } y \text{ eta } n \text{ arteko zatiketaren hond.}\}$$

n klase ditugu, hondar posibleak adina. n moduluko kongruentziari dagokion $\mathbb{Z}$-ren partizioa:

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$$

2. Funtzioak

2.1. Definizioak

Definizioa (Funtzioa)

A eta B multzoak emanik, A-tik B-rako f funtzioa edo aplikazioa A-ko elementu bakoitzari B-ko elementu bat, eta bakarra, elkartzen dion legea da.

$$f : A \longrightarrow B \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

f funtzioaren iturburu multzoa: A, helburu multzoa: B.
Baldin $a \in A$ elementuari f funtzioak $b \in B$ elementua elkartzen badio: a-ren irudia b da eta a elementua b-ren aurreirudi bat.
$(f(a) = b \quad , \quad a \longmapsto b)$.

Funtzioak

f eta g bi funtzio berdinak dira $(f = g)$ baldin,

1. A iturburu multzo berbera badute.
2. B helburu multzo berbera badute.
3. $(\forall x \in A) \quad f(x) = g(x)$.

A multzoa emanik, A multzoaren gaineko identitate funtzioa: id_A, $\mathbf{1}_A$

$$id_A : A \longrightarrow A$$

funtzioa da non $id_A(x) = x$ betetzen den $\forall x \in A$.

2.2. Azpimultzoen irudi eta aurreirudiak

- Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $A_1 \subseteq A$ azpimultzoa. f-ren bidezko A_1-en irudia, A_1-eko elementuen f-ren bidezko irudiek osatzen duten multzoa da. $f(A_1) := \{f(x) \;:\; x \in A_1\}$
$f(A_1) \subseteq B$. Akordioa: $f(\emptyset) := \emptyset$.

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa izanik, f-ren irudi multzoa, $\mathrm{Im} f := f(A)$, honela definitzen da. $\mathrm{Im} f := \{f(x) \;:\; x \in A\}$

- Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $B_1 \subseteq B$ azpimultzoa. B_1-en f funtzioaren bidezko aurreirudia, honela definitzen da: irudia B_1 multzoan duten A-ko elementuek osatutako multzoa.
$f^{\leftarrow}(B_1) := \{x \;:\; x \in A \quad \text{eta} \quad f(x) \in B_1\}$
$f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq A$. Akordioa: $f^{\leftarrow}(\emptyset) := \emptyset$.

2.3. Funtzio-motak

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa suprajektiboa da baldin B-ko elementu orok aurreirudirik badu ($\mathrm{Im} f = B$).

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad / \quad f(x) = y$$

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa injektiboa da baldin B-ko elementu bakoitza gehienez behin agertzen bada A-ko elementu baten irudi moduan, hau da,

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

beste era batera esanda,

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- $f : A \longrightarrow B$ funtzioa bijektiboa da baldin injektiboa eta suprajektiboa bada.

Funtzio-motak, 2.4. Alderantzizko funtzioa

Teorema
Izan bedi $f : A \longrightarrow B$ funtzioa, A eta B multzo finituak izanik eta $|A| = |B|$, $\quad f$ suprajektiboa $\iff$ f injektiboa

Definizioa (Alderantzizko funtzioa)
Izan bedi $f : A \longrightarrow B$ funtzio bijektiboa,
$\forall y \in B \quad \exists | x \in A \quad / \quad f(x) = y$.
f-ren alderantzizko funtzioa honela definitzen da.

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

$$y \longrightarrow x$$

f suprajektiboa denez, $\exists x$ eta injektiboa ere badenez, x bakarra da. Hortaz, f^{-1} funtzioa da.
f^{-1} funtzioa ere bijektiboa da, eta $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.5. Funtzioen konposaketa

Definizioa (Funtzioen konposaketa)
Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$ funtzioak. f eta g-ren funtzio konposatua honela definitzen da:

$$g \circ f \;:\; A \longrightarrow C$$

non $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A$ izanik.

$$\begin{array}{ccccccc} g \circ f : & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Funtzioen konposaketa. Propietateak

Funtzioen konposaketa, oro har, ez da trukakorra. Elkarkorra bada.
Funtzio konposaketaren propietateak:

1. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ eta $h : C \longrightarrow D$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

2. $f : A \longrightarrow B$ funtzioa emanik,

$$f \circ id_A = f \qquad\qquad id_B \circ f = f$$

3. Izan bedi $f : A \longrightarrow B$ funtzio bijektiboa,

$$f^{-1} \circ f = id_A \qquad\qquad f \circ f^{-1} = id_B$$

Funtzioen konposaketa. Propietateak

4. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$,

$$f, g \text{ injektiboak} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \text{ injektiboa}$$

5. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$,

$$f, g \text{ suprajektiboak} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \text{ suprajektiboa}$$

6. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$,

$$f, g \text{ bijektiboak} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \text{ bijektiboa}$$

7. Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$ bijektiboak (ondorioz $g \circ f$ bijektiboa)

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$