41. (2009ko ekaina) bikoitia(x), bikobako(C(1..r), D(1..r)) eta aldatutabiko(C(1..r), (c_1, c_2, …, c_r), D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos) predikatuak eta posizioz posizio kontrako balioz (bikoitia/bakoitia) osatuta dauden B(1..n) eta A(1..n) taulak emanda, A(1..n) taulako elementu bakoiti bakoitzari 1 kenduko dion eta B(1..n) taulako elementu bikoiti bakoitzari 1 batuko dion programa. -- #

a) bikoitia(x) ≡ $\{x \bmod 2 = 0\}$

b) **bikobako(C(1..r), D(1..r))** ≡
$\{\forall k\ (1 \le k \le r \rightarrow (\text{bikoitia}(C(k)) \rightarrow \neg\text{bikoitia}(D(k)))) \wedge$
$\ \forall k\ (1 \le k \le r \rightarrow (\neg\text{bikoitia}(C(k)) \rightarrow \text{bikoitia}(D(k))))\}$

c) **aldatutabiko(C(1..r), (c_1, c_2, …, c_r), D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos)** ≡
$\{(0 \le pos \le r) \wedge$
$\ \forall k\ (1 \le k \le pos \rightarrow ((\neg\text{bikoitia}(c_k) \rightarrow (C(k) = c_k - 1 \wedge D(k) = d_k + 1)) \wedge$
$\wedge\ (\text{bikoitia}(c_k) \rightarrow (C(k) = c_k \wedge D(k) = d_k))))\}$

d) Asertzioak ematerakoan egokiena den ordena jarraituko da:

(1) {Hasierako baldintza} ≡ $\{n \ge 1 \wedge \text{bikobako}(A(1..n), B(1..n)) \wedge$
$\forall k\ (1 \le k \le n \rightarrow (A(k) = a_k \wedge B(k) = b_k))\}$

Hasierako baldintzaren bidez A eta B bektoreek gutxienez elementu bana izango dutela, A bektoreko posizio batean balio bikoiti bat dagoen bakoitzean B bektoreko posizio berean balio bakoiti bat egongo dela, A-n bakoitia badago B-n bikoitia egongo dela eta A eta B bektoreetako hasierako balioak *a* eta b minuskulen bidez eta dagozkien azpiindezeak erabiliz adieraziko ditugula esaten da.

(2) {Tarteko asertzioa} ≡ $\{(1) \wedge i = 1\}$

(9) {Bukaerako baldintza} ≡
{aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), n)}

Bukaerako baldintzaren bidez bektore osoan, hau da, n posizioraino egin beharreko aldaketa denak eginda daudela esaten da.

(3) {Inbariantea} ≡ $\{(1 \le i \le n + 1) \wedge$
aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), $i - 1$)}

Inbariantearen bidez i – 1 posizioraino (posizio hori ere barne) egin beharreko aldaketa denak eginda daudela adierazten da. Beraz i posizioan gaude eta aurreko posizioraino egin beharreko aldaketak eginda daude eta berriz while-an sartzen bagara i posizioa aztertuko da orduan.

(4) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(1 \le i \le n) \wedge$
aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), $i - 1$)}

while-ean sartu garenez badakigu while-aren baldintza bete egin dela eta i ez dela $n + 1$.

(5) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(1 \le i \le n) \wedge$
aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), $i - 1$) $\wedge$
¬bikoitia(A(i)) $\wedge$ $A(i) = a_i$ $\wedge$ $B(i) = b_i$}

if aginduaren **then** aukeratik sartu garenez, badakigu A(i) elementua, hau da, a_i balioa ez dela bikoitia.

(5) era laburrean:
(5) ≡ {(4) $\wedge$ ¬bikoitia(A(i)) $\wedge$ $A(i) = a_i$ $\wedge$ $B(i) = b_i$}

(6) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(1 \le i \le n) \wedge$
aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), $i - 1$) $\wedge$
¬bikoitia(a_i) $\wedge$ $A(i) = a_i - 1$ $\wedge$ $B(i) = b_i$}

(6) era laburrean:
(6) ≡ {(4) $\wedge$ ¬bikoitia(a_i) $\wedge$ $A(i) = a_i - 1$ $\wedge$ $B(i) = b_i$}
(5) ezin da erabili.

A(i) : = A(i) + 1; esleipena burutu ondoren A(i) balioa $a_i - 1$ balioaren berdina izango da eta gainera badakigu lehen A bektoreko i posizioan zegoen a_i balioa ez zela bikoitia. Esleipen hori egin arren aldaketa osoak $i - 1$ posizioraino bakarrik daude eginda, i posizioan erdizka gaude eta horregatik aldatutabiko predikatuan $i - 1$ ipini behar da.

(7) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(1 \le i \le n) \wedge$
aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), $i - 1$) $\wedge$
¬bikoitia(a_i) $\wedge$ $A(i) = a_i - 1$ $\wedge$ $B(i) = b_i + 1$}

(7) era laburrean:
(7) ≡ {(4) $\wedge$ ¬bikoitia(a_i) $\wedge$ $A(i) = a_i - 1$ $\wedge$ $B(i) = b_i + 1$}
(5) eta (6) ezin dira erabili.

Beste aukera bat ere badago. Izan ere aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), $i - 1$) predikatuak dio 1 eta $i - 1$ -posizioen arteko kalkuluak eginda daudela eta ¬bikoitia(a_i) $\wedge$ $A(i) = a_i - 1$ $\wedge$ $B(i) = b_i + 1$ formula kontuan hartuz badakigu i posiziokoa ere eginda dagoela, beraz aldatutabiko predikatuan i ipiniz 1 eta i posizioen arteko kalkuluak eginda daudela adieraz dezakegu.

(7) ≡ {$(1 \le i \le n) \wedge$
aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i) $\wedge$
¬bikoitia(a_i)}

(8) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(1 \le i \le n) \wedge$
aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i)}

Zein da (7) eta (8) puntuen arteko desberdintasuna? (7) puntuan badakigu if aginduko then aukeratik joan garela eta horregatik ¬bikoitia(a_i) betetzen dela ziurta dezakegu. Baina (8) puntuan ez dakigu if aginduaren then aukeratik joan al garen ala if aginduaren baldintza ez betetzeagatik zuzenean if agindua bukatu egin al den eta horregatik ezin dugu ziurtatu ¬bikoitia(a_i) betetzen denik, izan ere if aginduaren baldintza ez bada bete, ¬bikoitia(a_i) ez da egia izango.

(11) {Tarteko asertzioa} ≡ {$(2 \le i \le n + 1) \wedge$
aldatutabiko(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), B(1..n), (b_1, b_2, …, b_n), i – 1)}

(11) puntua i := i + 1; esleipenaren ondoren betetzen den asertzioa da.

(10) E = n + 1 – i

Inbariantea betetzen den lekuan gauden bakoitzean E espresioak while agindua bukatzeko zenbat buelta falta diren adierazi behar du. Taula ezkerretik eskuinera zeharkatzen denean E espresioa "i aldagaiak hartuko duen azkeneko balioa" ken "i" izango da. Azken batean E espresioa n + 1 eta i-ren arteko distantzia da. Horrela i-ren balioa handitzen denean, n + 1 eta i-ren arteko distantzia txikiagoa izango da eta eman beharreko buelta-kopurua ere txikiagoa izango da.

Koloreen bidez asertzio batetik bestera dauden aldaketak nabarmendu dira.