Kalkuloa

Aldagai anitzeko funtzioen diferentziagarritasuna

Adierazpen geometrikoa eta Katearen erregela

Anonim.

2017.eko apirilaren 4

Gaien Aurkibidea

1. Gaia
Aldagai anitzeko funtzioen diferentziagarritasuna

1.1 Adierazpen Geometrikoa

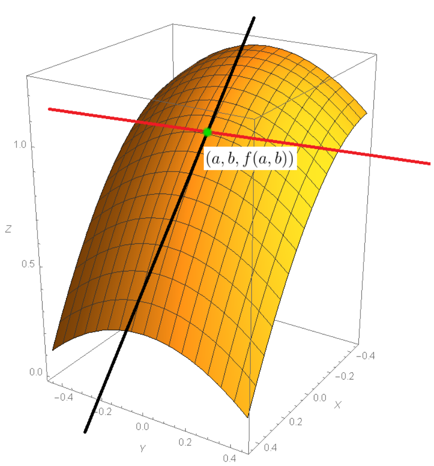
1.1.1 Deribatu partzialak

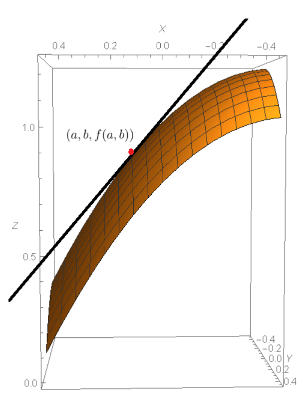
Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzioa.
Deribatu partzialak kalkulatzean, aldagai guztiak, bat izan ezik, konstante mantentzen dira. Orain, x-rekiko deribatzean, y konstante utziko dugu. Orduan, (a, b) puntuan $y = b$ planoak $z = f(x, y)$ gainazala ebakiko du $z = f(x, b)$ kurba lortuz.

$z = f(x, b)$ kurba x-rekiko deribatzean $(a, b, f(a, b))$ puntuko zuzen ukitzailearen malda lortuko dugu.

y-rekiko deribatzean, x konstante utziko dugu. Orduan, (a, b) puntuan $x = a$ planoak $z = f(x, y)$ gainazala ebakiko du $z = f(a, y)$ kurba lortuz.

$z = f(a, y)$ kurba y-rekiko deribatzean $(a, b, f(a, b))$ puntuko zuzen ukitzailearen malda lortuko dugu.





1.1.2 Diferentzial totala

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Deribatu partzialek $(a, b, f(a, b))$ puntu beretik igarotzen diren bi zuzen ukitzaile ematen badizkigute, bi zuzen horiek plano bat definitzen dute. Plano hori gainazalaren plano ukitzailea izango da?

$(a, b, f(a, b))$ puntutik igarotzen diren plano guztien ekuazioa hau da:

$$z - f(a, b) = A(x - a) + B(y - b).$$

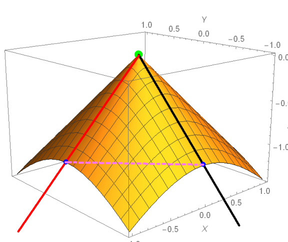
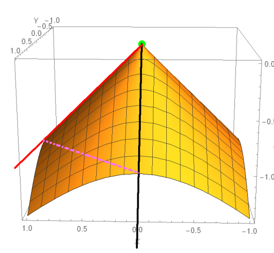
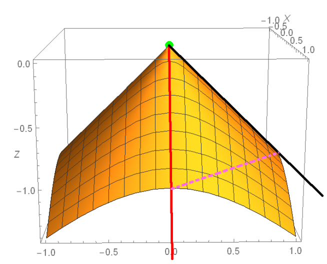
Plano horietatik plano ukitzaile izateko, baldintza hau bete beharko da:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - z}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0 \quad \text{edo} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - A(x - a) - B(y - b)}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0$$

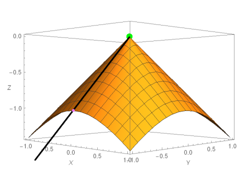
$f(x)$ diferentziagarria denean, A eta B balioak bakarrak dira eta $A = D_1 f(a, b)$ eta $B = D_2 f(a, b)$ dira.

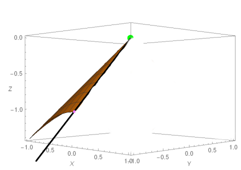
Hortaz, plano ukitzailearen ekuazioa hau izango da:

$$z - f(a, b) = D_1 f(a, b)(x - a) + D_2 f(a, b)(y - b).$$

Funtzioa ez da diferentziagarria jatorrian, lerro ukitzaileek ez baitute plano ukitzaile bat osatzen. Konoa ebakiko luke eta marra arroxatik pasako litzateke.



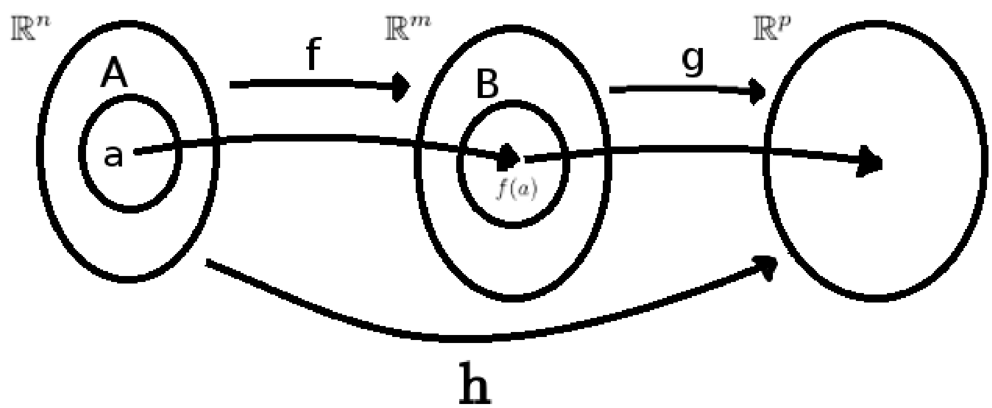
Planoak moztutako kono zati txikiena: 

1.2 Funtzio konposatuaren diferentziagarritasuna

1.1. Teorema. *Izan bitez* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *funtzio bektorial diferentziagarria* $a \in A$ *puntuan eta* $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *funtzio bektorial diferentziagarria* $b = f(a) \in B$ *puntuan,* $f(A) \subseteq B$ *izanik.*

Orduan, $h = g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *funtzio bektorial konposatua diferentziagarria izango da* $a \in A$ *puntuan eta horren diferentzial totala honela kalkulatuko dugu:*

$$Dh(a) = D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a).$$



$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *funtzioa* n*-tik* m*-ra doanez* $Df(a)$ *matrizearen dimentsioak* $m \times n$ *izango dira.*

$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *funtzioa* m*-tik* p*-ra doanez* $Dg(f(a))$ *matrizearen dimentsioak* $p \times m$ *izango dira.*

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *funtzioa* n*-tik* p*-ra doanez* $Dh(a)$ *matrizearen dimentsioak* $p \times n$ *izango dira.*

1.2. Adibidea. *1) Izan bitez,*

$$f(x,y,z) = (sin(xy+z), (1+x^2)^{yz})$$
$$g(u,v) = (u+e^v, v+e^u)$$

Zenbat izango da $D(g \circ f)(1,-1,1)$*?*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h = g \circ f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Katearen erregelak honela dio: $Dh(a) = D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$*. Ondorioz,* $f(a)$*,* $Df(a)$ *eta* $Dg(f(a))$ *lortzen baditugu, azken bien matrize biderketari esker,* $Dh(a)$ *lortuko dugu.*

$(1,-1,1) \Rightarrow f(1,-1,1) = (0, \frac{1}{2}) = (u,v)$

$(x,y,z) \Rightarrow f(x,y,z) = (\sin(xy+z), (1+x^2)^{yz}) = (u,v)$

$$\underset{2\times 3}{Df(x,y,z)} = \begin{pmatrix} y\cos(xy+z) & x\cos(xy+z) & \cos(xy+z) \\ 2xyz(1+x^2)^{yz-1} & z(1+x^2)^{yz}\ln(1+x^2) & y(1+x^2)^{yz}\ln(1+x^2) \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *funtzioa 3-tik 2-ra doanez* $Df(x,y,z)$ *matrizearen dimentsioak* 2×3 *izango dira.*

$$\underset{2\times 3}{Df(1,-1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{\ln 2}{2} & \frac{-\ln 2}{2} \end{pmatrix}.$$

$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funtzioa 2-tik 2-ra doanez $Dg(f(u,v))$ matrizearen dimentsioak 2×2 izango dira.

$$\underset{2\times 2}{Dg(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & e^v \\ & \\ e^u & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \underset{2\times 2}{Dg(0,\tfrac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{e} \\ & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Katearen erregela erabilita eta jakinik
$h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funtzioa 3-tik 2-ra doanez $Dh(1,-1,1)$ matrizearen dimentsioak 2×3 izango direla:

$$Dh(1,-1,1) = D(g\circ f)(1,-1,1) = Dg(0,\tfrac{1}{2})\cdot Df(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{e} \\ & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ & & \\ \frac{-1}{2} & \frac{\ln 2}{2} & \frac{-\ln 2}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1-\frac{\sqrt{e}}{2} & 1+\frac{\sqrt{e}\ln 2}{2} & 1-\frac{\sqrt{e}\ln 2}{2} \\ & & \\ \frac{-3}{2} & 1+\frac{\ln 2}{2} & 1-\frac{\ln 2}{2} \end{pmatrix}$$ *izango da $D(g\circ f)(1,-1,1)$.*

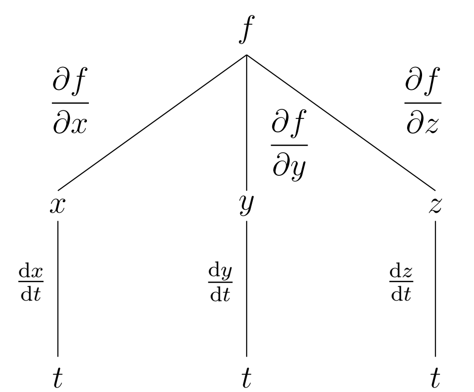
2) Izan bitez,

$$f(x,y,z) = xyz\,,$$
$$g(t) = (\ln t, t^2, \frac{1}{t}).$$

Zenbat izango da $D(f \circ g)(t)$?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h = f \circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\underset{3\times1}{Dg}$ $\quad$ $\underset{1\times3}{Df}$ $\quad$ $Dh = \underset{1\times3}{Df} \cdot \underset{3\times1}{Dg} = \underset{1\times1}{D(f\circ g)(t)}$



$g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ funtzioa 1-tik 3-ra doanez Dg matrizearen dimentsioak 3×1 izango dira.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ funtzioa 3-tik 1-ra doanez Df matrizearen dimentsioak 1×3 izango dira.

$h = f \circ g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ funtzioa 1-tik 1-ra doanez Dh matrizearen dimentsioak 1×1 izango dira.

Deribatuen zuhaitzak, kasu honetan, arrazoi hauengatik du honelako itxura:

- *f funtzioak 3 aldagai dituelako. Orduan, f-tik 3 adar aterako dira.*
- *g funtzioa aldagai bakarrekoa denez, honetatik adar bakar bat aterako da.*
- *Jakinik f-k 3 aldagai dituela eta 3 aldagai horiei g funtzioa aplikatzen zaiela, f funtzioara iristeko hiru bide posible egongo dira.*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}}_{Df} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} Dg$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy;$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{-1}{t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = yz \cdot \frac{1}{t} + xz \cdot 2t + xy \cdot \frac{-1}{t^2} = t^2 \frac{1}{t}\frac{1}{t} + (\ln t)\frac{1}{t}2t + (\ln t)t^2 \frac{-1}{t^2} = 1 + 2\ln t - \ln t = 1 + \ln t$$

Ariketa egiteko beste modu bat ordezkapena erabiliz:

$f(x,y,z) = xyz = (\ln t)t^2 \frac{1}{t} = t \ln t$ *eta* $(t \ln t)' = 1 + \ln t$ *da.*

1.3 Ariketak

1.3.1 1.3. ariketa

1.3.1.1 1)

Kalkula ezazu $\nabla f(x,y)$ existitzen den puntuetan.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \ln(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$1 \times 2$$

$(x,y) \neq (0,0)$ kasua:

$\nabla_1 f(x,y) = 2x + y^2 \dfrac{2x}{x^2+y^2}$

$\nabla_2 f(x,y) = 2y \ln(x^2+y^2) + y^2 \dfrac{2y}{x^2+y^2}$

$(x,y) = (0,0)$ kasua:

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{t} = 0;$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2 \ln t^2}{t} = \lim\limits_{t\to 0} 2t \ln t.$

$$t = \frac{1}{x} \quad \text{izanik} \quad \lim_{t\to 0} t = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{izango da.}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\ln\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2\ln x}{x} = 0$ (infinituen ordena).

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x + y^2 \dfrac{2x}{x^2+y^2} & 2y\ln(x^2+y^2) + y^2 \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} & (x,y) \neq (0,0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1.3.2 2.1. ariketa

1.3.2.1 1)

$f(u,v) = u^3v^3{+}u{+}1 \quad , \quad u = x^2{+}y^2 \quad , \quad v = e^{x+y}{-}1$ izanik, zenbat izango dira $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial y}$?

Esan dezakegu: $g(x,y) = (x^2+y^2, e^{x+y}-1)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h = f \circ g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\underset{2\times 2}{Dg} \quad \underset{1\times 2}{Df}$$

$$Dh = \underset{1\times 2}{D(f\circ g)} = \underset{1\times 2}{Df(g(x,y))} \cdot \underset{2\times 2}{Dg}$$

Honela, $g(x,y)$, Dg eta $Df(g(x,y))$ lortzen baditugu, azken bien matrize biderketari esker, Dh lortuko dugu.

$(x,y) \longrightarrow g(x,y) = (x^2+y^2, e^{x+y}-1) = (u,v)$

$\underset{2\times 2}{Dg(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$

$\underset{1\times 2}{Df(u,v)} = \begin{pmatrix} 3u^2v^3+1 & 3u^3v^2 \end{pmatrix}$

$$D(f\circ g) = Df(g(x,y)) \cdot Dg = \begin{pmatrix} 3u^2v^3+1 & 3u^3v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 6xu^2v^3+2x+3u^3v^2e^{x+y} & 6yu^2v^3+2y+3u^3v^2e^{x+y} \end{pmatrix} =$$

$$u = x^2+y^2 \quad , \quad v = e^{x+y}-1$$

$$= \begin{pmatrix} 6x(x^2+y^2)^2(e^{x+y}-1)^3+2x+3(x^2+y^2)^3(e^{x+y}-1)^2e^{x+y} \\ 6y(x^2+y^2)^2(e^{x+y}-1)^3+2y+3(x^2+y^2)^3(e^{x+y}-1)^2e^{x+y} \end{pmatrix}_{1\times 2}$$

$h = f\circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ funtzioa 2-tik 1-ra doanez Dh matrizearen dimentsioak 1×2 izango dira.

Ondorioz, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x(x^2+y^2)^2(e^{x+y}-1)^3+2x+3(x^2+y^2)^3(e^{x+y}-1)^2e^{x+y}$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y(x^2+y^2)^2(e^{x+y}-1)^3+2y+3(x^2+y^2)^3(e^{x+y}-1)^2e^{x+y}$ izango dira.