Kalkulua
Ariketa ebatziak

Joane Mannion Agirre

2018ko maiatzaren 2a

Gaien Aurkibidea

1 Aldagai anitzeko funtzioak **1**

2 Aldagai anitzeko funtzioen diferentziagarritasuna **2**

3 Aldagai anitzeko funtzioen analisi lokala **4**

4 Integral mugagabea **6**

5 Integral mugatua **8**

1 Gaia
Aldagai anitzeko funtzioak

4. Ariketa

Kalkula ezazu $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ funtzioaren S norabideko limitea $(0,0)$ puntuan, S norabidea hau izanik: $S = \{(x,y) = (ht, kt)/(h,k) \neq (0,0) \text{ eta } t \in \mathbb{R}\}$.

Ebazpena.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)=(ht,kt)}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{h^2t^2 - k^2t^2}{h^2t^2 + k^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2(h^2 - k^2)}{t^2(h^2 + k^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}.$$

Limitea h eta k-ren menpekoa izango da, eta ez da beti berdina izango, ondorioz ez da existituko limite bikoitza.

2 Gaia
Aldagai anitzeko funtzioen diferentziagarritasuna

8.1 Ariketa

Azter ezazu funtzio honen diferentziagarritasuna jatorrian:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ebazpena.

Hasteko jarraitutasuna aztertuko dugu:

$\forall (x,y) \neq (0,0)$ funtzioa jarraitua da funtzio elementalen konposizioa delako eta izendatzailea ez delako anulatzen.

Jarraitutasuna jatorrian aztertzeko, funtzioaren limite bikoitza kalkulatuko dugu. Hasteko, dimentsio bakarreko limiteak existitzen direla egiaztatu behar dugu; hauek dira:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} = \frac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = g(y) \quad \text{da;}$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} = \frac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{\sqrt{x^2}} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 = h(x) \quad \text{da.}$$

Orain, limite berrituak kalkulatuko ditugu:

$\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$ eta $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ dira. Bi limite berrituak 0 dira.

Zuzenen bidezko limite batzuk kalkulatuko ditugu $(0,0)$ puntuan: $(0,0)$ puntutik igarotzen diren zuzenak $y = mx$ dira.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} \frac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x \mid mx \mid}{\sqrt{x^2+mx^2}} \text{ indeterminazioa ebatziko dugu jarraian:}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \mid mx \mid}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x \mid mx \mid}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\mid mx \mid}{\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt{1+m^2}} = 0, \ \forall m.$$

Azkenik, funtzioa jatorrian jarraitua dela frogatzeko, definizioa erabiliko dugu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |x| \cdot \left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$\left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1$ delako beti.

$\delta < \varepsilon \,;\; 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \varepsilon$

Funtzioa jarraitua da ondorengo hiru baldintzak betetzen dituelako:

- $\exists f(0,0) = 0$.
- $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.
- $f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \mid y \mid}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Diferentziagarritasuna aztertzeko bi deribatu partzialak existitu behar dira.

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t \cdot |0|}{\sqrt{t^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0 \cdot |0t|}{\sqrt{t^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Hortaz diferentzial totala exisitzen da jatorrian eta honako hau izango da:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Funtzioa diferentziagarria izateko jatorrian, ondoko limiteak 0 balio behar du:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-Df(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - (0,0)(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot |y|}{x^2+y^2}$$

Y ren balioa absolutua denez, limiteak bi balio ezberdin hartuko ditu limitea 0ra zenbaki positibotatik edo negatibotatik hurbiltzearen arabera. Limite bat $\frac{1}{2}$ izango da, eta bestea $\frac{-1}{2}$, limite ezberdinak direnez, limitea ez da existituko, eta ondorioz funtzioa ez da diferentziagarria izangio.

3 Gaia
Aldagai anitzeko funtzioen analisi lokala

15.6 ariketa

Kalkula itzazu funtzio honen muturrak emandandako baldintzen mendean:

$$f(x,y,x) = \ln x + \ln y + 3\ln z, \;\; x^2+y^2+z^2 = 5r^2, x,y,z > 0 \text{ esfera oktantean.}$$

Ebazpena.

Hasteko, funtzio laguntzailea eratuko dugu:

$F(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3\ln z + \lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2)$

Funtzio laguntzailearen puntu kritikoak bilatuko ditugu. Deribatu partzialak hauek dira:

$D_1F(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + 2\lambda x$, $D_2F(x,y,z) = \dfrac{1}{y} + 2\lambda y$ eta $D_3F(x,y,z) = \dfrac{3}{z} + 2\lambda z$

Ebatzi beharreko sistemak, lau ezezagun eta lau ekuazio ditu:

$\dfrac{1}{x} + 2\lambda x = 0$	Lehenengo ekuazioan x bakanduz: $x\left(\dfrac{1}{x^2} + 2\lambda\right) = 0$
$\dfrac{1}{y} + 2\lambda y = 0$	ekuazio hontatik bi soluzio lor daitezke: lehenengoa $x = 0$,
$\dfrac{3}{z} + 2\lambda z = 0$	baina soluzio honek ez du balio $x,y,z > 0$ direlako, eta
$x^2+y^2+z^2-5r^2 = 0$	bigarrena $x = \sqrt{\dfrac{1}{-2\lambda}}$. Bigarren ekuaziotik y bakanduz:

$y\left(\dfrac{1}{y^2} + 2\lambda\right) = 0$ ekuazio hontatik bi soluzio lor daitezke: lehenengoa $y = 0$, baina soluzio honek ez du balio $x,y,z > 0$ direlako, eta bigarrena $y = \sqrt{\dfrac{1}{-2\lambda}}$. Hirugarren ekuaziotik z bakanduz $z\left(\dfrac{1}{z^2} + 2\lambda\right) = 0$ ekuazioa lortuko dugu, ekuazio hontatik bi soluzio lor daitezke: lehenengoa $z = 0$, baina soluzio honek ez du balio $x,y,z > 0$ direlako, eta bigarrena $z = \sqrt{\dfrac{3}{-2\lambda}}$.

Lortutako emaitzak azken ekuazioan ordeztuz, hurrengo berdintza lortuko dugu:
$\frac{-1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda} - \frac{3}{2\lambda} = 5r^2 \Rightarrow \frac{-5}{2\lambda} = 5r^2 \Rightarrow \frac{-1}{r^2} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{2r^2}$
Lehendik genituen aldagaietan lambda ordezkatuz, honako puntu kritiko baldintzatua lortuko dugu: $(r, r, r\sqrt{3})$

Puntu horren izaera determinatzeko, $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ baldintzatik aldagai bat askatu behar dugu. $x = +\sqrt{5r^2 - y^2 - z^2}$ puntua bakarrik aska dezakegu, logaritmo nepertarra zenbaki positiboetan bakarrik baitago definituta. Balio hau funtzioan ordezkatuko dugu: $\varphi(y, z) = \ln\sqrt{5r^2 - y^2 - z^2} + \ln y + 3\ln z$

Lehen ordenako deribatu partzialak hauek dira:

$D_1\lambda(y, z) = \frac{1}{y} + \frac{y}{-5r^2 + y^2 + z^2}$ $D_2g(y, z) = \frac{3}{z} + \frac{z}{-5r^2 + y^2 + z^2}$

Deribatu partzialetan puntuak ordezkatuz gero:

$$D_1\lambda(r, r\sqrt{3}) = \frac{1}{r} + \frac{r}{-5r^2 + r^2 + 3r^2} = \frac{r}{-r^2} + \frac{1}{r} = \frac{-1+1}{r} = 0.$$

$$D_2\lambda(r, r\sqrt{3}) = \frac{3}{r\sqrt{3}} + \frac{r\sqrt{3}}{-5r^2 + r^2 + 3r^2} = \frac{r\sqrt{3}}{-r^2} + \frac{3}{r\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{r} + \frac{3}{r\sqrt{3}} = \frac{-3+3}{r\sqrt{3}} = 0.$$

Bi emaitzek zero ematen dutenez, puntu kritikoa da. Puntu kritikoaren izaera determinatzeko, bigarren ordenako deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$D_{11}\lambda(y, z) = \frac{-1}{y^2} + \frac{-5r^2 - y^2 + z^2}{(-5r^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

$$D_{12}\lambda(y, z) = \frac{-2yz}{(-5r^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

$$D_{22}\lambda(y, z) = \frac{-3}{z^2} + \frac{-5r^2 + y^2 - z^2}{(-5r^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Puntua deribatuetan ordezkatuz,

$$D_{11}\lambda(r, r\sqrt{3}) = \frac{-1}{r^2} + \frac{-5r^2 - r^2 + 3r^2}{(-5r^2 + r^2 + 3r^2)^2} = \frac{-3r^2}{(-r^2)^2} - \frac{r^2}{r^4} = \frac{-3r^2}{r^4} - \frac{r^2}{r^4} = -\frac{4}{r^2}.$$

$$D_{12}\lambda(r, r\sqrt{3}) = \frac{-2 \cdot r \cdot r\sqrt{3}}{(-5r^2 + r^2 + 3r^2)^2} = \frac{-2r^2\sqrt{3}}{(-r^2)^2} = \frac{-2r^2\sqrt{3}}{r^4} = -\frac{2\sqrt{3}}{r^2}.$$

$$D_{22}\lambda(r, r\sqrt{3}) = \frac{-3}{3r^2} + \frac{-5r^2 + r^2 - 3r^2}{(-5r^2 + r^2 + 3r^2)^2} = \frac{-7r^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} = \frac{-7r^2 - r^2}{r^4} = -\frac{8}{r^2}.$$

Hesetarra kalkulatzea falta zaigu, zein puntu kritiko den jakiteko:

$$\Delta = \left(\frac{-4}{r^2} \cdot \frac{-8}{r^2}\right) - \left(\frac{-2\sqrt{3}}{r^2}\right)^2 = \frac{32}{r^4} - \frac{12}{r^4} = \frac{20}{r^4}.$$

Beraz, segida hau izango dugu:

$$\left\{1, \frac{-4}{r^2}, \frac{20}{r^4}\right\}.$$

$D_{11}\lambda(r, r\sqrt{3}) < 0$ eta $\Delta > 0$ direnez, funtziok maximo erlatiboa izango du $(r, r\sqrt{3})$ puntuan. Funtzioaren balioa $(r, r, r\sqrt{3})$ puntu kritikoan ondorengoa izango da:

$f(r, r, r\sqrt{3}) = \ln r + \ln r + 3\ln r\sqrt{3} = 2\ln r + 3\ln r + 3\ln\sqrt{3} = 5\ln r + 3\ln\sqrt{3}.$

4 Gaia
Integral mugagabea

7.13 Ariketa

Kalkula ezazu ondoko integrala:

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$$

Ebazpena.
Integrakizunean cosinu funtzioa dugunez $t = \tan\frac{x}{2}$ aldagai-aldaketa egigo dugu; hortik, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ aterakok dugu. $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ izango da, eta ondorioz, $dt = \frac{(1+t^2)dx}{2}$. Beraz integrala honela geratuko da:

$$I = \int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \int \frac{1}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\ dt =$$

$$\int \frac{1}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{3+3t^2+1-t^2}{1+t^2}}\ dt = \int \frac{1}{\frac{3+t^2}{1+t^2}\cdot\frac{4+t^2}{1+t^2}}\ dt =$$

$$\int \frac{(1+t^2)(1+t^2)}{(3+t^2)\cdot 2(2+t^2)}\ dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{2(3+t^2)(2+t^2)}\cdot\frac{2dt}{(1+t^2)} = \int \frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)}\ dt$$

Azken integralaren integrakizuna deskonposatuko dugu:

$$\frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)} = \frac{A}{2+t^2} + \frac{B}{3+t^2} = \frac{A(3+t^2)+B(2+t^2)}{(3+t^2)(2+t^2)}$$

$$A(t^2+3)+B(t^2+2) = t^2+1 \begin{cases} A+B=1 \Rightarrow A = 1-B = -1 \\ 3A+2B = 1 \Rightarrow 3(1-B)+2B = 1 \Rightarrow B = 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1+t^2}{(3+t^2)(2+t^2)}\ dt = \int \frac{2}{3+t^2}\ dt + \int \frac{-1}{2+t^2}\ dt = 2\int \frac{1}{3+t^2}\ dt - \int \frac{1}{2+t^2}\ dt$$

Orain, integral bakoitza bere aldetik integratuko dugu:
$I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{3+t^2}\ dt$ integrala ebazteko, aldagai-aldaketa egingo dugu. $v = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$ izango da eta $dt = \sqrt{3}dv$.

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{3}}{3+3v^2}\ dv = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{1+v^2}\ dv = \frac{\arctan v}{\sqrt{3}}.$$

Aldagai-aldaketa deseginez gero, honela geratuko litzateke: $I_1 = \dfrac{\arctan \frac{t}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$

Bigarren integrala ebazteko, metodo bera erabiliko dugu:
$I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{2+t^2}\ dt$ aldagai-aldaketa egiteko $v = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ eta $dt = \sqrt{2}dv$ izango dira.

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{2}}{2+2v^2}\ dv = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+v^2}dv = \frac{\arctan v}{\sqrt{2}}$$

Aldagai-aldaketa deseginez gero, honela geratuko litzateke: $I_2 = \dfrac{\arctan \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Hasierako integralean ordezkatuz, honela geratuko litzateke:

$$2\int \frac{1}{3+t^2}\ dt - \int \frac{1}{2+t^2}\ dt = \frac{2\arctan \frac{t}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - \frac{\arctan \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Hasierako aldagai-aldaketak deseginez, hau izango litzateke azken emaitza:

$$I = \int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) + k$$

5 Gaia
Integral mugatua

12.5 Ariketa

Kalkula ezazu $y = e^x$ kurba-arkuaren luzera, $(0, 1)$ eta $(1, e)$ puntuen artean.
Ebazpena.

$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ formula aplikatuko dugu.
$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow (y')^2 = e^{2x} \Rightarrow 1+(y')^2 = 1+e^{2x} \Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + e^{2x}}$
Azken berdintza formulan ordezkatuko dugu, gero $u = 2x$ eta $dx = \dfrac{1}{2}du$ aldagai-aldaketak aplikatuko ditugu :

$$L = \int \sqrt{1 + e^{2x}}\ dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{e^u + 1}\ du$$

Orain, $v = e^u + 1$ eta $du = e^{-u}dv$ aldagai-aldaketak aplikatuko ditugu:

$$L_1 = \int \sqrt{e^u + 1}\ du = \int \sqrt{v} \cdot e^{-u}\ dv = \int \frac{\sqrt{v}}{e^u}\ dv = \int \frac{\sqrt{v}}{v - 1}\ dv$$

Orain $w = \sqrt{v} \Rightarrow v = w^2$ eta $dv = 2\sqrt{v}dw$ aldagai-aldaketak aplikatuko ditugu:

$$L_2 = \int \frac{\sqrt{v}}{v - 1}\ dv = 2 \int \frac{w}{w^2 - 1} \cdot 2w\ dw = 2 \int \frac{w^2}{w^2 - 1}\ dw =$$

$$2 \int \left(\frac{1}{w^2 - 1} + 1 \right)\ dw = 2 \int \frac{1}{w^2 - 1}\ dw + 2 \int 1\ dw$$

Lehenengo integralaren integrakizuna deskonposatuko dugu:

$$\frac{1}{w^2 - 1} = \frac{1}{(w - 1)(w + 1)} = \frac{A}{w - 1} + \frac{B}{w + 1} = \frac{A(w + 1) + B(w - 1)}{(w - 1)(w + 1)}$$

Berdintza ebatziko dugu:

$w = -1$ denean, $B \cdot (-2) = 1$ izango da, hau da, $B = \dfrac{-1}{2}$

$w = 1$ denean, $2A = 1$ izango da, hau da $A = \dfrac{1}{2}$

Hau jakinda, integrala ebazten jarraituko dugu:

$\int \frac{1}{(w-1)(w+1)}\ dw \ = \ \int \frac{\frac{1}{2}}{w-1}\ dw - \int \frac{\frac{1}{2}}{w+1}\ dw \ = \ \frac{1}{2}\int \frac{1}{w-1}\ dw -$
$\frac{1}{2}\int \frac{1}{w+1}\ dw$
Orain bi integralak bananduta ebatziko ditugu.
$\int \frac{1}{w-1}\ dw = \ln(w-1)$

$\int \frac{1}{w+1}\ dw = \ln(w+1)$

Integral hauek ebatzi ondoren, emaitza $\frac{1}{2}\int \frac{1}{w-1}\ dw - \frac{1}{2}\int \frac{1}{w+1}\ dw$ integralean ordezkatuko dugu:
$\frac{1}{2}\int \frac{1}{w-1}\ dw - \frac{1}{2}\int \frac{1}{w+1}\ dw = \frac{\ln(w-1)}{2} - \frac{\ln(w+1)}{2}.$
$\int \frac{1}{w^2-1}\ dw + \int 1\ dw = \frac{\ln(w-1)}{2} - \frac{\ln(w+1)}{2} + w + k$
$\int \frac{1}{w^2-1}\ dw + \int 1\ dw = \int \frac{w^2}{w^2-1}\ dw$ dela jakinik, $2\int \frac{w^2}{w^2-1}\ dw$ integralaren emaitza lortzeko aurreko integralaren emaitza bider 2 egin beharko dugu, hau da:
$2\int \frac{w^2}{w^2-1}\ dw = \ln(w-1) - \ln(w+1) + 2w + k$
Orain, hasieran egindako aldagai aldaketak desegingo ditugu, $w = \sqrt{v}$ desegiten hasiko gara:
$\ln(w-1) - \ln(w+1) + 2w = \ln(\sqrt{v}-1) - \ln(\sqrt{v}+1) + 2\sqrt{v}$
Jarraian, $v = e^u + 1$ desegingo dugu:
$\ln(\sqrt{v}-1) - \ln(\sqrt{v}+1) + 2\sqrt{v} = \ln(\sqrt{e^u+1}-1) - \ln(\sqrt{e^u+1}+1) + 2\sqrt{e^u+1}$
Ondorioz, $\frac{1}{2}\int \sqrt{e^u+1} = \frac{\ln(\sqrt{e^u+1}-1)}{2} - \frac{\ln(\sqrt{e^u+1}+1)}{2} + \sqrt{e^u+1} + k$ izango da.
$u = 2x$ aldaketa deseginez, integralaren azken emaitza lortuko dugu:
$L = \frac{\ln(\sqrt{e^{2x}+1}-1)}{2} - \frac{\ln(\sqrt{e^{2x}+1}+1)}{2} + \sqrt{e^{2x}+1} + k$
Orain, integrala $(0,1)$ eta $(1,e)$ puntuen artean kalkulatuko dugu:
$\int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}} = \left[\frac{\ln(\sqrt{e^{2x}+1}-1)}{2} - \frac{\ln(\sqrt{e^{2x}+1}+1)}{2} + \sqrt{e^{2x}+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(\sqrt{e^2+1}-1)}{2} - \frac{\ln(\sqrt{e^2+1}+1)}{2} + \sqrt{e^2+1} - \frac{\ln(\sqrt{e^0+1}-1)}{2} + \frac{\ln(\sqrt{e^0+1}+1)}{2} - \sqrt{e^0+1} \simeq$
2.003