Dijkstra-ren algoritmoa

Izan bedi **G = (V, A, ϕ)** grafo zuzendu **haztatu** bat **n** erpinekin.

V-ren **erpinak** “era egokian” **etiketatuz** algoritmo honen bidez honako hau lortu ahal izango dugu:

- $\mathbf{v_0} \in \mathbf{V}$ erpin finko batetik **V**-ren beste erpinetara dagoen **distantzia**.
- $\mathbf{v_0}$ erpinetik **V**-ren beste erpin guztietara dagoen ibilbide minimoa duen **bide sinple** edo bidezidor bat.

ALGORITMOA nola aplikatu

1. pausoa (**Hasiera**) ; $\mathbf{i = 0}$ eta $\mathbf{S_0 = \{v_0\}}$.
Etiketatuz:

- $\mathbf{v_0}$ -ri **(0, -)** **etiketa** jarriko diogu eta
- $\mathbf{w \neq v_0}$ bakoitzari **(∞, -)** **etiketa** ($\mathbf{w \in V\text{-}S_0}$)

Algoritmoa aplikatzen den heinean, $\mathbf{w \neq v_0}$ bakoitzaren **etiketa** aldatu egingo da (**behin edo gehiagotan**) eta **(∞, -)** izatetik **(E(w), x)** izatera pasatuko da:

- **E(w) =** $\mathbf{v_0}$-tik **w**-rako **distantzia**
- **x** (existitzen bada) **w**-ren aurretik dagoen erpina izango da, hots, **(x,w)** $\mathbf{v_0}$-tik **w**-ra doan bide

n = 1 bada, orduan **$V = \{v_0\}$** eta problema bukatu da.

n > 1 bada, orduan jarraituko dugu

2. pausoa (**Zenbait iterazio izan ditzake**)

$w \in V-S_i$ bakoitzerako(**lehen iterazioan $S_i = S_0$**) **w**-ren **etiketaren** ordez (**ahal denean**) **(E(w), x)** jarriko da, non:

- $$\mathbf{E(w) = \min_{v \in S_i} \{ E(w), E(v) + p(v,w)\}}$$

- **x** **S_i**-ren barnean dagoen **G**-ren erpin bat da, non **E(w)** minimoa lortzen baita.

3. pausoa

V-S_i-ren erpin bakoitzak (non **i / $0 \leq i \leq n-2$**) **(∞, -)** **etiketa** badu, orduan grafo etiketatuak nahi dugun informazioa du.

Aurkako kasuan, **$w \in V$-S_i** erpin bat existitzen da gutxienez **(∞, -)** **etiketarik gabe** eta:

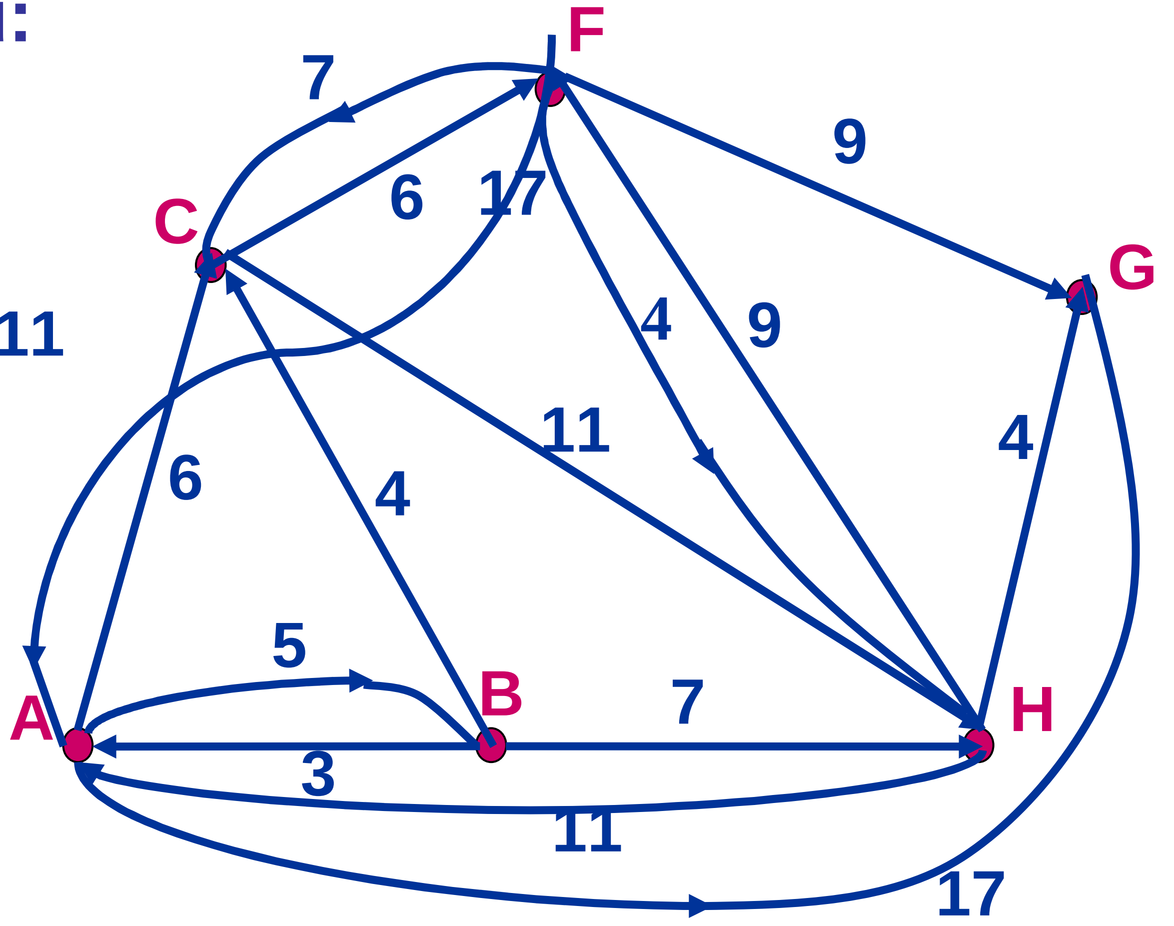
1) v_0-tik hurbilen dagoen **$v_{i+1} \in V$-S_i** erpina hartuko dugu (**$E(v_{i+1})$ minimoa**).

2) **$S_{i+1} = S_i \cup \{v_{i+1}\}$** kontsideratuko dugu

3) **i** aldagaia unitate baten handitzen dugu. **$i = n-1$** bada, grafo etiketatuak nahi dugun informazioa du. **$i < n-1$** bada **2. pausora** itzuliko gara.

25. ariketa

Izan bedi 6 erpineko honako grafo haztatu hau:



Hiri-bikoteen bidai-bideak adierazten dite.

(x,y) arku bakoitzaren pisuak x hiritik y hirirako hegaldi zuzen baten denbora adieraziko du.

Haizearen norabidearen arabera gerta daiteke $p(x,y) \neq p(y,x)$ izatea.

Bestalde $C, G \in V$, baina $(C,G),(G,C) \notin A$, beraz $p(C,G) = p(g,C) = \infty$ izango da (erpin gehiago daude baldintza honekin).

$$p(A,F) = \infty \quad \text{eta} \quad p(F,A) = 11$$

Algoritmo hau aplikatuko dugu C ($v_0 = C$) erpinetik G-ren A, B, F, G, H beste erpinetara dagoen distantzia minimoa kalkulatzeko.

1. pausoa (**Hasiera**)

i = 0 eta S = {C}. Etiketatuz:

C non: **etiketa (0, -)** eta

A non: **etiketa (∞, -)**

B non: **etiketa (∞, -)**

F non: **etiketa (∞, -)**

G non: **etiketa (∞, -)**

H non: **etiketa (∞, -)**

2. pausoa | **Lehen iterazioa ; i = 0** ; $S_0 = \{C\}$

Kontsidera dezagun $V\text{-}S_0 = \{A, B, F, G, H\}$

$W \in V\text{-}S_0$ erpin bakoitzean (ahal bada) **$(\infty,\text{-})$** etiketaren ordez **$\underline{(E(W),X)}$** **etiketa** jarriko dugu, non:

- $\underline{E(W)} = \min_{V \in S_0} \{ E(W), E(V) + p(V,W)\}$

  $C \in S_0$

  $= \min \{ E(W), E(C) + p(C,W)\} = d(C,W)$

- **$\underline{X}$** izango da **E(W)** minimoa lortzen den S_0 – ren erpina, kasu honetan **X = C.**

Orduan:

$$E(A) = \min\{E(A), E(C) + p(C,A)\} = \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty$$

$$E(B) = \min\{E(B), E(C) + p(C,B)\} = \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty$$

$$E(F) = \min\{E(F), E(C) + p(C,F)\} = \min\{\infty, 0 + 6\} = \underline{6}$$

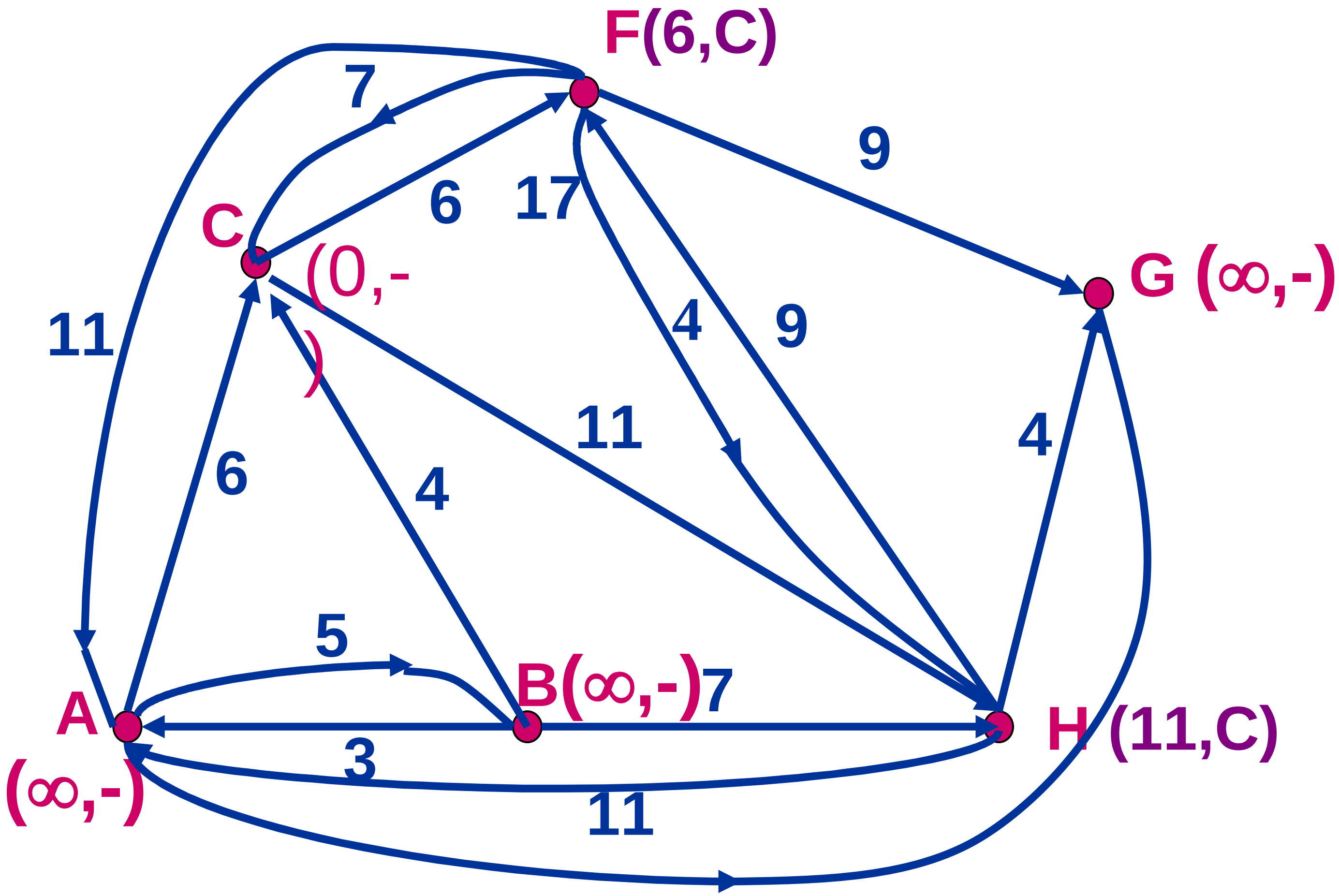
$$E(G) = \min\{E(G), E(C) + p(C,G)\} = \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty$$

$$E(H) = \min\{E(H), E(C) + p(C,H)\} = \min\{\infty, 0 + 11\} = \underline{11}$$

Hau da, $\mathbf{V\text{-}S_0 = \{A, B, F, G, H\}}$ multzoaren erpinak honela **etiketatuko** ditugu:

→ **F**-ren **etiketa (6,C)** eta **H**-ren **etiketa (11,C)** eta besteak zeuden moduan.

eta grafoa honela geratuko da:



3. pausoa

V-S_0-ren erpin guztiek **ez** dutenez **(∞, -)** etiketa, (**F-k eta H-k ez dute**), honakoa egingo dugu:

1) **F** eta **H**-tik $\underline{V_1 = F} \in$ **V-S_0** **($i = 1$)** hartuko dugu, C-tik hurbilen dagoena baita eta

$E(F) = d(C,F) = 6$

2) Kontsidera dezagun: **$S_1 = S_0 \cup \{F\}$**

3) **$i = 0 + 1 < n-1 = 6-1 = 5$** egingo dugu eta bigarren pausora itzuliko gara.

2. pausoa **Bigarren iterazioa ; $i = 1$** ; $S_1 = \{C, F\}$

Kontsidera dezagun $V\text{-}S_1 = \{A, B, G, H\}$

$W \in V\text{-}S_1$ erpin bakoitzarentzat (ahal bada) $(\infty,-)$ etiketaren ordez $\underline{(E(W),X)}$ **etiketa** jarriko dugu,non:

- $\underline{E(W)} = \min_{\substack{V \in S_1 \\ C,F \in S_1}} \{ E(W), E(V) + p(V,W)\}$

$$= \min \{ E(W), E(C) + p(C,W), E(F) + p(F,W)\}$$

- $\underline{X}$ izango da $E(W)$ minimoa lortzen den S_1 –en erpina, kasu honetan $X = C$ edo $X = F$

Orduan:

$E(A) = \min\{E(A), E(C) + p(C,A), E(\underline{F}) + P(\underline{F}, A)\}$
$= \min\{\infty, 0 + \infty, 6 + 11\} = \underline{17}$

$E(B) = \min\{E(B), E(C) + p(C,B), E(F) + p(F,B)\}$
$= \min\{\infty, 0 + \infty, 6 + \infty\} = \infty$

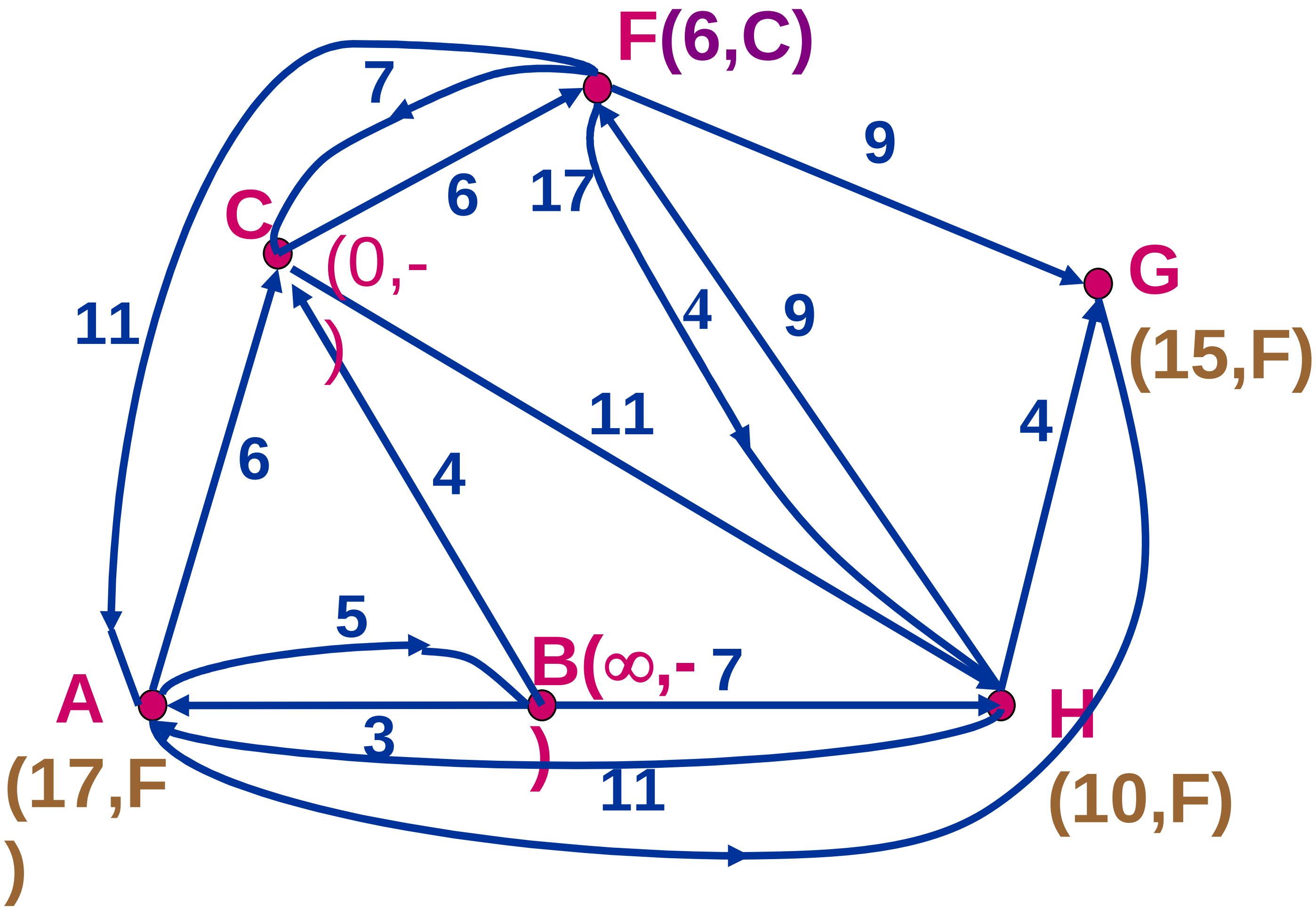
$E(G) = \min\{E(G), E(C) + p(C,G), E(\underline{F}) + p(\underline{F}, G)\}$
$= \min\{\infty, 0 + \infty, 6 + 9\} = \underline{15}$

$E(H) = \min\{E(H), E(C) + p(C,H), E(\underline{F}) + p(\underline{F},H)\}$
$= \min\{\infty, 0 + 11, 6 + 4\} = \underline{10}$

Beraz **$V\text{-}S_1 = \{A, B, G, H\}$** multzoko erpinak etiketatuko ditugu:

→ **A**-ren **etiketa** **(17,F)**, **G**-ren **etiketa** **(15,F)** eta **H**-ren **etiketa** **(10,F)** (beste aldaketa bat) eta besteak zeuden moduan.

eta grafoa honela etiketatuko da:



3. pausoa

$V\text{-}S_1$ = {A,B,G,H} multzoko erpin guztiek ez dutenez **(∞, -)** etiketa (**A, G eta H-k ez dute**), honakoa egingo dugu:

1) **A, G** eta **H**-tik s <u>V_2 = H</u>$\in$ **$V\text{-}S_1$ (i = 2)** hartuko dugu **C**-tik hurbilen dagoena baita eta gainera:

$$\mathbf{E(H) = d(C,H) = 10}$$

2) Kontsidera dezagun: **$S_2 = S_1 \cup$ {H} = {C, F, H}**

3) **$i = 1 + 1 < n-1 = 6-1 = 5$** egingo dugu eta 2. pausora itzuliko gara.

2. pausoa **Hirugarren iterazioa ; i = 2** ; S_2 = {C, F, H}

Kontsidera dezagun **$V-S_2$ = {A, B, G}**

$W \in V-S_2$-ren erpin bakoitzarentzak (ahal bada) **(∞,-)** etiketaren ordez **(E(W),X)** **etiketa** jarriko dugu, non:

- $\underline{E(W)} = \min_{\substack{V \in S_2 \\ C,F,H \in S_2}} \{ E(W), E(V) + p(V,W)\}$

  $= \min \{ E(W), E(C) + p(C,W), E(F) + p(F,W), E(H) + p(H,W)\}$

- **X** izango da **E(W)** minimoa lortzen den **S_2** –ren erpina, kasu honetan **X = C** edo **X = F** edo **X = H**

Orduan:

$$E(A) = \min\{E(A), E(C) + p(C,A), E(\underline{F}) + P(\underline{F}, A), E(H) + p(H,A)\}$$
$$= \min\{17, 0 + \infty, 6 + 11, 10 + 11\} = \underline{17}$$

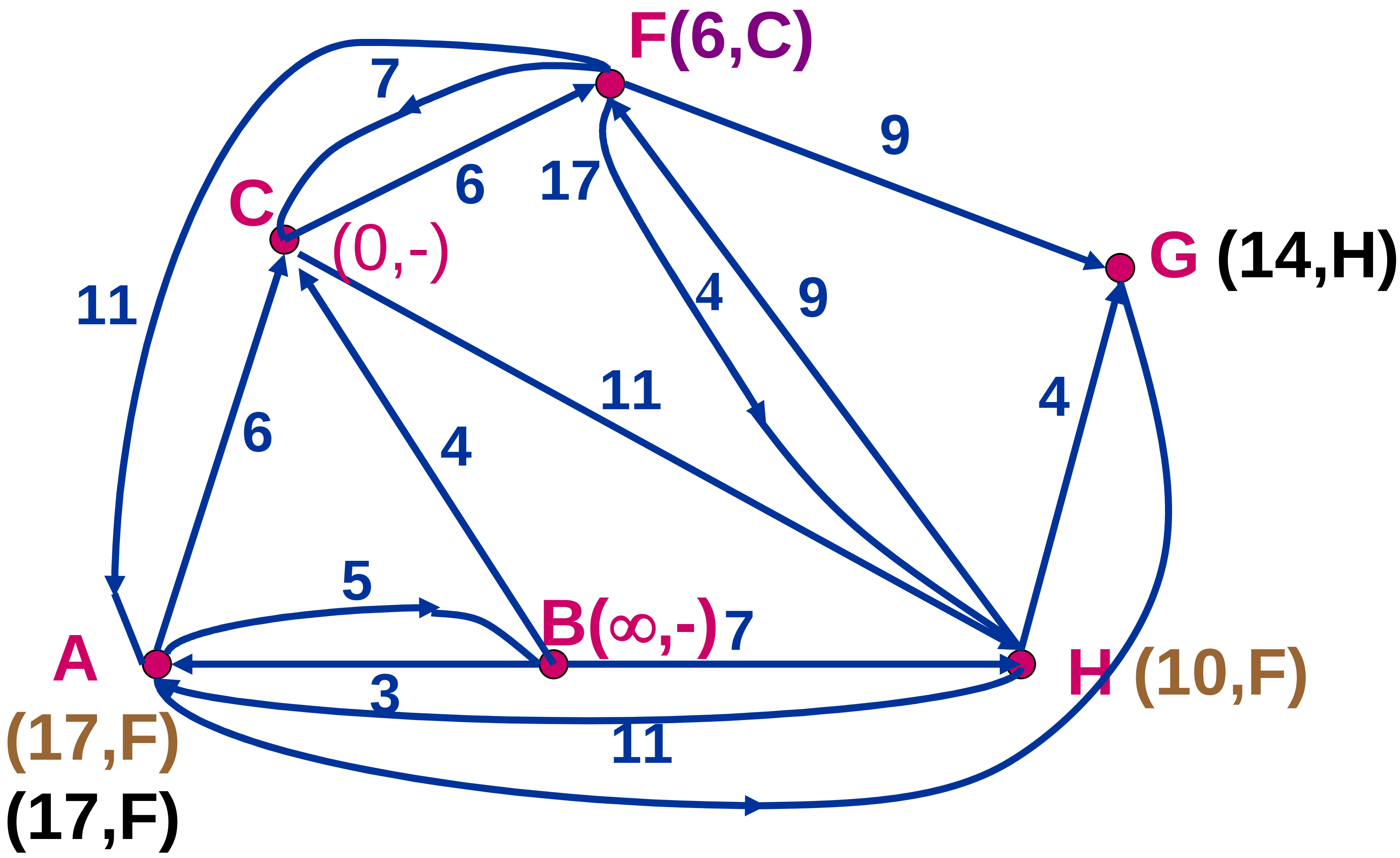
$$E(B) = \min\{E(B), E(C) + p(C,B), E(F) + p(F,B), E(H) + p(H,B)\}$$
$$= \min\{\infty, 0 + \infty, 6 + \infty, 10 + \infty\} = \infty$$

$$E(G) = \min\{E(G), E(C) + p(C,G), E(F) + p(F, G), E(\underline{H}) + p(\underline{H},G)\}$$
$$= \min\{15, 0 + \infty, 6 + 9, 10 + 4\} = \underline{14} < 15$$

Orduan $\mathbf{V\text{-}S_2 = \{A, B, G\}}$ multzoko erpinak honela etiketatuko ditugu:

→ **A**-ren **etiketa** **(17,F)** (lehen gisa), **G**-ren **etiketa** **(14,H)** (beste aldaketa bat) eta besteak zeuden moduan.

eta grafoa honela etiketatuko da:



3. pausoa

$V\text{-}S_2$ = {A, B, G} multzoko erpin guztiek **ez** dutenez **(∞, -)** etiketa (**A, G-k** **ez dute**), honakoa egingo dugu:

1) **A** eta **G**-tik $\underline{V_3 = G}$ ∈ **$V\text{-}S_2$ (i = 3)** hartuko dugu **C**-tik hurbilen dagoena baita eta gainera:

E(G) = d(C,G) = 14

2) Kontsidera dezagun **$S_3 = S_2$** ∪ **{G} = {C, F, H, G}**

3) **i = 2 + 1 < n-1 = 6-1 = 5** egingo dugu eta 2. pausora itzuliko gara.

2. pausoa

4. iterazioa ; $i = 3$; $S_3 = \{C, F, H, G\}$

Kontsidera dezagun $V\text{-}S_3 = \{A, B\}$

$W \in V\text{-}S_3$-ko erpin bakoitzerako (ahal bada) **$(\infty,-)$** etiketaren ordez **$\underline{(E(W),X)}$** **etiketa** jarriko dugu, non

- $$\underline{E(W)} = \min_{\substack{V \in S_3 \\ C,F,H,G \in S_3}} \{ E(W), E(V) + p(V,W)\}$$

  $$= \min \{ E(W), E(C) + p(C,W), E(F) + p(F,W), E(H) + p(H,W), E(G) + p(G,W)\}$$

- $\underline{X}$ izango da $E(W)$ minimoa lortzen den S_3 – ren erpina, kasu honetan de $X = C$ edo $X = F$ edo $X = H$ edo $X = G$

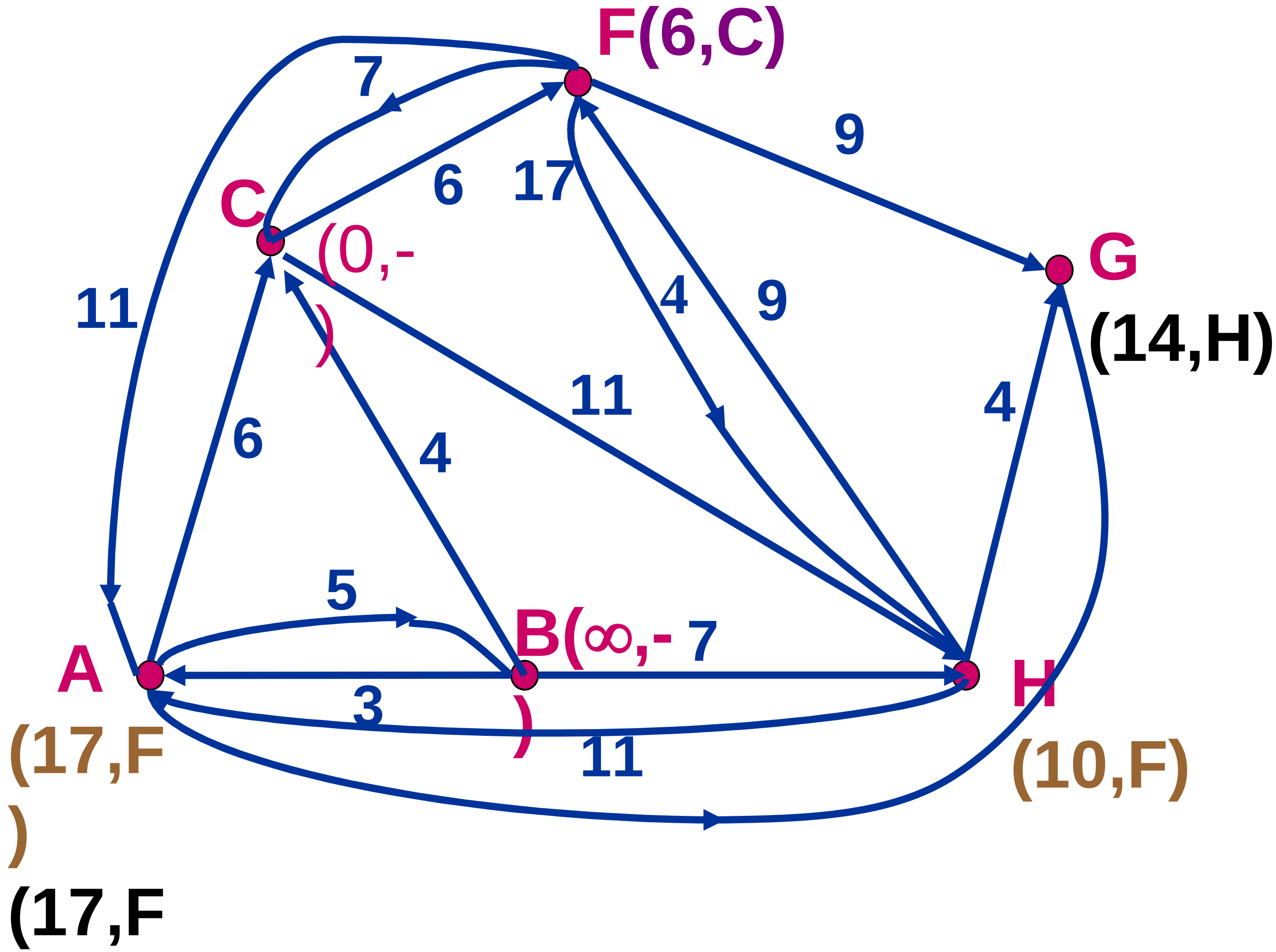
Orduan:

E(A) = min{E(A), E(<u>C</u>) + p(<u>C</u>,A), E(F) + p(F,A), E(H) + p(H,A), E(G) + p(G,A)}
= min{17, 0 + ∞, 6 + 11, 10 + 11, 15 + ∞} = <u>17</u>

E(B) = min{E(B), E(C) + p(C,B), E(F) + p(F,B), E(H) + p(H,B), E(G) + p(G,B)}
= min{∞, 0 + ∞, 6 + ∞, 10 + ∞, 15 + ∞} = ∞

Beraz, **V-S$_3$ = {A,B} erpinak** ez dira aldatzen eta **etiketa berdinak** jarriko ditugu.

eta grafoa honela etiketatuta dago:



3. pausoa

$V\text{-}S_3$ = {A, B} multzoko erpin guztiek **ez** dutenez **(∞, -)** etiketa (**A-k ez du**), honakoa egingo dugu:

1) $\underline{V_4 = A} \in V\text{-}S_3$ **(i = 4)** hartuko dugu, honakoa egiaztatuz: **E(A) = 17**

2) Kontsidera dezagun **$S_4 = S_3 \cup \{A\}$ ={C,F,H,G,A}**

3) **i = 3 + 1 < n-1 = 6-1 = 5** egingo dugu, eta 2. pausora itzuliko gara.

2. pausoa **5. iterazioa ; i = 4** ; $\mathbf{S_4 = \{C,F,H,G,A\}}$

Kontsidera dezagun $\mathbf{V\text{-}S_4 = \{B\}}$

$\mathbf{B \in V\text{-}S_4}$ azkeneko erpinerako, (ahal bada) haren etiketaren ordez **(E(B),X)** **etiketa** jarriko dugu, non:

- $$\underline{\mathbf{E(B)}} = \min_{\substack{V \in S_3 \\ C,F,H,G,A \in S_4}} \{ \mathbf{E(B), E(V) + p(V,B)} \}$$

$\mathbf{= \min \{ E(B), E(C) + p(C,B), E(F) + p(F,B), E(H) + p(H,B), E(G) + p(G,B), E(\underline{A}) + p(\underline{A},B)\} = \{\infty, 0 + \infty, 6 + \infty, 10 + \infty, 14 + \infty, 17 + 5\} = \underline{22}}$

- eta $\mathbf{X = A}$

→ **B**-ren **etiketa (22,A)** izango da eta besteak zeuden moduan.

3. pausoa

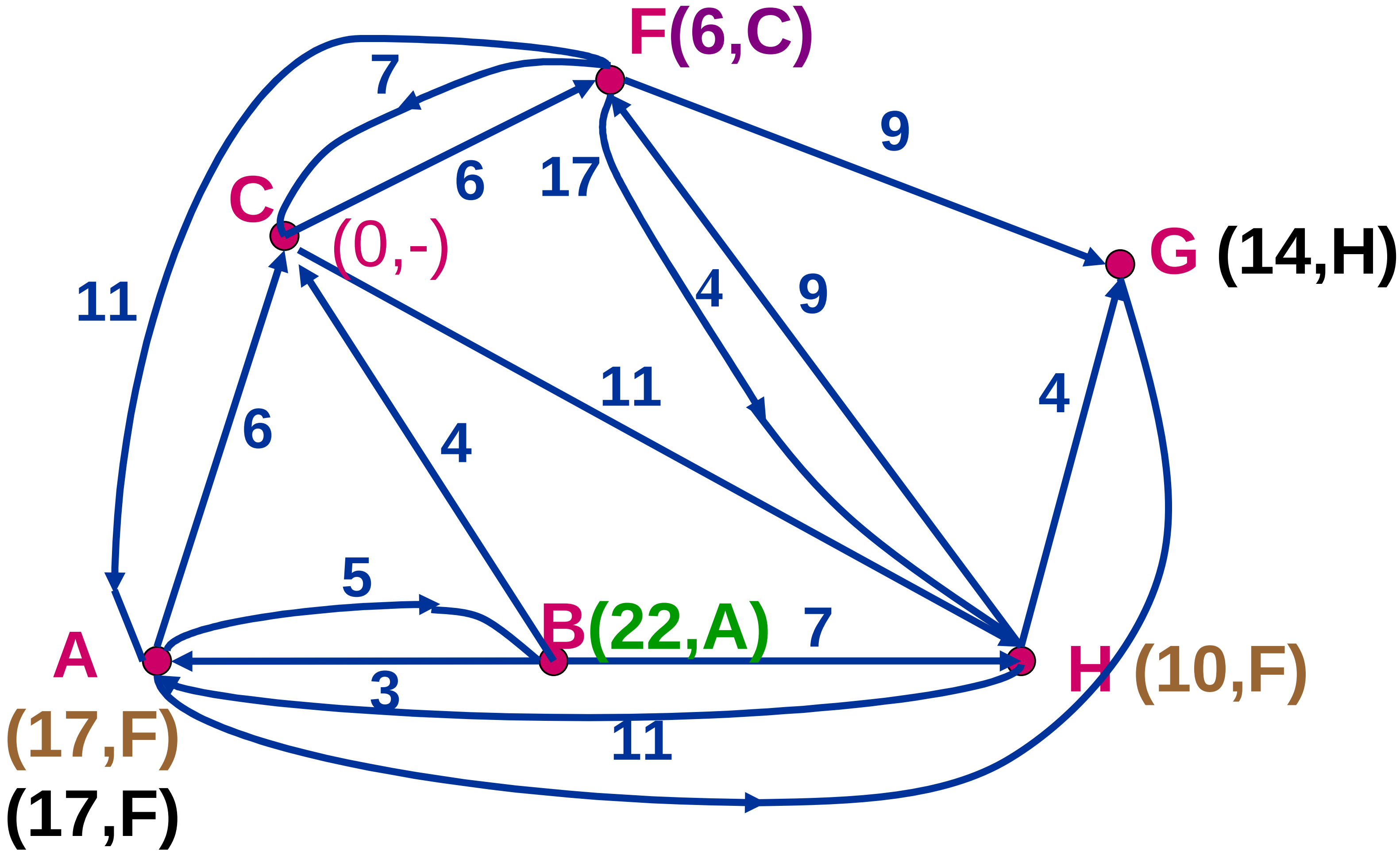
1) $\mathbf{V_5 = B \in V\text{-}S_4}$ hartuko dugu eta **E(B) = 22**

2) $\mathbf{S_5 = S_4 \cup \{B\} = \{C, F, H, G, A, B\}}$

3) $\mathbf{i = 4 + 1 = 5 \not< 6\text{-}1 = 5}$

Prozedura bukatu da.

eta grafoa **azken**ik honela **etiketa**tuta geratuko da:



Jarritako etiketetatik, honako **distantzia** “laburrenak” ditugu **C**-tik beste 5 erpinetara:

1) **d(C,F) = E(F) = 6**

2) **d(C,H) = E(H) = 10**

3) **d(C,G) = E(G) = 14**

4) **d(C,A) = E(A) = 17**

5) **d(C,B) = E(B) = 22**

C-tik **B**-rako **bide laburrena** zehazteko, **B (22,A)** puntutik abiatuko gara eta badakigu **A B**-ren **aurrekoa** dela.

A (17,F) denez, badakigu **F A**-ren **aurrekoa** dela.

F (6,C) denez, **C**-ra helduko gara, **F**-ren **aurrekoa** izanik.

Beraz, algoritmoak kalkulatzen duen **C-tik B-rako bide laburrena** honako arkuek ematen dutena da:

(C,F), **(F,A)**, **(A,B)**