6. gaia:
Korronte alternoko zirkuituak

Tensio alternoa

- **Tentsio-iturria**ren terminalaren arteko tentsioak **funtzio sinusoidala** betetzen duenean, tentsio-iturria alternoa da:

$$v(t) = V_0 sen(\omega t + \Phi)$$

- Tentsio edo korronte-iturriak alternoak direnean, **intentsitateak funtzio sinusoidala** betetzen du:

$$i(t) = I_0 sen(\omega t + \Phi)$$

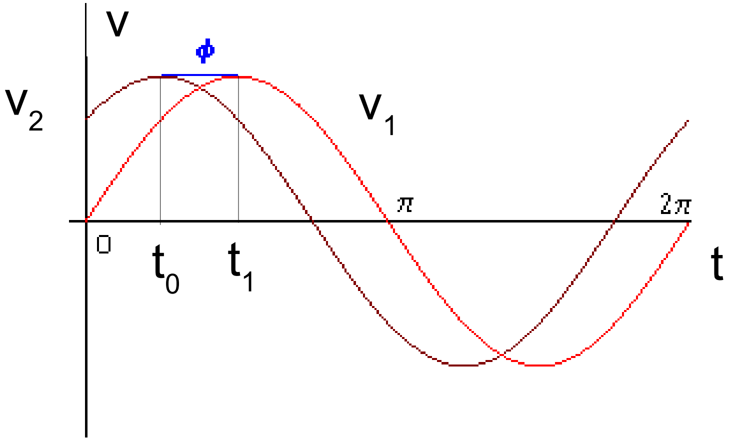
$$V_{0,} I_0 : tentsio \;\; edo \;\; intentsitate \;\; puntako \;\; balioak$$
$$\omega : pultsazio \;\; edo \;\; maiztasun \;\; angeluarra \;\; (radianak / s)$$
$$\Phi : hasierako \;\; fasea \;\; (radianak)$$

Tensio alternoa

- Tentsio edo intentsitateko seinalearen **periodikotasuna adierazten du pulsazio** edo maiztasun angeluarrak:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- **Hasierako faseak** hasierako denboraunean (t=0) funtzioaren balioa aipatzen du eta funtzio sinusoidalen arteko denbora diferentzia adierazten du:



$$v_1(t_1) = v_2(t_0)$$
$$V_0 sen(\omega t_1) = V_0 sen(\omega t_0 + \Phi)$$
$$\omega t_1 = \omega t_0 + \Phi \Rightarrow \Phi = \omega (t_1 - t_0)$$

Tensio alternoa

- **Kosinu funtzioak sinusoidalak** dira, π/2 atzerapenekin:

$$sen(\omega t)=cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

- Funtzio sinusoidalak, beste funtzio sinusoidalen **konbinazio lineala**ren bidez adierazi daitezke:

$$A\, sen(\omega t+\Phi)=B\, sen(\omega t)+C\, cos(\omega t)$$

$$A\, sen(\omega t+\Phi)=A\, cos(\Phi)\, sen(\omega t)+A\, sen(\Phi)\, cos(\omega t)$$

$$donde:\quad B=A\cos(\Phi);\quad C=A\, sen(\Phi)\Rightarrow\quad \Phi=arctg\left(\frac{C}{B}\right)$$

Tensio alternoa

- **Funtzio sinusoidal baten deribatua, beste sinusoidal bat da**, hasierako fasea π/2 handiago:

$$\frac{d}{dt}sen(\omega t)=\omega cos(\omega t)=\omega sen(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d}{dt}cos(\omega t)=-\omega sen(\omega t)=\omega cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

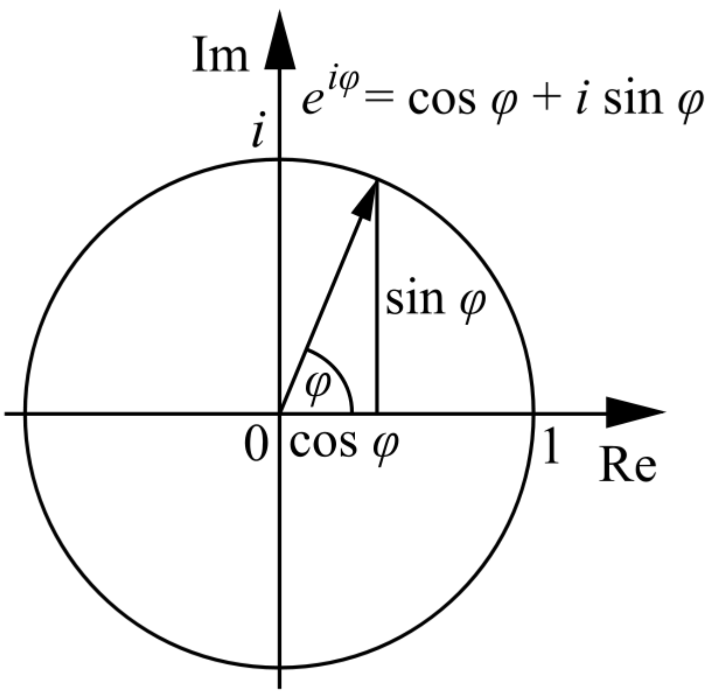
- **Funtzio sinusoidal baten integrala, beste sinusoidal bat da**, hasierako fasea π/2 txikiago:

$$\int sen(\omega t)dt=\frac{1}{\omega}(-cos(\omega t))=\frac{1}{\omega}sen(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

$$\int cos(\omega t)dt=\frac{1}{\omega}(sen(\omega t))=\frac{1}{\omega}cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

Tensio alternoa

- **Esponentzial konplexuaren** bidez funtzio sinusoidalak adierazi daitezke, **Euler-en ekuazioa** erabiliz: $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\,sen(\varphi)$



$$V_0 \cdot e^{j(\omega t + \Phi)} = V_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\Phi}$$
$$V_0\, sen(\omega t + \Phi) = Im(V_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\Phi})$$
$$V_0 \cos(\omega t + \Phi) = Re(V_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\Phi})$$

- **Tentsio eta intentsitate alternoak** adierazteko aldagai errealeko **funtzio (fasorea) esponentzial konplexuaren** atal irudikarioa (edo erreala, kosinukoa bada) erabili dezakegu: $V_0 e^{j(\omega t + \Phi)}$

Impedantzia

- **Tentsio-iturri alterno**, erresistore, kondentsadore eta induktore seriean dauden zirkuitu baten, **Ohm legea** da:

$$v(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + L \cdot \frac{d\,i(t)}{dt}$$

$$V_0 sen(\omega t) = R \cdot I_0 sen(\omega t + \Phi) +$$

$$\frac{1}{C}\int I_0 sen(\omega t + \Phi)\,dt + L \cdot \frac{d}{dt}(I_0 sen(\omega t + \Phi)) =$$

$$R \cdot I_0 sen(\omega t + \Phi) + \frac{1}{\omega C} sen(\omega t + \Phi - \frac{\pi}{2}) + \omega L\, sen(\omega t + \Phi + \frac{\pi}{2})$$

- Tentsio-iturri alternoa kosinukoa bada:

$$V_0 cos(\omega t) = R \cdot I_0 cos(\omega t + \Phi) +$$

$$\frac{1}{C}\int I_0 cos(\omega t + \Phi)\,dt + L \cdot \frac{d}{dt}(I_0 cos(\omega t + \Phi)) =$$

$$R \cdot I_0 cos(\omega t + \Phi) + \frac{1}{\omega C} cos(\omega t + \Phi - \frac{\pi}{2}) + \omega L\, cos(\omega t + \Phi + \frac{\pi}{2})$$

Impedantzia

- Lehenengo ekuazioa j-ren bidez biderkatuz, biak batuz eta Euler-en ekuazioa aplikatuz:

$$V_0 cos(\omega t) + j \cdot V_0 sen(\omega t) = R \cdot I_0 cos(\omega t + \Phi) + j \cdot R \cdot I_0 sen(\omega t + \Phi) +$$

$$\frac{1}{\omega C} I_0 cos(\omega t + \Phi - \frac{\pi}{2}) + j \cdot \frac{1}{\omega C} I_0 sen(\omega t + \Phi - \frac{\pi}{2}) +$$

$$\omega L I_0 \cos(\omega t + \Phi + \frac{\pi}{2}) + j \cdot \omega L I_0 sen(\omega t + \Phi + \frac{\pi}{2})$$

$$V_0 e^{j\omega t} = R \cdot I_0 e^{j(\omega t + \Phi)} + \frac{1}{\omega C} I_0 e^{j(\omega t + \Phi - \frac{\pi}{2})} + \omega L I_0 e^{j(\omega t + \Phi + \frac{\pi}{2})}$$

$$V_0 e^{j\omega t} = R \cdot I_0 e^{j\omega t} e^{j\Phi} + \frac{1}{\omega C} I_0 e^{j\omega t} e^{j\Phi} e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \omega L I_0 e^{j\omega t} e^{j\Phi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Impedantzia

- Euler-en ekuazioagatik:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$$

$$e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\,sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j$$

- Aurreko ekuazioan, beraz:

$$V_0 e^{j\omega t} = R \cdot I_0 e^{j\omega t} e^{j\Phi} - j\frac{1}{\omega C} I_0 e^{j\omega t} e^{j\Phi} + j\omega L I_0 e^{j\omega t} e^{j\Phi}$$

- Eta ***v(t)* eta *i(t)*-ren arteko erlazioa** da:

$$I_0 e^{j\Phi} = V_0 \cdot \left(\frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C} + j\omega L} \right) = V_0 \cdot \frac{1}{Z\,\underline{/\varphi}}$$

Impedantzia

- Ekuazio honen bidez *i(t)* funtzioaren anplitudea eta *v(t)* funtzioarekin fase diferentzia kalkulatu ditzakegu
- Balio hauek, bakarrik tentsioak biderkatzen duen magnitudearen (**admitantzia Y**) menpe daude
- Bere alderantzizko balioa **inpedantzia** da, unitatea ohm da (Ω)
- Tentsio alternoaren aurrean zirkuituaren erantzuna adierazten du, eta bere ikurra Z da:

$$\boldsymbol{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} + jL\omega$$

Inpedantzia

- Inpedantzia zenbaki konplexu bat da, bere zati erreala zirkuituaren erresistentzia da, zati irudikari **erreaktantzia** (X) da

$$\mathbf{Z} = R + j\left(X_L - X_C\right)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}\,;\; X_L = L\omega$$

- Kondentsadorearen erreaktantzia, **erreaktantzia kapazitiboa** da eta induktorearena **erreaktantzia induktiboa** da

Zirkuituak errejimen egonkor sinusoidalean

- Zirkuituan iragankorrak desagertuak izateko nahiko denbora pasatu bada, **errejimen egonkorrean** dagoela esaten dugu
- Iturriak alternoak direnean, zirkuitua **errejimen egonkor sinusoidalean dago (e. e. s.)**
- **E. e. s.-an, iturriak irudikatzeko zenbaki konplexuak (fasoreak) erabiltzen dira**, eta Ohm legea horrela da:

$$\boldsymbol{V = I \cdot Z}$$

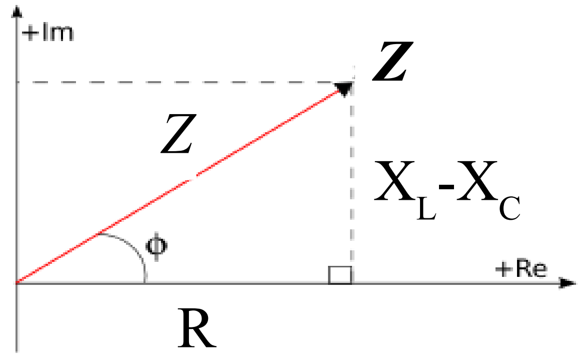
Zirkuituak errejimen egonkor sinusoidalean

- Inpedantzia **forma polarrean** idazten da:

$$\boldsymbol{Z} = Z \underline{/\Phi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\Phi = arctg\frac{X_L - X_C}{R}$$



- Forma polarrean esponentzial konplexua daukagunez, **biderketa eta zatiketa errezak dira**:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}}; I_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{Z e^{j\Phi}} = \frac{V_0}{Z} e^{j\omega t} e^{-j\Phi} \Rightarrow I_0 = \frac{V_0}{Z}; \varphi = -\Phi$$

$$\boldsymbol{V}_C = \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{Z}_C; V_{0C} e^{j(\omega t+\alpha)} = I_0 e^{j(\omega t+\varphi)} X_C e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow V_{0C} = I_0 \cdot X_C; \alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{V}_L = \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{Z}_L; V_{0L} e^{j(\omega t+\alpha)} = I_0 e^{j(\omega t+\varphi)} X_L e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow V_{0L} = I_0 \cdot X_L; \alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

Zirkuituak errejimen egonkor sinusoidalean

- Inpedantzia erabiliz, **Kirchhoff-en legeak zuzenak dira e. e. s.-an**, beraz zirkuitu linealak ebazteko mailen metodoa erabiliko ditugu
- Inpedantzia baliokideak **seriean eta paraleloan zuzenak dira, eta baita ere Thévenin eta Norton-en teoremak**
- **Gainezartzen** printzipioa aplikatuz, **iturri alternoak maiztasun ezberdinekoak** daukaten zirkuituak ebaztu ditzakegu➔Iturri bakoitzarako ebazten dugu zirkuitua eta **zirkuitu bakoitzaren ebazpenaren batuketa** da zirkuitu osoaren ebazpena

Balio efikazak

- Tentsio eta intentsitate aldakorrak adierazteko balio maximo (**puntako balioa**) edo maximo eta minimoaren arteko diferentzia (**puntatik puntarako balioa**) erabiltzen da:

$$V_p = V_0 \qquad V_{pp} = 2 \cdot V_0$$

- Funtzio sinusoidalaren **batez besteko balioa zero da**, beraz magnitude alternoak adierazteko batez besteko balio koadratikoa erabiltzen da, (ingelesez *root mean square*: r. m. s.), **balio efikaza** deitzen dena

$$V_{rms} = V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)\, dt}$$

Balio efikazak

- Alternoan, tentsio eta intentsitateak sinusoidalak dira eta, beraz, **balio efikaza anplitudearekiko proportzionala da**:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (V_0\, sen(\omega t))^2\, dt} = \sqrt{\frac{V_0^2}{T}\int_0^T sen^2(\omega t)\, dt} =$$

$$V_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2}(1+cos(2\omega t))\right) dt} = V_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + \int_0^T cos(2\omega t)\, dt\right)} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

- Tentsio eta intentsitatean betetzen da hau:

$$V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \qquad I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Potentzia alternoa

- Zirkuitu elementu guztietan:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

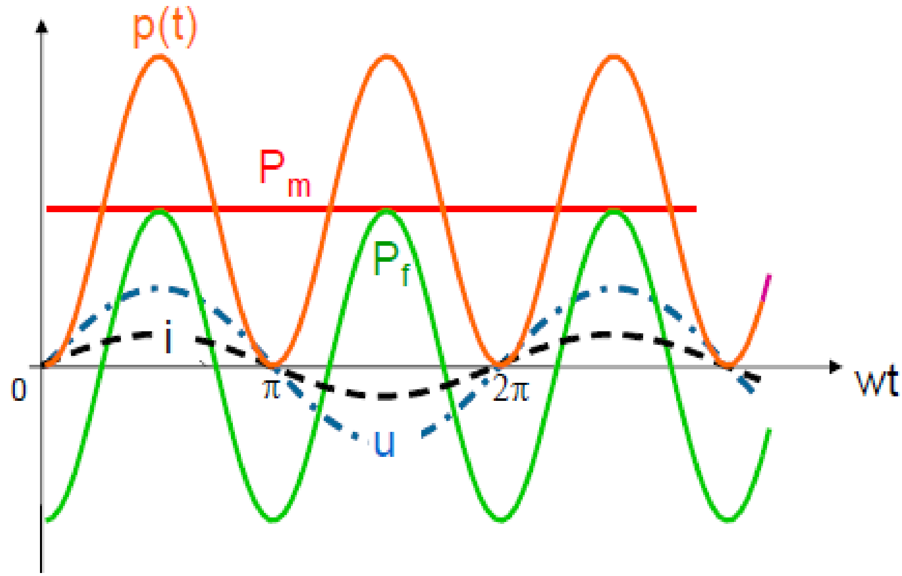
- Baina alternoan ***v(t)*** **eta** ***i(t)*** **funtzio sinusoidalak dira**:

$$p(t) = V_0 \, sen(\omega t) \cdot I_0 \, sen(\omega t + \Phi)$$

$$sen\,\alpha \, sen\,\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta))$$

$$p(t) = \frac{V_0 I_0}{2} cos(\Phi) - \frac{V_0 I_0}{2} cos(2\omega t + \Phi)$$

Potentzia alternoa



- Aurreko ekuazioan, potentziaren **atal bat konstantea da (*potentzia aktiboa*) eta bestea sinusoidala da (*potentzia fluktuatzailea*)**

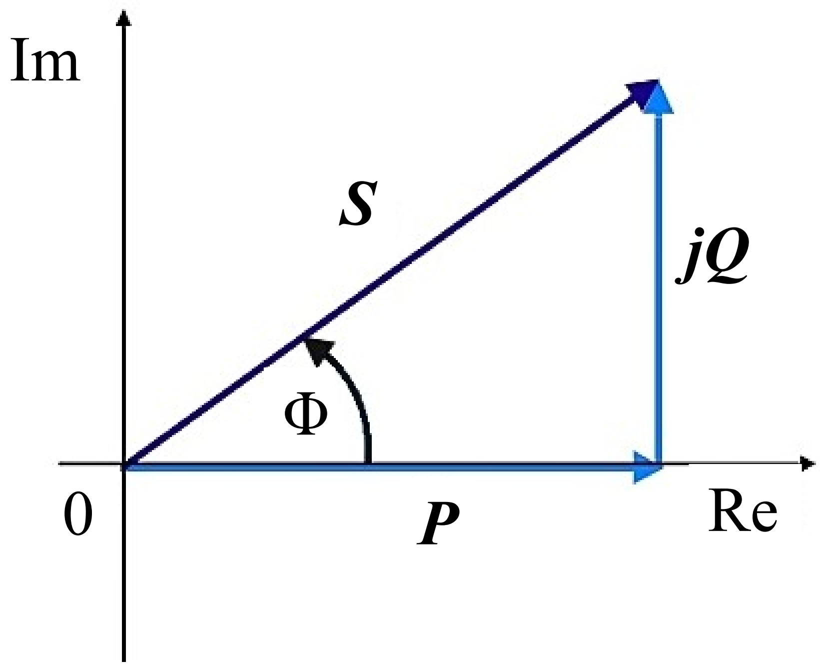
- Potentzia fluktuatzaileren batez besteko balioa zero da, beraz, **potentziaren bataz besteko balioan bakarrik potentzia aktiboa** agertzen da

- Tentsio eta intentsitatearen balio efikazen biderketa da, 1 baino txikiago den faktor (*cos Φ*) batetik biderkatuta: **potentzia-faktorea**

Potentzia alternoa

- Tentsio eta intentsitateko fasoreak balio efikazean idatzirik, bere biderketaren zenbaki konplexua **itxurazko potentzia S** da, unitatea *voltampere* (VA)

$$\boldsymbol{S = V \cdot I}$$



- Itxurazko potentziaren zati erreala **potentzia aktiboa P** da, unitatea *watt* (W)
- Zati irudikariak erreaktantzian sartutako potentzia irudikatzen du eta **potentzia erreaktiboa Q** da, unitatea *voltampere erreaktiboa* (VAR)