LOGIKA

F. Xabier Albizuri - 2015

fx.albizuri@ehu.eus

go.ehu.eus/ii-md

Logikako bi gaiak:

1. LOGIKA PROPOSIZIONALA
2. PREDIKATU LOGIKA

Ikasliburuak:

1. *Logic and Discrete Mathematics: A Computer Science Perspective / Matemática Discreta y Lógica*. W.K. Grassmann, J-P. Tremblay
2. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction / Matemáticas discretas y combinatorias*. R.P. Grimaldi
3. *Discrete Mathematics*. K.A. Ross, C.R.B. Wright

Logikarako sarrera

Logika proposizionala

Logika terminoa grekotik dator: $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$. Honen esanahia *hitza* da (*verbum*), baita ere arrazoiketa (*ratio*).

Arrazoiketa adierazten duten terminoak dira: argumentua (argudioa), dedukzioa, inferentzia, eta abar.

Arrazoiketaren lege edo erregelak aztertzen ditu logikak, matematikaren eta konputazioaren ikuspegitik.

Hizkuntza matematikoan bezala, adierazpenak (formulak) idatziz formalizatuko ditugu argumentuak, eta frogapen matematikoen antzera, argumentu formal baten baliozkotasuna aztertzeko frogapenak egingo ditugu.

Logikarako sarrera

Logika proposizionala

Argumentuen baliozkotasun frogapenak *automatizatuz*, algoritmo bereziak garatzen dira frogapenak konputagailu bidez egiteko.

Adimen artifizialean erabiltzen den tresna nagusia da logika.

Konputagailu programa idazteko logikan oinarritu gaitezke, *programazio logikoa* deitzen zaio logikan oinarritutako programazio paradigmari.

Bi maila ditugu logikan: *logika proposizionala* eta *predikatu logika*, lehenak baino formalismo aberatsagoa du bigarrenak.

Edonola ere, logikaren formalismoak muga du, ezin da edozein arrazoiketa formalizatu.

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Logika proposizionala

Argumentu batzuk idatziko ditugu eta hauen baliozkotasuna logika proposizionalean aztertzea posible dela ikusiko dugu.

Lehen argumentua:

- *1. premisa*: Ekonomia hobetzen bada, enpresen negozioa handitzen da eta herrialdea aberasten da.
- *2. premisa*: Enpresen negozioa handitzen bada, lanpostuak sortzen dira.
- *Ondorioa*: Ekonomia hobetzen bada, lanpostuak sortzen dira.

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Logika proposizionala

Bigarren argumentua:

- *1. premisa*: Konputagailu programak akatsa du edo sarrerako datuak ez dira zuzenak.
- *2. premisa*: Sarrerako datuak zuzenak dira.
- *Ondorioa*: Konputagailu programak ez du akatsik.

Nabarmena da lehen argumentua baliozkoa dela eta bigarren argumentua, aldiz, ez dela baliozkoa.

Logika proposizionalaren helburua da, honelako argumentu bat emanik, bere egitura aztertu eta formalizatzea adierazpenak idatziz, jarraian frogatuz, era matematikoan, argumentua baliozkoa dela, edo ez dela baliozkoa.

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Logika proposizionala

Argumentuaren premisetan eta onondorioan identifikatuko ditugu proposizio *bakunak edo atomikoak*, proposizio txikiagotan banatu ezin direnak, eta proposizio bakun hauek *lokailu* logiko batzuekin bilduz eraikitzen diren proposizio *konposatuak*. Hau da lokailu proposizionalen zerrenda (bakoitzaren izena, ikurra, nola irakurri):

- Konjuntzioa, $\wedge$, "... eta ..."
- Disjuntzioa, $\vee$, "... edo ..."
- Inplikazioa/Baldintzazkoa, $\rightarrow$, "...-k inplikatzen du ...", "Baldin ... orduan ...", "... soilik baldin ..."
- Baldintzabikoa, $\leftrightarrow$, "... baldin eta soilik baldin ..."
- Ukapena/Ezeztapena, $\neg$, "Ez ..."

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Logika proposizionala

Proposizio bakunen ordez *aldagai proposizionalak* hartuz eta hauek lokailuekin (lokailu ikurrekin) bilduz, *adierazpenak* idatziko ditugu argumentuen premisak eta ondorioa formalizatzeko.

Adibidez, ikusi dugun lehen argumentuan P aldagaiak ordezkatzen badu "Ekonomia hobetzen da" proposizioa, Q aldagaiak "Enpresen negozioa handitzen da" proposizioa, R aldagaiak "Herrialdea aberasten da" proposizioa eta S aldagaiak "Lanpostuak sortzen dira" proposizioa, argumentu hori formalki idatziko dugu, bere premisak eta ondorioa, hiru adierazpen hauekin:

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

- *1. premisa*: $P \to Q \wedge R$
- *2. premisa*: $Q \to S$
- *Ondorioa*: $P \to S$

Antzera, bigarren argumentuan P aldagaiak ordezkatzen badu orain "Konputagailu programak akatsa du" proposizioa eta Q aldagaiak "Sarrerako datuak zuzenak dira" proposizioa, argumentua formalki idatziko dugu adierazpen hauekin:

- *1. premisa*: $P \vee \neg Q$
- *2. premisa*: Q
- *Ondorioa*: $\neg P$

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Logika proposizionala

Adierazpenetan parentesiak erabiliko ditugu, aldagai proposizionaletatik abiatuz nola eraiki diren zehazteko (adierazpen aritmetikoetan egiten den bezala), hau da: formalizatu den proposizio konposatuan, proposizio bakunetatik abiatuz eta lokailuak sartuz, nola osatu diren bitarteko proposizio konposatuak, urratsez urrats, proposizio konposatu osoa eraiki arte.

Baina parentesi guztiak ez dira idazten, adibidez, aurreko adierazpenetan $P \rightarrow Q \wedge R$ idatzi da, $P \rightarrow (Q \wedge R)$ adierazpenaren berdina, eta $P \vee \neg Q$ ere, $P \vee (\neg Q)$ adierazpenaren berdina.

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Logika proposizionala

Parentesien erabilera murrizteko, lokailu proposizional bakoitzaren *lehentasuna* edo *aurrekotasuna* hartzen da kontuan. Adierazpena aldagaietatik eraikitzean lokailu bat bestea baino lehenago sartu dela zehaztuko du lehentasun irizpideak (gorde diren parentesiekin batera).

Lokailu proposizionalen lehentasuna definituko dugu, hauek ordenatuz ezkerretik eskuinera, bi lokailuren artean lehentasun handiagoa izango du eskuineko lokailuak ezkerrekoak baino:

$$\begin{array}{ccc} \leftrightarrow & \wedge & \\ & & \neg \\ \rightarrow & \vee & \end{array}$$

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Logika proposizionala

Ariketa. Lokailu proposizionalen arteko lehentasunaren arabera beharrezkoak ez diren parentesi guztiak idatzi adierazpen hauetan: $P \to Q \wedge R$, $\neg P \vee Q$, $\neg\neg P \to Q$

Parentesiak idatzi behar dira lehentasun txikiagoa duen lokailua sartu bada lehentasun handiagoa duen lokailuaren aurretik adierazpena eraikitzean aldagaietatik. Adibidez, $(P \to Q) \wedge R$, $\neg(P \vee Q)$ eta $\neg(\neg P \to Q)$ adierazpenetan ezin dira idatzitako parentesiak kendu.

Parentesiak beharrezkoak dira lehentasun berdina duten lokailuak nola sartu diren zehazteko ere. Adibidez, $P \to (Q \to R)$ eta $(P \to Q) \to R$ adierazpen desberdinak dira, ezin dira kendu parentesi horiek.

Lokailu proposizionalak, adierazpenak

Logika proposizionala

Ariketa. Eraiki $P \to (Q \vee R \to (R \to \neg P))$ adierazpena aldagai proposizionaletatik abiatuz. Zuhaitz batean marraztu aldagaiak, bitarteko adierazpenak eta adierazpen osoa.

Bestalde, azkena sartu den lokailuaren arabera deitzen zaio adierazpenari: adibidez, $P \to Q \wedge R$ adierazpena inplikazio bat dela esango dugu, $(\neg P \vee Q) \wedge R$ konjuntzioa, $\neg(P \to Q)$ ukapena, eta abar.

Egi taulak, adierazpen baliozkoak

Logika proposizionala

Gure helburua da argumentu formal (premisak eta ondorioa) baten *baliozkotasuna* definitzea, baina lehenik adierazpen baliozkoaren kontzeptua definituko dugu.

Hasteko, proposizio bati buruz egiazkoa edo faltsua dela esaten dugunez, adierazpen bateko aldagai proposizional bakoitzaren *egi balio* posibleak izango dira T (egiazkoa) eta F (faltsua). Aldagai bakoitzaren egi balioaren bi aukerak izango dira kontuan adierazpenaren baliozkotasuna aztertzen denean.

Adierazpeneko aldagai proposizionalen egi balioen aukera desberdinetarako, lokailuak sartuz eraikitzen diren bitarteko adierazpenen eta adierazpen osoaren egi balioa kalkulatzeko, lokailu proposizionalak *funtzio logiko* bezala hartuko dira.

Egi taulak, adierazpen baliozkoak

Logika proposizionala

Ondorengo taulek definitzen dituzte lokailu proposizionalei dagozkien funtzio logikoak. Lokailu hauen funtzio logikoak $\{T, F\}^2$ multzotik $\{T, F\}$ multzorako funtzioak dira:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

Ukapenaren funtzio logikoa $\{T, F\}$-tik $\{T, F\}$-rakoa da:

P	$\neg P$
T	F
F	T

Egi taulak, adierazpen baliozkoak

Logika proposizionala

Tauletan ikusten dugunez:

- $P \wedge Q$ egiazkoa da soilik P eta Q biak egiazkoak direnean,
- $P \vee Q$ faltsua da soilik P eta Q biak faltsuak direnean,
- $P \rightarrow Q$ faltsua da soilik P egiazkoa izanik Q faltsua denean,
- $P \leftrightarrow Q$ egiazkoa da P-k eta Q-k egi balio berdina dutenean, faltsua bestela,
- $\neg P$-ren egi balioa P-ren egi balioaren aurkakoa da.

Egi taulak, adierazpen baliozkoak

Logika proposizionala

Adierazpen baten *egi taula* egingo dugu, bere aldagai proposizionalen egi balioen aukera bakoitzerako adierazpen osoaren egi balioa kalkulatuz. Lokailu proposizionalak sartuz eraikitzen diren bitarteko adierazpenen eta adierazpen osoaren egi balioa kalkulatuko da, lokailua funtzio logiko bezala hartuz, aurreko taulen arabera.

Egi taularen lerro bakoitzean idatziko dugu aldagaien egi balioen aukera eta kalkulatu den adierazpenaren egi balioa (eta agian bitarteko adierazpenen egi balioak). Aldagaien egi balioen aukera guztiekin taularen lerroak idazten dira.

Ariketa. Kalkulatu $P \to (Q \lor R \to (R \to \neg P))$ adierazpenaren egi taula.

Egi taulak, adierazpen baliozkoak

Logika proposizionala

Definizioa. Adierazpen bat *baliozkoa* (edo tautologia) dela esango dugu, bere egi taulako lerro guztietan egiazkoa bada, hau da, aldagai proposizionalen egi balioen edozein esleipenerako adierazpena egiazkoa bada. Adierazpena ez da baliozkoa gutxienez lerroren batean faltsua bada. Adierazpena kontraesana da lerro guztietan faltsua bada.

Ariketa. Aztertu adierazpen hauek baliozkoak diren:

- $P \to P$
- $P \land Q \to (\neg P \to Q)$
- $P \to (Q \lor R \to (R \to \neg P))$

Egi taulak, adierazpen baliozkoak

Logika proposizionala

Ondoren *aldagai sintaktikoak* (metavariables) erabiliko ditugu adierazpenak izendatzeko: A, B, C, A_1, A_2 etab.

Definizioa. A_1, A_2, ..., A_n premisak eta B ondorioa dituen *argumentua baliozkoa* dela esango dugu baldin $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ adierazpena baliozkoa bada.

Argumentua baliozkoa denean hau idatziko dugu:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

Hemen $\models$ ikurra ez da lokailu proposizional bat baizik argumentu formala baliozkoa dela seinalatzen duen ikurra. (Adierazpen bat baliozkoa denean ere erabiltzen da: $\models A$)

Egi taulak, adierazpen baliozkoak

Definizio honen arabera (eta lokailuen taulak begiratuz) argumentu bat baliozkoa da baldin premisa denak egiazkoak direnean ondorioa ere egiazkoa bada, aldagai proposizionalen egi balioen edozein esleipenerako, hau da, egi taulako edozein lerrotan.

Ariketa. Argumentu formalaren premisak $P \vee Q$ eta $\neg Q$ badira, eta ondorioa P, aztertu baliozko argumentua den.

Honela lortu dugu, logika proposizionalean, argumentu baliozkoaren kontzeptua zehaztea, era matematiko batean.

Baliokidetasunak

Logika proposizionala

Adierazpenak beste adierazpenetan transformatuko ditugu, egi taulako lerro bakoitzean adierazpenaren egi balioa gordez (antzera egiten da aritmetikan, adierazpenak transformatzen dira zenbakizko emaitza gordez).

Definizioa. A eta B adierazpenak baliokideak direla esango dugu baldin $A \leftrightarrow B$ adierazpena baliozkoa bada.

A eta B adierazpenak baliokideak badira $A \equiv B$ idatziko dugu (kontuan izan $\equiv$ ez dela lokailu proposizional bat).

Definizioaren arabera, A eta B baliokideak dira baldin A eta B adierazpenek egi balio berdina dadute egi taulako edozein lerrotan.

Baliokidetasunak

Logika proposizionala

Erraz frogatzen dira propietate hauek.

Propietatea. Edozein A, B, C adierazpenerako:

- $A \equiv A$
- baldin $A \equiv B$ orduan $B \equiv A$
- baldin $A \equiv B$ eta $B \equiv C$ orduan $A \equiv C$

Ondorengo propietatean azpiadierazpenak ordezkatuko dira. Adierazpen baten azpiadierazpenak dira, adierazpen hori aldagai proposizionaletatik eraikitzean osatu diren bitarteko adierazpenak.

Baliokidetasunak

Logika proposizionala

Propietatea. Baldin $A \equiv B$ baliokidetasuna badugu, C adierazpenean A azpiadierazpena B adierazpenarekin ordezkatzen bada, D adierazpena lortuz, orduan $C \equiv D$ baliokidetasuna izango dugu.

Jarraian oinarrizko baliokidetasun legeak ditugu, edozein A, B, C adierazpenerako betetzen diren baliokidetasunak.

Baliokidetasunak

Logika proposizionala

$\neg\neg A \equiv A$	Ukapen bikoitza
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	Trukatze legeak
$A \vee B \equiv B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	Elkartze legeak
$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Banatze legeak
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
$A \wedge A \equiv A$	Idenpotentzia legeak
$A \vee A \equiv A$	
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	De Morganen legeak
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	
$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	Inplikazioa
$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	Baldintzabikoa

Baliokidetasunak

Logika proposizionala

Ariketa. Frogatu $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ egi taula eginez. Ondorioz, $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ dugu oro har, aldagai sintaktikoak hartuz.

Elkartze legeen arabera, bi atal baino gehiago dituen konjuntzioan edo disjuntzioan parentesirik ez dugu ipiniko atal horien artean. Adibidez, $P \wedge \neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ idatziko dugu.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ adierazpenak bata bestearekin baliokideak badira, *baliokidetasun katea* dugu:

$$A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv \ldots \equiv A_n$$

Ariketa. Baliokidetasun katea osatuz, frogatu:

- $P \wedge (P \vee Q \rightarrow Q) \equiv P \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee Q)$
- $P \wedge Q \equiv \neg(P \rightarrow \neg Q)$

Frogapen formalak

Logika proposizionala

Argumentu formal bat baliozkoa dela frogatzeko, egi taula egin dezakegu, lehen esan bezala: egi taulako edozein lerrotan, premisa denak egiazkoak direnean ondorioa ere egiazkoa dela begiratuko da.

Horren ordez, argumentu formal bat baliozkoa dela frogatzeko, *deribazio edo frogapen formala* egin dezakegu: argumentuaren premisetatik abiatuz adierazpen sekuentzia bat deribatuko da, *inferentzia-erregela* batzuk erabiliz, argumentuaren ondorioa lortuz azkenean.

Inferentzia-erregela bakoitzak esaten digu adierazpen batetik, edo bi adierazpenetatik, beste adierazpen bat deribatzen dela. Erregela hauek formalki idazteko $\vdash$ ikurra erabiliko dugu.

Frogapen formalak

Logika proposizionala

Logika proposizionaleko inferentzia-erregelak:

- Sinplifikazio Konjuntiboa eta Konbinazio Konjuntiboa,

$$A \wedge B \vdash A$$
$$A \wedge B \vdash B$$
$$A, B \vdash A \wedge B$$

- Adizio Disjuntiboa,

$$A \vdash A \vee B$$
$$B \vdash A \vee B$$

Frogapen formalak

Logika proposizionala

- Silogismo Disjuntiboa,

$$A \lor B, \neg A \vdash B$$
$$A \lor B, \neg B \vdash A$$

- *Modus Ponens* eta *Modus Tollens*,

$$A \to B, A \vdash B$$
$$A \to B, \neg B \vdash \neg A$$

- Silogismo Hipotetikoa,

$$A \to B, B \to C \vdash A \to C$$

Frogapen formalak

Logika proposizionala

- Baldintzabikoa Ezabatzea eta Baldintzabikoa Sartzea,

$$A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$$
$$A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$$
$$A \rightarrow B, B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$$

Inferentzia-erregela hauetaz gainera, frogapena antolatzeko ondorengo *metodoak* ditugu.

Frogapen formalak

Logika proposizionala

- *Reductio ad absurdum* (r.a.a.). Argumentuaren ondorioaren ukapena premisa gehigarri bezala hartuz, frogapena egiten da kontraesan bat deribatzeko (adierazpen bat eta bere ukapena). Orduan ondorioztatuko da hasierako argumentua baliozkoa dela. (Frogapenean zehar bitarteko adierazpen bat deribatzeko ere erabil dezakegu metodoa.)
- Kasuzkako frogapena. Frogapenean zehar $A \vee B$ disjuntzioa badugu, frogapena bi adarretan (bi kasutan) banatu dezakegu, adar batean A premisa gehigarria hartuz eta beste adarrean B premisa gehigarria. Bi adarretan (kasuetan) adierazpen bera deribatu behar da eta orduan adierazpen honekin jarraituko dugu frogapena, bi adarrek bat eginez (bi kasuak bilduz).

Frogapen formalak

Logika proposizionala

- Frogapen baldintzatua. Argumentuaren ondorioa inplikazio bat denean, $A \to B$, frogapenaren premisa gehigarritzat har dezakegu A, horrela frogapena egiten da B deribatzeko. Orduan ondorioztatuko dugu hasierako argumentua baliozkoa dela. (Frogapenean zehar bitarteko adierazpen bat deribatzeko ere erabil dezakegu metodoa.)

Azkenik, nabarmenduko dugu baliokidetasunak ere erabiltzen direla frogapen formaletan.

Ariketak. Aztertu argumentu hauek baliozkoak diren frogapen formala eginez.

Frogapen formalak

Logika proposizionala

1. Premisak: $\neg R \to \neg P$, $R \to S$, $\neg T \vee \neg S$, $T \vee U$, $\neg U$. Ondorioa: $\neg P$.
2. Premisak: $P \vee Q$, $\neg P \vee R$. Ondorioa: $Q \vee R$. Frogatu zuzenean edo r.a.a. metodoarekin.
3. Premisak: $P \to Q$, $P \to R$. Ondorioa: $P \to Q \wedge R$.
4. Premisak: $P \to Q$, $Q \to R \wedge S$, $\neg R \vee \neg T \vee U$, $P \wedge T$. Ondorioa: U.
5. Premisak: $\neg P \vee \neg Q \to R \wedge S$, $R \to T$, $\neg T$. Ondorioa: P. Frogatu zuzenean edo r.a.a. metodoarekin.
6. Premisak: $U \to R$, $R \wedge S \to P \vee T$, $Q \to U \wedge S$, $\neg T$. Ondorioa: $Q \to P$.

Predikatuak, zenbatzaileak

Predikatu logika

Logikaren hasieran esan zen bezala, predikatu logika bigarren maila bat da, logika proposizionalaren ondoren datorrena, honek baino formalismo aberatsagoa du.

Azter dezagun argumentu hau:

- *1. premisa*: Katu guztiek buztana dute.
- *2. premisa*: Felix katua da.
- *Ondorioa*: Felixek buztana du.

Argumentu honek baliozkoa izan behar luke logikan, baina logika proposizionalean ezinezkoa da horri egokitzen zaion baliozko argumentu formal bat idaztea. Predikatu logikan formalizatu behar dugu argumentu hori, baliozko argumentu formala lortzeko.

Predikatuak, zenbatzaileak

Predikatu logika

Proposizioen egituran sakontzeko *predikatuak* eta *banakoak* bereiziko ditugu.

Hiru proposizio horietan, alde batetik, "Felix" banakoa dugu. Bestetik, bi predikatu hauek ditugu: "(banakoren bat) katua izatea" eta "(banakoren batek) buztana izatea", idazkera pixka bat formalagoan "— katua da" eta "— -k buztana du" predikatuak.

Predikatu baten argumentuen (objektuen) kopuruari *aritatea* deitzen zaio. Aurreko predikatuak monadikoak dira. Beste predikatu hauek bitarrak dira: "— eta — lagunak dira", "— -en osaba da —". Eta predikatu hau hirutarra da: "— -en amonak — eta — dira". Predikatuaren argumentuen (objektuen) ordena errespetatu behar da.

Predikatuak, zenbatzaileak

Argumentu (argudio) bat aztertzen denean, banakoen *unibertsoa* edo *eremua* deituko diogu argumentuan zehazki edo zeharka kontuan hartzen diren banako guztien multzoari.

Hasierako adibideko argumentuan unibertsoa litzateke animalia guztien multzoa. Beste proposizioetan unibertsoa litzateke pertsonen multzoa edo antzeko multzo bat.

Proposizioetan *zenbatzaileak* ere bereiziko ditugu.

- Zenbatzaile *unibertsala*: "edozein (banako/k)", "(banako) guztiak/ek", $\forall$ ikurra dagokio.
- Zenbatzaile *existentziala*: "existitzen da / badago (banakoren bat)", $\exists$ ikurra dagokio.

Predikatuak, zenbatzaileak

Predikatu logika

Zenbatzaileen bidez banakoen unibertsoari buruzko proposizioak osatuko ditugu: “Animalia guztiek . . . ”, “Badago animalia bat . . . ” erako proposizioak ditugu animalien unibertsoarekin, antzera pertsonen unibertsoarekin edo bestelako unibertsoekin.

Laburbilduz, predikatu logikan argumentu bat aztertzeko, argumentuaren premisetan eta ondorioan (proposizio horietan) elementu hauek bereiziko ditugu: predikatuak (aritate desberdinekoak), banako zehatzak, banakoen unibertsoa, zenbatzaileak, baita logika proposizionaleko elementuak ere.

Predikatuak, zenbatzaileak

Argumentu bat honela formalizatzen da predikatu logikan, argumentuaren premisa eta ondorio bezala ditugun proposizioei dagozkien adierazpenak idatziz.

- Predikatuak formalizatuko ditugu *predikatu aldagaiak* erabiliz, aritatea kontuan hartuta: $P(-)$, $P(-,-)$, $P(-,-,-)$, $Q(-)$, etab.
- Banako zehatzak formalizatuko ditugu *banako konstanteak* erabiliz, predikatu aldagaien argumentu bezala agertuko dira konstanteak: a, b, c, etab.
- Zenbatzaileak formalizatuko ditugu dagozkien ikurrekin, *banako aldagaiak* elkartuta dituztela: $\forall x$, $\forall y$, $\exists x$, $\exists z$, etab. Predikatu aldagaien argumentu bezala ere agertuko dira aldagai horiek: x, y, z, etab.

Predikatuak, zenbatzaileak

Predikatu logika

Hasierako adibidean emandako argumentua honela formalizatuko genuke:

- *1. premisa*: $\forall x(P(x) \to Q(x))$
- *2. premisa*: $P(a)$
- *Ondorioa*: $Q(a)$

Argumentu formal honetan $P(-)$ eta $Q(-)$ predikatu aldagaiak ditugu "– katua da" eta "– -k buztana du" predikatuen ordez, hurrenez hurren, eta a konstantea "Felix" banakoaren ordez. Bestalde, banakoen unibertsoa animalia guztien multzoa litzateke, horri buruzko zenbatzaile unibertsala dugu x aldagaiarekin.

Predikatuak, zenbatzaileak

Idatzi ditugu beraz predikatu logikako hiru adierazpen, adibideko argumentuaren premisak eta ondorioa formalizatuz: $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $P(a)$ eta $Q(a)$.

Oro har, predikatu logikako *adierazpenak* idatziko ditugu letra eta ikur hauekin: predikatu aldagaiak, aldagai proposizionalak ere, konstanteak, zenbatzaileak, hauei elkartutako aldagaiak eta lokailu proposizionalak.

Adierazpen baten *atomoak* dira adierazpeneko predikatu aldagaiak beren argumentuetan idatzita dituztela dagozkien konstanteak eta aldagaiak. Aldagai proposizionalak ere atomoak dira. Adibideko hiru adierazpenen atomoak hauek dira: $P(x)$, $Q(x)$, $P(a)$ eta $Q(a)$.

Predikatuak, zenbatzaileak

Predikatu logika

Adierazpena eraikiko dugu bere atomoetatik abiatuz eta ikurrak sartuz ordena jakin batean (zuhaitz baten bidez irudikatuko dugu eraikuntza hau). Bitartean sortzen diren adierazpen zatiak (eta atomoak ere) adierazpen osoaren azpiadierazpenak dira. Azpiadierazpenean zenbatzaile bati elkartutako aldagaia izan dezakegu baina agian ez zenbatzailea bera (horrela bada aurrerago sartuko da zenbatzailea).

Adierazpenean (eta azpiadierazpenetan) ez da nahasketarik sortu behar zenbatzaileei elkartutako aldagaiekin, zalantzarik gabe jakin behar da predikatu aldagaien argumentuetako aldagai bakoitza zein zenbatzaileri dagokion. Adierazpen bateko bi zenbatzailek aldagai bera erabil dezakete baldin zalantzarik ez bada sortzen predikatu aldagaien argumentuetako aldagaiekin.

Predikatuak, zenbatzaileak

Predikatu logika

Parentesiei dagokionez, logika proposizionaleko lehentasun edo aurrekotasun irizpidearekin jarraituko dugu. Zenbatzaileen lehentasuna, ukapenak duen lehentasunaren berdina izango da: $\forall$, $\exists$, $\neg$ lehentasun berdinekoak dira.

Ariketak. Eraiki adierazpen hauek atomoetatik abiatuz, zuhaitz batekin irudikatu eraikuntza.

1. $\forall x(P(x) \vee Q)$
2. $\forall x P(x) \vee Q$
3. $P(a) \rightarrow \forall x \exists y Q(y, x) \wedge \forall y(R(a, y) \vee S)$

Predikatuak, zenbatzaileak

Predikatu logika

Predikatu logikan ere aldagai sintaktikoak erabiliko ditugu adierazpenak eta azpiadierazpenak izendatzeko: A, B etab. Azpiadierazpen batean x aldagaia agertzen bada baina dagokion zenbatzailea ez badago azpiadierazpenean, orduan $A(x)$ idatzi dezakegu (baina A ere bai baldintza hori nabarmendu beharrik ez badago); antzera $A(x, y)$ baldin x eta y aldagaiak agertzen badira baina ez horien zenbatzaileak. Bestalde, adierazpen edo azpiadierazpen batean a konstantea agertzen bada, $A(a)$ idatzi dezakegu.

Ariketa. $P(a) \wedge \forall x \exists y Q(x, y)$ adierazpenean izendatu azpiadierazpenak aldagai sintaktiko egokiak hartuz.

Interpretazioak, baliozkotasuna

Predikatu logikan adierazpen baten baliozkotasuna aztertzeko bere egi taulako lerroetan egiazkoa den begiratu behar dugu, baina orain egi taulak konplexuagoak dira, logika proposizionalekoak baino.

Adierazpenaren egi taulako lerro bakoitza idazteko adierazpenaren *interpretazio* bat eman behar da. Interpretazio hauek nola egiten diren azalduko dugu.

Lehenik banakoen unibertsoa zehaztuko dugu, multzo zenbakigarri bat izango da (finitua ala infinitua), beraz banakoak $1, 2, 3 \ldots$ izango dira adierazpen baten interpretazioa definitzen dugunean.

Interpretazioak, baliozkotasuna

Predikatu logika

Adierazpenaren interpretazio bat definitzeko esleipen hauek egingo ditugu.

- Aldagai proposizional bakoitzari egi balioa: T edo F.
- Konstante bakoitzari unibertsoko banakoa: zenbaki bat.
- Predikatu aldagai bakoitzari funtzio logikoa: argumentutzat (aritatearen arabera) unibertsoko banakoak $(1, 2, 3 \ldots)$ hartzen dituen eta egi balioa (T edo F) itzultzen duen funtzio bat.

Predikatu aldagaiei esleitzen zaizkien funtzio logikoetarako $\phi(-)$, $\phi(-,-)$, $\psi(-)$, $\phi_1(-)$, $\phi_2(-)$ eta abar idatziko dugu.

Interpretazioak, baliozkotasuna

Predikatu logika

Ariketa. Idatzi predikatu aldagaietarako funtzio logiko monadikoak, bitarrak, etab.

Adierazpenaren interpretazio bat (bere egi taulako lerro bat) finkatuz adierazpenaren egi balioa kalkula dezakegu, logika proposizionalean bezala, jakinik zenbatzaileekin egin behar den ondorengo kalkulua.

- Zenbatzaile unibertsala: $\forall x A(x)$ T da baldin $A(x)$ T bada unibertsoko x banako guztietarako; $\forall x A(x)$ F da baldin $A(x)$ F bada gutxienez unibertsoko x banako baterako.
- Zenbatzaile existentziala: $\exists x A(x)$ T da baldin $A(x)$ T bada gutxienez unibertsoko x banako baterako; $\exists x A(x)$ F da baldin $A(x)$ F bada unibertsoko x banako guztietarako.

Interpretazioak, baliozkotasuna

Predikatu logika

Interpretazio bat (egi taulako lerro bat) finkatuz, $\forall x A(x)$ adierazpenaren edo azpiadierazpenaren egi balioa kalkulatzeko (berdin $\exists x A(x)$ badugu), *taula laguntzaile* bat osatuko dugu, lerro bakoitzean x aldagaiari unibertsoko banako bat esleituz eta $A(x)$ azpiadierazpenaren egi balioa kalkulatuz.

Gainera, $A(x)$ azpieadierazpenaren barruan beste zenbatzaile bat badago, eraiki den taula laguntzailearen lerro bakoitzerako, x banakoa finkatu ondoren, taula laguntzaile bat egin beharko da bigarren zenbatzailearen egi balioa kalkulatzeko.

Beraz, interpretazio bat finkatuz, era errekurtsiboan kalkulatzen da $\forall x A(x)$ edo $\exists x A(x)$ adierazpenaren, edo azpiadierazpenaren, egi balioa.

Interpretazioak, baliozkotasuna

Predikatu logika

Ariketa. Adierazpenaren egi taula aztertu, kalkulatu adierazpenaren egi balioa interpretazio desberdinetarako.

- $P(a) \vee \forall x(P(x) \to Q)$
- $\forall x(\exists y P(y) \to P(x)) \wedge P(a)$

Logika proposizionalean bezala, predikatu logikan ere esango dugu adierazpen bat *baliozkoa* dela baldin edozein interpretaziorako egiazkoa bada, hau da, bere egi taulako lerro guztietan egiazkoa bada. Adierazpena ez da baliozkoa gutxienez interpretazio baterako falsua bada.

Ariketa. Frogatu $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$ adierazpena ez dela baliozkoa.

Baliokidetasunak

Predikatu logika

Logika proposizionalean bezala, predikatu logikan ere esango dugu A eta B adierazpenak baliokideak direla, $A \equiv B$ idatziz, baldin $A \leftrightarrow B$ adierazpena baliozkoa bada. Hau da, A eta B adierazpenak baliokideak dira edozein interpretaziorako egi balio berdina badute.

Jarraian oinarrizko baliokidetasun legeak ditugu. Baliokidetasun legearen ezkerrean eta eskuinean adierazpenak daude, edo bestela azpiadierazpenak ere, hauetan zenbatzailerik gabe agertzen diren aldagaiak konstantetzat hartuz.

Baliokidetasunak

Predikatu logika

$$\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$$
$$\neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$$
$$\forall x \forall y A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y)$$
$$\exists x \exists y A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y)$$
$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$
$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

Kontuan izan unibertsala banakorra dela konjuntziorako baina ez disjuntziorako, eta existentziala banakorra dela disjuntziorako baina ez konjuntziorako.

Baliokidetasunak

Predikatu logika

$$\forall x(A \wedge B(x)) \equiv A \wedge \forall x B(x)$$
$$\forall x(A \vee B(x)) \equiv A \vee \forall x B(x)$$
$$\exists x(A \wedge B(x)) \equiv A \wedge \exists x B(x)$$
$$\exists x(A \vee B(x)) \equiv A \vee \exists x B(x)$$

Baliokidetasun hauetako A azpiadierazpenean ez da agertzen zenbatzailearen x aldagaia.

Baliokidetasunak

Predikatu logika

Ariketa. Frogatu baliokidetasun hauek:

- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Ondorioz, aldagai sintaktikoak hartuz,
$\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ eta
$\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$ dugu oro har.

Predikatu logikan ere *baliokidetasun kateak* egingo ditugu baliokidetasun berriak lortzeko, idatzi ditugun baliokidetasun legeak (eta logika proposizionalekoak) erabiliz.

Frogapen formalak

Predikatu logika

Logika proposizionalean bezala, predikatu logikan ere esango dugu A_1, A_2, ..., A_n premisak eta B ondorioa dituen argumentu formala baliozkoa dela baldin $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ adierazpena baliozkoa bada, $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ idatziko dugu horrela bada. Beraz, argumentu bat baliozkoa da baldin premisa denak egiazkoak direnean ondorioa ere egiazkoa bada edozein interpretaziorako.

Argumentu bat baliozkoa dela frogatzeko, deribazio edo frogapen formalak egingo ditugu ondorengo lau inferentzia-erregelak, eta logika proposizionalekoak, erabiliz. Inferentzia-erregela hauen bidez, zenbatzaileak (unibertsalak eta existentzialak) ezabatu edo sartuko ditugu frogapen formalean zehar (eta kasu batzutan banako aldagaia edo konstantea ordezkatuko dugu erregeletan esaten den bezala).

Frogapen formalak

Predikatu logika

- Unibertsala Ezabatzea:
  - modu bat

$$\forall x A(x) \vdash A(x)$$
$$\forall x A(x) \vdash A(y)$$

    frogapena jarraituko dugu ulertuz x edo y (edo $z \ldots$) aldagaia unibertsoko edozein banako dela,
  - beste modua

$$\forall x A(x) \vdash A(a)$$

    konstante bat $(a, b \ldots)$ hartzen da, unibertsoko banako zehatza.

Frogapen formalak

Predikatu logika

- Existentziala Ezabatzea:

$$\exists x A(x) \vdash A(a)$$

aukeratu behar da konstante bat $(a, b \ldots)$ frogapenean inon agertu ez dena, unibertsoko banako berri bat zehaztuz.

- Unbertsala Sartzea:

$$A(x) \vdash \forall x A(x)$$
$$A(x) \vdash \forall y A(y)$$

unibertsalaren aldagaia edozein izan daiteke $(x, y, z \ldots)$.

Frogapen formalak

Predikatu logika

- Existentziala Sartzea:

$$A(a) \vdash \exists x A(x)$$

existentzialaren aldagaia edozein izan daiteke $(x, y \ldots)$.

Inferentzia-erregela hauetan aukeratzen den aldagaiak ez du nahasketarik sortu behar azpiadierazpenean ager daitezkeen beste zenbatzaileekin, zehazki kasu hauetan: $\forall x$ ezabatuz y (edo z ...) idazten bada x-en ordez; $A(x)$-en unibertsala sartzeko y (edo z ...) idazten bada; existentziala sartzeko aldagaia aukeratzen denean.

Frogapen formalak

Predikatu logika

Bestalde, lehenengo hiru erregelen ezkerrean beste aldagai bat izan dezakegu, eta laugarrengo erregelaren ezkerrean beste konstante bat, nabaria denez.

Ohiko frogapen formala antolatuko dugu argumentuaren premisetatik abiatuz, zenbatzaileak ezabatuko genituzke, inferentzia-erregelak erabili, logika proposizionalekoak ere, zenbatzaileak sartu, azkenean argumentuaren ondorioa lortzeko.

Frogapena antolatzeko metodo ezagun hauek ere erabilgarri ditugu: *reductio ad absurdum*, kasuzkako frogapena, frogapen baldintzatua. Baliokidetasunak ere kontuan izango ditugu frogapen formalak egiteko.

Frogapen formalak

Predikatu logika

Ariketak. Frogapen formalak egin argumentu hauek baliozkoak direla erakusteko.

1. Premisak: $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $P(a)$. Ondorioa: $Q(a)$.
2. Premisak: $\neg R(a)$, $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\forall x(Q(x) \to R(x))$. Ondorioa: $\neg P(a)$.
3. Premisak: $\forall x(Q(x) \vee R(x) \to \neg P(x))$, $P(a)$. Ondorioa: $\neg R(a)$.
4. Premisak: $\forall x P(x)$, $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Ondorioa: $\forall x Q(x)$.

Frogapen formalak

Predikatu logika

5. Premisak: $\forall x(P(x) \lor Q(x))$, $\forall x(\neg P(x) \land Q(x) \to R(x))$.
   Ondorioa: $\forall x(\neg R(x) \to P(x))$.
6. Premisa: $\forall x(S(x) \to P(x))$.
   Ondorioa: $\forall x(\neg P(x) \to \neg S(x))$.
7. Premisak: $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $P(a)$. Ondorioa: $\exists x Q(x)$.
8. Premisak: $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\exists x P(x)$. Ondorioa: $\exists x Q(x)$.
9. Premisak: $\exists x(P(x) \to Q(x))$, $\exists x P(x)$.
   Ondorioa (?): $\exists x Q(x)$.
10. Premisak: $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\exists x P(x)$.
    Ondorioa (?): $Q(a)$.