4. Gaia. Serieak $\mathbb{R}$ Multzoan

4.1 Serieak, Serieen izaerak

Har dezagun $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ segida, Nola egingo dugu gai guztiak batzeko?

$$S_1 = a_1 \qquad\qquad R_1 = a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \qquad\qquad R_2 = a_3 + a_4 + \dots$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad\qquad R_3 = a_4 + \dots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad\qquad R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Segidaren gai guztien batura lortzeko $\lim_{n \to \infty} S_n$ kalkulatu behar dugu.

Bi segida berri lortuko ditugu $\{S_n\}$ eta $\{R_n\}$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 \dots = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \infty \end{array} \right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \left\langle \begin{array}{l} \infty \\ (A)^{1/3} \end{array} \right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \left\langle \begin{array}{l} 0, 1 \\ \infty, \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

2Def $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ segida emanik, segidaren gai guztien batukaria,

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots}$$

serie deritzo eta honela adieraziko dugu: $\sum_n a_n$

a_n seriearen gai orokorra da

S_n n batura partziala da, eta $\{S_n\}$ batura partzialen segida da.

R_n n hondarra da, eta $\{R_n\}$ hondarren segida da.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adierazpenarekin seriearen batura idatziko dugu, eta honela kalkulatzen da:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n}$$

$$\begin{tikzcd} & \{a_n\} \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \{R_n\} & \{S_n\} & \sum_n a_n \end{tikzcd}$$

3Def $\sum_n a_n$ seriea konbergentea, dibergentea edo oszilatzailea da, batura partzialen $\{S_n\}$ segida konbergentea, dibergentea edo oszilatzailea denean hurrenez hurren.

Hau da, $\sum_n a_n$ konbergentea denean, batura du, dibergentea denean batura ∞ da, eta oszilatzailea denean, batura ez da existitzen

4Adb Serie geometrikoa

$a_n = ar^{n-1}$ gai orokorra duen serieari serie geometrikoa deritzo, $a \in \mathbb{R}^*$ eta $r \in \mathbb{R}$ izanik,

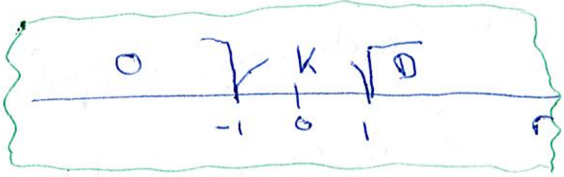
$$\sum ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

r seriearen geometrikoaren arrazoia da

$\boxed{\text{I. GA}}$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$$

$r < -1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r^n$ ez da existitzen $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$



$\Rightarrow \sum\limits_n ar^{n-1}$ oszilatzailea da

$r = -1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} -1^n$ ez da existitzen $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$\Rightarrow \sum\limits_{n} ar^{n-1}$ oszilatzailea da.

$|r| < 1$

$-1 < r < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} \Rightarrow \sum ar^{n-1}$ konbergentea eta

batura $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

$r = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = na = \infty \Rightarrow \sum\limits_n^{\infty} a(1)^{n-1}$ dibergentea da.

$1 < r \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r^n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

5Adb

① $\sum_n 1$, $a=1, r=1 \Rightarrow \sum_n 1$ dibergentea da eta $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$

④ $\sum_n^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$, $a=1$, $r=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_n \frac{1}{2^{n-1}}$ konbergentea da eta $\sum_n^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

⑥ $\sum_n (-1)^{n-1}$, $a=1$, $r=-1 \Rightarrow \sum_n (1-)^{n-1}$ oszilatzailea da eta ez du ~~[illegible]~~ baturarik.

6T Cauchy-ren irizpidea serieetarako

$\sum a_n$ seriea konbergentea da baldin eta soilik baldin ($\{S_n\}$ konbergentea) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p,q \geq n_0(\varepsilon)$ $|S_p - S_q| = |a_{p+1} + \dots + a_q| < \varepsilon$ betetzen bada.

7 Korolarioa $\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ betetko da. ($\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_n a_n$ Ez da konbergentea

8 Korolarioa $\sum a_n$ konbergenta da, baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ bada,

9 Adb $\sum_n \frac{1}{n}$ serie harmonikoa

$\sum_n \frac{1}{n}$ seriek ez du cauchy-ren irizpidea betetzen

Hau da, serie harmonikoaren batura partzialen $\{S_n\}$ segida ez ez da konbergentea, ondorioz, $\sum \frac{1}{n}$ seriea ez da konbergentea

4.2 Gai positiboko serieak

4.2.1 Definizio eta propietateak

10 Def $\sum_n a_n$ seriea gai positiboko seriea da, $\forall n \geq n_0$ $a_n > 0$ bada,

11 Prop ① $\{S_n\}$ hertsiki monotono gorakorra da.

Froga $S_{n+1} - S_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_{n+1} > 0$

②

$\sum_{a_n} a_n$ seriea dibergente edo konbergentea da inoiz ez oszilatzailea.

③ (Elkartze-legea) serie baten izaera eta batura ez dira aldatzen ondoz ondoko gaien taldeen ordez beren baturak idazten baditugu.

④ (Banatze-legea) serie baten izaera ez da aldatzen seriearen gai guztiak $\lambda \neq 0$ zenbaki batez biderkatzen baditugu, eta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ bada, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda s$ beteko da.

⑤ (trukatze-legea) serieak bere batugaien edozein berordenazio onartzen du izaera eta batura aldatu gabe.

12 Adb $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ seriearen batura kalkulatu.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$

Elkartzearen legea erabiliz $(1-1)$

$(1-1) + (1-1) + (1-1) \dots$

$0 + 0 + 0 \rightarrow \boxed{0}$

Elkartze legea $(-1+1)$

$1 + (-1+1) \dots \rightarrow \boxed{1}$

4.2.2 Konparaziozko irizpide orokorra

13 Def a) $\sum_n b_n$ seriea $\sum_n a_n$ seriearen serie maiorantea da $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq b_n$ bada,

b) $\sum_n b_n$ seriea $\sum_n a_n$ seriearen serie minorantea da $\forall n \geq n_0$ $b_n \leq a_n$ bada.

14 T Konparaziozko irizpide orokorra (KIO)

1) $\sum_n a_n$ serieak serie maiorante konbergentea onartzen bada, $\sum_n a_n$ seriea ere konbergentea izango da.

2) $\sum_n a_n$ serieak serie minorante dibergentea onartzen bada, $\sum_n a_n$ seriea dibergentea izango da.

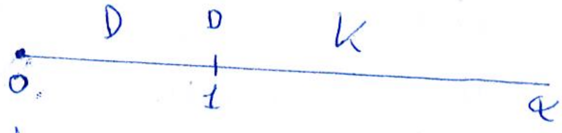
① $\sum_n a_n <<< \sum_n b_n$ konb $\Rightarrow \sum_n a_n$ konb

② $\sum_n b_n$ dib $<<< \sum_n a_n$ dib $\Rightarrow \sum_n a_n$ dib.

15 Adb Serie harmoniko orokorra

$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, gai orokorra duen serieari serie harmoniko orokor deritzo.

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots$$



$\alpha = 1$ denean, $\sum_n \frac{1}{n}$ serie harmonikoa dugu, serie harmonikoa

Ez da konbergentea (9. Adb) beraz, dibergentea da, gai positiboko seriea delako. ($\textcircled{2}\sum_n^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$)

$\alpha < 1$ denean, $n^\alpha < n^1 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall n > 2$, beraz, $\sum_n \frac{1}{n}$ seriea $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ seriearen serie minorantea da eta dibergentea da; 14T-z erabiliz, $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ ere dibergentea da.

$1 < \alpha$ denean,

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{8^\alpha} \cdots} \leq$$

(Bloke bakoitzean lehenengo batugaila da handiena beti)

$$\leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{8}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} \cdots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}} + \cdots = \sum_n \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$$ Serie geometrikoa da.

$a = 1 \quad r = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$

$\alpha > 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0 \Rightarrow 2^{\alpha-1} > 2^0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ da $\Rightarrow$ ~~S. K.~~ Serie geometriko konbergentea da.

Ondorioz, $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ serie harmoniko orokorrak serie geometriko maiorante konbergente bat onartzen du, beraz $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ serie harmoniko orokorra ere konbergentea da.

16.K $\sum_n a_n$ eta $\sum_n b_n$ serieak emanik,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ bada, bi serieek izaera bera izango dute

17 Adb

1) $\sum_n \frac{1}{n^2}$ Serie harmoniko orokorra, $\alpha = 2 > 1$, beraz,

$\sum_n \frac{1}{n^2}$ konbergentea da. eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2) $\sum_n \sin\frac{1}{n}$ gai positiboko seriea da

$\{\sin\frac{1}{n}\} \sim \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_n \sin\frac{1}{n}$ eta

$\sum_n \frac{1}{n}$ serieak izaera berekoak dira.

$\sum_n \frac{1}{n}$ Serie harmoniko dibergentea denez, $\sum_n \sin\frac{1}{n}$ ere serie harmoniko dibergentea izango da.

4.2.3. Konparaziozko Irizpide Orokorraren aplikazioak.

18T Erroaren edo Cauchy-ren irizpidea

$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ bada $l<1$ bada $\sum_n a_n$ seriea konbergentea da, $l>1$ bada, $\sum_n a_n$ seriea dibergentea da. $l=1$ bada, zalantzazko kasua da.

19T Zatiduraren edo D'Alembert-en irizpidea.

$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ bada,

$\ell < 1$ bada, $\sum_n a_n$ seriea konbergentea da,

$1 < \ell$ bada, $\sum_n a_n$ seriea dibergentea da,

$\ell = 1$ bada, zalantzazko kasua da.

20T Raabe-ren irizpidea.

$\sum_n a_n$ seriea emanik, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ denean,

$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ell$ bada, (Beti indeterminazioa lortuko dugu).

$1 < \ell$ $\sum_n a_n$ seriea konbergentea da.

$\ell < 1$ $\sum_n a_n$ seriea dibergentea da.

$\ell = 1$ bada, zalantzazko kasua.

21Adb Azter ezazu $\sum \frac{3^n b^{\ln n}}{e^{an}}$ seriearen izaera $a, b \in \mathbb{R}$ $b>0$

$$a_n = \frac{3^n b^{\ln n}}{e^{an}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n b^{\ln n}}{e^{an}}} = \frac{3\, b^{\frac{\ln n}{n}}}{e^a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\, b^{\frac{\ln n}{n}}}{e^a} = \frac{3}{e^a}$$

$\frac{3}{e^a} < 1 \Rightarrow 3 < e^a \Rightarrow \ln 3 < a$

$\sum_n \frac{3^n b^{\ln n}}{e^{an}}$ seriea konbergentea d

$1 < \frac{3}{e^a} \Rightarrow a < \ln 3$ bada, $\sum_n \frac{3^n b^{\frac{\ln n}{n}}}{e^a}$ Dibergentea da.

$\frac{3}{e^a} = 1 \Rightarrow a = \ln 3$, zalantzazko kasua

$a = \ln 3$ denean, $\sum_n \frac{3^n b^{\ln n}}{e^{n \ln 3}} = \sum_n \frac{3^n b^{\ln n}}{e^{\ln 3^n}} = \sum_n \frac{\cancel{3^n} b^{\ln n}}{\cancel{3^n}} =$

$= \sum_n b^{\ln n}$ seriea dugu

Zatiduraren irizpidea

$a_n = b^{\ln n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{\ln(n+1)}}{b^{\ln n}} = b^{\ln(n+1) - \ln n} = b^{\ln \frac{n+1}{n}} \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} b^{\ln \frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} b^0 = 1$ Zalantzazko kasua

Raabe-ren irizpidea

$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - b^{\ln \frac{n+1}{n}}\right) \sim -n \ln b^{\ln \frac{n+1}{n}} = -n \ln \frac{n+1}{n} \cdot \ln b =$

$= -n \cdot \frac{1}{n} \ln b = -\ln b$

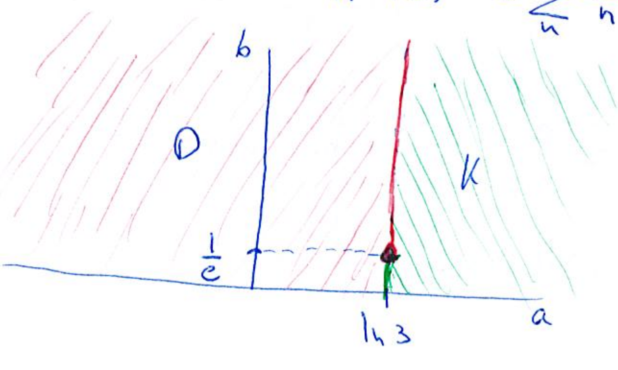
$\{\ln \frac{n+1}{n}\} \sim \{\frac{1}{n}\}$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} -\ln b = -\ln b = \ln \frac{1}{b}$

$\ln \frac{1}{b} > 1 \Rightarrow \frac{1}{b} > e \Rightarrow \frac{1}{e} > b \Rightarrow \sum_n b^{\ln n}$ konbergentea

$\ln \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{1}{e} < b \Rightarrow \sum_n b^{\ln n}$ dibergentea

$\ln \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{e}$, beraz, $\sum_n \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \sum_n \frac{1}{n}$ Serie harmonikoa dugu, Dibergent.



4.2.4.- Serie baten batura hurbildua

Serie baten batura zehatza kalkulatzeko formularik ez dugunean, batura hurbildua kalkulatu behar dugu. Baina, horrek errorea bat egitera garamatza. Errore hori "kontrolatu" behar dugu. Horretarako bi emaitza hauek erabiliko ditugu:

① $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1+a_2+a_3+\dots+a_k)+(a_{k+1}+a_{k+2}+\dots)=$

$= \underbrace{S_k}_{\text{batura hurbildua}} + \underbrace{R_k}_{\text{errorea}} \quad \forall k$

② $\boxed{\forall k}$ $\sum_n a_n$ konbergentea da $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} / \forall n\geq n_0 \ |R_n|<\varepsilon$

hau da, errorea guk nahi dugun bezain txikia da.

Orain problema, batuketa eteteko k aukeratzea, alde batetik txikia interesatzen zaigulako (batura hurbildua azkar eta azkarren lortzeko) eta, beste aldetik, k handia interesatzen zaigu errore txikiagoa egoteko.

Bi probleme: ① k ezagutuz, S_k ezaguna eta R_k bornatua behar dugu.

② R_k errorea ematen digute, k kalkulatuko dugu, eta hortik S_k

22 Adb $\sum_n \frac{300}{n^n}$ emanik, R_3 bornatuko dugu.

$K=3 \quad S_3 = \frac{300}{1^1} + \frac{300}{2^2} + \frac{300}{3^3}$

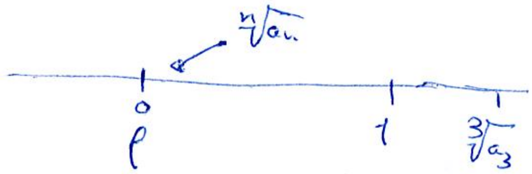
Cauchy-ren irizpidea:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{300}{n^n}} = \frac{\sqrt[n]{300}}{n}; \lim \frac{\sqrt[n]{300}}{n} = 0 < 1$$

hortaz, $\sum_n \frac{300}{n^n}$ konbergentea da.

$\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = \left\{\frac{\sqrt[n]{300}}{n}\right\} \to 0$ eskuinetik,

beraz, 2 kasuan da.



$K=3 \Rightarrow \sqrt[3]{a_3} = \frac{\sqrt[3]{300}}{3} = 2'23 > 1$; beraz, 2b kasuan gaude

$j=5 \Rightarrow \sqrt[5]{a_5} = \frac{\sqrt[5]{300}}{5} = 0'62 < 1$

$$R_K \leq a_{K+1} + \dots + a_j + \frac{(\sqrt[j]{a_j})^{j+1}}{1-\sqrt[j]{a_j}} \Rightarrow R_3 \leq a_4 + a_5 + \frac{(\sqrt[5]{a_5})^6}{1-\sqrt[5]{a_5}} =$$

$$= \frac{300}{4^4} + \frac{300}{5^5} + \frac{\left(\sqrt[5]{\frac{300}{5^5}}\right)^6}{1-\sqrt[5]{\frac{300}{5^5}}} = 1'428$$

23 Adb

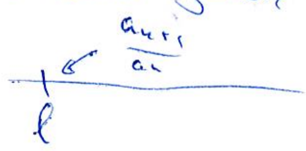
$\sum_n \frac{300}{n^n}$ emanik, $R_K < 0'001$ izateko kalkulatu S_K.

D'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{300}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{300}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0 < 1$$

$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \left\{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right\} \to 0$ eskuinetik, beraz, 2 kasuan gaude

$K \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ Pentsatuko dugu $\frac{a_{K+1}}{a_K} < 1$ dela



Ondoren, k kalkulatuko dugu, egiaztatuko dugu $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ egiaztatuko dugu.

$$R_{22} < R_{21} < R_{20} < 0'001 \qquad k=20 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\frac{a_{21}}{a_{20}} > 1 \ ; \ \frac{a_{22}}{a_{21}} > 1 \ ; \ \frac{a_{23}}{a_{22}} < 1 \Rightarrow \boxed{k = 22}$$

Hortaz, $R_k \leq \frac{a_k \cdot a_{k+1}}{a_k - a_{k+1}}$ hau da, $R_k \leq \frac{\frac{300}{k^k} \cdot \frac{300}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{300}{k^k} - \frac{300}{(k+1)^{k+1}}} = A$

$R_k \leq A$ formula

$A < 0'001$ behar da.

$R_k \leq 0'001$ nahi dugu

$$\frac{\frac{300}{k^k} \cdot \frac{300}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{300}{k^k} - \frac{300}{(k+1)^{k+1}}} < 0'001$$ betetzea behar da.

$$\frac{\frac{\cancel{300} \cdot 300}{k^k (k+1)^{k+1}}}{\cancel{300}\left(\frac{(k+1)^{k+1} - k^k}{k^k (k+1)^{k+1}}\right)} = \frac{300}{(k+1)^{k+1} - k^k} < 0'001 = \frac{1}{1000} \Rightarrow 300\,000 < (k+1)^{k+1} - k^k$$ betetzea behar da.

$k=6 \quad 776\,887 \Rightarrow$ beraz, $k=6$, $\frac{a_7}{a_6} = 0'056 < 1$ denez, $k=6$ da gure balio. Orduan S_6 kalkulatu behar dugu.

$$S_6 = \frac{300}{1^1} + \frac{300}{2^2} + \frac{300}{3^3} + \frac{300}{4^4} + \frac{300}{5^5} + \frac{300}{6^6} = 387'38541615$$

4.3 Serie alternatuak

24Def Izan bedi $\{a_n\}$ segida, non $a_n>0$ den, $\forall n\geq n_0$ den

$\sum_n (-1)^{n-1}a_n$ serieari serie alternatu deritzo.

25T Leibniz-en irizpidea

$\sum_n (-1)^{n-1}a_n$ serie alternatua emanik, $\{a_n\}$ segida beherakorra bada eta $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ bada, $\sum(-1)^{n-1}a_n$ serie alternatua konbergentea da.

(Serie alternatua izanda soilik ondorioztatu dezakegu $\lim a_n=0$ izanda seriea konbergentea izango dela.)

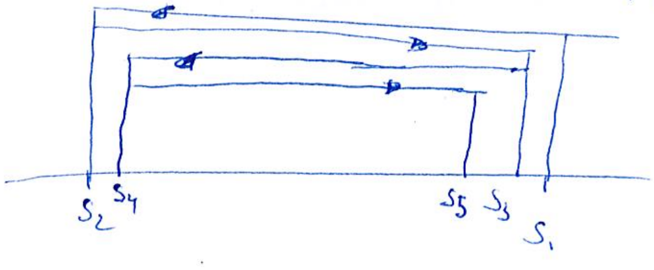
26Adb $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}a_n}{n}$ serie alternatua emanik, $a_n=\frac{1}{n}>0$ $\{\frac{1}{n}\}$ beherakorra eta $\lim \frac{1}{n}=0$

$\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serie alternatua konbergentea da.

" $\sum_n \frac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea, eta $\lim \frac{1}{n}=0$ "

Batura hurbildua eta errorea

$\sum_n (-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ $a_1>a_2>a_3>a_4$



$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n = S$ bada $\forall k$ $S_{2k}\leq S\leq S_{2k+1}$ eta $S_{2k+1}-S_{2k}=a_{2k+1}$

Errorea honela bornatzen da. $\boxed{|R_k| < a_{k+1}}$

5)

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

4.5 Ariketak

1. Determina ezazu konparaziozko irizpidea erabiliz serie hauen izaera:

   1) $\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$ 2) $\sum_n \frac{1+\sin^2 n}{n^2}$

   3) $\sum_n \log\left(1+\frac{1}{n^k+3}\right), \quad k>0$ 4) $\sum_n \left(a^{1/n}-1\right)^3, \quad a>1$

2. Esan ezazu, arrazoituz, baieztapen hauek egiazkoak ala faltsuak diren:

   (a) $\forall n \quad 0<a_n<1$ bada, $\sum_n a_n$ eta $\sum_n \frac{a_n}{1-a_n}$ serieak izaera berekoak dira.

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=0$ eta $\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\sum_n b_n$ ere konbergentea da.

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=0$ eta $\sum_n a_n$ dibergentea bada, $\sum_n b_n$ ere dibergentea da.

   (d) $\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} na_n=0$ izango da.

   (e) $\lim_{n\to\infty} n^3a_n=\infty$ bada, $\sum_n a_n$ dibergentea da.

   (f) $\lim_{n\to\infty} n^3a_n=0$ bada, $\sum_n a_n$ dibergentea da.

   (g) $\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\sum_n \ln(1+a_n)$ konbergentea izango da.

   (h) $\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\sum_n \frac{a_n}{n}$ konbergentea izango da.

   (i) $\sum_n a_n$ konbergentea bada, $\sum_n |a_n|$ konbergentea izango da.

   (j) $\sum_n |a_n|$ konbergentea bada, $\sum_n a_n$ konbergentea izango da.

   (k) $\sum_n |a_n|$ konbergentea bada, $\sum_n a_n^2$ konbergentea izango da.

   (l) $\sum_n a_n^2$ konbergentea bada, $\sum_n |a_n|$ konbergentea izango da.

3. $\sum_n a_n$ eta $\sum_n a_n$ gai positiboko serieak badira, zer esan daiteke serie hauen izaeraz?

   a) $\sum_n \min\{a_n,b_n\}$ *b)* $\sum_n \max\{a_n,b_n\}$

4. Determina itzazu gai orokor hauek dituzten serieeen izaerak:

   1) $\frac{1000^n}{n!}$ 2) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}a^n \quad a>0$ 3) $\frac{3^{n+1}}{n^4+2}e^{-na}$

   4) $\frac{n^2}{(a+\frac{1}{n})^n} \quad a>0$ 5) $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ 6) $\frac{n^5}{2^n+3^n}$

   7) $\frac{4\cdot7\cdots(3n+1)}{2\cdot6\cdots(4n-2)}$ 8) $\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^a$ 9) $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

   10) $\frac{(n!)e^n}{n^{n+p}} \quad p>1/2$ 11) $\frac{1+\sin^2 n}{n}$ 12) $n\sin n$

   13) $\frac{\ln n}{n}$ 14) $\sin\frac{1}{n}$ 15) $\left(\frac{n^2+pn+1}{n^2}\right)^{n^2}$

   16) $\left(\ln\frac{n+1}{n-1}\right)^a \quad a\in\mathbb{Z}$ 17) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$ 18) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$

   19) $\frac{|\sin n\theta|}{n^2}$ 20) $\frac{n^k}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ 21) $\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)^\alpha \quad \alpha>0$

   22) $\frac{n^2+\ln n}{10^n}$ 23) $(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 24) $\frac{\log_a(1+n^2)}{\ln n} \quad a>0$

   25) $(\sqrt[n]{n}-1)^n$ 26) $\left(\frac{2n+1}{n-3}\right)^{\frac{5n^2+1}{n-4}}$ 27) $\frac{a^n\ln n}{n+4} \quad a>0$

   28) $\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 29) $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 30) $\frac{\ln n}{e^n}$

   31) $(\ln n)^p \quad p>0$ 32) $(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 33) $\frac{n!}{n^n}$

   34) $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$ 35) $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & n=m^2\\ \frac{1}{n^2} & n\neq m^2\end{cases}$

   36) $0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+\cdots$ 37) $1+\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\cdots$

5. Determina ezazu serieen izaera eta borna ezazu errorea lehenengo k gaien batura hartuz:

   a) $\sum_n \frac{1}{1+2^n}, \; k=3$ *b)* $\sum_n \frac{n}{2^n}, \; k=3$ *c)* $\sum_n \frac{n^3}{(n+2)!}, \; k=7$

6. Borna ezazu errorea baturatzat lehenengo lau gaien batura hartzen badugu. Kalkula izazu serieen batura hurbildua 10^{-3} baino errore txikiagoa eginez.

   a) $\sum_n \frac{1}{(2n+1)!}$ *b)* $\sum_n \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n\ln n}$ *c)* $\sum_n \frac{1}{(n+1)L^n}, \quad L>0$

7. (a) Determina itzazu serie hauen izaerak, $\alpha\in\mathbb{R}$ balio desberdinetarako.

   (b) Kalkula itzazu batura hurbilduak 10^{-3} baino errore txikiagoa eginez, $\alpha=10$ baliorako.

   (c) Borna itzazu erroreak baturatzat lehenengo hiru gaien batura hartzen badugu ($\alpha=10$).

   1) $\sum_n (-1)^n\frac{1}{\alpha^n n}$ 2) $\sum_n \frac{n^n}{\alpha^n n!}$ 3) $\sum_n (-1)^n\alpha^n$ 4) $\sum_n \frac{n}{\alpha^n}$