3. Gaia: Segidak ($\mathbb{R}$ multzoan)

3.1 Segidak. Segiden limiteak.

1) Definizioa

$\mathbb{R}$ multzoko segida bat $\mathbb{N}$-tik $\mathbb{R}$-ra doan aplikazio bat da, non $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$ esleitzen zaio.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow f(n) = a_n$$

$f(\mathbb{N}) = \{a_n\}$ multzoa da segida bat bereizten duena, beraz, pentsa dezakegu segida bat $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ multzo bat duela.

Segidaren elementuei <u>gai</u> deritze eta segidaren a_n elementuari <u>gai orokor</u> deritzo. Segidek bi ezaugarri dituzte:

- Infinitu gai dituzte
- Gai guztiak ordena batean agertzen dira

2) Adibidea

a) $\{a_n\} = \{\sin n\} = \{\sin 1, \sin 2, \dots\}$

b) $\{b_n\} = \{-1^n\} = \{-1, 1, -1, \dots\} \neq \{-1, 1\}$ multzoa!

c) $\{c_n\} = \{1\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\} \longrightarrow$ segida konstantea

3) Definizioa

$\{b_n\}$ segida $\{a_n\}$ segidaren azpisegida da baldin $\{b_n\} \subset \{a_n\}$ bada.

4) Adibidea

$$\{d_n\} = \{\sin n \,/\, \sin n > \tfrac{1}{2}\} = \{\sin 1, \sin 2, \sin 7 \dots\} \subset \{\sin n\} = \{a_n\}$$

5) Definizioa

$\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ segida konbergentea $\mathbb{R}$ multzoan $l \in \mathbb{R}$ existitzen bada, non l-ren $\underset{1}{\text{edozein}}$ ingurune $\underset{4}{\underline{\text{irekitan}}}$ $\{a_n\}$ segidaren $\underset{2}{\text{gai}}$ batetik $\underset{3}{\text{aurrera}}$ segidaren $\underset{3}{\text{gai}}$ guztiak $\underset{4}{\underline{\text{badaude}}}$. Kasu horretan l-ri $\{a_n\}$ segidaren limite deritzo eta $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$ idatziko dugu (batzuetan $\{a_n\} \longrightarrow l$ idatziko dugu).

$$\underset{1}{\underline{\forall \varepsilon > 0}}\ \underset{2}{\underline{\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}}} \ \Big|\ \underset{3}{\underline{\forall n \geq n_0(\varepsilon)}} \qquad \underset{4}{\underline{a_n \in}}\ \underset{1}{E(l, \overset{\forall r}{\downarrow}\varepsilon)}$$

6) Adibidea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2 \qquad \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ / \ \forall n\geq n_0(\varepsilon) \ \frac{2n+1}{n}\in \mathcal{E}(2,\varepsilon)$$

$$\frac{2n+1}{n}\in\mathcal{E}(2,\varepsilon) \Longleftrightarrow d\left(2,\frac{2n+1}{n}\right)<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n+1}{n}-2\right|<\varepsilon$$

ezkerreko aldea sinplifikatuz, $\left|\frac{2n+1}{n}-2\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, beraz, $\frac{1}{n}<\varepsilon$ betetzea nahi dugu. Horretarako nahikoa da $\frac{1}{\varepsilon}<n$ izatea hortaz,

$n_0 = \inf\left\{n\in\mathbb{N} \ / \ \frac{1}{\varepsilon}<n\right\}$

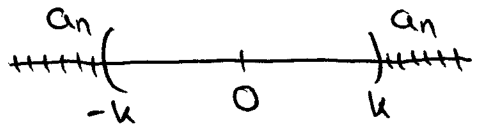
Ondorioz, badaukagu $\forall\varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} / \forall n\geq n_0(\varepsilon) \ \frac{2n+1}{n}\in\mathcal{E}(2,\varepsilon)$

Hau da, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$

7) Definizioa

$\{a_n\}\in\mathbb{R}$ segida dibergentea da $\mathbb{R}$ multzoan 0 (jatorria)-ren edozein ingurune irekitatik kanpo $\{a_n\}$ segidaren gai batetik aurrera segidaren gai guztiak baitaude. Kasu honetan $\{a_n\}$ segidaren limitea ∞ da eta $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ idatziko dugu (Batzuetan $\{a_n\}\to\infty$ idatziko dugu)

$$\forall k>0 \quad \exists n_0(k)\in\mathbb{N} \ / \ \forall n\geq n_0(k) \quad a_n\in \operatorname{ext}(\mathcal{E}(0,k))$$



$d(0,a_n)\geq k$

$|a_n|\geq k$

8) Definizioa

$\{a_n\}\in\mathbb{R}$ segida oszilatzailea da ez bada konbergentea ezta dibergentea ere.

3.2 Segida konbergenteak

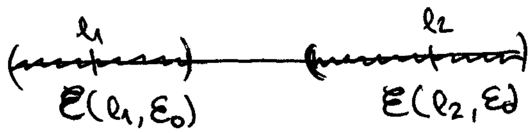
9) Propietatea

$\{a_n\}$ segida konbergentea bada, limite bakarra izango du

(Absurdora eramanez)

Demagun $\{a_n\}$ segidak $l_1\neq l_2$ bi limiteak dituela

$l_1\neq l_2 \rightarrow d(l_1,l_2)>0$ beraz, har dezakegu $\varepsilon_0 = \frac{|l_2-l_1|}{3}>0$



ε_0 erradioarekin: $\mathcal{E}(l_1,\varepsilon_0)$ eta $\mathcal{E}(l_2,\varepsilon_0)$ osatu

$\mathcal{E}(l_1,\varepsilon_0)\cap\mathcal{E}(l_2,\varepsilon_0)=\phi \Longrightarrow$ Ingurune disjuntuak

Bestalde,

l_1 bada $\{a_n\}$ segidaren limitea $\varepsilon_0>0$ horretarako $\exists n_1(\varepsilon_0)\in\mathbb{N}$ /

$\forall n\geq n_1 \quad a_n\in E(l_1,\varepsilon_0)$

l_2 bada $\{a_n\}$ segidaren limitea $\varepsilon_0>0$ horretarako $\exists n_2(\varepsilon_0)\in\mathbb{N}$ /

$\forall n\geq n_2 \quad a_n\in E(l_2,\varepsilon_0)$

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots\ldots, a_{n_2}, a_{n_2+1}, \ldots\ldots$$

$\longrightarrow a_n\in E(l_2,\varepsilon_0)$

$\longrightarrow a_n\in E(l_1,\varepsilon_0)$

Hortaz, $n_0=\max\{n_1(\varepsilon_0), n_2(\varepsilon_0)\}$ hartuz gero, $\forall n\geq n_0$ izanda $a_n\in E(l_1,\varepsilon_0)\cap E(l_2,\varepsilon_0$ beteko da. Baina hori ezinezkoa da bi inguruneak disjuntuak direlako. Ondorioz, $\{a_n\}$ segidak ezin ditu bi limite izan.

10) Propietatea

$\{a_n\}$ segida konbergentea bada, bere azpisegida guztiak konbergenteak dira eta limite bera dute.

11) Propietatea

$\{a_n\}$ segida konbergentea bada, $\{a_n\}$ bornatua da.

12) Propietatea

$\{a_n\}$ segidaren limitea ez bada 0, segidaren gai batetik aurrera gai guztiek limitearen zeinua dute.

13) Propietatea

$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segiden limitea l bada eta $\forall n\geq n_0 \quad a_n\leq c_n\leq b_n$ bada, $\{c_n\}$ segidaren limitea existituko da eta l izango da.

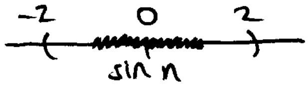
14) Adibidea

1) $\{\sin n\}$ oszilatzailea da

4. adibideko $\{d_n\}=\{\sin n \,/\, \sin n>\frac{1}{2}\}$ azpisegida hartuz, $\{d_n\}$ azpisegidaren l_1 limitea existituko balitz, $\frac{1}{2}\leq l_1\leq 1$ bete beharko luke.

4. adibideko $\{e_n\}=\{\sin n \,/\, \sin n<-\frac{1}{2}\}$ azpisegida hartuz, $\{e_n\}$ azpisegidaren l_2 limitea existituko balitz, $-1\leq l\leq -\frac{1}{2}$ bete beharko luke. Beraz, $l_1\neq l_2$ izango lirateke.

Hortaz, ezin da "10) Propietatea" bete. Ondorioz $\{\sin n\}$ ez du limiterik eta limiterik ez badu, ez da konbergentea. Bestalde, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\sin n| \leq 1$ da, hau da, $\forall n \in \mathbb{N}$ $-2 < \sin n < 2$ da, edo $\sin n \in E(0,2)$



Ondorioz, $\{\sin n\}$ ezin da dibergentea izan eta, beraz, oszilatzailea da.

2) $\{(-1)^n\}$ segida oszilatzailea da

$\{(-1)^{2m-1}\} = \{-1,-1,-1\dots\}$ azpisegidan -1 limitea da.
$\{(-1)^{2m}\} = \{1,1,1,\dots\}$ azpisegidan 1 limitea da.
"10) Propietatearen" $\Rightarrow$ ondorioz, $\{(-1)^n\}$ ez da konbergentea

Bestalde, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|(-1)^n| = 1$ da, beraz $-2 < (-1)^n < 2$ betetzen da, $(-1)^n \in E(0,2)$. $\{(-1)^n\}$ segida ez da dibergentea.

3.2.1 Segida monotonoak

15) Definizioa

$\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ segida emanik

a) $\{a_n\}$ monotono gorakorra da $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq a_{n+1}$ bada.
b) $\{a_n\}$ hertsiki " " da $\forall n \geq n_0$ $a_n < a_{n+1}$ bada.
c) $\{a_n\}$ monotono beherakorra da $\forall n \geq n_0$ $a_n \geq a_{n+1}$ bada
d) $\{a_n\}$ hertsiki " " da $\forall n \geq n_0$ $a_n > a_{n+1}$ bada

16) Adibidea

$\{1\} = \{1,1,1,\dots\} \Rightarrow$ hertsiki monotono gorakorra / beherakorra

17) Propietatea

Segida monotono bornatu guztiak konbergenteak dira (limitea dute)

18) Adibidea

$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ segidaren limitea $e = 2'7181\dots$

3.3 Segiden arteko eragiketak eta limiteak. Indeterminazioak

19) Definizioa

$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segidak emanik, honela definitzen dira bien arteko eragiketak:

Batuketa/Kenketa	$\{a_n\} \pm \{b_n\} = \{a_n \pm b_n\}$
Biderketa	$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$
Zatiketa	$\{a_n\} / \{b_n\} = \{a_n / b_n\}$, $b_n \neq 0$
Logaritmoa	$\log_k \{a_n\} = \{\log_k a_n\}$, $k > 0$, $a_n > 0$
Exponentziala	$k^{\{a_n\}} = \{k^{a_n}\}$, $k > 0$
Berreketa	$\{a_n\}^{\{b_n\}} = \{a_n^{b_n}\}$, $a_n > 0$

- Propietatea (oro har)

"segiden arteko eragiketen limitea = segiden limiteen arteko eragiketa"

- Indeterminazio taulak (Fotokopia)

3.4 Indeterminazioak ebazteko metodoak

3.4.1 Baliokidetasuna

20) Definizioa

$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segidak baliokideak dira $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ bada. Kasu horretan honela idatziko dugu: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$

21) Propietatea

$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segidak baliokideak badira, limite bera dute.

22) Adibidea

$\left\{\frac{1}{n}\right\} \longrightarrow 0$; $\left\{\frac{1}{n^2}\right\} \longrightarrow 0$ Baina, baliokideak dira?

$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 1$ Ez dira baliokideak!

23) Definizioa

a) $\{a_n\}$ segida infinitesimala da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ denean.

b) $\{a_n\}$ segida infinitoa da $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ denean.

24) Ordezkapen-printzipioa

Segida baten gai orokorraren adierazpenean agertzen den biderkagai edo zatitzailea bere baliokide batez ordezka daiteke segidaren limitea aldatu gabe.

25) Adibidea

$\left\{\frac{\sqrt[n]{10}-1}{\sqrt[n]{100}-1}\right\}$ segidaren limitea kalkulatu: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{10}-1}{\sqrt[n]{100}-1} = \frac{0}{0}$ indeterminazioa

$1 \leftarrow 10^{1/n}$

$\{\sqrt[n]{10}-1\}$ infinitesimala da $\Rightarrow \{\sqrt[n]{10}-1\} \sim \{\ln \sqrt[n]{10}\}$

$\{\sqrt[n]{100}-1\}$ infinitesimala da $\Rightarrow \{\sqrt[n]{100}-1\} \sim \{\ln \sqrt[n]{100}\}$

Baliokidetza $\Rightarrow \{b_n - 1\} \sim \{\ln b_n\}$ baldin $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ bada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{10}-1}{\sqrt[n]{100}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sqrt[n]{10}}{\ln \sqrt[n]{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n \ln 10}{1/n \ln 100} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 10}{2 \ln 10} = \frac{1}{2}$$

3.4.2 Infinituen ordenak

$$\{(\ln a_n)^q\} <<< \{(a_n)^q\} <<< \{k^{a_n}\} <<< \{(a_n)^{r a_n}\}$$

logaritmo polinomio exponentzial berreketa

Infinituen ordena erabiltzeko, segidaren adierazpena zatiketa moduan idatziko dugu.

26) Adibidea

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ kalkulatuko dugu $(\sqrt[n]{n} = n^{1/n})$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = l$ bada, $\ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \ln n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \underset{*}{=} 0$

* Infinituen ordenaren arabera $n > \ln n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\infty} = 0$

Hortaz, $\ln l = 0$ bada, $l = e^0 = 1$ izango da eta $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ da.

3.4.3 Stoltz-en irizpidea

27) Teorema

$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segidak emanik, baldintza hauek betetzen badira:

1) $\{b_n\}$ hertsiki monotonoa da,

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ existitzen da eta

3) hauetako bat betetzen bada:

3.1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 3.2) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

3.3) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

Stoltz-en irizpideak dio berdintza hau betetzen dela:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

28) Adibidea

Kalkulatu dezagun $\left\{\frac{1+1/2+\dots+1/n}{\ln n}\right\}$ segidaren limitea

$\{b_n\} = \{\ln n\}$ hertsiki monotono gorakorra da eta $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$ da

$\{a_n\} = \{1+1/2+\dots+1/n\}$ bada, $a_{n+1}-a_n = (1+1/2+\dots+1/n+1/n+1) - (1+1/2+\dots+1/n) = 1/n+1$ izango da eta $b_{n+1}-b_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ beraz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1}{1/n} = 1$$

$\left\{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\} \sim \left\{\frac{1}{n}\right\}$

Beraz $\lim_{n\to\infty} \frac{1+1/2+\cdots+1/n}{\ln n} = 1$ izango da.

3.4.4. e zenbakia

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad e^{k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n+l}\right)^{n+p}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bada, $e = \lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{1/a_n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ bada, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

$\lim_{x\to\infty} p(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$ bada, $e^{\lim_{x\to\infty}(p(x)-1)\cdot g(x)}$