Multltzoen teoria

Irakasgaia: Matematika Diskretua
Titulazioa: Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Informatika fakultatea
Donostia

Aurkibidea

Multzoak eta Azpimultzoak

Multzo-eragiketak

Propietateak

Multzo baten partizioa

Biderkadura kartesiarra

Multzoak

Definizioa (Multzoa)

Ondo definitutako objektuen bilduma multzoa dela esaten da. Objektuak elementu deituko ditugu.

Multzoa bi eratara defini dezakegu:

- Multzoko elementu guztiak emanaz.
- Multzoko elementuek betetzen duten propietatea adieraziz.

Multzo batean elementuen ordena ez da kontuan hartzen, eta multzoko elementuak ematean ez ditugu errepikatuko. Horregatik, $\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b, a, b\}$
Notazioa:

- Multzoak hizki larriz: $A, B, C, X, \cdots$.
- Multzoko elementuak hizki xehez: $a, b, c, x, \cdots$.
- x elementua A multzokoa dela adierazteko: $x \in A$ (x barne A). Ez dela: $x \notin A$.

Multzoak eta azpimultzoak

Notazio berezia duten multzo batzuk:

- $\emptyset$: Multzo hutsa, elementurik ez duen multzoa. $\emptyset = \{ \}$
- U; Unibertsoa, testuinguru bateko elementu guztien multzoa
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ zenbaki osoen multzoa
- $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ zenbaki oso positiboen multzoa
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ zenbaki arrunten multzoa
- $\mathbb{R}$ zenbaki errealen multzoa

Definizioa (Multzoaren kardinala)

A multzo finitua izanik, A multzoak duen elementu kopurua Aren kardinala dela esango dugu eta $|A|$ notazioaz adieraziko dugu.

Definizioa (Azpimultzoa)

A multzoa B multzoaren azpimultzo dela esango dugu (A parte B), $A \subseteq B$, baldin $\forall x \in A \implies x \in B$.

Multzoak eta azpimultzoak

Multzoen arteko erlazioak adierazteko Venn diagramak erabiltzen dira. A multzoa izanik, $\emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq U, \quad A \subseteq A$

Definizioa (Multzo berdinak)

Bi multzo A eta B berdinak dira, $A = B$, baldin elementu berberak badituzte, hau da $A \subseteq B$ eta $B \subseteq A$.

Definizioa (Azpimultzo propioa)

A multzoa B multzoaren azpimultzo propioa da baldin $A \subset B$, hau da, $A \subseteq B$ eta $A \neq B$.

Definizioa (Potentzia multzoa)

A multzoa izanik, A-ren potentzia multzoa, $\mathcal{P}(A)$, A-ren azpimultzo guztien bilduma da.

Multzo-eragiketak

A eta B bi multzo izanik,

- A eta B-ren bildura. $A \cup B := \{x \ : \ x \in A \ \text{ edo } \ x \in B\}$
- A eta B-ren ebakidura. $A \cap B := \{x \ : \ x \in A \ \text{ eta } \ x \in B\}$ A eta B multzoek elementu komunik ez badute disjuntuak direla esango dugu, $A \cap B = \emptyset$
- A eta B-ren diferentzia. $B - A := \{x \ : \ x \in B \ \text{ eta } \ x \notin A\}$
- A-ren osagarria B-n $(A \subseteq B$ izanik).

$$A^C = \overline{A} := \{x \ : \ x \in B \ \text{ eta } \ x \notin A\}$$

Propietateak

A, B eta C multzoak izanik, honako propietateak betetzen dira.

- Trukatze-propietatea.
  $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
- Elkartze-propietatea.
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Banatze-propietatea.
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgan-en legeak.
  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Propietateak

- Idenpotentzia.
  $A \cup A = A$
  $A \cap A = A$
- Beste propietate batzuk.

$$\begin{array}{lll} A \cup U = U & A \cap U = A & U^C = \emptyset \\ A \cup A^C = U & A \cap A^C = \emptyset & \emptyset^C = U \\ A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset & (A^C)^C = A \\ A \subseteq A \cup B & A \cap B \subseteq A & \end{array}$$

A eta B finituak izanik, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
A eta B disjuntuak badira, $|A \cup B| = |A| + |B|$

A, B eta C izanik,
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Multzo baten partizioa

Definizioa (A multzoaren partizioa)

A multzoaren partizioa A-ren azpimultzo ez-hutsen familia bat da, non azpimultzo hauek elkarren artean disjuntuak diren eta guztien bildura A den.

$$\mathcal{P} = \{A_i \ : \ i \in I\} \qquad (I : \textit{indize multzoa})$$

- $(\forall i \in I) \quad \emptyset \neq A_i \subseteq A$ azpimultzo ez-hutsak.
- $(\forall i, j \in I) \quad A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

A_i: partizioaren klaseak.

Biderkadura kartesiarra

Definizioa (Biderkadura kartesiarra)

A eta B multzoen biderkadura kartesiarra (x, y) bikote ordenatuen multzoa da, non

$$A \times B := \{(x, y) \ : \ x \in A \textit{ eta } y \in B\}$$

Ez nahastu: $(a, b) \neq (b, a), \quad \{a, b\} = \{b, a\}$