Kruskal-en algoritmoa

Izan bedi **G = (V, A, ϕ)** grafo **ez zuzendu, konexua eta haztatua** (**arku bakoitzari p(a) pisua egokitzen zaio**) **n** erpinekin.

Algoritmoak **G**-ren **T** **zuhaitz estaltzaile minimal** bat kalkulatuko du, honako pausuen bidez:

1. pausoa

Kontsidera dezagun **i = 1** eta aukera dezagun $a_1 \in A$ arku bakarra, non:

Ahal den txikiena

$$p(a_1) = \min\{p(a_h) \;/\; a_h \in A\}$$

Gerta daiteke $a_1, a_2, \ldots, a_j$ zenbait arku egotea baldintza berdina egiaztatuz, hau da pisu minimo berdinarekin.

2. pausoa

i / 1 ≤ i ≤ n-2 izanik ($\mathbf{a_1}$-**ekin edo** $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_j}$ **arkuekin desberdinak diren beste arkuak**); aurretik $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_j}$ arkuak aukeratu baditugu, $\mathbf{a_{j+1} \in A - \{a_1, a_2, ..., a_j\}}$ arkua aukeratuko dugu, non:

Ahal den txikiena

1) $\mathbf{p(a_{j+1}) = \min\{p(a_h) \,/\, a_h \in A - \{a_1, a_2, ..., a_j\}}$

2) $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_j, a_{j+1}}$ arkuek (eta dagozkien erpinek) osotutako **G**-ren **G' azpigrafoak ez du ziklorik**.

3. pausoa

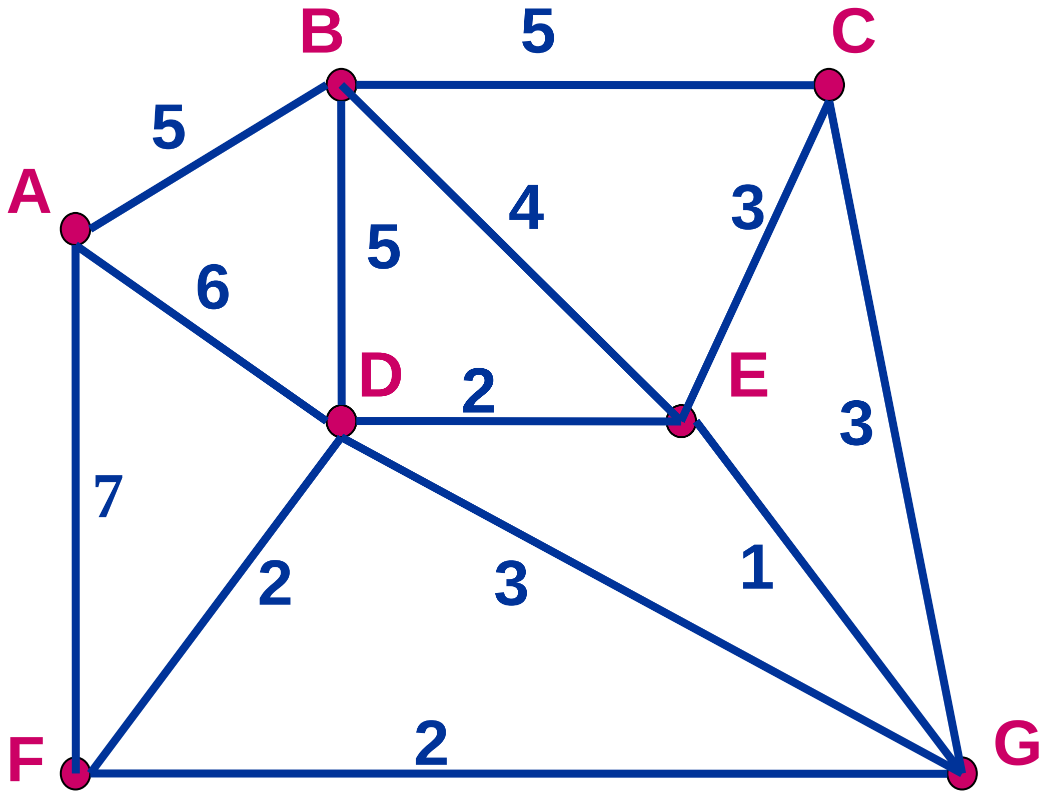
i-ren ordez **i+1** jarriko dugu eta

→ **i = n-1** bada, orduan $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_{n-1}}$ arkuek (eta dagozkien erpinek) osotutako **G**-ren **G'** azpigrafoa **konexu**a da, **n** erpinekin eta **n-1** arkurekin. Gainera **G' = T G**-ren **zuhaitz estaltzaile minimala** da.

→ **i < n-1** bada, **2. pausora** itzuliko gara.

26. ariketa

n=7 konputagailu dituen sistema batentzat zenbaketa-sare bat eraiki behar dute elkartze “alferra” deritzonarekin. Egoera honen modelo bat honako G grafo honek adieraziko du:



– Konputagailuak erpinak dira: A, B, C, D, E, F, G

– Konputagailu-bikoteak lotzen dituzten igortze-lerroak arkuak dira.

x arku bakoitzari p(x) zenbaki erreal positibo bat dagokio eta garraio-lerro horretarako aurreikusitako kostua adieraziko du.

Helburua konputagailu guztiak lotzea da eraikuntzaren “kostu totala minimizatuz”.

Horretarako, G-ren T zuhaitz estaltzaile bat eraiki behar dugu, non “arkuen pisuen batura minimoa” baita.

Kruskal-en algoritmoa erabiliz T eraikiko dugu (prozeduraren pausu bakoitzean, algoritmoak geratzen diren datuak era hoberenean aukeratuko ditu).

G grafoari algoritmoa aplikatuko diogu.

1. pausoa

Kontsidera dezagun **$i = 1$** eta **pisu minimoa** duen **arku bakarra** aukeratuko dugu:

$$\mathbf{a_1 = (E,G)\ /\ \ p(a_1) = 1}$$

$T_1 = \{a_1 = (E,G)\}$ multzoarekin hasiko gara

Hasieran T_1 arku bakarreko zuhaitz bat da eta gero hazi egingo da zuhaitz handiago bat edo baso bat izan arte eta azkenik G-ren T estaldura minimala izatera iritsiko da.

2. pausoa

Lehen iterazioa

a_1-ekin **desberdinak diren arkuen artean**, hau da **A- $\{a_1\}$** multzoko arkuen artean **3** daude interesatzen digutenak:

a_2 = (D,E) non $p(a_2)$ = 2

1-n ondorengo pisu minimoak

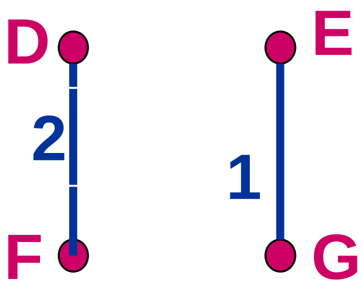
a_3 = (D,F) non $p(a_3)$ = 2

a_4 = (F,G) non $p(a_4)$ = 2

Aukera dezagun **a_3 = (D,F)** arkua eta:

1) **$p(a_3)$ = 2** **1-en ondoren minimoa**

2) **G**-ren **G'= {(E,G), (D,F)}** azpigrafoak <u>**ez**</u> du **ziklorik**.



Orain **G' = T_2 = {(E,G),(D,F)} baso** bat da

i 2-ra igoko da

3. pausoa

Lehen iterazioa

i = 1 balioaren ordez **i = 1+1 = 2** jarriko dugu

2 < 7-1 = 6 denez, **2. pausora** itzuliko gara

2. pausua

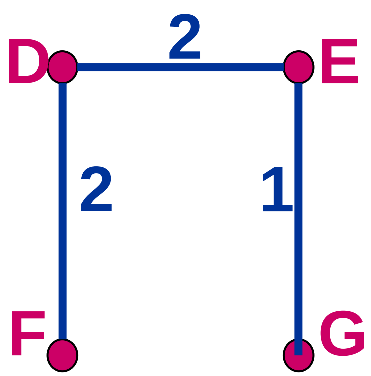
Bigarren iterazioa

a_2= (D,E), **a_4 = (F,G)** 2 pisua duten arkuetatik honakoa aukeratuko dugu:

a_2= (D,E) eta gainera:

1) **$p(a_2) = 2$**

2) **G' = {(E,G),(D,F),(D,E)}** **G**-ren azpigrafoak **ez** du **ziklorik**.



Orain **G' = T_3 =** **{(E,G),(D,F),(D,E)}** **zuhaitz** bat da.

i 3-ra haziko da

3. pausoa

Bigarren iterazioa

i = 2 balioaren ordez **i = 2+1 = 3** jarriko dugu

3 < 7-1 = 6 denez, **2. pausora** itzuliko gara

2. pausoa

Hirugarren iterazioa

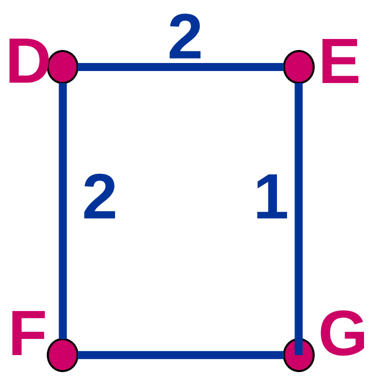
2 pisua duen bakarra geratzen da:

a_4**= (F,G)** eta gainera:

1) $p(a_4) = 2$

2) **G' = {(E,G),(D,F),(D,E),(F,G)}** **G**-ren azpigrafoak **ziklo** bat du.

Kendu egingo dugu



Orain **G' = {(E,G),(D,F),(D,E),(F,G)}** **ez** da **zuhaitza**

2 baino pisu handiago duten arkuak hedatu behar ditugu

Kontsidera ditzagun honako arku hauek:

a_5 = (C,E) non **$p(a_5) = 3$**

a_6 = (C,G) non **$p(a_6) = 3$**

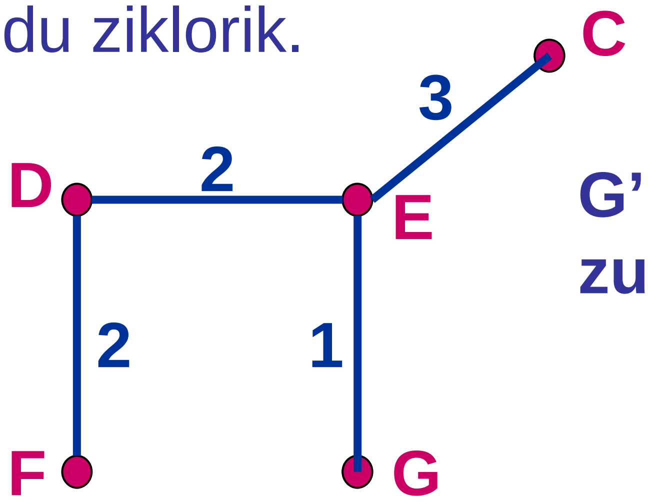
1 eta 2-ren ondorengo pisu minimoak

a_7 = (D,G) non **$p(a_7) = 3$** (**ez dugu kontuan hartuko zikloa osatzeagatik**)

Aukera dezagun **a_5 = (C,E)** eta gainera

1) **$p(a_5) = 3$**

2) **G' = {(E,G),(D,F),(D,E),(C,E)}** **G**-ren azpigrafoak **ez** du ziklorik.



G' = T_4 = {(E,G),(D,F),(D,E),(C,E)} **zuhaitz** bat da.

i 4-ra haziko da.

3. pausoa

Hirugarren iterazioa

i = 3 balioaren ordez **i = 3+1 = 4** jarriko dugu

4 < 7-1 = 6 denez, **2. pausora** itzuliko gara

2. pausoa

Laugarren iterazioa

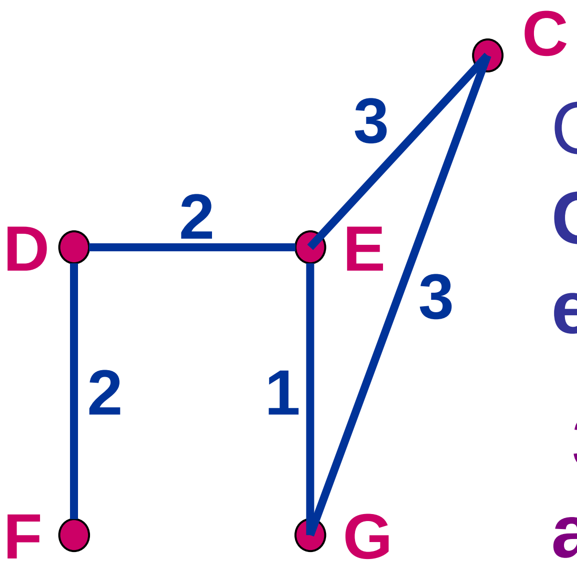
3 pisua duen arku bakarra geratzen da

a_6= (C,G) eta gainera:

1) **p(a_6) = 3**

2) **G' ={(E,G),(D,F),(D,E),(C,E),(C,G)} G**-ren azpigrafoak **ziklo** bat du.

Kendu egingo dugu



Orain

G'={(E,G),(D,F),(D,E),(C,E),(~~C,G~~)}

ez da **zuhaitza**

3 baino pisu handiagoko arkuetara hedatu behar dugu.

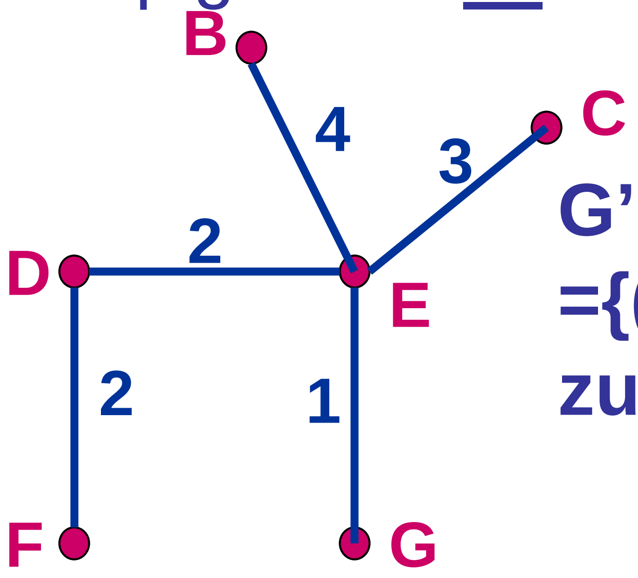
4 pisua duen **a_8 = (B,E)** arku bakarra aukeratuko dugu

1, 2 eta 3-ren ondorengo pisu minimoa

eta gainera

1) **$p(a_8) = 4$**

2) **G' = {(E,G),(D,F),(D,E),(C,E),(B,E)} G**-ren azpigrafoak **ez** du **ziklorik**.



G' =T

={(E,G),(D,F),(D,E),(C,E),(B,E)}

zuhaitza da.

i 5-ra haziko da

3. pausoa

Laugarren iterazioa

i = 4 balioaren ordez **i = 4+1 = 5** jarriko dugu

5 < 7-1 = 6 denez, **2. pausora** itzuliko gara

2. pausoa

Bostgarren iterazioa

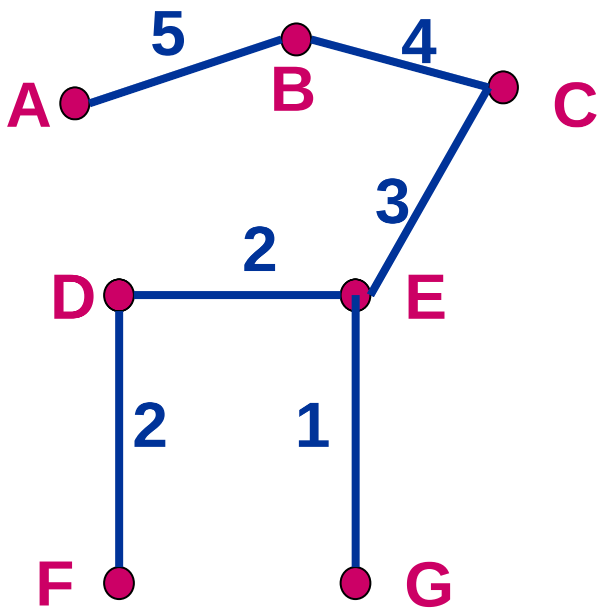
5 pisua duen $\mathbf{a_9 = (A,B)}$ arku bakarra aukeratuko dugu

1, 2,3 eta 4-ren ondorengo pisu minimoa

eta gainera

1) $\mathbf{p(a_9) = 5}$

2) **G' ={(E,G),(D,F),(D,E),(C,E),(B,E),(A,B)} G**-ren azpigrafoak **<u>ez</u>** du **ziklorik**.



$\mathbf{T_6 = G' =}$ **={(E,G),(D,F),(D,E),(C,E),(B,E),(A, B)} zuhaitza** da**.**

i 6-ra igoko da

3. pausoa

Bostgarren iterazioa

$i = 5$ balioaren ordez **$i = 5+1 = 6$** jarriko dugu

$6 = 7-1 = 6$ denez, $\underline{T = T_6}$ **G**-ren **zuhaitz hoberena** da eta haren **pisua** honakoa:

$$1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 17$$