



Lengoaia eta Sistema Informatikoak Saila

Bilboko Industria Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola

# Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

2. Maila

2015-16 ikasturtea

## Ariketak

### **3. Gaia: Automata finituak eta lengoaia erregularrak**

---

JOSE GAINZARAIN IBARMIA

Azken eguneraketa: 2015-9-2



## GAIEN AURKIBIDEA

<b>3. Ariketak: Automata finituak eta lengoaia erregularrak</b>	<b>1</b>
3.1 Automata Finitu Deterministen (AFD-en) diseinua	1
3.2 Konputazio deterministen garapena	9
3.3 AFD-en minimizazioa	10
3.4 Automata Finitu Ez Deterministen (AFED-en) diseinua	13
3.5 Konputazio ez deterministen garapena	21
3.6 $\varepsilon$ trantsizioak dituzten Automata Finitu Ez Deterministen ( $\varepsilon$ -AFED-en) diseinua	22
3.7 $\varepsilon$ trantsizioak dituzten konputazio ez deterministen garapena	30



### 3. ARIKETAK: AUTOMATA FINITUAK ETA LENGOAIA ERREGULARRAK

#### 3.1 Automata Finitu Deterministen (AFD-en) diseinua

Alfabetoa  $A = \{a, b, c\}$  dela kontuan hartuz, honako lengoia hauetako bakoitzari dagokion AFD bat diseinatu:

1.  $L_1$  –  $a$  sinboloaz hasten diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = au)\}$$

2.  $L_2$  –  $a$  sinboloaz hasi eta  $a$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge ((w = a) \vee \exists u(u \in A^* \wedge w = aua))\}$$

3.  $L_3$  –  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = ub)\}$$

4.  $L_4$  –  $a$  sinboloaz hasi eta  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = aub)\}$$

5.  $L_5$  –  $a$  sinboloaz hasi edo  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge (w = au \vee w = ub))\}$$

6.  $L_6$  –  $a$  sinboloaz hasi,  $b$  sinboloaz bukatu eta gutxienez  $c$  bat duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $acaaaaab$ ,  $aabbcbccbb$ ,  $acb$  eta  $aaccbaccb$  hitzak  $L_6$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $bacbcc$  eta  $bbbb$  ez dira  $L_6$  lengoiaikoak.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 3 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = b \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v(v \in A^* \wedge |v|_c \geq 1 \wedge w = avb)\}$$

7.  $L_7$  –  $a$  sinboloaz hasten ez diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $cabb$ ,  $ccc$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$  eta  $bcbc$  hitzak  $L_7$  lengoiaikoak dira baina  $abbbb$  ez da  $L_7$  lengoiaikoa.

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists v(v \in A^* \wedge w = av)\}$$

8.  $L_8 - b$  sinboloaz bukatzen ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists u(u \in A^* \wedge w = ub)\}$$

9.  $L_9 - a$  sinboloaz hasten diren baina  $b$  sinboloaz bukatzen ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_9 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = au) \wedge \neg \exists v(v \in A^* \wedge w = vb)\}$$

10.  $L_{10} - aaa$  katea gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{10} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav)\}$$

11.  $L_{11} - aaa$  katea ez duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{11} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav)\}$$

12.  $L_{12} - aaa$  eta  $ccc$  azpikateak gutxienez behin dituzten hitzez osatutako lengoia. Hitz bakoitzak azpikate biak izan behar ditu. Hala ere, edozein ordenatan ager daitezke, hau da,  $ccc$  azpikatea  $aaa$  azpikatea baino lehenago ager daiteke. Adibidez,  $cccaaaaa$ ,  $aaababccccb$ ,  $accbaaaab$ ,  $ccccbaaaab$  eta  $accbaaaabcc$  hitzak  $L_{12}$  lengoiaikoak dira baina  $baabcccc$  hitza ez da  $L_{12}$  lengoiaikoa, ez baitu  $aaa$  azpikatea.

$$L_{12} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge (w = uaaavcccx \vee w = uccvaaa))\}$$

13.  $L_{13} - aaa$  azpikatea bai baina  $ccc$  azpikatea ez duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{13} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav) \wedge \neg \exists x, z(x \in A^* \wedge z \in A^* \wedge w = xcccz)\}$$

14.  $L_{14} - aaa$  katea edo  $ccc$  katea duten hitzez osatutako lengoia. Lengoaia honetako hitz bakoitzak gutxienez kate horietako bat gutxienez behin izan behar du. Adibidez,  $cccaaaaa$ ,  $babcccb$ ,  $acaaab$ ,  $cccc$ ,  $cccbcc$  eta  $aabccccab$  hitzak  $L_{14}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $baabcca$  hitza ez da  $L_{14}$  lengoiaikoa, ez baitu  $aaa$  azpikatea eta ez  $ccc$  azpikatea.

$$L_{14} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge (w = uaaav \vee w = ucccv))\}$$

15.  $L_{15} -$  Luzera bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{15} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 2 = 0\}$$

16.  $L_{16} -$  Luzera bakoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{16} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 2 \neq 0\}$$

17.  $L_{17} - a$  sinboloaren agerpen-kopuru bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{17} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0\}$$

18.  $L_{18}$  –  $b$  eta  $c$  sinboloen agerpenik ez eta  $a$  sinboloaren agerpen-kopuru bikoitia duten hitzez osatutako lengoaia.

$$L_{18} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0\}$$

19.  $L_{19}$  – Honako baldintza hauetatik gutxienez bat betetzen duten hitzez osatutako lengoaia:

- $a$  sinboloaren agerpenen kopurua bikoitia da
- $b$ -rik eta  $c$ -rik ez dago.

$$L_{19} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_a \bmod 2 = 0 \vee (|w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0))\}$$

20.  $L_{20}$  –  $a$  sinboloaren agerpen-kopurua bikoitia eta  $b$  sinboloaren agerpen-kopurua ere bikoitia duten hitzez osatutako lengoaia.

$$L_{20} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_b \bmod 2 = 0\}$$

21.  $L_{21}$  –  $a$  sinboloaren agerpen-kopurua bikoitia eta  $b$  sinboloaren agerpen-kopurua ere bikoitia ez duten hitzez osatutako lengoaia. Gerta daiteke  $a$ -ren agerpen-kopurua edo  $b$ -ren agerpen-kopurua bikoitia izatea baina biak ezin dute bikoitiak izan. Beraz,  $a$ -ren agerpen-kopurua edo  $b$ -ren agerpen-kopurua bakoitia izango da  $L_{21}$  lengoaiako hitzetan.

$$L_{21} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_a \bmod 2 \neq 0 \vee |w|_b \bmod 2 \neq 0)\}$$

22.  $L_{22}$  – Gutxienez desberdinak diren bi sinbolo dituzten hitzez osatutako lengoaia. Adibidez,  $aab$ ,  $acccabab$  eta  $ccbc$  hitzak  $L_{22}$  lengoaiakoak dira baina  $aaa$ ,  $b$  eta  $\varepsilon$  ez.

$$L_{22} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1)\}$$

23.  $L_{23}$  – Desberdinak diren bi sinbolo edo gehiago ez dituzten hitzez osatutako lengoaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaa$ ,  $bbbb$ ,  $c$  eta  $cc$  hitzak  $L_{23}$  lengoaiakoak dira baina  $baaa$  eta  $aacbb$  hitzak ez.

$$L_{23} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1)\}$$

24.  $L_{24}$  – Desberdinak diren bi sinbolo edo gehiago ez dituzten eta gainera luzera bikoitia duten hitzez osatutako lengoaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaaa$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{24}$  lengoaiakoak dira baina  $baaa$ ,  $aaa$  eta  $aacbb$  hitzak ez.

$$L_{24} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1) \wedge |w| \bmod 2 = 0\}$$

25.  $L_{25}$  –  $c$ -rik ez duten eta,  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaa$ ,  $ab$ ,  $aabb$ ,  $aaaab$  eta  $aaabbb$  hitzak  $L_{25}$  lengoaiakoak dira baina  $ababbb$ ,  $aaacbb$  eta  $bbaa$  hitzak ez dira  $L_{25}$  lengoaiakoak.

$$L_{25} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge w = uv)\}$$

26.  $L_{26}$  –  $c$ -rik ez izatea eta gutxienez  $a$  bat eta  $b$  bat izatea betetzeaz gain,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta  $b$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $ab$ ,  $aabb$ ,  $aabbbb$ , eta  $aaabbb$  hitzak  $L_{26}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aaacbb$ ,  $aaa$ ,  $baaba$  eta  $bbaa$  hitzak ez dira  $L_{26}$  lengoiaikoak.

$$L_{26} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| = |v|_b \wedge |v| \geq 1 \wedge w = uv)\}$$

27.  $L_{27}$  –  $c$ -rik ez duten eta,  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak jarraian (ezkerreko aldean edo eskuineko aldean) eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak jarraian (ezkerreko aldean edo eskuineko aldean) dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aabbb$ ,  $baaaa$ ,  $bbb$  eta  $aaaa$  hitzak  $L_{27}$  lengoiaikoak dira baina  $aabaa$ ,  $aaacbb$  eta  $abaaa$  hitzak ez dira  $L_{27}$  lengoiaikoak.

$$L_{27} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge (w = uv \vee w = vu))\}$$

28.  $L_{28}$  –  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak erdian jarraian eta  $c$ -rik baldin badago,  $c$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $bccc$ ,  $aaaabbccc$ ,  $aabbcccccc$ ,  $aaa$  eta  $aaaacccc$  hitzak  $L_{28}$  lengoiaikoak dira baina  $acabbb$ ,  $aaacbb$ ,  $cccbbaaa$ ,  $ccc$  eta  $bbaaccc$  hitzak ez dira  $L_{28}$  lengoiaikoak.

$$L_{28} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge w = uvx)\}$$

29.  $L_{29}$  – Hasieran gutxienez osagai bat duen eta  $a$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat, gero gutxienez osagai bat duen eta  $b$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat eta bukatzeko gutxienez osagai bat duen eta  $c$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat dituzten hitzez eratutako lengoiaia. Adibidez,  $aabcc$ ,  $abbbcc$ ,  $abc$ ,  $aaaabbc$  eta  $aabbcc$  hitzak  $L_{29}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $bc$ ,  $ac$ ,  $\varepsilon$ ,  $aaccbbb$ ,  $aaa$ ,  $aaacccc$  eta  $aaabbb$  hitzak ez dira  $L_{29}$  lengoiaikoak.

$$L_{29} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| \geq 1 \wedge |x| \geq 1 \wedge w = uvx)\}$$

30.  $L_{30}$  –  $b$  sinboloa agertzen bada,  $b$ -ren agerpen denak jarraian dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $ccaaaaa$ ,  $aabbbccca$ ,  $ccc$ ,  $bbacccaaa$ ,  $\varepsilon$ ,  $bbbb$  eta  $ccbbb$  hitzak  $L_{30}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $bacbcc$  hitza ez da  $L_{30}$  lengoiaikoa  $b$  denak ez daudelako elkarren ondoan.

$$L_{30} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |v| = |v|_b \wedge |w|_b = |v| \wedge w = uvx)\}$$

31.  $L_{31}$  –  $a$ -ren agerpen bakoitzaren jarraian gutxienez bi  $b$  dituzten hitzez osatutako  $L_{31}$  lengoiaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $bcbcbabb$ ,  $abbbabbabb$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{31}$  lengoiaikoak dira baina  $baaa$ ,  $ab$  eta  $aacbb$  ez.



$$L_{31} = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = a) \rightarrow (k \leq |w| - 2 \wedge w(k+1) = b \wedge w(k+2) = b))\}$$

32.  $L_{32}$  – Gutxienez  $a$  bat eta  $c$  bat dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $ca$ ,  $aabbbbaabc$  eta  $ccccaa$  hitzak  $L_{32}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $baaa$ ,  $bb$ ,  $cbbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak ez.

$$L_{32} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \geq 1 \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Beste aukera bat:

$$L_{32} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge (w = uavcx \vee w = ucva x))\}$$

33.  $L_{33}$  –  $ac$  katea edo  $ca$  katea (bietako bat edo biak) gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $ca$ ,  $acabbbccaac$  eta  $acacbaac$  hitzak  $L_{33}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $cbaaa$ ,  $bba$ ,  $cbbab$ ,  $bbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak ez.

$$L_{33} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge (w = uacv \vee w = ucav))\}$$

34.  $L_{34}$  –  $a$  eta  $c$  elkarren jarraian (ez  $ac$  bezala eta ez  $ca$  bezala) ez dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $cbaaa$ ,  $cbca$ ,  $cbbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak  $L_{34}$  lengoiaikoak dira baina  $ca$ ,  $aabbbbaac$  eta  $ccccaa$  ez.

$$L_{34} = \overline{L_{33}}$$

35.  $L_{35}$  – Gutxienez 2 elementu dituzten eta hasten diren sinbolo berarekin bukatzen diren hitzez eratutako lengoiaia. Adibidez,  $aabacba$ ,  $cbcb$ ,  $babb$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{35}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $cbbb$  hitza ez da  $L_{35}$  lengoiaikoa hasierako eta bukaerako sinboloak ez direlako berdinak. Era berean,  $c$  hitza ez da  $L_{35}$  lengoiaikoa ez dituelako gutxienez bi osagai.

$$L_{35} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v, \alpha(v \in A^* \wedge \alpha \in A \wedge w = \alpha v \alpha)\}$$

36.  $L_{36}$  –  $abc$  katea behin edo gehiagotan elkartuz lortzen diren hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $abcbabc$ ,  $abc$  eta  $abcbabc$  hitzak  $L_{36}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $\varepsilon$ ,  $aba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{36}$  lengoiaikoak.

$$L_{36} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k(k \geq 1 \wedge w = (abc)^k)\}$$

37.  $L_{37}$  –  $abc$  katea zero aldiz edo gehiagotan elkartuz lortzen diren hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $abcbabc$ ,  $abc$  eta  $abcbabc$  hitzak  $L_{37}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $aba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{37}$  lengoiaikoak.

$$L_{37} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k(k \geq 0 \wedge w = (abc)^k)\}$$

38.  $L_{38}$  – Gutxienez osagai bat,  $c$ -rik ez eta  $a$  eta  $b$ -ren agerpenak ordena horretan tartekatuta dituzten hitzez eratutako lengoiaia. Beraz,  $L_{38}$  lengoiaiko hitzak  $a$  sinboloaz hasiko dira. Adibidez,  $a$ ,  $ab$ ,  $aba$ ,  $abab$ ,  $ababa$  eta  $ababab$  hitzak  $L_{38}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $\varepsilon$ ,  $b$ ,  $aaba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{38}$  lengoiaikoak.

$$L_{38} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k(k \geq 0 \wedge (w = (ab)^k a \vee w = (ab)^k ab))\}$$

39.  $L_{39}$  – Gutxienez lau osagai eta gainera hirugarren posizioan  $a$  sinboloa duten hitzez eratutako lengoia. Adibidez,  $aaaa$ ,  $ccab$ ,  $cbabbaac$ ,  $ccabcbaaaa$  eta  $bcaccc$  hitzak  $L_{39}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aa$ ,  $aaa$ ,  $ba$ ,  $aabbca$  eta  $bba$  hitzak ez dira  $L_{39}$  lengoiaikoak.

$$L_{39} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| > 3 \wedge w(3) = a\}$$

40.  $L_{40}$  –  $a$ -z hasi,  $b$ -z bukatu, tartean  $c$  bakarra, hasierako  $a$  eta  $c$  bakarraren artean nahi adina  $b$  (zero edo gehiago) eta  $c$  bakarraren eta bukaerako  $b$ -aren artean nahi adina  $a$  (zero edo gehiago) dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $abbbcaab$ ,  $acb$ ,  $acaaab$  eta  $abbbcb$  hitzak  $L_{40}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $abba$ ,  $\varepsilon$ ,  $abbcaba$ ,  $abbcac$ ,  $acbbb$ ,  $aaa$  eta  $ab$  hitzak ez dira  $L_{40}$  lengoiaikoak.

$$L_{40} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_b \wedge |v| = |v|_a \wedge w = aucvb)\}$$

41.  $L_{41}$  –  $abc$  katea gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $abcaabcaa$ ,  $abc$ ,  $accabcaabc$ ,  $bbbabcbbb$  eta  $accaaabc$  hitzak  $L_{41}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $\varepsilon$ ,  $a$  eta  $bacbcc$  hitzak  $L_{41}$  lengoiaikoak dira.

$$L_{41} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v(v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

42.  $L_{42}$  –  $abc$  azpikatea hasieran edo bukaeran (edo bietan) duten hitzez osatutako lengoia.  $abc$  azpikatea leku gehiagotan ere ager daiteke hitzaren erdian. Adibidez,  $abcaaaa$ ,  $abc$ ,  $accaaabc$ ,  $abcbbbabc$  eta  $abccabcaaa$  hitzak  $L_{42}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $\varepsilon$ ,  $a$  eta  $bacbcc$  hitzak ez dira  $L_{42}$  lengoiaikoak.

$$L_{42} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v(v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

43.  $L_{43}$  –  $L_{42}$  lengoiaikoak ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_{43} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists v(v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

Beste aukera bat:

$$L_{43} = \overline{L_{42}}$$

44.  $L_{44}$  –  $b$ -rik agertzen bada,  $c$ -rik ez duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $ccaaaaa$ ,  $aabbbba$ ,  $ccc$ ,  $aaaaa$ ,  $\varepsilon$ ,  $bbbb$  eta  $acaac$  hitzak  $L_{44}$  lengoiaikoak dira baina  $bacbcc$  hitza ez da  $L_{44}$  lengoiaikoa.

$$L_{44} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_b \geq 1 \rightarrow |w|_c = 0)\}$$

45.  $L_{45}$  – Jarraian zehazten diren baldintzak betetzen dituzten hitzez osatutako lengoia:

- $a$ -z hasiz gero,  $aa$  ez edukitzea azpikate bezala;
- $b$ -z hasiz gero,  $aa$  azpikate bezala edukitzea;

- ez  $a$ -z eta ez  $b$ -z ez hasiz gero, edozein egitura izatea, inolako murrizketarik gabe.

Adibidez,  $acbab$ ,  $bbaaacb$ ,  $ccc$  eta  $abcc$  hitzak  $L_{45}$  lengoaiakoak dira baina  $abaab$  eta  $bbb$  ez dira  $L_{45}$  lengoaiakoak.

$$L_{45} = \{w \mid w \in A^* \wedge ((|w| \geq 1 \wedge w(1) = a \wedge \neg \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uav)) \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) = b \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uav)) \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) = b) \vee (|w| = 0))\}$$

46.  $L_{46} - ab$  azpikatea kopuru bikoitien duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aabccabc$ ,  $acbbbbb$ ,  $baabcbabc$  eta  $ccabccbabccab$  hitzak  $L_{46}$  lengoaiakoak dira baina  $abc$  eta  $cbabb$  hitzak ez dira  $L_{46}$  lengoaiakoak.

$$L_{46} = \{w \mid w \in A^* \wedge (\mathcal{N}k(1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a \wedge w(k+1) = b) \bmod 2 = 0)\}$$

47.  $L_{47} - a$ -z hasi eta gero  $c$ -rik ez baina gutxienez bi  $b$  edo  $a$ -z hasi eta gero dena  $c$  duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez  $abb$ ,  $aababa$ ,  $aabaaab$  eta  $acccc$  hitzak  $L_{47}$  lengoaiakoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aabbbcb$ ,  $caacbb$ ,  $cccc$  eta  $bbc$  ez dira  $L_{47}$  lengoaiakoak.

$$L_{47} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v (v \in A^* \wedge ((|v|_c = 0 \wedge |v|_b \geq 2) \vee |v| = |v|_c) \wedge w = av)\}$$

48.  $L_{48} -$  Errepikatutako sinbolorik ez duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $a$ ,  $ca$ ,  $cba$  eta  $\varepsilon$  hitzak  $L_{48}$  lengoaiakoak dira baina  $aabbbcb$ ,  $cccc$ ,  $aab$  eta  $bbcbbb$  hitzak ez dira  $L_{48}$  lengoaiakoak.

$$L_{48} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha (\alpha \in A \wedge |w|_\alpha \geq 2)\}$$

49.  $L_{49} - 3$ ren anizkoitza den luzera duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aac$  eta  $caabbb$  hitzak  $L_{49}$  lengoaiakoak dira baina  $a$ ,  $cc$  eta  $aabb$  ez dira  $L_{49}$  lengoaiakoak.

$$L_{49} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 3 = 0\}$$

50.  $L_{50} - a$ -z hasi,  $b$ -z bukatu eta 3ren anizkoitza den luzera duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $aab$  eta  $acabbb$  hitzak  $L_{50}$  lengoaiakoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $ccc$  eta  $aabb$  hitzak ez dira  $L_{50}$  lengoaiakoak.

$$L_{50} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 3 = 0 \wedge \exists u (u \in A^* \wedge w = aub)\}$$

51.  $L_{51} - a$ -z hasi eta  $bc$  katearekin bukatzen diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $aabc$  eta  $acabcccbcb$  hitzak  $L_{51}$  lengoaiakoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $ccc$  eta  $aabb$  ez dira  $L_{51}$  lengoaiakoak.

$$L_{51} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u (u \in A^* \wedge w = aubc)\}$$

52.  $L_{52} -$  Lengoia hutsa.

$$L_{52} = \emptyset$$

53.  $L_{53}$  – Lengoaia unibertsala.

$$L_{53} = A^*$$

54.  $L_{54}$  – Hitz hutsaz osatutako lengoaia.

$$L_{54} = \{\varepsilon\}$$

55.  $L_{55}$  –  $aa$ ,  $bb$  eta  $ac$  hitzez osatutako lengoaia.

$$L_{55} = \{aa, bb, ac\}$$

56.  $L_{56}$  –  $\varepsilon$ ,  $bbc$  eta  $acc$  hitzez osatutako lengoaia.

$$L_{56} = \{\varepsilon, bbc, acc\}$$

57.  $L_{57}$  – 4ko luzera duten hitzez osatutako lengoaia.

$$L_{57} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| = 4\}$$

58.  $L_{58}$  – 4ko luzera eta  $a$ -ren agerpen bakarra duten hitzez osatutako lengoaia.

$$L_{58} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| = 4 \wedge |w|_a = 1\}$$

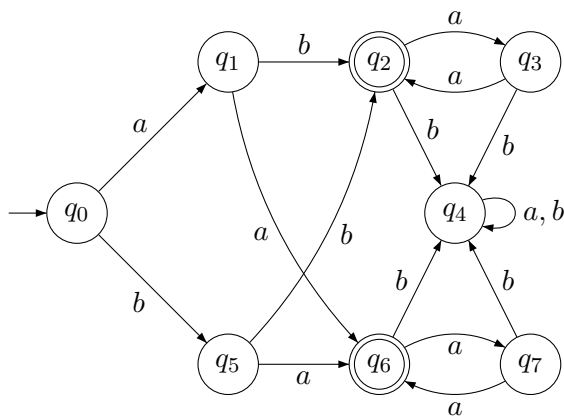
### 3.2 Konputazio deterministen garapena

$q_0$  hasierako egoera dela suposatuz,  $L_{51}$  lengoaiari dagokion AFD-arentzat honako konputazio hauek garatu urratsez urrats:

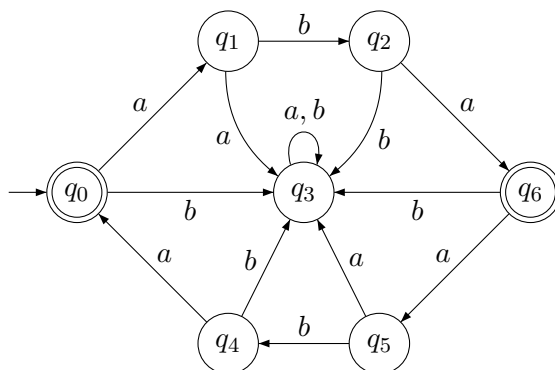
1.  $\delta^*(q_0, abcbc)$
2.  $\delta^*(q_0, aaaa)$
3.  $\delta^*(q_0, \varepsilon)$
4.  $\delta^*(q_0, bcc)$

### 3.3 AFD-en minimizazioa

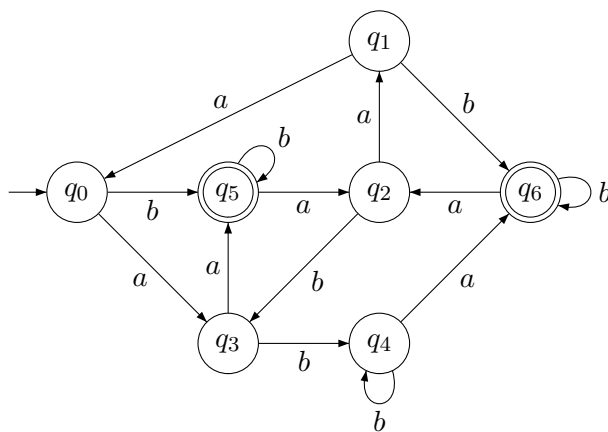
1. Honako AFD hau minimizatu.



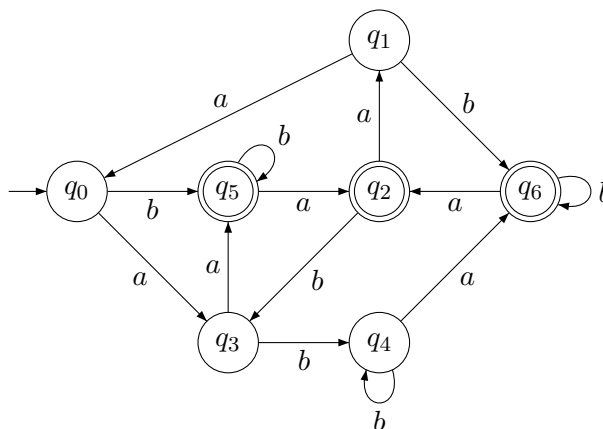
2. Honako AFD hau minimizatu.



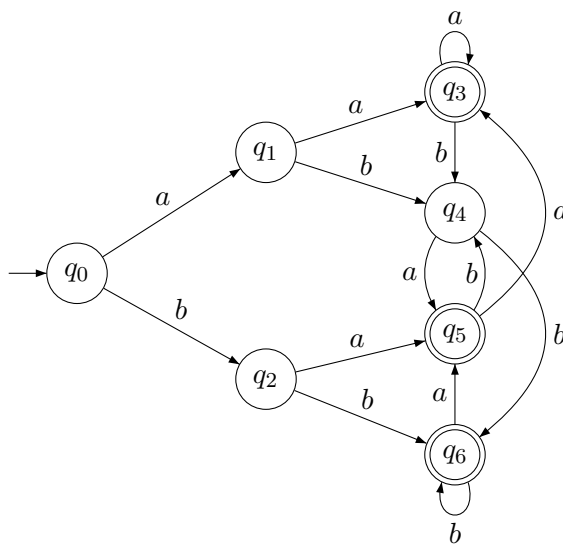
3. Honako AFD hau minimizatu.



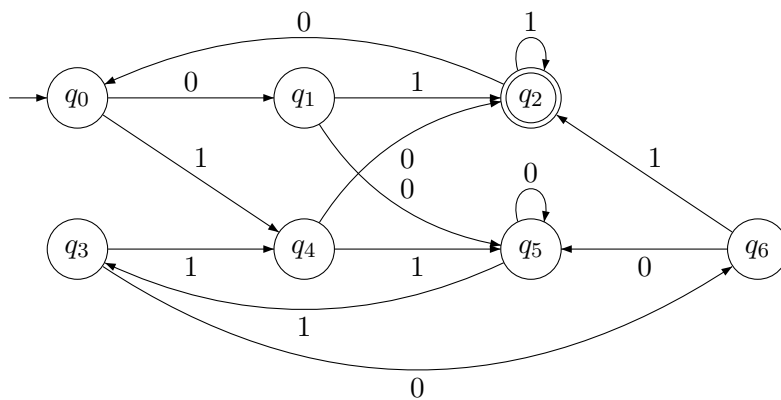
4. Honako AFD hau minimizatu. (2011-12)



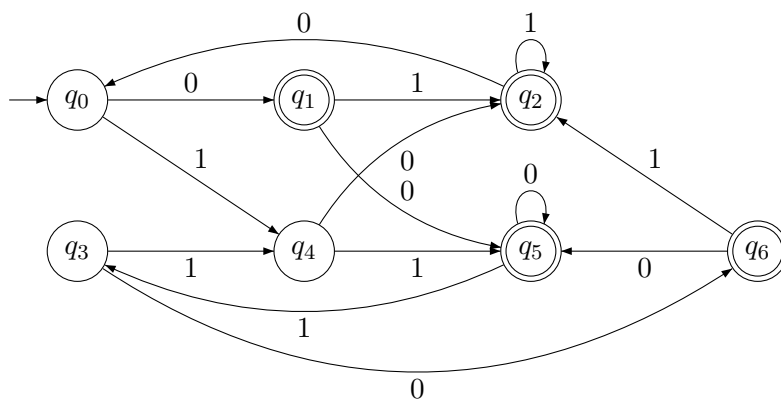
5. Honako AFD hau minimizatu. (2011-12)



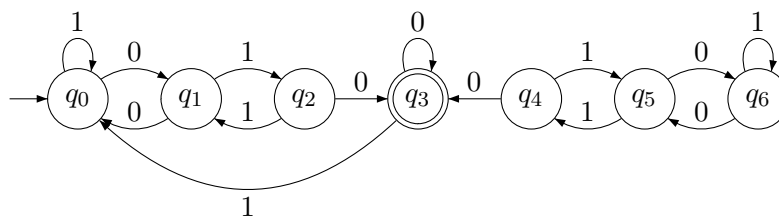
6. Honako AFD hau minimizatu. (2012-13)



7. Honako AFD hau minimizatu. (2012-13)



8. Honako AFD hau minimizatu. (2012-13)





### 3.4 Automata Finitu Ez Deterministen (AFED-en) diseinua

Alfabetoa  $A = \{a, b, c\}$  dela kontuan hartuz, honako lengoia hauetako bakoitzari dagokion AFED bat diseinatu:

1.  $L_1$  –  $a$  sinboloaz hasten diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = au)\}$$

2.  $L_2$  –  $a$  sinboloaz hasi eta  $a$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge ((w = a) \vee \exists u(u \in A^* \wedge w = aua))\}$$

3.  $L_3$  –  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = ub)\}$$

4.  $L_4$  –  $a$  sinboloaz hasi eta  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = aub)\}$$

5.  $L_5$  –  $a$  sinboloaz hasi edo  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge (w = au \vee w = ub))\}$$

6.  $L_6$  –  $a$  sinboloaz hasi,  $b$  sinboloaz bukatu eta gutxienez  $c$  bat duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $acaaaab$ ,  $aabbcbccbb$ ,  $acb$  eta  $aaccbaccb$  hitzak  $L_6$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $bacbcc$  eta  $bbbb$  ez dira  $L_6$  lengoiaikoak.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 3 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = b \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v(v \in A^* \wedge |v|_c \geq 1 \wedge w = avb)\}$$

7.  $L_7$  –  $a$  sinboloaz hasten ez diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $cabb$ ,  $ccc$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$  eta  $bcbc$  hitzak  $L_7$  lengoiaikoak dira baina  $abbbb$  ez da  $L_7$  lengoiaikoa.

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists v(v \in A^* \wedge w = av)\}$$

8.  $L_8$  –  $b$  sinboloaz bukatzen ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists u(u \in A^* \wedge w = ub)\}$$

9.  $L_9$  –  $a$  sinboloaz hasten diren baina  $b$  sinboloaz bukatzen ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_9 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = au) \wedge \neg \exists v(v \in A^* \wedge w = vb)\}$$

10.  $L_{10}$  –  $aaa$  katea gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{10} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav)\}$$

11.  $L_{11}$  –  $aaa$  katea ez duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{11} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav)\}$$

12.  $L_{12}$  –  $aaa$  eta  $ccc$  azpikateak gutxienez behin dituzten hitzez osatutako lengoia. Hitz bakoitzak azpikate biak izan behar ditu. Hala ere, edozein ordenatan ager daitezke, hau da,  $ccc$  azpikatea  $aaa$  azpikatea baino lehenago ager daiteke. Adibidez,  $cccaaaaa$ ,  $aaabacbcccb$ ,  $acccaaaab$ ,  $cccbaaaabaaab$  eta  $acccbaaaabcc$  hitzak  $L_{12}$  lengoiaikoak dira baina  $baacbacc$  hitza ez da  $L_{12}$  lengoiaikoa, ez baitu  $aaa$  azpikatea.

$$L_{12} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge (w = uaaavcccx \vee w = ucccvaaax))\}$$

13.  $L_{13}$  –  $aaa$  azpikatea bai baina  $ccc$  azpikatea ez duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{13} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav) \wedge \neg \exists x, z(x \in A^* \wedge z \in A^* \wedge w = xcccz)\}$$

14.  $L_{14}$  –  $aaa$  katea edo  $ccc$  katea duten hitzez osatutako lengoia. Lengoaia honetako hitz bakoitzak gutxienez kate horietako bat gutxienez behin izan behar du. Adibidez,  $cccaaaaa$ ,  $bacbccb$ ,  $acaaab$ ,  $cccc$ ,  $cccbcc$  eta  $aabcccccab$  hitzak  $L_{14}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $baacbca$  hitza ez da  $L_{14}$  lengoiaikoa, ez baitu ez  $aaa$  azpikatea eta ez  $ccc$  azpikatea.

$$L_{14} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge (w = uaaav \vee w = ucccv))\}$$

15.  $L_{15}$  – Luzera bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{15} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 2 = 0\}$$

16.  $L_{16}$  – Luzera bakoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{16} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 2 \neq 0\}$$

17.  $L_{17}$  –  $a$  sinboloaren agerpen-kopuru bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{17} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0\}$$

18.  $L_{18}$  –  $b$  eta  $c$  sinboloen agerpenik ez eta  $a$  sinboloaren agerpen-kopuru bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{18} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0\}$$

19.  $L_{19}$  – Honako baldintza hauetatik gutxienez bat betetzen duten hitzez osatutako lengoia:

- $a$  sinboloaren agerpenen kopurua bikoitia da
- $b$ -rik eta  $c$ -rik ez dago.

$$L_{19} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_a \bmod 2 = 0 \vee (|w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0))\}$$

20.  $L_{20}$  –  $a$  sinboloaren agerpen-kopurua bikoitia eta  $b$  sinboloaren agerpen-kopurua ere bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{20} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_b \bmod 2 = 0\}$$

21.  $L_{21}$  –  $a$  sinboloaren agerpen-kopurua bikoitia eta  $b$  sinboloaren agerpen-kopurua ere bikoitia ez duten hitzez osatutako lengoia. Gerta daiteke  $a$ -ren agerpen-kopurua edo  $b$ -ren agerpen-kopurua bikoitia izatea baina biak ezin dute bikoitiak izan. Beraz,  $a$ -ren agerpen-kopurua edo  $b$ -ren agerpen-kopurua bakoitia izango da  $L_{21}$  lengoiaiko hitzetan.

$$L_{21} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_a \bmod 2 \neq 0 \vee |w|_b \bmod 2 \neq 0)\}$$

22.  $L_{22}$  – Gutxienez desberdinak diren bi sinbolo dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $aab$ ,  $accccabab$  eta  $cccbc$  hitzak  $L_{22}$  lengoiaikoak dira baina  $aaa$ ,  $b$  eta  $\varepsilon$  ez.

$$L_{22} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1)\}$$

23.  $L_{23}$  – Desberdinak diren bi sinbolo edo gehiago ez dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaa$ ,  $bbbb$ ,  $c$  eta  $cc$  hitzak  $L_{23}$  lengoiaikoak dira baina  $baaa$  eta  $aacbb$  hitzak ez.

$$L_{23} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1)\}$$

24.  $L_{24}$  – Desberdinak diren bi sinbolo edo gehiago ez dituzten eta gainera luzera bikoitia duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaaa$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{24}$  lengoiaikoak dira baina  $baaa$ ,  $aaa$  eta  $aacbb$  hitzak ez.

$$L_{24} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1) \wedge |w| \bmod 2 = 0\}$$

25.  $L_{25}$  –  $c$ -rik ez duten eta,  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaa$ ,  $ab$ ,  $aabb$ ,  $aaaab$  eta  $aaabbb$  hitzak  $L_{25}$  lengoiaikoak dira baina  $ababbb$ ,  $aaacbb$  eta  $bbaa$  hitzak ez dira  $L_{25}$  lengoiaikoak.

$$L_{25} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge w = uv)\}$$

26.  $L_{26}$  –  $c$ -rik ez izatea eta gutxienez  $a$  bat eta  $b$  bat izatea betetzeaz gain,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta  $b$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $ab$ ,  $aabb$ ,  $aabbbb$ , eta  $aaabbb$  hitzak  $L_{26}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aaacbb$ ,  $aaa$ ,  $baaba$  eta  $bbaa$  hitzak ez dira  $L_{26}$  lengoiaikoak.

$$L_{26} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| = |v|_b \wedge |v| \geq 1 \wedge w = uv)\}$$

27.  $L_{27}$  –  $c$ -rik ez duten eta,  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak jarraian (ezkerreko aldean edo eskuineko aldean) eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak jarraian (ezkerreko aldean edo eskuineko aldean) dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aabbb$ ,  $baaa$ ,  $bbb$  eta  $aaaa$  hitzak  $L_{27}$  lengoiaikoak dira baina  $aabaa$ ,  $aaaccbb$  eta  $abaaa$  hitzak ez dira  $L_{27}$  lengoiaikoak.

$$L_{27} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge (w = uv \vee w = vu))\}$$

28.  $L_{28}$  –  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak erdian jarraian eta  $c$ -rik baldin badago,  $c$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $bccc$ ,  $aaaabbccc$ ,  $aabbbccccc$ ,  $aaa$  eta  $aaaacccc$  hitzak  $L_{28}$  lengoiaikoak dira baina  $acabbb$ ,  $aaacbb$ ,  $cccbbaaa$ ,  $ccc$  eta  $bbaaccc$  hitzak ez dira  $L_{28}$  lengoiaikoak.

$$L_{28} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge w = uvx)\}$$

29.  $L_{29}$  – Hasieran gutxienez osagai bat duen eta  $a$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat, gero gutxienez osagai bat duen eta  $b$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat eta bukatzeko gutxienez osagai bat duen eta  $c$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat dituzten hitzez eratutako lengoiaia. Adibidez,  $aabcc$ ,  $abbbcc$ ,  $abc$ ,  $aaaabbc$  eta  $aabbbcc$  hitzak  $L_{29}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $bc$ ,  $ac$ ,  $\varepsilon$ ,  $aaccbbb$ ,  $aaa$ ,  $aaacccc$  eta  $aaabbb$  hitzak ez dira  $L_{29}$  lengoiaikoak.

$$L_{29} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| \geq 1 \wedge |x| \geq 1 \wedge w = uvx)\}$$

30.  $L_{30}$  –  $b$  sinboloa agertzen bada,  $b$ -ren agerpen denak jarraian dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $ccaaaaa$ ,  $aabbbccca$ ,  $ccc$ ,  $bbaccaa$ ,  $\varepsilon$ ,  $bbbb$  eta  $ccbbb$  hitzak  $L_{30}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $bacbcc$  hitza ez da  $L_{30}$  lengoiaikoa  $b$  denak ez daudelako elkarren ondoan.

$$L_{30} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |v| = |v|_b \wedge |w|_b = |v| \wedge w = uvx)\}$$

31.  $L_{31}$  –  $a$ -ren agerpen bakoitzaren jarraian gutxienez bi  $b$  dituzten hitzez osatutako  $L_{31}$  lengoiaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $bcbbcabb$ ,  $abbbabbabb$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{31}$  lengoiaikoak dira baina  $baaa$ ,  $ab$  eta  $aaccc$  ez.

$$L_{31} = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k ((1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = a) \rightarrow (k \leq |w| - 2 \wedge w(k+1) = b \wedge w(k+2) = b))\}$$

32.  $L_{32}$  – Gutxienez  $a$  bat eta  $c$  bat dituzten hitzez osatutako lengoiaia. Adibidez,  $ca$ ,  $aabbbbbaabc$  eta  $ccccaa$  hitzak  $L_{32}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $baaa$ ,  $bb$ ,  $cbbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak ez.

$$L_{32} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \geq 1 \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Beste aukera bat:

$$L_{32} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge (w = uavcx \vee w = ucva x))\}$$

33.  $L_{33}$  –  $ac$  katea edo  $ca$  katea (bietako bat edo biak) gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $ca$ ,  $acabbbccaac$  eta  $acacbaac$  hitzak  $L_{33}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $cbaaa$ ,  $bba$ ,  $cbbab$ ,  $bbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak ez.

$$L_{33} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge (w = uacv \vee w = ucav))\}$$

34.  $L_{34}$  –  $a$  eta  $c$  elkarren jarraian (ez  $ac$  bezala eta ez  $ca$  bezala) ez dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $cbaaa$ ,  $bcba$ ,  $cbbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak  $L_{34}$  lengoiaikoak dira baina  $ca$ ,  $aabbbbaac$  eta  $cccaa$  ez.

$$L_{34} = \overline{L_{33}}$$

35.  $L_{35}$  – Gutxienez 2 elementu dituzten eta hasten diren sinbolo berarekin bukatzen diren hitzez eratutako lengoia. Adibidez,  $aabacba$ ,  $bcbb$ ,  $babb$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{35}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $cbbb$  hitza ez da  $L_{35}$  lengoiaikoa hasierako eta bukaerako sinboloak ez direlako berdinak. Era berean,  $c$  hitza ez da  $L_{35}$  lengoiaikoa ez dituelako gutxienez bi osagai.

$$L_{35} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v, \alpha (v \in A^* \wedge \alpha \in A \wedge w = \alpha v \alpha)\}$$

36.  $L_{36}$  –  $abc$  katea behin edo gehiagotan elkartuz lortzen diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $abcabcabc$ ,  $abc$  eta  $abcabc$  hitzak  $L_{36}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $\varepsilon$ ,  $aba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{36}$  lengoiaikoak.

$$L_{36} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k (k \geq 1 \wedge w = (abc)^k)\}$$

37.  $L_{37}$  –  $abc$  katea zero aldiz edo gehiagotan elkartuz lortzen diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $abcabcabc$ ,  $abc$  eta  $abcabc$  hitzak  $L_{37}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $aba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{37}$  lengoiaikoak.

$$L_{37} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k (k \geq 0 \wedge w = (abc)^k)\}$$

38.  $L_{38}$  – Gutxienez osagai bat,  $c$ -rik ez eta  $a$  eta  $b$ -ren agerpenak ordena horretan tartekatuta dituzten hitzez eratutako lengoia. Beraz,  $L_{38}$  lengoiaiko hitzak  $a$  sinboloaz hasiko dira. Adibidez,  $a$ ,  $ab$ ,  $aba$ ,  $abab$ ,  $ababa$  eta  $ababab$  hitzak  $L_{38}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $\varepsilon$ ,  $b$ ,  $aaba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{38}$  lengoiaikoak.

$$L_{38} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k (k \geq 0 \wedge (w = (ab)^k a \vee w = (ab)^k ab))\}$$

39.  $L_{39}$  – Gutxienez lau osagai eta gainera hirugarren posizioan  $a$  sinboloa duten hitzez eratutako lengoia. Adibidez,  $aaaa$ ,  $ccab$ ,  $cbabbbaac$ ,  $ccabcbaaaa$  eta  $bcaccc$  hitzak  $L_{39}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aa$ ,  $aaa$ ,  $ba$ ,  $aabbca$  eta  $bba$  hitzak ez dira  $L_{39}$  lengoiaikoak.

$$L_{39} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| > 3 \wedge w(3) = a\}$$

40.  $L_{40}$  –  $a$ -z hasi,  $b$ -z bukatu, tartean  $c$  bakarra, hasierako  $a$  eta  $c$  bakarraren artean nahi adina  $b$  (zero edo gehiago) eta  $c$  bakarraren eta bukaerako  $b$ -aren artean nahi adina  $a$  (zero edo gehiago) dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $abbbcaab$ ,  $acb$ ,  $acaaab$  eta  $abbbcb$  hitzak  $L_{40}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $abba$ ,  $\varepsilon$ ,  $abbcaba$ ,  $abbcac$ ,  $acbbb$ ,  $aaa$  eta  $ab$  hitzak ez dira  $L_{40}$  lengoiaikoak.

$$L_{40} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_b \wedge |v| = |v|_a \wedge w = aucvb)\}$$

41.  $L_{41}$  –  $abc$  katea gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $abcaabcaa$ ,  $abc$ ,  $accabcaaac$ ,  $bbbabcb$  eta  $acaaabcaaaa$  hitzak  $L_{41}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $\varepsilon$ ,  $a$  eta  $bacbcc$  hitzak  $L_{41}$  lengoiaikoak dira.

$$L_{41} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v (v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

42.  $L_{42}$  –  $abc$  azpikatea hasieran edo bukaeran (edo bietan) duten hitzez osatutako lengoia.  $abc$  azpikatea leku gehiagotan ere ager daiteke hitzaren erdian. Adibidez,  $abcaaaa$ ,  $abc$ ,  $acaaabc$ ,  $abcbababc$  eta  $abccabcaaaa$  hitzak  $L_{42}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $\varepsilon$ ,  $a$  eta  $bacbcc$  hitzak ez dira  $L_{42}$  lengoiaikoak.

$$L_{42} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v (v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

43.  $L_{43}$  –  $L_{42}$  lengoiaikoak ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_{43} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists v (v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

Beste aukera bat:

$$L_{43} = \overline{L_{42}}$$

44.  $L_{44}$  –  $b$ -rik agertzen bada,  $c$ -rik ez duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $caaaaa$ ,  $aabbba$ ,  $ccc$ ,  $aaaa$ ,  $\varepsilon$ ,  $bbbb$  eta  $acaac$  hitzak  $L_{44}$  lengoiaikoak dira baina  $bacbcc$  hitza ez da  $L_{44}$  lengoiaikoa.

$$L_{44} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_b \geq 1 \rightarrow |w|_c = 0)\}$$

45.  $L_{45}$  – Jarraian zehazten diren baldintzak betetzen dituzten hitzez osatutako lengoia:

- $a$ -z hasiz gero,  $aa$  ez edukitzea azpikate bezala;
- $b$ -z hasiz gero,  $aa$  azpikate bezala edukitzea;
- ez  $a$ -z eta ez  $b$ -z ez hasiz gero, edozein egitura izatea, inolako murrizketarik gabe.

Adibidez,  $acbab$ ,  $bbaaacb$ ,  $ccc$  eta  $abcc$  hitzak  $L_{45}$  lengoiaikoak dira baina  $abaab$  eta  $bbb$  ez dira  $L_{45}$  lengoiaikoak.

$$L_{45} = \{w \mid w \in A^* \wedge ((|w| \geq 1 \wedge w(1) = a \wedge \neg \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uav)) \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) = b \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uav)) \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) = b) \vee (|w| = 0))\}$$

46.  $L_{46}$  –  $ab$  azpikatea kopuru bikoitian duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $a\underline{ab}cc\underline{ab}c$ ,  $a\underline{c}bbbbb$ ,  $ba\underline{a}bc\underline{a}bc$  eta  $cc\underline{ab}cc\underline{ab}cc\underline{ab}$  hitzak  $L_{46}$  lengoiaikoak dira baina  $abc$  eta  $cbabb$  hitzak ez dira  $L_{46}$  lengoiaikoak.

$$L_{46} = \{w \mid w \in A^* \wedge (\mathcal{N}k(1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a \wedge w(k+1) = b) \bmod 2 = 0)\}$$

47.  $L_{47}$  –  $a$ -z hasi eta gero  $c$ -rik ez baina gutxienez bi  $b$  edo  $a$ -z hasi eta gero dena  $c$  duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez  $abb$ ,  $aababa$ ,  $aabaaab$  eta  $acccc$  hitzak  $L_{47}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aabbbcb$ ,  $caacbb$ ,  $cccc$  eta  $bbc$  ez dira  $L_{47}$  lengoiaikoak.

$$L_{47} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v(v \in A^* \wedge ((|v|_c = 0 \wedge |v|_b \geq 2) \vee |v| = |v|_c) \wedge w = av)\}$$

48.  $L_{48}$  – Errepikatutako sinbolorik ez duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $a$ ,  $ca$ ,  $cba$  eta  $\varepsilon$  hitzak  $L_{48}$  lengoiaikoak dira baina  $aabbbcb$ ,  $cccc$ ,  $aab$  eta  $bcbbbb$  hitzak ez dira  $L_{48}$  lengoiaikoak.

$$L_{48} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha(\alpha \in A \wedge |w|_\alpha \geq 2)\}$$

49.  $L_{49}$  – 3ren anizkoitza den luzera duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aac$  eta  $caabbb$  hitzak  $L_{49}$  lengoiaikoak dira baina  $a$ ,  $cc$  eta  $aabb$  ez dira  $L_{49}$  lengoiaikoak.

$$L_{49} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 3 = 0\}$$

50.  $L_{50}$  –  $a$ -z hasi,  $b$ -z bukatu eta 3ren anizkoitza den luzera duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $aab$  eta  $acabbb$  hitzak  $L_{50}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $ccc$  eta  $aabb$  hitzak ez dira  $L_{50}$  lengoiaikoak.

$$L_{50} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 3 = 0 \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = aub)\}$$

51.  $L_{51}$  –  $a$ -z hasi eta  $bc$  katearekin bukatzen diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $aabc$  eta  $acabcccbbc$  hitzak  $L_{51}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $ccc$  eta  $aabb$  ez dira  $L_{51}$  lengoiaikoak.

$$L_{51} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = aubc)\}$$

52.  $L_{52}$  – Lengoia hutsa.

$$L_{52} = \emptyset$$

53.  $L_{53}$  – Lengoia unibertsala.

$$L_{53} = A^*$$

54.  $L_{54}$  – Hitz hutsaz osatutako lengoia.

$$L_{54} = \{\varepsilon\}$$

55.  $L_{55}$  –  $aa$ ,  $bb$  eta  $ac$  hitzez osatutako lengoia.

$$L_{55} = \{aa, bb, ac\}$$

56.  $L_{56} - \varepsilon$ ,  $bbc$  eta  $acc$  hitzez osatutako lengoia.

$$L_{56} = \{\varepsilon, bbc, acc\}$$

57.  $L_{57} - 4$ ko luzera duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{57} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| = 4\}$$

58.  $L_{58} - 4$ ko luzera eta  $a$ -ren agerpen bakarra duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{58} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| = 4 \wedge |w|_a = 1\}$$



### 3.5 Konputazio ez deterministen garapena

$q_0$  hasierako egoera dela suposatuz,  $L_{51}$  lengoaiari dagokion AFED-arentzat honako konputazio hauek garatu urratsez urrats:

1.  $\nu^*(\{q_0\}, abcbc)$
2.  $\nu^*(\{q_0\}, aaaa)$
3.  $\nu^*(\{q_0\}, \varepsilon)$
4.  $\nu^*(\{q_0\}, bcc)$

### 3.6 $\varepsilon$ trantsizioak dituzten Automata Finitu Ez Deterministen ( $\varepsilon$ -AFED-en) diseinua

AFED-en diseinuari dagokion ataleko lengoia denak hartuko ditugu berriro. AFED-en atalean proposatutako automatak aztertu eta  $\varepsilon$  trantsizioak erabiltzeak hobekuntzarik ekarriko al lukeen erabaki. Baiezko kasuan  $\varepsilon$ -AFED-a eman. Kasu interesgarrienak honako hauek dira:  $L_5$ ,  $L_8$ ,  $L_9$ ,  $L_{19}$ ,  $L_{24}$ ,  $L_{25}$ ,  $L_{27}$ ,  $L_{28}$ ,  $L_{30}$ ,  $L_{31}$ ,  $L_{36}$ ,  $L_{37}$ ,  $L_{38}$ ,  $L_{42}$ ,  $L_{44}$ ,  $L_{49}$ ,  $L_{54}$ ,  $L_{55}$  eta  $L_{56}$ . Alfabetoa  $A = \{a, b, c\}$  da:

1.  $L_1$  –  $a$  sinboloaz hasten diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = au)\}$$

2.  $L_2$  –  $a$  sinboloaz hasi eta  $a$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge ((w = a) \vee \exists u(u \in A^* \wedge w = aua))\}$$

3.  $L_3$  –  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = ub)\}$$

4.  $L_4$  –  $a$  sinboloaz hasi eta  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = aub)\}$$

5.  $L_5$  –  $a$  sinboloaz hasi edo  $b$  sinboloaz bukatzen diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge (w = au \vee w = ub))\}$$

6.  $L_6$  –  $a$  sinboloaz hasi,  $b$  sinboloaz bukatu eta gutxienez  $c$  bat duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $acccaaaab$ ,  $aabbcbccbb$ ,  $acb$  eta  $aaccbaccb$  hitzak  $L_6$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $bacbcc$  eta  $bbbb$  ez dira  $L_6$  lengoiaikoak.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 3 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = b \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v(v \in A^* \wedge |v|_c \geq 1 \wedge w = avb)\}$$

7.  $L_7$  –  $a$  sinboloaz hasten ez diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $cabb$ ,  $ccc$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$  eta  $bcbc$  hitzak  $L_7$  lengoiaikoak dira baina  $abbbb$  ez da  $L_7$  lengoiaikoa.

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists v(v \in A^* \wedge w = av)\}$$

8.  $L_8$  –  $b$  sinboloaz bukatzen ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists u(u \in A^* \wedge w = ub)\}$$

9.  $L_9$  –  $a$  sinboloaz hasten diren baina  $b$  sinboloaz bukatzen ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_9 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = au) \wedge \neg \exists v(v \in A^* \wedge w = vb)\}$$

10.  $L_{10}$  –  $aaa$  katea gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{10} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav)\}$$

11.  $L_{11}$  –  $aaa$  katea ez duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{11} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav)\}$$

12.  $L_{12}$  –  $aaa$  eta  $ccc$  azpikateak gutxienez behin dituzten hitzez osatutako lengoia. Hitz bakoitzak azpikate biak izan behar ditu. Hala ere, edozein ordenatan ager daitezke, hau da,  $ccc$  azpikatea  $aaa$  azpikatea baino lehenago ager daiteke. Adibidez,  $cccaaaaa$ ,  $aaabacbcccb$ ,  $acccaaaab$ ,  $ccccbaaabaab$  eta  $accbbaaabcc$  hitzak  $L_{12}$  lengoiaikoak dira baina  $baacbacc$  hitza ez da  $L_{12}$  lengoiaikoa, ez baitu  $aaa$  azpikatea.

$$L_{12} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge (w = uaaavccc x \vee w = ucccvaax))\}$$

13.  $L_{13}$  –  $aaa$  azpikatea bai baina  $ccc$  azpikatea ez duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{13} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaaav) \wedge \neg \exists x, z(x \in A^* \wedge z \in A^* \wedge w = xcccz)\}$$

14.  $L_{14}$  –  $aaa$  katea edo  $ccc$  katea duten hitzez osatutako lengoia. Lengoia honetako hitz bakoitzak gutxienez kate horietako bat gutxienez behin izan behar du. Adibidez,  $cccaaaaa$ ,  $baabcccb$ ,  $acaaab$ ,  $cccc$ ,  $cccbcc$  eta  $aabccccab$  hitzak  $L_{14}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $baacbca$  hitza ez da  $L_{14}$  lengoiaikoa, ez baitu ez  $aaa$  azpikatea eta ez  $ccc$  azpikatea.

$$L_{14} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge (w = uaaav \vee w = uccc v))\}$$

15.  $L_{15}$  – Luzera bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{15} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 2 = 0\}$$

16.  $L_{16}$  – Luzera bakoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{16} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 2 \neq 0\}$$

17.  $L_{17}$  –  $a$  sinboloaren agerpen-kopuru bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{17} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0\}$$

18.  $L_{18}$  –  $b$  eta  $c$  sinboloen agerpenik ez eta  $a$  sinboloaren agerpen-kopuru bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{18} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0\}$$

19.  $L_{19}$  – Honako baldintza hauetatik gutxienez bat betetzen duten hitzez osatutako lengoia:

- $a$  sinboloaren agerpenen kopurua bikoitia da
- $b$ -rik eta  $c$ -rik ez dago.

$$L_{19} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_a \bmod 2 = 0 \vee (|w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0))\}$$

20.  $L_{20}$  –  $a$  sinboloaren agerpen-kopurua bikoitia eta  $b$  sinboloaren agerpen-kopurua ere bikoitia duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{20} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_b \bmod 2 = 0\}$$

21.  $L_{21}$  –  $a$  sinboloaren agerpen-kopurua bikoitia eta  $b$  sinboloaren agerpen-kopurua ere bikoitia ez duten hitzez osatutako lengoia. Gerta daiteke  $a$ -ren agerpen-kopurua edo  $b$ -ren agerpen-kopurua bikoitia izatea baina biak ezin dute bikoitiak izan. Beraz,  $a$ -ren agerpen-kopurua edo  $b$ -ren agerpen-kopurua bakoitia izango da  $L_{21}$  lengoiaiko hitzetan.

$$L_{21} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_a \bmod 2 \neq 0 \vee |w|_b \bmod 2 \neq 0)\}$$

22.  $L_{22}$  – Gutxienez desberdinak diren bi sinbolo dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $aab$ ,  $accccabab$  eta  $ccc bc$  hitzak  $L_{22}$  lengoiaikoak dira baina  $aaa$ ,  $b$  eta  $\varepsilon$  ez.

$$L_{22} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1)\}$$

23.  $L_{23}$  – Desberdinak diren bi sinbolo edo gehiago ez dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaa$ ,  $bbbb$ ,  $c$  eta  $cc$  hitzak  $L_{23}$  lengoiaikoak dira baina  $baaa$  eta  $aacbb$  hitzak ez.

$$L_{23} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1)\}$$

24.  $L_{24}$  – Desberdinak diren bi sinbolo edo gehiago ez dituzten eta gainera luzera bikoitia duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaaa$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{24}$  lengoiaikoak dira baina  $baaa$ ,  $aaa$  eta  $aacbb$  hitzak ez.

$$L_{24} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha, \beta (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1) \wedge |w| \bmod 2 = 0\}$$

25.  $L_{25}$  –  $c$ -rik ez duten eta,  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aaa$ ,  $ab$ ,  $aabb$ ,  $aaaab$  eta  $aaabbb$  hitzak  $L_{25}$  lengoiaikoak dira baina  $ababbb$ ,  $aaacbb$  eta  $bbaa$  hitzak ez dira  $L_{25}$  lengoiaikoak.

$$L_{25} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge w = uv)\}$$

26.  $L_{26}$  –  $c$ -rik ez izatea eta gutxienez  $a$  bat eta  $b$  bat izatea betetzeaz gain,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta  $b$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $ab$ ,  $aabb$ ,  $aabbbb$ , eta  $aaabbb$  hitzak  $L_{26}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aaacbb$ ,  $aaa$ ,  $baaba$  eta  $bbaa$  hitzak ez dira  $L_{26}$  lengoiaikoak.

$$L_{26} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| = |v|_b \wedge |v| \geq 1 \wedge w = uv)\}$$

27.  $L_{27}$  –  $c$ -rik ez duten eta,  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak jarraian (ezkerreko aldean edo eskuineko aldean) eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak jarraian (ezkerreko aldean edo eskuineko aldean) dituzten hitzez osatutako lengoaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aabbbb$ ,  $baaaa$ ,  $bbb$  eta  $aaaa$  hitzak  $L_{27}$  lengoaiakoak dira baina  $aabaa$ ,  $aaacccb$  eta  $abaaa$  hitzak ez dira  $L_{27}$  lengoaiakoak.

$$L_{27} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge (w = uv \vee w = vu))\}$$

28.  $L_{28}$  –  $a$ -rik baldin badago,  $a$ -ren agerpen denak ezkerreko aldean jarraian eta,  $b$ -rik baldin badago,  $b$ -ren agerpen denak erdian jarraian eta  $c$ -rik baldin badago,  $c$ -ren agerpen denak eskuineko aldean jarraian dituzten hitzez osatutako lengoaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $bccc$ ,  $aaaabbccc$ ,  $aabbcccccc$ ,  $aaa$  eta  $aaaacccc$  hitzak  $L_{28}$  lengoaiakoak dira baina  $acabbb$ ,  $aaacbb$ ,  $cccbbaaa$ ,  $ccc$  eta  $bbaaccc$  hitzak ez dira  $L_{28}$  lengoaiakoak.

$$L_{28} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge w = uvx)\}$$

29.  $L_{29}$  – Hasieran gutxienez osagai bat duen eta  $a$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat, gero gutxienez osagai bat duen eta  $b$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat eta bukatzeko gutxienez osagai bat duen eta  $c$  sinboloaren errepikapenez osatuta dagoen kate bat dituzten hitzez eratutako lengoaia. Adibidez,  $aabcc$ ,  $abbbcc$ ,  $abc$ ,  $aaaabbc$  eta  $aabbcc$  hitzak  $L_{29}$  lengoaiakoak dira. Bestalde,  $bc$ ,  $ac$ ,  $\varepsilon$ ,  $aacbbb$ ,  $aaa$ ,  $aaacccc$  eta  $aaabbb$  hitzak ez dira  $L_{29}$  lengoaiakoak.

$$L_{29} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| \geq 1 \wedge |x| \geq 1 \wedge w = uvx)\}$$

30.  $L_{30}$  –  $b$  sinboloa agertzen bada,  $b$ -ren agerpen denak jarraian dituzten hitzez osatutako lengoaia. Adibidez,  $ccaaaa$ ,  $aabbccca$ ,  $ccc$ ,  $bbacaaa$ ,  $\varepsilon$ ,  $bbbb$  eta  $ccbbb$  hitzak  $L_{30}$  lengoaiakoak dira. Aldiz,  $bacbcc$  hitza ez da  $L_{30}$  lengoaiakoa  $b$  denak ez daudelako elkarren ondoan.

$$L_{30} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |v| = |v|_b \wedge |w|_b = |v| \wedge w = uvx)\}$$

31.  $L_{31}$  –  $a$ -ren agerpen bakoitzaren jarraian gutxienez bi  $b$  dituzten hitzez osatutako  $L_{31}$  lengoaia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $bcbcabbb$ ,  $abbbabbabb$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{31}$  lengoaiakoak dira baina  $baaaa$ ,  $ab$  eta  $aacbb$  ez.

$$L_{31} = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = a) \rightarrow (k \leq |w| - 2 \wedge w(k+1) = b \wedge w(k+2) = b))\}$$

32.  $L_{32}$  – Gutxienez  $a$  bat eta  $c$  bat dituzten hitzez osatutako lengoaia. Adibidez,  $ca$ ,  $aabbbbaabc$  eta  $ccccaa$  hitzak  $L_{32}$  lengoaiakoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $baaaa$ ,  $bb$ ,  $cbbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak ez.

$$L_{32} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \geq 1 \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Beste aukera bat:

$$L_{32} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge (w = uavcx \vee w = ucva x))\}$$

33.  $L_{33} - ac$  katea edo  $ca$  katea (bietako bat edo biak) gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $ca$ ,  $acabbbccaac$  eta  $acacccaac$  hitzak  $L_{33}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $cbaaa$ ,  $bba$ ,  $cbbab$ ,  $bbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak ez.

$$L_{33} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge (w = uacv \vee w = ucav))\}$$

34.  $L_{34} - a$  eta  $c$  elkarren jarraian (ez  $ac$  bezala eta ez  $ca$  bezala) ez dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $cbaaa$ ,  $bcba$ ,  $cbbb$ ,  $c$  eta  $aaa$  hitzak  $L_{34}$  lengoiaikoak dira baina  $ca$ ,  $aabbbbaac$  eta  $ccccaa$  ez.

$$L_{34} = \overline{L_{33}}$$

35.  $L_{35} -$  Gutxienez 2 elementu dituzten eta hasten diren sinbolo berarekin bukatzen diren hitzez eratutako lengoia. Adibidez,  $aabacba$ ,  $bcba$ ,  $babb$  eta  $cccc$  hitzak  $L_{35}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $cbbb$  hitza ez da  $L_{35}$  lengoiaikoa hasierako eta bukaerako sinboloak ez direlako berdinak. Era berean,  $c$  hitza ez da  $L_{35}$  lengoiaikoa ez dituelako gutxienez bi osagai.

$$L_{35} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v, \alpha (v \in A^* \wedge \alpha \in A \wedge w = \alpha v \alpha)\}$$

36.  $L_{36} - abc$  katea behin edo gehiagotan elkartuz lortzen diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $abcabcabc$ ,  $abc$  eta  $abcabc$  hitzak  $L_{36}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $\varepsilon$ ,  $aba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{36}$  lengoiaikoak.

$$L_{36} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k (k \geq 1 \wedge w = (abc)^k)\}$$

37.  $L_{37} - abc$  katea zero aldiz edo gehiagotan elkartuz lortzen diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $abcabcabc$ ,  $abc$  eta  $abcabc$  hitzak  $L_{37}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $aba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{37}$  lengoiaikoak.

$$L_{37} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k (k \geq 0 \wedge w = (abc)^k)\}$$

38.  $L_{38} -$  Gutxienez osagai bat,  $c$ -rik ez eta  $a$  eta  $b$ -ren agerpenak ordena horretan tartekatuta dituzten hitzez eratutako lengoia. Beraz,  $L_{38}$  lengoiaiko hitzak  $a$  sinboloaz hasiko dira. Adibidez,  $a$ ,  $ab$ ,  $aba$ ,  $abab$ ,  $ababa$  eta  $ababab$  hitzak  $L_{38}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $\varepsilon$ ,  $b$ ,  $aaba$ ,  $bababa$  eta  $cabc$  hitzak ez dira  $L_{38}$  lengoiaikoak.

$$L_{38} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k (k \geq 0 \wedge (w = (ab)^k a \vee w = (ab)^k ab))\}$$

39.  $L_{39} -$  Gutxienez lau osagai eta gainera hirugarren posizioan  $a$  sinboloa duten hitzez eratutako lengoia. Adibidez,  $aaaa$ ,  $ccab$ ,  $cbabbbaac$ ,  $ccabcbaaaa$  eta  $bcaccc$  hitzak  $L_{39}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aa$ ,  $aaa$ ,  $ba$ ,  $aabbca$  eta  $bba$  hitzak ez dira  $L_{39}$  lengoiaikoak.

$$L_{39} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| > 3 \wedge w(3) = a\}$$

40.  $L_{40}$  –  $a$ -z hasi,  $b$ -z bukatu, tartean  $c$  bakarra, hasierako  $a$  eta  $c$  bakarraren artean nahi adina  $b$  (zero edo gehiago) eta  $c$  bakarraren eta bukaerako  $b$ -aren artean nahi adina  $a$  (zero edo gehiago) dituzten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $abbbcaab$ ,  $acb$ ,  $acaaab$  eta  $abbbcb$  hitzak  $L_{40}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $abba$ ,  $\varepsilon$ ,  $abbcaba$ ,  $abbcac$ ,  $acbbb$ ,  $aaa$  eta  $ab$  hitzak ez dira  $L_{40}$  lengoiaikoak.

$$L_{40} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| = |u|_b \wedge |v| = |v|_a \wedge w = aucvb)\}$$

41.  $L_{41}$  –  $abc$  katea gutxienez behin duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $abcaabcaa$ ,  $abc$ ,  $accabcaabc$ ,  $bbbabcbbb$  eta  $accaaabc$  hitzak  $L_{41}$  lengoiaikoak dira. Bestalde,  $\varepsilon$ ,  $a$  eta  $bacbcc$  hitzak  $L_{41}$  lengoiaikoak dira.

$$L_{41} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v (v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

42.  $L_{42}$  –  $abc$  azpikatea hasieran edo bukaeran (edo bietan) duten hitzez osatutako lengoia.  $abc$  azpikatea leku gehiagotan ere ager daiteke hitzaren erdian. Adibidez,  $abcaaaa$ ,  $abc$ ,  $accaaabc$ ,  $abcbbbabc$  eta  $abccabcaaaa$  hitzak  $L_{42}$  lengoiaikoak dira. Aldiz,  $\varepsilon$ ,  $a$  eta  $bacbcc$  hitzak ez dira  $L_{42}$  lengoiaikoak.

$$L_{42} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v (v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

43.  $L_{43}$  –  $L_{42}$  lengoiaikoak ez diren hitzez osatutako lengoia.

$$L_{43} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists v (v \in A^* \wedge (w = abcv \vee w = vabc))\}$$

Beste aukera bat:

$$L_{43} = \overline{L_{42}}$$

44.  $L_{44}$  –  $b$ -rik agertzen bada,  $c$ -rik ez duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $ccaaaaa$ ,  $aabbbba$ ,  $ccc$ ,  $aaaa$ ,  $\varepsilon$ ,  $bbbb$  eta  $acaac$  hitzak  $L_{44}$  lengoiaikoak dira baina  $bacbcc$  hitza ez da  $L_{44}$  lengoiaiko.

$$L_{44} = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_b \geq 1 \rightarrow |w|_c = 0)\}$$

45.  $L_{45}$  – Jarraian zehazten diren baldintzak betetzen dituzten hitzez osatutako lengoia:

- $a$ -z hasiz gero,  $aa$  ez edukitzea azpikate bezala;
- $b$ -z hasiz gero,  $aa$  azpikate bezala edukitzea;
- ez  $a$ -z eta ez  $b$ -z ez hasiz gero, edozein egitura izatea, inolako murrizketarik gabe.

Adibidez,  $acbab$ ,  $bbaaacb$ ,  $ccc$  eta  $abcc$  hitzak  $L_{45}$  lengoiaikoak dira baina  $abaab$  eta  $bbb$  ez dira  $L_{45}$  lengoiaikoak.

$$\begin{aligned}
L_{45} = \{w \mid w \in A^* \wedge \\
& ((|w| \geq 1 \wedge w(1) = a \wedge \neg \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaav)) \\
& \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) = b \wedge \exists u, v (u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uaav)) \\
& \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) = b) \\
& \vee (|w| = 0))\}
\end{aligned}$$

46.  $L_{46}$  –  $ab$  azpikatea kopuru bikoitian duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $abccabc$ ,  $acbbbbb$ ,  $baabcabc$  eta  $ccabccababccab$  hitzak  $L_{46}$  lengoiaikoak dira baina  $abc$  eta  $cbabb$  hitzak ez dira  $L_{46}$  lengoiaikoak.

$$L_{46} = \{w \mid w \in A^* \wedge (\mathcal{N}k(1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a \wedge w(k+1) = b) \bmod 2 = 0)\}$$

47.  $L_{47}$  –  $a$ -z hasi eta gero  $c$ -rik ez baina gutxienez bi  $b$  edo  $a$ -z hasi eta gero dena  $c$  duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez  $abb$ ,  $aababa$ ,  $aabaaab$  eta  $acccc$  hitzak  $L_{47}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $aabbbcb$ ,  $caacbb$ ,  $cccc$  eta  $bbc$  ez dira  $L_{47}$  lengoiaikoak.

$$L_{47} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists v (v \in A^* \wedge ((|v|_c = 0 \wedge |v|_b \geq 2) \vee |v| = |v|_c) \wedge w = av)\}$$

48.  $L_{48}$  – Errepikatutako sinbolorik ez duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $a$ ,  $ca$ ,  $cba$  eta  $\varepsilon$  hitzak  $L_{48}$  lengoiaikoak dira baina  $aabbbcb$ ,  $cccc$ ,  $aab$  eta  $bbcbbb$  hitzak ez dira  $L_{48}$  lengoiaikoak.

$$L_{48} = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg \exists \alpha (\alpha \in A \wedge |w|_\alpha \geq 2)\}$$

49.  $L_{49}$  – 3ren anizkoitza den luzera duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $\varepsilon$ ,  $aac$  eta  $caabbb$  hitzak  $L_{49}$  lengoiaikoak dira baina  $a$ ,  $cc$  eta  $aabb$  ez dira  $L_{49}$  lengoiaikoak.

$$L_{49} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 3 = 0\}$$

50.  $L_{50}$  –  $a$ -z hasi,  $b$ -z bukatu eta 3ren anizkoitza den luzera duten hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $aab$  eta  $acabbb$  hitzak  $L_{50}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $ccc$  eta  $aabb$  hitzak ez dira  $L_{50}$  lengoiaikoak.

$$L_{50} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 3 = 0 \wedge \exists u (u \in A^* \wedge w = aub)\}$$

51.  $L_{51}$  –  $a$ -z hasi eta  $bc$  katearekin bukatzen diren hitzez osatutako lengoia. Adibidez,  $aabc$  eta  $acabccbbcb$  hitzak  $L_{51}$  lengoiaikoak dira baina  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $ccc$  eta  $aabb$  ez dira  $L_{51}$  lengoiaikoak.

$$L_{51} = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u (u \in A^* \wedge w = aubc)\}$$

52.  $L_{52}$  – Lengoia hutsa.

$$L_{52} = \emptyset$$

53.  $L_{53}$  – Lengoia unibertsala.

$$L_{53} = A^*$$



54.  $L_{54}$  – Hitz hutsaz osatutako lengoia.

$$L_{54} = \{\varepsilon\}$$

55.  $L_{55}$  –  $aa$ ,  $bb$  eta  $ac$  hitzez osatutako lengoia.

$$L_{55} = \{aa, bb, ac\}$$

56.  $L_{56}$  –  $\varepsilon$ ,  $bbc$  eta  $acc$  hitzez osatutako lengoia.

$$L_{56} = \{\varepsilon, bbc, acc\}$$

57.  $L_{57}$  – 4ko luzera duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{57} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| = 4\}$$

58.  $L_{58}$  – 4ko luzera eta  $a$ -ren agerpen bakarra duten hitzez osatutako lengoia.

$$L_{58} = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| = 4 \wedge |w|_a = 1\}$$

### 3.7 $\varepsilon$ trantsizioak dituzten konputazio ez deterministen garapena

$q_0$  hasierako egoera dela suposatuz,  $L_{27}$  lengoaiari dagokion  $\varepsilon$ -AFED-arentzat honako konputazio hauek garatu urratsez urrats:

1.  $\lambda^*(\{q_0\}, aaabb)$
2.  $\lambda^*(\{q_0\}, aaa)$
3.  $\lambda^*(\{q_0\}, \varepsilon)$
4.  $\lambda^*(\{q_0\}, bcc)$
5.  $\lambda^*(\{q_0\}, aba)$