

# Gai 1 Estatistika eta probabilitatearen sarea

## Oinarriko definizioak estatistikarien

**Populazioa:** Astekako estatistikoak helburu den elementu multzoa.

**Unitate estatistikoak edo Alea:** Populazioko elementu bakotza da.

**Laguna:** Populazioko aspimultzoa, & sarritan lagunek hartzen dira esin baitira populazioko ale guztiek astetsu. Lagun-tamaina, laguneko elementu kopurua.

**Ezarreria edo aldagaria:** Populazioko elementuen gainean bildutako informazioa

## Ezarrerakoak Modalitateak. Aldagai estatistikoak

Ezarrerakoak bi multzo nagusitan banatzen dira:

**Kuantitatiboa:** Ezarrerakoak aurkez ditzaketen egoera kentzeliz neurgarriak direnean esaten zaio.

**Diskretua:** Aldagaiak har ditzakeen balioen multzoa finitua ala zerbagarria da.

**Irratza:** Aldagaiak har ditzakeen balioen multzoak gutxienez ( $a, b$ ) itxurako sorte erreala barneratzen du.

**Kualitatiboa:** Ezarrerakoak aurkez ditzaketen egoerak ez benbakiak diren.

## Gai 2. Estatistiken deskribatzeko. Maiztasunaren banaketak eta adierazpen grafikoa

### Maiztasun-taula

de.

Maiztasun-taula ondoren aipatzen diren zutabeetan eraikitzen

denean txikizuetako handienera ordenatuta.  
Ezagunenaren behatokoa bolioak:  $x_1, \dots, x_n$ . Kuantitatiboa

Maiztasun absolutuko:  $n_1, \dots, n_k$ , \*  $n_i: x_i$  bolioari dagokion  
laginello ale kopurua.

Maiztasun absolutuko metatuak:  $N_1, \dots, N_k$

Maiztasun erlatiboa:  $f_1, \dots, f_k$ .

$$f_i = n_i/h$$

Maiztasun erlatibo metatuak:  $F_1, \dots, F_k$

$$F_i = N_i/h$$

### Adibideen

Linux	Linux	Windows	Windows	Windows
Linux	Windows	MacOSX	Windows	Linux
...				

### Maiztasun-taula

	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$
Linux	309	309	0'309	0'309
Windows	84	393	0'084	0'393
MacOSX	607	1000	0'607	0'1

Maistasun-taula sortu aurkezik beharrezkoak balioen tartekatzea  
egokia egokia da egin behar da.

Hurretarakoak sturges-en formula erabiltzen da.

$$n \approx 1 + 3,322 \log_{10} n$$

Anderen Aldagaiaren heine kalkulatuak da,  $x_{\max} - x_{\min}$ . Eta adibidek  
Aldagaiaren heinei tarte kopuruak kenduko zaio,  $n$ .

$$a_i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \log_{10} n}$$

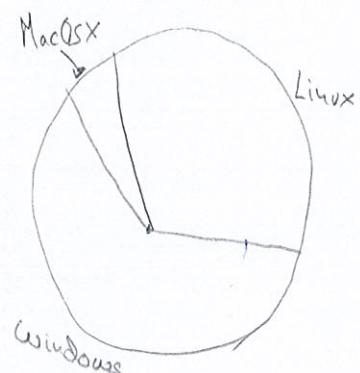
### Adierazpen grafikoak

Sektore-diagrama: Diagrama mota honelikoa sirkulo forman  
du eta aldagaien arteko desberdintasuna sektore balioitzaren azaleran  
istalduen da. Sektore balioitzaren azalera aldagaiaren maistasunaren propor-  
tionala da.

Aldagai kualitatibokoakso soilik dago disribututa.

#### Adibidea

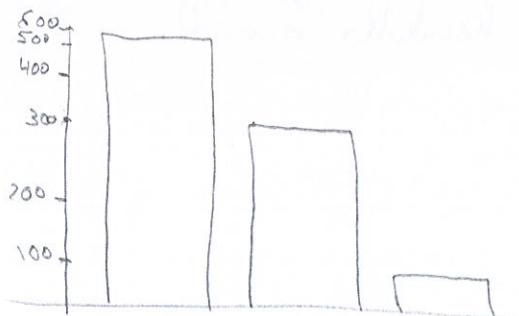
Plataforma	Aske	Sorkuntza
Linux	309	309
MacOSX	84	84
Windows	607	607
$n = 1000$		



Barra-diagrama: Klasu kontuan grafikoa n barre ezean dira, barra bolitzale aldegarri bat desribatuko du. Gainera barren altuera maiztasunaren proporcionala izango da.

Kvantitatiboa distretua edo kuantitatiboaik diren motako aldegarriak soilik deskribatzeko ditu.

### Aurreko adibideari jarriz

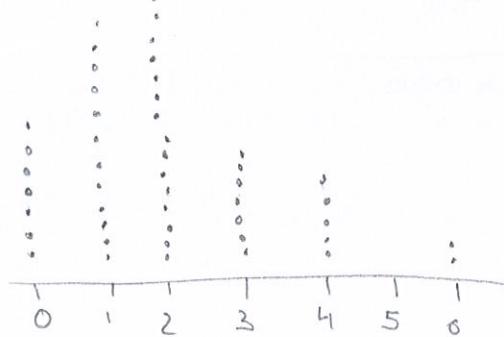


Puntu-diagrama: Klasu kontuan grafikoa ale bakoitzeko erakusten da. Ale bakoitza puntu batetik osdezkatzen du. Ale kopurua trikia denean erabiltzen da.

Desribatzeko dituen aldegarri kuantitatiboaik dira.

### Adibidea

2	1	1	1	0	3	1	3	1
2	2	0	4	0	1	2	2	0
3	3	1	0	2	3	2	6	3
4	4	2	6	2	3	3	4	2
5	4	2	1	2	0	2	2	1
6	1	2	2	0	2	2	1	0



Barra-diagrama metatua: Diagrama mota honetan, altuera Ni-ren proporcionala da.

Deskribabiltako aleen erregatzaia. Kvantitatibo diskreta

Izatea da.

**Adibidea**

Aurrekoari jasai:

Maiztasun-taula

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
0	7	0'14	7	0'14
1	12	0'24	19	0'38
2	17	0'34	36	0'72
3	7	0'14	43	0'86
4	5	0'10	48	0'96
5	0	0	48	0'96
6	2	0'04	50	1



Zortean da kostoa grafikoa: Diagrama mota hori berezia da, zabalikak sailkatzen hamartzenen gunea. Ibaiko puntutak eklerorago kaltetzen da, horrela ezer aldau zabaldu txikizki gelditzen diren eta eskuin aldean zeinetu alegia denek zabalieraino kosten direnek.

**Adibidea**

16'3	24'5	31'7	42'6	48'8
116				
215				
312				
4139				

Histograma: Bi histograma nola dade:

Tarte berdinak histograma: Hau da, Berria balioitzaren zabalera bestetik gertuenak zabalera bere arte. Eta haren azalera maiztasunorakillo proporcionala da.

Tarte ezberdinak histograma: Barra balioitzak zabalera desberdinak izan dezake baina haren azalera maiztasunaren proporcionala izango da.

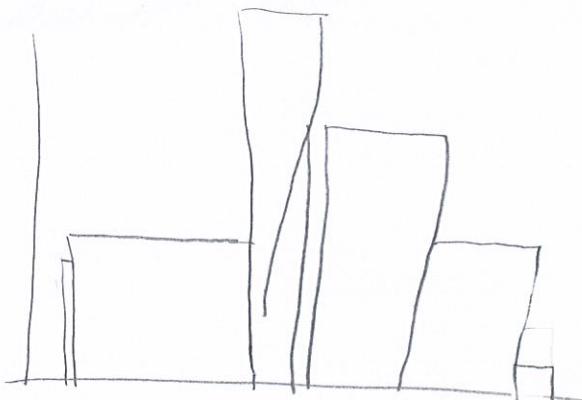
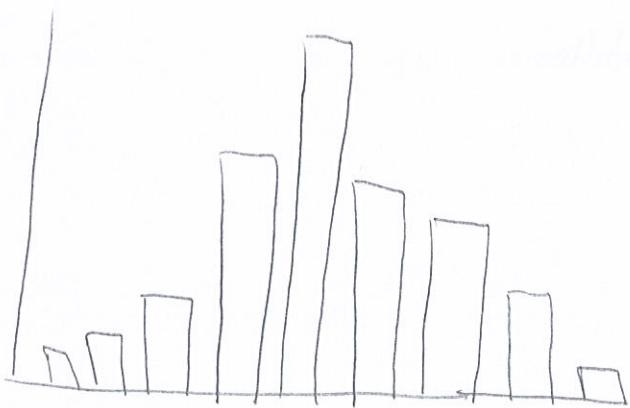
TBH

Iraudi zide	$n_i$	$n_i/ai$
[0, 20)	1	0'05
[20, 40)	2	0'1
[40, 60)	6	0'3
[60, 80)	19	0'95
[80, 100)	30	1'5
[100, 120)	18	0'9
[120, 140)	15	0'75
[140, 160)	8	0'4
[160, 180)	1	0'05

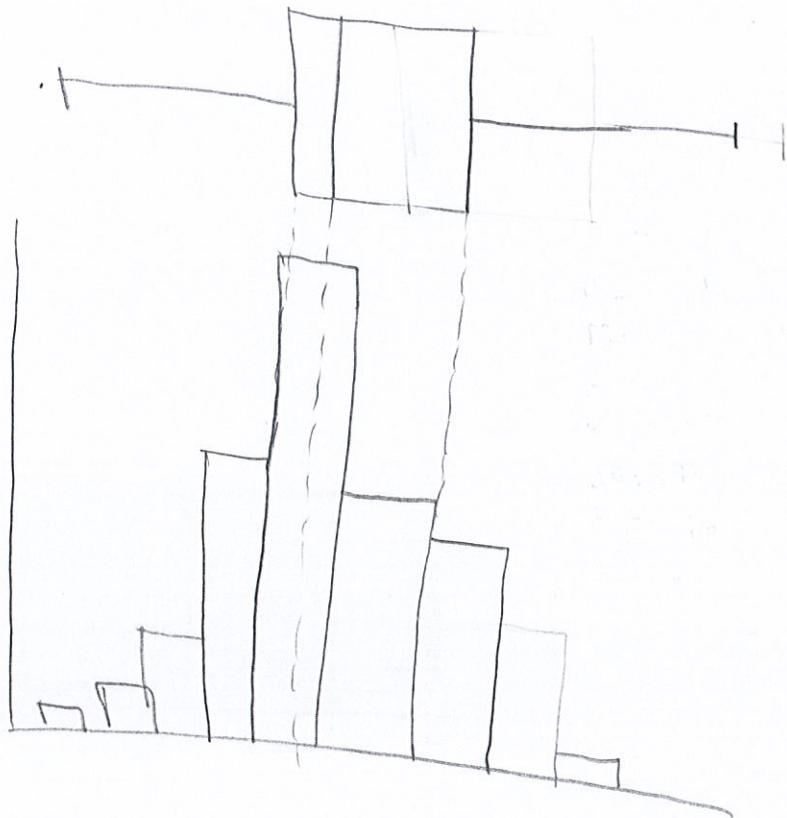
ICH

Iraudi zide	$n_i$	$n_i/ai$
[63, 195)	1	0'21
[195, 284)	24	0'41
[284, 918)	25	0'87
[918, 1178)	25	0'96
[1178, 1658)	24	0'5
[1658, 1702)	1	0'09

$$\text{Dentsitatea} = f_i/ai = n_i/ai \cdot x_n$$



Kotxa-diagramma: Kotxa-diagramma, Kotxa itxarollo  
gradiakoa da, non Kotxaren tartekide esartzen dituen non dagoen  
aldagai gehien.





## 1. Gaia

### Estatistikak eta Probabilitatea

#### Ariketa

##### 1. Ariketa

Populazioa: UPV/EHU-ko irakasle guztiak

a) Astekaritzaileen % erregatzen  
ber irakasten duten.

Doktoreak, Katedratiboa, Lizentziatuak  
Sexua (G: gizonezkoak, E: emakumezkoak)

Iralasten duten jatorriak

Iralasteko gai diren hizkuntzaak.

Astean sartzen duten ordu kopuru.

b) Lagan bat erabiliko da.

c) Qualitatiboa  
Kualitatiboa  
Kualitatiboa  
Kualitatiboa  
Kualitatiboa  
Kualitatiboa  
Kuantitatiboa diskretua

d) Medialitate eoberdin asko  
Doktoreak, Katedratiboa, Lizentziatuak  
Gizonezkoak, Emakumezkoak  
Jatorriak  
Euskera, Gasteizera, Iruñera, Donostia.  
Ondur.

## 2. Ariketan

a)

Populazioa: Makinak hilabetean erortzitako piezak  
Ezangarririk diametria

Laguna (Bango de aterketa mota)

Aldega Balleurrekoole

## 2. Gaiak

Solana

### Estatistika Des Unibetarileen

#### Arilletak

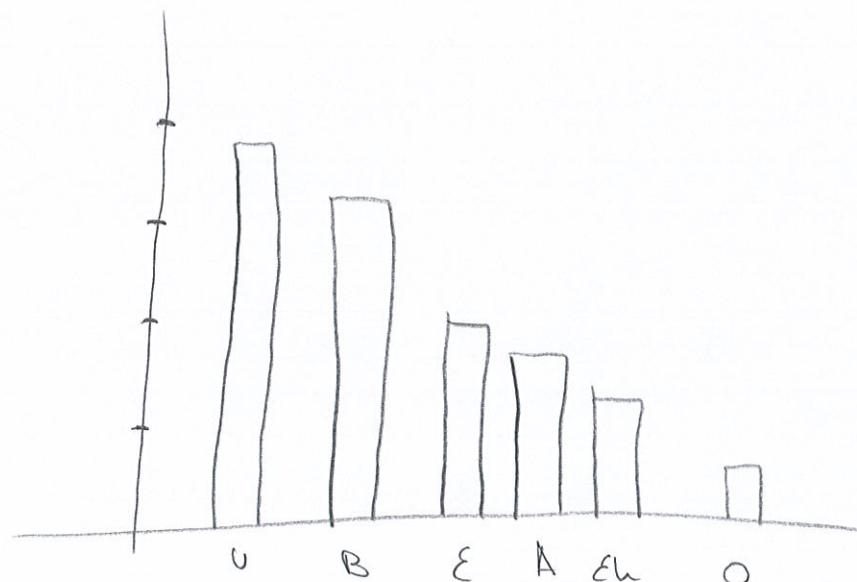
##### 1. Arilletak

Untzaintza	19660
Burdungintza	12090
Etxetresna deltrikode	11320
Altzairuale	10091
Ehungintza	7668
Oinetabalogintza	3205

#### Platua

##### Maiskason - taula

	X <sub>i</sub>	n <sub>i</sub>	N <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>
Untzaintza	19660	19660	0'283	0'282	
Burdungintza	12090	36750	0'246	0'529	
Etxetresna deltikode	11320	48020	0'163	0'691	
Altzairuale	10091	58161	0'1451	0'836	
Ehungintza	7668	65829	0'11	0'947	
Oinetabalogintza	3205	69534	0'05	1	



## 2. Arithmetik

	$h_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$
[50, 57)	2	2	0'25	0'25
[57, 64)	12	14	0'15	0'175
[64, 71)	10	24	0'125	0'2
[71, 78)	33	57	0'4125	0'6125
[78, 85)	6	63	0'625	0'62
[85, 92)	11	24	0'1325	0'7525
[92, 99)	6	80	0'025	1

### 3. Gaia

#### Joera zentrala, Sallabana-pen

Eta posizio estatistikoak

Datuak ezaugarririk bat erabili behar dituzte lehurrik eta  
du estatistikoak.

Bein "erdiko" balorren inguruan kokatzen den ezaugarririk  
jakin nahi badira, joera zentrala hau hau da. Ordea, Balio  
horren inguruan oso kontzentratutako edo sallabaturakoak dauden  
ezaugarririk berriak ilustekoa. Sallabana-penak jo behar da. Eta azkenik,  
Posizio jakin betetzen kokatzen diren ezaugarririk erabiltz informazio  
berezi eskeintzen digute, horri Posizio estatistikoak derilatze.

#### Joera zentralako estatistikoak

Bi edoira aztertuko ditugunek:

Batezbesteko aritmetikoa.

Mediana

Definizioa: Lagunen neurkun X aldegi estatistikoaren  
batezbesteko aritmetikoa, ( $\bar{x}$ ) horrela definitzen da.

Datuak elkarluta badauden

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i$$

Elikarreko gabelek datuak badira,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i$$

Adibidea

2	2	1	2	3	1	4	1	1
0	0	1	1	1	1	2	3	0
3	1	4	0	1	3	2	2	1
1	3	2	6	1	2	2	1	2

Maiatasun-taula

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N$ :	$F_i$
0	4	0'1	4	0'1
1	17	0'825	21	0'525
2	10	0'25	31	0'775
3	6	0'15	37	0'925
4	2	0'05	39	0'975
5	0	0	39	0'975
6	1	0'025	40	1

Beterebesteko aritmetikoa

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = 0 + 17 + 20 + 15 + 8 + 0 + 6 = \frac{68}{40} = \underline{\underline{1'75}}$$

Propietatea. Izen bited,  $x_1, \dots, x_k$  laguneko behioak eta  $n_1, \dots, n_k$  maiatasun absolutuak orduna.

$$\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

Definizioa. Lagunen beldurako balioak era garelerrean ordenatu ondoren, laguna bi zati berdinaketa batuetan duen aldegeizari mediana deritao.

Mediana kalkuletako metodoak:

Dena gun  $x_1, \dots, x_n$  balioak ditugule.  
Txikizunetako handiakera ordenatu.  
n balioetako bade, lagunko  $\frac{n}{2} + 1$  gerren posizioan dagoen balioa izango da mediana.  
n bilboetako bade  $\frac{n}{2}$  eta  $\frac{n}{2} + 1$  posizioen erdiak balaia da mediana.

Dena gun ez ditugule den gordinde,  
Mediana zein hortetan dagoen zehatz  $\frac{n}{2}$  zein karrabeten.  $Me \in [l_i, l_{i+1})$

$$\text{Baloia, } Me = l_i + \frac{\frac{n}{2} + N_{i-1}}{n_i} a_i$$

Adibidea

$[l_i, l_{i+1})$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i$	$a_i$	$Me = l_i + \frac{\frac{n}{2} + N_{i-1}}{n_i} a_i =$
$[60, 120)$	2	2	0'674	0'024	90	60	$= 120 + \frac{13'5 - 2}{18} \cdot 60 =$
$[120, 180)$	16	18	0'593	0'667	150	60	$= 163'125$
$[180, 240)$	5	23	0'85	0'852	210	60	
$[240, 300)$	2	25	0'024	0'926	270	60	
$[300, 360)$	0	25	0	0'926	330	60	
$[360, 420)$	2	22	0'074	1	390	60	

## Posizio Estatistiko

Bakoile txikienekile handienak ordenatu ondoren  
Laguneko aleen posizio estatistikoak dute estatistikoak hartze.

Definizioa. Aleen pertzentilak edukerruntz osten duen  
aldegezienen balioari kuartile deritzo.

Kuartile desberdinak definitzen dira.

Definizioa. Laguna 4 zati berdinak banatzen dituen kuartile  
Urbilek deritzo.

$Q_1$ , Lagunaren %25 edukerruntz da.

$Q_2$ , Lagunaren %50 edukerruntz da,  $Q_2 = \text{Me}$

$Q_3$ , Lagunaren %75 edukerruntz da.

Definizioa. Laguna 10 zati berdinak banatzen dituen  
aldegezienen balioei deibile esaten zaie.

$D_i$ , i. deibile lagunaren %10.i zatiak do edukerrak.  
 $D_5 = \text{Me}$ .

Definizioa. Lagunaren 100 zati berdinak egiten dituen  
aldegezienen balioei pertzentile deritzo.

$P_i$ , i. pertzentilde laguneko %i zatiak do,  $i=1, \dots, 99$ .

$P_{50} = \text{Me}$ .

## Sakabepen estatistika

Datvele addikuntzariak es dudenean, leu de, dende konzentratuta dudenean, edozen 'sakabepen estatistikoaren' baliok Oizango de. Sakabepene zenbat eta handiegosoa izan orduna da baliu handiegosoa horribil du sakabepen estatistikoak.

Definizioa. Izaan bedi  $x_1, \dots, x_n$  lagina. Laginaren heine ( $R$ ) honela definitzen da:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Definizioa. Izaan bedi  $x_1, \dots, x_n$ , lagina. Laginaren horteko arteko heine ( $RI$ ):

$$RI = Q_3 - Q_1$$

Definizioa laginaren nerburibilla aldegarri estatistikoaren lagin-berrientza honela definitzen da.

Datudek elkarrik baldauz,  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2$

Datudek elkarri gabe bedeude,

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Hesiberientzia ore erabiltoen de askotan,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{edo} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Definizioa. Laginean neurturikoa aldegeiearen desbideratze estandarra lantzen definitzen da:

$$S_n = \sqrt{s_n^2}$$

Definizioa. Laginean neurturikoa aldegeiearen aldekontza koefizientea:

$$CV = \frac{S_n}{|\bar{x}|}$$

### Batezbesteloa eta desbideratze estandarra

Desbideratze estandarrak, datuen batezbestelloaren kalkulu zentratibarreko sarreran dawten esaten digu. Ondorengo formula erakusten daiteke.

$(\bar{x} - k \cdot S_n, \bar{x} + k \cdot S_n)$  non geltzen lagunen %  $(1 - 1/k^2) \cdot 100$  barneatzan den da  $k \geq 2$ .

### Adibidea

Etxebario denboraren batezbesteloa  $\bar{x} = 33'2$  eta desbideratze estandarra  $S_n = 3.0$ . Ber informazio ematen digute?

Dena gure  $k=2$  delen orduan  $(33'2 - 2 \cdot 3, 33'2 + 2 \cdot 3) = (27'2, 39'2)$  eta  $(1 - 1/2^2) = 0'75$  bada. Esan nahi du geltzen jota 75% a egongo dela 27'2 baino beherago edo 39'2 goitik

Hori txerixek-en desberdintza esaten zaio

Txerixek-en desberdintza. Izan bedi  $x_1, \dots, x_n$  logune.

Danagun  $\bar{u} \geq 2$  eta Logune bi multsoetan banatu,  $A_1 = \{i : |x_i - \bar{x}| > \bar{u} \cdot s_n\}$  eta  $A_2 = \{i : |x_i - \bar{x}| \leq \bar{u} \cdot s_n\}$ . Orduna,  $A_1$ en maiztasun erlatiboa,  $f(A_1) \leq 1/k^2$  da.

Frogearen.

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i \in A_1} (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i \in A_2} (x_i - \bar{x})^2 = \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i \in A_1} (x_i - \bar{x})^2. \end{aligned}$$

Orduna,

$$\begin{aligned} S_n^2 &\geq \frac{1}{n} \sum_{i \in A_1} (x_i - \bar{x})^2 \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i \in A_1} u^2 s_n^2 \\ &= \frac{1}{n} S_n^2 u^2 n(A_1) \\ &= S_n^2 u^2 f(A_1), \end{aligned}$$

$n(A_1)$  eta  $f(A_1)$ ,  $A_1$ en maiztasun absolutua da erlatiboa izanik horrenaz hurren.

Berez frogetu nahi zean beraile,  $f(A_1) \leq 1/k^2$  eta berriak idilli,  
 $f(A_2) \geq 1 - 1/k^2$

Erregelak empirikoa. Datiak hanpera itxura bedute.

%68a batezbestekotile gehienetik desbideratze estander  
batzen da. Hau da,  $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$  tartean laginaren %68a barneratzen  
da.

%95a batezbestekotile gehienetik 2 desbideratze estander.  
 $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$  tartean laginaren %95a barneratzen da.

Ia lagin osoa 3 desbideratze estanderretara.  $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$   
tartean ia lagin osoa barneratzen da.

### 3. Gaia

#### Estatistilicke Deskriptoritila

##### 1. Arilesta

110 ikkaste

a)  $110 \cdot 0'21 = 23'1$  ondarioz 1'65 inguru egingo  
da 21. pertentile.

$$110 \cdot 0'82 = 95'2 \quad 1'90$$

$$110 \cdot 0'30 = 33$$

$$110 \cdot 0'9 = 99$$

- b)
- 3. pertentilell. 1'5a izangoz del altzera maximoa
  - c) 82. pertentilell 1'9tik gorakoak.
  - d) 80. pertentilan.

##### 2. Arilesta

35 agurutan jasotakoak

a)

$$\text{Batezbesteloa: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = 100$$

$$\text{Mediana: } M_e = 0.$$

0	0	0	00	00
0	0	0	00	00
0	0	00	0	100 100
100	100	100	200	200
200	300	300	300	400 1000

b)

$$\text{Itene: } R = 1000 - 0 = 1000$$

$$\text{Urestile bakoizte leine: } RI = Q_3 - Q_1 = 200 - 0 = 200$$

$$\text{Lagun-berantza: } S_n^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \\ = \frac{1}{n} \sum (x_i^2 - \bar{x}^2) = 54252$$

$$\text{Desbideratze-estandarrak: } S_n = \sqrt{S_n^2} = 234$$

$$\text{Aldakuntza koefizienta: } S = \frac{S_n}{|\bar{x}|} = 234$$

#### 4. Ariketak

a)

$$z_i = x_i + b \text{ baldin bada, orduan } \hat{z} = \bar{x} + b$$

$$z_i = x_i + b \Rightarrow \sum z_i = \sum x_i + b \Rightarrow \frac{1}{n} \sum z_i = \frac{1}{n} (\sum x_i + b) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{z} = \bar{x} + \frac{n \cdot b}{n} \Rightarrow \hat{z} = \bar{x} + b$$

b)

$$z_i = ax_i + b \text{ baldin bada, orduan } \hat{z} = a\bar{x} + b$$

$$z_i = ax_i + b \Rightarrow \frac{1}{n} \sum z_i = \frac{1}{n} \sum ax_i + b \Rightarrow \hat{z} = \frac{1}{n} \sum ax_i + \frac{1}{n} \sum b \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{z} = \frac{a}{n} \sum x_i + \frac{n \cdot b}{n} \Rightarrow \hat{z} = a\bar{x} + b$$

c)

$$z_i = x_i + y_i \text{ baldin bada, orduan } \hat{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$z_i = x_i + y_i \Rightarrow \frac{1}{n} \sum z_i = \frac{1}{n} \sum (x_i + y_i) \Rightarrow \hat{z} = \frac{1}{n} \sum x_i + \frac{1}{n} \sum y_i \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

d)

$$z_i = ax_i + by_i \text{ baldin bada, orduan } \hat{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$$

$$z_i = ax_i + by_i \Rightarrow \frac{1}{n} \sum z_i = \frac{1}{n} \sum (ax_i + by_i) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{z} = \frac{1}{n} \sum ax_i + \frac{1}{n} \sum by_i \Rightarrow \hat{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$$

## 5. Anleitungen

Punktzählung	Thasle-Kopurw	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[15, 20)	2	35	612,5
[20, 25)	8	180	4050
[25, 30)	13	352,5	9831,25
[30, 35)	7	227,5	7393,25
[35, 40)	6	225	8437,5
[40, 45)	3	122,5	5418,25
[45, 50)	1	47,5	225,25
	40	1200	

a) personelle Befestigungsanstrengungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \frac{1}{40} \cdot 1200 = 30$$

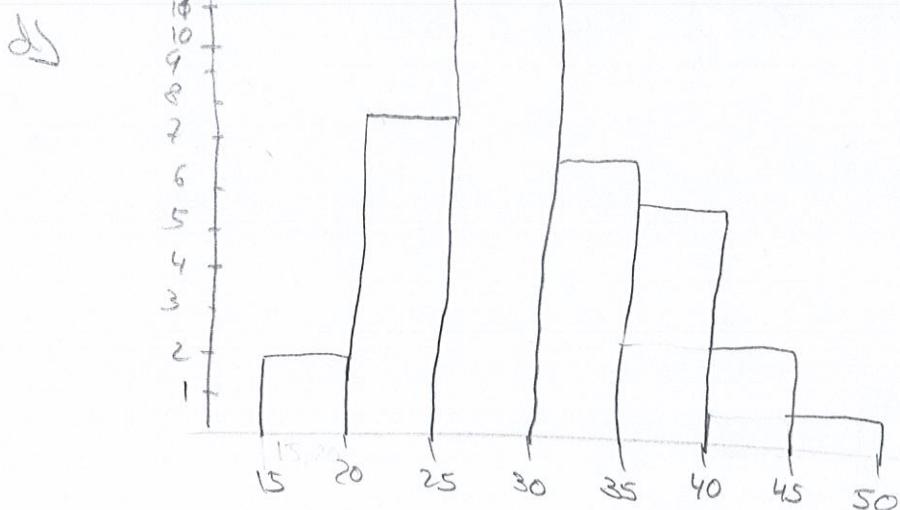
b)  $Q_3 = 40 \cdot 0,25 = 30 \Rightarrow 35$  punktbare Störungswert

c) Desiderierte-standart

$$\text{Varianz: } S_n^2 = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \cdot (38000 - 30^2) =$$

Desiderierte-standart:  $S_n = \sqrt{S_n^2} = \sqrt{50} = 20,2$

$$\text{Desiderierte-standart: } S_n = \sqrt{S_n^2} = \sqrt{50} = 20,2$$



## 6. Arithmetik

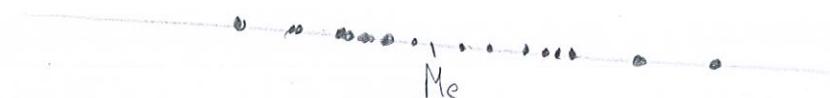
0'736 0'863 0'865 0'913 0'915 0'937 0'983 1'002  
1'011 1'064 1'109 1'132 1'140 1'153 1'253 1'394

a) Lagemeren beteabestelhoe eta medianaren baikoa.

$$\text{Beteabestelhoe: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{16} \cdot 16'475 = 1'023$$

$$\text{Median: } M_e = \frac{1'011 + 1'002}{2} = 1'009$$

b) Punktu-diagramma



## 7. Arithmetik

$$n = 10$$

Lösungen:

$$\begin{matrix} S & S & F & S & S & S & F & F & S & S \end{matrix}$$

a)

$$\hat{P} = \frac{?}{10} = 0,2$$

b)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} \cdot 2 = 0,2$$

c)

$$\hat{P} = \frac{s}{25} = 0,8 \Rightarrow s = 20$$

## 8. Arithmetik

14,5 25,6 52,4 66,3 69,3 69,8, 86,2

a) Ratenzbesteck der Mediane

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{7} \cdot 374,1 = 53,44$$

$$M_e = \frac{66,3 + 52,4}{2} = 59,35$$

b)

Lösung - Variante der Messvariante

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7} 3494,98 = 499,3$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} 3494,98 = 582,5$$

## 9. Ariketa

### 10. Ariketa

125 langileen soldadue

7 langileen  $\bar{x} = 250$ ,  $s_x = 30$  1200 eta  $\bar{x} = 88$ ,  $s_x = 180$

Batezbesteko soldatu.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum n_i \cdot x_i = \frac{1}{125} \cdot 210150 = 16812$$

## 11. Ariketa

150 ikaskle

$$\bar{x} = 2'9 \quad s_x = 2'2$$

$$\bar{y} = 6'9 \quad s_y = 20$$

a) Salcbancen etlatiboa.

$$CV = \frac{s_x}{\bar{x}} = 0'28$$

$$CV = \frac{s_y}{\bar{y}} = 0'289$$

Analisi Matematikoa  
Lendicosa da.

## 2. Gaia, Arribalzaga

### 3. Arribalzaga

$$n = 400$$

Bebabesteho

larvula  
(ordutan)

babule  
kopuru.

a)

799 izango da 5. klasearen goitlo mugaz.

b)

1000 da 8. klasearen beheko mugaz.

c)

Klase marka:  $x_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2} = \frac{1000 + 1400}{2} = 1050$

d)

Klasean Babalera: urteko kopuru:  $u = 9$

Aldakoenak berria:  $H = 1199 - 300 = 899$

Klaseen Babalera:  $100 = \frac{Heina}{u}$

e)

Laugearen - Klasearen maiztasun absolutua:

$$n_i = 26$$

f)

Seiagaren - Klasearen maiztasun etebiboa

$$f_i = \frac{n_i}{n} = \frac{26}{400} = 0.065$$

g) 600 baimo iraupen baikicagos bolbulc portzentasie

Bolbulc klopuruc = 118

$$\text{Portzentasie} = \frac{118}{400} = 0'295$$

h)

900 edo gelincos iraupen duten bolbulc portzentasie

Bolbulc klopuruc = 76

$$\text{Portzentasie} = \frac{76}{400} = 0'19$$

i)

$500 \leq x < 1000$

Bolbulc klopuruc = 312

$$P = \frac{312}{900} = 0'34$$

#### 4. Arillete

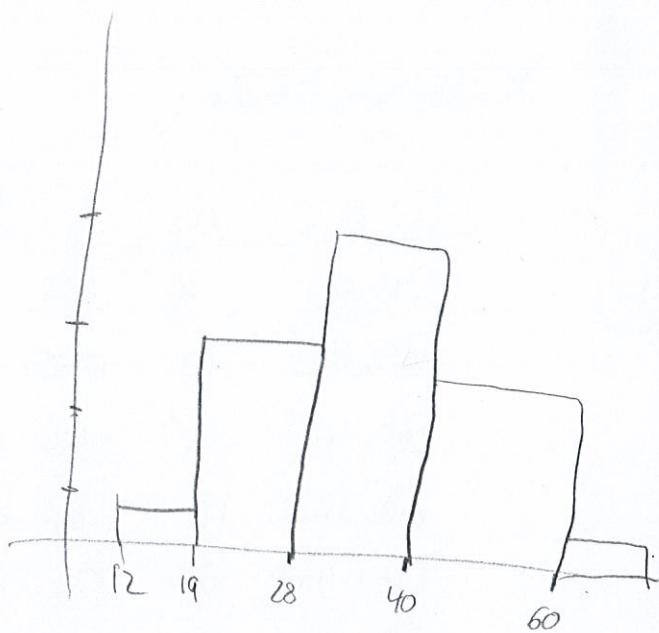
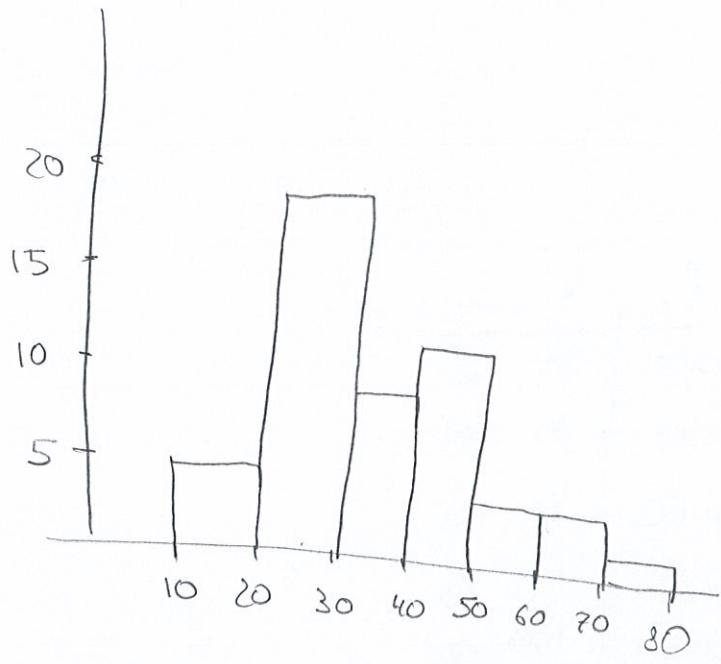
$$n = 57$$

$$U = l + 3'322 \log_{10} 57 = 683 \Rightarrow U = 2$$

$$\text{Heine} = x_{\max} - x_{\min} = 79 - 12 = 67$$

$$\text{tarbeen zabolerc} = \frac{67}{2} = 10$$

$[l_i, l_{i+1})$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i$	$a_i$
$[10, 20)$	5	5	0'0877	0'0877	15	10
$[20, 30)$	19	24	0'33	0'42	25	10
$[30, 40)$	10	34	0'175	0'596	35	10
$[40, 50)$	13	47	0'22	0'8245	45	10
$[50, 60)$	40	51	0'07	0'895	55	10
$[60, 70)$	40	55	0'07	0'964	65	10
$[70, 80)$	5	57	0'035	1	75	10



Dichte:  $f_i/n_i$

$[x_i, x_{i+1}]$	$n_i$
[12, 19]	4
[19, 28]	15
[28, 40]	20
[40, 60]	14
[60, 68]	4

### 5. Arithmetik

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$
1	4	0.08	4
2	4	0.08	4
3	8	0.16	8
4	7	0.14	16
5	5	0.1	28
6	10	0.2	28
7	7	0.14	38
8	5	0.1	45
			50

## S-Anteile

Massenanteile:

$[l_i, l_{i+1})$	$n_i$	$Si$	$Ni$	$Fe$	$x_i$	$a_i$
$[40, 60)$	9	0'05	9	0'05	50	20
$[60, 80)$	10	0'055	19	0'105	70	20
$[80, 100)$	16	0'688	35	0'193	90	20
$[100, 120)$	11	0'061	46	0'254	110	20
$[120, 140)$	60	0'33	106	0'584	130	20
$[140, 160)$	34	0'188	140	0'762	150	20
$[160, 180)$	23	0'27	163	0'889	170	20
$[180, 200)$	10	0'055	173	0'934	190	20
$[200, 220)$	6	0'63	179	0'967	210	20
$[220, 240)$	1	0'0055	180	1	230	20

b)

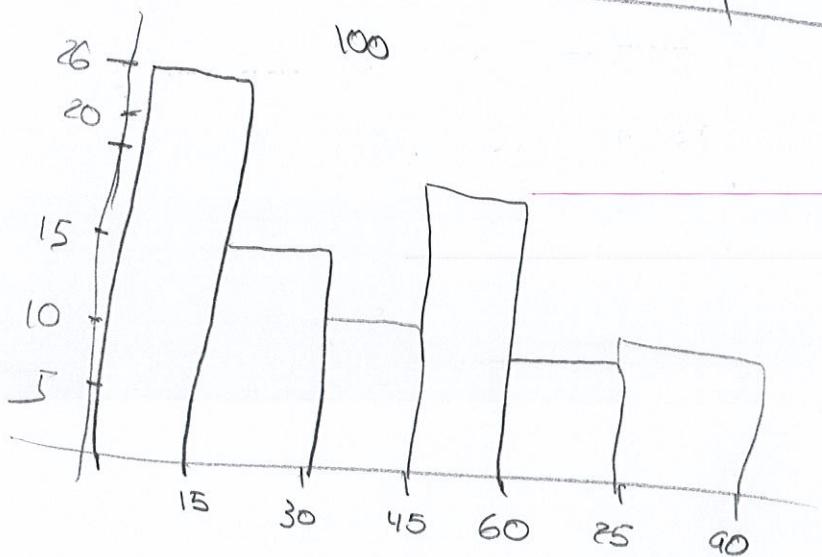
Massenanteile:

$[l_i, l_{i+1})$	$n_i$	$Si$	$Ni$	$Fe$	$x_i$	$a_i$
$[45'5, 125'5)$	0'375	0'825				
$[125'5, 145'5)$	3'0	3'825				
$[145'5, 185'5)$	1'5	4'825				
$[185'5, 225'5)$	0'25	5'625				

9. Antelesza

a)

$(L_i, l_{i+1})$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$	$x_i$	$a_i$
$[0, 15)$	26	0'26	26	0'26	8	15
$(15, 30)$	16	0'16	42	0'42	225	15
$(30, 45)$	13	0'13	55	0'55	375	15
$(45, 60)$	21	0'21	76	0'86	525	15
$(60, 75)$	18	0'11	87	0'87	675	15
$(75, 90)$	13	0'13	100	1	825	15





# 15. Arithmetik

a)

$$\bar{x}_n \text{ ist } x_{n+1}$$

$$\bar{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{n+1} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{n\bar{x}_n} + x_{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} (n\bar{x}_n + x_{n+1})$$

b)

$$(n+1) s_{n+1}^2 = n s_n^2 + \frac{n}{n+1} (\bar{x}_n - x_{n+1})^2$$

$$\begin{aligned}
 (n+1) s_{n+1}^2 &= (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - (n+1)\bar{x}_{n+1})^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2 - \frac{1}{n+1} (n\bar{x}_n + x_{n+1})^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2 - \frac{1}{n+1} (n^2 \bar{x}_n^2 + 2n\bar{x}_n x_{n+1} + x_{n+1}^2) = \\
 &= n s_n^2 + n \bar{x}_n^2 + x_{n+1}^2 - \frac{1}{n+1} (n^2 \bar{x}_n^2 + 2n\bar{x}_n x_{n+1} + x_{n+1}^2) = \\
 &= n s_n^2 + \frac{n(n+1)x_n^2 + (n+1)(x_{n+1})^2 - n^2 \bar{x}_n^2 - 2n\bar{x}_n x_{n+1} - x_{n+1}^2}{n+1} = \\
 &= n s_n^2 + \frac{1}{n+1} (n(n+1)x_n^2 + (n+1)(x_{n+1})^2 - n^2 \bar{x}_n^2 - 2n\bar{x}_n x_{n+1} - x_{n+1}^2) = \\
 &= n s_n^2 + \frac{1}{n+1} (n^2 \cancel{x}_n^2 + n x_n^2 + n x_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 - \cancel{n^2 x}_n^2 - 2n\bar{x}_n + x_{n+1} - x_{n+1}^2) = \\
 &= n s_n^2 + \frac{1}{n+1} (n x_n^2 + n x_{n+1}^2 - 2n\bar{x}_n + x_{n+1}) = \\
 &= n s_n^2 + \frac{n}{n+1} (\bar{x}_n - x_{n+1})^2
 \end{aligned}$$



⑧

Ardetako 2

$$n = 20$$

21 22 28 30 32 35 39 42 48 49  
 55 56 60 62 63 66 73 76 89 215

a)

Izena centralakoa estatistika: Batezbesteko aritmetikoa eta Mediana dira.

Batezbesteko aritmetikoa:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x = \frac{1}{n} \cdot 1166 = \frac{1166}{20} = 58,3 //$$

Mediana:

Bilboitik denez erdiko bi zenbatikoa, hau da, 49 eta 55-en erdiko puntuak:

$$\text{Me} = \frac{49+55}{2} = 52 //$$

Datuen datuak ordenatzeko estatistiko onena batezbesteko aritmetikoa (ango da, hobero definituen biak muturreko behiak zehatza dira).

b)

$[l_i, l_{i+1})$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i$	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
$[20, 40)$	7	7	0'35	0'35	30	210	6300
$(40, 60)$	5	12	0'25	0'60	50	250	12500
$[60, 80)$	6	18	0'3	0'90	70	420	29400
$[80, 220)$	2	20	0'1	1	200	400	80000
					20	1080	128200



Gaiak 4

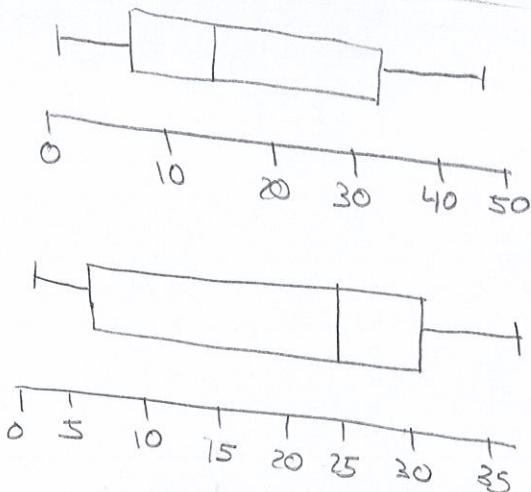
## Bi dimentsioako banaketak.

Definizioa. Demagun X eta Y aldegeien arteko erlazioa astekarri nahi dela. X-ren balioak X-ren balioen arabera astekarri nahi beharreux, X aldegei asko ikango da eta Y menpekoa. Eta Yn X bezale idatzi.

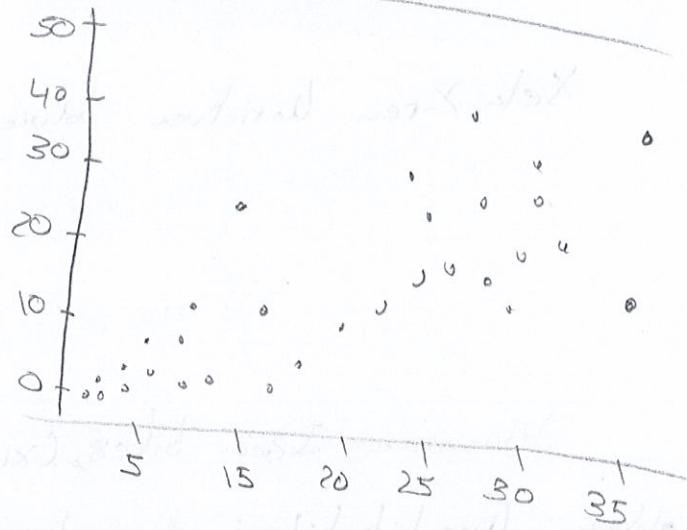
## Bi aldegei kuantitatiboren arteko erlazioa

Ondoren, erlazioa grafikoki aztertuko da. Helburua erlazioa astertzeko grafiko egokia easterlu batera dira, Eguzki izaniko, lotura dagoen edo ez ilusi debaldegu.

A grafikoa



B grafikoa



Ileusi daiteldeken beheko & grafikorekin egin da X eta Y-ren arteko erlazioa astekarri. Baina B grafikorekin bai, Yn X erlazioa astertzeko diagramei Salabanearen - diagrame esaten zaio.

Erlazio estatistikoaren bidez aztertzeleko kobarientea eta  
 Korrelazioa erabiltzen da. Ondoren, erlazio edo erlazio esan neurtzeleko  
 estatistikoak nola neurtzen den. Aldeak lau koordenaten beretako  
 disk.  $(\bar{x}, \bar{y})$  grabitate-zentruan kokatu ondoren jatorria. Eta  $x_i - \bar{x}$  eta  
 $y_i - \bar{y}$  aztertuko ditugu.

**Definizioa.** Izen bitez,  $(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n$ , X eta Y aldegi  
 kuantitatibode.

$$S_{xx} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

X-ren karratuaren batura.

$$S_{xx} = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i x_i)^2$$

Y-ren karratuaren batura.

$$S_{yy} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i y_i)^2$$

X eta Y-ren karratuaren batura

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \\ &= \sum_i x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_i x_i \sum_i y_i \end{aligned}$$

**Definizioa.** Izen bitez,  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ , X eta Y, bi  
 aldegi kuantitatibori dagozkien neurtetako X eta Yren arteko  
Korrelazio Koefizientea:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_i (y_i - \bar{y})^2]^{1/2}}$$

Propietatea. Izan beteak  $X$  eta  $Y$  bi aldagai kuantitatiboa eta  $r_{XY}$  dagoen Korrelazio. Koefizientea.

$$-1 \leq r_{XY} \leq 1.$$

de.

Bi aldagai kuantitatiboren arteko erlazio neurketa

Sentsoa. Baldin  $r \approx 1$ , aldagaien artean erlazio zuzena da.

Baldin  $r \approx -1$ , aldagaien artean erlazio negatibo da.

Baldin  $r \approx 0$  ez da ergo erlazioa.

### Eregresio ziburu, harrizko txikienen metodoa

Zati horretan Aldagaien arteko erlazioa deskribatzeko  
duen zuzena biltzukoa da.

Denegun  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  balioak beharreko direla. Ordurako  
zuzenei bilatu nahi da,  $x_i$  balioa emandik  $b_0 + b_1 x_i$  zuzeneko  
 $y_i$  balioa ahalik eta korribilak batera du. Orduraz,  $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$   
zuzenei  $X$  eta  $Y$  erregresio zuzena deritzo

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^n e_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 \end{aligned}$$

Lineario txikien metodoak erlantzten duen erregresio-idea:

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

#### 4. Gaia: Bi dimentsiotako landetako

Aritmetikoa

10

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 156$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 2110$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 10,10 \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 9,98$$

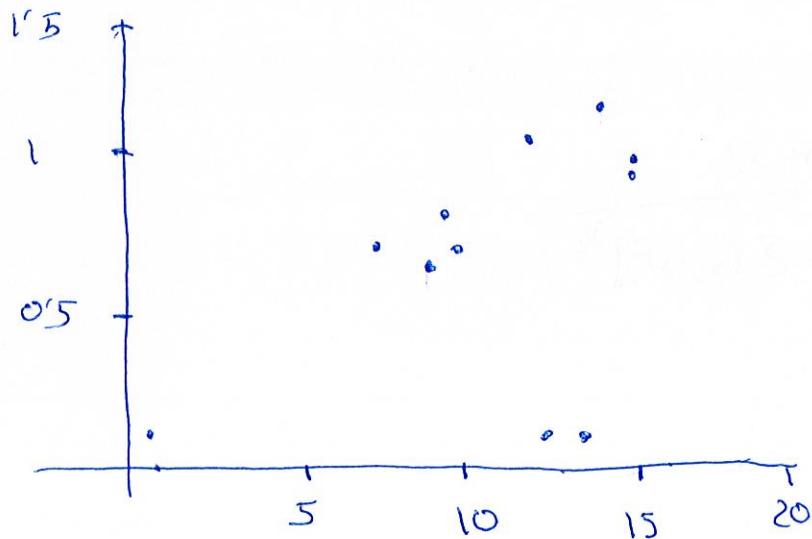
$$\sum_{i=1}^{13} x_i y_i = 133,4$$

$$= \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i}{[\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2] \cdot [\sum y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{133,4 - \frac{1}{13}(156 \cdot 10,10)}{[2110 - \frac{1}{13}(156)^2] \cdot [9,98 - \frac{1}{13}(10,10)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{122}{22,48} = \boxed{0,54}$$

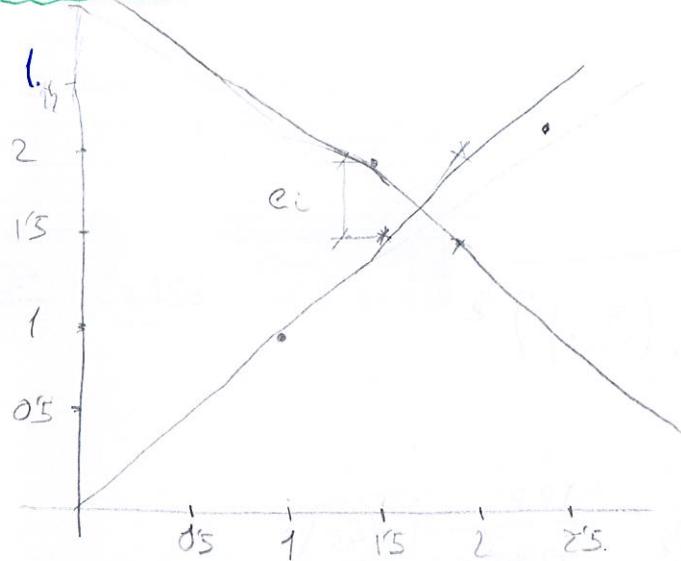
Korrelazio-koeffiziente positiboa da eta razon denak auz d  
izango erlazio linealik.

x	16	16	16	9	1	8	10	16	14	13	13	15	9
y	1'2	1'2	1'0	0'8	0'1	0'8	0'8	1'0	0'1	0'1	0'1	1'2	0'2



65. opgave

### Salutidet



1. Brude

$(x_i, y_i)$	$\hat{y}^1$	$e_i$	$e_i^2$
(1, 1)	1	0	0
(2, 1'4)	2	$1'4 - 2 = 0'6$	0'36
(1'5, 1'9)	1'5	$1'9 - 1'5 = 0'4$	0'16
(2'5, 2'1)	2'5	$2'1 - 2'5 = -0'4$	0'16

$0'68 + e_i^2 = 0'68$   
betræk

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = 0'68$$

2. Brude

$(x_i, y_i)$	$\hat{y}^2$	$e_i$	$e_i^2$
(1, 1)	2'25	$1 - 2'25 = -1'25$	1'56
(2, 1'4)	1'5	$1'4 - 1'5 = -0'1$	0'01
(1'5, 1'9)	1'825	$1'9 - 1'825 = 0'025$	0'0025
(2'5, 2'1)	1'925	$2'1 - 1'925 = 0'075$	0'051

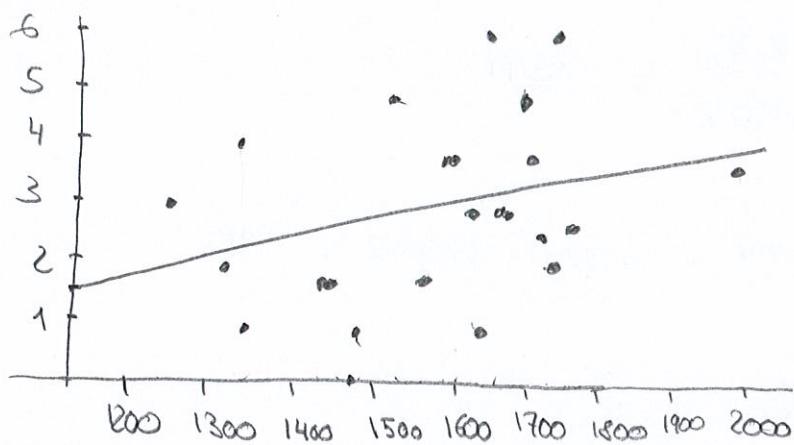
$$2'52$$

$$y^1 = 0 + 1x \quad x=1 \quad y^1=1$$

$$y^2 = 3 - 0'75x \quad x=1 \quad y^2=2'25$$

#### 4. Anleiter

a)



Ematen du  $x$  eta  $y$  aldagaiaren eta  $y$  aldagaiaren arteko erlazioa zuzena dela.

b)

$$S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i = 117591 - \frac{1}{25} \cdot 36562 \cdot 76 = 117591 - 111148.48 = \frac{644252}{24} = 26844$$

c)

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{644252}{\sqrt{(5913624 - 5342193.76) \cdot (288 - 23164)}} = \\ &= \frac{644252}{\sqrt{569280 \cdot 5696}} = \frac{644252}{120062} = 0.36 \end{aligned}$$

d)

62

$$b_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{6442'52}{5692430'24} = 0'0011$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 304 - 0'0011 \cdot 1462'48 = 1'43$$

$$\hat{y}_a = 1'43 + 0'0011 \cdot x$$

e)  
 $x=1800$

$$\hat{y} = 1'43 + 0'0011 \cdot 1800 \sim 3'41 \text{ aldič cron'lo d.}$$

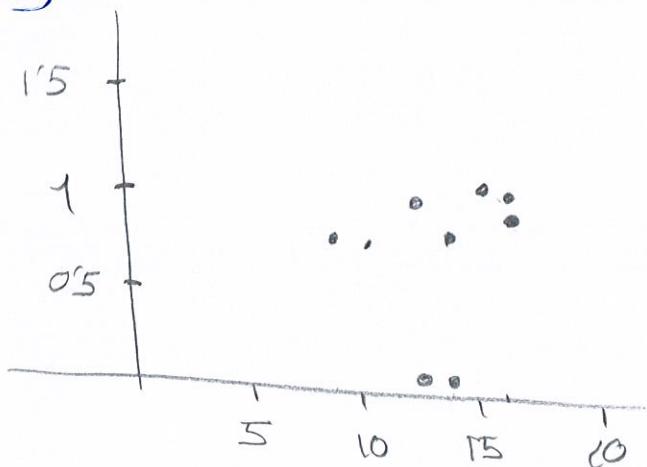
10. Arbeit

$$\sum x_i = 156 \quad \sum x_i^2 = 211000$$

$$\sum y_i = 10.10 \quad \sum y_i^2 = 997$$

$$\sum x_i y_i = 133'4$$

a)



b)

Horizontale Koefizienten:

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2]^{1/2}} = \\
 &= \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i}{[\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2] [\sum y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2]^{1/2}} = \\
 &= \frac{1334 - \frac{1}{13} 156 \cdot 1010}{\left[2110 - \frac{156^2}{13}\right] \left[1992 - \frac{1010^2}{13}\right]^{1/2}} = \\
 &= \frac{122}{[238 \cdot 212]^{1/2}} = \frac{122}{2247} = 0.54
 \end{aligned}$$

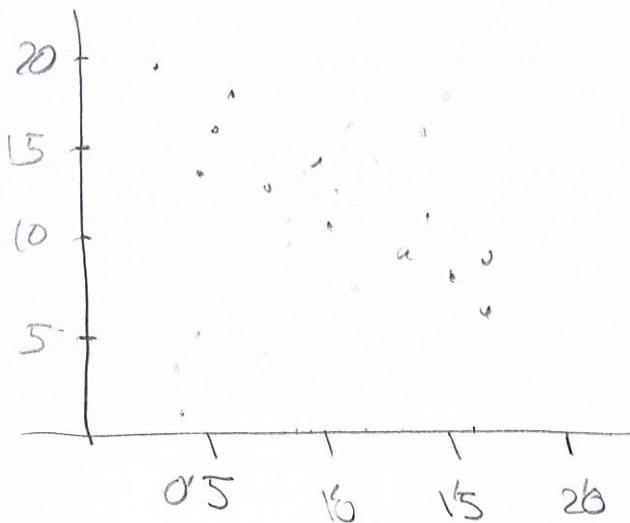
$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = \frac{122}{238} = 0.5$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = \frac{1010}{13} - 0.5 \cdot \frac{156}{13} = 0.18$$

$$\hat{y} = 0.18 + 0.5x$$

## H. Architektur

a)



Erstellen Sie die entsprechenden statistischen Tabelle und darüber hinaus eine Arbeit.

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{[(\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2)(\sum y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum y_i)^2)]}} = \frac{31086}{\sqrt{149323.2088}}$$

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i = \\ &= 1775 - \frac{139 \cdot 158}{15} = \\ &= 31086 \end{aligned}$$

$$s_{xx} = 1503 - \frac{139}{15} = 1493.23$$

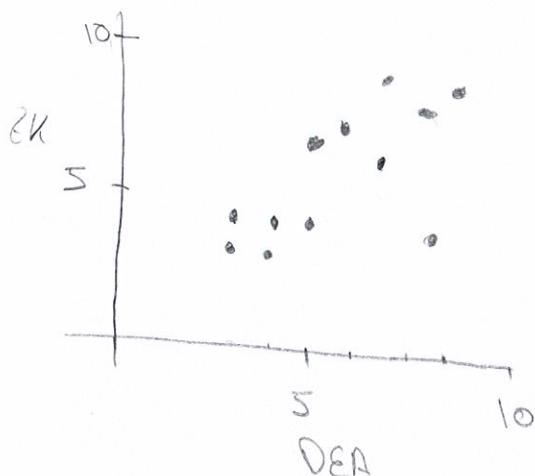
$$s_{yy} = 2192 - 105 = 2086$$

4. Gaia, Arithmetik

①

a) 17 klasser i datavet bildar linje,  $n=17$ 

b)



Korrelationズwenz doggela diudi selbstanopen - grafiken i ete parataen  
bedooy.

d)

Vektoren = Vektorialter:

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right] = \\ = \frac{1}{n-1} \left[ 760 - \frac{1}{n} [99 \cdot 119] \right] = \frac{1}{n-1} \left[ 760 - 893 \right] = \frac{62}{17-1} = 4'19$$

c) Korrelations-Koeffizienten

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{62}{\sqrt{[99 - \frac{1}{17}(119)] \cdot [2882 - \frac{1}{17}(119)^2]}} =$$

$$\bar{x}^2 = 629$$

$$\bar{x} = 99$$

$$\bar{y}^2 = 2382$$

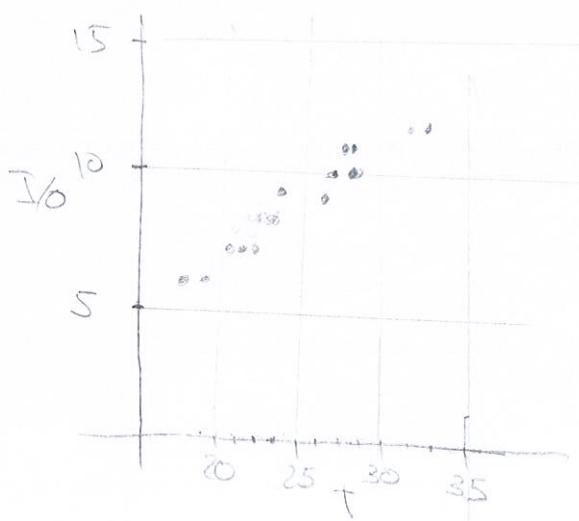
$$= \frac{62}{\sqrt{52'42 \cdot 1554}} = \frac{62}{28555} = 0'235$$

$$\bar{y} = 119$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 760$$

②

a)



c)

Koefizienten

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i \right] =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[ 44182 - \frac{90160}{25} \right] = -48$$

$$\sum x_i y_i = 44182$$

$$\sum x_i = 490$$

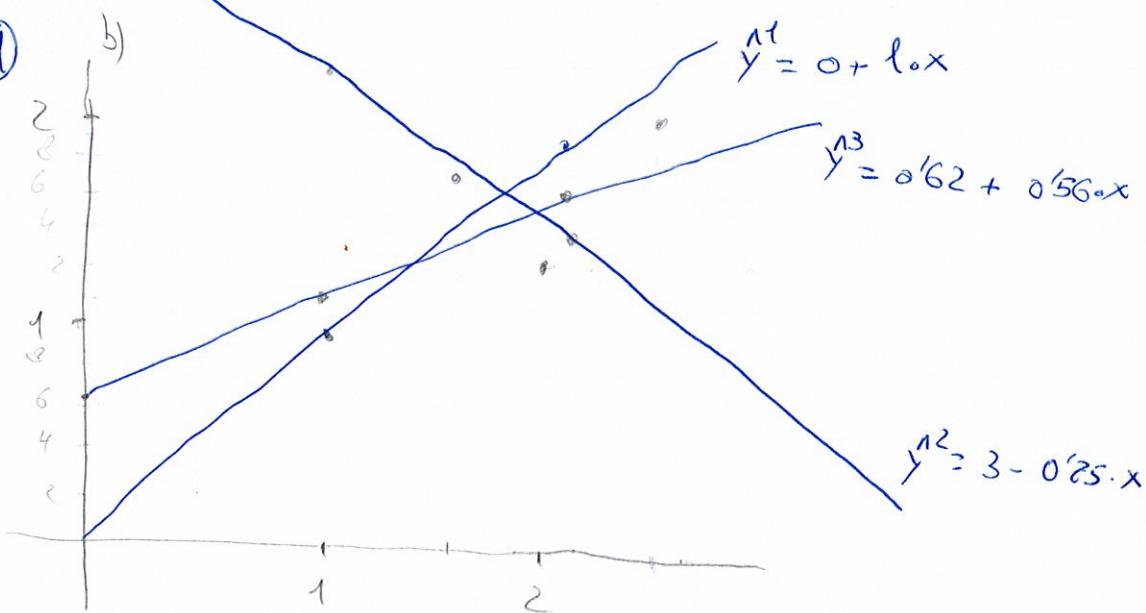
$$\sum y_i = 184$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[ \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]}} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} [\sum x_i \cdot \sum y_i]}{\sqrt{\left[ \sum x_i^2 - \frac{1}{n} [\sum x_i]^2 \cdot \sum y_i^2 - \frac{1}{n} [\sum y_i]^2 \right]}}$$

65. orriaddele

Arribatell &

① b)



a) II

Argi do go  $\hat{y}^3$  izango dela zudenik egokiene, bi puntu bere gaino aldatzeko osoen ditu eta beste biak behetik. Era argi do go  $\hat{y}^2$  eta dela egokiak izango, x eta y zudeneko erlazioa dutele ikuspegiak da.

c)

$(x_i, y_i)$	$\hat{y}_i^1$	$e_i$	$e_i^2$
(1, 0, 1.0)	1	$1 - 1 = 0$	0
(2, 0, 1.4)	2	$2 - 1.4 = 0.6$	0.36
(1.5, 1.9)	1.5	$1.9 - 1.5 = 0.4$	0.16
(2.5, 2.1)	2.5	$2.1 - 2.5 = -0.4$	0.16
			0.68

$(x_i, y_i)$	$\hat{y}_i^2$	$e_i$	$e_i^2$
(1.0, 1.0)	2.25	$1 - 2.25 = -1.25$	1.56
(2.0, 1.4)	1.5	$1.4 - 1.5 = -0.1$	0.01
(1.5, 1.9)	1.825	$1.9 - 1.825 = 0.075$	0.005625
(2.5, 2.1)	1.125	$2.1 - 1.125 = 0.975$	0.950625
			2.52

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x$$

$$G(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^4 e_i^2 = \sum_{i=1}^4 (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^4 (y_i - (b_0 + b_1 \cdot x_i))^2$$



#### 14. Arbeit

a)

$$y_i = x_i - \bar{x}$$

note Vergleich  $s_{nx}^2$  etc  $s_{ny}^2$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow s_{ny}^2 = s_{nx}^2$$

b)

$$z_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{s_{nx}} \Rightarrow z_i \cdot s_{nx} = x_i - \bar{x}$$

$$\hookrightarrow z_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sqrt{s_{nx}^2}} \Rightarrow z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}} =$$

$$\frac{1}{n} \sum (z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{n} \sum z_i^2 = \frac{1}{n} \sum \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s_{nx}} \right)^2 = \frac{1}{n s_{nx}^2} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{1}{n} \sum z_i = \frac{1}{n} \sum \frac{x_i - \bar{x}}{s_{nx}} = 0$$

## 12. Arithmetik

•  $109 \cdot 1011 \cdot 108$

$$G = \sqrt[3]{109 \cdot 1011 \cdot 108} = 10597$$

$$G = (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$$

~~•~~ Bales bestellba =  $80 \cdot 10597$

## B. Arithmetik

(a)

$y_i = ax_i + b$  eta  $\bar{x}$  ren arteko erlazioak?

$$\begin{aligned} y_i = ax_i + b &\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ax_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b \Rightarrow \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \underbrace{\frac{a}{n} \sum_{i=1}^n ax_i}_{\bar{x}} + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b \end{aligned}$$

$y_i = ax_i + b$   $s_x^2$  eta  $s_y^2$  ren arteko erlazioak?

$$\begin{aligned} y_i = ax_i + b &\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - (a\bar{x} + b))^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i - a\bar{x})^2 \Rightarrow s_y^2 = a^2 s_x^2 \end{aligned}$$

b)

$$\bar{x} = 87.3^\circ C$$

$$SD(x) = 104$$

$$\bar{F} = \frac{9}{5}\bar{C} + 32 \Rightarrow \bar{F} = 189.14$$

$$SD(F) = \sqrt{35} = 18.22$$

1. Gaia: Sarreca

Estadística

Aitzol Elv

2023/24

Artezian:

1. Eusko Herri guztiko oinean eskolari buruzko iritsie bildu nahi da eskolaren balorazio bat egiteko. Baina hori ezin da lehendik Gipuzkoako, Bizkaiko eta Arabako pare bat eskolako hainbat oine hartu dira.

2.

A eranskinetako galderak:

1. galdera: Kuantitatiboa eta diskretua jarautua

2. galdera: Kualitatiboa

3. galdera: Kuantitatiboa eta jarautua

4. galdera: Kualitatiboa

5. galdera: Kualitatiboa

6. galdera: Kuantitatiboa eta diskretua jarautua

7. galdera: Kuantitatiboa eta pasaitua kualitatiboa

8. galdera: Kuantitatiboa eta 12

9. galdera: Kuantitatiboa

10. galdera: Kuantitatiboa

Argi ditzun orain

Kuantitatiboa jarautua eta diskretuaren arteko diferenzia?

## 11. Arithmetik

6 1	$\rightarrow 6'1$
8 45	$\Rightarrow 8'4, 8'5$
9 39	$\Rightarrow 9'3, 9'9$
10 0666	$\Rightarrow 10, 10'6, 10'6, 10'6$
11 9	$\Rightarrow 11'9$
12 012	$\Rightarrow 12, 12'1, 12'2$
13 08	$\Rightarrow 13, 13'8$

- n Brüllia  
- Quantitatibus

## Ar. Metall.

3.

### Eaugarii metale

Kualitatiboa

Kuantitatibo

### Grafillo egolkia u-ren gaineko oharrerako

Banka diagrama  
Sektoare diagrama

modulatela gutxi

Banka diagrama metadive

Zuztan dahesta grafika  
puntu diagrama.

u-Hopur Brullia

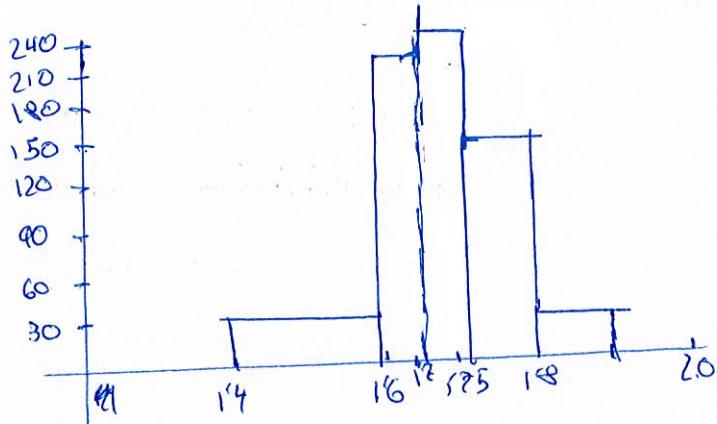
u-Hopur Brullia

Histogramma (jarritu)

Kutxa diagrama

2.

Altura	n i
[1'40, 1'60)	6 30
[1'60, 1'80)	22 220
[1'80, 1'95)	12 240
[1'75, 1'80)	2 40
[1'80, 1'90)	3 30
	$n=50$



## 2. Gaien: Estadística de descripción

Ariketak:

5.

Aitzol Elv

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$
1	4	0'08	4
2	4	0'08	8
3	8	0'16	16
4	7	0'14	23
5	5	0'1	
6	10	0'2	28
7	7	0'14	38
8	5	0'1?	45



?

Nondik horakoa azalten  
esaratu.



# 3. gaia. Aritmetik

Aitzol Elu

2.9. orrialdea.

250	172	180	419,5	148	152	264	177,5
137,5	175	107	399,5	220	134,9	142	134
224,5	142	132	150	215,5	142	194	182,5
61	125	145,5					

1.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i = 180,55 \text{ (Detuak bantatu)}$$

2.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k w_i \cdot x_i = 183,33 \text{ (Detuak elkarbilatuz)}$$

3. Detuak Bantatu sortzen den batezbestelko aritmetikoa eta detuak elkarbilatuz sortzen denea ez da berdinak,  $172,55 \neq 183,33$ .

Hori, detuak elkarbilatuz egiten dugunean, sorte batzuen zentroa login deuden behatzen dira, eta horrekin batezbestelak egiten ~~baitis~~ login lortzen batezbestelak egiten ordetzen. Ondorioz, emaitza desberdinak lortuko dira.



### 3.1 Identitatea fragedu

$$\begin{aligned}
 S_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \cdot n_i = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K (n_i x_i^2 + 2n_i \bar{x} \cdot x_i + n_i \bar{x}^2) = \\
 &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^K n_i x_i^2 - 2 \cdot \bar{x} \underbrace{\sum_{i=1}^K n_i x_i}_{n \cdot \bar{x}} + \bar{x}^2 \underbrace{\sum_{i=1}^K n_i}_{n} \right] = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K n_i x_i^2 - 2 \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K n_i x_i^2 - \bar{x}^2;
 \end{aligned}$$

### Aribitro. 5

40 Ilkale

Puntuación	Ilkale-Vog	$n_i x_i^2$	$n_i x_i$
[15,20)	2	6125	35
[20,25)	8	4050	180
[25,30)	13	9831'25	3575
[30,35)	7	7393'75	2275
[35,40)	6	8437'5	225
[40,45)	3	5418'75	1275
[45,50)	1	2256'25	475

Betriebsergebnisse: 40 38000 1200

$$\bar{x} = 30 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K n_i x_i = \frac{1}{40} 1200 = 30$$

Lagijn-Beriantza:

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{40} 38000 - \left( \frac{1200}{40} \right)^2 = 50 \Rightarrow S_n = \sqrt{50} = 708$$



### 3. Gaia

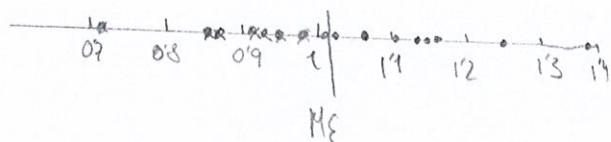
#### Arikkatall

6.

$$a) \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{16475}{16} = 10297$$

$$M_e = 1009 = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = 1009$$

b)



Laginaars neussi hoidine mediaanast arte jaitsi daitche.

### Sallontzaeho

1.

$Q_3 = 1178$  balion kollatsen ja.

$Q_1 = 7795$  balion

$P_{10} = 622$  balion

$P_{90} = 13685$  balion

2.

$[l_i, l_{i+1})$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$	$Q_1$	$n=100$
$[15, 35)$	3	0'03	3	0'03		
$[35, 55)$	4	0'04	7	0'07		
$[55, 75)$	15	0'15	22	0'22	$\frac{n}{4} = 25 \Rightarrow Q_1 \in [25, 95)$	
$[75, 95)$	29	0'29	51	0'51		
$[95, 115)$	20	0'2	71	0'71		
$(115, 135)$	18	0'18	89			
$[135, 155)$	9	0'09	98	0'89	75	95
$[155, 175)$	2	0'02	100	1	$Q_1 = 75 + \frac{3}{29} \times (95 - 75)$	
	100	1				

$$Q_1 = l_i + \frac{N_i - 1}{n_i} (l_{i+1} - l_i)$$

$$P_{90} \in [135, 155]$$

$$P_{90} = 135 + \frac{90-89}{9} (155-135) = 137,2$$

4.

$$\begin{array}{c|cc} x_1 & n_1 & x_1+b = z_1 & n_1 \\ \hline x_2 & n_2 & x_2+b = z_2 & n_2 \\ \hline x_K & n_K & x_K+b = z_K & n_K \\ \hline \bar{z} = \bar{x}+b & & & \end{array}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K z_i \cdot n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K (\bar{x}_i + b) n_i = \frac{1}{n} \left[ \sum (\bar{x}_i n_i + b n_i) \right] =$$

$\boxed{\bar{z}_i = \bar{x}_i + b}$

$$= \frac{1}{n} \left[ \sum x_i n_i + \sum_{i=1}^K b n_i \right] = \bar{x} + \frac{1}{n} b \sum_{i=1}^K n_i = \bar{x} + \frac{nb}{n} = \bar{x} + b$$

6. Arbeitsteilung

Aitbol Elv Etzano

c)

Logarithmische:

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = S_{16}^2 = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^n (x_i - 10297)^2 =$$

$$= \frac{0'407}{16} = \underline{\underline{0'025}}$$

✓

Desbideratse estandare:

$$S_n = \sqrt{S_n^2} = 0'159$$

E& laukia unitateih. X

65. Übungsaufgabe

$$b_0 = 0'62 \quad b_1 = 0'56$$

$$\hat{Y}^3 = 0'62 + 0'56 \cdot x$$

$(x_i, y_i)$	$\hat{y}_i^3$	$e_i$	$e_i^2$
(1, 1)	1'18	-0'18	0'0324
(2, 1'4)	1'28	-0'34	0'1156
(1'5, 1'9)	1'46	+0'44	0'1936
(2'5, 2'1)	2'02	+0'08	0'0064
			0'348

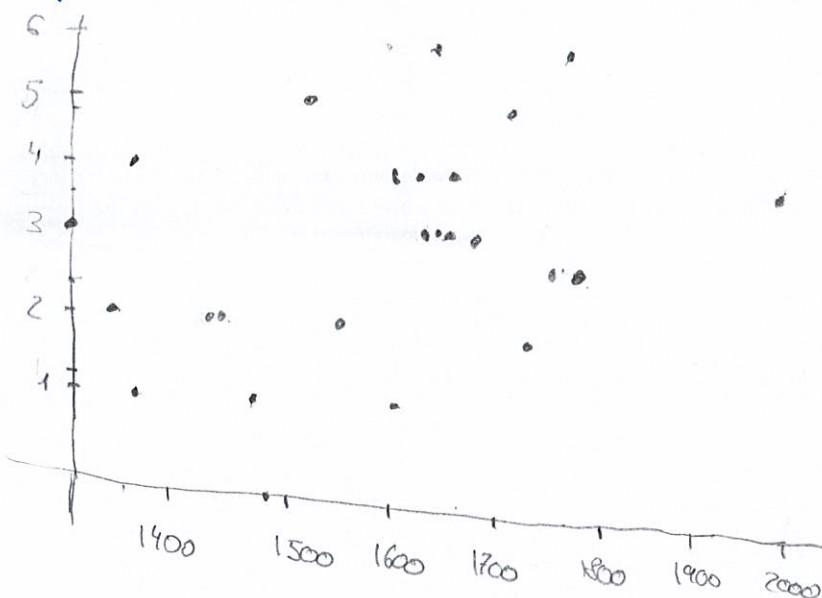
$$\hat{Y} = b_0 + b_1 x$$

$$G(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 \text{ ist absolute Brille}$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

4. gaia. Arithmetik der Orte

5.



$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
1749	3			
1624	6			
1623	3			
1456	2			
1492	0			
1601	4			
2001	4			
1598	4			
1488	1			
1522	5			
1445	2			
1237	3			
1788	3			
1729	2			
1269	6			
1355	1			
1344	4			
1662	3			
1656	3			
1332	2			
1703	5			
1648	3			
1546	2			
1621	1			
1678	4			

(13)

Aitzel Elu Etxano

a)

a eta b konstanteak!

$$y_i = ax_i + b, \quad i = 1, \dots, n$$

$$ax_i = y_i - b \Rightarrow x_i = \frac{y_i - b}{a}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i =$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (ax_i + b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (an_i x_i + b n_i) = \\ &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n an_i x_i + \sum_{i=1}^n b n_i \right] = \frac{1}{n} \left[ a \sum_{i=1}^n n_i x_i + b \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^n n_i \right]}_n \right] = \\ &= \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i + \frac{b}{n} n = a\bar{x} + b \end{aligned}$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

Lagunen barnealdeko arteko erlazioa:

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (y_i - \bar{y})^2 \quad (\text{yekiz ordeakatu}) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i (ax_i + b - a\bar{x} - b)^2 \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i (a^2 x_i^2 - 2a^2 x_i \bar{x} + a^2 \bar{x}^2) \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n n_i (a x_i - a \bar{x})^2 \right) = a^2 s_x^2 \\ s_y^2 &= s_x^2 \cdot a^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$b) \quad \frac{1}{n} a\bar{x} - b = \frac{(a\bar{x} + b) - (a\bar{x})}{n} = \frac{(a\bar{x} + b) - a\bar{x}}{n} = \frac{b}{n}$$

$$873^\circ \quad s_n = 1.04$$

$$873^\circ \cdot \frac{9}{5^\circ} + 32 = 189.14 \text{ Fahrenheit batzuketako}$$

$$\frac{189.14 + 1.04}{873} = 2.25 \text{ desibideak estandarra.}$$

Zergatik??



⑨ Abschätzl., 3. gäbe

$c$  Konstante  $\in \mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_n$  beliebige

$$f(c) = \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2$$

$$\frac{df}{dc} = \sum_{i=1}^n 2(x_i - c)(-1) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - c)$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dc} = 0 ? & \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^n (x_i - c) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n c = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - nc = 0 \Rightarrow c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \end{aligned}$$

(15)

1\*)  $x_1, \dots, x_n \Rightarrow \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

2\*)  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$

b)  $\bar{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{n+1} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{n\bar{x}_n} + x_{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} (n\bar{x}_n + x_{n+1})$  Berab,

$$\begin{aligned} (n+1) s_{n+1}^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - \bar{x}_{n+1})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \frac{1}{n+1} - n\bar{x} - \frac{1}{n+1} x_{n+1})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (x_i^2 - 2x_i \bar{x}_{n+1} + \bar{x}_{n+1}^2) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 2\bar{x}_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i + (n+1) \bar{x}_{n+1}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2 - 2\bar{x}_{n+1}^2 (n+1) + (n+1) \bar{x}_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - (n+1) \bar{x}_{n+1}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n+1} x_{n+1} \right) \\ &\quad \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 = (s_n^2 - \bar{x}_n^2)n \right\} \\ &= \frac{n}{n+1} \bar{x}_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1} = \frac{n \cdot s_n^2 - \bar{x}_n^2 \cdot n}{n+1} - \frac{1}{n+1} (n\bar{x}_n + x_{n+1})^2 \end{aligned}$$



3.

Pc ordenagailuen erremontza ~~duen~~ zeren arabera da?

Populazioa? Ordenagailu guztialik.

Alea edo unitate estatistikoak? Pc baliotsa

Laguna? Marke baliotsuak PC bat.

Aldegei estatistikoak? Prozesadoreak, Memoria, txartel grafikoa,

RAM memoria

2. gaiak

4.

$n = 57$  hiri

txak

Oraintxe tarte Ukozuna Kalkulatu:

$$K \approx 1 + 3,322 \log_{10} 57 = 6,83 \Rightarrow K \approx 7$$

Aldegei leinu:

$$R = 79 - 12 = 67$$

$$R = 67$$

tarte ~~ebolera~~:

$$a_i = 67 / 7 = 9,57$$

$$[a_i, a_i + 10]$$

Tartekin:	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i$
[0, 20)	5	5	0,088	0,088	15 10
[20, 30)	19	24	0,33	0,421	35 10
[30, 40)	10	34	0,175	0,596	35 10
[40, 50)	13	47	0,228	0,825	45 10
[50, 60)	4	51	0,08	0,895	55 10
[60, 70)	4	55	0,08	0,965	65 10
[70, 80)	2	57	0,085	1	75 10



# Estadística

## 1go Adibidea

$$M_c = 29'4$$

$$n = 25$$

$$Q_1 = 27'2 \Rightarrow \frac{25}{4} = 6'25$$

$$Q_3 = 31'2$$

$$RI = Q_3 - Q_1 = 4$$

$$m_1 = Q_1 - 1'5 RI = 21'2$$

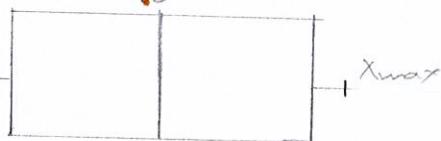
$$m_3 = Q_3 + 1'5 RI = 37'2$$

Albo balioak  $b_1 = 22'3$

Laginako Balioak

$M_c$

$$b_3 = 32'9 = x_{\max}$$



## 13. Aritmetika

a)

$$\begin{cases} x_i \\ i=1, \dots, n \end{cases} \quad \begin{cases} y_i = ax_i + b \\ i=1, \dots, n \end{cases}$$

$$\hat{y} = a\bar{x} + b$$

$$\hat{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n b \right] = \boxed{a\bar{x} + b}$$

$$\begin{aligned} S_{xy}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - a\bar{x} - b)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i - a\bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a^2(x_i - \bar{x})^2 = \frac{a^2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = a^2 S_{xx}^2 \end{aligned}$$

b)

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

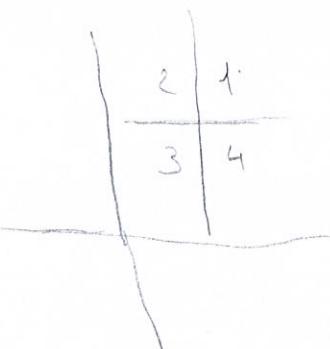
$$\bar{x} = 823^{\circ} \Rightarrow \hat{y} = \frac{9}{5} \cdot 823 + 32 = 1897'4^{\circ}$$

$$S_{xy}^2 = 101 S_{xx}^2 \Rightarrow S_{xy} = \frac{9}{5} \cdot 1'04 = 1'872^{\circ}$$

$$(n-1) S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Kwadrantlar bandan:

	I	II	III	IV
$(x_i - \bar{x})$	>0	<0	<0	>0
$(y_i - \bar{y})$	>0	>0	<0	<0
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	>0	<0	>0	<0



Ondan negativen  $S_{xy} > 0$  iisan go da.

# 1. Gaia: Arilletak

Estatistika

②

a)

Mallina batel hilebatetan eloititako piezen artean, 1000 pieza alderatzen dituzte, eta beren diametroa neurtsen dugut:

- Populazioa: Mallina.
- Eloititako piezen diametroa.
- Asterleku - mota: - logia
- Aldagai baliarretan.
- Kvantitatibo diskretua.

c)

500 aleatko palletearen orri beltzaren lodiera, m.m.bm,

- Populazioa: Palletea
- Ezaugamendu: Orrien lodiera
- Modalitateak: Kvantitatibo joarrakoa.
- Asterleku mota: - erroldak.
- Aldagai baliarretan.

j)

- Populazioa: Esplotxe handiko legezak

- adina, sexua, auci-arreba klopusue, jaitsa-leku, lehizketa, egunkari erretean duen zigarra-klopusua, egingero-errenda, lehizka-klopusua, buruko mina duen aho-ek, pisua kg eta altuera cm.

- Modifikatzaileak: Kuantitatiboa diskretua, Kuantitatiboa, Diskretua, Kuantitatiboa, Diskretua, Diskretua, Diskretua, Iarratza, Iarratza.

- Asterleku mota: - logia

- Aldagai anitzetan

## 2. Gaia: Archetypal

(3)

a)

	Baumbestände Kopurva (Cordatum)	Waldbestände absolute Kopurva	Waldbestände relative Kopurva
1.	[300 - 400)	14	0'035
2.	[400 - 500)	46	0'115
3.	[500 - 600)	58	0'145
4.	[600 - 700)	76	0'19
5.	[700 - 800)	68	0'17
6.	[800 - 900)	62	0'155
7.	[900 - 1000)	48	0'12
8.	[1000 - 1100)	22	0'655
9.	[1100 - 1200)	6	0'015

5. gillo muga 800 baino txikienoa (zango da berde, des ez dego)

J. Maseren berriar.

b)

J. Maseren behello muga 1000 (zango da).

c)

$$\text{Maser-makro: } x_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2}$$

$$x_i = \frac{1000 + 1100}{2} = \frac{2100}{2} = 1050$$

d)

Tarte-Kopurva:  $K=9$

Aldagilean heina:  $R=900$

Tarte beholtsaren zabalera:  $a_i=100$

e)

Maserun-absolute:  $n_i=76$

## Aufgabe 2

④

$n = 57$  hirschen adlerku Klubadres:

$[l, l+1)$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i$	$a_i$
$[10, 20)$	5	5	0'082	0'082	15	10
$[20, 30)$	19	24	0'33	0'417	25	10
$[30, 40)$	10	34	0'175	0'592	35	10
$[40, 50)$	13	47	0'228	0'82	45	10
$[50, 60)$	4	51	0'08	0'892	55	10
$[60, 70)$	4	55	0'62	0'965	65	10
$[70, 80)$	2	57	0'035	1	75	10
	57	1				

Sturges-formule erreichbar, kostet Vopurve Vekkulu:

$$K = 1 + 3'822 \cdot \log_{10} n = 1 + 3322 \cdot \log_{10} 57 \approx 6'83 \Rightarrow K \approx 7$$

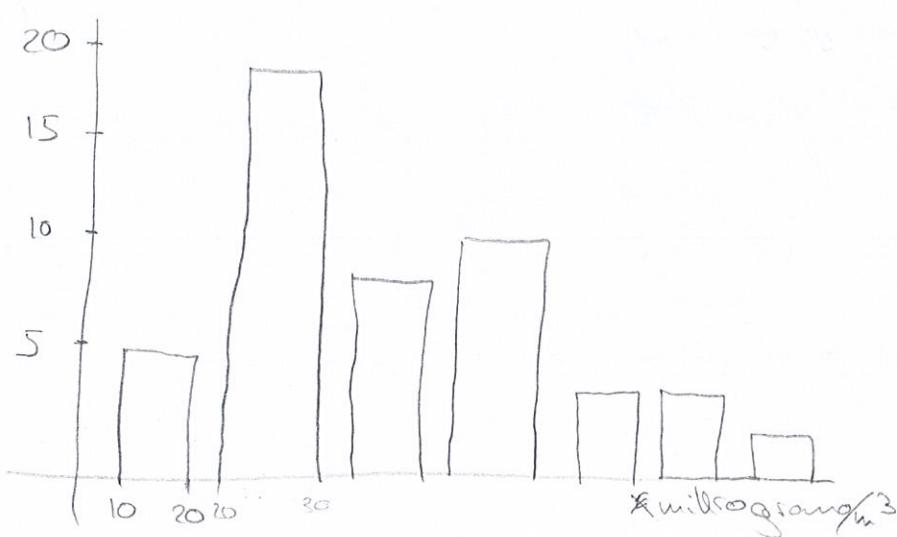
Abgrenzen keine:

$$R = 79 - 12 = 67$$

toste Zabolese:

$$a_i = 67/7 \approx 10$$

$$a_i = 10$$



(7)

②

178 | 968485779

173 | 8651226536956834230209489552542662215540

174 | 30125201460



(8)

$[l_i, l_{i+1})$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i$	$a_i$
$[40, 60)$	9	9	0'05	0'05	50	20
$[60, 80)$	10	19	0'105	0'155	70	20
$[80, 100)$	16	35	0'089	0'244	90	20
$[100, 120)$	11	46	0'061	0'305	110	20
$[120, 140)$	60	106	0'334	0'629	130	20
$[140, 160)$	34	140	0'139	0'80	150	20
$[160, 180)$	23	163	0'12	0'92	170	20
$[180, 200)$	10	173	0'05	0'97	190	20
$[200, 220)$	6	179	0'034	0'995	210	20
$[220, 240)$	1	180	0'005	1	230	20

Anketale 3

⑧ b)

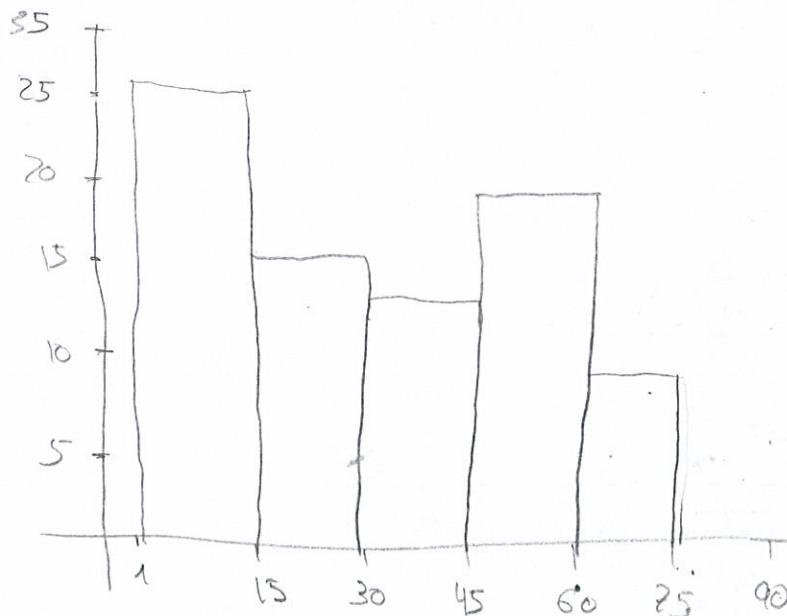
$[E_i, E_{i+1})$	$n_i$	$N_i$	$\hat{f}_i$	$F_i$	$a_i$	$x_i$
$[45^{\circ}, 125^{\circ})$	0'325	0'325	0'0667	0'0662	30	85'5
$[125^{\circ}, 145^{\circ})$	3	3'325	0'0534	0'6	20	135'5
$[145^{\circ}, 185^{\circ})$	1'5	4'825	0'267	0'862	40	165'5
$[185^{\circ}, 225^{\circ})$	0'25	5'625	0'134	1	40	200'5

5625 1

⑨

$[E_i, E_{i+1})$	$n_i$	$N_i$	$\hat{f}_i$	$F_i$	$x_i$	$a_i$
$[1, 15)$	26	26	0'26	0'26	75	15
$(15, 30)$	16	42	0'16	0'42	225	15
$[30, 45)$	13	55	0'13	0'55	375	15
$[45, 60)$	21	76	0'21	0'76	525	15
$[60, 85)$	19	87	0'11	0'88	675	15
$[85-90)$	13	100	0'13	1	825	15

100 1



b)

$[l_i; l_{i+1})$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$x_i$
$[1, 5)$	6	6	0'6	0'6	2'5
$[5, 15)$	20	26	0'2	0'26	10
$[15, 30)$	16	42	0'16	0'42	22'5
$[30, 45)$	13	55	0'13	0'55	37'5
$[45, 60)$	21	76	0'21	0'76	58'5
$[60, 90)$	24	100	0'24	1	75
	(00)	1			

### 3. Gaia: Arithmetik

(15)

? data:

data

$$(n+1) \tilde{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - \tilde{x}_{n+1})^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - (n+1) \tilde{x}_{n+1}^2 \quad \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \tilde{x}_{n+1}^2 - (n+1) \left( \frac{n}{n+1} \tilde{x}_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1} \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \tilde{x}_{n+1}^2 - \left( \frac{(n+1)^2 n \tilde{x}_n + (n+1)^2 x_{n+1}}{n+1} \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \tilde{x}_{n+1}^2 - \frac{1}{n+1} (n \cdot \tilde{x}_n + x_{n+1})^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2 - \frac{1}{n+1} (\bar{x}_n + x_{n+1})^2 = \text{ } S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\
 &= nS_n^2 + n\bar{x}_n^2 + x_{n+1}^2 - \frac{1}{n+1} (\bar{n}\bar{x} + x_{n+1})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \bar{x}^2 - x_i\bar{x} \\
 &= nS_n^2 + n\bar{x}_n^2 + x_{n+1}^2 - \frac{1}{n+1} (n\bar{x}^2 + x_{n+1}^2 + 2n\bar{x}x_{n+1}) = \\
 &= nS_n^2 + \frac{n(n+1)\bar{x}_n^2}{n+1} + \frac{(n+1)x_{n+1}^2}{n+1} - \frac{n^2\bar{x}^2 + 2n\bar{x}x_{n+1} + 2n\bar{x}x_{n+1}}{n+1} = \\
 &= nS_n^2 + \frac{n(n+1)\bar{x}_n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} x_{n+1}^2 - \frac{n^2\bar{x}^2}{n+1} - \frac{2n}{n+1} \bar{x}x_{n+1} - \frac{2n}{n+1} x_{n+1}^2 = \\
 &= nS_n^2 + \frac{n}{n+1} \bar{x}_n^2 + \frac{n}{n+1} x_{n+1}^2 - \frac{2n}{n+1} \bar{x}x_{n+1} = \\
 &= nS_n^2 + \frac{n}{n+1} (\bar{x}_n^2 + x_{n+1}^2 - 2\bar{x}x_{n+1}) = nS_n^2 + \frac{n}{n+1} (\bar{x}_n - x_{n+1})^2
 \end{aligned}$$

①

$n=110 \Rightarrow$  altwerc

a)

21. perzentile  $\Rightarrow$  90% calleserunt vster duen balioa.  
161 edo 162 cm inguruan ibiliko da perzentile hori

82. perzentile  $\Rightarrow$  90% calleserunt vster duen balioa.

192 edo 193 cm inguruan ibiliko da

3. desilie  $\Rightarrow$  90% calleseran utzi. 166 cm izango da.

9. desilie  $\Rightarrow$  90% calleseran utzi. 195 cm inguruan ibiliko da.

b)

3. perzentile  $\Rightarrow$  90% calleserun utzi. 158 cm-tik beharikoak  
hiliko direla esango da.

9. 82 perzentile  $\Rightarrow$  189 cm baino gehiago dituenak izango dira.

d) 79 perzentilea zehikorra da

②

a) Tafel 2: Statistik-Math

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$\bar{x}_i$	$n_{0x_i}$
0	19	19	0'543	0'543
100	4	23	0'657	0'114
200	5	28	0'2	0'143
300	4	32	0'914	1000
400	2	34	0'114	1800
1000	1	35	0'971	0'657
			1	0'0285
			35	1000
				1

Basis bestehend aus metrischen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i = 434'29$$

Medienna

$M_e = 0 \Rightarrow$  Es gelten positionale 0-Werte desfelder

b)

Satellitenaufnahmen statistisch-koch:

- keine (R)

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 1000 - 0 = 1000$$

- keinen artefiziellen Wert (IR)

$$Q_1 = 0$$

$$Q_3 = 200 \quad \left\{ \begin{array}{l} IR = Q_3 - Q_1 = 200 \end{array} \right.$$

- Logarithmometrie:

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2 = 134222'03$$

- deskriptive estender:

$$S_n = \sqrt{S_n^2} = \\ = 366'43$$

(4)

a)

$$\hat{z}_i = x_i + b \text{ baldin } \hat{z} = \bar{x} + b$$

$$\sum_{i=1}^n n(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n n(y_i - \bar{y})$$

$$y_i = x_i + b$$

$$\bar{y} = \bar{x} + b$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n(x_i + b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n(x_i + b) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n n x_i + \sum_{i=1}^n n b \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n n x_i + b \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n n \right)}_{=n} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n x_i + b \frac{n}{n} = \bar{x} + b \end{aligned}$$

b)

$$\hat{z}_i = ax_i + b \Rightarrow \hat{z} = a\bar{x} + b$$

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n \hat{z}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n(a x_i + b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a x_i + b n) = \\ &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n a x_i + \sum_{i=1}^n b n \right] = \frac{1}{n} \left[ a \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)}_{=\bar{x}} + b \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n n \right)}_{=n} \right] = \\ &= a \underbrace{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)}_{=\bar{x}} + b \frac{n}{n} = a\bar{x} + b \end{aligned}$$

c)

$$(z_i = x_i + y_i) \Rightarrow \hat{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\hat{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n(x_i + y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n y_i = \bar{x} + \bar{y}$$

d)

$$\hat{z}_i = ax_i + by_i \Rightarrow \hat{z} = a\hat{x} + b\hat{y}$$

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n(\hat{z}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n(ax_i + by_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n niax_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n niby_i = \\ &= \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n nix_i + \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n niy_i = a\hat{x} + b\hat{y}\end{aligned}$$

(5)

$$n=40$$

Punktwert	Illaste - Väärus	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
[15, 20)	2	18.35	612.5
[20, 25)	8	120	4050
[25, 30)	13	332.5	9836.25
[30, 35)	7	227.5	7393.25
[35, 40)	6	225	8437.5
[40, 45)	3	127.5	5418.75
[45, 50)	1	42.5	2250.25
		1200	38000

a)

Batesbestolo - aritmetyiline:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n nix_i = 30$$

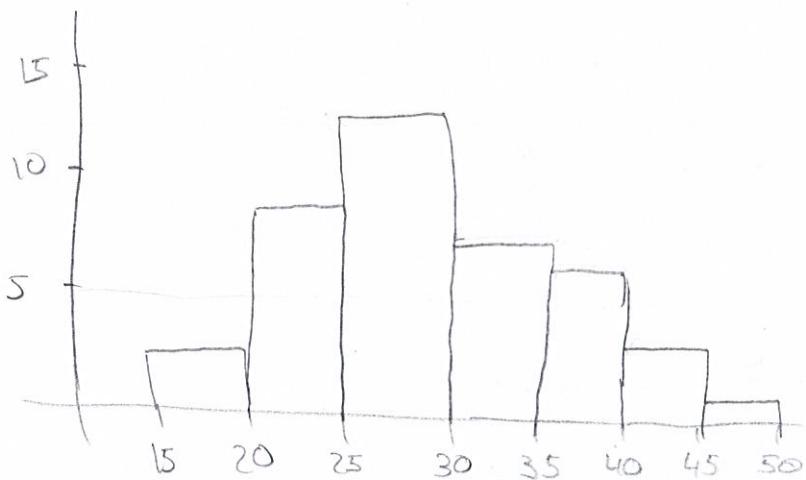
b) 9625 bainu sahingas, 35 bainod bainu sahingas euan lätsak  
isangas dist.

$$c) S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{40} 38000 - \left( \frac{1200}{40} \right)^2 = 50$$

$$S_n = \sqrt{S_n^2} = 7.02$$

## Ariketalk 6

d)



⑥

0'736 0'863 0'865 0'913 0'915 0'937 0'983 1'002  
1'011 1'064 1'109 1'132 1'140 1'153 1'253 1'394

a)

Betere bestelde baliea:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1'029$$

Mediane

$$Me = 1'011 - 1'002 = 1'009$$

b)

0'7 \* 0'8 \* 0'9 \*\*\* x 1'1 Me 1'1 1'2 1'3 1'4

Lagimaren baliorib kardiere Mediane arte jaitsi ditelle  
etx Me ca litzadello aldatuko.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \cdot 0'402 = \frac{0'402}{16} = 0'025$$

Desviación estandar:

$$S_n = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{0.023} = 0.159$$

(13)

a) aetab  $y_i = ax_i + b$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (ax_i + b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i a x_i + n_i b = \\ &= \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i + \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n n_i = a\bar{x} + \frac{b}{n} = a\bar{x} + b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (y_i - \hat{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (ax_i + b - (a\bar{x} + b))^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (ax_i - a\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i a^2 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{a^2}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= a^2 s_x^2\end{aligned}$$

b)

$$\bar{x} = 87'3 \text{ eta } S_n = 1.04$$

$$\bar{x}_F = \frac{87'3 \cdot 9}{5^\circ C} + 32 = 189'14 \text{ Fahrenheit grado.}$$

$$s_{y_F}^2 = a^2 s_x^2$$

$$s_{y_F}^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot 1.04^2 = \frac{9}{5} \cdot 1.04 = 1.982$$

## Estatistica

Populazioia: zer asterikoa

Unitate estatistikoak edo Alea: elementu batzukoa

Laguna ~~de ecuadoria~~: zer Astetzen ohi garen populazioaren  
zer nahi den jeltz.

Ecuadoria edo Aldagaiak Elementu kopurua.

Mueltitibola: Diskrebuak: zenbaki finit. edo Zurbagarrak:  
jarrak: gutxiengo eta gehieneko bat  
duenak.

Mueltitibola: Zenbakiak definitu ean den Aldagiekin

Populazioa elementu guatikoa sortzen badira; Esotako  
Bestela, Laguna.

Aldagai baliarrakoa: ecuadoria baliarrakoa astekoa, bestela, Aldagai  
antzailea.

$x_i \Rightarrow [l_i, l_{i+1})$  tartea izanik liriak

$a_i \Rightarrow [l_i, l_{i+1})$  tartea  $\Rightarrow l_{i+1} - l_i$

Aldiespen grafikoa:

Selktore diagramea

Berro diagramea (metadua)

Puntu diagramea

histogramma

Burbia eta hutsa grafikoa  
Kutxa diagramea

Joere Zentralele statistikkare: Betebestade eritmetille, etc  
Mediene:

- Betebestade eritmetille:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i f_i x_i$$

- Mediene  $\Rightarrow$  \* lwerre billoibie,  $n, \frac{x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}}{2} = M_e$

lwerre billoibie,  $n, x_{(n/2)}$

estatistikke: Maantike, ale kopena bet ealleman

Kuerstille: Logine + zetile berdinchen betzen d.

Desilile: Logine 10 zetile berdinchen betzen d.

Pertzentile: Logine 100 zetile betz.

Saklarneper estatistikke:

$$\text{heime (R)} = x_{\max} - x_{\min}$$

$$\text{Kurtileartde} \text{ Iach (R)} = Q_3 - Q_1$$

Borientde:

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2$$

Desorientde ~~Ast~~

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2$$

Dekiderende - eranderen

$$S_n = \sqrt{S_n^2}$$

~ Korrelationskoeffizienten:

$$Cv = \frac{s_x}{|\bar{x}|}$$

Basis bestehen die deskriktive - estadistischen Maße:

Ergebnisse empirische: Rauten Kugeln itaue Badete:

- Legieren % 68c bateabstehende deskriktive

estadistiken Logo ( $\bar{x} - s, \bar{x} + s$ )

- Legieren % 95  $\Rightarrow (\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$

- Legieren ic % 100  $\Rightarrow (\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$



$\times$  die  $X$ -ren artikele erlebte: Sollabneben - diagnoza  
meinten de.

Kovarianz:

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Korrelation:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[ \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]}} =$$

$$= \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} [\sum x_i \cdot \sum y_i]}{\sqrt{\left[ \sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2 \right] \cdot \left[ \sum y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2 \right]}}$$

}  $r \approx 1$  erlebte zähne  
 $r \approx 0$  es dass  
 $r \approx -1$  erlebte alderuntariale  
erlebte.

Korrelation perfekte rechte

$G(b_0, b_1)$  bildet bei der dc

$$G = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y})^2 = \sum (x_i - (b_0 + b_1 x_i))^2$$
$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}$$

### 3. Gaia

#### Estatistika

Toere zentralele estatistika:

- Batesbestello aritmetikoa:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

- Mediana: Kopurua biltzatia bede:  $\frac{n}{2}$  eta  $\frac{n}{2} + 1$  ordite  
 $M_e = \frac{(x_{\frac{n}{2}}) + (x_{\frac{n}{2}+1})}{2}$

Kopurua biltzatia bede: Logindela  $\frac{n}{2} + 1$ . biltza

Posizio estatistikak: Koenbilek, die kopuru bat zallerenak uztar.

- Kuartilek:

4 zati berdinak banatzen de Legia

- Dezilek:

10 zati berdinak zatitzan de Legia

- Perzentilek:

100 zati berdinak banatzen de Legia

Sakabanopen estatistikak:

- Hainoa (R):  $R = x_{\max} - x_{\min}$

- Kuartil arteko hainoa (IR):  $IR = Q_3 - Q_1$

- Beriotzaia:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i(x_i - \bar{x})^2$$

- Desbideratza:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i(x_i - \bar{x})^2$$

- Desbideratza-estandarra

$$S_n = \sqrt{S^2}$$

- Aldakuntza-koeffiziente:

$$CV = \frac{S_n}{|\bar{x}|}$$

Batezbestelarreko desbideratza-estandarreren erabilpen baterria:

Xebixex-ek desbideratza

Enegetiko-empirikoa: Dabili kampai itxura agertzen badute

- Loginaren %90a batezbestelarrik desbideratza estandarrera dago. ( $\bar{x}-S, \bar{x}+S$ ) tartean %68a barneztzen.

- Loginaren %95a, ( $\bar{x}-2S, \bar{x}+2S$ ) tartean dago

- Ja login %99, ( $\bar{x}-3S, \bar{x}+3S$ ) tartean sartuta da.