Programazio Osoa. Ariketak

1. Eredu lineal oso hauek grafikoki ebatz itzazu:

1.1 $\max\ z = x_1 + 4x_2$

hauen mende

$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak}$$

1.2 $\max\ z = 6x_1 + 8x_2$

hauen mende

$$2x_1 + 4x_2 \leq 36$$
$$3x_1 - 4x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak}$$

2. Izan bitez ondoko eredu lineal osoak eta dagozkien eredu erlaxatuen taula optimoak:

2.1 Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa erabiliz kalkula ezazu eredu lineal osoaren soluzio optimoa. Algoritmoaren lehenengo adarkaketan x_1 aldagaia borna ezazu.

$\max\ z = x_1 + 4x_2$

hauen mende

$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{29}{2}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$

2.2 Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa erabiliz kalkula ezazu eredu lineal osoaren soluzio optimoa. Algoritmoaren lehenengo adarkaketan x_1 aldagaia borna ezazu.

$\max\ z = 6x_1 + 8x_2$

hauen mende

$$2x_1 + 4x_2 \leq 36$$
$$3x_1 - 4x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{512}{5}$
$\mathbf{a}_2$	0	1	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{7}{5}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{76}{5}$

2.3 Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa erabiliz kalkula ezazu eredu lineal oso honen soluzio optimoa.

$\max\ z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

hauen mende

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 17$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ eta osoak}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	$\frac{5}{2}$	2	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{33}{2}$
$\mathbf{a}_4$	$-\frac{7}{2}$	-2	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_3$	$\frac{3}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$

2.4 Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa erabiliz kalkula ezazu eredu lineal oso honen soluzio optimoa. Adarkaketak egiterakoan bornatuak izan daitezkeen aldagaien artean azpi-indizerik txikieneko aldagaia borna ezazu.

$\max\ z = x_1 + x_2 + x_3$

hauen mende

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 42$$
$$2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 52$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ eta osoak}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	$\frac{1}{19}$	0	$\frac{3}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{230}{19}$
$\mathbf{a}_1$	1	$-\frac{11}{19}$	0	$\frac{5}{19}$	$-\frac{3}{19}$	$\frac{54}{19}$
$\mathbf{a}_3$	0	$\frac{31}{19}$	1	$-\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{176}{19}$

3. 0-1 adarkatze- eta bornatze- algoritmoa erabiliz kalkula itzazu eredu lineal bitar hauen soluzio optimoak:

3.1 $\max\ z = 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5$

hauen mende

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 10$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 11$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ edo } 1$$

3.2 $\max\ z = 9x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 4x_5$

hauen mende

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 7$$
$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ edo } 1$$

3.3 $\max\ z = 10x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 3x_5$

hauen mende

$$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 14$$
$$6x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 + x_5 \leq 11$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ edo } 1$$

3.4 $\max\ z = -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 6x_6$

hauen mende

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 \leq 11$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 4x_6 \leq 19$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0 \text{ edo } 1$$

3.5 $\max\ z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4$

hauen mende

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ edo } 1$$

4. Leku batetik beste batetara 6 pieza, $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, bidali nahi dira, gehienez 15 kg eramateko ahalmena duen kutxa batean sartuta. Pieza bakoitzaren balioa eta pisua taula honetan adieraziak datoz:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Balioa (euro)	4	2	1	7	3	6
Pisua (kg)	5	8	8	6	1	5

Kutxan gutxienez 3 pieza sartuko direla bermatu nahi da. Helburua kutxan sartutako piezen balioa maximizatzea izanik, 6 pieza horien artean kutxan sartuko direnak zein izango diren aukeratu behar da. Erabaki-aldagai hauek definitu dira:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{baldin } P_i \text{ pieza aukeratuko bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

Problema adierazten duen eredu lineal bitarra hau da:

$$\max\ z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 6x_6$$

hauen mende

$$5x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 6x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 15$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0 \text{ edo } 1$$

0-1 adarkatze- eta bornatze-algoritmoa erabiliz kalkula ezazu soluzio optimoa, eta esan zein izango diren kutxan sartuko diren piezak eta kutxak hartuko duen balio maximoa.

4. Ariketa

$$\max \; z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 + 3x_5 + 6x_6$$

hauen mende

$$5x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 6x_4 + x_5 + 5x_6 \le 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0 \text{ edo } 1$$

$y_1 = x_3$

$y_2 = x_2$

$y_3 = x_5$

$y_4 = x_1$

$y_5 = x_6$

$y_6 = x_4$

$\Longrightarrow$

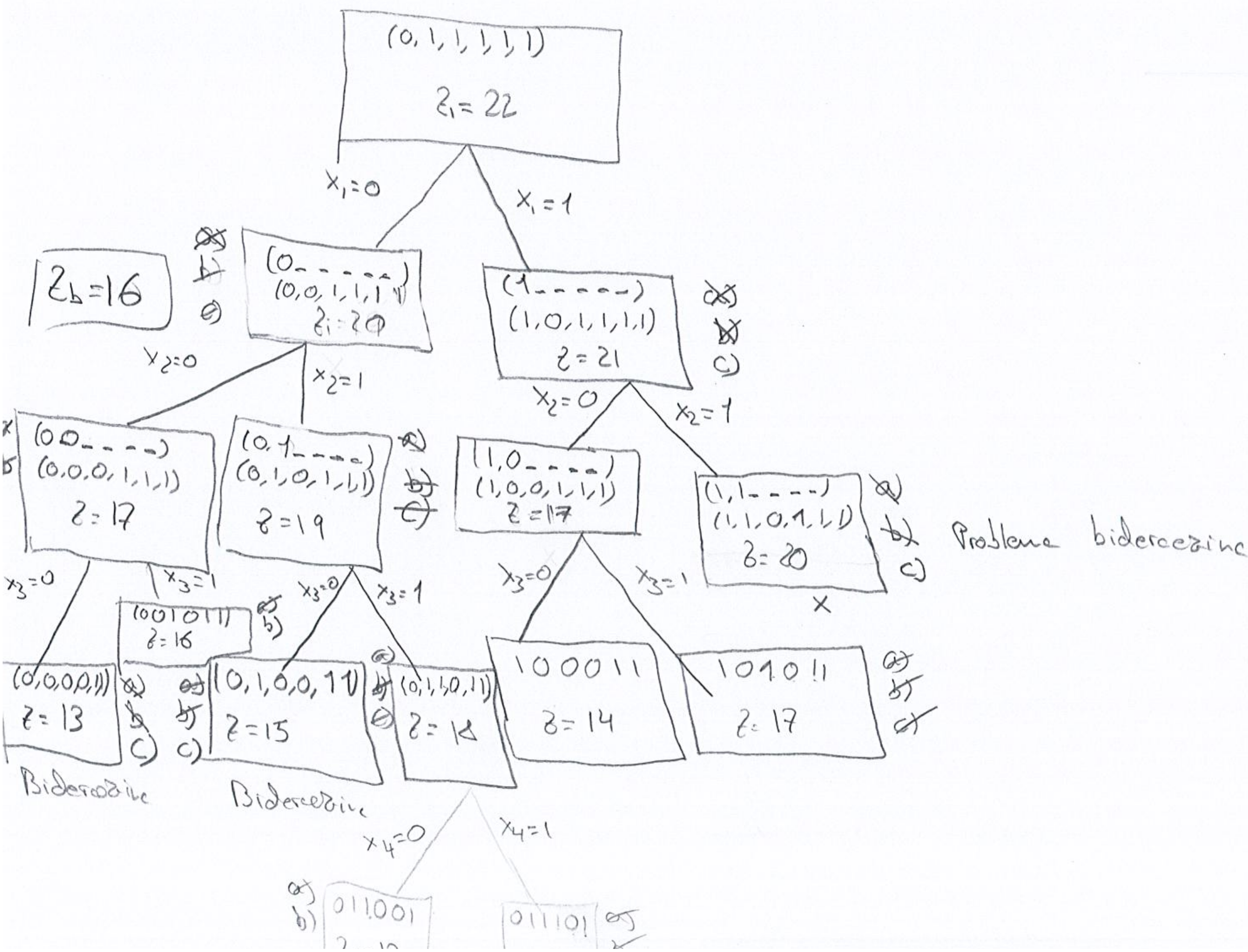
$$\max \; z = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 6y_5 + 7y_6 \qquad \text{PE}$$

hauen mende

$$8y_1 + 8y_2 + y_3 + 5y_4 + 5y_5 + 6y_6 \le 15$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \ge 3$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 = 0 \text{ edo } 1$$



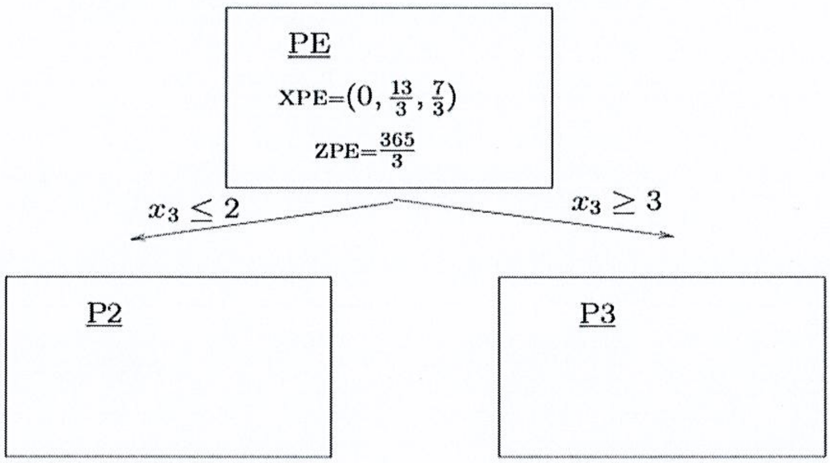
1. PROBLEMA

Izan bitez eredu lineal osoa eta dagokion eredu erlaxatuaren taula optimoa.

$$\max z = 10x_1 + 20x_2 + 15x_3$$
hauen mende
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{eta osoak}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	$\frac{65}{3}$	0	0	$\frac{25}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{365}{3}$
a_2	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
a_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$

Adarkatze- eta bornatze-algoritmoa aplikatzen hasi da (ikusi diagrama).



x_3 aldagia aukeratu da P2 eta P3 problemak sortzeko. P2 eta P3 problemen taula optimoak ondokoak dira:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
P2	20	0	0	10	0	5	120
a_2	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
a_3	0	0	1	0	0	1	2
a_5	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
P3	30	0	0	0	20	25	105
a_2	2	1	0	0	1	2	3
a_3	0	0	1	0	0	-1	3
a_4	-1	0	0	1	-2	-3	2

Jarraitu ezazu algoritmoaren aplikazioarekin problema osoaren soluzio optimoa lortzeko eta diagrama osatzeko.

Programazio Osoa

Programazio osoaren eredua

Eredu lineal osoa

opt $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

baten mende

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \lesseqgtr b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \lesseqgtr b_m$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ eta osoak

0-1 eredu lineala

opt $z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

baten mende

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \lesseqgtr b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} \lesseqgtr b_m$$

$x_1, x_2, \dots, x_n = 0, 1$

Problema osoa eta problema erlaxatua

Problema osoa (PO)

max (min) $z = c^t x$

baten mende

$Ax = b$

$x \geq 0$ eta osoak

Problema erlaxatua (PE)

max (min) $z = c^t x$

baten mende

$Ax = b$

$x \geq 0$

Adibidea

PO

max $z = 80x_1 + 45x_2$

baten mende

$x_1 + x_2 \leq 7$

$12x_1 + 5x_2 \leq 60$

$x_1, x_2 \geq 0$ eta osoak

PE

max $z = 80x_1 + 45x_2$

baten mende

$x_1 + x_2 \leq 7$

$12x_1 + 5x_2 \leq 60$

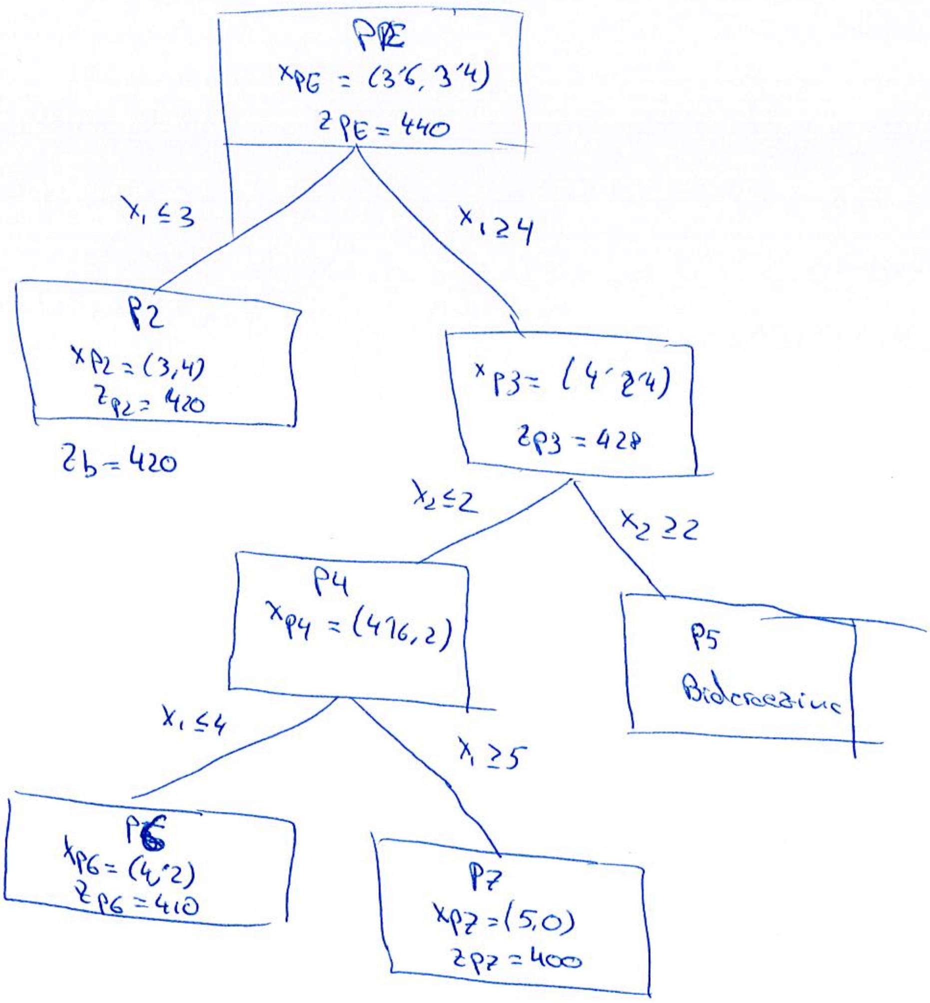
$x_1, x_2 \geq 0$

Problema erlaxatuaren soluzioa: $x_{PE} = (3'6, 3'4)$ eta $z_{PE} = 440$

Biribildua $\Rightarrow$ $(3,3), (4,4), (4,3), (3,4)$

Soluzio optimoa $(4,4)$ izango litzake, baina ez ditu murriztketak

Ebazpenaren diagrama



Adarkatze-bornatze-algoritmoa

1. urratsa: PE ebatzi.

- Soluzio optimoa osoa bada, amaitu.
- Bestela, $z_b = -\infty$.

2. urratsa: Adarkatzea. Azkenekoa ez den z^* handieneko problema aukeratu. Bertan, osoko ez den aldagairen bat aukeratu bornatua izateko. Adarkatu $x_j \le [x_j]$ eta $x_j \ge [x_j]+1$ murrizketak gehituz.

3. urratsa: Bornatzea: sortutako problemak ebatzi.

4. urratsa: Azkeneko problemak, z^* handiena dutenetik hasi. Baldintzetako bat betetzen bada:

a) $z^* \le z_b$

b) Soluzio osoa, $z^* \ge z_b$. Hoberena eguneratu $z_b = z^*$. Soluziogai.

c) Proble[illegible] bideraezi[illegible]

Adibidea

1. urratsa

$$\max\ z = 80x_1 + 45x_2$$

haren mende

$$x_1 + x_2 \le 7$$

$$12x_1 + 5x_2 \le 60$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

	0	0	20	5	440
a_2	0	1	12/7	-1/7	24/7
a_1	1	0	-5/7	1/7	25/7

2. urratsa

Ez da optimoa, x_1 aldatu $\Rightarrow$ P2 eta P3 problemak sortu.

3. urratsa

Sentikortasun analisia erabiliz, bi problema horiek ebatzi.

	0	0	20	5	0	440
a_2	0	1	12/7	-1/7	0	24/7
a_1	1	0	-5/7	1/7	0	25/7
a_5	1	0	0	0	1	3

$\Rightarrow$ 3. Errenkada - 2. Errenkada

	0	0	20	5	0	440
a_2	0	1	12/7	-1/7	0	24/7
a_1	1	0	-5/7	1/7	0	25/7
a_5	0	0	5/7	-1/7	1	$-\frac{4}{7}$

$\Rightarrow$ Ez dago bideragarritasun primala

$\rightarrow$ Simplex dual.

	0	0	45	0	35	420
a_2	0	1	1	0	-1	4
a_1	1	0	0	0	1	3
a_4	0	0	-5	1	-7	4

$\rightarrow$ taula optimoa

$$z_b = 420$$

P3 problemaren ebazpena: $-x_1 \le -4$

	0	0	20	5	0	440
a_2	0	1	12/7	-1/7	0	24/7
a_1	1	0	-5/7	1/7	0	25/7
a_5	-1	0	0	0	1	-4

3. errenkada + 2. errenkada

	0	0	20	5	0	440
a_2	0	1	12/7	-1/7	0	24/7
a_1	1	0	-5/7	1/7	0	25/7
a_5	0	0	-5/7	1/7	1	$-\frac{3}{7}$

→ Simplex duala

	0	0	0	9	28	428
a_2	0	1	0	1/5	12/5	12/5
a_1	1	0	0	0	-1	4
a_3	0	0	1	-1/5	-7/5	3/5

→ Soluzio optimoa

Ez da soluzio optimoa, ez baitira guztiak osoak.

4. urratsa P2 → $z_{P2} = 420 \ge z_b$. $x_1 = 3$ eta $x_2 = 4$ behebornea berria $z_b = 420$

P3-ren kasuan ez da aztertzen.

P6 eta P7

↳ $z_{P6} = 410 \le z_b = 420$

$z_{P7} = 400 < z_b = 420$

$x_1^* = 3;\ x_2^* = 4;\ z^* = z_b = 420$

Motxilaren problema

$$\max\ z = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4$$

hauen mende

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ edo } 1$$

Guztiak positiboak dira ondorioz,

$$x_4 = y_1 \qquad x_3 = y_2 \qquad x_1 = y_3 \qquad x_2 = y_4$$

$\Longrightarrow$ $\max\ z = 10y_1 + 12y_2 + 15y_3 + 25y_4$

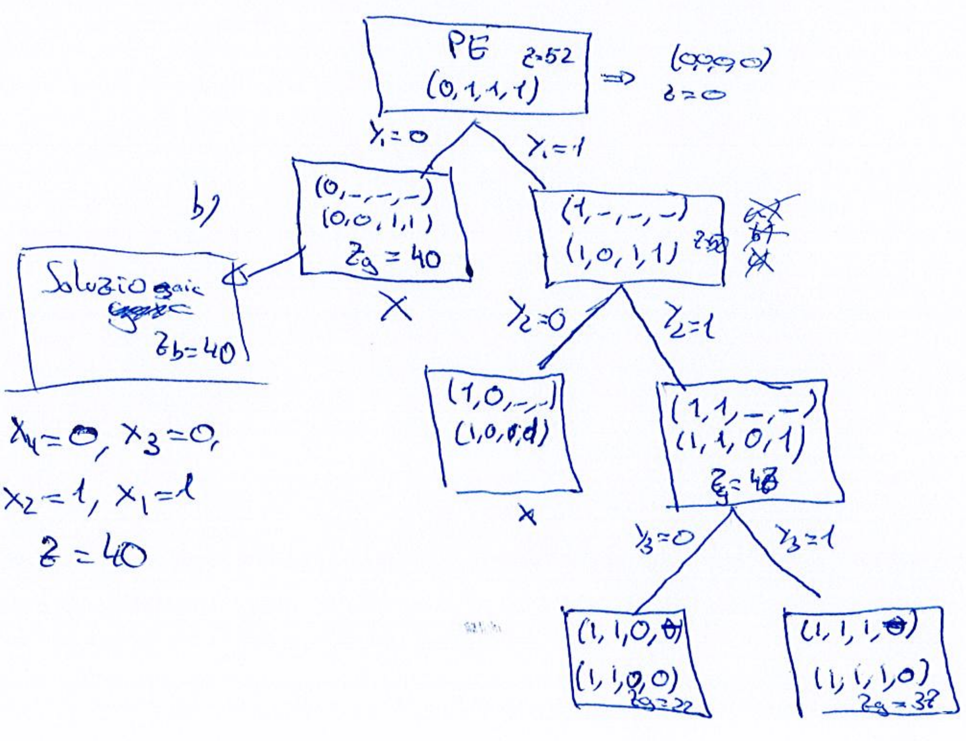
hauen mende

$$5y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 6y_4 \leq 12$$

Soluzio optimoa:

$(1,1,1,1) \longrightarrow$ Ez du murrizketa betetzen

$(0,1,1,1) \longrightarrow$ Ez du murrizketa betetzen



Ariketak. Programazio osoa

2. Ariketa

2.1

$\max\ z = x_1 + 4x_2$

hauen mende

$x_1 + x_2 \le 7$

$-x_1 + 3x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$ eta osoak

	0	0	7/4	3/4	29/2
a_1	1	0	3/4	-1/4	9/2
a_2	0	1	1/4	1/4	5/2

$x_1 \le 4$

	0	0	7/4	3/4	0	29/2
a_1	1	0	3/4	-1/4	0	9/2
a_2	0	1	1/4	1/4	0	5/2
a_4	1	0	0	0	1	4

$\Rightarrow$

	0	0	7/4	3/4	0	29/2
a_1	1	0	3/4	-1/4	0	9/2
a_2	0	1	1/4	1/4	0	5/2
a_4	0	0	$\boxed{-3/4}$	1/4	1	-1/2

Simplex dual

	0	0	0	4/3	7/3	40/3
a_1	1	0	0	0	1	4
a_2	0	1	0	1/3	1/3	7/3
a_3	0	0	1	-1/3	-4/3	2/3

$\rightarrow$ Ez da osoa

$\Downarrow$

P4 $\quad x_2 \le 2$

	0	0	0	4/3	7/3	40/3
a_1	1	0	0	0	1	4
a_2	0	1	0	1/3	1/3	7/3
a_3	0	1	1	0	0	2

$\Rightarrow$ simplex dual

	0	0	0	4/3	7/3	40/3
a_1	1	0	0	0	1	4
a_2	0	1	0	1/3	1/3	7/3
a_3	0	0	1	$\boxed{-1/3}$	-1/3	-1/3

	0	0	0	4	1	12
a_1	1	0	0	0	0	4
a_2	0	1	0	0	-1	2
				1	1	1

$\Rightarrow z_b = 12$

P5

Bideraezina

$x_1 \ge 5 \Rightarrow -x_1 \le -5$

$z_b = 13$
$x_1 = 5 \quad x_2 = 2$

	0	0	7/4	3/4	0	29/2
a_1	1	0	3/4	-1/4	0	9/2
a_2	0	1	1/4	1/4	0	5/2
a_4	-1	0	0	0	1	-5

	0	0	7/4	3/4	0	29/2
a_1	1	0	3/4	-1/4	0	9/2
a_2	0	1	1/4	1/4	0	5/2
a_4	0	0	3/4	-1/4	1	-1/2

2.2

max $z = 6x_1 + 8x_2$

kuan mende

$2x_1 + 4x_2 \leq 36$

$3x_1 - 4x_2 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$ eta osoak

	0	0	12/5	2/5	512/5
a_2	0	1	3/20	$-\frac{1}{10}$	7/5
a_1	1	0	1/5	$\frac{1}{5}$	76/5

$x_1 \leq 1$

	0	0	12/5	2/5	0	512/5
a_2	0	1	3/20	$-\frac{1}{10}$	0	7/5
a_1	1	0	1/5	$\frac{1}{5}$	0	76/5
a_4	1	0	0	0	1	1

$\Rightarrow$

	0	0	12/5	2/5	0	512/5	
a_2	0	1	3/20	$-\frac{1}{10}$	0	7/5	-2
a_1	1	0	1/5	1/5	0	76/5	1/2
a_4	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{-\frac{1}{5}}$	1	-2/5	-1

Simplex dual

	0	0	2	0	2	508/5
a_2	0	1	1/4	0	-1/2	8/5
a_1	1	0	0	0	1	74/5
a_4	0	0	1	1	-5	2

Ez osoak

$x_1 \geq 2 \Rightarrow -x_1 \leq -2$

	0	0	12/5	2/5	0	512/5
a_2	0	1	3/20	-1/10	0	7/5
a_1	1	0	1/5	1/5	0	76/5
a_4	-1	0	0	0	1	-2

$\Rightarrow$

	0	0	12/5	2/5	0	512/5
a_2	0	1	3/20	-1/10	0	7/5
a_1	1	0	1/5	1/5	0	76/5
a_4	0	0	1/5	1/5	1	-3/5

Bideraezin

	0	0	2	0	2	0	508/5
a_2	0	1	1/4	0	-1/2	0	8/5
a_1	1	0	0	0	1	0	74/5
a_4	0	0	1	1	-5		2
a_5	0	1	0	0	0	1	14

	0	0	2	0	2	0	508/5
a_2	0	1	1/4	0	-1/2	0	8/5
a_1	1	0	0	0	1	0	
a_4	0	0	1	1	-5	0	
a_5	0	0	-1/4	0	1/2	1	

2.2

max $z = 6x_1 + 8x_2$

hauen mende

$2x_1 + 4x_2 \leq 36$

$3x_1 - 4x_2 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$ eta osoak

	0	0	12/5	2/5	512/5
a_2	0	1	3/20	-1/10	7/5
a_1	1	0	1/5	1/5	76/5

$x_1 \leq 15$

	0	0	12/5	2/5	0	512/5
a_2	0	1	3/20	-1/10	0	7/5
a_1	1	0	1/5	1/5	0	76/5
a_5	1	0	0	0	1	15

⇒

	0	0	12/5	2/5	0	512/5	-2
a_2	0	1	3/20	-1/10	0	7/5	-1/2
a_1	1	0	1/5	1/5	0	76/5	-1
a_5	0	0	-1/5	$\boxed{-1/5}$	1	-1/5	

Simplex dual

	0	0	2	0	2	102
a_2	0	1	-1/4	0	-1/2	3/2
a_1	1	0	0	0	1	15
a_4	0	0	1	1	-5	1

Ez Osoak

$x_2 \leq 1$

	0	0	2	0	2	0	102
a_2	0	1	-1/4	0	-1/2	0	3/2
a_1	1	0	0	0	1	0	15
a_4	0	0	1	1	-5	0	1
a_6	0	1	0	0	0	1	1

⇒

	0	0	2	0	2	0	102
a_2	0	1	-1/4	0	-1/2	0	3/2
a_1	1	0	0	0	1	0	15
a_4	0	0	1	1	-5	0	1
a_6	0	0	1/4	0	1/2	1	-1/2

Bideraezina

$x_2 \geq 2 \Rightarrow \cancel{2}-x_2 \leq -2$

	0	0	2	0	2	0	102
a_2	0	1	-1/4	0	-1/2	0	3/2
a_1	1	0	0	0	1	0	15
a_4	0	0	1	1	-5	0	1
a_6	0	-1	0	0	0	1	-2

⇒

	0	0	2	0	2	0	102	-8
a_2	0	1	-1/4	0	-1/2	0	3/2	1
a_1	1	0	0	0	1	0	15	0
a_4	0	0	1	1	-5	0	1	-4
a_6	0	0	$\boxed{-1/4}$	0	-1/2	1	-1/2	

	~~0~~	~~0~~	~~2~~	~~0~~	~~2~~	~~0~~
~~a_2~~	~~0~~	~~1~~	~~-1/4~~	~~0~~	~~-1/2~~	~~0~~
~~a_1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
~~a_4~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~-5~~	~~0~~
~~a_6~~	~~0~~	~~0~~				

	0	0	0	0	-2	8	98	-2/7
a_2	0	1	0	0	-20	-1	2	0
a_1	1	0	0	0	1	0	15	-1/7
a_4	0	0	0	1	$\boxed{-7}$	4	-1	
a_3	0	0	1	0	2	-4	2	-2/7

			0	2/7	0	48/7	
a_2	0	1	0	0	0		
a_1	1	0	0	1/7	0		
a_5	0	0	0	-1/7	1	-4/7	1/7

2.3

max $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

kaven meude

$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 17$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ ete osollech

	5/2	2	0	0	3/2	33/2
a_4	-7/2	-2	0	1	-3/2	1/2
a_3	3/2	1	1	0	1/2	11/2

$x_4 \leq 0$

	5/2	2	0	0	3/2	0	33/2
a_4	-7/2	-2	0	1	-3/2	0	1/2
a_3	3/2	1	1		1/2	0	11/2
a_6	0	0	0	1	1/2	1	0

$\Rightarrow$

	5/2	2	0	0	3/2	0	33/2
a_4	-7/2	-2	0	1	-3/2	0	1/2
a_3	3/2	1	1	0	1/2	0	11/2
a_6	7/2	2	0	0	2	1	-1/2

Bidercebike

$x_4 \geq 1 \Rightarrow -x_4 \leq -1$

	5/2	2	0	0	3/2	0	33/2
a_4	-7/2	-2	0	1	-3/2	0	1/2
a_3	3/2	1	1	0	1/2	0	11/2
a_6	0	0	0	-1	0	1	-1

$\Rightarrow$

	5/2	2	0	0	3/2	0	33/2	-5/7
a_4	-7/2	-2	0	1	-3/2	0	1/2	1
a_3	3/2	1	1	0	1/2	0	11/2	-3/7
a_6	$\boxed{-7/2}$	-2	0	0	-3/2	1	-1/2	

	0	4/7	0	0	3/7	5/7	113/7
a_4	0	0	0	1	0	1	1
a_3	0	1/7	1	0	-1/7	3/7	37/7
a_1	1	4/7	0	0	3/7	-2/7	1/7

$x_3 \leq 5$

	0	4/7	0	0	3/7	5/7	0	113/7
a_4	0	0	0	1	0	1	0	1
a_3	0	1/7	1	0	-1/7	3/7	0	37/7
a_1	1	4/7	0	0	3/7	-2/7	0	1/7
a_7	0	0	1	0	0	0	1	5

$\Rightarrow$

	0	4/7	0	0	3/7	5/7	0	113/7	5/3
a_4	0	0	0	1	0	1	0	1	-7/3
a_3	0	1/7	1	0	-1/7	3/7	0	37/7	-1
a_1	1	4/7	0	0	3/7	-2/7	0	1/7	2/3
a_7	0	1/7	0	0	1/7	$\boxed{-3/7}$	1	-2/7	

	0	1/3	0	0	0	0	-5/3	349/21
a_4	0	1/3	0	1	4/21	0	7/3	2/3
a_3	0	0	1	0	1/3	0	1	
a_1	1	10/21	0	0	1/3	0	-2/3	
a_6	0	-1/3	0	0	-1/3	1	-7/3	

$-x_3 \le -6$

	0	4/7	0	0	3/7	5/7	113/7
a_4	0	0	0	1	0	1	1
a_3	0	1/7	1	0	-1/7	3/7	37/7
a_1	1	4/7	0	0	3/7	-2/7	1
a_7	0	0	-1	0	0	1	-6

	0	4/7	0	0	3/7	5/7	113/7	
a_4	0	0	0	1	0	1	1	
a_3	0	1/7	1	0	-1/7	3/7	37/7	
a_1	1	4/7	0	0	3/7	-2/7	1	
a_7	0	1/7	0	0	$\boxed{-1/7}$	10/7	-5/7	

					0		14	-3
					0		1	0
a_4					0		6	1
a_3					0		3/7	-3
a_1					0			
a_5	0	-1	0	0	1	-10	5	

2.1

max $z = x_1 + 4x_2$

hona menda

$x_1 + x_2 \leq 7$

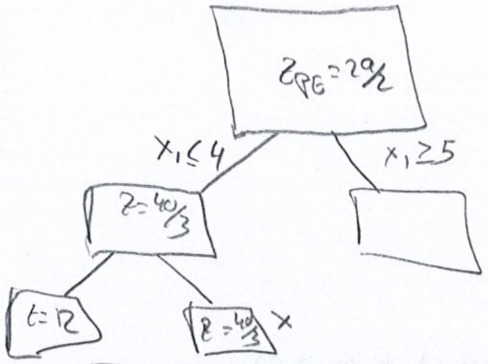
$-x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ eta osoak

	0	0	7/4	3/4	29/2
a_1	1	0	3/4	-1/4	9/2
a_2	0	1	1/4	1/4	5/2

$x_1 = 9/2 \Rightarrow$ $x_1 \leq 4$

$x_1 \geq 4 \Rightarrow -x_1 \leq 4$



$\underline{x_1 \leq 4}$

	0	0	7/4	3/4	0	29/2
a_1	1	0	3/4	-1/4	0	9/2
a_2	0	1	1/4	1/4	0	5/2
a_5	1	0	0	0	1	4

$\Rightarrow$

	0	0	7/4	3/4	0	29/2	
a_1	1	0	3/4	-1/4	0	9/2	-7/3
a_2	0	1	1/4	1/4	0	5/2	-1
a_5	0	0	$\boxed{-3/4}$	1/4	1	-1/2	-1/3
	0	0	0	4/3	7/3	40/3	
a_1	1	0	0	0	1	4	
a_2	0	1	0	1/3	1/3	7/3	
a_3	0	0	1	-1/3	-4/3	2/3	

$\underline{x_2 \leq 2}$

	0	0	0	4/3	7/3	0	40/3
a_1	1	0	0	0	1	0	4
a_2	0	1	0	1/3	1/3	0	7/3
a_3	0	0	1	-1/3	-4/3	0	2/3
a_6	0	1	0	0	0	1	2

$\Rightarrow$

	0	0	0	4/3	7/3	0	40/3	
a_1	1	0	0	0	1	0	4	-4
a_2	0	0	0	1/3	1/3	0	7/3	0
a_3	0	0	1	-1/3	-4/3	0	2/3	-1
a_6	0	0	0	$\boxed{-1/3}$	-1/3	1	-1/3	1
							12	
							4	
							2	
							1	
							1	

$\underline{x_2 \geq 3 \Rightarrow -x_2 \leq 3}$

	0	0	0	4/3	7/3	0	40/3
a_1	1	0	0	0	1	0	4
a_2	0	1	0	1/3	1/3	0	7/3
a_3	0	0	1	-1/3	-4/3	0	2/3
a_6	0	0	0	1/3	1/3	1	16/3

Soluzio optimoa beira ez osoa

Bideraezina

$-x_1 \leq 5$

	0	0	7/4	3/4	0	29/2
a_1	1	0	3/4	-1/4	0	9/2
a_2	0	1	1/4	1/4	0	5/2
a_5	-1	0	0	0	1	-5

$\Rightarrow$

	0	0	7/4	3/4	0	29/2	-3
a_1	1	0	3/4	-1/4	0	9/2	1
a_2	0	1	1/4	1/4	0	5/2	-1
a_5	0	0	3/4	$\boxed{-1/4}$	1	-1/2	
					0	13	
					0	5	
					0	2	
					1	2	

$x_1^* = 5 \quad x_2^* = 2 \quad \cancel{x_5^*}$

$z^* = 13$

2.4

Max $z = x_1 + x_2 + x_3$

haven mende

$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 42$

$2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 52$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ ele asode

	0	1/19	0	3/19	2/19	230/19
a_1	1	-11/19	0	5/19	-3/19	54/19
a_3	0	31/19	1	-2/19	5/19	176/19

$x_1 \leq 2$

	0	1/19	0	3/19	2/19	0	230/19
a_1	1	-11/19	0	5/19	-3/19	0	54/19
a_3	0	31/19	1	-2/19	5/19	0	176/19
a_6	1	0	0	0	0	1	2

$\Rightarrow$

	0	1/19	0	3/19	2/19	0	230/19	-3/5
a_1	1	-11/19	0	5/19	-3/19	0	54/19	-1
a_3	0	31/19	1	-2/19	5/19	0	176/19	2/5
a_6	0	11/19	0	$\boxed{-5/19}$	3/19	1	-16/19	

	0	2/5	0	0	1/5	3/5	58/5
a_1	1	0	0	0	0	1	2
a_3	0	7/5	1	0	1/5	-2/5	48/5
a_4	0	-11/5	0	1	-3/5	-19/5	16/5

$x_3 \leq 9$

	0	2/5	0	0	1/5	3/5	0	58/5
a_1	1	0	0	0	0	1	0	2
a_3	0	7/5	1	0	1/5	-2/5	0	48/5
a_4	0	-11/5	0	1	-3/5	-19/5	0	16/5
a_7	0	0	1	0	0	0	1	9

$\Rightarrow$

$-\frac{2}{7}$		0	2/5	0	0	1/5	3/5	0	58/5
0	a_1	1	0	0	0	0	1	0	2
-1	a_3	0	7/5	1	0	1/5	-2/5	0	48/5
$\frac{11}{7}$	a_4	0	-11/5	0	1	-3/5	-19/5	0	16/5
	a_7	0	$\boxed{-7/5}$	1	0	-1/5	2/5	1	$-\frac{3}{5}$

	0	0	2/7	0	1/7	5/7	7/7	80/7
a_1	1	0	0	0	0	1	0	2
a_3	0	0	2	0	0	0	1	9
a_4	0	0	$-\frac{11}{7}$	1	$-2/7$	$-\frac{31}{7}$	$-1/7$	$\frac{29}{7}$
a_2	0	1	$-\frac{5}{7}$	0	1/7	$-2/7$	5/7	3/7

Biderceziloa

	0	2/5	0	0	1/5	$-3/5$	0	58/5	$-3/2$
a_1	1	0	0	0	0	1	0	2	$-5/2$
a_3	0	7/5	1	0	1/5	$-2/5$	0	48/5	1
a_4	0	$-11/5$	0	1	$-3/5$	$-\frac{19}{5}$	0	16/5	19/2
a_7	0	7/5	0	0	1/5	$\boxed{-2/5}$	1	$\boxed{\frac{-20}{5}}$	

$\Rightarrow$ 11, 1, 10, 7

$x_1 - \le -3$

				3/19	2/19	0	$\frac{230}{19}$	$-1/11$
	0	1/19	0	5/19	$-3/19$	0	54/19	1
a_1	1	$-11/19$	0	$-2/19$	5/19	0	176/19	$-\frac{31}{11}$
a_3	0	31/19	1				$-3/19$	
a_6	0	$\boxed{-11/19}$	0	5/19	$-3/19$	ϕ		
				2/11		1/11	133/11	
							3	
				7/11	$-2/11$	3/11	97/11	
	0	0	1	$-\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\boxed{\frac{-19}{11}}$	3/11	
	0	1	0					

$x_3 \le 9$

				2/11	1/11		133/11	$-1/2$
a_1	x	x	x	x			3	
a_3	0	0	1	7/11	$-2/11$	3/11	97/11	1
a_2	0	1	0	$-5/11$	3/11	$-19/11$	3/11	$-3/2$
a_7	0	0	0	+7/11	$\boxed{-2/11}$	+31/11	$-13/11$	

3.1.

$$\max z = 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5$$

kavea mende

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 11$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$ ado 1

$x_4 = y_1$

$x_2 = y_2$

$x_3 = y_3$ $\Rightarrow$

$x_5 = y_4$

$x_1 = y_5$

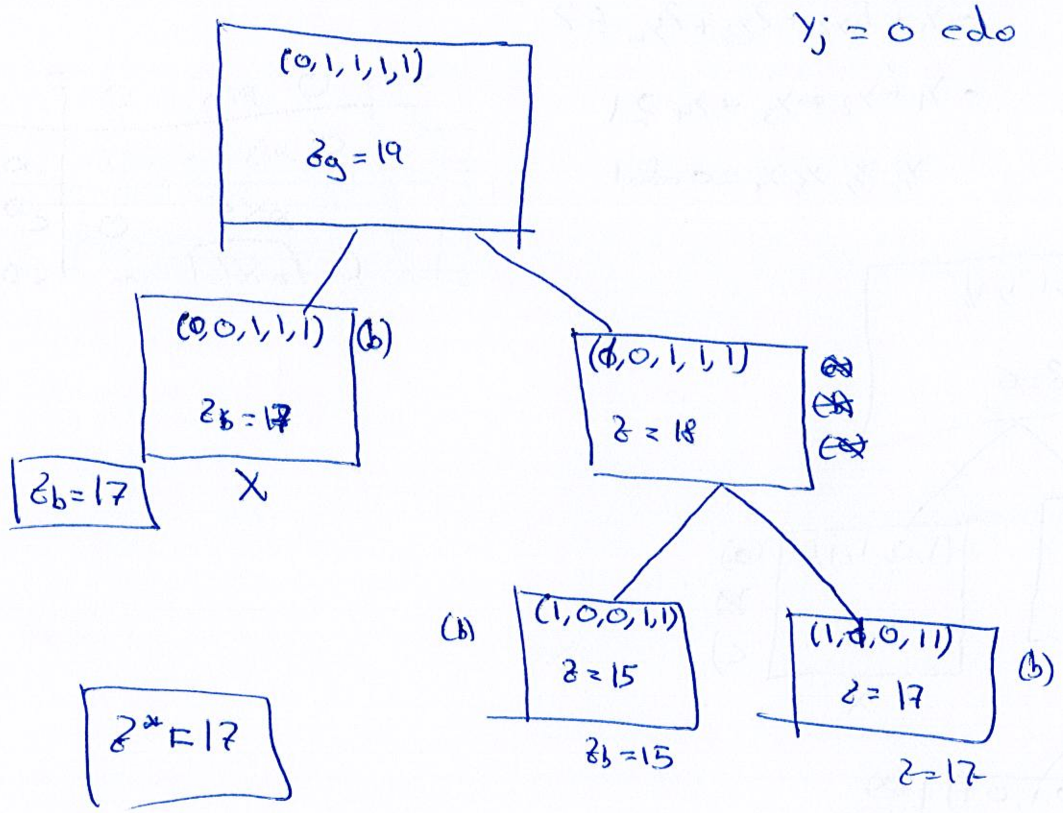
$$\max z = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 8y_5$$

koven mende

$$y_1 + y_2 + 4y_3 + 4y_4 + 2y_5 \leq 10$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 5y_4 + 3y_5 \leq 11$$

$y_j = 0$ edo



3.5

$$\max \; z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4$$

haca mende

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 \le 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ edo } 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = 1 - y_1$$

$$x_1 = y_2$$

$$x_3 = 1 - y_3$$

$$x_4 = y_4$$

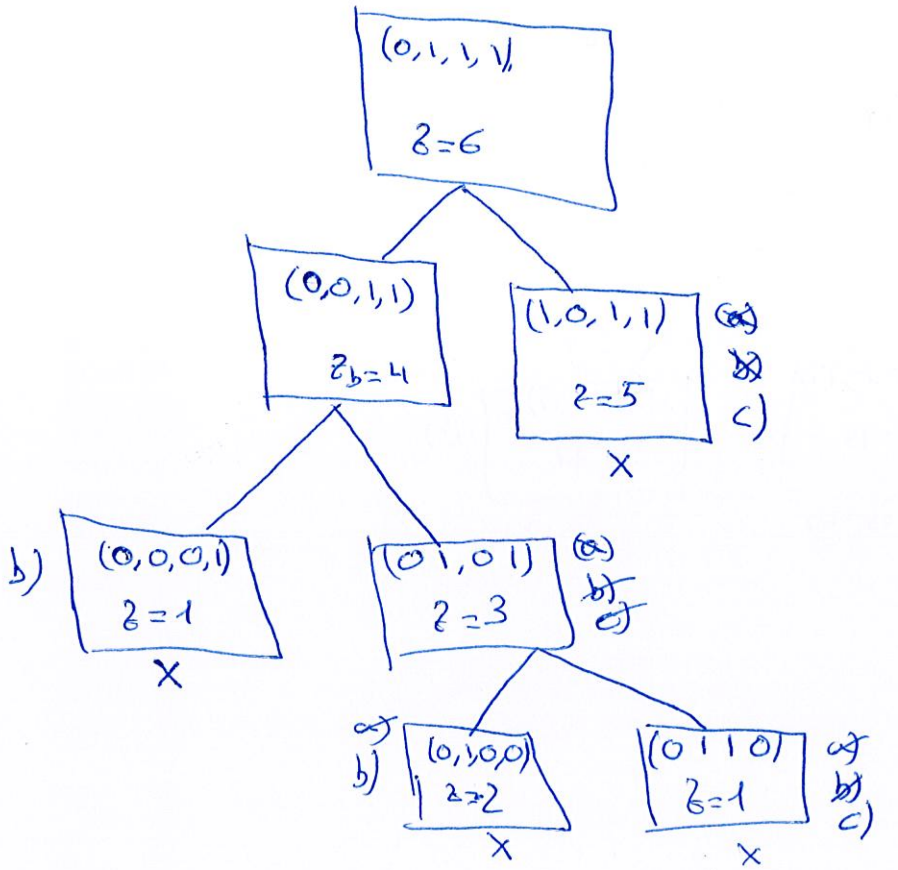
$$\Longrightarrow \quad \max \; z = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 5y_4 - 4$$

haca mende

$$-y_1 + 5y_2 - 2y_3 + 7y_4 \le 7$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \ge 1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = 0 \text{ edo } 1$$



$\boxed{z_b = 1}$

$\boxed{z^* = 1}$

Garraio-Problema eta Esleipen-Problema. Ariketak

1. Lau ekoizpen-zentrotan, E_1, E_2, E_3 eta E_4, produktu bat ekoizten da eta hiru banaketa-zentrotara bidali behar dira ekoitzitako unitateak: B_1, B_2 eta B_3. Ekoizpen-zentro bakoitzaren hilabeteko ekoizpen-ahalmena 15 tonakoa da. Banaketa-zentroetara hilabetean 30, 16 eta 14 tona bidali behar dira, hurrenez hurren.

   Ekoizpen-zentroetatik banaketa-zentroetara dauden distantziak honako taulan datoz adieraziak:

	B_1	B_2	B_3
E_1	100	100	50
E_2	650	110	100
E_3	60	65	75
E_4	150	90	70

   Produktu tona bat garraiatzearen kostua 0.5 eurokoa da garraiatuko den km bakoitzeko. Garraio-sistema kostu minimoan antolatu nahi da. Idatz ezazu garraio-problema honi dagokion matrize-forma.

2. Enpresa batek lau ekoizpen-zentro ditu lau hiri desberdinetan: E_1, E_2, E_3 eta E_4. Lauretan produktu bera ekoizten bada ere, ekoizpen-prozesuaren kostua eta ekoizpen-ahalmena desberdinak dira. Ikus taula:

Ekoizpen-zentroak	Ekoizpenaren kostua	Ekoizpen-ahalmena
E_1	15	100
E_2	9	85
E_3	7	140
E_4	13	125

   Ekoitzitako produktu-unitateak 3 saltokietara garraiatzen dira: S_1, S_2 eta S_3. Honako taulan ikus daiteke saltoki bakoitzean produktu-unitatea zein salneurritan saltzen den, eta baita saltoki bakoitzaren eskaria:

Saltokiak	Salneurria	Eskaria
S_1	45	125
S_2	33	150
S_3	40	175

   Produktuak ekoizpen-zentroetatik saltokietara garraiatzeak honako kostuak eragiten ditu:

	S_1	S_2	S_3
E_1	4	5	3
E_2	6	3	4
E_3	4	4	3
E_4	7	2	3

   Helburu funtzioa maximizatzea duen garraio-problema honi dagokion matrize-forma idatz ezazu.

3. Enpresa batek E_1, E_2 eta E_3 ekoizpen-zentroetan ekoizten du bere produktua, zentroen ekoizpen-ahalmenak 130, 200 eta 170 produktu-unitatekoak direlarik, hurrenez hurren. B_1, B_2, B_3 eta B_4 bezeroekin honako konpromezuak hartu ditu: B_1 bezeroari 150 produktu-unitate saldu behar dizkio, B_2 bezeroari 175, eta B_3 bezeroari gutxienez 125. Eskari horiek zerbitzatu ondoren geratzen diren produktu-unitateak erosteko prest daude B_3 eta B_4 bezeroak, eta ahalik eta unitate kopuru handiena erosi nahi dute biek.

   Enpresak produktu-unitateak bezeroei saltzearen ondorioz lortuko dituen irabaziak honakoak dira:

	B_1	B_2	B_3	B_4
E_1	60	40	45	55
E_2	70	55	65	60
E_3	80	60	55	75

   Helburu funtzioa maximizatzea duen garraio-problema honi dagokion matrize-forma idatz ezazu.

4. Enpresa bat datozen hiru asteetarako ekoizpena antolatzen ari da. Bertako langileek lanorduetan eta lanorduetatik kanpo dihardute lanean. Astero 8 makina saldu behar dira. Honako taulan ikus daiteke datozen hiru asteetarako aurrikusita dagoen ekoizpen-ahalmena, bai lanorduetan eta bai lanorduetatik kanpo lan eginez, eta lanorduaren kostua:

Astea	Ekoizpen-ahalmena lanorduetan	Ekoizpen-ahalmena lanorduetatik kanpo	Lanorduaren kostua (euro)
1	5	5	20
2	4	5	30
3	2	5	45

   Lanorduetatik kanpo lan egitea garestiagoa da lanorduetan baino; 10 euro gehiago kostatzen da. Ekoitzitako makina bat saldua izan ez bada, biltegiratua izan daiteke biltegiratuko den aste bakoitzeko 15 euroko kostua aurrikusi beharko bada ere. Aurreko asteetako ekoizpenetik soberan geratutako 2 makina daude biltegian, eta datozen hiru asteetako eskariak zerbitzatzeko erabiliak izango dira. Datozen hiru asteak pasa ondoren ez da biltegian soberan geratutako makinarik eduki nahi.

   Enpresak makinen ekoizpena kostu minimoan antolatu nahi du. Idatz ezazu garraio-problema honi dagokion matrize-forma.

5. Datozen garraio-kostuen taulak izanik, kalkula itzazu hasierako oinarriko soluzio bideragarriak ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa erabiliz eta Vogel-en metodoa erabiliz.

   5.1

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza
I_1	9	11	11	8	400
I_2	7	12	14	10	200
I_3	11	10	12	16	620
Eskaria	300	340	400	440	

5.2

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	Eskaintza
I_1	80	40	60	30	25	30
I_2	50	20	40	35	28	30
I_3	65	50	30	22	26	30
Eskaria	10	10	20	20	30	

5.3

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	Eskaintza
I_1	30	28	12	15	20	10	80
I_2	10	15	12	20	25	10	100
I_3	8	10	6	8	8	10	75
I_4	20	22	24	20	25	21	120
I_5	25	20	30	35	32	28	60
I_6	27	30	25	14	20	26	65
Eskaria	100	100	50	50	100	100	

6. Garraio-kostuen taula hauetarako hasierako oinarriko soluzio bideragarria kalkula ezazu Vogel-en metodoa erabiliz. Ondoren, garraio-problemarako algoritmoa erabil ezazu soluzio optimoa kalkulatzeko.

6.1

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza
I_1	20	19	10	15	32
I_2	17	15	6	10	23
I_3	18	14	2	6	30
I_4	21	23	3	6	47
Eskaria	70	33	22	7	

6.2

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza
I_1	15	23	20	25	30
I_2	14	17	11	17	12
I_3	14	7	6	10	5
I_4	8	9	10	5	10
Eskaria	20	4	10	31	

6.3

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	Eskaintza
I_1	5	2	3	8	10	10
I_2	7	5	4	5	8	12
I_3	6	3	7	5	9	12
Eskaria	4	5	7	9	9	

6.4

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	Eskaintza
I_1	15	14	9	16	11	4
I_2	10	15	8	14	11	6
I_3	13	10	13	15	–	9
Eskaria	3	4	7	4	6	

6.5

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	Eskaintza
I_1	32	30	27	26	25	42
I_2	28	25	22	22	19	40
I_3	35	36	29	38	25	48
I_4	20	22	15	17	16	10
Eskaria	18	50	8	52	12	

6.6

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza
I_1	20	10	5	15	20
I_2	12	8	10	9	5
I_3	11	15	8	9	12
I_4	15	7	15	6	2
I_5	10	20	15	10	6
Eskaria	15	15	5	5	

7. Enpresa batean 4 lanpostu berri sortu dira: A, B, C eta D. Deialdi publiko baten azterketetara 5 lagun aurkeztu dira: L_1, L_2, L_3, L_4 eta L_5. Azterketen helburua aurkeztutako lagunen lanpostuetarako egokitasuna neurtzea izan da. Taulakoak dira azterketetan egin dituzten akats kopuruak:

	A	B	C	D
L_1	16	4	17	3
L_2	13	14	8	11
L_3	2	19	–	9
L_4	21	12	13	16
L_5	22	16	25	12

L_3 laguna ez da C lana burutzeko gai, eta esleipen hori debekatu egin beharko da. Lagun eta lanpostu arteko esleipen optimoa azterketetan guztira egindako akats kopurua minimizatuko duena izango da.

Esleipen-problemarako algoritmoa erabiliz, erabaki ezazu lagun eta lanpostu arteko esleipen optimoa. Esleipen optimo horren arabera, zein lagun geratuko da lanposturik gabe?

8. Garraio-lanetan diharduen enpresa batek 4 kamioi ditu lau hiri desberdinetan: K_1, K_2, K_3 eta K_4. Beste bost hiritan dauden ekoizpen-zentroetatik kamioi eskariak jaso dira: H_1, H_2, H_3, H_4 eta H_5. Kamioiak ekoizpen-zentro horietara bidali behar dira eguneko garraioak burutzeko. Distantziak taulakoak dira.

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
K_1	13	1	8	7	10
K_2	12	6	4	4	7
K_3	18	10	14	21	20
K_4	14	13	7	12	11

Esleipen-problemarako algoritmoa erabiliz, erabaki ezazu kamioi bakoitza zein hiritako ekoizpen-zentrora bidaliko den, helburua kamioiek guztira egin beharreko distantzia minimizatzea dela jakinda. Zenbat modu desberdinetara esleitu daitezke kamioiak hirietara? Kasu bakoitzean, zein hiriko ekoizpen-zentroak eskatu beharko dio kamioi bat beste garraio-enpresa bati?

9. Honako esleipen-kostuen taulak izanik, esleipen-problemarako algoritmoa erabiliz kalkula ezazu iturburuen eta helburuen arteko esleipen optimoa.

9.1

	H_1	H_2	H_3	H_4
I_1	10	6	11	10
I_2	18	10	10	16
I_3	2	9	11	4
I_4	11	15	5	15

9.2

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
I_1	11	4	11	12	17
I_2	7	3	12	5	14
I_3	3	1	9	3	10
I_4	6	9	14	12	15
I_5	13	9	4	13	7

9.3

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
I_1	23	17	2	27	9
I_2	29	8	3	25	19
I_3	24	34	22	38	5
I_4	13	11	32	15	30
I_5	36	26	4	39	37

6.Gaia: Garraio-probema eta Esleipen-problema

Garraio-problema

Matrize-forma

	H_1	H_2	...	H_n	Eskaintza
I_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
I_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	a_i $\vdots$
I_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Eskaria	b_1	b_2	...	b_n	

Saiatu behar da, problema orekatua lortzen, hau da, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ betetzen. Horrela ez bada ondorengo pausoak jarraitu behar dira.

1. kasuan: $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j$ bada, hau da, Eskaintza eskaria baino txikiagoa bada:

I_{m+1} gezurrezko iturburu-puntu bat sortu behar da.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_j$$

2. kasuan: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ bada, Eskaria eskaintza baino ~~handiago~~ txikiagoa izanik.

H_{n+1} gezurrezko helburu-puntu bat sortuko da:

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Beharrezkoa da problema Orekatua izatea, nahi bada problemak Soluzioa izatea.

Garraio_Problema

1. Adibidea

Ekoizpen-problema

Ekoizpen-ahalmena: 150 hiruhilabeteko

Eskaria: 200, 150, 200, 100

Produktu unitate baten kostua: 2

Produktu unitate baten biltegiratze kostua: 0'5

	1	2	3	4	Eskaintza
1	2	2'5	3	3'5	150
2	M	2	2'5	3	150
3	M	M	2	2'5	150
4	M	M	M	2	150
Eskaria	200	150	200	100	

2. Adibidea

A, B, C zentroetan Ekoizpen-ahalmena: 1500

Eskaria: 1000, 1200, 1500, 1000.

Prezioa: 140

Garraio kostua

	1	2	3	4
A	30	10	25	20
B	15	25	30	10
C	20	30	15	20

	1	2	3	4	Eskaintza
A	80	100	85	90	1500
B	95	85	80	100	1500
C	90	80	95	90	1500
Eskaria	1000	1200	1500	1000	

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1} b_j$$

Eskaintza eskaria baino txikiagoa da

└D

Ondorioz, gezurrezko iturburu-puntu bat sortu behar da.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$c_{m+1\,j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Horrela,

	1	2	3	4	Eskaintza
A	80	100	85	90	1500
B	95	85	80	100	1500
C	90	80	95	90	1500
D	0	0	0	0	200
Eskaria	1000	1200	1500	1000	

Orekatuko litzateke, Horrela garraio problema orekatua izango da.

Ipar-mendebaldeko ertzaren metodoa

1. urratsa: Ipar-mendebaldeko (i,j) ertza aukeratu
2. urratsa: x_{ij} aldagaiari ahalik eta fluxu handiena esleitu.

$$x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$$

a_i eta b_j eguneratu

a_i: Minimoa bada → I_i iturburuaren eskaintza zero bihurtuko da. Eta i errenkada ez da kontuan hartuko. eta j helburu-puntuaren eskaria $b_j - a_i$ balioera eguneratzen da.

b_j: Minimoa → helburu-puntuaren eskaria 0, j zutabea ez da kontuan hartuko. $a_i - b_j$ balioa eguneratu i Iturburua.

$a_i = b_j$ → eskaintza eta eskaria → 0-ra, ~~j~~ zutabea eta errenkada ez dira kontuan hartuko:

3 urratsa → Bi kasu

Errenkada edo zutabe bakarra → esleitu geratzen diren eskaintza eta eskariak

Adibidea

	P_1	P_2	P_3	Eskaintza
A_1	8	6	10	~~2000~~ 500
A_2	10	4	9	2500
Eskaria	1500	2000	1000	

⇓

	P_1	P_2	P_3	Eskaintza
A_1	1500			500
A_2				
	1500	~~2000~~	1000	

⇓

	P_1	P_2	P_3	
A_1	1500	500		500
A_2		1500	1000	2500
	1500	~~15000~~ 1000	1000	

⇒ Soluzioa:

$x_{11} = 1500$

$x_{12} = 500$

$x_{13} = 0$

$x_{21} = 0$

$x_{22} = 1500$

$x_{23} = 1000$

$z = 8 \times 1500 + 6 \cdot 500 + 4 \cdot 1500 + 9 \cdot 1000 = 30000.$

Vogel metodoa

Vogel-en metodoan posizioa aukeratzeko errenkadako eta zutabeko diferentziak kalkulatzen dira.

ED_i = i errenkadako bi kosturik txikienen arteko diferentzia balio absolutuan, $i = 1, 2, \dots, m$.

ZD_j = j zutabeko bi kosturik txikienen arteko diferentzia balio absolutuan. $j = 1, 2, \dots, n$.

Soluzio bideragarria kalkulatzen.

1. Urratsa: ED_i eta ZD_j diferentziak kalkulatu.

2. urratsa: x_{ij} aldagaiari ahal den fluxurik handiena esleitu $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Eta a_i eta b_j eguneratu.

Minimoa a_i bada I_i iturburu-puntuaren eskaintza zero bihurtuko da. b_j balioa $b_j - a_i$

Minimoa b_j bada helburu puntuaren eskaria zero bihurtuko da. i Iturburu-puntuaren eskaintza $a_i - b_j$ balioa eguneratu

Baldin $a_i = b_j$ iturburuaren eskaintza eta helburuaren eskaria zero.

3. Urratsa: Bi kasu gerta daitezke

Errenkada edo zutabe bakarra badago, geratzen diren produktuen eskaintza eta eskariak esleitu. Amaitu.

Bestela, 1. urratsera joan.

Adibidea

	P1	P2	P3	Eskaintza	
A1	8	6	10	2000	2
A2	10	4	9	2500	5 1 →
Eskaria	1500	2000	1000		
	2	2	1		

$Z = 8 \times 1500 + 10 \times 500 + 4 \times 2000 + 9 \times 500 =$
$= 29500$

	P1	P2	P3	Eskaintz
A1	1500		500	2000
A2		2000	500	2500
Eskaria	0	0	1000	

Garraio - Problemak

1. Ariketa

	B_1	B_2	B_3	Eskaintza
E_1	100	100	50	15
E_2	650	110	100	15
E_3	60	65	75	15
E_4	150	90	70	15
Eskaria	30	16	14	

Problema orekatua lortu da.

2. Ariketa

	S_1	S_2	S_3	Eskaintza
E_1	26	15	22	100
E_2	30	28	24	85
E_3	34	22	30	140
E_4	25	18	24	125
Eskaria	125	150	175	

3. Ariketa

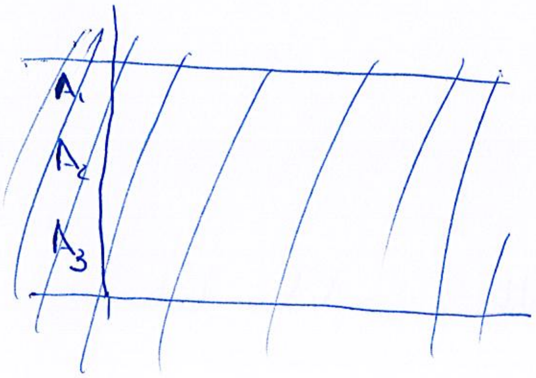
	B_1	B_2	B_3	B_4	Eskaintza
E_1	60	40	45	55	130
E_2	70	55	65	60	200
E_3	80	60	55	75	170
Eskaria	150	175	125	50	

175

$\Rightarrow$

	B_1	B_2	B_3	B_4	Eskaintza
E_1	60	40	45	55	130
E_2	70	55	65	60	200
E_3	80	60	55	75	170
E_4	$-M$	$-M$	0	0	50
	150	175	175	50	

4. Ariketa



	A_1	A_2	A_3	Esleintza
Prest	0	15	30	2
1. L	20	35	50	5
1. E	30	45	60	5
2. L	M	30	45	4
2. E	M	40	55	5
3. L	M	M	45	2
3. E	M	M	45	5
Esleria	8	8	8	

5.3

	0	40			10 25	70			
	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6			
I_1	30	28	12	15	20	10	80	2	30
I_2	10	15	12	20	25	10	100	0	
I_3	8	10	6	8	8	10	75	0	
I_4	20	22	24	20	25	21	120	0 1	80
I_5	25	20	30	35	32	28	60	3 8	
I_6	22	30	25	14	20	26	65	6	15
	100	100	50	50	100	100			
	10	8	0	6	5	5			

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
I_1			50			30
I_2	100					
I_3					75	
I_4		40			10	70
I_5		60				
I_6				50	15	

$Z = 7300$

Esleipen-problema

n iturburu-puntuak (I_i), n helburu-puntuak (H_j). I_i iturburua H_j helburura esleitzeko kostua c_{ij} da.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{baldin } I_i \text{ eta } H_j \text{ elkarri esleitzen badira} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

hauen mende

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Iturburu-puntuen kopurua eta helburu-puntuen kopurua desberdinak badira, problema orekatu behar da gezurrezko errenkada edo zutabeak sortuz. Lerro horietan kostuak zero izango dira.

Esleipen problemaren algoritmoa

1. urratsa: Problema orekatu.

2. urratsa: Errenkada bakoitzeko elementu guztiei errenkadako minimoa kendu behar zaio. $u_i = \min\{c_{ij}\} \rightarrow c'_{ij} = c_{ij} - u_i$

3. urratsa: Zutabe bakoitzeko elementuei zutabeko minimoa kendu. $v_i = \min\{c'_{ij}\} \rightarrow c''_{ij} = c'_{ij} - v_j$

4. urratsa: Zeroak esleitu, zero kopuru txikieneko errenkadatik edo zutabetik hasita. Errepikatu zeroak gelditzen ez diren arte. Errenkada guztiek ~~ze~~ esleitutako ~~zeroak~~ zero bat badute, soluzio optimoa da. Bestela, 5. urratsa.

5. urratsa: Lerroak markatu.

a) Esleitutako zerorik ez duen errenkada oro markatu.

b) Errenkada horretan ezabatutako zeroa duten zutabeak markatu.

c) Markatutako zutabeetan zero bat esleituta duten errenkada markatu.

- b) eta c) errepikatu errenkada edo zutabe gehiago markatu ezin ahal izan arte.

Markatuak izan ez diren errenkadak eta markatutako zutabeak zero guztiak estaltzen dituzte. Errenkada eta zutabe horiek estali eta 6. urratsera joan.

6. urratsa: Zero berriak sortu eta 4. urratsera joan.

Adibidea

	1	2	3	4
A	58	58	60	54
B	66	70	70	78
C	106	104	100	95
D	52	54	64	54

3. Ariketa

Maximizatzen ari gara ondorioz -M erabili behar da.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
E_1	60	40	45	55	130
E_2	70	55	65	60	200
E_3	80	60	55	75	170
	150	175	125 175	50	

60	40	45	55	130
70	55	65	60	200
80	60	55	75	170
-M	-M	0	0	50

	$v_1=-10$	$v_2=-3$	$v_3=-6$	$v_4=0$
$u_1=25$	15 / 2	23 / -	20 / -	25 / 28
$u_2=17$	14 / -	12 / -	11 / 10	12 / 2
$u_3=10$	14 / -	2 / 4	6 / -	10 / 1
$u_4=5$	8 / -	4 / -	10 / -	~~15~~ / 10
$u_5=0$	0 / -	0 / -	0 / -	0 / 8

$x_{11}^* = 2$; $x_{14}^* = 28$

$x_{23}^* = 10$; $x_{24}^* = 2$

$x_{32}^* = 4$ $x_{34}^* = 1$

~~$x_{51}^* = 8$~~

$x_{45}^* = 10$

$x_{55}^* = 8$

$z^* = 962$

6.2 Ariketa

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza
I_1	15	23	20	25	30
I_2	14	17	11	17	12
I_3	14	7	6	10	5
I_4	8	9	10	5	10
Eskaria	20	4	10	31	

→ Vogel

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza					
I_1	15	23	20	25	30	5	5	5	5	5
I_2	14	17	11	12	12	3	3	3	3	3
I_3	~~14~~	~~7~~	~~6~~	~~10~~	~~5~~	1	1	1		
I_4	~~8~~	~~9~~	10	5	10	3	3			
I_5	~~0~~	~~0~~	0	0	8	0				
	20	4	10	31						

→ Vogel

H_1	H_2	H_3	H_4
8	7	6	5
6	2	4	5
0	10	5	7
0		5	7
1		9	8

	H_1	H_2	H_3	H_4	
I_1	2			28	30
I_2			10	2	12
I_3		4		1	5
I_4	10				10
I_5	8				8
	20	4	10	31	
	12	0	0	1	
	2			6	
				7	
				7	

$u_1 + v_1 = c_{11} \Rightarrow$

$u_1 + v_2 = c_{12}$ $\quad u_1 + v_3 = c_{13}$ $\quad u_1 + v_4 = c_{14}$ $\quad 15 + v_4 = 25$

	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 10$	
$u_1 = 15$	2 [15]	– [23]	– [20]	28 [25]	30
$u_2 = 7$	– [14]	– [17]	10 [11]	2 [12]	12
$u_3 = 0$	– [14]	4 [7]	– [6]	1 [10]	5
$u_4 = 8$	~~10~~ [8]	6 [9]	2 [10]	13 [5]	10
$u_5 = 0$	8 [0]	7 [0]	4 [0]	10 [0]	8
	20	12	2	0	

$u_5 + v_2 - c_{52} = 7$

Handiena aukeratu $V_4 = 0$ positiboa orrian

	$v_1 = 10$	$v_2 = -3$	$v_3 = -6$	$v_4 = 0$
$u_1 = 5$	12 [15]	– [23]	– [20]	18 [25]
$u_2 = 12$	– [14]	– [17]	10 [11]	2 [12]
$u_3 = 10$	– [14]	4 [7]	– [6]	1 [10]
$u_4 = 5$	– [8]	– [9]	– [10]	10 [5]
$u_5 =$	8 [0]	2 [0]	4 [0]	0 [0]

$Z = 15 \times 12 + 18 \times 2$

5.2

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5		
I_1	20	40	60	30	25	30	5
I_2	30	20	40	35	28	30	7
I_3	65	50	30	22	26	30	4
	10	10	20	20	30		

~~15~~ 20 10 ~~8~~ X
0 0 5 3
10

20
20 10
100

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
I_1				10	20
I_2	10	10			10
I_3			20	10	

$x^*_{14} = 10$

$x^*_{15} = 20$

$x^*_{21} = 10$

$x^*_{22} = 10$

$x^*_{25} = 10$

$x^*_{33} = 20$

$x^*_{34} = 10$

5.1

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza
I_1	9	11	11	8	400
I_2	7	12	14	10	200
I_3	11	10	12	16	620
Eskaria	300	340	400	440	

$\Rightarrow$

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza	
I_1	9	11	11	8	400	1
I_2	7	12	14	10	200	5 0
I_3	11	10	12	16	620	1 180
I_4	0	0	0	0	260	0
Eskaria	300	340	400	440		

2 2 1 1 8 2

1 16 14 8
2 4 140 40
100

	H_1	H_2	H_3	H_4
I_1				400
I_2	200			
I_3	100	340	140	40
I_4			260	

$z = 11420.$

5. Ariketa

5.1

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza
I_1	9	11	11	8	400
I_2	7	12	14	10	200
I_3	11	10	12	16	620
Eskaria	300	340	400	440	1220

7	10	11	8
2	7	1	8
2	4	3	

1480

Ez da problema orekatua

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza	
I_1	9	11	11	8	400	1 260
I_2	7	12	14	10	200	5 80
I_3	11	10	12	16	620	4 ~~300~~ 180 → 0
I_4	0	0	0	0	260	0
Eskaria	~~300~~	340	400	~~440~~		

7	10	11	8
~~[illegible]~~		140	
~~120~~			

260 140

120 80

~~[illegible]~~ 180

~~[illegible]~~

440

260

Ondorioz, soluzio bideragarria ondorengoak dira

$x^*_{12} = 260$ $\quad x^*_{13} = 140$

$x^*_{21} = 120$ $\quad x^*_{22} = 80$

$x^*_{31} = 180$ $\quad x^*_{34} = 440$

$x^*_{43} = 260$

$z^* = 11 * 260 + 11 * 140 + 7 * 120 + 12 * 80 + 11 * 18 + 440 * 16 =$
$= 15.220$

6. Ariketa

6.1

	H_1	H_2	H_3	H_4				
I_1	20	~~19~~	~~10~~	~~15~~	32	~~5~~ 4	1	10
I_2	17	~~15~~	6	~~10~~	23	4 ~~5~~	2	20
I_3	~~18~~	~~14~~	~~2~~	~~6~~	~~30~~	4 8 · 4		
I_4	21	~~23~~	~~3~~	~~6~~	42	3 ~~15~~	2	40
	20	~~33~~	~~22~~	~~7~~				
	3	4	1	0				

	H_1	H_2	H_3	H_4
I_1	10		22	
I_2	20	3		
I_3		30		
I_4	40			7

Soluzio hobea bilatu behar da.

	$V_1=10$	$V_2=5$	$V_3=0$	$V_4=-5$
$U_1=10$	10 $\boxed{20}$	– $\boxed{19}$	22 $\boxed{10}$	– $\boxed{15}$
$U_2=7$	20 $\boxed{17}$	3 $\boxed{15}$	1 $\boxed{6}$	– $\boxed{10}$
$U_3=9$	1 $\boxed{18}$	30 $\boxed{14}$	7 $\boxed{2}$	– $\boxed{6}$
$U_4=11$	40 $\boxed{21}$	– $\boxed{33}$	8 $\boxed{3}$	7 $\boxed{6}$

$\Rightarrow$

$z^* = 1931$

32 $\boxed{20}$	– $\boxed{19}$	– $\boxed{10}$	– $\boxed{15}$
20 $\boxed{17}$	3 $\boxed{15}$	– $\boxed{6}$	– $\boxed{10}$
– $\boxed{18}$	30 $\boxed{14}$	– $\boxed{2}$	– $\boxed{6}$
18 $\boxed{21}$	– $\boxed{33}$	22 $\boxed{3}$	7 $\boxed{6}$

6,3

6

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	Eskaintza		
I_1	5	2	3	8	10	10	~~7~~ 3	~~3~~
I_2	7	5	4	5	8	12	~~8~~ 1	6
I_3	6	3	7	5	9	12	~~2~~ 3	~~7~~ 3
Eskaria	4	5	7	9	9			
	1	0	1	0	1			

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
I_1			7	3	
I_2				6	6
I_3	4	5			3

Soluzio optimoago bat bilatuko da.

	$v_1=5$	$v_2=2$	$v_3=0$	$v_4=5$	$v_5=8$
$u_1=3$	$\boxed{5}$ 3	$\boxed{2}$ 3	$\boxed{3}$ 7	$\boxed{8}$ 3	$\boxed{10}$ 1
$u_2=0$	$\boxed{7}$ –	$\boxed{5}$ –	$\boxed{4}$ –	$\boxed{5}$ 6	$\boxed{8}$ 6
$u_3=1$	$\boxed{6}$ 4	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{7}$ –	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{9}$ 3

6.2

	$V_1=0$	$V_2=7$	$V_3=4$	$V_4=10$	
$U_1=15$	2 [15]	– [23]	– [20]	28 [25]	28
$U_2=7$	– [14]	– [12]	10 [11]	20 [18]	2
$U_3=0$	– [14]	4 [7]	– [6]	11 [10]	1
$U_4=8$	10 [8]	6 [9]	2 [10]	13 [5]	
$U_5=0$	8 [0]	7 [0]	4 [0]	10 [0]	

$\Longrightarrow$

12			18
		10	2
	4		1
			10
8			

$\Downarrow$

	$V_1=0$	$V_2=7$	$V_3=4$	$V_4=10$
$V_1=15$	12 [15]	– [23]	– [20]	18 [25]
$U_2=7$	– [14]	7 [12]	10 [18]	2 [12]
$U_3=0$	– [14]	4 [7]	– [6]	1 [10]
$V_4=-5$	– [8]	– [9]	– [10]	10 [5]
$V_5=0$	8 [0]	7 [0]	4 [0]	10 [0]

	$V_1=-10$	$V_2=-3$	$V_3=-6$	$V_4=0$
$U_1=25$	20 [15]	– [23]	– [20]	10 [25]
$U_2=17$	– [14]	– [17]	10 [11]	2 [12]
$U_3=10$	– [14]	4 [7]	– [6]	1 [10]
$U_4=5$	– [8]	– [9]	– [10]	10 [5]
$U_5=0$	– [0]	– [0]	– [0]	8 [0]

$\Longrightarrow$ Soluzione ottima

6.3

	$v_1=5$	$v_2=2$	$v_3=0$	$v_4=5$	$v_5=8$
$u_1=3$	^{5} 3	^{2} 3	^{3} 7	^{8} 3	^{10} 1
$u_2=0$	^{7} –	^{5} –	^{4} –	^{5} 6	^{8} 6
$u_3=1$	^{6} 4	^{3} 5	^{7} –	^{5} 1	^{9} 3

$\Rightarrow$

3		7		
			9	3
1	5			6

$\Downarrow$

	$v_1=3$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=3$	$v_5=6$
$u_1=0$	^{5} 3	^{2} 0	^{3} 7	^{8} –	^{10} –
$u_2=2$	^{7} –	^{5} –	^{4} 1	^{5} 9	^{8} 9
$u_3=3$	^{6} 1	^{3} 5	^{7} –	^{5} 1	^{9} 6

$\Leftarrow$

	3	7		
			9	3
4	2			6

$\Downarrow$

	$v_1=5$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=5$	$v_5=8$
$u_1=0$	^{5} 0	^{2} 3	^{3} 7	^{8} –	^{10} –
$u_2=0$	^{7} –	^{5} –	^{4} –	^{5} 9	^{8} 3
$u_3=1$	^{6} 4	^{3} 2	^{7} –	^{5} N	^{9} 6

$x_{11}^{*}=3 \quad x_{13}^{*}=7 \quad x_{24}^{*}=3 \quad x_{25}^{*}=9$

$x_{31}^{*}=\cancel{4} \quad x_{\cancel{32}}^{*}=5 \quad x_{35}=6$

6.2.

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza	
I_1	15	23	20	25	30	5
I_2	14	17	11	17	12	3
I_3	14	7	6	10	5	1
I_4	8	9	10	5	10	3
Eskaria	20	4	10	31		
	8					

Problema orekatua izan behar da soluzioa lortu nahi bada.

	H_1	H_2	H_3	H_4	Eskaintza	
I_1	15	23	20	25	30	5
I_2	14	17	11	17	12	3
I_3	14	7	6	10	~~10~~ 5	1
I_4	8	9	10	5	~~3~~ 10	~~3~~
I_5	0	0	0	0	8	~~8~~ 0
Eskaria	20	4	10	31		
	~~8~~	7	6	5		

				28		0
I_1	2		10	2		0
I_2				1		1 0
I_3		4				∅
I_4	10					∅
I_5	8					
	~~20~~ ~~12~~ 2	~~7~~ ~~3~~ 0	~~10~~ 0	29 28		

Soluzione tabella duale ora:

	$v_1=0$	v_2 7	$v_3=4$	$v_4=10$
$u_1=15$	[15] 2	[23] -1	[20] -1	[25] 28
$u_2=7$	[14] -7	[17] -3	[11] 10	[17] 2
$u_3=0$	[14] -14	[7] 4	[6] -2	[10] 1
$u_4=8$	[8] 10	[9] 6	[10] 2	[5] 13
$u_5=0$	[0] 8	[0] 7	[0] 4	[0] 10

$\Rightarrow$

	-10	-3	-6	$v_4=$
15	[15] 2	[23] -	[20] -	[25] 28
12	[14] -	[17] -	[11] 10	[17] 2
10	[14] -	[7] 4	[6] -	[10] 1
5	[8] -	[9] -	[10] -	[5] 10
10	[0] 8	[0] 7	[0] 4	[0] 10

$u_1 + v_1 - c_{11} = 0$

[15] 20	[23] -	[20] -	[25] ~~28~~ 10
[14] -	[17] -	[11] 10	[17] 2
[14] -	[7] 4	[6] -	[5] 1
[8] -	[9] -	[10] -	[5] 10
[0] -	[0] -	[0] -	[0] 8

Soluzione ottima

$x_{11}^* = 20$ $x_{14}^* = \cancel{28}\ 10$

$x_{23}^* = 10$ $x_{24}^* = 2$

$x_{32}^* = 4$ $x_{34}^* = 1$

$x_{44}^* = 10$ $x_{54}^* = 8$

$z^* = 962$

4.Ariketa

	1.Astea	2.Astea	3.Astea	Eskaintza
Deudendu	0	15	30	2
1.Lan	20	35	50	5
1.Uenp	30	45	60	5
2.Lan	M	30	45	4
2.Uenp	M	40	55	5
3.Lan	M	M	45	2
3.Uenp	M	M	55	5
Eskaria	8	8	8	

6.6

	H_1	H_2	H_3	H_4	
I_1	20	10	5	15	20
I_2	12	8	10	9	5
I_3	11	15	8	9	12
I_4	15	7	15	6	2
I_5	10	20	15	10	6
	15	15	5	5	

$\Rightarrow$

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5		
I_1	20	10	5	15	0	~~20~~ 15	5
I_2	12	8	10	9	0	~~5~~ 2	8 1 3
I_3	11	15	8	9	0	12	8 1 2
I_4	15	7	15	6	0	2	~~6~~ 1 9
I_5	10	20	15	10	0	~~6~~ 1	~~1~~ 0 0
	15	15	5	~~5~~ 3	5		
	1	1	3	0			

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
I_1		15	5		
I_2	2			3	
I_3	12				
I_4				2	
I_5	1				5

	$V_1=0$	$V_2=5$	$V_3=0$	$V_4=1$	$V_5=4$
$U_1=5$	20: –	10: 15	5: 5	15: –	0: 9
$U_2=2$	12: 2	8: –	10: –	9: 3	0: 6
$U_3=12$	11: 12 −5	15: 2	8: 4	9: 4	0: 16 +5
$U_4=1$	15: –	7: –	15: –	6: 2	0: 5
$U_5=1$	10: 1 +5	20: –	15: –	10: –	0: 5

⇒

	$V_1=11$	$V_2=5$	$V_3=0$	$V_4=8$	$V_5=0$
$U_1=5$	20: –	10: 15	5: 5	15: –	0: $\boxed{5}$
$U_2=1$	12: ~~2~~	8: –	10: –	9: 3	0: 1
$U_3=0$	11: 7	15: –	8: –	9: –	0: 5
$U_4=2$	15: –	7: –	15: –	6: 2	0: –
$U_5=-1$	10: 6	20: –	15: –	10: –	0: –

⇓

	$V_1=10$	$V_2=10$	$V_3=7$	$V_4=7$	$V_5=0$
$U_1=0$	20: –	10 0: [illegible]	5: [illegible] 5	15: –	0: 5
$U_2=2$	12: [illegible] −2	8: [illegible] 5	10: –	9: [illegible]	0: 2
$U_3=1$	+2 11: [illegible] 9	15:	8: [illegible]	9: 3 [illegible]	0: [illegible]
$U_4=-1$	15: –	7: [illegible]	15: –	6: 2	0: –
$U_5=0$	10: 6	20: –	15: –	10: –	0: –

7. Ariketa

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A & B & C & D & E \\
\hline
L_1 & 16 & 4 & 17 & 3 & 0 \\
L_2 & 13 & 14 & 8 & 11 & 0 \\
L_3 & 2 & 19 & - & 9 & 0 \\
L_4 & 21 & 12 & 13 & 16 & 0 \\
L_5 & 22 & 16 & 25 & 12 & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccc|l}
A & B & C & D & E & \\
\hline
14 & \boxed{0} & 9 & \cancel{0} & 0 & \\
11 & 10 & \boxed{0} & 8 & 0 & \\
\boxed{0} & 15 & M & 6 & 0 & \\
19 & 8 & 5 & 13 & \boxed{0} & c) \\
20 & 12 & 17 & 9 & 0 & a) \\
 & & & & b) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc|l}
14 & \boxed{0} & 9 & 0 & 5 & \\
11 & 10 & \boxed{0} & 8 & 5 & e) \\
\boxed{0} & 15 & 14 & 6 & 5 & \\
14 & 3 & \cancel{0}\,8 & & \boxed{0} & c) \\
15 & 7 & 12 & 4 & 0 & a) \\
 & & d) & & b) & \\
 & & +3 & & +3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc|l}
14 & 0 & 17 & \boxed{0} & 8 & \\
8 & 7 & \boxed{0} & 5 & \cancel{0}\,5 & \\
\boxed{0} & 15 & M & 6 & 8 & \\
11 & \boxed{0} & 0 & 5 & 0 & \\
12 & 4 & 0 & 1 & \boxed{0} & \text{Amaitu}
\end{array}
$$

$L_1 \to D$

$L_2 \to C$

$L_3 \to A$

$L_4 \to B$

$L_5 \to E \Rightarrow$ lanik gabe

8. Arikkta

$$\begin{bmatrix} 13 & 1 & 8 & 7 & 10 \\ 12 & 6 & 4 & 4 & 7 \\ 18 & 10 & 14 & 21 & 20 \\ 14 & 13 & 7 & 12 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 12 & \boxed{0} & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 2 & 0 & \boxed{0} & 3 \\ 8 & 0 & 4 & 11 & 10 \\ 7 & 6 & \boxed{0} & 5 & 4 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} c)\ -4 \\ \\ a)\ -4 \\ \\ \\ \end{array} \\ b) \\ +4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & \boxed{0} & 3 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & \boxed{0} & 3 \\ 4 & \boxed{0} & 0 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & \boxed{0} & 5 & 4 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} c)\ -2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ b)\quad b) \\ +2\quad +2 \end{array} \xRightarrow[c)\ -2]{a)\ -2} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & 0 & \boxed{0} & 3 \\ 2 & \boxed{0} & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & \boxed{0} & 3 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} a)\ -2 \\ c)\ -2 \\ c)\ -2 \\ \\ \\ \end{array} \\ b)\quad b) \\ 2\quad 2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & \boxed{0} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$K_3 \Rightarrow H_1$

$K_1 \Rightarrow H_2$

$K_4 \Rightarrow H_3$

$K_2 \Rightarrow H_4$

$K_5 \Rightarrow H_5$

$z^* = 30$

9. Ariketa

9.1

$$
\begin{array}{cccc}
10 & 6 & 11 & 10 \\
4 & 0 & 5 & 4 \\
18 & 10 & 10 & 16 \\
8 & 0 & 0 & 6 \\
2 & 9 & 11 & 4 \\
0 & 7 & 9 & 2 \\
11 & 15 & 5 & 15 \\
6 & 10 & 0 & 10
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccc}
4 & \boxed{0} & 5 & 2 & c) \\
8 & 0 & 0 & 4 & a) \\
\boxed{0} & 7 & 9 & 0 & \\
6 & 10 & \boxed{0} & 10 & c) \\
 & b) & b) & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
2 & 0 & 5 & \boxed{0} \\
6 & \boxed{0} & 0 & 0 \\
\boxed{0} & 7 & 9 & 0 \\
4 & 10 & \boxed{0} & 8
\end{array}
$$

$I_1 \Rightarrow H_4$ $I_2 \Rightarrow H_2$ $I_3 \Rightarrow H_1$ $I_4 \Rightarrow H_3$ $z^* = 27$

9.2

$$
\begin{array}{ccccc}
11 & 4 & 11 & 12 & 17 \\
7 & 0 & 7 & 8 & 13 \\
7 & 3 & 12 & 5 & 14 \\
4 & 0 & 9 & 2 & 11 \\
3 & 1 & 9 & 3 & 10 \\
2 & 0 & 8 & 2 & 9 \\
6 & 9 & 14 & 12 & 15 \\
0 & 3 & 8 & 6 & 9 \\
13 & 9 & 4 & 13 & 7 \\
9 & 5 & 0 & 9 & 3
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc}
7 & \boxed{0} & 7 & 6 & 10 & c) \\
4 & 0 & 9 & \boxed{0} & 8 & c) \\
2 & 0 & 8 & 0 & 6 & a) \\
\boxed{0} & 3 & 8 & 4 & 6 & \\
9 & 5 & \boxed{0} & 7 & 0 & \\
 & b) & & b) & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
5 & \boxed{0} & 5 & 6 & 8 & c) \\
2 & 0 & 7 & \boxed{0} & 6 & c) \\
0 & 0 & 6 & 0 & 4 & a) \\
\boxed{0} & 3 & 8 & 4 & 6 & c) \\
9 & 5 & \boxed{0} & 7 & 0 & \\
b) & b) & & b) & &
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccc}
5 & \boxed{0} & 1 & 6 & 4 \\
2 & 0 & 3 & \boxed{0} & 2 \\
0 & 0 & 2 & 0 & \boxed{0} \\
\boxed{0} & 3 & 4 & 4 & 2 \\
9 & 5 & \boxed{0} & 7 & 0
\end{array}
$$

$I_1 \to H_2$ $I_2 \to H_4$ $I_3 \to H_5$ $I_4 \to H_1$ $I_5 \to H_3$ $z^* = 29$

9.3

23 / 21	17 / 15	2 / 0	27 / 25	9 / 7
29 / 26	8 / 5	3 / 0	25 / 22	19 / 16
24 / 19	34 / 29	22 / 17	38 / 33	5 / 0
13 / 2	11 / 0	32 / 21	15 / 4	30 / 19
36 / 32	26 / 22	4 / 0	39 / 35	37 / 32

$\Rightarrow$

19	15	$\boxed{0}$	21	7	c)
24	5	0	18	16	a)
17	29	17	29	$\boxed{0}$	
$\boxed{0}$	0	21	0	19	
30	22	0	31	32	a)
		b)			

$\Rightarrow$

14	10	$\boxed{0}$	16	2	c)
19	$\boxed{0}$	0	13	11	
17	29	17	29	$\boxed{0}$	
$\boxed{0}$	0	21	0	19	
25	17	0	26	22	a)
		b)			

12	8	0	14	0	a)
19	$\boxed{0}$	0	13	1	
12	29	17	29	$\boxed{0}$	c)
$\boxed{0}$	0	21	0	19	
23	15	$\boxed{0}$	24	25	c)
		b)		b)	

4	$\boxed{0}$	0	6	0	c)
19	0	0	13	11	a)
9	21	17	21	$\boxed{0}$	
$\boxed{0}$	0	21	0	19	
15	7	$\boxed{0}$	16	25	
	b)	b)			

$\boxed{0}$	0	0	2	0
15	$\boxed{0}$	0	9	7
9	21	17	21	$\boxed{0}$
0	0	21	$\boxed{0}$	19
15	2	$\boxed{0}$	16	25

$I_1 \to H_1 \quad I_2 \to H_2 \quad I_3 \to H_5 \quad I_4 \to H_4 \quad I_5 \to H_3$

$z^* = 55$

$\boxed{\min \Rightarrow \max\ -z}$ $z^* = -z^{* \Rightarrow \max}$

IKERKETA OPERATIBOA. ALGORITMOAK

1. Simplex algoritmoa.

Helburua maximizatzea.

1. urratsa. Hasierako taula eraiki.

2. urratsa.

- Baldin $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A},\ \mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}\quad z_j - c_j \geq 0 \rightarrow 3.$ urratsera joan.
- Baldin existitzen bada $z_j - c_j < 0$ orduan soluzioa hobe daiteke. 4. urratsera joan.

3. urratsa.

- Baldin oinarrian aldagai artifizialik ez badago, oraingo soluzioa **optimoa** da.
  - * Baldin $\exists \mathbf{a}_k \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_k \notin \mathbf{B}$ non $z_k - c_k = 0$ eta k horretarako $\exists y_{ik} > 0,\ i = 1, \ldots, m$, orduan problemak **optimo anizkoitzak** ditu. Joan 5. urratsera.
  - * Baldin $\exists \mathbf{a}_k \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_k \notin \mathbf{B}$ non $z_k - c_k = 0$ eta k horretarako $y_{ik} \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$, orduan problemak aldagaietarako balio bornegabeko **optimo anizkoitzak** ditu. Amaitu.
  - * Bestela, $\mathbf{x}_B$ **soluzio optimo bakarra** da. Amaitu.
- Baldin oinarrian aldagai artifizialen bat balio positiboz badago, orduan **problema bideraezina** da. Amaitu.

4. urratsa.

- Baldin $\exists \mathbf{a}_j$ non $z_j - c_j < 0$ eta bertan $y_{ij} \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$, orduan soluzioa **bornegabea** da. Amaitu.
- Bestela, 5. urratsera joan.

5. urratsa. Oinarrian ondoko irizpideak betetzen dituzten $\mathbf{a}_k$ bektorea sartu eta $\mathbf{a}_r$ aterako dira:

- $\mathbf{a}_k$ bektorea sartuko da baldin

$$z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j / z_j - c_j \leq 0\}$$

  k **pibot-zutabea** da.

- $\mathbf{a}_r$ bektorea aterako da baldin

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \{\frac{x_{Bi}}{y_{ik}} / y_{ik} > 0\}$$

  r errenkada **pibot-errenkada** da. y_{rk} **pibota** da.

6. urratsa. Hurrengo taula kalkulatu.

- Oinarria eguneratu.
- Pibot-errenk. berria = pibot-errenk. / pibota.
- i errenk. berria = i errenk. - pibot-errenk. $\times m_i$.
  $m_i = \frac{y_{ik}}{y_{rk}},\ i = 1, \ldots, m \rightarrow$ i errenkadarako biderk.
  2. urratsera joan.

2. Simplex dual algoritmoa.

Helburua maximizatzea.

1. Hasierako taula eraiki.
2. – Baldin $\forall \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}\quad z_j - c_j \geq 0$, 3. urratsera joan.
   – Baldin $\exists \mathbf{a}_j \in \mathbf{A}\quad z_j - c_j < 0$, ereduari murrizketa artifiziala gehitu eta eredu berriaren taula eraiki. Oinarrian sartuko da $\mathbf{a}_k$ baldin

$$z_k - c_k = \min_j \{z_j - c_j / z_j - c_j < 0\}$$

   eta murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia aterako da. Pibote-eragiketak eginez, taula berriak bideragarritasun duala izango du. 3. urratsera joan.
3. – Murrizketa artifizialik ez badago.
   - * Baldin $x_{Bi} \geq 0\ \forall i$, **soluzio optimoa**. Amaitu.
   - * Baldin $\exists x_{Bi} < 0$, 4. urratsera joan.

   – Murrizketa artifiziala badago.
   - * Baldin $x_{Bi} \geq 0\ \forall i$ eta murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia oinarrian badago balio positiboz, **soluzioa optimo** da. Amaitu.
   - * Baldin $x_{Bi} \geq 0\ \forall i$ eta murrizketa artifizialaren nasaitze-aldagaia oinarrian ez badago edo zero balioa badu, orduan **primala bornegabea** eta **duala bideraezina** dira. Amaitu.
   - * Baldin $\exists x_{Bi} < 0$, 4. urratsera joan.
4. Irteera irizpidea. $\mathbf{a}_r$ aterako da baldin

$$x_{Br} = \min_i \{x_{Bi} / x_{Bi} < 0\}$$

   $r \rightarrow$**pibot-errenkada**.
   Sarrera irizpidea. $\mathbf{a}_k$ sartuko da baldin

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} / y_{rj} < 0\}$$

   $k \rightarrow$ **pibot-zutabea**. $y_{rk} \rightarrow$ **pibota**.
   – Baldin y_{rj} negatiborik ez bada existitzen, orduan **primala bideraezina** eta **duala bornegabea**. Amaitu.
   – Bestela, 5. urratsera joan.
5. Pibote eragiketak eginez, taula berria kalkulatu eta 3. urratsera joan.

3. Vogelen metodoa

- ED_i=Kostu-taulako i errenkadako 2 kostu txikienen arteko diferentzia balio absolutuan.
- ZD_j=Kostu-taulako j zutabeko 2 kostu txikienen arteko diferentzia balio absolutuan.

1. urratsa. ED_i eta ZD_j kalkulatu. Diferentzia handieneko errenkada edo zutabea aukeratu eta bertan c_{ij} minimoa.

2. urratsa. $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ esleitu. Eskariak eta eskaintzak eguneratu.

- Baldin $a_i = \min\{a_i, b_j\}$, O_i-ren eskaintza 0 da, eta D_j-ren eskaria $b_j - a_i$.
- Baldin $b_j = \min\{a_i, b_j\}$, D_j-ren eskaria 0 da, eta O_i-ren eskaintza $a_i - b_j$.
- Baldin $a_i = b_j$, O_i-ren eskaintza eta D_j-ren eskaria 0 da.

Asetutako errenkada edota zutabeak ezabatu taulatik ondorengo kalkuluetarako.

3. urratsa. Bi kasu gerta daitezke.

- Errenkada edo zutabe bakar bat gelditzen bada, esleitugabeko unitate guztiak esleitu. Amaitu.
- Bestela, 1. urratsera joan.

4. Garraio-problemarako algoritmoa.
Helburua minimizatzea.

1. urratsa. Problema orekatu.

2. urratsa. Hasierako oinarriko soluzio bideragarri bat kalkulatu.

3. urratsa. Oraingo oinarriari dagozkion u_i, v_j balioak kalkulatu.

4. urratsa. Oinarriko ez diren bektoreei dagozkien $z_{ij} - c_{ij}$ kalkulatu.

- Baldin $\forall \mathbf{a}_{ij} \notin \mathbf{B}$ $z_{ij} - c_{ij} < 0$, **soluzioa optimoa** da. Amaitu.
- Baldin $\forall \mathbf{a}_{ij} \notin \mathbf{B}$ $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ eta existitzen bada $\mathbf{a}_{ij} \notin \mathbf{B}$ non $z_{ij} - c_{ij} = 0$ **soluzio optimo anizkoitzak** daude. $z_{ij} - c_{ij} = 0$ duen $\mathbf{a}_{ij}$ bektore bat oinarrian sartzeko aukeratu, eta 5. urratsera joan.
- Baldin $\exists z_{ij} - c_{ij} > 0$ orduan soluzioa hobe daiteke. $z_{ij} - c_{ij}$ positiboen artetik balio handieneko $\mathbf{a}_{ij}$ bektorea aukeratu oinarrian sartzeko. 5. urratsera joan.

5. urratsa. Bilatu oinarrian dauden bektoreek eta oinarrian sartzen den bektoreak osatzen duten zikloa. Kalkulatu soluzio berria zikloko fluxuak eguneratuz. 3. urratsera joan.

5. Adarkatze eta bornatze-algoritmoa.
Helburua maximizatzea.

1. **Hasieraketa.** PE ebatzi.
   - Soluzio optimoa osokoa bada, amaitu.
   - Bestela, $z_I := -\infty$.
2. **Adarkatzea.** Azkenekoa ez den z^* handieneko problema aukeratu. Bertan, osoko ez den aldagairen bat aukeratu bornatua izateko. Adarkatu $x_j \leq [x_j]$ eta $x_j \geq [x_j] + 1$ murrizketak gehituz.
3. **Bornatzea.** Sortutako problemak ebatzi.
4. **Azkeneko poblemak.** Problema guztiak aztertu, z^* handiena duenetik hasita. Problema azkenekoa izango da baldin ondorengo baldintzatako bat betetzen badu.
   (a) $z^* \leq z_I$.
   (b) Soluzioa osokoa da eta $z^* > z_I$. Behe-bornea eguneratu $z_I := z^*$ eginez, eta osoko soluzio hau soluziogai izango da hemendik aurrera.
   (c) Problema bideraezina.

   Azkeneko ez den problemarik badago, 2. urratsera joan. Bestela, soluzio optimoa soluziogaia da. Soluziogairik ez badago, problema bideraezina da.

6. 0-1 adarkatze eta bornatze-algoritmoa.
Helburua maximizatzea eta $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

1. **Hasieraketa.** $\mathbf{x}^* = (1, \ldots, 1)$ soluzioak problemaren murrizketak betetzen baditu, orduan optimoa da. Amaitu.

   $\mathbf{x} = (0, 1, \ldots, 1)$ problemaren murrizketak betetzen baditu, orduan optimoa da. Amaitu.

   Bestela, $z_I := z$, z izanik $\mathbf{x} = (0, 0, \cdots, 0)$ soluziorako helburu funtzioaren balioa. Problema honi $k = 1$ indizea egokitu eta 2. urratsera joan.
2. **Adarkatzea.** Azkenekoa ez den z^* handieneko problema aukeratu, eta bitan banatu, $x_k = 0$ eta $x_k = 1$ murrizketak gehituz.
3. **Bornaketa.** Problema berri bakoitzerako, $k + 1$ osagaia 0 duen eta ondokoak 1 dituen $\mathbf{x}^*$ osaketa egin. z^* kalkulatu. Problema berri hauei $k = k + 1$ indizea egokitu.
4. **Azkeneko problemak.** Problema guztiak aztertu, z^* handiena duenetik hasita. Azkeneko dira baldin ondorengo baldintzatako bat betetzen badute.
   (a) $z^* \leq z_I$.
   (b) Baldin $z^* > z_I$ eta $\mathbf{x}^*$ soluzioak problemaren murrizketak betetzen baditu, orduan $z_I := z^*$.
   (c) Ez da existitzen problema horrentzako osaketarik zeinak aldi berean murrizketa guztiak beteko dituen. Problema bideraezina.

   Problema guztiak azkeneko badira, amaitu. Soluzio optimoa (b) atalean lortutakoa da.

   Bestela. 2. urratsera joan.

6.5. Ariketa

$$\max\ z = 2x_1 + 2x_2$$

hauen mende

$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$\Longrightarrow$

$$\max\ z = 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

hauen mende

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
	-2	-2	0	0	0	0	$m_0 = -2$
a_3	$\boxed{1}$	-1	1	0	0	2	
a_4	2	2	0	1	0	6	$m_1 = 2$
a_5	1	2	0	0	1	5	$m_2 = 1$
	0	-4	2	0	0	4	$m_0 = -1$
a_1	1	-1	1	0	0	2	$m_1 = -\frac{1}{4}$
a_4	0	$\boxed{4}$	-2	1	0	2	
a_5	0	3	-1	0	1	3	$m_2 = \frac{3}{4}$
	0	0	0	1	0	6	$m_0 = 0$
a_1	1	0	$+3/2$	$\frac{1}{4}$	0	$5/2$	$m_1 = +3$
a_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$m_2 = -1$
a_5	0	0	$\boxed{1/2}$	$-3/4$	1	$3/2$	
	0	0	0	1	0	6	$m_0 = 0$
a_1	1	0	0	$\frac{10}{4}$	-3	1	
a_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	
a_3	0	0	1	$-3/2$	2	3	

7.3. Aritmetik

$\min z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$

kısıtlar

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 9$

$-2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 14$

$-4x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\min z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

kısıtlar

$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$

$-2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 14$

$-4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	
	1	-3	2	0	0	0	0	
a_4	3	-1	2	1	0	0	9	$m_0 = -\frac{3}{4}$
a_5	-2	4	1	0	1	0	14	$m_1 = -\frac{1}{4}$
a_6	-4	$\boxed{4}$	8	0	0	1	10	$m_2 = 1$
	-2	0	8	0	0	3/4	$\frac{30}{4}$	$m_0 = -1$
a_4	2	0	4	1	0	$\frac{1}{4}$	23/2	$m_1 = 1$
a_5	$\boxed{2}$	0	-7	0	1	-1	4	
a_2	-1	1	2	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{10}{4}$	$m_2 = -\frac{1}{2}$
	0	0	1	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{23}{2}$	$m_0 = -\frac{1}{5}$
a_4	0	0	11	1	-1	$\boxed{5/4}$	15/2	
a_1	1	0	$-\frac{7}{2}$	0	1/2	-1/2	2	$m_1 = -\frac{2}{5}$
a_2	0	1	-3/2	0	$\frac{1}{2}$	-1/4	9/2	$m_2 = -\frac{1}{5}$
	0	0	16/5	1/5	4/5	0	13	
a_6	0	0	$\frac{44}{5}$	4/5	-4/5	1	6	
a_1	1	0	9/10	2/5	$\frac{1}{10}$	0	5	
a_2	0	1	7/10	1/5	3/10	0	6	

$x_1^* = \cancel{6}5$

$x_2^* = 6$, $z^* = -13$

$x_6^* = 6$

7. Ariketa

$\max\ z = 6x_1 + 4x_2$

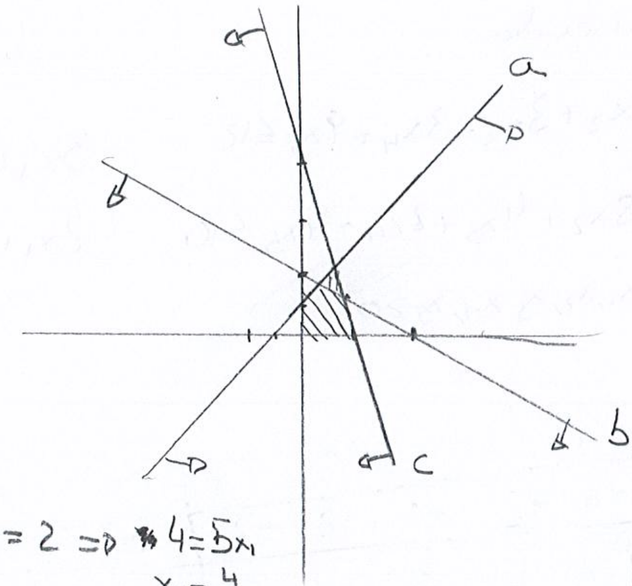
honen mende

$2x_1 - 2x_2 \geq -1$

$x_1 + 2x_2 \leq 2$

$3x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 + 6 - 6x_1 = 2 \Rightarrow 4 = 5x_1 \\ \qquad x_1 = \frac{4}{5} \\ x_2 = 3 - 3x_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_2 = 3 - \frac{12}{5} \Rightarrow x_3 = \frac{15}{5} - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = \frac{4}{5} \\ x_2^* = \frac{3}{5} \end{array}\right\} \quad z = 6x_1 + 4x_2 \Rightarrow z^* = \frac{24}{5} + \frac{12}{5} = \frac{36}{5}$$

8. Ariketa

$\min\ z = -x_1 - 3x_2$

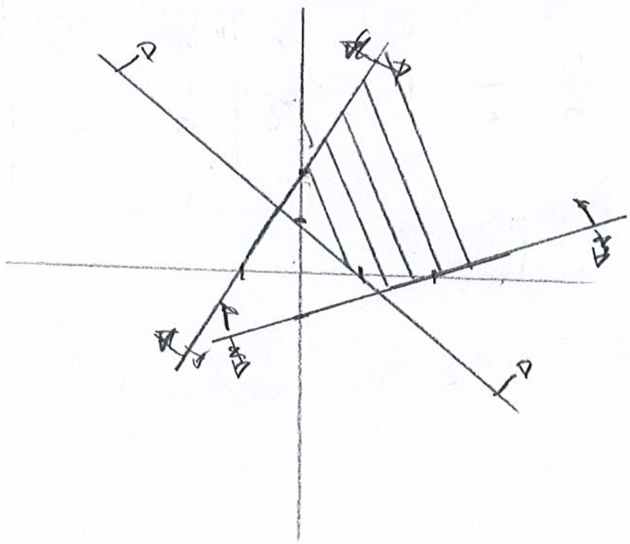
honen mende

$x_1 + x_2 \geq 1$

$6x_1 - 3x_2 \geq -6$

$x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$



$\min z = -16x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 \Rightarrow \max -z = 16x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5$

loturen mende

$3x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 9x_5 \leq 12$

$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

loturen mende

$3x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 9x_5 + x_6 = 12$

$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 + x_7 = 10$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	z	
	-16	-2	-1	-2	-3	0	0	0	$m_0 = -\frac{16}{3}$
a_6	$\boxed{3}$	1	3	-3	9	1	0	12	
a_7	2	8	4	2	-4	0	1	10	$m_1 = \frac{2}{3}$
	0	$\frac{22}{3}$	17	-18	45	$-\frac{16}{3}$	0	64	$m_0 = -\frac{9}{2}$
a_1	1	$\frac{1}{3}$	1	-1	3	$\frac{1}{3}$	0	4	$m_1 = -\frac{1}{4}$
a_7	0	$\frac{22}{3}$	2	$\boxed{4}$	-10	$-\frac{2}{3}$	1	2	
	0	$\frac{121}{3}$	26	0	0	$\cancel{\frac{25}{3}}$ $\frac{7}{3}$	$\frac{9}{2}$	73	
a_1	1	$\frac{13}{6}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$	
a_4	0	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	

Solucio ~~Bornegoba~~ anizkoitza

$z^* = -73 \quad x_1^* = \frac{9}{2} \quad x_2^* = \frac{1}{2}$

3. Ariketa

$$\max \; z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

haien mende

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + \cancel{2}x_2 + \cancel{3}x_3 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 2 \end{aligned}$$

$$B = (a_4, a_1, a_6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_B = B^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Emaitzak}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$z = \bar{C}_3^T \bar{X}_B = (0\ 4\ 0) \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 6$$

$$\bar{C}_3^T \Rightarrow (c_4, c_1, c_6)$$

a_2 koordenatuak

$$a_2 = B \bar{Y}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix}$$

$$\bar{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = 2 - 3 = -1$$

$$z = \bar{C}_3^T \bar{Y}_2 = (0\ 4\ 0) \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

a_5 koordenatua

$$\bar{a}_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix}y_{15}\\y_{25}\\y_{35}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}y_{15}\\y_{25}\\y_{35}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & -1/2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

$$z_5 = \bar{C}_3^T \bar{y}_5 = (0\ 4\ 0) \cdot \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = 2$$

$$z_5 - C_5 = 2 - 0 = 2$$

Ondorioz, a_2 koordenatua erabiliko da.

$$\frac{x_{B3}}{y_{3k}} = 1 = \min = \left\{ \frac{x_{B1}}{y_{1k}} = \frac{\frac{9}{2}}{3/2} ;\ \frac{x_{B2}}{y_{2k}} = \frac{3/2}{1/2} ;\ \boxed{\frac{x_{B3}}{y_{3k}} = \frac{1/2}{1/2}} \right\}$$

$$\hat{x}_B = \begin{cases} \hat{x}_{B1} = x_{B_1} - x_{Br}\left(\frac{y_{11}}{y_{31}}\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3/2}{1/2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \hat{x}_{B_2} = x_{B_2} - x_{Br}\left(\frac{y_{21}}{y_{31}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1/2}{1/2}\right) = 1 \\ \hat{x}_{B_3} = \frac{x_{B3}}{y_{3k}} = 1 \end{cases}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \hat{B}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$x_{\hat{B}} = \hat{B}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \bar{C}_B^T \hat{x}_B = (0\ 4\ 3)\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = 7$$

$$\bar{a}_3 \Rightarrow \bar{y}_3 = \hat{B}^{-1}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

7.1

$\max z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

haven meude

$x_1 - x_2 + x_3 \le 4$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 8$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$\Rightarrow$

$\max z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

haven meude

$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 8$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
	-3	-2	-1	0	0	0	$-3/2 = m_0$
a_4	1	-1	1	1	0	4	$m_1 = \frac{1}{2}$
a_5	$\boxed{2}$	1	4	0	1	8	
	0	$-1/2$	5	0	$3/2$	12	$m_0 = \frac{1}{3}$
a_4	0	$\boxed{-3/2}$	-1	1	$-1/2$	0	
a_1	1	$1/2$	2	0	$1/2$	4	$m_2 = -\frac{1}{3}$
	0	0	$16/3$	$-1/3$	$5/3$	12	$m_0 = -1$
a_2	0	1	$2/3$	$-2/3$	$\frac{1}{3}$	0	$m_2 = -2$
a_1	1	0	$5/3$	$\boxed{-1/3}$	$\frac{1}{3}$	4	
	0	0	7	0	2	16	
a_2	2	1	4	0	1	12	
a_4	3	0	5	1	1	12	

6.1

$\max z = x_1 - x_2$

haren mende

$x_1 - 2x_2 \leq 2$ $\Rightarrow$ $x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$

$4x_1 - 3x_2 \leq 12$ $\quad$ $4x_1 - 3x_2 + x_4 = 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	
	-1	$+1$	0	0	0	$m_0 = -1$
a_3	$\boxed{1}$	-2	1	0	2	
a_4	4	-3	0	1	12	$m_2 = 4$
	0	-1	1	0	2	$m_0 = -1/5$
a_1	1	-2	1	0	2	$m_1 = -2/5$
a_4	0	$\boxed{5}$	-4	1	4	
	0	0	$1/5$	$1/5$	$14/5$	
a_1	1	0	$-3/5$	$2/5$	$18/5$	
a_2	0	1	$-4/5$	$1/5$	$4/5$	

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 18/5 \\ x_2 = 4/5 \end{array}\right\} z = 14/5$$ soluzio bakarra

5. Ariketa

$$\min\ z = x_1 + 2x_2$$

hauen mende

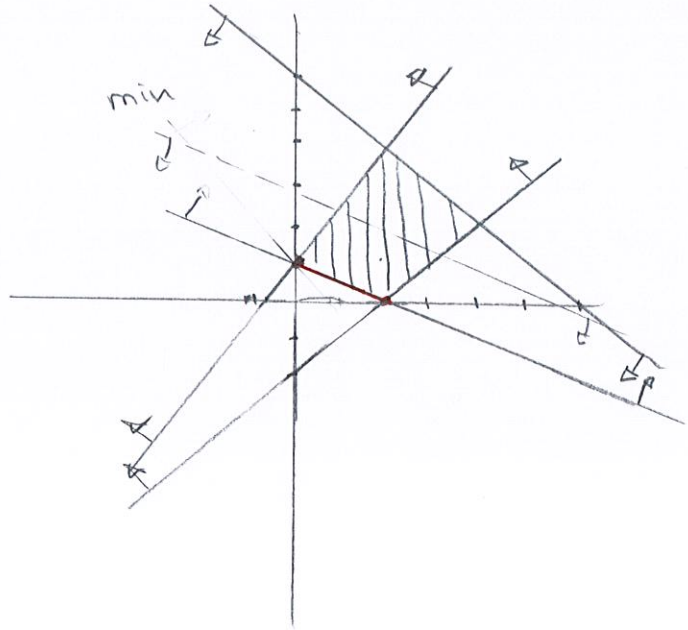
$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1 + 2x_2 \ge \cancel{6}2$$

$$x_1 - x_2 \le 2$$

$$6x_1 - 4x_2 \ge -4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$z^* = 2 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_1^* = 0 \quad x_2^* = 1 \ , \quad x_1^* = 2 \quad x_2^* = 1$$

6. Ariketa

$$\max\ z = x_1 + 2x_2$$

hauen mende

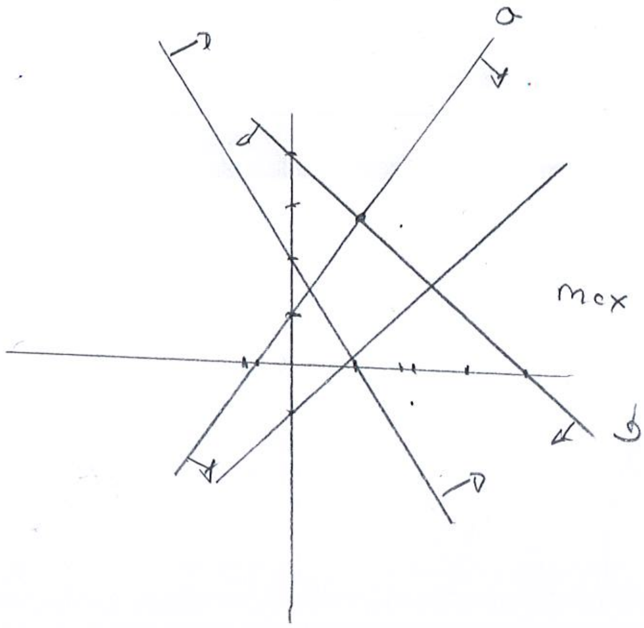
$$3x_1 - 2x_2 \le -2$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$2x_1 + x_2 \ge 2$$

$$x_1 - x_2 \ge 1$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



Problema bateraezina

3. Ariketa

max $z = 2x_1 + 4x_2$

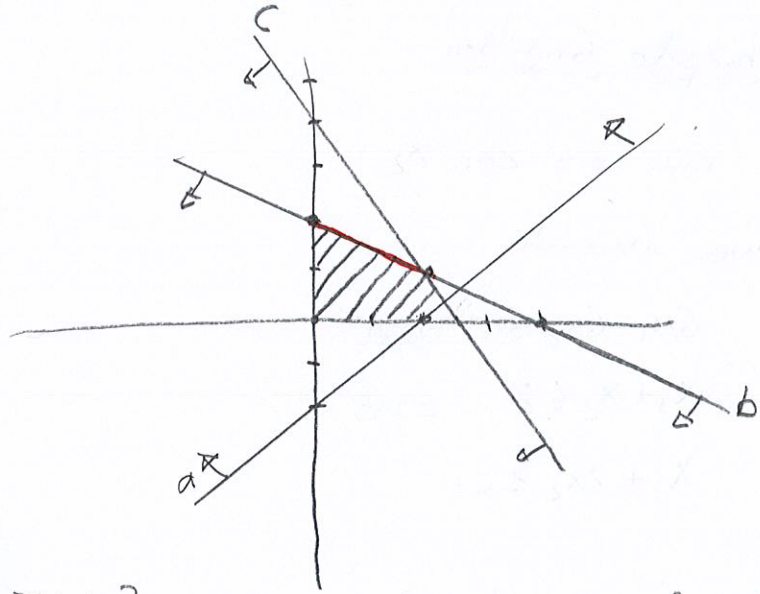
haien mende

$3x_1 - 3x_2 \le 6 \Rightarrow a$

$x_1 + 2x_2 \le 4 \Rightarrow b$

$2x_1 + x_2 \le 5 \Rightarrow c$

$x_1, x_2 \ge 0$



$a \Rightarrow 3x_1 - 3x_2 = 6 \Rightarrow 3x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2$

$\Rightarrow -3x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = -2$

$c \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow x_2 = 5$

$b \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 4$

$\Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$

$z = 8 \Rightarrow 8 = 2x_1 + 4x_2 \Rightarrow 4 = x_1 + 2x_2$

$x_1^* = 0;\ x_2^* = 2$ eta $x_1^* = 2,\ x_2^* = 1$ eta $z = 8$

$x_1 + 2x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 4 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = 2$

$2x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow 8 - 4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow 3 = 3x_2 \Rightarrow x_2 = 1.$

4 Ariketa

max $z = x_1 + 4x_2$

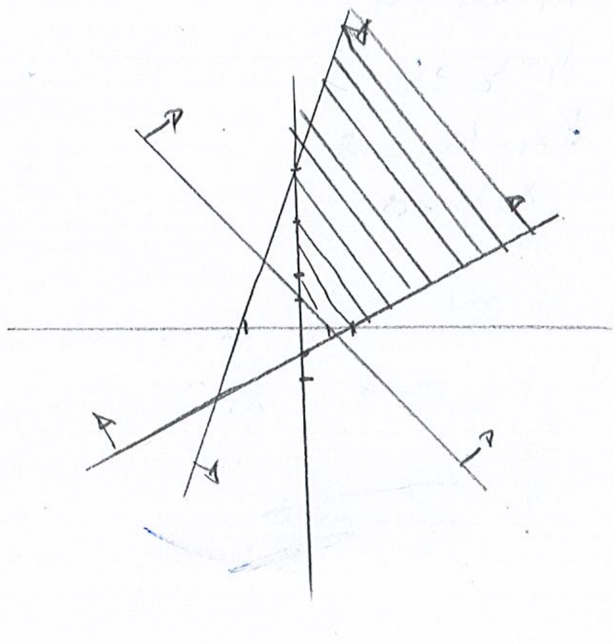
haien mende

$x_1 - 2x_2 \le 1$

$2x_1 + 2x_2 \ge 1$

$3x_1 - x_2 \ge -3$

$x_1, x_2 \ge 0$



Soluzio Bornegabea da

Ebaspide Grafiloe

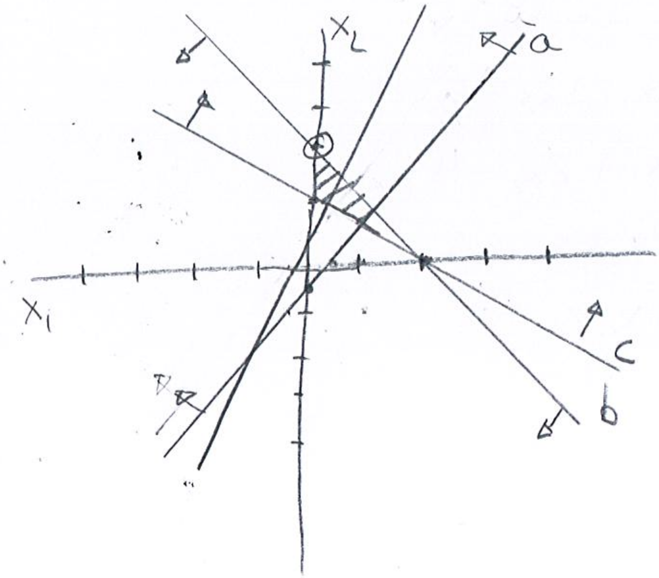
1. $\min z = 2x_1 - x_2$

hoven mende

$6x_1 - 6x_2 \le 3 \Rightarrow a$

$x_1 + x_2 \le 2 \Rightarrow b$

$x_1 + 2x_2 \ge 2 \Rightarrow c$



$z = -2 \Rightarrow -2 = 2x_1 - x_2$

$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = 2x_1 - x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2 = 2x_1 - x_2 \\ 2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 = \overset{2x_1}{\cancel{4-2x_2}} - x_2 \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_1 = 2 - x_2 \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases}$

Optimoe $(0,2) \Rightarrow -2 = 2x_1 - x_2$

2. $\max z = -6x_1 - 2x_2$

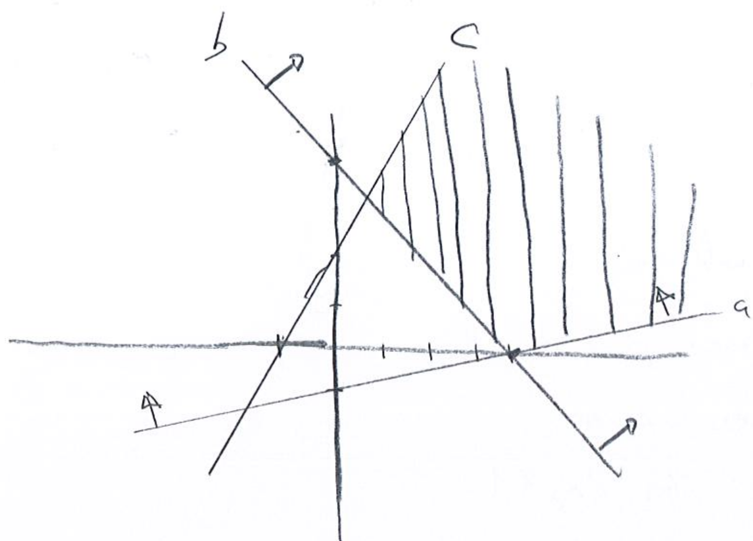
hoven mende

$x_1 - 4x_2 \le 4$ a

$x_1 + x_2 \ge 4$ b

$8x_1 - 4x_2 \ge -8$ c

$x_1, x_2 \ge 0$



$x_1 + x_2 = 4$

$8x_1 - 4x_2 = -8$ $\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \\ \frac{32}{3} - 8x_2 - 4x_2 = -8 \Rightarrow 12x_2 = 32 \Rightarrow x_2 = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \end{cases}$

$z = -4 \cdot \frac{20}{3} = -\frac{32}{3}$

2. Ariketa

Enpresa batean bi mazedonia mota

Normala eta KaloriaGutxikoa

N => 150 mg Kaltzio >, 200 mg fosforo >, 200 mg C bita >

KB => 400 Kaloria <, 100 mg fosforo >, 250 mg C bitamina >

Gerezi Sandia > 10

Mango, laranja > 30

Meloi Banana > %20

x_{ij} : i motako mazedoniaren j fruta kopurua

$$\min z = 7(x_{11}+x_{21}) + 0'9(x_{12}+x_{22}) + 4(x_{13}+x_{23}) + 1'6(x_{14}+x_{24}) +$$
$$+ 1'4(x_{15}+x_{25}) + 1'5(x_{16}+x_{26})$$

hauen menpe

$$x_{11} + \cancel{x_{21}} + x_{12} + \cancel{x_{22}} \geq 10 \qquad x_{21} + x_{22} \geq 10$$

$$x_{13} + x_{14} \geq 30 \qquad x_{23} + x_{24} \geq 30$$

$$x_{15} + x_{16} \geq 20 \qquad x_{25} + x_{26} \geq 20$$

$$250x_{11} + 200x_{12} + 150x_{13} + 400x_{14} + 140x_{15} + 90x_{16} \geq 15$$

$\vdots$

EL eta EG

1. Ariketa

1000kg Sagar ⇒ 0'4
600kg aran ⇒ 0'6
800kg mertxika = 0'8

Zapore bakarra

Bizapore : Sagar/Aran Sagar/Mertxika

2€ ⇒ Zapore bakarra
2'5 ⇒ bi zaporetakoa

175kg Sagar
160kg aran
150kg mertxika

X_{ij} : ~~zaporetako~~ zapore bakarreko i fruta kantitatea
Y_i bizaporetako i fruta kantitatea

$\max z = \cancel{2'4x_1 + 1'9x_2 +} \; 1'6x_1 + 1'4x_2 + 1'2x_3 + 2y_1 + 1'9y_2$

$SN = 2(x_1 + x_2 + x_3) + 2'5\left(\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}\right)$

$Kostua = 0'4x_1 + 0'6x_2 + 0'8x_3 + 0'5y_1 + 0'6y_2$

hauen mende

$x_1 \geq 175$

$x_2 \geq 160$

$x_3 \geq 150$

$x_1 + \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} \leq 1000$

$x_2 + \frac{y_1}{2} \leq 600$

$x_3 + \frac{y_2}{2} \leq 800$

6. Ariketa

X_i : i aukera erabiliz moztu den bobina kopurua

min $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$

honen mende

$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 + x_9 + x_{10} \geq 500$

$x_3 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 2x_{10} \geq 400$

$x_2 + x_6 + x_7 + 2x_9 \geq 250$

$x_4 + x_5 \geq 300$

5. Ariketa

Super eta Berunik gabea

A %40 B %60 A %35 %50 B

Pertsiar Golkoko => 32 Mexiko gordina => 35

A %30 B %65 A %45 B %42

600.000 Super

400.000 BG

x_{ij}: i. motako gasolina egiteko behar den j motako gordin litroa

$$\min z = 32(x_{11}+x_{21}) + 35(x_{12}+x_{22})$$

$$x_{11}+x_{12} \geq 600.000$$

$$x_{21}+x_{22} \geq 400.000$$

$$\frac{30x_{11}+45x_{12}}{x_{11}+x_{12}} \geq 40$$

$$\frac{65x_{11}+42x_{12}}{x_{11}+x_{12}} \leq 60$$

$$\frac{30x_{21}+45x_{22}}{x_{21}+x_{22}} \geq 35$$

$$\frac{65x_{21}+42x_{22}}{x_{21}+x_{22}} \leq 50$$

4. Ariketa

A → 1.000

B → 800

C → 900

D → 1.500

Ekoizpen-zentroa	Produktuak A	B	C	D
E_1	200	60	90	130
E_2	100	200	150	80

E_1 ⟹ Egunean ⟹ 8 000 unitate

E_2 ⟹ Egunero ⟹ 11.000 unitate

X_{ij}: i Ekoizpen-zentroa j ekoizten dituen egun kopurua ~~Produktua ekoizteaen [illegible] kopurua~~

$$\min z = 8.000x_1 + 11.000x_2$$

$$200x_1 + 100x_2 \geq 1.000$$

$$60x_1 + 200x_2 \geq 800$$

$$90x_1 + 150x_2 \geq 900$$

$$130x_1 + 80x_2 \geq 1500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

<u>3. Ariketa</u>

1 eta 3 → 200€

2 → 150

P1 1000 → 200 lanordu

P2 → 300 lanordu

5.500

x_{ij}: i plantatik j banaketa-zentrora eramaten diren erremintak kopurua

$\max z = SN - kostuak = 140x_{11} + 120x_{12} + 40x_{13} + 30x_{21} + 80x_{22} + 30x_{23} - 20L$

$SN = 200(x_{11} + x_{21}) + 150(x_{12} + x_{22}) + 200(x_{13} + x_{23})$

$kostuak = 60x_{11} + 30x_{12} + 160x_{13} +$
$+ 130x_{21} + 70x_{22} + 170x_{23}$

hauen mende

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10.000$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 12.000$

$200(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 300(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 5.500$

2. Ariketa

L_1	1.000.000
L_2	1500.000
L_3	750.000

X_{ij}: i lantegiak j zentrora egiten duen esleitzea

$i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 3$

$$\min z = 0'5x_{11} + 0'60x_{12} + 0'35x_{13} + 0'2x_{21} + 0'3x_{22} + 0'2x_{23} + 0'45x_{31} + 0'25x_{32} + 0'5x_{33} + 0'25x_{41} + 0'5x_{42} + 0'4x_{43} + 0'5x_{51} + 0'4x_{52} + 0'6x_{53}$$

hauen mende

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 1000000$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} \leq 1.500.000$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} \leq 250.000$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 2.000.000$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 500.000$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 400.000$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 100.000$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} \geq 100.000$

$x_{11}, x_{12} \dots x_{53} \geq 0$

1. Ariketa

9 Ukilatatea $\Rightarrow$ 100 kg

6 Ukilatatea $\Rightarrow$ 120 kg

Batezbest Ukilatatea ≥ 7

Zumoa ≥ 8

Zumoa $\Rightarrow$ 1'5 eta kostua 1.05

Laranja 0'5 0'2

~~Salneurria~~ $\Rightarrow$

x_{ij}: i Ukilatatea ~~laranja~~ j rako erabiltzen den laranja kopurua

$$\max z = 0'3(x_{92}+x_{62}) + 0'45(x_{91}+x_{61})$$

Salneurria $= 1'5(x_{91}+x_{61}) + 0'5(x_{92}+x_{62})$

Kostua $= 1'05(x_{91}+x_{61}) + 0'2(x_{92}+x_{62})$

hauen mende

$$x_{91}+x_{92} \leq 100$$

$$x_{61}+x_{62} \leq 120$$

$$\frac{9x_{91}+6x_{61}}{x_{91}+x_{61}} \geq 8$$

$$\frac{9x_{92}+6x_{62}}{x_{92}+x_{62}} \geq 7$$

$$x_{91}, x_{61}, x_{92}, x_{62} \geq 0$$

5.

min $z = 30x_1 + 28x_2$

hauen werde

$4x_1 + 2x_2 \geq 20$

$6x_1 + 4x_2 \geq 16$

$4x_1 + 2x_2 \geq 18$

$4x_1 + 4x_2 \geq 21$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

5.1

max $G = 20y_1 + 16y_2 + 18y_3 + 21y_4$

$4y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 4y_4 \leq 30$

$2y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 \leq 28$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

5.2

Helburua max	$\Longleftrightarrow$	min
i. murriz $\leq b_i$		aldagaia ≥ 0
i. murriz $= b_i$		ez murriz
$\geq b_i$		$x_i \leq 0$
aldagaia ≥ 0		$\geq b_i$
ez murriz		$= b_i$
aldagaia ≤ 0		$\leq b_i$

$b \rightarrow \hat{b}$

$\hat{x}_B = B^{-1} \cdot \hat{b} \Longrightarrow \not\geq \Rightarrow$ ~~primalak~~

$\hat{z} = C^T_B \cdot \hat{x}_B$

$a_j \longrightarrow \hat{a}_j$

$\hat{y}_3 = B^{-1} \cdot \hat{a}_3$

$\hat{z}_j - c_j = C^T_B \hat{y}_3 - c_3 \geq$

$c \rightarrow \hat{c}$

$\hat{z} - \hat{c} = \hat{C}^T_B y_j - \hat{c}_j$

$\hat{z} = \hat{C}^T_B x_B$

3.8

$\max z = 6x_1 + 5x_2 + 5x_3$

kever mende

$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40 \qquad\qquad x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -40$

$2x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 30 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = -30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	-6	-5	-5	0	0	0	0	$m_0 = -6$
a_4	1	-1	-1	1	0	0	-40	$m_1 = 1$
a_5	-2	2	1	0	1	0	-30	$m_2 = -2$
a_{w_1}	$\boxed{1}$	1	1	0	0	1	M	
	0	1	1	0	0	6		
	0	-2	-2	1	0	-1	M-40	
	0	4	3	0	1	2	-2M-30	
	1	1	1	0	0	1	M	

Solució Bornogabe

7.4

min $z = 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4$ max $-z = -10x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 4x_4$

hauen mende hauen mende

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 10$ $\Longrightarrow$ $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + w_1 = 10$

$-4x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 12$ $\quad$ $-4x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_6 + w_2 = 12$

		2M+10	8-8M	6-M	4-3M	M	M	0	0	-22M	
-M	a_{w_1}	2	$\boxed{4}$	2	1	-1	0	1	0	10	
-M	a_{w_2}	-4	4	-1	2	0	-1	0	1	12	$m_2 = 1$
		6M+6	0	3M+2	-M+2	-M+2	M	-2	0	-20-2M	
-8	a_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$	$m_1 = \frac{1}{4}$
-M	a_{w_2}	-6	0	-3	$\boxed{1}$	1	-1	-1	1	2	
		18	0	8	0	0	2	M	M-2	-24	
-8	a_2	2	1	5/4	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	2	
-4	a_4	-6	0	-3	1	1	-1	-1	1	2	

Soluzio optimo anizkoitza $z^* = 24$.

3.2

min $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$

hauen mende

$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -22$

$4x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 + x_6 = 20$

$-2x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 + x_7 = -15$

	2	1	3	2	0	0	0	0	$m_0 = -\frac{1}{2}$
a_5	-2	$\boxed{-2}$	-2	-2	1	0	0	-22	
a_6	4	4	1	4	0	1	0	20	$m_1 = -2$
a_7	-2	-8	-2	-1	0	0	1	-15	$m_3 = 4$
	1	0	2	1	1/2	0	0	-11	
a_2	1	1	1	1	-1/2	0	0	11	$m_0 = -\frac{2}{3}$
a_6	0	0	$\boxed{-3}$	0	2	1	0	-24	$m_1 = -1/3$
a_7	6	0	6	7	-4	0	1	73	$m_3 = -2$
	1	0	0	1	5/4	2/3	0	-27	
a_2	1	1	0	1	1/6	1/3	0	3	
a_3	0	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	8	
a_7	6	0	0	7	0	2	1	25	

7.8

min $z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5$

kovea wende

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

max $-z = -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5$

kovea wende

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_7 + w_1 = 12$$

		$3-2M$	$1-M$	$-3M-2$	$2-2M$	$1-2M$	0	M	0	$-12M$
0	a_6	1	2	$\boxed{2}$	1	1	1	0	0	2
$-M$	a_{w_1}	2	1	3	2	2	0	-1	1	12
		$2-\frac{M}{2}$	$2M-1$	0	$-\frac{M}{2}+3$	$-\frac{M}{2}+2$	$\frac{3M}{2}-1$	M	0	$-9M-2$
-2	a_3	$\frac{1}{2}$	1	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
$-M$	a_{w_1}	$\frac{1}{2}$	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	9
		1	2	2	1	1				

$m_z = \frac{3}{2}$

Bidercezine