5. Gaia

Probabilitate Usdutua

Sarrera

Definizioa. Zoriazko esperimentuaren emaitza posible guztiak barneratzen dituen multzoari lagin espazioa deritzo eta Ω bezala adierazten da.

Adibidea

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Dado bat botata.

Definizioa. Ω-ren parteren multzoak $\mathcal{P}(\Omega)$ moduan adierazitakoak, gertaera guztien multzoa adierazten du. Bi gertaera berezi daudelle!

Ω, gertaera segurua.

$\emptyset$, ezinezko gertaera.

Probabilitate-funtzioa

Definizioa. Izan bedi Ω lagin-espazioa finitua $\mathcal{E}$ zoriazko esperimentuari lotuta $\mathcal{P}(\Omega)$ bere parteen multzoa. Izan bedi P funtzioa

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto P(A)$$

non ondorengo axiomak betetzen diren,

i) $P(\Omega)=1$

ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A)\geq 0$

iii) $\forall A,B \in \mathcal{P}(\Omega)$ non $A\cap B=\emptyset$ den,

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)$$

P funtzioak hiru axiomak betetzen baditu probabilitate-funtzio bezala definitzen da eta $(E, \mathcal{P}(\Omega), P)$ hirukoteak probabilitate-espazioa osatzen du.

Propietateak. Izan bitez Ω zorizko esperimentuari loturiko lagin-espazioa eta P probabilitate-funtzioa.

1 $P(\emptyset)=0$

2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(\bar{A}) = 1- P(A)$

3. $\forall A,B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $A\subset B$ $P(A)\leq P(B)$ eta $P(B-A)= P(B)- P(A)$

4. $\forall A,B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Zorizko eredu klasikoa

Izan bedi Ω zorizko esperimentuaren lagin-espazioa. Ondoren, zorizko eredua edo Laplace-ren eredua aztertuko dugu.

$\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$ lagin espazio finitua non oinarrizko gertaera guztiek probabilitate berdinak.

$$P(\{e_i\}) = p \quad i=1,\dots,n$$

orduan,

1 $p= 1/n$ 2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $P(A)= \frac{\#A}{n}$

Probabilitate baldintzatua

Definizioa. Izan bitez zorizko esperimentua, Ω lagin-espazio finitua eta P bertan-definiturikoko probabilitate-funtzioa. Har dezagun, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gertaera finkoa dela eta $P(A) > 0$. Orduan, beste edozein B gertaerari Arekiko baldintzatutako probabilitatea $P(B|A)$ moduan adierazten da.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propietatea. Izan bedi $(E, \mathcal{P}(\Omega), P)$ probabilitate-espazioa. Finka dezagun $A \in \otimes$ gertaera $P(A) > 0$ dela. Eraiki dezagun ondorengo funtzioa:

$$\begin{aligned} P(\cdot|A) : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ B &\longmapsto P(B|A) \end{aligned}$$

Orduan $P(\cdot|A)$ funtzioa ere probabilitate-funtzioa da.

Probabilitate konposatuaren teorema: Izan bitez $A_1, \ldots, A_k$ gertaerak non $P(\cap_{i=1}^{k} A_i) > 0$ den. Orduan,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \ldots \times P\left(A_k \Big| \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right).$$

Adibidea

Bi kamera: M_1 eta M_2

$P(M_1) = 0'4 \quad P(G|M_1) = 0'3 \quad P(A|G \cap M_1) = 0'001$

$P(M_1 \cap G \cap A) = P(M_1) \cdot P(G|M_1) \cdot P(A|G \cap M_1) = 1'2 \cdot 10^{-4}$

Bayes-en teorema

Definizioa. Izan bitez $A_1, \dots, A_k$ gertaerak non ondorengoak betetzen diren:

Gertaerak bateraezinak dira:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i,j \quad i \neq j$$

Gertaerek Ω osoa estaltzen dute.

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$$

Orduan, $\{A_1, \dots, A_k\}$ gertaera sistema osoak osatzen dutela esaten da.

Probabilitate osoaren teorema: Izan bedi $\{A_1, \dots, A_k\}$ g.s.o $P(A_i) >= 0$ izanik $i = 1, \dots, k$. Orduan, $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \dots + P(B \cap A_k)$$

edo

$$P(B) = P(B | A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B / A_k) \cdot P(A_k)$$

Adibidea

$$P(J_0 | B_0) = 0'94 \quad P(J_1 | B_1) = 0'91$$

$$P(J_1) = P(J_1 | B_1) \cdot P(B_1) + P(J_1 | B_0) \cdot P(B_0) = 0'91 \cdot 0'55 + 0'06 \cdot 0'45 = 0'5275$$

$$\left.\begin{array}{l} P(B_1) = \frac{11}{9} P(B_0) \\ P(B_0) + P(B_1) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P(B_1) = \frac{11}{9} - \frac{11}{9} P(B_1) \Rightarrow \frac{20}{9} P(B_1) = \frac{11}{9} \Rightarrow P(B_1) = \frac{11}{20} \\ P(B_0) = 1 - P(B_1) \qquad P(B_1) = 0'55 \\ P(B_0) = 0'45 \end{array}$$

$$P(J_1 | B_0) = 0'06$$

Bayes-en teorema: Izan bedi $\{A_1, \dots, A_n\}$ g.s.o $P(A_i) > 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Orduan, $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) P(A_j)}{P(B | A_1) P(A_1) + \dots + P(B | A_n) P(A_n)} \quad j = 1 \dots n$$

Adibidearen jarraipena

1 seinalia bidali izateko probabilitatea 1 seinalea jaso bada.

$$P(B_1 | S_1) = \frac{P(S_1 | B_1) \cdot P(B_1)}{P(S_1)} = \frac{0'91 \cdot 0'55}{0'5275} = 0'9488$$

2 'Errorea' $= (B_0 \cap S_1) \cup (B_1 \cap S_0)$

$$P(\text{Errorea}) = P(B_0 \cap S_1) + P(B_1 \cap S_0) =$$

$$= 0'06 \cdot 0'45 + 0'09 \cdot 0'55 = 0'0765$$

Independentzia

Definizioa. Izan bitez A eta B gertaerak. A eta B elkarrekiko askeak direla esango dugu baldin eta,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

bada.

Adibidea

10 enplegatu edo gehiago

H ≡ '10 langile edo gehiago dituzten enpresak"

A ≡ ADSL bidezko sarrera

$P(H)=0'25$

$P(A|H)=0'6$

$P(A|\bar{H})=0'2$

$P(H\cap A)=P(H)\cdot P(A) \Rightarrow 0'15\neq 0'075$

$P(H\cap A) = P(A|H)\cdot P(H) = 0'15$

$P(A)= P(A|H)\cdot P(H) + P(A|\bar{H})\cdot P(\bar{H}) = 0'3$

Sistemak

n osagai seriean

Izan bedi $A_i \equiv$ "i. osagaia ongi dabil" $i=1,\dots,n$

Orduan,

$$P(A_1\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

n osagai paralelean

Nahikoa da osagai bat ongi ibiltzea

Izan bedi $A_i \equiv$ "i. osagaia ongi dabil", $i=1,\dots,n$.

orduan,

$$P(A_1\cup\dots\cup A_n) = 1-P(\bar{A}_1\cap\dots\cap\bar{A}_n) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$

Ariketak 5. Gaia

2. Ariketa

6 irudi-txartel $\Rightarrow 4\bar{A} + 2A$

$A \equiv$ 'Aukeratuak'

$\Omega = \{(A), (\bar{A}, A), (\bar{A}, \bar{A}, A), (\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, A), (\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, A)\}$

5. Ariketa

a) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

b) $A \cap B \cap \bar{C}$

c) $A \cap B \cap C$

d) $A \cup B \cup C$

e) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$

f) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup$
$\cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

g)

h) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

i) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

6. Ariketa

$P(A) = \frac{1}{3}$ $\quad P(B) = 1/2$

a) $A \cap B = \emptyset$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) + P(\bar{A}) = 1/2$

b) A B-ren parte denean

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) = \frac{1}{6}$

c) $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

23. Ariketa

$K_1 \equiv$ 'Pelotak Gordetzeko kutxa'

$K_2 \equiv$ 'Pelotak Gordetzeko kutxa'

$G_1 \equiv$ 'Pelota gorriak' $G_2 \equiv$ 'K_2 kutxako pelota gorria'

$B_1 \equiv$ 'Pelota berdeak' $B_2 \equiv$ 'K_2 kutxako pelota berdea'

$$K_1 \begin{cases} 6G \\ 4B \end{cases} \qquad K_2 \begin{cases} 4G \\ 3B \end{cases}$$

a)

$$P(G_1) = 0'6$$

$$P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2 | G_1) = 0'6 \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

b)

$$P(G_1 \cap G_2) + P(B_1 \cap B_2) \overset{*}{=} \frac{3}{8} + 0'2 = \boxed{0'575}$$

$$* \; P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) = 0'4 \cdot \frac{1}{2} = 0'2$$

31. Ariketa

$A \equiv$ 'Aurretago aurkitu'

$L \equiv$ 'Larrialdi lokalizatzailea'

$$\text{Desagertutako Hegazkinak} \begin{cases} \%70\,A \begin{cases} \%60\,L \\ \%40\,\bar{L} \end{cases} \\ \%30\,\bar{A} \begin{cases} \%10\,L \\ \%90\,\bar{L} \end{cases} \end{cases}$$

a)

$$P(\bar{A} | L) = \frac{P(L|\bar{A})\,P(\bar{A})}{P(L)} = \frac{0'1 \cdot 0'3}{0'45} = 0'06$$

$$P(L) = P(A) \cdot P(L|A) + P(\bar{A})\,P(L|\bar{A}) = 0'45$$

5.Gaia

Probabilitatea - Kalkulua

7. Ariketa

$P(A)=0'4 \quad P(B)=0'7$

$$P(A|B)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}= \_\_\_\_$$

8. Ariketa

3 egunkari, A, B, C

$P(A)=0'2 \quad P(B)=0'16 \quad P(C)=0'14$

$P(A\cap B)=0'08, \quad P(B\cap C)=0'04 \quad P(A\cap C)=0'05$

$P(A\cap B\cap C)=0'02$

a) Zenbatek ez du irakurtzen egunkaririk

$$P(\overline{A\cap B\cap C})=1-(P(A\cup B\cup C))=1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-$$

$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cup C))=1-0'35=0'65$$

b) Zenbatek bakarra

$$P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})+P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})+P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)=0'33$$

23 Ariketa

$U_1 = 6$ pelota 6 eta 4 B

$U_2 = 4G$ eta 3 B

a)

$P(G_1) = 0'6$

$P(G_2 \cap G_1) = P(G_2 | G_1) \cdot P(G_1) = 0'625 \cdot 0'6 = \underline{0'375}$

b) Hasieratik pelota proportzioa mantentzeko probabilitatea

$P(\cancel{B}P(G_2 \cap G_1) \cup P(B_2 \cap B_1))$

$P(S_1) = P(G_2 \cap G_1) = 0'375$

$P(S_2) = P(B_2 \cap B_1) = P(B_2 | B_1) \cdot P(B_1) = 0'5 \cdot 0'4 = 0'2$

$P(S_1 \cup S_2) = 0'375 + 0'2 = \underline{0'575}$

24. Ariketa

A eta B emanik $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$

$$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(B)} = \frac{P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B) \cdot P(A) + P(B) \cdot P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{P(B) \cdot (P(A) + P(\bar{A}))}{P(B)} = \frac{\cancel{P(B)} \cdot (P(A) + 1 - P(A))}{\cancel{P(B)}} =$$

$$= 1$$

21. Ariketa

$$\text{Dadoa} = \{\underset{2p}{1}, \underset{p}{2}, \underset{2p}{3}, \underset{p}{4}, \underset{2p}{5}, \underset{p}{6}\}$$

a) 3 baino zenbaki handiagoa lortzeko probabilitatea.

$$P(\text{Dado}) = 3 \cdot 2p + 3p = 1 \Rightarrow 6p + 3p = 1 \Rightarrow 9p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{9}$$

Ondorioz, dadoaren balioa 3 baino handiagoa izateko,

B ≡ 'Dadoaren balioa'

$$P(B \geq 3) = p + 2p + p = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

b) Karratu perfektua izateko probabilitatea.

$$P(B=1) + P(B=4) = 2p + p = 3p = \frac{1}{3}$$

c) 3 baino emaitza handiagoa lortuko dugula jakinik, karratu perfektua izateko probabilitatea.

$$\text{Dadoa} = \{\underset{p}{4}, \underset{2p}{5}, \underset{p}{6}\}$$

$$P(\text{Dado}) = 2p + 2p = 1 \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$P(B=4) = p = \frac{1}{4}$ -ko probabilitatea karratu perfektua lortzeko.

25. Ariketa

A, B eta C gertaerak emanik, $P(C) > 0$:

$P(A \cup B | C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B | C)$ dela frogatuko dugu.

$$P(A \cup B | C) = \frac{P(C \cap A \cup B)}{P(C)} = \frac{P(C) \cdot P(A \cup B)}{P(C)} =$$

$$= \frac{P(C)\cdot P(A) + P(C)P(B) - P(C)\cdot P(A\cap B)}{P(C)}$$

$$= P(A|C) + P(B|C) - P(A\cap B|C)$$

22. Ariketa

Gasolindegia

- %40 BG95
  - %30 DG
    - %70 Ut
    - %30 $\overline{Ut}$
  - %60 $\overline{DG}$
    - %50 Ut
    - %50 $\overline{Ut}$
- %35 G
  - %60 DG
    - %60 Ut
    - %40 $\overline{Ut}$
  - %40 $\overline{DG}$
    - %50 Ut
    - %50 $\overline{Ut}$
- %25 BG98
  - %50 DG
    - %50 Ut
    - %50 $\overline{Ut}$
  - %50 $\overline{DG}$
    - %40 Ut
    - %60 $\overline{Ut}$

a) G eskatu eta Goraino betetzeko probabilitatea.

$P(G\cap DG) = P(G)\cdot P(DG|G) = 0'35 \cdot 0'6 = 0'21$ -eko probabilitatea

b) Bezeroak depositoa goraino betetzeko probabilitatea

$$P(DG) = P(BG95)\cdot P(DG|BG95) + P(G)\cdot P(DG|G) + P(BG98)\cdot P(DG|BG98) =$$

$= 0'12 + 0'21 + 0'125 = 0'455$ -eko probabilitatea dago

c) Bezeroak depositoa beteta BG95 -eskatu izanaren probabilitatea.

$$P(BG95|DG) = \frac{P(DG\cap BG95)}{P(DG)} = \frac{0'12}{0'455} = 0'264$$

$$P(G|DG) = \frac{P(DG\cap G)}{P(DG)} = 0'461$$

$$P(BG98|DG) = \frac{P(DG\cap BG98)}{P(DG)} = 0'275$$

25. Ariketa

A, B eta C gertaerak izanda

$$P(A \cup B | C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B | C)$$

$$P(A \cup B | C) = \frac{P(C \cap (A \cup B))}{P(C)} = \frac{P(C) \cdot P(A \cup B)}{P(C)} = \frac{P(C)(P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{P(C)} =$$

$$= \frac{P(C) \cdot P(A) + P(C) \cdot P(B) - P(C) \cdot P(A \cap B)}{P(C)} = \frac{P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(C \cap A \cap B)}{P_C} =$$

$$= P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B | C)$$

26. Ariketa

A eta B gertaerak emanik

$$P(A) = P(B) P(A|B) + P(\bar{B}) P(A|\bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$$

27. Ariketa

$P(BG95) = 0'4 \quad P(G) = 0'35 \quad P(BG98) = 0'25$

$P(GG | BG95) = 0'3 \quad P(GG | G) = 0'6 \quad P(GG | BG98) = 0'5$

a) $P(GG \cap G) = P(GG | G) \cdot P(G) = 0'3 \cdot 0'35 = 0'18$

b) $P(GG) = P(GG \cap G) + P(GG \cap BG95) + P(GG \cap BG98) = 0'425$

c) $P(BG95 | GG) = \frac{P(GG \cap BG95)}{P(GG)} = \frac{P(GG | BG95) \cdot P(BG95)}{P(GG)} = 0'282$

28. Ariketa

Aurreko ariketari jarraituz,

$P(Ut \mid BG95 \cap GG) = 0'7$ $P(Ut \mid BG95 \cap \overline{GG}) = 0'5$

$P(Ut \mid G \cap GG) = 0'6$ $P(Ut \mid G \cap \overline{GG}) = 0'5$

$P(Ut \mid BG98 \cap GG) = 0'5$ $P_{Ut}(BG98 \cap \overline{GG}) = 0'4$

a)

$P(G \cap GG \cap Ut) = P(G) \cdot P(GG \mid G) \cdot P(Ut \mid G \cap GG) =$

$= 0'35 \cdot 0'6 \cdot 0'6 = 0'126$

b)

$P(BG98 \cap \overline{GG} \cap Ut) = P(BG98) \cdot P(\overline{GG} \mid BG98) \cdot P(Ut \mid BG98 \cap \overline{GG}) =$

$= 0'25 \cdot 0'5 \cdot 0'4 = 0'05$

c)

$P(BG98 \cap Ut) = P(Ut \mid BG98) \cdot P(BG98) = 0'1125$

$P(Ut \mid BG98) = \frac{P(Ut \mid GG \cap BG98) + P(Ut \mid \overline{GG} \cap BG98)}{2} =$

$= \frac{0'5 + 0'4}{2} = \frac{0'9}{2} = 0'45$

d)

$P(GG \cap Ut) = P(GG) \cdot P(Ut \mid GG) = 0'425 \cdot 0'6 = 0'255$ X

$P(Ut \mid GG) = [P(Ut \mid GG \cap G) + P(Ut \mid GG \cap BG95)$

$+ P(Ut \mid GG \cap BG98)]/3 = 1'8/3 = 0'6$

e)

$$P(ut) = P(BG95) \cdot P(GG \mid BG95) \cdot P(ut \mid BG95 \cap GG) +$$
$$+ P(BG95) \cdot P(\overline{GG} \mid BG95) \, P(ut \mid BG95 \cap \overline{GG}) + \dots$$
$$\dots = 0'5125$$

f)
$$P(BG95 \mid ut) = \frac{P(BG95 \cap ut)}{P(ut)} = \frac{0'1125}{0'5125} = 0'22$$

30. Ariketa

A kutxa — 3 pieza Akastun, 2 pieza on

B kutxa — 2 pieza Akastun, 3 pieza on

$$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = P(BA)$$

$$P(AA \mid BA) = \frac{P(BA \mid AA) \cdot P(AA)}{P(BA \mid AB) \cdot P(AB) + P(BA \mid AA) \cdot P(AA)} = \frac{2}{3}$$

28. Ariketa

a) Depositoa bete, G eta kredito txartela erabili

$$P(G \cap DG \cap kt) = P(G) \cdot P(DG \mid G) \cdot P(kt \mid DG \cap G) =$$

$$= 0'35 \cdot 0'6 \cdot 0'6 = 0'126$$

b)

BG98, Depositoa ez bete eta kredito txartela erabili

$$P(BG98 \cap \overline{DG} \cap kt) = P(BG98) \cdot P(\overline{DG} \mid BG98) \cdot P(kt \mid BG98 \cap \overline{DG}) =$$

$$= 0'25 \cdot 0'5 \cdot 0'4 = 0'05$$

c)

BG98, eta kredito txartela erabili

$$P(BG98 \cap kt) = P(BG98) \cdot P(DG \mid B98) \cdot P(kt \mid BG98 \cap DG) +$$

$$+ P(BG98) \cdot P(\overline{DG} \mid 98) \cdot P(kt \mid BG98 \cap \overline{DG}) =$$

$$= 0'25 \cdot 0'5 \cdot 0'5 + 0'05 = 0'1125$$

d) Depositoa bete eta kredito txartela erabili

$$P(DG \cap kt) = P(BG98) \cdot P(DG \mid BG98) \cdot P(kt \mid DG \cap BG98) +$$

$$+ P(G) \cdot P(DG \mid G) \cdot P(kt \mid DG \cap G) +$$

$$+ P(BG95) \cdot P(DG \mid BG95) \cdot P(kt \mid DG \cap BG95) = 0'2725$$

e) Kredito txartela erabili

$$P(kt) = P(DG \cap kt) + P(\overline{DG} \cap kt) = 0'2725 + 0'24 = 0'5125$$

f) Bezeroak kredito txartela erabili badu, BG98 eskatu izateko probabilitatea.

$$P(BG98 | Kt) = \frac{P(Kt \cap BG98)}{P(Kt)} = \frac{0'1125}{0'5125} = 0'2195$$

35. Ariketa

$A_H \equiv$ 'Auto Handia'

$A_T \equiv$ 'Auto txikia'

$G \equiv$ 'Garaiz iritsi'

$$\frac{3}{4} A_T \begin{cases} 0'9 G \\ 0'1 \bar{G} \end{cases} \quad \frac{1}{4} A_H \begin{cases} 0'6 G \\ 0'4 \bar{G} \end{cases}$$

Lanera garaiz iritsi da, zein da A_T-rekin joateko probabilitatea.

$$P(A_T | G) = \frac{P(G|A_T) \cdot P(A_T)}{P(G)} = \frac{0'9 \cdot \frac{3}{4}}{0'825} = 0'82$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(G) &= P(A_T) \cdot P(G | A_T) + P(A_H) \cdot P(G | A_H) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot 0'9 + \frac{1}{4} \cdot 0'6 = 0'825 \end{aligned}}$$

26. Ariketa

A eta B gertaerak, eta $P(B) > 0$

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B})\, P(A|\bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) =$$

$$= P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$$

b)

$$P(A|\bar{L}) = \frac{P(\bar{L}|A)\,P(A)}{P(\bar{L})} \overset{*}{=} \frac{0'4 \cdot 0'7}{0'55} = \underline{0'509}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ^{*}P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0'7 \\ P(\bar{L}) = 1 - P(L) = 0'55 \end{array}}$$

32. Ariketa

$M_1 \equiv$ 'I Metodoa'

$M_2 \equiv$ 'II Metodoa'

a) $S_i \equiv$ 'Etxeko atea irekitzea i. saiakeran'

$\underline{M_1}$

$$P(S_3) = P(\bar{S}_1) \cdot P(\bar{S}_2|\bar{S}_1) \cdot P(S_3|\bar{S}_2 \cap \bar{S}_1) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$\underline{M_2}$

$$P(S_3) = P(\bar{S}_1) \cdot P(\bar{S}_2|\bar{S}_1)\, P(S_3|\bar{S}_2 \cap \bar{S}_1) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

b)

$$P(M_1) = \frac{2}{3} \text{ eta } P(M_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(M_2|\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = \frac{P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2|M_2)\,P(M_2)}{P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{10}{27}} = \underline{0'4}$$

$$P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = P(M_1) \cdot P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2|M_1) + P(M_2) \cdot P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2|M_2) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{10}{27}$$

33. Ariketa

$S \equiv$ '10 osagaiko sorta' $O \equiv$ 'Frogatutako Osagaia'

$A_i \equiv$ 'i Akastun ~~osagai~~ sorta' $i \in 2,1,0$; $F \equiv$ 'A0 bida ez akatsik'

$$S \begin{cases} \%50\ A_0 \\ \%30\ A_1 \\ \%20\ A_2 \end{cases}$$

2 osagai hartu, zein probabilitate A_0, A_1, A_2 izateko:

a)

$O_1 = \bar{A}$ eta $O_2 = \bar{A}$

$$P(A_0 | F_0) \overset{*}{=} \frac{P(F_0|A_0) \cdot P(A_0)}{P(F_0)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{0'864} = \underline{0'578|}$$

*
$P(F_0|A_0) = 1$

$P(A_0) = \frac{1}{2}$

$P(F_0) = P(F_0|A_0) \cdot P(A_0) + P(F_0|A_1) \cdot P(A_1) + P(F_0|A_2) P(A_2) =$

$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0'8 \cdot 0'3 + 0'62 \cdot 0'2 = 0'864$

$P(O_1 \cap O_2 | A_2) = P(O_1|A_2) \cdot P(O_2|O_1 \cap A_2) = 0'8 \cdot 0'77 = 0'62$

b)

$$P(A_1|F_1) = \frac{P(F_1|A_1) \cdot P(A_1)}{P(F_1)} = \frac{0'2 \cdot 0'3}{0'13} = \underline{0'45|}$$

$P(F_1|A_1) = P(\bar{O}_2 \cap O_1 | A_1) + P(O_2 \cap \bar{O}_1 | A_1) =$

$= P(O_1|A_1) \cdot P(\bar{O}_2|O_1 \cap A_1) + P(\bar{O}_1|A_1) \cdot P(O_2|\bar{O}_1 \cap A_1) =$

$= 0'1 \cdot 1 + 0'9 \cdot 0'11 = 0'2$

$P(A_1) = 0'3$

$P(F_1) = P(F_1|A_0) \cdot P(A_0) + P(F_1|A_1) \cdot P(A_1) + P(F_1|A_2) \cdot P(A_2) =$

$= 0 \cdot 0'5 + 0'2 \cdot 0'3 + \frac{34}{10 \cdot 9} \cdot 0'2 = 0'13$

29. Ariketa

$P(P|B) = 0'9$

$P(\bar{P}|\bar{B}) = 0'8$

$P(B) = 0'2$

a)

$$P(P) = P(P|B) \cdot P(B) + P(P|\bar{B}) \cdot P(\bar{B}) =$$
$$= 0'9 \cdot 0'2 + 0'2 \cdot 0'8 = 0'34$$

b)

$$P(B|P) = \frac{P(P \cap B)}{P(P)} = \frac{0'18}{0'34} = 0'53$$

32. Ariketa

a)

I metodoa

$$P(3) = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{3}}$$

II Metodoa

$$P(3) = \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

b)

$$P(II|2) = \frac{P(II \cap 2)}{P(2)} =$$

$P(M_1) = \frac{2}{3}$ $\quad P(M_2) = \frac{1}{3}$

$$P(M_2|\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = \frac{P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 | M_2) \cdot P(M_2)}{P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{10}{27}} = 0'4$$

$$P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = P(M_1) \cdot P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 | M_1) + P(M_2) \cdot P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 | M_2) =$$
$$= \frac{\cancel{1}}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{10}{27}$$

33. Ariketa

$P(A_0)=0'5$ $A_i \equiv$ "i Alkaton osagai"

~~$F_2 \equiv$ "i. probatuta"~~

$P(A_1)=0'3$ $F_1 \equiv$ "lehenengo osagaia Alkaturu"

$P(A_2)=0'2$ $F_2 \equiv$ "Bigarren osagaia alkaturu"

a)

$$P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 | A_0) = 1$$

$$P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 | A_1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = 0'8$$

$$P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 | A_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{90} = 0'62$$

b)

$$P(F_1 \cap \bar{F}_2 | A_0) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 | A_0) = 0$$

$$P(F_1 \cap \bar{F}_2 | A_1) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 | A_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0'2$$

$$P(F_1 \cap \bar{F}_2 | A_2) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 | A_2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = 0'355$$

c)

$$P(A_0 | F_0) = \frac{P(F_0 \cap A_0)}{P(F_0)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{0'864} = 0'579$$

$$P(F_0) = P(F_0|A_0) \cdot P(A_0) + P(F_0|A_1) \cdot P(A_1) + P(F_0|A_2) \cdot P(A_2) =$$

$$= 1 \cdot 0'5 + 0'8 \cdot 0'3 + 0'62 \cdot 0'2 = 0'864$$

$$P(A_1 | F_0) = \frac{P(F_0 \cap A_1)}{P(F_0)} = \frac{0'8 \cdot 0'3}{0'864} = 0'28$$

$$P(A_2 | F_0) = \frac{P(F_0 | A_2)}{P(F_0)} = \frac{0'62 \cdot 0'2}{0'864} = 0'144$$

34. Ariketa

$U_b \equiv$ 'Begi beltz dun umeak'

$U_a \equiv$ 'Begi argidun umeak'

$A_b \equiv$ 'Begi beltzdun aitak'

$A_a \equiv$ 'Begi argidun aitak'

$P(A_b \cap U_b) = 0'05$; $P(A_b \cap U_a) = 0'079$; $P(A_a \cap U_b) = 0'089$; $P(A_a \cap U_a) = 0'782$

$$P(U_b | A_b) \underset{*}{=} \frac{P(A_b \cap U_b)}{P(A_b)} = \frac{0'05}{0'129} = 0'3876$$

$$\stackrel{*}{P}(A_b) = P(A_b | U_b) \cdot P(U_b) + P(A_b | U_a) \cdot P(U_a) =$$
$$= 0'05 + 0'079 = 0'129$$

$$P(U_a | A_b) \underset{*}{=} \frac{P(A_b \cap U_a)}{P(A_b)} = \frac{0'079}{0'129} = 0'612$$

38. Ariketa

A eta B gertaerak askeak badira, $\bar{A}$ eta B askeak dira.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}) = P(B) - P(B|A)P(A) = P(B) - P(B) \cdot P(A) = P(B)(1 - P(A)) =$$
$$= P(B) \cdot P(\bar{A})$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$
$$P(B|A) = P(B)$$

37. Ariketa

$P = 0'14$

Langile Osasuntsuak $= 0'12$ Positibo

Langile Gaixoen $= 0'05$ Negatibo

Gaixorik daudeen pertsonen portzentaia $= 0'14$

$P(O \cap P) = P(O) \cdot P(P|O) = 0'86 \cdot 0'17 = 0'1462$

$P(G \cap N) = P(G)\ P(N|G) = 0'14 \cdot 0'05 = 7 \cdot 10^{-3}$

40. Ariketa

$P(A) = 0'4 \quad P(A \cup B) = 0'7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0'4 + P(B) = 0'7 \Rightarrow P(B) = 0'3$

Bateraezinak badira

Independienteak

$1 - P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0'3 = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B) = \frac{0'3}{0'4} = 0'75$

43. Ariketa

A ≡ "Goizeko bilerara garaiz iritsi da"

B ≡ "Arratsaldeko bilerara garaiz iritsi da"

a)

$P(A) = 0'4 \quad P(B) = 0'5 \quad P(A \cap B) = 0'25$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0'4 \cdot 0'5 = 0'2$

Ondorioz, ez dira askeak.

b)

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0'2$

$P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B) = 0'8$

46. Ariketa

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0'857$

$P(A \cup B \cup C) = 1 - 0'857 = 0'1426$

$P(\underbrace{P(A \cap B)}_{A_1} \cup C) = P(A_1 \cup C) = 1 - P(A_1 \cap C) = 1 - 0'9025 = 0'0975$

$P(\underbrace{P(A \cup B)}_{A_1} \cap C) = 1 - P(A \cap B) = 0'0975 \cdot 0'95 = 0'0926$

45. Ariketa

$$\text{Gaurko Bidalitako paketeak}\begin{cases} 0'4\ E_1 \begin{cases} 0'02\ B \\ 0'98\ \bar{B} \end{cases} \\ 0'5\ E_2 \begin{cases} 0'01\ B \\ 0'99\ \bar{B} \end{cases} \\ 0'1\ E_3 \begin{cases} 0'05\ B \\ 0'95\ \bar{B} \end{cases} \end{cases}$$

a) Zoriz aukeratutako paketea bat E_1 eta B.

$$P(E_1 \cap B) = P(E_1) \cdot P(B|E_1) = 0'008$$

b) Zoriz aukeratutako paketea B.

$$P(B) = P(E_1 \cap B) + P(E_2 \cap B) + P(E_3 \cap B) =$$

$$= 0'008 + 0'005 + 0'005 = 0'018$$

c) Zoriz aukeratutako paketea $\bar{B}$, Probabilitatea E_1-etik bidalia izatekoa.

$$P(E_1 | \bar{B}) = \frac{P(\bar{B} \cap E_1)}{P(\bar{B})} = \frac{0'392}{0'982} = 0'399$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(\bar{B} \cap E_1) = P(E_1) \cdot P(\bar{B}|E_1) = 0'4 \cdot 0'98 = 0'392 \\ P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0'982 \end{array}}$$

49. Ariketa

Ilustrazi bakoitzak, Alkastun osagaien %90, gutxienez

$A_1 \equiv$ 'Alkastun osagaia 1. ilustrazia'

$A_2 \equiv$ 'Alkastun osagaia 2. ilustrazia'

ilustrazi batek %20 ez identifikatu.

$$0'9\ A_1 \begin{cases} A_2 \\ \bar{A_2} \end{cases} \qquad 0'1\ \bar{A_1} \begin{cases} A_2 \\ \bar{A_2} \end{cases}$$

a) Alkastun osagaia lehen ilustrazioak soilik identifikatu

$P(A_1 \cap \bar{A_2}) = P(A_1 \cup A_2) - P(A) = 0'1$

$P(\bar{A_1} \cap \bar{A_2}) = 0'2 \Rightarrow 1 - P(\bar{A_1} \cap \bar{A_2}) = P(A_1 \cup A_2) = 0'8$

b)

Ilustrazi bakarrak identifikatzea

$P(A_1) =$

50. Ariketa

$A1 \quad A2 \quad A3$

$P(A_1) = 0'3 \quad P(A_2) = 0'5 \quad P(A3) = 0'2$

$P(A_1 \cap I) = 0'1 \quad P(A_2 \cap I) = 0'3 \quad P(A_3 \cap I) = 0'5$

$$P(A_1 | I) = \frac{P(I \cap A_1)}{P(I \cap A_1) + P(I \cap A_2) + P(I \cap A_3)} = 0'11$$

$$P(A_2 | I) = \frac{P(I \cap A_2)}{P(I \cap A_1) + P(I \cap A_2) + P(I \cap A_3)} = 0'33$$

51. Ariketa

$T_1 \equiv$ 'txanponaren alde biak gorriak' $\quad B_i \equiv$ 'i. aldiz gorri'

$T_2 \equiv$ 'Urdina bi aldetatik'

$t_3 \equiv$ 'gorria eta urdina'

$$P(t_1 \mid B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \frac{P(B_1 \cap \dots \cap B_n \mid t_1) \cdot P(t_1)}{P(B_1 \cap \dots \cap B_n)} =$$

$$\boxed{P(B_1 \cap \dots \cap B_n \mid t_1) = 1}$$

$$= \frac{1/3}{1/3\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{1}{1\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{-1}$$

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1 \cap \dots \cap B_n \mid t_1) \cdot P(T_1) + P(T_2) \cdot P(B_1 \cap \dots \cap B_n \mid t_2) +$$

$$+ P(t_3) \cdot P(B_1 \cap \dots \cap B_n \mid t_3) = P(t_1) + P(t_3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) t_3) = \prod_{i=1}^{n} (P(B_i \mid t_3)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Gaia 6

Probabilitate kalkulua:

Zorizko aldagaiak eta Probabilitate banaketak

Zorizko aldagaiaren ideia orokorra

Definizioa. Izan bedi E esperimentua eta Ω lagin espazio finitua. Honela definituko da X:

$$X: \Omega \longrightarrow M \subseteq \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

Itxura honetako funtzioei zorizko aldagai esaten zaie. Non M zorizko aldagaiaren banaketa espazioa da.

Zorizko aldagaiak bi motatakoak izan daitezke.

Diskretuak: Aldagaiak har ditzakeen balio ek multzo finitua edo zenbagarria osatzen dute.

Jarraituak: Aldagaiaren banaketa espazioak tarte erreal bat barneratzen duenean.

Probabilitate-legea eta dentsitate-funtzioa

Definizioa. Izan bedi X z.a diskretua. $f(x_i) = P(X=x_i)$ balioek, Xren probabilitate legea osatzen dute baldin eta;

i) $f(x_i) \geq 0, \ \forall i$

ii) $\sum_i f(x_i) = 1$

Definizioa. Izan bedi z.a jarraitua. f funtzioari erreala Xren dentsitate-funtzio deritzo baldin:

i) $f(x) \geq 0, \ \forall x$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Dentsitate-funtzioak Xren probabilitate banaketa-neurtzen du.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_b^a f(x)\,dx, \ a < b$$

Banaketa-funtzioa

Definizioa. Izan bedi X z.a Xren banaketa funtzioa honela definitzen da:

$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$$

Itxaropena eta Bariantza

Definizioa Izan bedi X zorizko aldagaia. Xren itxaropen matematikoa honela definitzen da.

i) X z.a. diskretua bada:

$$E(x) = \sum_x x f(x)$$

(ii) X z.a. jarraitua bada,

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Adibidea

X ≡ "sistemak erantzuna eman arteko denbora segundotan"

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}, & x \leq 0 \\ 0 & \text{, bestela} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx \underset{*}{=} \left[-x \cdot e^{-1/5 x} - \int_{0}^{\infty} -e^{-1/5 x} dx \right] =$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ v = -e^{-1/5 x} & dv = \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx \end{matrix}}$$

$$-x \cdot e^{-1/5 x} + 5e^{-1/5 x} \Big]_{0}^{\infty} = 5.$$

Ondorioz, sistemaren itxarote itxaropena 5 segundutakoa da.

Propietateak. Izan bedi X z.a eta EX bere itxaropena

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX+b) = a\,EX + b$

2. Izan bedi $c \in \mathbb{R}$ konstantea

$$E(c) = c$$

3. Izan bedi Y z.a

$$E(X+Y) = EX + EY$$

4. Izan bitez X eta Y z.a. askeak

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$$

5. Izan bedi h funtzio erreala eta har dezagun $Y = h(X)$ zorizko aldagai berria

i) $E(h(X)) = \sum_x h(x) f(x)$, X diskretua bada.

ii) $E(h(X)) = \int h(x) f(x) dx$, X jarraitua bada.

Definizioa. Izan bedi X zorizko aldagaia. Xren bariantza honela definitzen da:

i) X z.a. diskretua bada

$$VAR(X) = \sum (x - EX)^2 f(x) =$$
$$= E(X - EX)^2$$

ii) X z.a jarraitua izanda

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)\, dx =$$
$$= E(X - EX)^2$$

Bariantzak X zorizko aldagaiaren sakabanapena neurtzen du.

Propietateak. Izan bedi X z.a $EX = \mu$. Orduan,

$$VAR(X) = EX^2 - (EX)^2 =$$
$$= EX^2 - \mu^2$$

Propietatea. Izan bedi X zorizko aldagaia

1. $VAR(X) \geq 0$.

2. $VAR(X) = 0 \iff X = \text{konstantea}$

3. $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad VAR(aX+b) = a^2 VAR(X)$

4. Izan bitez X eta Y z.a. askeak

$$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y)$$

Definizioa. Bariantzaren erro karratuari desbideratze estandarra esaten zaio.

$$SD(X) = \sqrt{VAR(X)}$$

Bernoulli banaketa

Demagun zorizko esperimentuak bi emaitza posible dituela soilik: arrakasta edo porrota. X zorizko aldagaia erabiliko dugu 0 ala 1 balioak esleitzeko, $X=1$ arrakasta lortu bada eta $X=0$ porrota lortzen denean.

Probabilitate-legea:

$$P(X=x) = \begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=0 \end{cases} =$$

$$= p^x(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1$$

$X \sim Bernoulli(p)$

bezala idatziko dugu.

$$EX = p \text{ eta } VAR(X) = p(1-p)$$

Banaketa Binomiala

Ondorengo baldintzak bete behar dira zorizko esperimentuak:

Esperimentuan aurretik definitutako n saiakera egiten dira.

Bi emaitza posible daude saiakera bakoitzean.

- arrakasta (1)
- porrota (0)

Saiakera guztiak elkarrekiko askeak.

arrakasta lortzeko probabilitatea konstantea da.

Izan bedi: $X \doteq$ "n saiakera horietan lortutako arrakasta"

$$X \sim Bin(n, p)$$

Probabilitate-legea

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n. \text{ delarik}$$

$$EX = np \quad \text{eta} \quad VAR(x) = npq$$

Banaketa Binomial Negatiboa

Banaketa Binomia Negatiboa ondorengo baldintzadun zorizko esperimentuari lotzen zaio:

- Bata bestearen ondorengo saiakerak osatuta dago, eta askeak dira elkarrengandik.

Saiakera bakoitzak bi emaitza posible: arrakasta edo porrota.

Saiakera batean arrakasta lortzeko probabilitatea konstantea da.

Esperimentuak r arrakasta lortu arte jarraitzen du.

Izan bedi $X \equiv$ "r. arrakasta lortu arte izandako porrot kopurua" zorizko aldagaia.

$$X \sim BinNeg(r,p)$$

Probabilitate-legea:

$$P(X=x) = \binom{x+r-1}{x} (1-p)^x p^r \quad x=0,1,2\ldots$$

$$Ex = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{eta} \quad Var(x) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Poisson-en banaketa

Neurri jakineko denbora-tartean gertaera bat ematea "zaila" denean gertaera-kopurua zenbatzen duen zorizko aldagaiak maiz Poisson banaketa jarraitzen duela.

Probabilitate-legea

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x=0,1,2\ldots$$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ moduan adierazikо dugu.

$$Ex = \lambda \quad \text{eta} \quad Var(x) = \lambda$$

Banaketa - Uniformea

X zorizko aldagaiak a eta b parametrodun banaketa Uniformea jarraitzen duela esango da, dentsitate-funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{bestela} \end{cases}$$

$X \sim \mathcal{U}(a,b)$ moduan adierazilo dugu.

$$EX = \frac{a+b}{2} \quad \text{eta} \quad Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

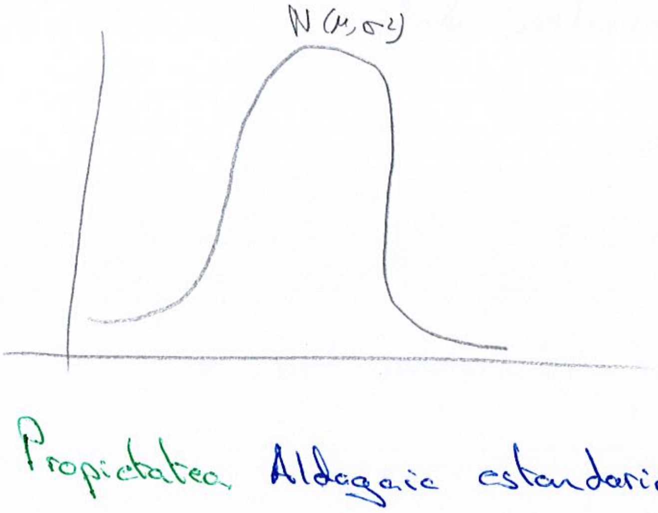
Banaketa Normala

X zorizko aldagaiak μ eta σ^2 parametrodun banaketa normala jarraitzen du, bere dentsitate-funtzioa ondorengoa bada.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ moduan adierazilo dugu.

$$EX = \mu \quad \text{eta} \quad VAR(X) = \sigma^2$$



Propietatea Aldagaia estandarizatzea

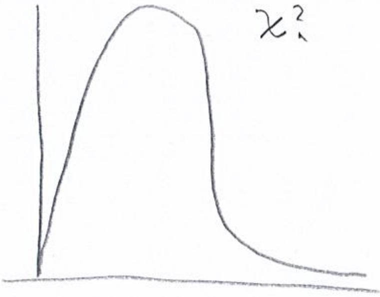
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Banaketa normaletik eratorritako banaketak

Ki-karratu banaketa

n askatasun gradudun χ^2 banaketa

$X \sim \chi^2_n$



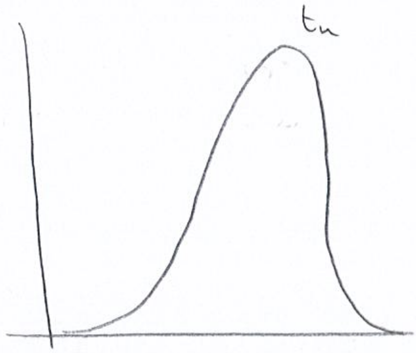
$EX = n$

$VAR(x) = 2n$

Student-en banaketa

n askatasun gradudun t banaketa

$X \sim t_n$



$EX = 0$

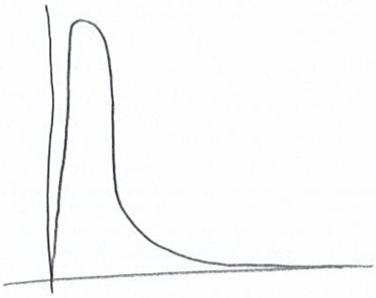
$VAR(x) = \frac{n}{n-2}$

Simetrikoa da.

Fisher-Snedecor banaketa

n_1 eta n_2 askatasun-gradudun F banaketa

$X \sim F_{n_1, n_2}$



$EX = \frac{n_2}{n_2 - 2}$

Eskuin-alboratua da.

Gaia 7

Probabilitate Kalkulua:

Lagindu, Simulazioa eta Limitearen teoremak

Zenbaki Handien Legea

Izan bitez $X_1, \dots, X_n$ zorizko aldagaiak, elkarrekiko askeak eta banaketa berdinekoak eta $EX_1 = \mu < \infty$. Orduan, $\forall \varepsilon > 0$ hartuta,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \epsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Lagin batezbestekoa populazioko batezbestekora hurbiltzen da. $X \sim$ Bernoulli(p) hartuz eta n aldiz errepikatuz. Eta batezbestekoa kalkulatu, $\sum_i X_i/n = f_n(X=1)$, $X=1$ zein proportziotan gertatu den esango digu, hau da, maiztasun erlatiboa.

Gainera, $P(X=1) = p = EX$. Esan daiteke maiztasun erlatiboak gertaeren probabilitatera hurbiltzen direla.

6 eta 7. Gaiak

Probabilitate-kalkulua:

Zorizko aldagaiak eta probabilitate-banaketak

Limitearen teorema

Aldagai Diskretuak

2. Ariketa

$X \equiv$ "Posta kodean 0ren desberdinak diren digitu-kopurua"

$\Omega \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ balioak har ditzake.

Adibideak:

48700 $\Rightarrow$ $X = 2$
20010 $\Rightarrow$ $X = 3$
55455 $\quad$ $X = 0$

4. Ariketa

a) $P(X=k) = ak \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$

Probabilitate baliodk izateko

$$\sum_{k=1}^{5} ak = a \cdot \sum_{k=1}^{5} k = a \cdot 15 = 1 \Rightarrow a \cdot 15 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{15}$$

b) $P(X=k) = ak \quad k = 1, \dots, n$

Probabilitate-legea betetzeko: $\sum f(x) = 1.$

$$\sum_{k=1}^{n} ak = a \cdot \sum_{k=1}^{n} k = a \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow an^2 + an = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{n(n+1)}$$

c)

$$P(X=k) = a/k \quad k=1,2,\dots$$

Probabilitate legea betetzeko:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a/k = a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = a \cdot \frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{\pi}$$

d)

$$P(X=k) = a/k^2 \quad k=1,2\dots$$

Probabilitate betiea izateko

$$\sum_{k=1}^{\infty} a/k^2 = a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = a\,\frac{\pi^2}{6} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{\pi^2}$$

5. Ariketa

X ≡ "Auto batean gurpilen presioa baxuegia duen gurpil-kopurua"

a)

x	0	1	2	3	4
f(x)	0'3	0'2	0'1	0'05	0'05
g(x)	0'4	0'1	0'1	0'1	0'3
h(x)	0'4	0'1	0'2	0'1	0'3

Probabilitate-legea izateko $\sum_{x=0}^{4} f(x) = 1 \Rightarrow 0'3+0'2+0'1+0'05+0'05 \neq 1$

$$\sum_{x=0}^{4} g(x) = 1 \Rightarrow 0'4+0'1+0'1+0'1+0'3 = 1$$

Ondorioz, g(x) da Xren probabilitate-legea.

b)

$$P(2 \le X \le 4) = 0'1 + 0'1 + 0'3 = 0'5$$

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0'6$$

$$P(X \ne 0) = 1 - P(X=0) = 1 - 0'4 = 0'6$$

c)

$$EX = \sum_{x=0}^{4} x\,g(x) = 0 \cdot 0'4 + 1 \cdot 0'1 + 2 \cdot 0'1 + 3 \cdot 0'1 + 4 \cdot 0'3 =$$
$$= \boxed{1'8}$$

8. Ariketa

X ≡ " bi ordainketa jarraien arteko hilabete-kopurua "

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0'3 & 1 \le x < 3 \\ 0'40 & 3 \le x < 4 \\ 0'45 & 4 \le x < 6 \\ 0'6 & 6 \le x < 12 \\ 1 & x \ge 12 \end{cases}$$

a)

Xren probabilitate-legea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0'3 & 1 \le x < 3 \\ 0'1 & 3 \le x < 4 \\ 0'05 & 4 \le x < 6 \\ 0'15 & 6 \le x < 12 \\ 0'4 & x \ge 12 \end{cases}$$

b)

$$P(3 \le X \le 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=6) = 0'30$$

$$P(X \ge 4) = P(X=4) + P(X=6) + P(X=12) = 0'8$$

11. Ariketa

$X \equiv$ "astean saldutako aldizkari kopurua"

$$f(x) = \begin{cases} 1/15 & x=1 \\ 2/15 & x=2 \\ 1/5 & x=3 \\ 4/15 & x=4 \\ 1/5 & x=5 \\ 2/15 & x=6 \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

a)

Ale bakoitzak 0'25 $\Rightarrow$ 1 euro saldu

3 ale edo 4 ale erostea?

3 ale

$3 \cdot 0'25 = 0'75$

$EX_3 = X_1 + X_2 + X_3 = 0'626$

$X_1 = 0'25 \cdot \frac{1}{15} = 0'016$

$X_2 = 1'25 \cdot \frac{2}{15} = 0'16$

$X_3 = 2'25 \frac{1}{5} = 0'45$

4 ale

$4 \cdot 0'25 = 1$

$EX_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1'133$

$X_1 = 0 \cdot \frac{1}{15} = 0$

$X_2 = 1 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}$

$X_3 = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$X_4 = 3 \cdot \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{3}{5}$

18. Ariketa

Semea edukitzeko probabilitatea 0'6, baina ume baten sexua besteetatik askea da. 8 umeetako familia.

a) Guztiak sexu berekoak. $S \sim Bin(8, 0'6)$

$P(S=0) + P(S=8) =$

$= \binom{8}{0} p^0 (1-p)^{8-0} + \binom{8}{8} p^8 (1-p)^{8-8} =$

$= 1 \cdot 0'4^8 + 1 \cdot 0'6^8 = 0'017$

$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$

b)

$P(S \cap S \cap S \cap \bar{S} \cap \bar{S} \cap \bar{S} \cap \bar{S} \cap \bar{S}) = 0'6^3 \cdot 0'4^5 = 2'2184 \cdot 10^{-3}$

$P(\bar{S} \cap \bar{S} \cap \bar{S} \cap S \cap S \cap S \cap S \cap S) = 4'9766 \cdot 10^{-3}$

$P(S=3) + P(S=5) = 7'188 \cdot 10^{-3}$

c) $P(S=5) = \binom{8}{5} \cdot 0'6^5 (1-0'6)^{8-5} = 56 \cdot 0'6^5 (1-0'6)^3 = 0'279$

d)

$P(S \geq 5) = 1 - P(5 \geq S) = 1 - P(4 \geq S) =$

22. Ariketa

$p = 0'8$

$n = 10$

a)

X = " zenbat ile detektagailu dauden "

$X \sim Bin(10, 0'8)$

$P(X \geq 6) = P(X > 7)$

$Y = 10 - X \rightarrow Y \sim Bin(10, 0'2)$

$P(10 - Y > 7) = P(-Y > -3) = P(Y > 3) = 0'6778$

b)

$p = 0'7$

$X \sim Bin(10, 0'7)$

$P(X \geq 6) = P(X > 7)$ $\qquad Y = 10 - X \rightarrow Y \sim Bin(10, 0'3)$

$P(Y > 3) = 0'3828$

$p = 0'6$

$Y \sim Bin(10, 0'4)$

$P(Y > 3) = 0'1673$

c)

Probabilitate handia dago markatzen jartzeko ilustkapen oddotar

23. Ariketa

a)

X = "Gaixotasun arraroen ondorioz hiltzen diren kopurua"

$X \sim P(0'3)$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0'996 = \underline{0'004}$

b)

$E x = \lambda = 0'3$

Aldagai Jarraituak

2. Ariketa

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{bestela} \end{cases}$$

a)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$F(x) = \int_2^4 kx\,dx = \left.\frac{kx^2}{2}\right]_2^4 = \frac{k \cdot 4^2}{2} - \frac{k\,2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = \frac{k \cdot 2^{\cancel{4}3}}{\cancel{2}} - 2k =$$

$$= 8k - 2k = 1 \Rightarrow 6k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{6}.$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

b) Dentsitate-funtzioa $\Rightarrow P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 \frac{x}{6}\,dx$

Banaketa-funtzioa

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \mapsto F(x) = P(2 \leq X \leq 4)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

c)

Xren itxaropena

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_2^4 x \cdot \frac{x}{6}\, dx = \left.\frac{x^3}{18}\right]_2^4 = \frac{4^3}{18} - \frac{2^3}{18} =$$

$$= \frac{56}{18} = \boxed{3'11}$$

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)\, dx = \int_2^4 (x - 3'11)^2 \frac{x}{6}\, dx =$$

$$= \int_2^4 (x^2 - 6'22x + 9'6721) \cdot \frac{x}{6}\, dx = \int_2^4 \frac{x^3}{6} - \frac{6'22x^2}{6} + \frac{9'6721x}{6}\, dx =$$

$$= \left.\frac{x^4}{24} - \frac{2'07x^3}{6} + \frac{4'836x^2}{6}\right]_2^4 = 0'318$$

$$SD(x) = \sqrt{VAR(x)} = \boxed{0'564}$$

d)

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \left(\frac{3^2}{12} - \frac{1}{3}\right) = 0'583$$

e)

$$P(X < u) = \frac{u^2}{12} - \frac{1}{3} = 0'9 \Rightarrow u^2 = 14'8 \Rightarrow u = 3'85$$

20. Ariketa

X ≡ "Osagai hidraulikoa baten urtebetako lehen konpontzeak"

$$f(x) = \begin{cases} \frac{32}{(x+4)^3} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

a)

f(x) benetan dentsitate funtzioa da?

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{32}{(x+4)^3}dx = 1 \Rightarrow f(x) = 32\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+4)^3}dx =$$

$t = x+4$
$dt = dx$

$$= 32\int_0^{\infty}\frac{1}{t^3}dt = 32\int_0^{\infty} t^{-3}dt = 32\cdot\frac{t^{-2}}{-2}\Big]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{-16}{t^2}\Big]_0^{\infty} = \frac{-16}{(x+4)^2}\Big]_0^{\infty} = 0-\left(-\frac{16}{16}\right) = 1.$$

b)

Banaketa funtzioa kalkulatu

$$F(x) = \int_0^x \frac{32}{(x+4)^3}dx = \frac{-16}{(x+4)^2}\Big]_0^x = \frac{-16}{(x+4)^2}-\left(-\frac{16}{16}\right) = \frac{-16}{(x+4)^2}+1$$

c)

$$P(2\leq x\leq 5) = P(X=5)-P(X=2) =$$

$$= 0'8 - 0'55 = 0'25$$

d)

$$X \sim h(x) = \frac{100}{x+4}$$

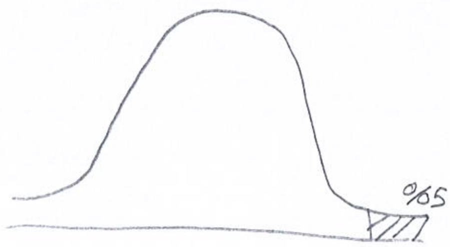
$$EX = \int_0^{\infty} h(x)\cdot f(x)dx = \int_0^{\infty}\frac{100\cdot 32}{(x+4)^4}dx = \frac{3200\cdot}{-3(x+4)^3}\Big]_0^{\infty} = 16'66$$

22. Ariketa

X ≡ "Gizabanakoak jasan dezakeen irradiazio kopurua"

$X \sim N(500, 150^2)$

a) Kantitate horretatik aurrera soilik %5ak ez du jasango ondorio larririk



$P(X=x) = 0'05 \Rightarrow 0'95$ baino txikiagoa

$P(X \leq 1'645)$ izango da

b) $P(350 < X < 650)$

$$P(350 < X < 650) = \left| \begin{array}{l} X \sim N(500, 150^2) \\ Y = \dfrac{X-500}{150} \end{array} \right| = P(-1 < Y < 1) = P(Y \leq 1) - P(-1 < Y) =$$

$$= P(Y < 1) - (1 - P(Y<1)) = 0'8413 - (1 - 0'8413) = \boxed{0'6826}$$

c) 100 gizabanako

i) gutxienez 82k 350 eta 650 irradiazio-kantitatea.

$X \sim Bin(100, 0'6826)$

$P(X \geq 82)$

$np \geq 5$ eta $n(1-p) \geq 5$ $\quad X \approx N(np, np(1-p))$

$\Downarrow \qquad \qquad \Downarrow$

$68'26 = 100 \cdot 0'6826 \geq 5 \qquad \underbrace{100(1-0'6826)}_{=31'74} \geq 5 \qquad X \approx N(68'26, 21'67)$

22. Ariketa

$X \sim N(68'26,\ 21'67)$

$$P(X \geq 82) = \left| \begin{array}{l} X \sim N(68'26,\ 21'67) \\ Y = \dfrac{X - 68'26}{\sqrt{21'67}} \end{array} \right| = P(Y \geq 2'95) = 1 - P(Y \leq 2'95) =$$

$$= 1 - 0'998359 =$$

$$= 1'641 \cdot 10^{-3}$$

ii)

100 gizabanakok bereganatu dezaketen irradiazio-kantitate osoa 54000 baino handiagoa

kantitate-osoa

$x_1 \ldots$

$x_2 \ldots$

$\vdots$

$x_n \ldots$

$n = 100$

$$t = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$t \sim N(500 \cdot 100,\ 150^2 \cdot 100) \Rightarrow t \sim N(50000,\ 1500^2)$$

$$P(t > 54000) = \left| \begin{array}{l} t \sim N(50000,\ 1500^2) \\ Y = \dfrac{t - 50000}{1500} \end{array} \right| = P(Y > 2'66) = 1 - P(Y \leq 2'66) =$$

$$= 1 - 0'996093 = 3'907 \cdot 10^{-3}$$

6.Gaiko Ariketak

Aldagai diskretuak

2. Ariketa

$X \equiv$ 'Posta kodean, 0-ren desberdinak diren digitu-kopurua'

$P(X=k) = ak \Rightarrow k = 0,1,2,3,4,5$

$$\sum_{k=0}^{5} P(X=k) = ak = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{5(5+1)}{2} = 1.$$

$$\boxed{a = \frac{1}{15}}$$

$$P(X=k) = \frac{k}{15}$$

4. Ariketa

a)

$P(X=k) = ak, \quad k = 1,2,3,4,5$

$$\sum_{k=1}^{5} P(X=k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5} a \cdot k = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{5(5+1)}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{15}}$$

b)

$P(X=k) = ak, \quad k = 1,2,\dots,n$

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a \cdot k = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{n(n+1)}$$

c)

$P(X=k) = a/k, \quad k = 1,2,\dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a/k = 1 \Rightarrow \frac{a\pi}{6} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{\pi}$$

8. Ariketa

X ≡ 'Bi ordainketa jarraien arteko hilabete-kopurua'

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0'3, & 1 \le x < 3 \\ 0'4, & 3 \le x < 4 \\ 0'45, & 4 \le x < 6 \\ 0'6, & 6 \le x < 12 \\ 1, & x \ge 12 \end{cases}$$

a) Zein da X-ren probabilitate legea

$$\sum_{i=1}^{n} f(x) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x) = 0'3 + 0'1 + 0'05 + 0'15 + 0'4 = 1$$

X	1	3	4	6	12
$f(x) = P(X = x)$	0'3	0'1	0'05	0'15	0'4

b) Soilik banaketa funtzioa erabiliz, $P(3 \le X \le 6)$ eta $P(X \ge 4)$

$$P(3 \le X \le 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=6) = \underline{0'3}$$

$$\hookrightarrow P(3 \le X \le 6) = F(6) - F(1) = \underline{0'3}$$

$$P(X \ge 4) = F(12) - F(3) = 1 - 0'4 = \underline{0'6}$$

11. Ariketa

X ≡ 'astean saldutako aldizkari kopurua'

a) 0'25 ordaindu ale bakoitza, eta 1 eurotan saldu

$$Y_1 = -0'75 + 1 = 0'25$$

$$Y_2 = 1 + 0'25 = 1'25$$

$$Y_3 = 1'25 + 1 = 2'25$$

$$EX_3 = \frac{1}{15} \cdot 0'25 + 1'25 \cdot \frac{2}{15} + 2'25 \cdot \frac{4}{5} = 1'98$$

$$EX_4 = \frac{1}{15} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{15} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{3} = 2'33$$

9. Ariketa

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{baldin } x=0 \\ 2k & \text{baldin } x=1 \\ 3k & \text{baldin } x=2 \end{cases}$$

a)

K-ren balioa p.l izateko

$$F(x) = \sum_{k=1}^{3} f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = k + 2k + 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{6}$$

b)

$P(X \leq 2)$ eta $P(0 < X < 2)$

$$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(0 < X < 2) = P(X < 2) - P(0 < X) =$$

$$= P(X<2) - P(1 \leq X) =$$

$$= P(X<2) - (1 - P(X<1))$$

$$= \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{6}\right) =$$

c)

Banaketa funtzioa

$$F(x) = \begin{cases} 1/6 & x=0 \\ 1/3 & x=1 \\ 1/2 & x=2 \end{cases}$$

Itxaropena

$$E_x = \sum_{x}^{2} x f(x) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Bariantza

$$VAR(x) = \sum_{x} (x - E_x)^2 f(x) = \frac{4^2}{3^2} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \boxed{0'55}$$

Desbarientza - estandarra

$$DES(x) = \sqrt{Var(x)} = 0'745$$

10. Ariketa

$X \equiv$ "Lana egingo duen kategori izendatutako zenbakia"

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & x = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

$$E(x) = \sum x_i f(x_i) = \frac{n+1}{2}$$

18. Ariketa

$S \equiv$ '8 semetako familiaren mutil kop'

$S \rightsquigarrow Bin(8, 0'6)$

a) Guztiak sexu berdinekoak izatea:

$P(S=x) = P(S=0) + P(S=8) = ^{*}$

$= \binom{8}{0} 0'6^{0} (1-0'6)^{8-0} + \binom{8}{8} 0'6^{8} (1-0'6)^{8-8} \overset{\otimes}{=} \frac{8!}{0!\cdot(8-0)!} \cdot 1 \cdot 6'5536\cdot 10^{-4} +$

$+ \frac{8!}{8!\,(8-8)!} \cdot 0'168 \cdot 1 = 0'17$

* $P(X=x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$

$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ $\otimes$

0'17-ko probabilitatea dago, 8 umeak mutilak izateko.

b) Lehenengo hirurak sexu batekoak eta besteak beste sexukoak.

$S_i \equiv$ 'i. Posizioko umea semea da'

$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \bar{S}_4 \cap \bar{S}_5 \cap \bar{S}_6 \cap \bar{S}_7 \cap \bar{S}_8) + P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3 \cap S_4 \cap S_5 \cap S_6 \cap S_7 \cap S_8) =$

$= 0'6^{3} \cdot 0'4^{5} + 0'6^{5} \cdot 0'4^{3} = 0'00718$

c) 5 seme eta hiru alaba izateko probabilitatea.

5 seme izateko konbinatoria $\Rightarrow 5! = 120$

Eta konbinatoria horri 3 alaba izatekoa gehitu $\Rightarrow 3! = 6$

$P(S=5) = P(S=5) + P(S=3) =$

$= \binom{8}{5} 0'6^{5} (1-0'6)^{3} + \binom{8}{3} 0'6^{3} (1-0'6)^{5} = 0'41$

d) Gutxienez 5 seme izateko probabilitatea

$P(S \geq 5) = 1 - P(5 < S) = 1 - P(4 \leq S) = 1 - 0'6561 = 0'3439$

22. Ariketa

$X \equiv$ 'tabernek ke-detektagailua dute'

$X \rightsquigarrow Bin(10, 0'8)$

a)

$P(X \geq 6) = P(X > 7)$

$Y = 10 - X \Rightarrow X = 10 - Y \quad Y \rightsquigarrow Bin(10, 0'2)$

$P(10 - Y > 7) = P(Y > 3) = 0'6778$

b)

$P(X \geq 6) = P(X > 7) \quad X \rightsquigarrow Bin(10, 0'7)$

$Y = 10 - X \Rightarrow X = 10 - Y \quad Y \rightsquigarrow Bin(10, 0'3)$

$P(10 - Y > 7) = P(Y > 3) = 0'3824$

$Bin(10, 0'6) \Rightarrow P(X > 7) = 0'1673$

23. Ariketa

$X \equiv$ 'Gaixotasun arraro baten ondorioz hiltzea'

1000 pertsonatik $\Rightarrow$ 2 baino gehiago.

$X \rightsquigarrow P(0'3)$

$P(X > 2) = 1 - P(2 \geq X) = 1 - (0'996) = 0'004$

$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-0'3}$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = 0'3 \cdot e^{-0'3}$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{0'3^2 \cdot e^{-0'3}}{2}$$

Aldagai Jarraituak

2. Ariketa

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 2 \le x \le 4 \\ 0, & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

a) K konstantearen balioa aurkitu.

$$f(x) = \int_2^4 kx\,dx = \frac{kx^2}{2}\Big]_2^4 = \frac{k16}{2} - \frac{k4}{2} = 8k - 2k = 6k \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=1} \Rightarrow 6k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{6}$$

b) Aurkitu Banaketa-funtzioa.

$$f(x) = \int_2^x \frac{x}{6}\,dx = \frac{x^2}{12}\Big]_2^x = \frac{x^2}{12} - \frac{4}{12} = \frac{x^2}{12} - \frac{1}{3}$$

c) Kalkulatu itxaropen, bariantza eta desbideratze-estandarra

$$Ex = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{6}x\,dx = \int_2^4 \frac{x^2}{6}\,dx = \frac{x^3}{18}\Big]_2^4 = \frac{4^3}{18} - \frac{2^3}{18} =$$

$$= \frac{32}{9} - \frac{2^3}{18} = \underline{3'11}$$

$$VAR(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Ex)^2 \cdot f(x) = \int_2^4 \frac{(x-3'11)^2 x}{6}\,dx = \int_2^4 \frac{(x^2 + 9'67 - 6'22x)x}{6}\,dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{x^3}{6} - \frac{6'22x^2}{6} + \frac{9'67x}{6}\,dx = \frac{x^4}{24} - \frac{6'22x^3}{18} + \frac{9'67x^2}{12}\Big]_2^4 = \frac{4^4}{24} - \frac{6'22 \cdot 4^3}{18} + \frac{9'67 \cdot 4^2}{12} - \left(\frac{2^4}{24} + \frac{6'22 \cdot 2^3}{18} + \frac{9'67 \cdot 2^2}{12}\right) =$$

$= 0'318$

$SD(x) = \sqrt{VAR(x)} = 0'565$

d) Probabilitatea ume bater pisua 3 kg baino handiagoa izatea.

$P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \left(\frac{3^2}{12} - \frac{1}{3}\right) = 0'583$

e)

$P(X = x) = 0'9$

$F(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{1}{3} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{x^3}{12} = \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \Rightarrow x^3 = 14'8 \Rightarrow x = 2'455$

20. Ariketa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{32}{(x+4)^3}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Froga ezazu benetan dentsitate-funtzioa dela

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{32}{(x+4)^3}\,dx = 32\int_0^{\infty} (x+4)^{-3}\,dx = 32\int_0^{\infty} t^{-3}\,dt =$$

$\begin{bmatrix} x+4 = t \\ dx = dt \end{bmatrix}$

$$= \frac{32\,t^{-2}}{-2}\Big]_0^{\infty} = \frac{32}{-2(x+4)^2}\Big]_0^{\infty} = \frac{32}{-\infty} - \frac{32}{-2(4^2)} = 1$$

b) Banaketa-funtzioa kalkulatu

$$\int_0^{x} f(x)\,dx = \int_0^{x} \frac{32}{(x+4)^3}\,dx = 32\int_0^{x} (x+4)^{-3}\,dx = 32\int_0^{x} t^{-3}\,dt =$$

$$= \frac{32\,t^{-2}}{-2}\Big]_0^{x} = \frac{32}{-2(x+4)^2}\Big]_0^{x} = \frac{32}{-2(x+4)^2} + 1$$

2

c) 2 eta 5 urte artean konponketa beher izateko probabilitatea.

$$P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{32}{-2(5+4)^2} - 1 - \left(\frac{32}{-2(2+4)^2} - 1\right) = 0'25$$

d) Berreskuratze-Indizea.

$Y \equiv$ 'Berreskuratze-Indizea'

$$X \rightsquigarrow Y = h(x) = \frac{100}{x+4}$$

$$E_Y = \int_0^\infty h(x) f(x) dx = \int \frac{100 \cdot 32}{(x+4)^4} dx = 3200 \int_0^\infty (x+4)^{-4} dx = 3200 \cdot \int_0^\infty t^{-4} dt = 3200 \cdot \frac{-1}{+3 \cdot (x+4)^3}\Bigg]_0^\infty =$$

$$= \frac{3200}{3 \cdot 4^3} = 16'66$$

24. Ariketa

$\lambda = 1$

$X \rightsquigarrow P(\lambda)$

a) Zein da urtean zehar espero den alkastu-txartel kopurua.

$X_i \equiv$ 'i. Astean txartelak ateratzen diren kop.

$$t = \sum_{i=1}^{52} x_i = 52$$

b) Gehienez 38 alkastun urtean zehar

$P(t \leq 38)$

$t \rightsquigarrow N(52, 52) \Rightarrow$

$$P(t \leq 38) = \left| \begin{array}{c} t \sim N(5_2, 5_2) \\ y = \frac{t - 52}{7'21} \end{array} \right| = P(y \leq -1'94) = 1 - P(y \leq 1'94) = 1 - 0'97381 = 0'02619$$

22 Ariketa

X' Jasan daitekeen irradiazioa!

$X \sim N(500, 150^2)$

a)

$P(X = x) = 0'05$

$P(X \le 1'64)$ izango litzateke

b)

$$P(350 < X < 650) = \left| \begin{array}{l} X \sim N(500, 150^2) \\ Y = \dfrac{X-500}{150} \end{array} \right| = P\left(\frac{350-500}{150} < Y < \frac{650-500}{150}\right) =$$

$$= P(-1 < y < 1) = P(y < 1) - P(-1 < y) = P(y<1) - (1 - P(y<1)) =$$

$$= 0'8413 - (1 - 0'8413) = \boxed{0'6826}$$

c)

100 gizabanako aukeratu

i) 82 gizabanakok gutxienez, $350 < X < 650$ beteganatzeko propietatea

$X \sim Bin(100, 0'6826)$

$Y \equiv$' ipertsonena $(350, 650)$ tartean

$P(82 \le Y)$

Hurbilpen legea:

$np > 5 \Rightarrow 100 \cdot 0'6827 \Rightarrow 68'27 > 5$ eta

$nq > 5 \Rightarrow 100 \cdot (1 - 0'6827) \Rightarrow 31'73 > 5$

$Y \sim N(np, npq) \Rightarrow Y \sim N(68'27, 21'66)$

$$P(Y \ge 82) = \left| \begin{array}{l} Y \sim N(68'27, 21'66) \\ Z = \dfrac{82 - 68'27}{4'65} \end{array} \right| = P(Z \ge 2'949) = 1 - P(Z < 2'949) =$$

$$= 1 - 0'998359 = \boxed{0'001641}$$

3

ii)

100 gizabanakoek beregarutu dezaketen kantitatea 54000 izateko probabilitatea.

$X_1 \equiv$ 'lehen pertsonaren kantitatea'

$\vdots$

$X_{100} \equiv$ '100 garren pertsonaren kantitatea'

$T = X_1 + \dots + X_{100} \equiv$ 'kantitate osoa'

$P(T > 54000)$

$t \sim N(50000, 1500^2)$

$$P(t > 54000) = \left| \begin{array}{l} t \sim N(50000, 1500^2) \\ z = \dfrac{t - 50000}{1500} \end{array} \right| = P(z > 2'66) = 1 - P(z \leq 2'66) =$$

$$= 1 - 0'996093 = \underline{0'0037}$$