Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

2. gaia: Lengoaiak – 0,9 puntu – Bilboko IITUE
Ebazpena

2014-11-27

1 A^* zenbagarria da eta 2^{A^*} zenbaezina da (0,325 puntu)

1.1. (0,025 puntu) Har dezagun $A = \{a, b\}$ alfabetoa. A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia zein den zehaztu. Horretarako, zerrendako lehenengo 15 hitzak orden egokian eman.

$$[\,\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \ldots]$$

1.2. (0,300 puntu) Har dezagun edozein A alfabeto. Kontraesanaren teknika erabiliz, 2^{A^*} zenbaezina dela frogatu.

Frogapen hau honako atal hauen bidez laburtu daiteke:

- Demagun 2^{A^*} zenbagarria dela. 2^{A^*} zenbagarria baldin bada, $I\!N \rightarrow 2^{A^*}$ erako f funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. f funtzio hori erabiliz 2^{A^*} multzoko lengoaia denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\, f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots, f(j), \ldots]$$

- Badakigu A^* zenbagarria dela eta, ondorioz, $I\!N \rightarrow A^*$ erako g funtzio bijektibo bat badagoela ziurta dezakegu. g funtzio hori erabiliz A^* multzoko hitz denak zerrenda batean ipini ahal izango ditugu:

$$[\, g(0), g(1), g(2), g(3), \ldots, g(j), \ldots]$$

- f eta g funtzioak erabiliz C lengoaia bat definituko dugu honako irizpide hau jarraituz:
  $I\!N$ multzokoa den k zenbaki bakoitzeko:
  - $g(k)$ hitza $f(k)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $g(k)$ hitza ez da C lengoaiakoa.
  - $g(k)$ hitza $f(k)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $g(k)$ hitza C lengoaiakoa da.
- C lengoaia ere 2^{A^*} multzoko elementu bat izango denez, f funtzioak C lengoaiari ere zenbaki bat egokituko dio. Demagun zenbaki hori j zenbakia dela. Beraz, $C = f(j)$.
- Kontraesana $g(j)$ hitza C lengoaiakoa al den aztertzerakoan sortzen da. Aurretik finkatu dugun irizpidearen arabera:
  - $g(j)$ hitza $f(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $g(j)$ hitza ez da C lengoaiakoa. Baina $C = f(j)$ denez, honako hau daukagu: $g(j)$ hitza $f(j)$ lengoaiakoa baldin bada, orduan $g(j)$ hitza ez da $f(j)$ lengoaiakoa. Eta hori ezinezkoa da, $g(j)$ hitza ezin baita aldi berean $f(j)$ lengoaian egon eta ez egon.
  - $g(j)$ hitza $f(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $g(j)$ hitza C lengoaiakoa da. Baina $C = f(j)$ denez, honako hau daukagu: $g(j)$ hitza $f(j)$ lengoaiakoa ez bada, orduan $g(j)$ hitza $f(j)$ lengoaiakoa da. Eta hori ezinezkoa da, $g(j)$ hitza ezin baita aldi berean $f(j)$ lengoaian ez egon eta egon.
- 2^{A^*} zenbagarritzat joz edo hartuz kontraesana sortu denez, 2^{A^*} zenbaezina dela ondoriozta dezakegu.

2 Lengoaien definizioa (0,575 puntu)

Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa:

2.1. (0,050 puntu) a sinboloa gutxienez behin duten hitzez osatutako L_1 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $bcacbcb$, $bcacaabcbc$, aaa, $accccaaa$, $ccacbaaca$ eta a hitzak L_1 lengoaiakoak dira baina ε, $cbcc$, b, ccc eta $bbbbbc$ ez dira L_1 lengoaiakoak.

Aukera desberdinak aurkeztuko dira:

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \geq 1\}$$

$$L_1 = A^*\{a\}A^*$$

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k(1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = a)\}$$

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uav)\}$$

2.2. (0,075 puntu) Gutxienez posizio bikoiti batean a sinboloa duten hitzez osatutako L_2 lengoaiaren definizio formala eman. Posizioak zenbatzeko ezkerretik hasi behar da, ezkerreko ertzekoa 1. posizioa dela kontsideratuz. Adibidez, $bcc\underline{a}bcb$, $bcaca\underline{a}bcbc$, $a\underline{a}a\underline{a}a$ eta $acccc\underline{a}a\underline{a}$ hitzak L_2 lengoaiakoak dira baina ε, a, aba, $cbcca$, b, ccc eta $bbbbbc$ ez dira L_2 lengoaiakoak.

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k(1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 = 0 \wedge w(k) = a)\}$$

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge |u| \bmod 2 \neq 0 \wedge w = uav)\}$$

2.3. (0,075 puntu) Posizio bikoiti denetan a sinboloa duten hitzez osatutako L_3 lengoaiaren definizio formala eman. Posizioak zenbatzeko ezkerretik hasi behar da, ezkerreko ertzekoa 1. posizioa dela kontsideratuz. Bikoitiak ez diren posizioetan ere ager daiteke a sinboloa. Adibidez, $babacabab$, aaa, bab, a, b eta ε hitzak L_3 lengoaiakoak dira baina ccc, acb, $baac$ eta $acaaa$ ez dira L_3 lengoaiakoak.

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 = 0) \to w(k) = a)\}$$

2.4. (0,100 puntu) a denak posizio bikoitietan dituzten hitzez osatutako L_4 lengoaiaren definizio formala eman. Gerta daiteke posizio bikoitietan a-ren desberdinak diren beste sinboloak ere agertzea baina agertzen den a bakoitza posizio bikoiti batean egongo da. Posizioak zenbatzeko ezkerretik hasi behar da, ezkerreko ertzekoa 1. posizioa dela kontsideratuz. Adibidez, ε, $bacccc$, $bbbbb$, c, bcc eta $bacccab$ hitzak L_4 lengoaiakoak dira baina a, $aaaa$, $babaa$ eta abc ez dira L_4 lengoaiakoak.

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = a) \to k \bmod 2 = 0)\}$$

2.5. (0,075 puntu) bc azpikatea bakoitia den edozein kopurutan elkartuz eratutako hitzez osatutako L_5 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, bc, $bcbcbc$ eta $bcbcbcbcbc$ lengoaiakoak dira baina ε, $abba$, $ccccc$ eta $bcbc$ ez dira L_5 lengoaiakoak.

$$L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k(k \geq 1 \wedge k \bmod 2 \neq 0 \wedge w = (bc)^k)\}$$

$$\begin{aligned} L_5 = \{w \mid \quad & w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge |w| \bmod 2 = 0 \wedge \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 \neq 0) \to w(k) = b) \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 = 0) \to w(k) = c)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_5 = \{w \mid \quad & w \in A^* \wedge |w| \geq 2 \wedge |w| \bmod 2 = 0 \wedge \\ & \forall k((1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 \neq 0) \to (w(k) = b \wedge w(k+1) = c))\} \end{aligned}$$

2.6. (0,075 puntu) ccc azpikatearekin hasten diren hitzez osatutako L_6 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $cccbcaa$, ccc, $cccaaaaab$ eta $cccccc$ lengoaiakoak dira baina ε, aa, aba, $ccbcca$ eta $abcccaaccc$ ez dira L_6 lengoaiakoak.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = cccu)\}$$

$$L_6 = \{ccc\}A^*$$

$$L_6 = \{c\}\{c\}\{c\}A^*$$

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 3 \wedge w(1) = w(2) = w(3) = c\}$$

2.7. (0,050 puntu) ccc azpikatearekin hasi eta gutxienez a sinboloaren agerpen bat duten hitzez osatutako L_7 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $cccbcaa$, $ccca$, $cccaaaaab$ eta $cccccaac$ lengoaiakoak dira baina ε, aa, aba, ccc, $ccbcca$ eta $cccbcccc$ ez dira L_7 lengoaiakoak.

$$L_7 = L_6 \cap L_1$$

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge |u|_a \geq 1 \wedge w = cccu)\}$$

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \geq 1 \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = cccu)\}$$

2.8. (0,075 puntu) ccc azpikatearekin hasi eta a sinboloaren agerpenik ez duten hitzez osatutako L_8 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, $cccbc$, ccc, $cccbcbb$ eta $ccccccc$ lengoaiakoak dira baina ε, aa, aba, $cccabc$, $ccbcca$ eta $cccbacccac$ ez dira L_8 lengoaiakoak.

$$L_8 = L_6 \cap \overline{L_1}$$

$$L_8 = L_6 \setminus L_1$$

$$L_8 = L_6 \setminus L_7$$

$$L_8 = L_6 \cap \overline{L_7}$$

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u(u \in A^* \wedge |u|_a = 0 \wedge w = cccu)\}$$

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a = 0 \wedge \exists u(u \in A^* \wedge w = cccu)\}$$