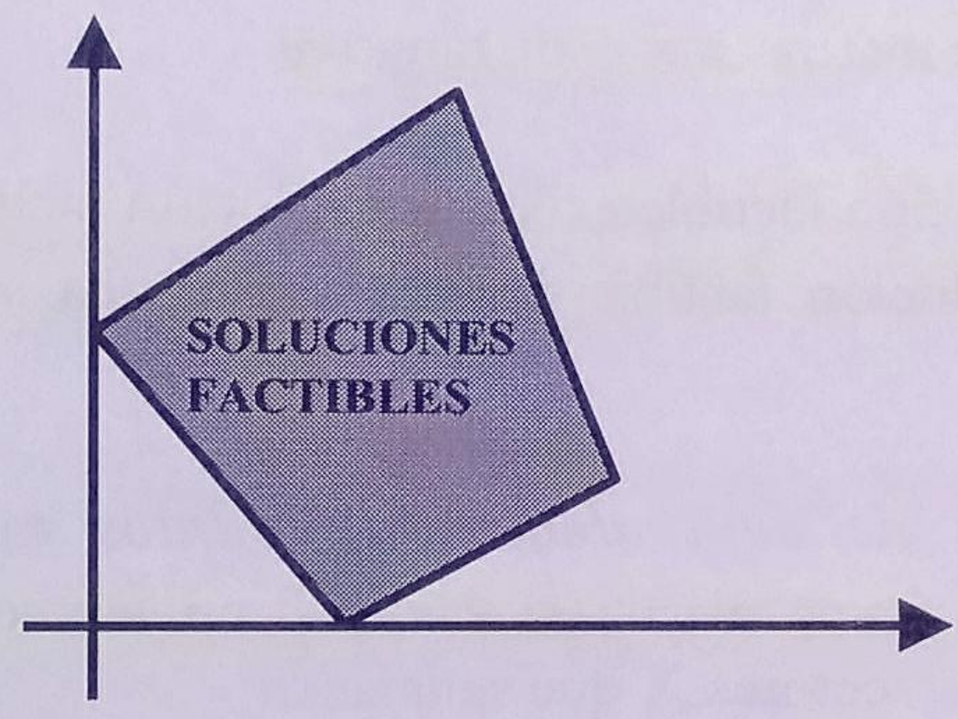
CAPÍTULO III

EL MÉTODO SIMPLEX

1. Teoremas fundamentales del Simplex

Los teoremas siguientes constituyen los resultados fundamentales de la programación lineal y son la base del método Simplex, algoritmo que permite resolver con cierta eficiencia un problema PL. A continuación se muestran algunos resultados, sin demostración, válidos para la PL:

Teorema 1: El conjunto de soluciones factibles de un problema PL es un politopo convexo.



Teorema 2: En un problema PL de minimización, si el conjunto de soluciones factibles es no-vacío y la función objetivo está acotada inferiormente en él, el problema PL tiene al menos una solución. Para el caso de maximización la función objetivo debe estar acotada superiormente.

Teorema 3: La función objetivo alcanza el óptimo en un **punto extremo** o **vértice** del conjunto convexo de las soluciones factibles. Si se alcanza en dos o más puntos extremos, entonces toma el mismo valor para toda combinación lineal convexa de ellos.

Nota: Una combinación lineal convexa de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es el conjunto de puntos u que verifican:

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \quad \text{donde} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$$

m incógnitas

Definición 1: Sea un conjunto de m ecuaciones lineales, $AX = B$ (restricciones de un problema PL), y sea D una submatriz regular $(m \times m)$ formada por m columnas y m filas de A. Si las n - m componentes X_i, no asociadas con las columnas de D son iguales a cero, la solución para el conjunto resultante de ecuaciones se denomina **solución básica** (hay como mucho $\binom{n}{m}$ soluciones básicas) respecto de la base D. Las componentes de X asociadas con las columnas de D se denominan **variables básicas**. Si no existe D con las propiedades requeridas el sistema de restricciones es inconsistente.

Definición 2: Si las componentes no nulas de una solución básica son positivas la solución se denomina **factible** para el problema PL. Si una o varias variables básicas de una solución factible básica tiene valor cero esta solución se dice que es **degenerada**.

Teoerma 4 (Teorema fundamental de la PL): Sea un problema PL en forma estándar donde A es una matriz $m \times n$ de rango m.

- Si existe una solución factible existe una solución factible básica.
- Si existe una solución factible óptima, existe una solución factible básica óptima.

Teorema 5 (Teorema de equivalencia de puntos extremos y soluciones factibles básicas): Sea A una matriz $m \times n$, y B un m vector. Sea T el politopo convexo formado por los vectores X que satisfacen

$$AX = B$$
$$X \geq 0$$

Entonces X_0 es un punto extremo o vértice de T si y sólo si X_0 es una solución factible básica.

Corolario 1: Si el conjunto convexo de las soluciones factibles de un problema PL es no-vacío, existe al menos un punto extremo, que se corresponde con una solución factible básica.

Corolario 2: Si hay una solución óptima finita para un problema PL hay una solución óptima finita que es un punto extremo del conjunto de restricción.

Corolario 3: El conjunto T de restricciones posee a lo sumo un número finito de puntos extremos, tantos como soluciones factibles básicas existen.

Se parte de una solución factible y después de ciertas iteraciones se consigue la sol. óptima

Si las restricciones de un problema PL determinan un poliedro, existe un punto extremo donde la fo alcanza el óptimo. Sólo se necesita investigar, por tanto, el conjunto de las soluciones factibles básicas. Sin embargo, para n y m grandes resulta ineficiente y difícil de valorar todas las soluciones posibles para seleccionar la óptima. El procedimiento del **Simplex** proporciona un método mediante el cual, partiendo de un punto extremo, se generan nuevos puntos extremos adyacentes cuyas evaluaciones a través de la fo son decrecientes o iguales (caso de minimización) alcanzándose en un número finito de iteraciones la solución óptima. El método permite determinar cuándo un problema posee solución ilimitada.

EJEMPLO 1

MÉTODO ALGEBRAICO

Método algebraico:

Determinar algebraicamente la solución óptima del modelo de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 4x + 3y \\ \text{s.a} \quad & x - 2y \geq -4 \\ & 2x + 3y \leq 13 \\ & x - y \leq 4 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

MÉTODO ALGEBRAICO

Introduciendo variables de holgura r, s, t para pasar a la forma estándar resulta:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 4x + 3y \\ \text{s.a} \quad & -x + 2y + r = 4 \\ & 2x + 3y + s = 13 \\ & x - y + t = 4 \\ & x, y, r, s, t \geq 0 \end{aligned}$$

$-x+2y \leq 4$

n incógnitas > m

Hay 5 incógnitas y 3 ecuaciones, por tanto $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ es el número máximo de soluciones básicas; para calcular éstas, de las 5 variables 2 (5-3) deben ser excluidas.

La soluciones básicas aparecen en la siguiente tabla:

x	0	0	0	0	-4	13/2	4	2	12	5
y	0	2	13/3	-4	0	0	0	3	8	1
r	4	0	-14/3	4	0	21/2	8	0	0	7
s	13	7	0	25	21	0	5	0	-29	0
t	4	6	25/3	0	8	-5/2	0	5	0	0

soluciones básicas factibles son no degeneradas

De la tabla se deduce que las soluciones básicas factibles son:

$$x = 0, y = 0, r = 4, s = 13, t = 4 \rightarrow Z = 0$$
$$x = 0, y = 2, r = 0, s = 7, t = 6 \rightarrow Z = 6$$
$$x = 4, y = 0, r = 8, s = 5, t = 0 \rightarrow Z = 16$$
$$x = 2, y = 3, r = 0, s = 0, t = 5 \rightarrow Z = 17$$
$$x = 5, y = 1, r = 7, s = 0, t = 0 \rightarrow Z = 23$$

Se observa que todas las soluciones anteriores son no degeneradas porque solamente dos variables son nulas.

La solución óptima es: $x = 5, y = 1 \rightarrow Z = 23$

2. Algoritmo del Simplex

- **Caso de minimización.** Los pasos a seguir son:

1. Escribir el problema en forma estándar introduciendo variables de holgura, si es necesario, y con términos independientes no-negativos $b_i \geq 0$, (multiplicar la ecuación por -1 si $b_i < 0$):

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = C^T X \\ &\text{s.a. } AX = B \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

$A \in M_{m \times n}$ $B \in M_{m \times 1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2. Determinar una solución factible inicial básica, a partir de la siguiente tabla, donde en general se tiene $c_{n+i} = 0$.

		c_i	c_1	c_2	...	c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	...	c_{n+m}
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	...	X_n	Y_1	Y_2	...	Y_m
c_{n+1}	Y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
c_{n+2}	Y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_{n+m}	Y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1
$Z = \sum_{k=1}^{m} c_{n+k} b_k$		z_i	z_1	z_2	...	z_n	c_{n+1}	c_{n+2}	...	c_{n+m}
		$z_i - c_i$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_n - c_n$	0	0	...	0

La solución factible básica inicial es:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \cdots,\ x_n = 0,\ y_1 = b_1,\ y_2 = b_2, \cdots,\ y_m = b_m$$

Los coeficientes de coste marginal (reducido) se obtienen formando el producto escalar de la primera columna por la i-ésima:

$$z_i - c_i = \sum_{k=1}^{m} c_{n+k} a_{ki} - c_i \quad \forall i \in [1, n+m]$$

$z_1 = c_{n+1} a_{11} + c_{n+2} a_{21} + \ldots + c_{n+m} a_{m1}$

El valor de la fo en este vértice es

$$Z = \sum_{k=1}^{m} c_{n+k} b_k$$

Interpretación de la tabla. Las variables básicas aparecen como etiquetas de las filas y como etiquetas de columnas correspondientes a la base canónica de $\mathbb{R}^m$. El valor de cada variable básica y el de la función objetivo en el vértice correspondiente aparecen en la segunda columna (se pueden escribir igualmente como última columna). Las variables no básicas tienen valor cero. La primera columna muestra los costos de las variables básicas que se requieren para calcular los costes marginales.

3. Si $z_i - c_i \leq 0 \ \forall i$, parar, la solución es óptima.

4. En caso contrario seleccionar como vector columna de entrada el que tenga el mayor valor $z_i - c_i > 0$.

5. Si $a_{ji} \leq 0 \ \forall j$, parar, la solución es ilimitada.

6. En otro caso seleccionar como vector fila de salida el que cumpla

$$\underset{a_{ji}>0}{\text{Min}} \ \frac{b_j}{a_{ji}} = \frac{b_k}{a_{ki}}$$

7. La intersección en la tabla de la columna que entra y de la fila que sale determina el pivote (a_{ki}) para aplicar el método de eliminación de Gauss, convirtiendo la columna del vector entrante en unitaria, utilizando para obtener la nueva tabla las fórmulas:

$$a_{kt}^* = \frac{a_{kt}}{a_{ki}} \quad t = 1, 2, \ldots, n+m$$

$$a_{st}^* = a_{st} - \frac{a_{kt}}{a_{ki}} a_{si} \quad s \neq k$$

$$b_k^* = \frac{b_k}{a_{ki}}$$

$$b_s^* = b_s - \frac{b_k}{a_{ki}} a_{si}$$

En la primera columna intercámbiese c_k por c_i y calcúlese:

$$z_i^* - c_i = c_{j_1} a_{1i}^* + c_{j_2} a_{2i}^* + \cdots + c_{j_m} a_{mi}^* - c_i \quad i = 1, 2, \ldots, m+n$$

8. Ir al paso 3.

- Caso de maximización

El algoritmo es el mismo, salvo los pasos 3 y 4 que deben sustituirse por:

3b. Si $z_i - c_i \geq 0 \ \forall i$, parar, la solución es óptima.

4b. En caso contrario seleccionar como vector columna de entrada el que tenga el menor valor $z_i - c_i < 0$.

EJEMPLO 2

Resolver:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\ \text{s.a.} \quad x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 &= 6 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 &= 10 \\ -4x_2 + 4x_3 + 8x_5 + x_6 &= 12 \\ x_i \geq 0 \quad i &= 1, 2, \ldots 6 \end{aligned}$$

Las variables x_1, x_4, x_6 tienen costo 0

Solución:

El problema ya está en forma estándar. La tabla correspondiente es

		c_i	0	2	-3	0	2	0
$C_{básicos}$	$V.$ Básicas	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_1	6	1	3	-1	0	1	0
0	X_4	10	0	-1	3	1	0	0
0	X_6	12	0	-4	4	0	8	1
$Z=0$		z_i	0	0	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	0	-2	3	0	-2	0

Tabla 1 *Vector de entrada*

Las variables básicas son x_1, x_4, x_6 (vectores columna linealmente independientes y con un solo 1). Asignando el valor 0 a las restantes variables no básicas, se obtiene la solución factible básica inicial:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 10, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 12$$

En la última fila aparecen los valores de $z_i - c_i$ que proporcionan el vector columna de entrada Max $z_i - c_i = \text{Max}\{0, -2, 3\} = 3$ correspondiente a la variable x_3. El vector que sale es el x_6 al proporcionar el $\underset{a_{ij}>0}{\text{Min}}\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{10}{3}, \frac{12}{4}\right\} = 3$. Aplicando el método de eliminación de Gauss para conseguir que el vector x_3 sea básico (el pivote es $a_{33} = 4$) se obtiene la tabla 2.

		c_i	0	2	-3	0	2	0
$C_{básicos}$	$V.$ Básicas	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_1	9	1	2	0	0	3	1/4
0	X_4	1	0	2	0	1	-6	-3/4
-3	X_3	3	0	-1	1	0	2	1/4
$Z=-9$		z_i	0	3	-3	0	-6	-3/4
		$z_i - c_i$	0	1	0	0	-8	-3/4

Tabla 2 *Vector de entrada*

Las variables básicas ahora son x_1, x_4, x_3. La solución factible básica correspondiente es

$$x_1 = 9, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

El vector columna de entrada $\text{Max } z_i - c_i = \text{Max}\{0, 1, -8\} = 1$ corresponde a la variable x_2. El vector que sale es el x_4 al proporcionar el $\underset{a_{ij}>0}{\text{Min}}\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$.

Utilizando como pivote $a_{22} = 2$ se obtiene la tabla 3.

		c_i	0	2	-3	0	2	0
$C_{básicos}$	$V.$ *Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_1	8	1	0	0	-1	9	1
2	X_2	1/2	0	1	0	1/2	-3	-3/8
-3	X_3	7/2	0	0	1	1/2	-1	-1/8
$Z = -19/2$		z_i	0	2	-3	-1/2	-3	-3/8
		$z_i - c_i$	0	0	0	-1/2	-5	-3/8

Tabla 3

En esta tabla se observa que $z_i - c_i \leq 0 \ \forall i$, luego la solución es óptima.

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 7/2, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

$$Z_{\min} = -\frac{19}{2}$$

EJEMPLO 3

Supóngase que en la producción de dos tipos de recipientes K y L se utilizan dos máquinas M_1 y M_2. Para producir cada recipiente K, M_1 necesita 2 minutos y M_2 4. Análogamente, L ocupa 8 minutos a M_1 y 4 a M_2. La ganancia neta por recipiente K es 29 € y por recipiente L es 45 €. Determínese el plan de producción que maximiza la ganancia por hora.

Solución:

Si se producen x_1 recipientes K en una hora y x_2 recipientes L en una hora, la ganancia neta por hora (función objetivo) es $\text{Max } Z = 29x_1 + 45x_2$.

Las restricciones son:

$$2x_1 + 8x_2 \leq 60$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 60$$

Introduciendo variables de holgura y_1 e y_2 para pasar a la forma estándar resulta:

$$2x_1 + 8x_2 + y_1 = 60$$
$$4x_1 + 4x_2 + y_2 = 60$$

La tabla inicial es

		C_i	29	45	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2
0	Y_1	60	2	8	1	0
0	Y_2	60	4	4	0	1
Z = 0		z_i	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	-29	-45	0	0

Vector de entrada

Tabla 4

Las variables básicas son y_1, y_2 (vectores columna linealmente independientes y con un solo 1). Asignando el valor 0 a las restantes variables no básicas se obtiene la solución factible básica inicial:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 60, \quad y_2 = 60$$

En la última fila aparecen los valores de $z_i - c_i$ que proporcionan el vector columna de entrada $\text{Min } z_i - c_i = \text{Min}\{0, -29, -45\} = -45$ correspondiente a la variable x_2. El vector que sale es el y_1 al proporcionar el $\underset{a_{ij}>0}{\text{Min}}\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{60}{8}, \frac{60}{4}\right\} = \frac{60}{8}$. Aplicando el método de eliminación de Gauss para conseguir que el vector x_2 sea básico (el pivote es $a_{12} = 8$) se obtiene la tabla 5.

		C_i	29	45	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2
45	X_2	15/2	1/4	1	1/8	0
0	Y_2	30	3	0	-1/2	1
Z = 675/2		z_i	45/4	45	45/8	0
		$z_i - c_i$	-71/4	0	45/8	0

Tabla 5 *Vector de entrada*

Las variables básicas son ahora x_2, y_2. La solución factible básica correspondiente es

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{15}{2}, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 30$$

El vector de entrada $\text{Min } z_i - c_i = \text{Min}\left\{0, -\frac{71}{4}, \frac{45}{8}\right\} = -\frac{71}{4}$ corresponde a la variable x_1.

El vector saliente es y_2 al proporcionar el $\underset{a_{ij}>0}{\text{Min}}\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{15/2}{1/4}, \frac{30}{3}\right\} = 10$. Utilizando como pivote $a_{21} = 3$ se obtiene la tabla 6.

		C_i	29	45	0	0
$C_{básicos}$	$V.$ *Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2
45	X_2	5	0	1	1/6	-1/12
29	X_1	10	1	0	-1/6	1/3
Z = 515		z_i	29	45	8/3	71/12
		$z_i - c_i$	0	0	8/3	71/12

Tabla 6

En esta tabla se observa que $z_i - c_i \geq 0 \ \forall i$, luego la solución es óptima.

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 5, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0$$

$$Z_{\text{Max}} = 515$$

EJEMPLO 4

Resolver:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Solución:

Introduciendo variables de holgura en las restricciones se obtiene:

$$-2x_1 + x_2 + y_1 = 1$$
$$-x_1 + x_2 + y_2 = 4$$

Las tablas correspondientes se muestran a continuación.

		C_i	-1	3	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2
0	Y_1	1	-2	1	1	0
0	Y_2	4	-1	1	0	1
Z = : 0		z_i	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	1	-3	0	0

Vector de entrada

Tabla 7

		C_i	-1	3	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2
3	X_2	1	-2	1	1	0
0	Y_2	3	1	0	-1	1
Z = : 3		z_i	-6	3	3	0
		$z_i - c_i$	-5	0	3	0

Vector de entrada

Tabla 8

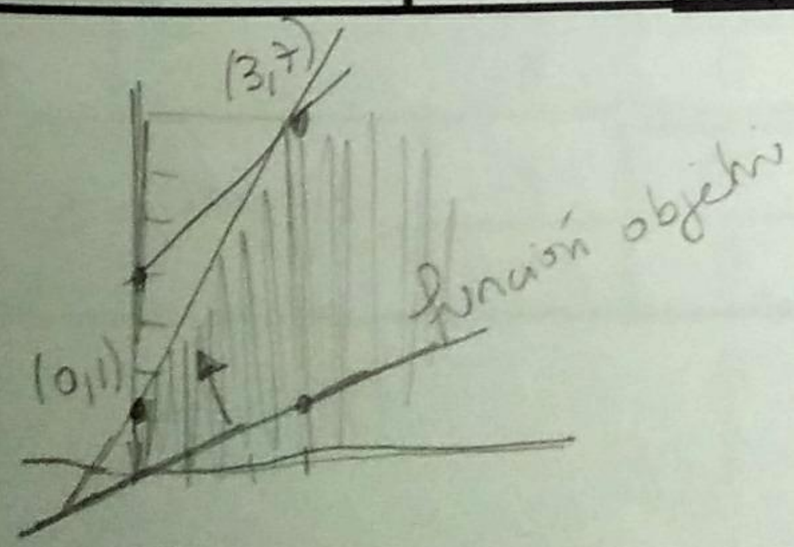
		C_i	-1	3	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2
3	X_2	7	0	1	-1	2
-1	X_1	3	1	0	-1	1
Z = 18		z_i	-1	3	-2	5
		$z_i - c_i$	0	0	-2	5

solución infinita

Vector de entrada

Tabla 9

solu c ilimitada



En esta última tabla se observa que la variable y_1 es candidata a reingresar en la base, sin embargo todos los términos asociados a su columna son negativos lo que indica que se trata de una *solución ilimitada.* (No está acotado el recinto)

EJEMPLO 5

Resolver por el método del Simplex el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 60x_1 + 35x_2 + 20x_3 \\ & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\ & 4x_1 + 2x_2 + (3/2)x_3 \leq 20 \\ & 2x_1 + (3/2)x_2 + (1/2)x_3 \leq 8 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Añadiendo las variables de holgura se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 60x_1 + 35x_2 + 20x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\ & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 48 \\ & 4x_1 + 2x_2 + (3/2)x_3 + x_5 = 20 \\ & 2x_1 + (3/2)x_2 + (1/2)x_3 + x_6 = 8 \\ & x_2 + x_7 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica factible inicial es

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 48,\ x_5 = 20,\ x_6 = 8,\ x_7 = 5$$

ya que hay 7 incógnitas y 4 ecuaciones, y por tanto, $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$ soluciones básicas y 7 - 4 = 3 variables a excluir, es decir nulas.

La tabla del Simplex será la siguiente:

		C_i	60	35	20	0	0	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
0	X_4	48	8	6	1	1	0	0	0
0	X_5	20	4	2	3/2	0	1	0	0
0	X_6	8	2	3/2	1/2	0	0	1	0
0	X_7	5	0	1	0	0	0	0	1
Z = 0		z_i	0	0	0	0	0	0	0
		$c_i - z_i$	60	35	20	0	0	0	0

$z_i - c_i \geq 0 \leftarrow c_i - z_i \leq 0$

$z_i - c_i$ -60 -35 -20

Tabla 10

Nótese que en la última fila se calcula $c_i - z_i$, como es habitual en muchos textos.

Entra en la base X_1 por tener el costo reducido más positivo y sale X_6:

		C_i	60	35	20	0	0	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
0	X_4	16	0	0	-1	1	0	-4	0
0	X_5	4	0	-1	1/2	0	1	-2	0
60	X_1	4	1	3/4	1/4	0	0	1/2	0
0	X_7	5	0	1	0	0	0	0	1
Z = 240		z_i	60	45	15	0	0	30	0
		$c_i - z_i$	0	-10	5	0	0	-30	0

$z_i - c_i$ 0 10 -5 30

Tabla 11

Entra en la base X_3 y sale X_5:

		C_i	60	35	20	0	0	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
0	X_4	24	0	-2	0	1	2	-8	0
20	X_3	8	0	-2	1	0	2	-4	0
60	X_1	2	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	0
0	X_7	5	0	1	0	0	0	0	1
Z = 280		z_i	60	35	20	0	10	10	0
		$c_i - z_i$	0	0	0	0	-10	-10	0

infinitas soluciones

Tabla 12

son cero

Los costes reducidos de las variables básicas

En este caso X_2 tiene coste reducido cero y no está en la base

Esta última tabla es la óptima ya que no hay ningún $c_i - z_i$ no negativo. En la última fila se aprecia que la variable X_2 no está en la base y sin embargo su costo reducido es cero. El sistema admitirá infinitas soluciones, siendo una de ellas $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 24, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 5$ y $Z = 280$. Pero podemos encontrar al menos otra solución, sin más que introducir en la base X_2 y dar salida a la variable X_1. La nueva tabla es

		C_i	60	35	20	0	0	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
0	X_4	8	8/5	0	0	1	14/5	-28/5	0
20	X_3	56/5	8/5	0	1	0	14/5	-8/5	0
35	X_2	8/5	4/5	1	0	0	-2/5	6/5	0
0	X_7	17/5	8/5	0	0	0	0	-2/5	1
Z = 280		z_i	60	35	20	0	10	2	0
		$c_i - z_i$	0	0	0	0	-10	-2	0

Min

Tabla 13

De esta última tabla se obtiene otra de las posibles soluciones:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{5}, x_3 = \frac{56}{5}, x_4 = 8, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = \frac{17}{5} \text{ y } Z = 280$$

En definitiva, el sistema admite infinitas soluciones.

■

Al aplicar el Simplex pueden surgir algunos problemas:

- *Existencia de variables acotadas.* Hay procedimientos para evitar introducir estas restricciones en el sistema, consiguiendo limitar en determinada medida el número de variables.

- *Imposibilidad de aplicar el método por no poder encontrar una solución factible básica inicial.* En esta caso se aplica el método de penalización o el de las dos fases.

3. Método de penalización

El método de penalización consiste en modificar el problema original de manera que se obtenga un problema equivalente donde se conozca una solución inicial factible básica. Esto se logra añadiendo un vector Q^a de variables artificiales y

penalizando la función objetivo con un costo MQ^a en el caso de minimización ($-MQ^a$ en el caso de maximización), donde M es un valor arbitrariamente grande. Mientras el vector artificial tenga alguna componente positiva en la base, el valor de la función objetivo se elevará considerablemente en el caso de minimización, y disminuirá considerablemente en el caso de maximización. Dado que el algoritmo del Simplex siempre busca la solución óptima eliminará de la base estas variables artificiales en las distintas iteraciones, siempre que el problema original carezca de restricciones inconsistentes. Si en la tabla final es $Q^a = 0$ se ha resuelto el problema; en caso contrario, el problema carece de solución (las restricciones son inconsistentes).

EJEMPLO 6

Resolver por el método de penalización el problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a. } & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 = 9 \\ & 3x_1 + x_2 \geq 11 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Introduciendo variables de holgura en las restricciones, para escribirlo en forma estándar, queda:

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a. } & -2x_1 + x_2 + y_1 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 = 9 \\ & 3x_1 + x_2 - y_2 = 11 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4 incóg, 3 ec.
4-3=1 será 0

La tabla asociada es

No se puede aplicar el Método Simplex!!

		C_i	1	1	0	0
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2
0	Y_1 -7	Y_1	-2	1	1	0
1	X_2 9	X_2	2	1	0	0
0	Y_2 -2	Y_2	3	1	0	-1
	Z=	$Z_i - C_i$				

Tabla 14

1 v. básica → y_1 se necesitan 2 más < q_1, q_2

Sólo y_1 forma parte de la base inicial (la columna de y_2 contiene un –1). Como se requieren tres variables básicas (correspondientes a las tres filas de la tabla) se introducen dos variables artificiales (con vectores columna asociados $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$) con un costo negativo tan grande en valor absoluto como sea preciso. La nueva formulación resulta:

Por ser un problema de maximización

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= x_1 + x_2 - Mq_1 - Mq_2 \\
\text{s.a.} \quad -2x_1 + x_2 + y_1 &= 2 \\
2x_1 + x_2 + q_1 &= 9 \\
3x_1 + x_2 - y_2 + q_2 &= 11 \\
x_1, x_2, y_1, y_2, q_1, q_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

La tabla asociada, a la que ya se puede aplicar el algoritmo del Simplex, es

		C_i	1	1	0	0	-M	-M
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Q_1	Q_2
0	Y_1	**2**	-2	1	1	0	0	0
-M	Q_1	**9**	2	1	0	0	1	0
-M	Q_2	**11**	3	1	0	-1	0	1
Z = -20M		z_i	-5M	-2M	0	M	-M	-M
		$z_i - c_i$	-1-5M	-1-2M	0	M	0	0

Tabla 15

		C_i	1	1	0	0	-M	-M
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Q_1	Q_2
0	Y_1	**28/3**	0	5/3	1	-2/3	0	2/3
-M	Q_1	**5/3**	0	1/3	0	**2/3**	1	-2/3
1	X_1	**11/3**	1	1/3	0	-1/3	0	1/3
Z = 11/3-5M/3		z_i	1	1/3-M/3	0	-1/3-2M/3	-M	1/3+2M/3
		$z_i - c_i$	0	-2/3-M/3	0	-1/3-2M/3	0	1/3+5M/3

Tabla 16

		C_i	1	1	0	0	-M	-M
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Q_1	Q_2
0	Y_1	11	0	2	1	0	1	0
0	Y_2	5/2	0	1/2	0	1	3/2	-1
1	X_1	9/2	1	1/2	0	0	1/2	0
Z =: 9/2		z_i	1	1/2	0	0	1/2	0
		$z_i - c_i$	0	-1/2	0	0	1/2+M	M

Tabla 17

		C_i	1	1	0	0	-M	-M
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	Y_1	Y_2	Q_1	Q_2
0	Y_1	1	0	0	1	-4	-5	4
1	X_2	5	0	1	0	2	3	-2
1	X_1	2	1	0	0	-1	-1	1
Z = 7		z_i	1	1	0	1	2	-1
		$z_i - c_i$	0	0	0	1	2+M	M-1

Tabla 18

La tabla 18 es la tabla final del Simplex.

La solución es:

$$\text{Max } Z = 7$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5$$

4. Método de las dos fases

En este método primero se determina una solución básica factible, para en una segunda etapa hallar el óptimo del problema original. Como en el método de penalización, tras la introducción de las variables de holgura, se incluye sólo en las restricciones del problema el vector de variables artificiales Q^a con las componentes que sean necesarias para conseguir una solución factible básica. Es decir, se reemplaza el problema original

$$\begin{aligned} \text{Min } & C^t X \\ \text{s.a. } & AX \geq B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

por

$$\begin{aligned} &\text{Min } C^t X \\ &\text{s.a.} \quad AX - Y + Q^a = B \\ &\qquad X, Y, Q^a \geq 0 \end{aligned}$$

donde Y es el vector de variables de holgura.

En la primera fase se resuelve el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \sum_{i=1}^{s} q_{n+i}^a \\ &\text{s.a.} \quad AX - Y + Q^a = B \\ &\qquad X, Y, Q^a \geq 0 \end{aligned}$$

Al finalizar esta fase puede ocurrir que

- Min $\sum_{i=1}^{s} q_{n+i}^a = 0$ y ningún vector artificial forme parte de la base. La solución obtenida es una solución básica factible para el problema original. En este momento se pasa a la segunda fase retomando la función objetivo inicial Min $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, y aplicando el algoritmo del Simplex hasta la obtención del óptimo.

- Min $\sum_{i=1}^{s} q_{n+i}^a = 0$, pero algún vector artificial forme parte de la base (con valor cero). La solución obtenida es una solución (básica o no) para el problema original. En este momento se pasa a la segunda fase retomando la función objetivo inicial Min $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, y aplicando el algoritmo del Simplex a un sistema restringido al que se le ha impuesto la condición suplementaria $x_j = 0$ para toda variable artificial que esté fuera de la base al finalizar la primera fase, hasta la obtención del óptimo o hasta que se determine la inexistencia de solución.

- Si Min $\sum_{i=1}^{s} q_{n+i}^a \geq 0$ las restricciones del problema original son inconsistentes y no existe solución óptima.

EJEMPLO 7

Resolver por el método de las dos fases:

$$\begin{aligned} \text{Min } & Z = -3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 \le 4 \\ & x_2 \le 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \ge 18 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

Solución:

Pasando a forma estándar al introducir variables de holgura, resulta:

$$\begin{aligned} \text{Min } & Z = -3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_3 = 4 \\ & x_2 + x_4 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 18 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

La tabla asociada es

		C_i	**-3**	**5**	**0**	**0**	**0**
$C_{básicos}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	4	X_3	1	0	1	0	0
0	6	X_4	0	1	0	1	0
	18		3	2	0	0	-1
	Z	$Z_i - C_i$					

Tabla 19

No hay más que dos vectores factibles básicos, por lo que se introduce una variable artificial en la tercera fila para conseguir una base inicial:

$$\begin{aligned} \text{Min } & Z = -3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_3 = 4 \\ & x_2 + x_4 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 18 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

El problema correspondiente a la primera fase es

son variables de holgura

$$\text{Min } Z = x_6$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_4 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 18$$

$$x_i \geq 0$$

→ Variable artificial

		C_i	0	0	0	0	0	1
$C_{básicas}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_3	4	1	0	1	0	0	0
0	X_4	6	0	1	0	1	0	0
1	X_6	18	3	2	0	0	-1	1
Z = 18		z_i	3	2	0	0	-1	1
		$z_i - c_i$	3	2	0	0	-1	0

Mayor valor de $z_i - c_i > 0$

Tabla 20

		C_i	0	0	0	0	0	1
$C_{básicas}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_1	4	1	0	1	0	0	0
0	X_4	6	0	1	0	1	0	0
1	X_6	6	0	2	-3	0	-1	1
Z =6		z_i	0	2	-3	0	-1	1
		$z_i - c_i$	0	2	-3	0	-1	0

Tabla 21

		C_i	0	0	0	0	0	1
$C_{básicas}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	X_1	4	1	0	1	0	0	0
0	X_4	3	0	0	3/2	1	1/2	-1/2
0	X_2	3	0	1	-3/2	0	-1/2	1/2
Z =0		z_i	0	0	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	0	0	0	0	0	-1

Tabla 22

La tabla 22 es la final para la primera fase. En ella se obtiene $x_6 = 0$, estando esta variable artificial fuera de la base. Se pasa ahora a la segunda fase, retomando el problema original y utilizando como tabla inicial la final de la primera fase.

		C_j	-3	5	0	0	0
$C_{básicas}$	*V. Básicas*	B_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-3	X_1	4	1	0	1	0	0
0	X_4	3	0	0	3/2	1	1/2
5	X_2	3	0	1	-3/2	0	-1/2
Z =-3	z_i		-3	5	-21/2	0	-5/2
	$z_i - c_i$		0	0	-21/2	0	-5/2

Tabla 23

Al calcular los costes marginales en la tabla 23 éstos salen menores o iguales a cero y, por consiguiente, se ha alcanzado la solución óptima:

$$Z = 3,\ x_1 = 4,\ x_2 = 3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el sistema:

$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 14x_3 - 20x_4 + 7x_5 &= -16 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + 10x_4 - 3x_5 &= 11 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 + 12x_4 - 4x_5 &= 13 \end{aligned}$$

halla la solución básica en la cual las variables x_1 y x_4 son cero.

2. Determinar las soluciones básicas factibles del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1 \qquad\quad + x_4 \qquad &= 3 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 \quad &= 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 5 \end{aligned}$$

3. Resolver el problema de programación lineal:

$$\text{Max} \quad Z = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

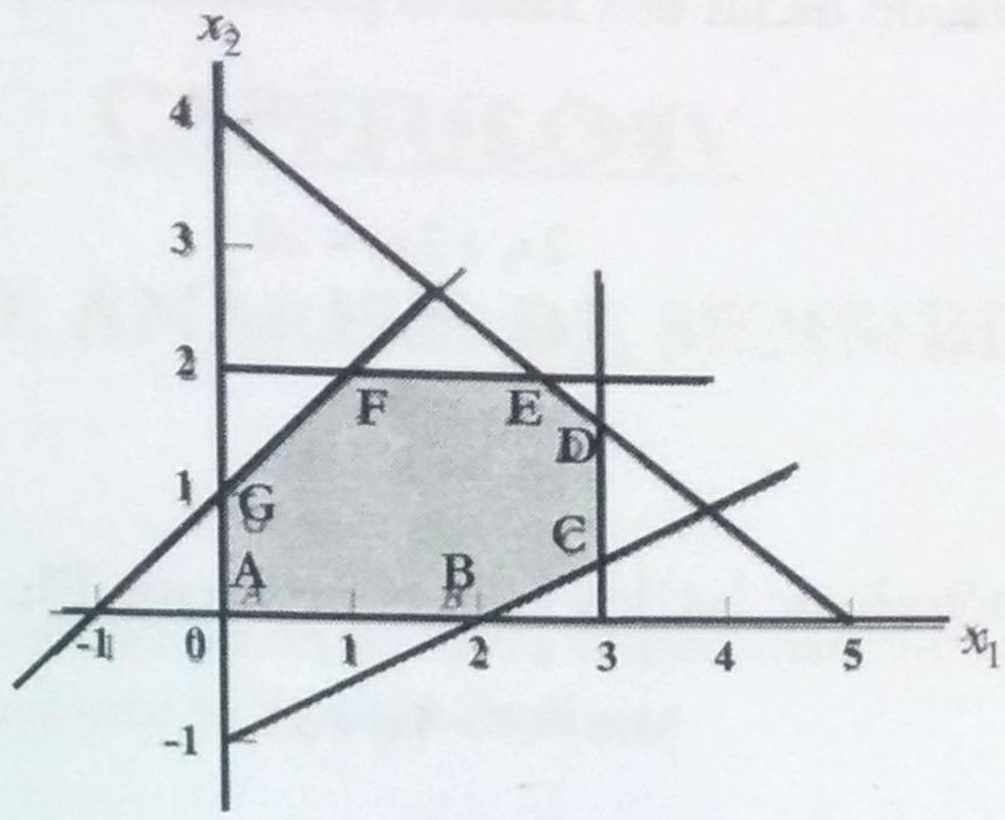
$$\begin{aligned} 2x_1 \quad + x_3 &\le 8 \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ x_3 &\ge -5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4. Resolver el problema de programación lineal:

$$\text{Max} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\le 4 \\ 2x_2 \quad &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_2 \ge 0, x_1 &\text{ no restringida} \end{aligned}$$

5. Considérese la región de factibilidad bidimensional que muestra la siguiente figura:



1) Determinar gráficamente el punto óptimo, suponiendo que la función objetivo es:

a) Max $Z = 4x_1 + x_2$ b) Max $Z = x_1 + 4x_2$

2) Si las iteraciones del método Simplex empiezan en el punto A, determinar en ambos casos la ruta que sigue el algoritmo en la determinación del óptimo.

6. Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 28 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y la diferencia entre el número de vagones para coches y para motocicletas debe ser inferior o igual a 6. Los ingresos de la compañía ferroviaria son 9000 € por cada vagón de coches, y 6000 € por cada vagón de motos. Resolver el problema por el Método Simplex.

7. Resolver por el método de penalización el siguiente problema PL:

$$\text{Max} \quad Z = 10x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

?

$x_3 \geq 0$

8. Resolver por el método de penalización el problema de programación lineal:

$$\text{Max} \quad Z = 10x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 12$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9. Resolver por el método de las dos fases el problema de programación lineal:

$$\text{Max} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 = 60$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

10. Resolver por el método de las dos fases el problema PL:

$$\text{Min} \quad Z = 4x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$