Lengoaiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

2. gaia: Lengoaiak – 0,9 puntu – Soluzioa – Bilboko IITUE

2013-10-30

1 A^* zenbagarria da eta 2^{A^*} zenbaezina da (0,325 puntu)

1.1. (0,025 puntu) Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa. A^*-ko hitzak zenbatuz joateko era egokia zein den zehaztu. Horretarako, *bbb* hitzera arteko hitz denak orden egokian eman (*bbb* hitza ere eman).

$$[\,\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bba, bbb, \ldots]$$

1.2. (0,300 puntu) Har dezagun edozein A alfabeto. Kontraesanaren teknika erabiliz, 2^{A^*} zenbaezina dela frogatu.

2 Lengoaien definizioa (0,575 puntu)

Har dezagun $A = \{a, b, c\}$ alfabetoa:

2.1. (0,025 puntu) Luzera bikoitia eta a eta c sinboloak kopuru berean dituzten hitzez osatutako L_1 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, *aacbbacbcb*, *aacc*, ε, *bbbb* eta *cbbabb* hitzak L_1 lengoaiakoak dira baina *cba*, *aa* eta *aaa* ez dira L_1 lengoaiakoak.

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \bmod 2 = 0 \wedge |w|_a = |w|_c\}$$

2.2. (0,025 puntu) Hutsak ez diren eta a-rik eta c-rik ez duten hitzez osatutako L_2 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, *b*, *bb* eta *bbb* L_2 lengoaiakoak dira baina ε, *abba*, *cccc* eta *abb* ez dira L_2 lengoaiakoak.

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge |w|_a = 0 \wedge |w|_c = 0\}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge \neg\exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge (w = uav \vee w = ucv))\}$$

Beste aukera bat:

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1 \wedge |w| = |w|_b\}$$

2.3. (0,025 puntu) ε ez eta A alfabetoaren gainean definitutako beste hitz denez osatutako L_3 lengoaiaren definizio formala eman.

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge w \neq \varepsilon\}$$

Beste aukera bat:

$$L_3 = A^* \setminus \{\varepsilon\}$$

Beste aukera bat:

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \geq 1\}$$

2.4. (0,100 puntu) a, b eta c sinboloak kopuru berean agertzeaz gain, a denak ezkerraldean, b denak erdian eta c denak eskuinaldean dituzten hitzez osatutako L_4 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, abc, $aabbcc$ eta $aaabbbccc$ L_4 lengoaiakoak dira baina $bbaacc$, aaa eta $bbabc$ ez dira L_4 lengoaiakoak.

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists k(k \geq 0 \wedge w = a^k b^k c^k)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v, x(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge x \in A^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge |u| = |v| = |x| \wedge w = uvx)\}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_4 = \{w \mid w \in A^* \wedge \quad & |w|_a = |w|_b = |w|_c \wedge \\ & \forall k(1 \leq k \leq (|w| \text{ div } 3) \to w(k) = a) \wedge \\ & \forall k((|w| \text{ div } 3) + 1 \leq k \leq 2 * (|w| \text{ div } 3) \to w(k) = b) \wedge \\ & \forall k((2 * (|w| \text{ div } 3)) + 1 \leq k \leq |w| \to w(k) = c)\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat:

$$\begin{aligned} L_4 = \{w \mid \quad & w \in A^* \wedge \\ & \exists k(k \geq 0 \wedge \quad |w| = 3 * k \wedge \\ & \qquad \forall j(1 \leq j \leq k \to w(j) = a \wedge w(k+j) = b \wedge w((2*k)+j) = c))\} \end{aligned}$$

Beste aukera bat laguntzaile bezala H lengoaia definituz:

$$H = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uacv)\}$$

$$L_5 = \overline{H}$$

2.5. (0,100 puntu) ac azpikatea ez duten hitzez osatutako L_5 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, $baaabccc$, $abcaaabccbcb$ eta $abca$ hitzak L_5 lengoaiakoak dira baina ac, $abcaccc$ eta $aacbcacc$ ez dira L_5 lengoaiakoak.

$$L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \neg\exists u, v(u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge w = uacv)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_5 = \{w \mid w \in A^* \wedge \forall k((1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a) \to w(k+1) \neq c)\}$$

2.6. (0,100 puntu) Hutsak ez diren eta lehenengo eta azkeneko sinboloak desberdinak dituzten hitzez osatutako L_6 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ac, $bcca$ eta $bcaccc$ hitzak L_6 lengoaiakoak dira. Bestalde, ε, a, $abbca$ eta cc hitzak ez dira L_6 lengoaiakoak.

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w| \neq 0 \wedge w(1) \neq w(|w|)\}$$

Beste aukera bat:

$$L_6 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists \alpha, \beta, u(\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge u \in A^* \wedge \alpha \neq \beta \wedge w = \alpha u \beta)\}$$

2.7. (0,075 puntu) Hutsak ez izateaz gain, lehenengo eta azkeneko sinboloak desberdinak dituzten eta ac azpikatea ez duten hitzez osatutako L_7 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ab, bcc, $bcca$ eta $cccbcb$ hitzak L_7 lengoaiakoak dira baina $babb$, $cbbcc$, ε eta bac ez dira L_7 lengoaiakoak.

$$L_7 = L_5 \cap L_6$$

Beste aukera bat:

$$L_7 = \{w \mid w \in A^* \land \exists \alpha, \beta, u(\alpha \in A \land \beta \in A \land u \in A^* \land \alpha \neq \beta \land w = \alpha u \beta) \land \neg \exists v, x(v \in A^* \land x \in A^* \land w = vacx)\}$$

2.8. (0,075 puntu) Hutsak ez izanda, a-rik eta c-rik ez edukitzea edo lehenengo eta azkeneko sinboloak desberdinak izatea betetzen duten hitzez osatutako L_8 lengoaiaren definizio formala eman. Adibidez, ε, bbb, $accbcc$, cb eta $ccaaa$ hitzak L_8 lengoaiakoak dira baina a, $acbbca$, $abba$ eta aaa ez dira L_8 lengoaiakoak.

$$L_8 = L_2 \cup L_6$$

Beste aukera bat:

$$L_8 = \{w \mid w \in A^* \land ((|w| \geq 1 \land |w|_a = 0 \land |w|_c = 0) \lor (\neg \exists v, x(v \in A^* \land x \in A^* \land w = vacx)))\}$$

2.9. (0,050 puntu) Baldin badaude, L_1 lengoaiakoak izanda L_2-koak ere badiren bi hitz eta L_2-koak bai baina L_1-ekoak ez diren bi hitz eman.
L_1-ekoak izanda L_2-koak ere badiren bi hitz: bb eta $bbbb$
L_2-koak badiren baina L_1-ekoak ez diren bi hitz: b eta bbb