

4 DNF monotonoen algoritmoa (0,7 puntu)

Demagun erabiltzaileak DNF monotonoa den honako g formula hau duela buruan:

$$g = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_5)$$

Aldagai kopurua 5 dela jakinda, hau da, $n = 5$ dela jakinda, algoritmoak g -ren baliokidea den h formula bat eraiki arte erabiltzailearen eta algoritmoaren artean gertatuko den elkarrekintza urratsez-urrats zehaztu. Beraz adibide osoa garatu beharko da eta prozesu horretan algoritmoarentzat pista edo laguntza izango diren balorazio egokiak asmatu beharko dira.

True eta *False* idatzi beharrean T eta F idatziko da.

E: $n = 5$, $(g = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_5))$

A: $h = F$, $h \leftrightarrow g?$

E: **Ez**. $v = (T, T, F, T, T)$ balorazioarekin $g = T$ da eta $h = F$ da.

A: (v -tik abiatuta inplikatzaile lehena kalkulatu da) $v_1 = (\underline{F}, T, F, T, T)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Ez.

A: (Berriz v hartu eta bigarren T -a aldatu) $v_2 = (T, \underline{F}, F, T, T)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Ez.

A: (Berririo ere v hartu eta hirugarren T -a aldatu) $v_3 = (T, T, F, \underline{F}, T)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Bai.

A: (Beraz aldaketa hori behin betikoa izango da eta hurrengo T -a aldatu behar da) $v_4 = (T, T, F, F, \underline{F})$ -rekin $g = T$ al da?

E: Bai.

A: (Beste aldaketarik ezin denez egin, inplikatzaile lehena $v_4 = (T, T, F, F, F)$ da. Orain, v_4 balorazioan T balioa duten aldagaiak kontuan hartuz, algoritmoak h eguneratuko du) $h = F \vee (x_1 \wedge x_2)$, $h \leftrightarrow g?$

E: **Ez**. $v = (F, T, T, T, F)$ -rekin $g = T$ da eta $h = F$ da.

A: (v -tik abiatuta inplikatzaile lehena kalkulatu da) $v_1 = (F, \underline{F}, T, T, F)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Ez.

A: (Berriz v hartu eta bigarren T -a aldatu) $v_2 = (F, T, \underline{F}, T, F)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Ez.

A: (Berririo ere v hartu eta hirugarren T -a aldatu) $v_3 = (F, T, T, \underline{F}, F)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Bai.

A: (Beste aldaketarik ezin denez egin, inplikatzaile lehena $v_3 = (F, T, T, F, F)$ da. Orain, v_3 balorazioan T balioa duten aldagaiak kontuan hartuz, algoritmoak h eguneratuko du) $h = F \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3)$,

$h \leftrightarrow g?$

E: **Ez**. $v = (T, F, T, T, T)$ -rekin $g = T$ da eta $h = F$ da.

A: (v -tik abiatuta inplikatzaile lehena kalkulatu da) $v_1 = (\underline{F}, F, T, T, T)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Ez.

A: (Berriz v hartu eta bigarren T -a aldatu) $v_2 = (T, F, \underline{F}, T, T)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Ez.

A: (Berririo ere v hartu eta hirugarren T -a aldatu) $v_3 = (T, F, T, \underline{F}, T)$ -rekin $g = T$ al da?

E: Bai.

A: (Beraz aldaketa hori behin betikoa izango da eta hurrengo T -a aldatu behar da) $v_4 = (T, F, T, F, \underline{F})$ -rekin $g = T$ al da?

E: Ez.

A: (Berririo ere v_3 -ra itzuli behar da, baina beste aldaketarik ezin denez egin, inplikatzaile lehena $v_3 = (T, F, T, F, T)$ da. Orain, v_3 balorazioan T balioa duten aldagaiak kontuan hartuz, algoritmoak h eguneratuko du) $h = F \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_5)$, $h \leftrightarrow g?$

E: **Bai** (erabiltzaileak buruan zuen g formularen baliokidea den h formula eraikitzea lortu du algoritmoak. Gogoan izan $F \vee \psi \equiv \psi$ betetzen dela, ψ edozein formula izanda).

5 k-CNF-en algoritmoa (0,5 puntu)

Demagun erabiltzaileak 2-CNF-a den honako g formula hau duela buruan:

$$g = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3)$$

Aldagai kopurua 3 dela jakinda, hau da, $k = 2$ eta $n = 3$ direla jakinda, algoritmoak g -ren baliokidea den h formula bat eraiki arte erabiltzailearen eta algoritmoaren artean gertatuko den elkarrekintza urratsez-urrats zehaztu. Beraz adibide osoa garatu beharko da eta prozesu horretan algoritmoarentzat pista edo laguntza izango diren balorazio egokiak asmatu beharko dira.

E: $k = 2$ eta $n = 3$, ($g = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3)$). Hiru aldagai daudenez, g formulari dagokion taula honako hau da:

| | x_1 | x_2 | x_3 | g |
|---|-------|-------|-------|-----|
| 1 | T | T | T | T |
| 2 | T | T | F | T |
| 3 | T | F | T | T |
| 4 | T | F | F | T |
| 5 | F | T | T | F |
| 6 | F | T | F | T |
| 7 | F | F | T | F |
| 8 | F | F | F | F |

Erabiltzaileak algoritmoari eman beharko dizkion balorazioetan, g -ren balioak T eta h -ren balioak F izan beharko dute. Hori dela eta, 5, 7 eta 8 kasuak hasieratik ahaztu edo baztertu ditzakegu.

A:

$$\begin{aligned}
 h = & x_1 \wedge \neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_3 \wedge \\
 & (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
 & (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
 & (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)
 \end{aligned}$$

$h \leftrightarrow g?$

E: **Ez**. $v = (T, T, T)$ -rekin $g = T$ da eta $h = F$ da (dibide bezala taulako 1. balorazioa eman du erabiltzaileak.)

A: ($v = (T, T, T)$ balorazioarentzat h eta g -ren balioa berdina izan dadin, balorazio horrekin F diren h -ren osagaiak ezabatuko dira)

$$\begin{aligned}
 h = & x_1 \wedge \neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_3 \wedge \\
 & (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
 & (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
 & (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)
 \end{aligned}$$

Beraz, h berria honako hau izango da:

$$\begin{aligned}
 h = & x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \\
 & (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
 & (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge \\
 & (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)
 \end{aligned}$$

$h \leftrightarrow g?$

E: **Ez**. $v = (T, T, F)$ -rekin $g = T$ da eta $h = F$ da. (Adibide bezala taulako 2. balorazioa eman du erabiltzaileak.)

A: (balorazioarentzat h eta g -ren balioa berdina izan dadin, balorazio horrekin F diren h -ren osagaiak ezabatuko dira.)

$$\begin{aligned}
h = & x_1 \wedge x_2 \wedge \underline{x_3} \wedge \\
& (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
& (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge \\
& (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge \underline{(\neg x_2 \vee x_3)}
\end{aligned}$$

Beraz, h berria honako hau izango da:

$$\begin{aligned}
h = & x_1 \wedge x_2 \wedge \\
& (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
& (\neg x_1 \vee x_2) \wedge \\
& (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)
\end{aligned}$$

$h \leftrightarrow g?$

E: **Ez**. $v = (T, F, T)$ -rekin $g = T$ da eta $h = F$ da. (Adibide bezala taulako 3. balorazioa eman du erabiltzaileak.)

A: ($v = (T, F, T)$ balorazioarentzat h eta g -ren balioa berdina izan dadin, balorazio horrekin F diren h -ren osagaiak ezabatuko dira.)

$$\begin{aligned}
h = & x_1 \wedge \underline{x_2} \wedge \\
& (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
& (\neg x_1 \vee x_2) \wedge \\
& \underline{(x_2 \vee x_3)} \wedge \underline{(x_2 \vee \neg x_3)}
\end{aligned}$$

Beraz, h berria honako hau izango da:

$$\begin{aligned}
h = & x_1 \wedge \\
& (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
& (x_2 \vee x_3)
\end{aligned}$$

$h \leftrightarrow g?$

E: **Ez**. $v = (F, T, F)$ -rekin $g = T$ da eta $h = F$ da. (Adibide bezala taulako 6. balorazioa eman du erabiltzaileak.)

A: ($v = (F, T, F)$ balorazioarentzat h eta g -ren balioa berdina izan dadin, balorazio horrekin F diren h -ren osagaiak ezabatuko dira.)

$$\begin{aligned}
h = & \underline{x_1} \wedge \\
& (x_1 \vee x_2) \wedge \underline{(x_1 \vee \neg x_2)} \wedge \underline{(x_1 \vee x_3)} \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
& (x_2 \vee x_3)
\end{aligned}$$

Beraz, h berria honako hau izango da:

$$\begin{aligned}
h = & (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
& (x_2 \vee x_3)
\end{aligned}$$

$h \leftrightarrow g?$

E: **Ez**. $v = (T, F, F)$ -rekin $g = T$ da eta $h = F$ da. (Adibide bezala taulako 3. balorazioa eman du erabiltzaileak.)

A: ($v = (T, F, F)$ balorazioarentzat h eta g -ren balioa berdina izan dadin, balorazio horrekin F diren h -ren osagaiak ezabatuko dira.)

$$\begin{aligned}
h = & (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge \\
& \underline{(x_2 \vee x_3)}
\end{aligned}$$

Beraz, h berria honako hau izango da:

$$h = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3)$$

$h \leftrightarrow g?$

E: **Bai**. (erabiltzaileak buruan zuen g formularen baliokidea den h formula eraikitzea lortu du algoritmoak).

6 k-DNF-en algoritmoa (0,5 puntu)

Demagun erabiltzaileak 2-DNF-a den honako g formula hau duela buruan:

$$g = x_1 \vee (x_2 \wedge \neg x_3)$$

Aldagai kopurua 3 dela jakinda, hau da, $k = 2$ eta $n = 3$ direla jakinda, algoritmoak g -ren baliokidea den h formula bat eraiki arte erabiltzailearen eta algoritmoaren artean gertatuko den elkarrekintza urratsez-urrats zehaztu. Beraz adibide osoa garatu beharko da eta prozesu horretan algoritmoarentzat pista edo laguntza izango diren balorazio egokiak asmatu beharko dira.

U: $k = 2$ eta $n = 3$, ($g = x_1 \vee (x_2 \wedge \neg x_3)$). Hiru aldagai daudenez, g formulari dagokion taula honako hau da:

| | x_1 | x_2 | x_3 | g |
|---|-------|-------|-------|-----|
| 1 | T | T | T | T |
| 2 | T | T | F | T |
| 3 | T | F | T | T |
| 4 | T | F | F | T |
| 5 | F | T | T | F |
| 6 | F | T | F | T |
| 7 | F | F | T | F |
| 8 | F | F | F | F |

Erabiltzaileak algoritmoari eman beharko dizkion balorazioetan, g -ren balioak F eta h -ren balioak T izan beharko dute. Hori dela eta, bakarrik 5, 7 eta 8 kasuak dira erabilgarriak, beste kasu denak hasieratik baztertu ditzakegu.

A:

$$\begin{aligned}
 h = & x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_3 \vee \\
 & (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
 \end{aligned}$$

$$h \leftrightarrow g?$$

E: **Ez**. $v = (F, T, T)$ balorazioarekin $g = F$ da eta $h = T$ da (Adibide bezala taulako 5. balorazioa eman du erabiltzaileak.)

A: ($v = (F, T, T)$ balorazioarentzat h eta g -ren balioa berdina izan dadin, balorazio horrekin T diren h -ren osagaiak ezabatuko dira.)

$$\begin{aligned}
 h = & x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_3 \vee \\
 & (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
 \end{aligned}$$

Beraz, h berria honako hau izango da:

$$\begin{aligned}
 h = & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \\
 & (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
 \end{aligned}$$

$$h \leftrightarrow g?$$

E: **Ez**. $v = (F, F, T)$ balorazioarekin $g = F$ da eta $h = T$ da (Adibide bezala taulako 7. balorazioa eman du erabiltzaileak.)

A: ($v = (F, F, T)$ balorazioarentzat h eta g -ren balioa berdina izan dadin, balorazio horrekin T diren h -ren osagaiak ezabatuko dira.)

$$\begin{aligned}
h = & x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \\
& (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
& (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
& (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
\end{aligned}$$

Beraz, h berria honako hau izango da:

$$\begin{aligned}
h = & x_1 \vee \neg x_3 \vee \\
& (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
& (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
& (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
\end{aligned}$$

$$h \leftrightarrow g?$$

E: **Ez**. $v = (F, F, F)$ balorazioarekin $g = F$ da eta $h = T$ da (Adibide bezala taulako 8. balorazioa eman du erabiltzaileak.

A: ($v = (F, F, F)$ balorazioarentzat h eta g -ren balioa berdina izan dadin, balorazio horrekin T diren h -ren osagaiak ezabatuko dira.)

$$\begin{aligned}
h = & x_1 \vee \neg x_3 \vee \\
& (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
& (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
& (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
\end{aligned}$$

Beraz, h berria honako hau izango da:

$$\begin{aligned}
h = & x_1 \vee \\
& (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
& (x_2 \wedge \neg x_3)
\end{aligned}$$

$$h \leftrightarrow g?$$

E: **Bai**. (erabiltzaileak buruan zuen g formularen baliokidea den h formula eraikitzea lortu du algoritmoak)

Ariketa honetan ikus dezakegun bezala, algoritmoak g -ren baliokidea den formula bat lortzen du beti baina ez du beti g formula bera lortzen. $\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg \beta)$ baliokidetasuna dela eta, alde batetik x_1 eta $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$ baliokideak dira eta, bestetik, x_1 eta $(x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)$ ere baliokideak dira. Beraz, $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)$ ezin da ezabatu, baina h eta g baliokideak dira.