

# Lengoiak, Konputazioa eta Sistema Adimendunak

3. gaiko lehenengo zatia: AFD-ak eta minimizazioa – Soluzioa

Bilboko IITUE

1,6 puntu

2014-01-13

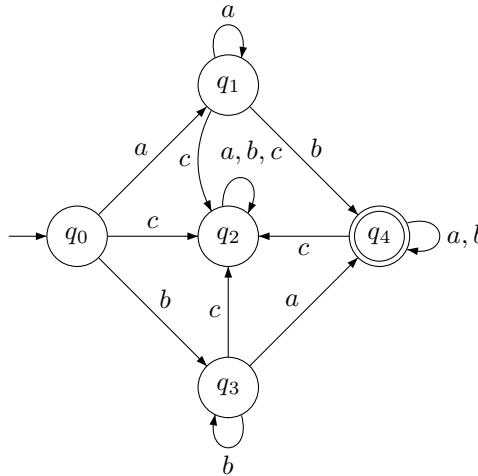
## 1 Automata finitu deterministen (AFD-en) diseinua (0,900 puntu)

$A = \{a, b, c\}$  alfabetoaren gainean definitutako honako hiru lengoaiatzat AFD bana diseinatu:

### 1.1 $c$ -rik ez eta, edozein ordenatan, gutxienez $a$ bat eta gutxienez $b$ bat dituzten hitzen lengoaia (0,300 puntu)

$c$  sinboloaren agerpenik ez eta gutxienez  $a$  sinboloaren agerpen bat eta gutxienez  $b$  sinboloaren agerpen bat dituzten hitzez osatutako  $L_1$  lengoaia. Hor  $a$  eta  $b$  sinboloen agerpenei dagokionez, ordenak ez du garrantzi-rik. Adibidez,  $bbbab$ ,  $ababbb$ ,  $ba$ ,  $ab$  eta  $bbbaaaa$  hitzak  $L_1$  lengoaiakoak dira baina  $aac$ ,  $aabcbc$ ,  $aacc$ ,  $aaa$ ,  $bbbb$  eta  $\varepsilon$  hitzak ez dira  $L_1$  lengoaiakoak.  $L_1$  lengoaiaren definizio formala honako hau da:

$$L_1 = \{w \mid w \in A^* \wedge |w|_a \geq 1 \wedge |w|_b \geq 1 \wedge |w|_c = 0\}$$

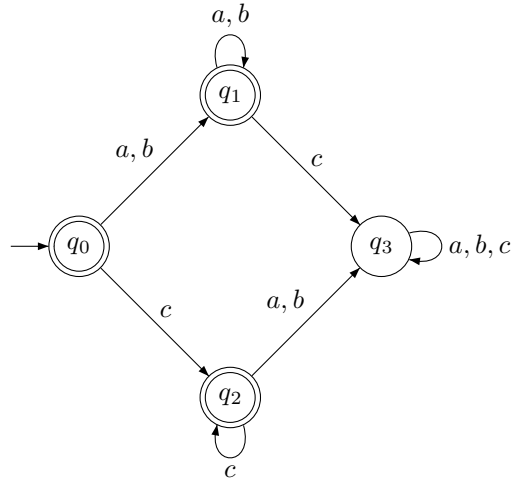


### 1.2 $c$ -rik agertzen bada, $a$ -rik eta $b$ -rik ez duten hitzen lengoaia (0,300 puntu)

$c$  sinboloaren agerpenik baldin badute,  $a$  eta  $b$  sinboloen agerpenik ez duten hitzen  $L_2$  lengoaia. Beraz hitz batean  $a$  eta  $b$  nahasian ager daitezke, baina  $c$  agertzen bada, orduan hitza  $c$ -ren errepikapenez osatutakoa izango da, hau da, ez du  $a$ -rik eta  $b$ -rik izango. Adibidez,  $abaabba$ ,  $aaba$ ,  $aaa$ ,  $\varepsilon$ ,  $ccc$ ,  $bb$  eta  $bbaaab$  hitzak  $L_2$  lengoaiakoak dira baina  $aacb$ ,  $bcbbbb$ ,  $cccaa$  eta  $ccaaabab$  ez. Jarraian  $L_2$  lengoaiaren bi definizio formal erakusten dira:

$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_c = |w| \vee |w|_c = 0)\}$$

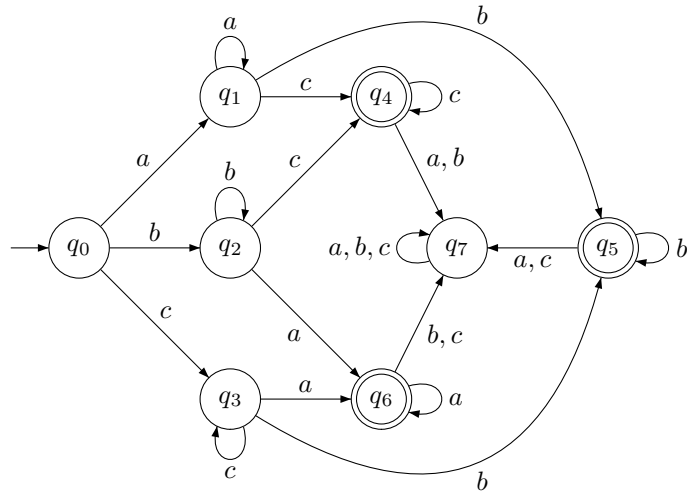
$$L_2 = \{w \mid w \in A^* \wedge (|w|_c \geq 1 \rightarrow (|w|_a = 0 \wedge |w|_b = 0))\}$$



### 1.3 Bi zati osatuz agertzen diren bi sinboloren errepikapenez osatutako hitzen lengoaia (0,300 puntu)

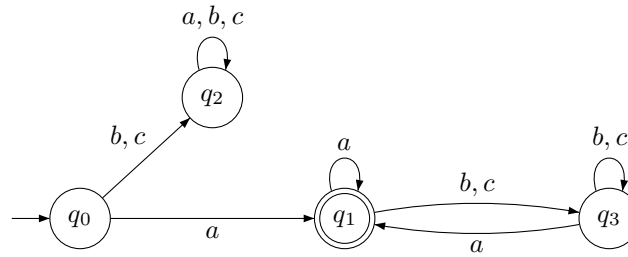
Bi zati osatuz agertzen diren alfabetoko bi sinbolo desberdinen errepikapenez eratutako hitzen  $L_3$  lengoaia. Zati bakoitzak gutxienez elementu bat izan beharko du. Adibidez,  $aaabbbb$ ,  $bbaaaa$ ,  $ccccaa$ ,  $bbcccc$ ,  $aaac$  eta  $cbbb$  hitzak  $L_3$  lengoaiakoak dira baina  $aaba$ ,  $a$ ,  $aa$ ,  $abbabcaa$  eta  $\varepsilon$  ez.  $L_3$  lengoaiaren definizio formala honako hau da:

$$L_3 = \{w \mid w \in A^* \wedge \exists \alpha, \beta, u, v \quad (\alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge u \in A^* \wedge v \in A^* \wedge \alpha \neq \beta \wedge |u| \geq 1 \wedge |v| \geq 1 \wedge |u| = |u|_\alpha \wedge |v| = |v|_\beta \wedge w = uv)\}$$



## 2 Konputazio deterministen garapena (0,150 puntu)

Jarraian erakusten den AFD-a kontuan hartuz, hor zehazten diren konputazioak garatu urratsez urrats, bukaerarik AFD-ak “Bai” ala “Ez” erantzungo duen esanez:



1.  $\delta^*(q_0, aba)$

$$\begin{array}{c} (q_0, aba) \\ | \\ (q_1, ba) \\ | \\ (q_3, a) \\ | \\ (q_1, \varepsilon) \end{array}$$

Erantzuna “Bai” da.

2.  $\delta^*(q_0, aaa)$

$$\begin{array}{c} (q_0, aaa) \\ | \\ (q_1, aa) \\ | \\ (q_1, a) \\ | \\ (q_1, \varepsilon) \end{array}$$

Erantzuna “Bai” da.

3.  $\delta^*(q_0, \varepsilon)$

$$(q_0, \varepsilon)$$

Erantzuna “Ez” da.

4.  $\delta^*(q_0, abb)$

$$\begin{array}{c} (q_0, abb) \\ | \\ (q_1, bb) \\ | \\ (q_3, b) \\ | \\ (q_3, \varepsilon) \end{array}$$

Erantzuna “Ez” da.

5.  $\delta^*(q_0, a)$

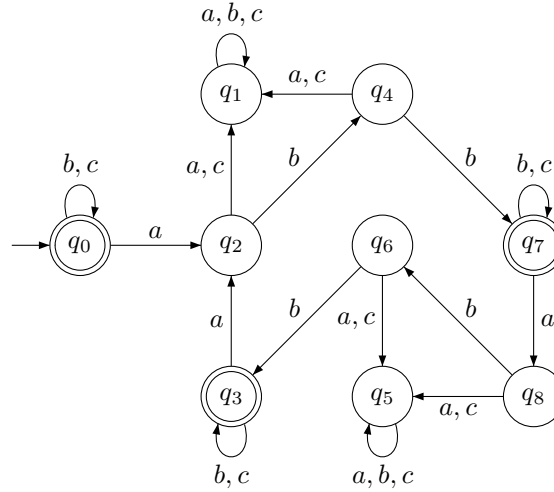
$$\begin{array}{c} (q_0, a) \\ | \\ (q_1, \varepsilon) \end{array}$$

Erantzuna “Bai” da.

Kasu bakoitzak 0,030 balio du.

### 3 AFD-en minimizazioa (0,550 puntu)

$A = \{a, b, c\}$  alfabetoaren gainean definitutako honako AFD hau minimizatu:



#### Lehenengo zatiketa

Lehenengo zatiketan bi multzo sortuko dira. Batean  $Y$  multzokoak direnak sartuko dira (“Bai” erantzuten dutenak) eta bestean  $Y$  multzokoak ez direnak (“Ez” erantzuten dutenak). Multzo batean agertzen den azpiindize txikiena  $j$  baldin bada, multzoa  $[q_j]$  bezala identifikatuko dugu.

$$\begin{aligned}[q_0] &= \{q_0, q_3, q_7\} \\ [q_5] &= \{q_1, q_2, q_4, q_5, q_6, q_8\}\end{aligned}$$

#### Bigarren zatiketa

Gogoan izan  $\delta$  trantsizio funtzioari dagokion taula honako hau dela:

$\delta$	$a$	$b$	$c$
$q_0$	$q_2$	$q_0$	$q_0$
$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$
$q_2$	$q_1$	$q_4$	$q_1$
$q_3$	$q_2$	$q_3$	$q_3$
$q_4$	$q_1$	$q_7$	$q_1$
$q_5$	$q_5$	$q_5$	$q_5$
$q_6$	$q_5$	$q_3$	$q_5$
$q_7$	$q_8$	$q_7$	$q_7$
$q_8$	$q_5$	$q_6$	$q_5$

Orain egoera bakoitzetik zein egoeratar joango garen adierazi beharrean, egoera bakoitzetik zein multzotara joango garen adieraziz taula hori eraldatu egingo dugu. Horrela,  $q_0$  egoeran gaudenean  $a$  sinboloa irakurriz  $q_2$  egoerara joango garenez, eta  $q_2$  egoera  $[q_1]$  multzoan dagoenez,  $q_2$  ipini beharrean  $[q_1]$  ipiniko dugu. Kasu guztietan aldaketa hori egin behar da:

$\delta$	$a$	$b$	$c$
$q_0$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_1$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$
$q_2$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$
$q_3$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_4$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_1]$
$q_5$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$
$q_6$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_1]$
$q_7$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_8$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$

Jarraian  $[q_0]$  eta  $[q_1]$  multzoak zatitu behar al diren aztertuko da.

$[q_0]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_0$ ,  $q_3$  eta  $q_7$  egoerek jokaera bera dutela ikus dezakegu.  $a$  sinboloa irakurriz gero  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz eta  $b$  edo  $c$  sinboloak irakurriz  $[q_0]$  multzoko egoera batera doaz. Beraz,  $[q_0]$  berdin geratuko da, ez da zatituko.

$[q_1]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_5$  eta  $q_8$  egoerek jokaera bera dutela ikus dezakegu. Bai  $a$ , bai  $b$  eta bai  $c$  irakurriz,  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz. Bestalde,  $q_4$  eta  $q_6$  egoerek jokaera bera dute, baina jokaera hori ez dator bat  $q_1$  egoeraren jokaerarekin:  $a$  edo  $c$ -rekin  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz eta  $b$ -rekin  $[q_0]$  multzoko egoera batera doaz. Beraz,  $[q_1]$  multzoa bi multzotan zatituko da.  $[q_1]$  multzo berrian  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_5$  eta  $q_8$  egoerak izango ditugu eta  $[q_4]$  multzo berrian  $q_4$  eta  $q_6$  egoerak izango ditugu.

Ondorioz, orain honako hiru multzo hauek izango ditugu:

$$\begin{aligned} [q_0] &= \{q_0, q_3, q_7\} \\ [q_1] &= \{q_1, q_2, q_5, q_8\} \\ [q_4] &= \{q_4, q_6\} \end{aligned}$$

### Hirugarren zatiketa

Bigarren zatiketa kontuan hartuz trantsizio-taula eguneratuko dugu:

$\delta$	$a$	$b$	$c$
$q_0$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_1$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$
$q_2$	$[q_1]$	$[q_4]$	$[q_1]$
$q_3$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_4$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_1]$
$q_5$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$
$q_6$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_1]$
$q_7$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_8$	$[q_1]$	$[q_4]$	$[q_1]$

Jarraian  $[q_0]$ ,  $[q_1]$  eta  $[q_4]$  multzoak zatitu beharrik ba al dagoen erabakiko dugu.

$[q_0]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_0$ ,  $q_3$  eta  $q_7$  egoerek jokaera bera dutela ikus dezakegu.  $a$  sinboloa irakurriz gero  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz eta  $b$  edo  $c$  sinboloak irakurriz  $[q_0]$  multzoko egoera batera doaz. Beraz,  $[q_0]$  berdin geratuko da, ez da zatituko.

$[q_1]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_1$  eta  $q_5$  egoerek jokaera bera dutela ikus dezakegu. Bai  $a$ , bai  $b$  eta bai  $c$  irakurriz,  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz. Bestalde,  $q_2$  eta  $q_8$  egoerek jokaera bera dute, baina jokaera hori ez dator bat  $q_1$  egoeraren jokaerarekin:  $a$  edo  $c$ -rekin  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz eta  $b$ -rekin  $[q_4]$  multzoko egoera batera doaz. Beraz,  $[q_1]$  multzoa bi multzotan zatituko da.  $[q_1]$  multzo berrian  $q_1$  eta  $q_5$  egoerak izango ditugu eta  $[q_2]$  multzo berrian  $q_2$  eta  $q_8$  egoerak izango ditugu.

$[q_4]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_4$  eta  $q_6$  egoerek jokaera bera dutela ikus dezakegu.  $a$  edo  $c$  irakurriz  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz eta  $b$  irakurriz  $[q_0]$  multzoko egoera batera doaz. Beraz,  $[q_4]$  berdin geratuko da, ez da zatituko.

Guztira lau multzo ditugu orain:

$$\begin{aligned}[q_0] &= \{q_0, q_3, q_7\} \\ [q_1] &= \{q_1, q_5\} \\ [q_2] &= \{q_2, q_8\} \\ [q_4] &= \{q_4, q_6\}\end{aligned}$$

**Ez dago laugarren zatiketarik**

Hirugarren zatiketa kontuan hartuz trantsizio-taula eguneratuko dugu:

$\delta$	$a$	$b$	$c$
$q_0$	$[q_2]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_1$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$
$q_2$	$[q_1]$	$[q_4]$	$[q_1]$
$q_3$	$[q_2]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_4$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_1]$
$q_5$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$
$q_6$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_1]$
$q_7$	$[q_2]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_8$	$[q_1]$	$[q_4]$	$[q_1]$

Orain  $[q_0]$ ,  $[q_1]$ ,  $[q_2]$  eta  $[q_4]$  multzoak zatitu beharrik ba al dagoen aztertuko da.

$[q_0]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_0$ ,  $q_3$  eta  $q_7$  egoerek jokaera bera dutela ikus dezakegu.  $a$  sinboloa irakurriz gero  $[q_2]$  multzoko egoera batera doaz eta  $b$  edo  $c$  sinboloak irakurriz  $[q_0]$  multzoko egoera batera doaz. Beraz,  $[q_0]$  berdin geratuko da, ez da zatituko.

$[q_1]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_1$  eta  $q_5$  egoerek jokaera bera dutela ikus dezakegu. Bai  $a$ , bai  $b$  eta bai  $c$  irakurriz,  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz. Beraz,  $[q_1]$  ere berdin geratuko da, ez da zatituko.

$[q_2]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_2$  eta  $q_8$  egoerek jokaera bera dutela ikus dezakegu:  $a$  edo  $c$ -rekin  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz eta  $b$ -rekin  $[q_4]$  multzoko egoera batera doaz. Beraz,  $[q_2]$  ere berdin geratuko da, ez da zatituko.

Azkenik,  $[q_4]$  multzoko egoeren jokaera aztertuz,  $q_4$  eta  $q_6$  egoerek jokaera bera dute:  $a$  edo  $c$ -rekin  $[q_1]$  multzoko egoera batera doaz eta  $b$ -rekin  $[q_0]$  multzoko egoera batera doaz. Ondorioz,  $[q_4]$  ere ez da zatitu behar.

Beraz, ez da zatiketarik egin urrats honetan.

**AFD txikiena**

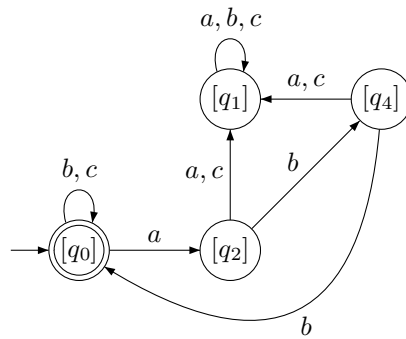
Beraz, honako lau multzo hauek geratu dira:

$$\begin{aligned}[q_0] &= \{q_0, q_3, q_7\} \\ [q_1] &= \{q_1, q_5\} \\ [q_2] &= \{q_2, q_8\} \\ [q_4] &= \{q_4, q_6\}\end{aligned}$$

Multzo horietako bakoitza egoera bat izango da AFD berrian. Trantsizioak kalkulatzeko, azkeneko taula hartuko da kontuan. Geratu diren lau egoerak bakarrik interesatzen zaizkigu:

$\delta$	$a$	$b$	$c$
$q_0$	$[q_2]$	$[q_0]$	$[q_0]$
$q_1$	$[q_1]$	$[q_1]$	$[q_1]$
$q_2$	$[q_1]$	$[q_4]$	$[q_1]$
$q_4$	$[q_1]$	$[q_0]$	$[q_1]$

Minimizatzeko eman zaigun AFD-ko  $q_0$  hasierako egoera  $[q_0]$  multzoan dagoenez,  $[q_0]$  izango da AFD berriko hasierako egoera. Bestalde, minimizatzeko emandako AFD-an  $Y$  multzokoak ziren egoera denak  $[q_0]$  multzoan daudenez, bi borobil izango dituen egoera bakarra  $[q_0]$  izango da.



Ordenean joan daitezen, egoerak berrizenda ditzakegu:

