1 集合与函数

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

一般的，我们称所研究的对象为 元素 ，称具有某种属性的元素构成的全体为 集合 ,集合具有 确定性 和 互异性 。通常，集合用$A, B, C...$来表示，集合中的元素用$a, b, c...$来表示。如果a是集合中的元素，就成a属于A,记作$a \in A$,否则就称a不属于A，记作:$a \notin A$。

集合的表示方法有两种：

1. 枚举法

   把集合的元素一一列举出来，并用"{}"括起来表示集合，如：

   $$N = \{0, 1, 2, 3..., n, ...\}$$

2. 描述法

   用集合所有元素的共同属性来表示集合，如：

   $$N = \{x|x > 0, x \in R\}$$

由数组组成的集合称为 数集 ，对于一些特殊的数集，其标记如下：

标记	含义
N	全体非负整数组成的集合
N^*或N_+	所有正整数构成的集合
Z	全体整数构成的集合
Q	全体有理数构成的集合
R	全体实数构成的集合

1.1.2 集合的基本关系

对于两个集合A与B,若$\forall a \in A$，都有$a \in B$,则称集合A 包含于 B,此时集合A称为集合B的 子集 ，记作$A \subseteq B$。特别的，如果$A \subseteq B$,且对$\exists a \in B$且$\exists\ a \in B$,但$a \notin A$, 则称集合A为集合B的 真子集 ,记作$A \subsetneq B$。

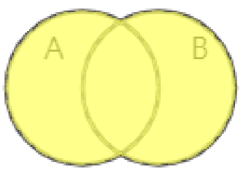
设A, B是两个集合，若$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合A与集合B相等，记作$A = B$。

我们称不含有任何元素的集合为 空集 ，记作$\emptyset$,同时规定，空集是任何集合的子集。如果一个集合含有有限个元素，则称该元素为 有限集合 ；若一个集合含有无限个元素，则称为 无限集 。

1.1.3 集合的基本运算

由所有属于集合A或属于集合B或同时属于两者的元素组成的集合称为A与B的 并集 ，记作$A \cup B$,即：

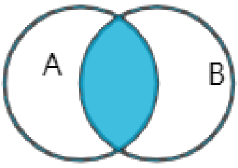
$$A \cup B = \{x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$



$A \cup B$

由所有属于集合A且同时属于集合B的元素组成的集合称为A与B的 交集 ，记作$A \cap B$,即：

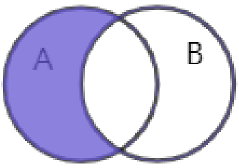
$$A \cap B = \{x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$



$A \cap B$

由所有属于集合A而不属于B的元素组成的集合称为A与B的差集，记作$A-B$，即：

$$A-B=\{x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

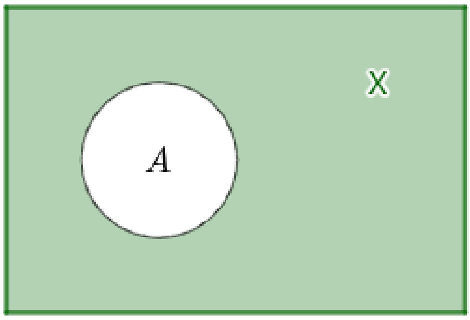


$A-B$

如果一个集合含有所研究问题所涉及的所有元素，那么称该集合为 全集 ，通常记为U。

对于一个集合A，由全集U中不属于集合A的所有元素组成的集合称为集合A相对于全集U的 补集 ，简称为集合A的补集，记作C_uA或$\bar{A}$,即：

$$C_uA=\{x \in U, \text{且} x \notin A\}$$



$\bar{A}=X-A$

1.1.4 集合运算的基本性质

集合运算具有下列性质：

1. 交换律

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

2. 结合律

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

3. 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. 对偶律（又称德摩根律）

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

5. 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

6. 幂等律

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

7. 0-1律

$$A \cup \emptyset = \emptyset$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup X = X$$
$$A \cap X = A$$

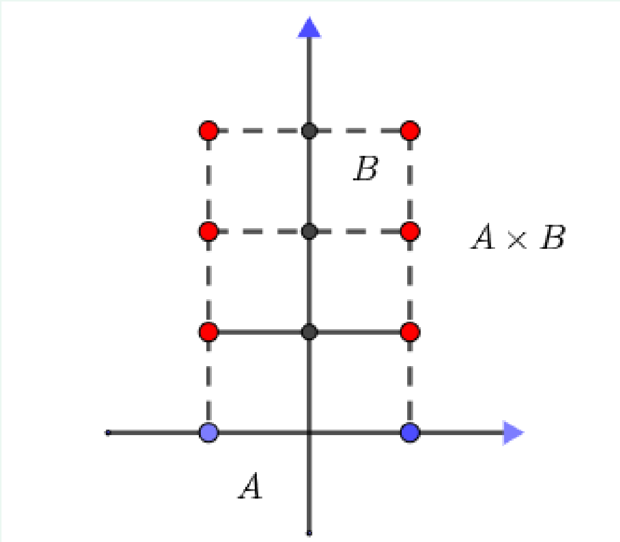
8. 对合律

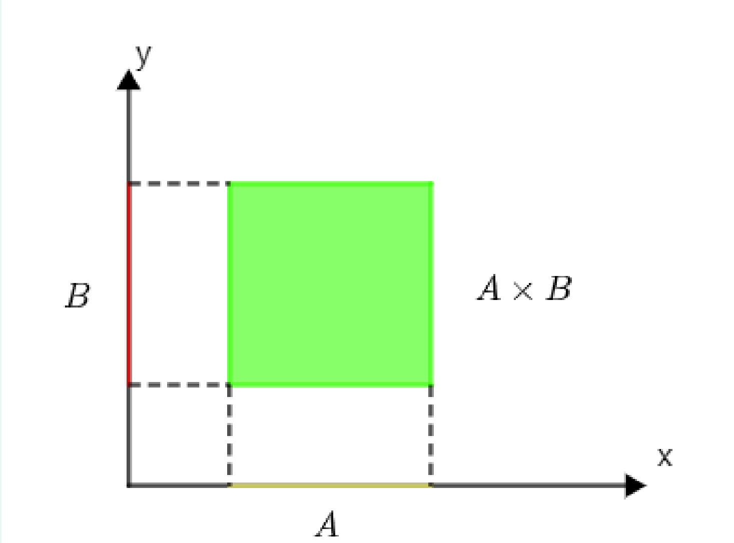
$$\overline{\emptyset} = X$$
$$\overline{X} = \emptyset$$
$$A \cup \overline{A} = X$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$
$$\overline{\overline{A}} = A$$

1.1.5 笛卡尔积

称集合$\{(x,y)|x \in A, y \in B\}$为集合$A$和集合$B$的 笛卡尔积 ，又叫做 直积 ，记为$A \times B$。

> @Question
>
> **例1** 设$A=\{-1,1\}, B=\{1,2,3\}$,求$A \times B$。

> @Solution
>
> **解析** $A \times B=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$,其图如下:
>
> 
>
>
> 特别的，当A和B是连续的话，其笛卡尔乘积如下图:



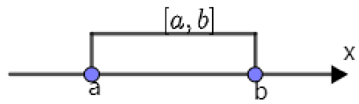
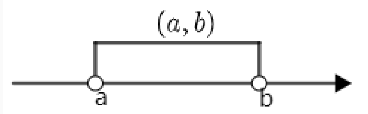
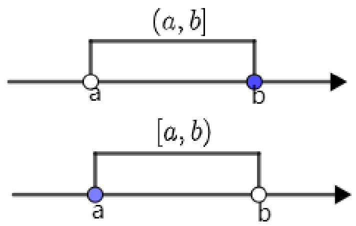
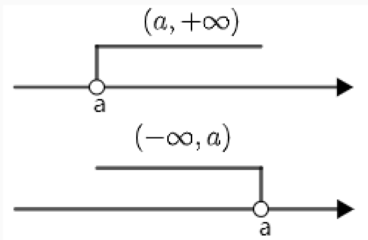
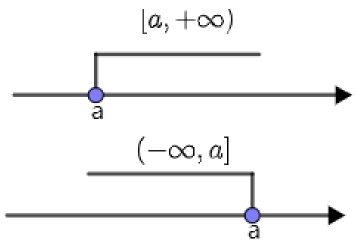
1.2 常量与变量 区间与邻域

1.2.1 常量与变量

在研究某一现象或研究某些问题的过程时，常常会遇到各种不同的变量，其中有的量在这个过程中保持不变，我们称之为 常量 ；有的量在这个过程中是变化的，称之为 变量 。

1.2.2 区间

对于实数轴上的点来说，常见如下的区间：

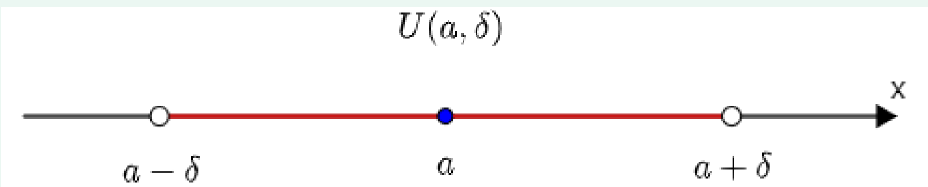
区间名称	区间满足的不等式	区间的记号	在数轴上的表示
闭区间	$a \le x \le b$	$[a,b]$	
开区间	$a < x < b$	(a,b)	
半开闭区间	$a < x \le b$	$(a,b]$或$[a,b)$	
无限开区间	$x > a$或 $x < a$	$(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,a)$	
无限闭区间	$x \ge a$ 或 $x \le a$	$[a,+\infty)$或 $(-\infty,a]$	

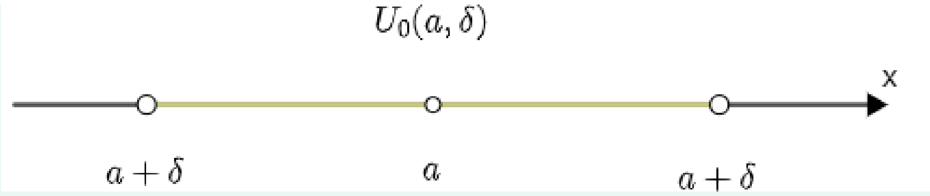
1.2.3 邻域

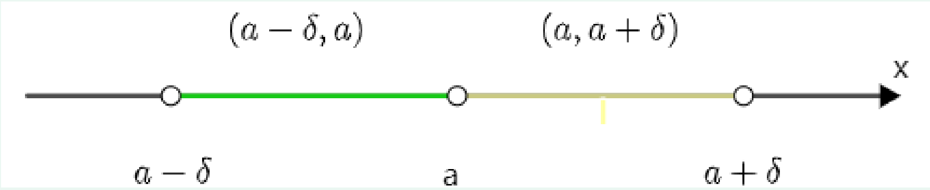
@Definition

定义1.1 设a和δ是两个实数，且$\delta > 0$,集合$\{x \in R||x-a| < \delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，记为$U(a,\delta)$,点$a$称为此邻域的中心，$\delta$称为此邻域的半径。集合$x \in R|0 < |x-a| < \delta$称为点$a$的$\delta$去心邻域。通常，集合$\{x \in R|a-\delta < x < a\}$称为点$a$的$\delta$的左邻域；集合$\{x \in R|a < x < a+\delta\}$称为点$a$的$\delta$右邻域。

具体如下图：







1.3 映射

1.3.1 映射的定义

> @Definition
>
> **定义1.2** 设X和Y是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中的每个元素 x，按法则 f，在Y中有唯一确定的元素 y 与之对应，那么称f为从X到Y的映射，记作：
>
> $$f : X \rightarrow Y$$
>
> 其中 y 称为元素 x (在映射f下)的一个像，并记作$f(x)$，即
>
> $$y = f(x)$$
>
> 而元素x称为元素y(在映射f下)的一个原像；集合X称为映射f的定义域，记作D_f,即$D_f = X$;X中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作R_f或 $f(X)$,即
>
> $$R_f = f(X) = \{f(x)|x \in X\}$$

1.3.2 单射和满射

> @Definition

定义1.3 设$f:A\to B$是映射，若对任意的$x_1,x_2\in A$, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$,则称$f$为单射。若 $R_f=B$,则称f为满射。若 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射，又叫双射。

@Definition

定义1.4 设 A， B 是两个集合，若存在一个一一映射 $\varphi:A\to B$, 则称集合 A 与集合 B 是等势的

1.3.3 逆映射和复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$,有唯一的$x\in X$, 使得 $f(x)=y$，于是，定义一个从R_f到X 的新映射g ,即

$$g:R_f\to X,$$

对每个$y\in R_f$,规定$g(y)=x$,这个x满足$f(x)=y$。这个映射g 称为 f 的逆映射，记作 $f^{-}1$,其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$,值域$R^{f^{-1}}=X$ 。

设有两个映射

$$g:X\to Y_1,f:Y_2\to Z,$$

其中，$Y_1\subset Y_2$,则由映射g和f可以定出一个从X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映射成 $f[g(x)]\in Z$ 。显然，这个对应法则确定了一个从X 到Z 的映射，这个映射称为映射g和f 构成的复合映射，记作$f\circ g$,即:

$$f\circ g:X\to Z,(f\circ g)(x)=f[g(x)],x\in X$$

1.4 函数

1.4.1 函数的概念

@Definition

定义1.5 设数集$D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在D上的函数，通常简记为

$$y=f(x),x\in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为应变量，D 称为定义域，记作D_f,即$D_f=D$

1.4.2 函数的性质

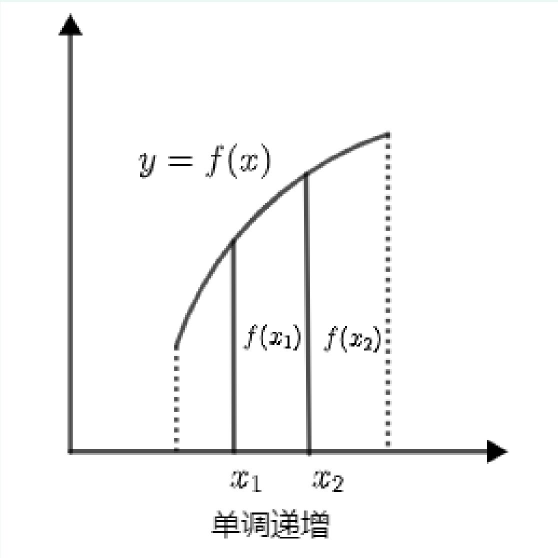
@Definition

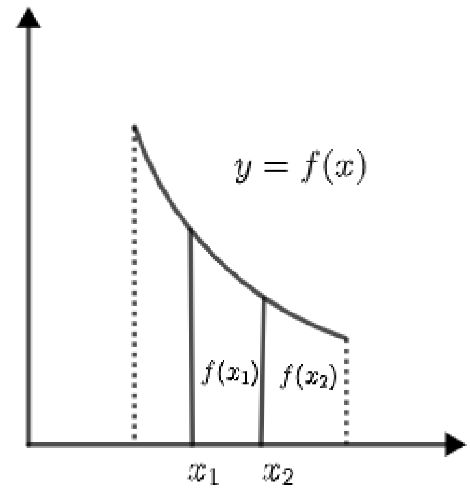
定义1.6 设$f(x)$是定义在区间I上的一个函数，若$\exists M>0$,使得$\forall x\in I$,恒有$|f(x)|\leq M$恒成立，则称函数$f(x)$在区间I上 有界 ，否则称$f(x)$ 在区间I 上 无界

@Definition

定义1.7 设函数$y=f(x)$,$\forall x_1,x_2\in D_f,x_1<x_2$

- 若$f(x_1)\leq f(x_2)$(或$f_1(x)\geq f_2(x)$),则称函数$f(x)$在区间$(a,)$内是 单调递增 （或 单调递减 ）的;
- 若$f(x_1)<f(x_2)$(或$f_1(x)>f_2(x)$),则称函数$f(x)$在区间$(a,)$内是 严格单调递增 （或 严格单调递减 ）的;



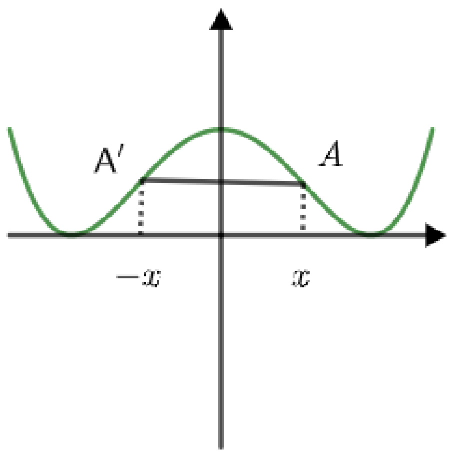


单调递减

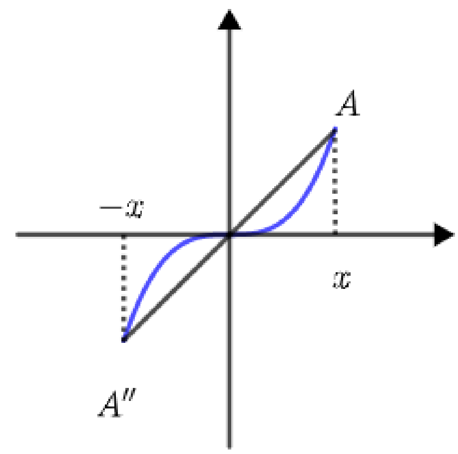
@Definition

定义1.8 设函数$f(x)$在一个关于原点对称的数集D上有定义，

- 若$\forall x\in D$,均有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为在D上的 偶函数
- 若$\forall x\in D$,均有 $f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为在D上的 奇函数



偶函数



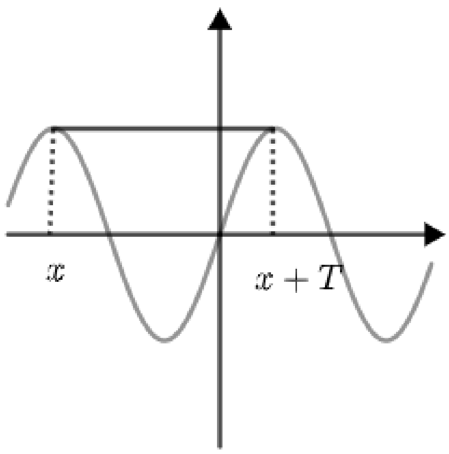
奇函数

@Definition

定义1.9 设函数$f(x)$的定义域为D_f,若存在一个不为零的常数T,使得关系式

$$f(x+T)=f(x), x+T\in D_f$$

对于定义域内任意x 都成立，则$f(x)$称为 周期函数 ，T称为$f(x)$的周期，通常所说的周期是指 最小正周期 。



周期函数

注意： 并非所有周期函数一定存在最小正周期，如：

$$\text{狄利克雷函数：} y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}\end{cases}$$

1.4.3 反函数

@Definition

定义1.10 设函数$f: D \to f(D)$是单射，则它存在逆映射$f^(-1): f(D) \to D$,称此映射f^{-1}为函数的 反函数 。

@Theorem

定理1.1(反函数存在定理) 若$y = f(x)$是定义在D上严格单调递增（减）函数，则它的反函数$y = f^{-1}$必定存在，且在$f(D)$上严格单调递增(减)。

1.4.4 复合函数

@Definition

定义1.11 设函数$f(u)$的定义域为D_f,函数 $u = f(x)$的定义域为D_g,且其值域$R_g \subset D_f$,则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], x \in D_g$$

称为由函数 $u = g(x)$与函数$y = f(u)$构成的 复合函数 ，它的定义域为D_g,变量u称为 中间变量 。

函数g与函数f构成的复合函数，通常记为$f \circ g$ 即

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

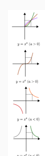
1.4.5 函数的运算

设函数$f(x), g(x)$的定义域依次为$D_1, D_2, D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$,则这两个函数的四则运算如下：

运算	符号	详情
和(差)	$f \pm g$	$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$
积	$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$
商	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \{g(x) \neq 0, x \in D\}$

1.4.6 基本初等函数

常见的初等函数如下表：

名称	表达式	定义域	图形
常量函数	$y = c$	$-\infty < x < +\infty$	
幂函数	$y = x^a(a\text{为常数})$	和a取值有关	

名称	表达式	定义域	图形
指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq 1)$	$-\infty<x<+\infty$	
对数函数	$y=log_a x(a>0,a\neq 1)$	$0<x<+\infty$	
三角函数	$y=\sin x$	$-\infty<x<+\infty$	
三角函数	$y=\cos x$	$-\infty<x<+\infty$	
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},k\in Z$	
三角函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi,k\in Z$	
反三角函数	$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$	$-1\leq x\leq 1$	 
反三角函数	$y=\arctan x$	$-\infty<x<+\infty$	
反三角函数	$y=\mathrm{arccot}\, x$	$-\infty<x<+\infty$	
双曲函数	$sh\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $ch\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$-\infty<x<+\infty$	
双曲正切	$th\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e_x}$	$-\infty<x<+\infty$	
反双曲正弦	$arsh\ x=ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$-\infty<x<+\infty$	
反双曲线余弦	$arch\ x=ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$1\leq x<+\infty$	

名称	表达式	定义域	图形
反双曲线正切	$arth\ x=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$	$-1<x<1$	

2 数列的极限

2.1 数列与极限

2.1.1 数列的概念

> @Definition
>
> **定义2.1** 若实值函数$f(n)$的定义域为全体正整数集合N^+,则称f：$N^+\rightarrow R$或$f(n)(n\in N^+)$为 数列 。
>
> 一般记$f(n)=a_n$，则数列$f(n)(n=1,2,...)$就可以写作$a_1,a_2,...,a_n,...$,简记为$\{a_n\}$,其中a_n称为该数列的 通项 。

2.1.2 数列极限的定义

1. 从代数角度出发：

> @Definition
>
> **定义2.2** 设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N,使得当$n>N$时，不等式
>
> $$|x_n-a|<\varepsilon$$
>
> 都成立，那么就称常数a是数列$\{x_n\}$的 极限 ,或者称数列x_n收敛于a,记作
>
> $$\lim_{x\rightarrow\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\rightarrow a(n\rightarrow n)$$

如果不存在这样的常数a，就说数列$\{x_n\}$没有极限，或者说数列$\{x_n\}$是发散的、

2. 从几何角度出发

@Definition

定义2.2' 任给$\varepsilon > 0$,若在$U(a,\varepsilon)$之外数列$\{a_n\}$中的项只有有限项，则称数列a_n收敛于a。

2.1.3 数列的有界与无界

@Definition

定义2.3 对于数列$\{x_n\}$,若$\exists M > 0$,且$M \in R$,使得对一切的$n = 1,2,\ldots$都有$|x_n| \leq M$，则称数列$\{x_n\}$是 有界 的，否则称他是 无界 的。

- 对于数列$\{x_n\}$,若$\exists M > 0$,且$M \in R$,使得对一切的$n = 1,2,\ldots$都有$x_n \leq M$，则称数列$\{x_n\}$有 上界 。
- 对于数列$\{x_n\}$,若$\exists M > 0$,且$M \in R$,使得对一切的$n = 1,2,\ldots$都有$x_n \geq M$，则称数列$\{x_n\}$有 下界 。

数列$\{x_n\}$有界的充要条件是既有上界又有下界。

2.1.4 子数列

@Definition

定义2.4 在数列$\{x_n\}$中保持原有的次序自左向右任意选取无穷多项x_{n_k}构成一个新的数列，称它为数列$\{x_n\}$的子列，记作$\{x_{n_k}\}$。

2.1.5 单调数列

@Definition

定义2.5 若数列a_n满足不等式$a_n \leq a_{n+1}(a_n \geq a_{n+1})$,则称数列$\{a_n\}$为 递增(递减)数列 ，递增数列和递减数列统称为单调数列。

2.2 收敛数列的性质

2.2.1 极限唯一性

> @Theorem
>
> **定理2.1** 若数列$\{x_n\}$收敛，则其极限唯一

2.2.2 有界性

> @Theorem
>
> **定理2.2** 若数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$有界。

2.2.3 保号性

> @Theorem
>
> **定理2.3** 如果$\lim_{x\to\infty} x_n = a$,若$a > 0$(或$a < 0$),则$\exists N > 0$,使得当$n > N$时，有$x_n > 0$(或$x_n < 0$)。

2.2.4 收敛数列与其子列的关系

> @Thorem
>
> **定理2.4** 如果数列$\{a_n\}$收敛于a，那么它的任何子列$\{x_{n_k}\}$都收敛，且极限也是a。

2.3 数列极限的运算

> @Theorem
>
> **定理2.5** 如果$\lim_{x\to\infty} a_n = A$,$\lim_{n\to\infty} b_n = B$,那么:

1. $\lim_{x\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$
2. $\lim_{x\to\infty}(a_nb_n)=A*B$
3. $\lim_{x\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

2.4 夹逼准则

@Theorem

定理2.6 若有数列$\{a_n\},\{b_n\}$都收敛于a，且数列$\{c_n\}$满足:存在正数$N_0\in N$,当$n>N$时，有$a_n\leq c_n\leq b_n$,则数列$\{c_n\}$收敛且$\lim_{x\to\infty}c_n=a$。

2.5 单调有界定理

在给出定理前先引入上下确界的概念

@Definition

定义2.6 给定一个数集A,若存在一个数a满足如下条件:

1. 集合A中的所有元素$x\leq a$
2. 对任意给定的正数$\varepsilon>0$,$\exists x\in A$, 使得

$$x>a-\varepsilon$$

那么称a为数集A的 上确界 ，记作$sup\ A$,类似的，可定义数集A的 下确界 ，记作$inf\ A$。

@Theorem

定理2.7（单调有界定理） 在实数系中，有界且单调数列必有极限。

2.6 柯西收敛准则

之前的单调有界定理只是给出了数列收敛的充分条件，下面是在实数集数列收敛的充要条件。

> @Theorem
>
> **定理2.8(柯西收敛准则)** 数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是：对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N，使得当$n, m > N$时，恒有$|a_n - a_m| < \varepsilon$;或对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数$N$，使得当$n > N$及任一$p \in N^+$,恒有$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$。

3 函数的极限

3.1 自变量趋于有限数

> @Definition
>
> **定义3.1** 设函数$f(x)$在点x_0得到去心邻域$U^o(x_0, \delta)$内有定义，A是一个确定的常数，若对$\forall\ \varepsilon > 0$,存在$\delta = \delta(\varepsilon)$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有
>
> $$|f(x) - A| < \varepsilon$$
>
> 则称A为函数$f(x)$在$x \to x0$是的 极限，记为
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

> @Definition
>
> **定义3.2** 设函数$f(x)$在点x_0处的去心邻域$U^0(x_0, \delta_1)$内有定义
>
> - 若$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists \delta_1 > \delta > 0$,当$x_0 - \delta < x < x_0$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称$A$为函数$f(x)$在$x$趋于$x_0$时的 左极限，记作:$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$
> - 若$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists \delta_1 > \delta > 0$,当$x_0 < x < x_0 + \delta$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称$A$为函数$f(x)$在$x$趋于$x_0$时的 右极限，

记作:$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$

@Theorem

定理3.1 设函数$f(x)$在点x_0处的去心邻域$U^0(x_0,\delta)$内有定义，则$\lim_{x\to x_0}$=A的充要条件是$\lim_{x\to x_0^-} = A$ 且 $\lim_{x\to x_0^+} = A$。

3.2 自变量趋于无穷大

@Definition

定义3.3 设函数$f(x)$在$(-\infty,+a)\cup(b,+\infty)$内有定义，其中$a,b$为有限数，$A$为一个确定的常数。若$\forall\ \varepsilon > 0$,存在$X = X(\varepsilon) > 0$,使得当$|x| > X$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称A为函数$f(x)$在$x \to \infty$时的 极限 ，记作$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$

@Definition

定义3.4 设函数$f(x)$在$(b,+\infty)$有定义，A是一个确定的常数，若$\forall\ \varepsilon$,$\exists\ X = X(\varepsilon)$>0,使得当$x > X$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称A为函数$f(x)$在$x \to +\infty$时的极限，记作$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$

@Definition

定义3.5 设函数$f(x)$在$(-\infty,a)$有定义，A是一个确定的常数，若$\forall\ \varepsilon$,$\exists\ X = X(\varepsilon)$>0,使得当$x < X$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称A为函数$f(x)$在$x \to -\infty$时的极限，记作$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$

@Theorem

定理3.2 设函数$f(x)$在$(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$内有定义，其中$a,b$为有限数，$A$为一个确定的常数，则$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$的充要条件是$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$且$\lim_{x\to+\infty} f(x)$=$A$

@Definition

定义3.5 设函数$f(x)$在$(-\infty,a)$或$(b,+\infty)$内有定义，其中a,b为有限数，c为一个确定的常数。若$\lim_{x\to+\infty} f(x)=c$或$\lim_{x\to-\infty} f(x)=c$中有一个存在，则称直线$y=c$为曲线$y=f(x)$的**水平渐近线**。

3.3 函数极限的性质

3.3.1 唯一性

@Theorem

定理3.3 若有函数$f(x)$的极限存在，则该极限时是唯一的。

3.3.2 局部有限性

@Theorem

定理3.4 设$\lim_{x\to x_0} f(x)$存在，则函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有界。

3.3.3 夹逼准则

@Theorem

定理3.5 设函数$f(x),g(x),h(x)$在$U^0(x_0,\delta^*)$内有定义，且满足:

1. $g(x)\le f(x)\le h(x)$
2. $\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=A$

则$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

3.3.4 局部保号定理

@Theorem

定理3.6 设函数$f(x)$在$U^0(x_0,\delta)$内有定义，且$\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$(或$A<0$) ,则存在$\varepsilon>0$,当$0<|x-x_0|<\varepsilon$时，有:

$$f(x)<0(或f(x)<0)$$

从定理3.6，可以得到更强的结论：

@Theorem

定理3.6' 如果$\lim_{x\to x_0}=A(A\neq 0)$，那么就存在$x_0$的某一去心邻域$U^0(X_N)$,当$x\in U^0(x_0)$时，就有$|f(x)|>\frac{|A|}{2}$。

3.4 函数极限与数列极限的关系

@Theorem

定理3.7(海涅归结原理) $\lim_{x\to x_0}=A$的充要条件是对任何以x_0为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$都有$\lim_{x\to\infty} f(x_n)=A$

3.5 函数极限运算法则

@Theorem

定理3.8 设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$与$\lim_{x\to x_0} g(x)=B$都存在，则：

1. 对任意常数k_1,k_2,极限$\lim_{x\to x_0}[k_1f(x)\pm k_2g(x)]$存在，且

$$\lim_{x\to x_0}[k_1f(x)\pm k_2g(x)]=k_1\lim_{x\to x_0} f(x)+k_2\lim_{x\to x_0} g(x)=k_1A+k_2B$$

2. $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$存在，且

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=[\lim_{x\to x_0} f(x)][\lim_{x\to x_0} g(x)]=AB$$

3. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}(\lim_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0)$

对于复合函数，有：

> @Theorem
>
> **定理3.9(复合函数的极限定理)** 设$\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$, $u = g(x)$ 且 $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$,则
>
> $$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(u_0)$$

3.6 两个重要的极限

3.6.1 重要极限一

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

3.6.2 重要极限二

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

4 无穷小量和无穷大量

4.1 无穷小量

4.1.1 无穷小量定义

> @Definition
>
> **定义4.1** 如果函数$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时的极限为零，那么$f(x)$为当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时的 无穷小量 。
>
> 特别的，以零为极限的数列$\{x_n\}$称为$n \to \infty$的无穷小量。

4.1.2 无穷小量和极限的关系

> @Theorem
>
> **定理4.1** 在自变量的同一变化过程$x \to x^*$中，函数$f(x)$具有极限A的充要条件是$f(x) = A + \alpha$,其中α是无穷小。
>
> 这里的x^*表示六中变化之一。

4.1.3 无穷小量的性质

> @Theorem
>
> **定理4.2** 有限个无穷小量的和仍是无穷小量。

> @Theorem
>
> **定理4.3** 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量。

> @Theorem
>
> **定理4.4** 有界变量与无穷小量的乘积仍是无穷小量。

4.2 无穷大量

4.2.1 无穷大量的定义

> @Definition
>
> **定义4.2**
>
> 1. 若$\forall M > 0$,$\exists \delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x)| > M$,则称函数$f(x)$为过程$x \to x_0$的 无穷大 ，记为:
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

2. 若$\forall M > 0, \exists \delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$f(x) > M$，则称函数$f(x)$为过程$x \to x_0$的 正无穷大 。

4.2.2 垂直渐近线

@Definition

定义4.3 若在$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$,$\lim_{x\to x^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$,$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$中有一个成立，则称直线$x = a$为曲线$y = f(x)$的**垂直渐近线。**

4.3 无穷大量和无穷小量的关系

@Theorem

定理4.5 在自变量的同一变化过程中

1. 若$f(x)$是无穷小量，且$f(x) \neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大量
2. 若$f(x)$是无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量

4.4 无穷小量的比较

4.4.1 无穷小量比较

@Definition

定义4.4 在自变量的同一变化过程中，设$\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = 0$

1. 若$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,则称$f(x)$是比$g(x)$ 高阶的无穷小量 ，记作$f(x) = o[g(x)]$
2. 若$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$,则称$f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小量，特别的，如果$c = 1$，则称$f(x)$与$g(x)$是 等价无穷小量 ，记为$f(x) \sim g(x)$

3. 若$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$，则称$f(x)$是比$g(x)$低阶的无穷小量
4. 若$\lim \frac{f(x)}{[g(x)]^k} = c \neq 0$,则称$f(x)$是$g(x)$的$k$阶无穷小量。

4.4.2 等价无穷小量替换

> @Theorem
>
> **定理4.6(等价无穷小量替换定理)** 设在某一极限过程中，函数$f(x)$，$f_1(x)$,$g(x)$,$g(x_1)$都是无穷小量，且$f(x) \sim f_1(x)$,$g(x) \sim g_1(x)$,如果$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$存在，则$\lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$也存在，且
>
> $$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

4.4.3 常见无穷小替换

当$x \to 0$时，有以下常见的等价无穷小

1. $\sin x \sim x$
2. $\tan x \sim x$
3. $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
4. $\arcsin x \sim x$
5. $ln(1 + x) \sim x$
6. $e^x - 1 \sim x$
7. $(1 + x)^a \sim ax$(a为任意实数)

5 函数的连续性与间断点

5.1 连续函数的概念

> @Definiton
>
> **定义5.1** 设函数$y = f(x)$在点$x = x_0$的某δ邻域$U^0(x_0, \delta)$内有定义，若当自变量的增量$\Delta x = x - x_0 \to 0$时，函数的增量$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$,即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

则称函数$f(x)$在点$x = x_0$处 连续 。

连续函数也可以如下定义：

@Definition

定义5.2 设函数$f(x)$在点$x = x_0$的某δ邻域$U^0(x_0, \delta)$内有定义，若$\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$,则称函数$f(x)$在点$x = x_0$处 连续 。

$\varepsilon - \delta$语言定义如下：

@Definition

定义5.3 若$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当$|\Delta x| < \delta$时，恒有$|\Delta y| < \varepsilon$,则称函数$y = f(x)$在点$x = x_0$处连续。

@Definition

定义5.4 若$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,当$|x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,则称函数$y = f(x)$在点$x = x_0$处连续。

接下来介绍函数的左连续与右连续

@Definition

定义5.5

1. 设函数$f(x)$在点$x = x_0$处的某δ左邻域$x_0 - \delta < x \leq x_0$内有定义，若$\lim x \to x_0^- = f(x_0)$,则称函数$f(x)$在点$x_0$处 左连续 ;
2. 设函数$f(x)$在点$x = x_0$处的某δ右邻域$x_0 \leq x < x_0 + \delta$内有定义，若$\lim x \to x_0^+ = f(x_0)$,则称函数$f(x)$在点$x_0$处 右连续 ;

$\varepsilon - \delta$语言定义如下：

@Definition

定义5.6

1. 设函数$f(x)$在点$x=x_0$处的某δ左邻域$x_0-\delta<x\le x_0$内有定义，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$x_0-\delta<x\le x_0$时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称函数$f(x)$在点$x=x_0$处左连续。
2. 设函数$f(x)$在点$x=x_0$处的某δ右邻域$x_0\le x<x_0+\delta$内有定义，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$x_0\le x<x_0+\delta$时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称函数$f(x)$在点$x=x_0$处右连续。

类比数列，函数的连续与左右连续的关系如下：

@Theorem

定理5.1 函数$f(x)$在点$x=x_0$处连续的充要条件是函数$f(x)$在点$x=x_0$处既左连续又右连续，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$$

对于区间上的连续函数，有如下定义：

@Definition

定义5.7 如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内的每一点处都连续，则称函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，记作$f(x)\in C_{(a,b)}$。

@definition

定义5.8 如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内的每一点处都连续，且在左端点右连续，在右端点处左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，记作$f(x)\in C_{[a,b]}$。

5.2 连续函数的运算

5.2.1 连续函数的四则运算

> @Theorem
>
> **定理5.2** 设函数$f(x)$与$g(x)$在$x = x_0$处连续，则它们的和(差) $f(x) \pm g(x)$，积$f(x)g(x)$以及商$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$ 在点$x - x_0$处都连续。

5.2.5 反函数与复合函数

> @Theorem
>
> **定理5.3(反函数的连续性定理)** 设函数$f(x)$在$[a, b]$上严格单递增(递减)且连续，同时$f(a) = \alpha$且$f(b) = \beta$,则其反函数$x = f^{-1}$在$[\alpha, \beta]$或$[\beta, \alpha]$上严格单调递增(或递减)且连续。

由上述定理，可以推出若外函数连续且内函数连续，则其复合函数也是连续的。

> @Theorem
>
> **定理5.4** 一切初等函数在其定义域内连续。

5.3 函数的间断点

函数不连续点称为函数的 间断点 。

5.3.1 第一类间断点

设点$x = x_0$是函数的间断点，如果函数$f(x)$在点$x = x_0$处的两个单侧极限$\lim_{x \to x_0^+}$与$\lim_{x \to x_0^-}$都存在，则称该点$x = x_0$为函数的第一类间断点。

第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点：

1. 单侧存在且相等的称为可去间断点
2. 单侧存在但不相等称为跳跃间断点

5.3.2 第二类间断点

设$x=x_0$是函数$f(x)$的间断点，如果函数$f(x)$在$x=x_0$点处的单侧极限$\lim_{x\to x_0^+}$与$\lim_{x\to x_0^-}$至少有一个不存在，则称点$x=x_0$为函数$f(x)$的第二类间断点。

- 只要有一个单侧极限为∞的间断点就称为函数的 无穷间断点 。
- 如果函数在点呈现震荡现象，则称为震荡间断点。

5.4 闭区间上连续函数的性质

5.4.1 最大值与最小值

> @Definition
>
> **定义5.9** 设函数$f(x)$在区间I上有定义，若存在点$x_0\in I$，使得$\forall x\in I$,都有$f(x)\le f(x_0)$(或$f(x)\ge f(x_0)$),则称函数$f(x_0)$为函数$f(x)$在区间I上的最大值（或最小值），记作$\max_{x\in I}\{f(x)\}=f(x_0)$(或$\min_{x\in I}\{f(x)\}=f(x_0)$)。

> @Theorem
>
> **定理5.5(最大值与最小值定理)** 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在$[a,b]$上必取到最大值与最小值。

5.4.2 零点存在

> @Theorem
>
> **定理5.6（零点定理）** 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$,则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=0$。

5.4.3 介值定理

> @Theorem
>
> **定理5.7（介值定理）** 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(a) \neq f(b)$,则对于介于$f(a)$与$f(b)$之间的任意常数c，存在$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = c$。