Álgebra Lineal

Tema 1: Conceptos básicos

`ingenierocontracabrones.blogspot.com`

`mclnaranjito@gmail.com`

25 de agosto de 2016

Índice general

Capítulo 1

Conceptos básicos I

Para comenzar el estudio del álgebra lineal, es preciso introducir conceptos pertenecientes al álgebra abstracta:

1.1. Conjuntos

Un conjunto es una reunión de determinados objetos bien definidos y diferenciables los unos de los otros. A modo de ejemplo tenemos los conjuntos siguientes:

- Conjunto de los números naturales: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto de los números racionales: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0\}$
- Conjunto de los números iracionales: $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, e\}$
- Conjunto de los números reales: $\mathbb{R} = \{\mathbb{Q} + \mathbb{I}\}$
- Conjunto de los números complejos: $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

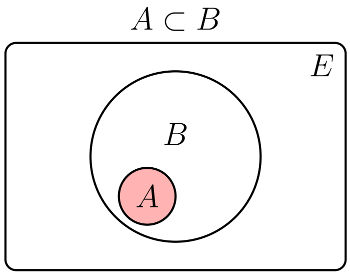
Dado un conjunto A, se le puede añadir modificadores ($*$, $+$, $-$). A^* será el conjunto de elementos de A salvo el cero, mientras que A^+ y A^- designan a los elementos positivos y negativos de A respectivamente. Como ejemplo tendríamos $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$

Al número de elementos de A lo denominamos cardinal de A y se denota por $card(A)$

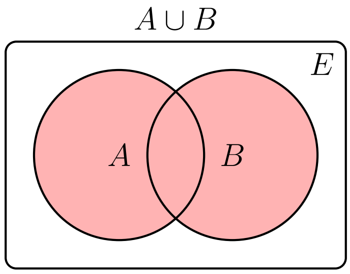
Operaciones entre conjuntos

Definamos A y B como dos subconjuntos que pertenecen a un tercero E. Las operaciones básicas que se pueden realizar entre ellos son las siguientes:

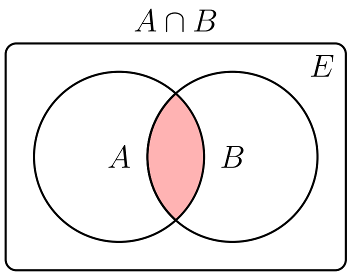
- Inclusión: $A \subset B$



- Unión: $A \cup B \equiv \{x : \; x \in A \text{ ó } x \in B\}$

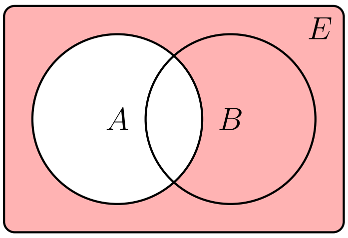


- Intersección: $A \cap B \equiv \{x : \; x \in A \text{ y } x \in B\}$



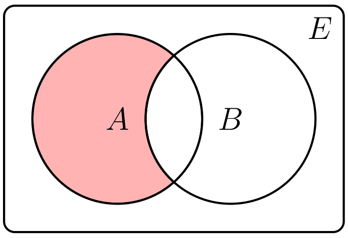
- Contrario o complementario: $A^c = \overline{A}$

A^c



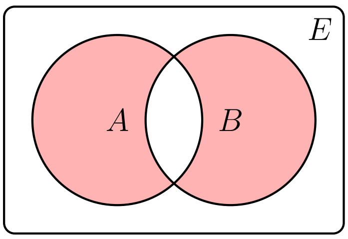
- Diferencia: $A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B)$

$A - B$



- Diferencia simétrica: $A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A)$

$A \triangle B$



Para operar con n conjuntos emplearemos las siguientes notaciones:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \quad \forall i \neq j$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

Ejemplo:

Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 6, 7, 9\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 10\}$. Entonces:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
- $A \cap B = \{3, 7\}$
- $A^c = \{2, 4, 5, 8, 10\}, \quad B^c = \{1, 4, 6, 8, 9\}$
- $A - B = \{1, 6, 9\}, \quad B - A = \{2, 5, 10\}$
- $A \bigtriangleup B = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$

Partición de un conjunto

Particionar un conjunto E consiste en dividirlo en subconjuntos tales que:

1. $$A_i \cap A_j = \emptyset$$
2. $$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Ejemplo:

Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ podemos particionarlo, por ejemplo, en tres subconjuntos de diferentes tamaños: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ y $C = \{4, 6, 8, 9, 10\}$. De ésta manera se cumple que:

- $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap C = \emptyset$
- $E = A \cup B \cup C$

Aprovechamos este ejemplo para recordar qué cardinal tiene cada conjunto: $card(E) = 10$, $card(A) = 2$, $card(B) = 3$ y $card(C) = 5$.

Producto cartesiano

Sean dos conjuntos A y B. Se define el producto cartesiano $A \times B$ al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) en los que el primer componente pertenece a A y el segundo a B, es decir:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo:

Sean dos conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces:

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (a,1) & (a,2) & (a,3) & (a,4) \\ (b,1) & (b,2) & (b,3) & (b,4) \\ (c,1) & (c,2) & (c,3) & (c,4) \end{matrix} \right\}$$

Propiedades de los conjuntos

Para facilitar la comprensión de algunas de las siguientes propiedades podemos utilizar las semejanzas entre las propiedades de las operaciones de conjuntos y las operaciones numéricas. Así, la unión se asemeja a la suma numérica, la intersección al producto, el conjunto vacío sería el equivalente del cero y el complementario equivaldría a un cambio de signo.

Sean dos subconjuntos A, B y C pertenecientes al conjunto E. Se dice que las partes de E $P(E)$ forman un Álgebra de Boole si se cumplen las siguientes propiedades.

1. Idempotente: $A \cap A = A \quad A \cup A = A$
2. De complemento: $A \cap A^c = \emptyset \quad A \cup A^c = E$
3. Conmutativa: $A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$
4. Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. Elemento absorbente: $A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup E = E$
7. Elemento neutro: $A \cup \emptyset = A \quad A \cap E = A$
8. Simplificativa: $A \cap (A \cup B) = A \quad A \cup (A \cap B) = A$
9. Leyes de Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

El lector puede comprobar el cumplimiento de todas estas propiedades gráficamente o numéricamente definiendo los conjuntos A, B, C y E.

1.2. Relaciones binarias

Se denomina relación binaria a la vinculación de dos elementos (a y b por ejemplo) y se denota por aRb.

Sean dos conjuntos A y B. Se llama grafo a cualquier subconjunto G del producto cartesiano $A \times B$.

$$G \subset A \times B$$

Se dirá que $a \in A$ está relacionado con $b \in B$ a través de G (aR_Gb) si el par ordenado (a, b) pertenece a G.

$$aR_Gb \Leftrightarrow (a, b) \in G$$

Ejemplo:

Tomemos el mismo ejemplo que usamos para el producto cartesiano. Sean dos conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Definiremos el grafo

$$G = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 3), (c, 4)\}$$

De ésta manera, tenemos en G qué elementos de A que están relacionados con qué elementos de B mediante pares ordenados (a, b). Así tenemos, por ejemplo, que bR_G2 y que cR_G3.

Otra forma de establecer una relación es mediante una propiedad p. Así diremos que

$$aRb \Leftrightarrow p(a, b) \text{ es cierta}$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y tomemos como propiedad $p(a, b) = a > b$. De ésta manera podemos construir el grafo donde quedan incluidas todas las relaciones que cumplen dicha propiedad:

$$aRb \Leftrightarrow a > b \Rightarrow G = \{(3, 2), (5, 2), (5, 4), (7, 2), (7, 4), (7, 6)\}$$

Propiedades de las relaciones binarias

- Reflexiva: $aRa, \ \forall a \in A$
- Simétrica: $aRb \Rightarrow bRa$
- Antisimétrica: $aRb \text{ y } bRa \Rightarrow a = b$
- Transitiva: $aRb \text{ y } bRc \Rightarrow aRc$
- Antirreflexiva: $a \not R a, \ \forall a \in A$
- Conexa: aRb ó bRa, $\forall (a, b) \in A \times A$, $a \neq b$
- Euclídea: aRb y $aRc \Rightarrow bRc$

Relaciones binarias de equivalencia

Se dice que una relación binaria es de equivalencia si verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Se denota por $a \sim b$.

$$R \text{ es de equivalencia } \Leftrightarrow \ R \text{ es } \begin{cases} \text{Reflexiva} \\ \text{Simétrica} \\ \text{Transitiva} \end{cases}$$

Clase de equivalencia

Sea A un conjunto y $\sim$ una relación binaria de equivalencia definida en A. Se denomina clase de equivalencia del elemento $a \in A$, denotada por $[a]$ o por $\overline{a}$, al subconjunto de A formado por todos los elementos relacionados con a, es decir,

$$[a] \equiv \{b \in A : a \sim b\}$$

Puesto que las relaciones de equivalencia, por definición, son transitivas y simétricas podemos afirmar que la clase de equivalencia de dos elementos relacionados es la misma y, por tanto, cualquiera de los elementos puede representar a dicha clase.

$$a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b] \tag{1.1}$$

Además podemos afirmar que dos elementos no relacionados pertenecen a distintas clases de equivalencia.

$$a \not\sim b \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset \tag{1.2}$$

Basándonos en lo deducido en las expresiones 1.1 y 1.2, podemos afirmar que cada clase de equivalencia define una partición del conjunto A ya que se cumplen las expresiones 1.3 y 1.4.

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i] \tag{1.3}$$

$$[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \quad \text{si} \quad a_i \nsim a_j \tag{1.4}$$

Conjunto cociente

Al conjunto de todas las clases de equivalencia del conjunto A se le llama conjunto cociente, y se representa por $A/\sim$.

$$A/\sim \equiv \{[a_i] : a_i \in A\}$$

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el grafo

$$G = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2)\}$$

Apoyándonos en la Figura 1.1, comprobamos que es relación binaria de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica y transitiva.

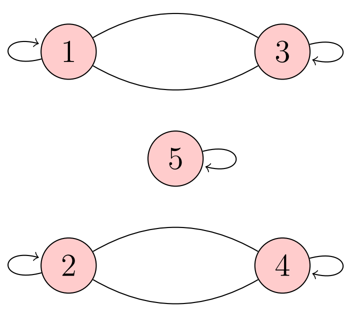


Figura 1.1: Diagrama sagital de las relaciones binarias

Las clases de equivalencia son:

$$[1] = \{1, 3\} = [3]$$
$$[2] = \{2, 4\} = [4]$$
$$[5] = \{5\}$$

Por tanto, el conjunto cociente será:

$$A/\sim = \{[1], [2], [5]\}$$

Relaciones binarias de orden

Se dice que una relación binaria es de orden si verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se denota por $a \leq b$. Si $a \leq b$ se dice que a es anterior a b o que b es posterior a a.

$$R \text{ es de equivalencia } \Leftrightarrow R \text{ es } \begin{cases} \text{Reflexiva} \\ \text{Antisimétrica} \\ \text{Transitiva} \end{cases}$$

Una relación es de **orden total** si además es conexa, es decir, todos los elementos están relacionados. Si no es conexa será relación de **orden parcial**. Se dirá entonces que A está totalmente o parcialmente ordenado si en él hay definida una relación de orden total o parcial respectivamente. Se llama cadena a un subconjunto no vacío totalmente ordenado.

Sean $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y B un subconjunto no vacío de A.

Llamamos **cota superior** de B a cualquier elemento de A que es posterior a todo elemento de B. Si existe alguna cota superior, se dice que B está acotado superiormente.

Llamamos **cota inferior** de B a cualquier elemento de A que es anterior a todo elemento de B. Si existe alguna cota inferior, se dice que B está acotado inferiormente.

Si B está acotado inferiormente y superiormente, se dirá simplemente que está acotado.

Extremo superior de B o **supremo** de B es la menor de las cotas superiores de B. Se denota por $sup_A(B)$. Si el supremo pertenece a B, se llama **máximo.**

Extremo inferior de B o **ínfimo** de B es la mayor de las cotas inferiores de B. Se denota por $inf_A(B)$. Si el ínfimo pertenece a B, se llama **mínimo.**

Un conjunto se dice que está **bien ordenado** si todo subconjunto suyo no vacío tiene mínimo.

Elemento maximal de B es cualquier elemento de B tal que no existe un elemento posterior a él.

Elemento minimal de B es cualquier elemento de B tal que no existe un elemento anterior a él.

Un conjunto A ordenado se llamará **retículo** si todo subconjunto suyo formado por dos elementos posee ínfimo y supremo.

Ejemplo:

Sea $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 16, 18\}$ y consideremos en A la relación de divisibilidad.

$$\forall x, y \in A \quad xRy \Leftrightarrow x|y$$

Inciso: El término $x|y$ significa x divide a y. Ésto se cumple cuando el resto de la división y/x es cero y, por tanto, y es un múltiplo de x. En notación matemática sería:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x|y \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} : y = kx$$

Puede comprobarse fácilmente que ésta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Además, no todos los elementos están relacionados por lo que es de orden parcial.

Una herramienta gráfica empleada para las relaciones de orden es el diagrama de Hasse. Está estructurado de abajo a arriba en niveles en función de la anterioridad o posterioridad de cada elemento.

Podemos observar, en la figura 1.2, el diagrama de Hasse de nuestro ejemplo. Comprobamos que los elementos 2 y 3 son minimales y los elementos 16 y 18 son maximales. El 5 es minimal y maximal a la vez.

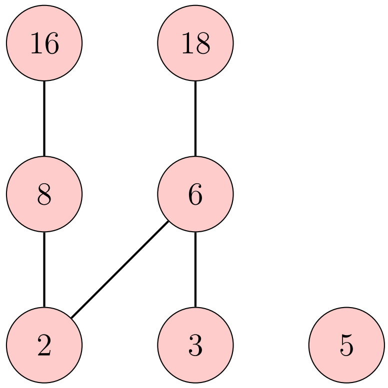


Figura 1.2: Diagrama de Hasse

En éste caso, no tenemos ni máximo ni mínimo ya que no hay ningun elemento de A que acote superior o inferiormente al resto. Puesto que $A \subset \mathbb{N}$ podemos encontrar cotas superiores e inferiores naturales. El 1 divide al resto, por lo que es una cota inferior de A_R. El 720 es múltiplo de los tres maximales, por lo que es cota superior de A_R.

1.3. Principio de Inducción

Sea $P(n)$ una proposición matemática en función de un número entero positivo $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $P(n)$ puede ser únicamente verdadera o falsa, entonces podemos emplear el principio de inducción:

Si P(1) es cierta, y si suponiendo que P(k) es verdadera se puede demostrar que P(k+1) también lo es, entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo:

Demostrar que la siguiente ecuación es cierta:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Comprobamos que para $n = 1$ es cierto.

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Supongamos que para $n = k$ es cierto.

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Para $n = k + 1$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

1.4. Aplicaciones

Dados dos conjuntos A y B, una función o aplicación $f : A \to B$ es un caso particular de relación binaria que asocia a cada $a \in A$ un único objeto $b \in B$, que se denomina imagen de a y se denota por $b = f(a)$.

Al conjunto de los elementos de A para los cuales existe imagen se denomina dominio de la función y se denota por $Dom(f)$.

Al conjunto de todas las imágenes de A se denomina imagen de la función y se denota por $Im(f)$.

$$Im(f) = f(A) = B$$

Se define la imagen reciproca de de $b \in B$ como el conjunto de los elementos de A cuya imagen es b. Se denota por $f^{-1}(b)$.

$$f^{-1}(b) := \{a \in A : f(a) = b\}$$

Tipos de aplicaciones

- **Aplicación inyectiva:** Una aplicación es inyectiva si no hay dos objetos del dominio con la misma imagen.

$$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x = y$$

- **Aplicación sobreyectiva:** Una aplicación es sobreyectiva si todos los objetos de B son imagen de almenos un objeto de A:

$$\forall b \in B \ \exists \ a \in A / f(a) = b \Longleftrightarrow Im(f) = B$$

- **Aplicación biyectiva:** Una función es biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva a la vez. Por tanto, todos los elementos de A tienen una imagen distinta en B y a cada $b \in B$ le corresponde un único elemento $a \in A$.

Para las aplicaciones biyectivas existe una aplicación o **función inversa**, denotada por f^{-1}, tal que

$$f^{-1}(b) = a$$

Composición de aplicaciones

Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos aplicaciones con $B \subset C$. Se denomina función o aplicación compuesta a

$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$

Propiedades:

- Asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- No conmutativa en general.
- La composición de aplicaciones inyectivas es una aplicación inyectiva.
- La composición de aplicaciones sobreyectivas es una aplicación sobreyectiva.
- La composición de aplicaciones biyectivas es una aplicación biyectiva.