

LES FILTRES NUMERIQUES

1. Equation différentielle d'un filtre numérique

Un filtre numérique est régi par l'équation différentielle suivante :

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N)$$



2. Transformé en z

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_M z^{-M} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \dots - a_N z^{-N} Y(z)$$

$$\text{D'où : } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Exp : déterminer la fonction de transfert en z de l'équation différentielle suivante :

$$y(n) = x(n) - x(n-2) - y(n-1) - 0,8125 y(n-2)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0,8125 z^{-2}}$$

Les pôles de la fonction de transfert $z_1 = -0,5 + j0,75$ et $z_2 = -0,5 - j0,75$, les pôles se trouvent dans le cercle unité, donc le système est stable.

3. Réponse fréquentielle d'un filtre numérique

Pour un filtre analogique, nous utilisons la transformée de Laplace. La réponse fréquentielle

$$H(p) \Big|_{p=j\omega} = H(j\omega) \text{ avec } |H(j\omega)| : \text{le module et } \angle H(j\omega) : \text{la phase}$$

Par analogie au filtre analogique, la réponse fréquentielle d'un filtre numérique ($z = e^{pT} = e^{j\omega T}$):

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T}) = H(e^{j\Omega}) \text{ avec } \Omega = \omega T, T : \text{période d'échantillonnage}$$

$$|H(e^{j\Omega})| : \text{le module et } \angle H(e^{j\Omega}) : \text{la phase}$$

PROPRIETES :

Périodicité :

$$H(e^{j\Omega}) = H(e^{j(\Omega+2k\pi)})$$

$$\text{Module : } |H(e^{j\Omega})| = |H(e^{j(\Omega+2k\pi)})|$$

$$\text{Phase : } \angle H(e^{j\Omega}) = \angle H(e^{j(\Omega+2k\pi)})$$

Symétrie :

Module : $|H(e^{-j\Omega})| = |H(e^{j\Omega})|$

Phase : $\angle H(e^{-j\Omega}) = -\angle H(e^{j\Omega})$

La fréquence maximale d'un filtre numérique $f_{\max} = \frac{F}{2}$, $F = \frac{1}{T}$: fréquence d'échantillonnage

$$\Omega = \omega T = 2\pi f T ; \quad \Omega_{\max} = 2\pi f_{\max} T = 2\pi \frac{F}{2} T = \pi$$

La réponse fréquentielle pour $\Omega > \pi$ de $H(e^{j\Omega})$ est la duplication de $H(e^{j\Omega})$ pour $\Omega \leq \pi$

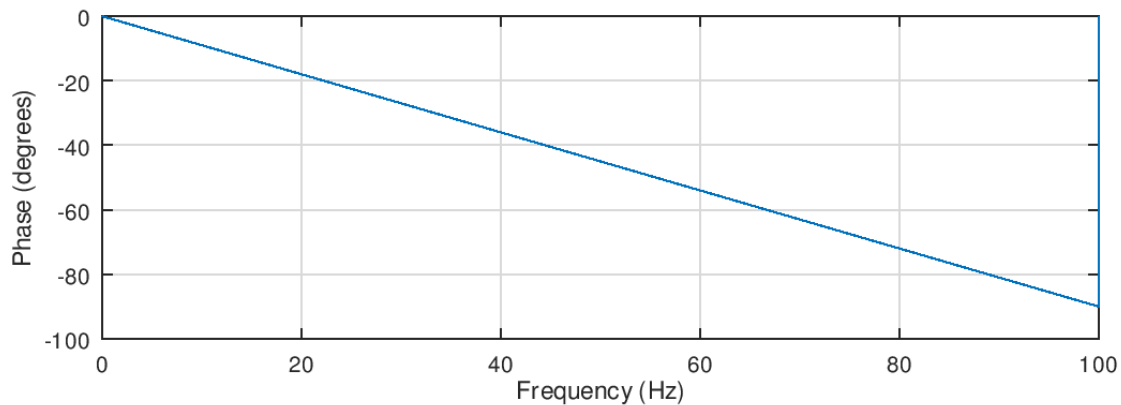
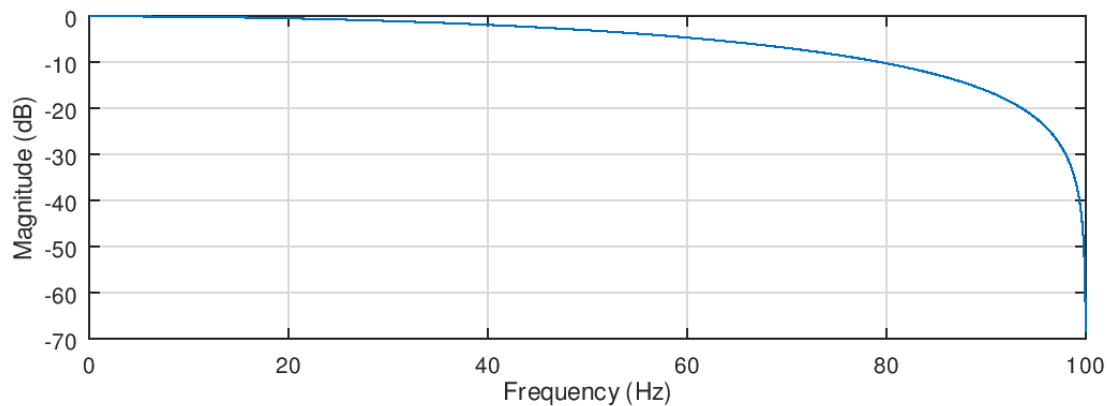
Exp : Déterminer la réponse fréquentielle du filtre suivant : $y(n) = 0,5x(n) + 0,5x(n-1)$; $F = 8000\text{Hz}$.

$$H(z) = 0,5(1 + z^{-1})$$

$$H(e^{j\Omega}) = 0,5(1 + e^{-j\Omega}) = 0,5e^{-j\frac{\Omega}{2}}(e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

Module : $|H(e^{j\Omega})| = \left|\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right|$

Phase : $\angle H(e^{j\Omega}) = \angle e^{-j\frac{\Omega}{2}} = -\frac{\Omega}{2}$



4. Spécifications d'un filtre numérique

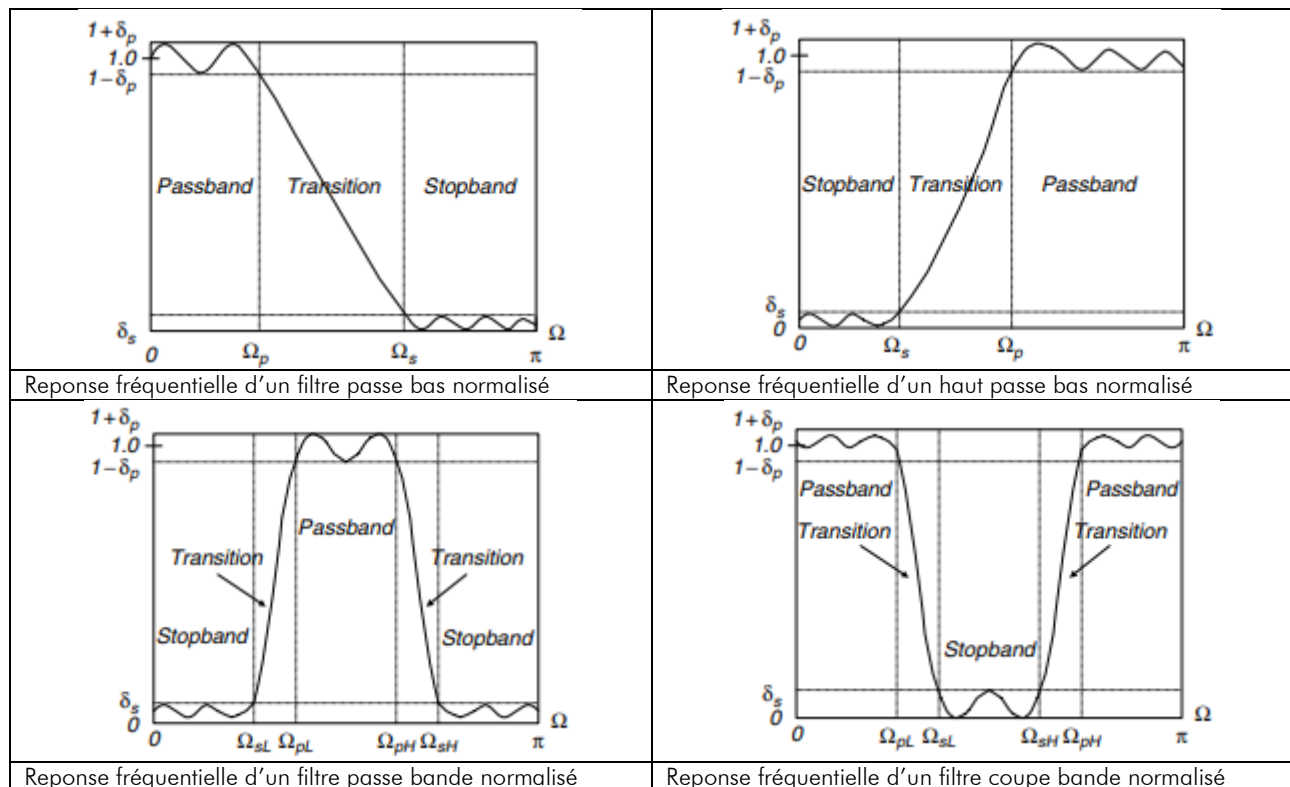
Les filtres numériques de base sont classés en quatre catégories : filtre passe bas, filtre passe haut, filtre passe bande et filtre coupe bande.

En général, un filtre est conçu sur la base des spécifications visant principalement la bande passante, la bande d'atténuation et la bande de transition.

- Bande passante : plage de fréquence où le gain est approximativement égal à l'unité.
- Bande d'atténuation : plage de fréquence dans laquelle l'amplitude du signal d'entrée est pratiquement atténuée.
- Bande de transition : plage de fréquence entre la bande passante et la bande atténuée.

Les spécifications de quatre filtres de base sont illustrées par la figure suivante, où :

- Ω_p : fréquence de coupure dans la bande passante.
- Ω_s : fréquence de coupure dans la bande atténuée.
- δ_p : ondulation de la réponse fréquentielle dans la bande passante.
- δ_s : ondulation de la réponse fréquentielle dans la bande atténuée.



SYNTHESE D'UN FILTRE A REponse IMPULSIONNELLE INFINIE (IIR OU RII)

1. Synthèse par la méthode de la transformation bilinéaire

La procédure de conception du filtre, consiste à transformer les spécifications du filtre numérique aux spécifications d'un filtre analogique équivalent, puis d'appliquer la transformation bilinéaire pour déterminer la fonction de transfert en z du filtre.

ETAPES A SUIVRE :

1. Spécifications du filtre numérique (définir le gabarit du filtre).
2. Effectuer la distorsion de fréquence.
3. Déterminer l'ordre du filtre.
4. Déterminer la fonction de transfert du filtre analogique passe bas normalisé (Butterworth ou Chebyshev).
5. Dénormaliser le filtre.
6. Appliquer la transformation bilinéaire pour déterminer la fonction de transfert en z .

2. Etude de cas :

2.1. Spécifications du filtre

On se propose de faire la synthèse d'un filtre numérique ayant les caractéristiques suivantes :

- Fréquence de coupure de la bande passante $f_p = 10\text{Hz}$,
- Fréquence de coupure de la bande atténuée $f_a = 60\text{Hz}$
- Gain $A_p = -0,5\text{ dB}$ à f_p
- Gain $A_a = -20\text{ dB}$ à f_a
- Fréquence d'échantillonnage $F = 200\text{ Hz}$.

2.2. Distorsion de fréquence

La transformation du filtre numérique en filtre analogique équivalent, nous emmène à chercher la relation entre les fréquences.

La transformation bilinéaire approxime l'opérateur de Laplace s à $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$.

Soit $s = j\omega_a$ et $z = e^{sT} = e^{j\omega_d T}$

$$j\omega_a = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega_d T} - 1}{e^{j\omega_d T} + 1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega_d T}{2}} - e^{-j\frac{\omega_d T}{2}}}{e^{j\frac{\omega_d T}{2}} + e^{-j\frac{\omega_d T}{2}}} = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right)$$

$$\omega_{dp} = 2\pi f_p = 6,28 \times 10 = 62,8 \text{ rad / s}$$

$$\omega_{da} = 2\pi f_a = 6,28 \times 60 = 376,8 \text{ rad / s}$$

On appliquant la formule de distorsion de fréquence :

$$\omega_{ap} = (2 / 0,005) \times \tan(62,8 \times 0,005 / 2) = 63,32 \text{ rad / s}$$

$$\omega_{aa} = (2 / 0,005) \times \tan(376,8 \times 0,005 / 2) = 550 \text{ rad / s}$$

2.3. Calcul de l'ordre du filtre

Rappelons que la réponse en amplitude du prototype de filtre de Butterworth passe bas normalisé d'ordre

$$n \text{ à pour équation } |H_p(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}$$

La fréquence de coupure normalisée $\nu_p = \frac{\omega_{ap}}{\omega_{ap}} = 1$

La fréquence normalisée de la bande atténuée : $\nu_a = \frac{\omega_{aa}}{\omega_{ap}} = \frac{550}{63,32} = 8,686$

Le tableau suivant illustre la conversion des spécifications d'un filtre analogique quelconque vers les spécifications d'un filtre passe bas normalisé.

Analog Filter Specifications	Lowpass Prototype Specifications
Lowpass: ω_{ap}, ω_{as}	$\nu_p = 1, \nu_s = \omega_{as} / \omega_{ap}$
Highpass: ω_{ap}, ω_{as}	$\nu_p = 1, \nu_s = \omega_{ap} / \omega_{as}$
Bandpass: $\omega_{apl}, \omega_{aph}, \omega_{asl}, \omega_{ash}$	$\nu_p = 1, \nu_s = \frac{\omega_{ash} - \omega_{asl}}{\omega_{aph} - \omega_{apl}}$
$\omega_0 = \sqrt{\omega_{apl}\omega_{aph}}, \omega_0 = \sqrt{\omega_{asl}\omega_{ash}}$	
Bandstop: $\omega_{apl}, \omega_{aph}, \omega_{asl}, \omega_{ash}$	$\nu_p = 1, \nu_s = \frac{\omega_{aph} - \omega_{apl}}{\omega_{ash} - \omega_{asl}}$
$\omega_0 = \sqrt{\omega_{apl}\omega_{aph}}, \omega_0 = \sqrt{\omega_{asl}\omega_{ash}}$	

ω_{ap} , passband frequency edge; ω_{as} , stopband frequency edge; ω_{apl} , lower cutoff frequency in passband; ω_{aph} , upper cutoff frequency in passband; ω_{asl} , lower cutoff frequency in stopband; ω_{ash} , upper cutoff frequency in stopband; ω_0 , geometric center frequency.

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{10^{-0,1A_p} - 1}{10^{-0,1A_s} - 1}\right)}{2 \log \nu_a} = \frac{\log\left(\frac{10^{0,1 \times 20} - 1}{10^{0,1 \times 0,5} - 1}\right)}{2 \log 8,686} = 1,54 \text{ d'où } n = 2$$

2.4. Fonction de transfert normalisé

Les fonctions de transfert d'un filtre passe bas de Butterworth sont données dans le tableau suivant :

Ordre du filtre	Dénominateur normalisé
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1,4142s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 1,8477s + 1)(s^2 + 0,7653s + 1)$
5	$(s^2 + 1,6180s + 1)(s^2 + 1,6180s + 1)(s + 1)$
6	$(s^2 + 1,9318s + 1)(s^2 + 1,4142s + 1)(s^2 + 0,5176s + 1)$

$$\text{Pour } n = 2 ; H_p(s) = \frac{1}{s^2 + 1,4142s + 1}$$

2.5. Dénormalisation du filtre

La dénormalisation consiste à déterminer la fonction de transfert d'un filtre analogique quelconque à partir de la fonction de transfert normalisée d'un filtre passe bas.

Le tableau suivant illustre la transformation du filtre passe bas normalisé.

Filter Type	Prototype Transformation
Lowpass	$\frac{s}{\omega_c}$, ω_c is the cutoff frequency
Highpass	$\frac{\omega_c}{s}$, ω_c is the cutoff frequency
Bandpass	$\frac{s^2 + \omega_0^2}{sW}$, $\omega_0 = \sqrt{\omega_l \omega_h}$, $W = \omega_h - \omega_l$
Bandstop	$\frac{sW}{s^2 + \omega_0^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\omega_l \omega_h}$, $W = \omega_h - \omega_l$

La fonction de transfert recherchée :

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{(63,32)^2} + \frac{1,4142}{63,32}s + 1} = \frac{1}{2,5 \times 10^{-4} s^2 + 0,0223s + 1}$$

2.6. Fonction de transfert en z

Maintenant il suffit de remplacer dans la fonction de transfert l'opérateur s par $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

$$H(z) = \frac{1}{2,5 \times 10^{-4} \left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right)^2 + 0,0223 \left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right) + 1} = \frac{z+1}{129,2z^2 - 81z + 48,2} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{129,2 - 81z^{-1} + 48,2z^{-2}}$$

SYNTHESE D'UN FILTRE A REPONSE IMPULSIONNELLE FINIE (FIR OU RIF)

1. Introduction

Les filtres à réponse impulsionnelle finie présente une catégorie très importante des filtres numériques. L'équation différentielle du RIF s'écrit :

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \dots + b_N x(n-N) \text{ ou } b_k \text{ les coefficients du filtre FIR}$$
 et $N+1$ la longueur du filtre.

En appliquant la transformé de fourrier en z :

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) + \dots + b_N z^{-N} X(z)$$

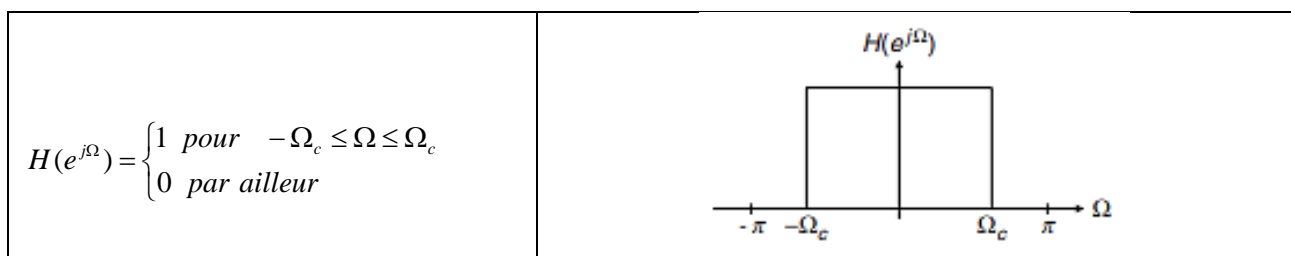
La fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N} = \sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k}$

A la différence du filtre IIR, le filtre FIR n'a pas d'équivalent analogique puisque le dénominateur de sa fonction de transfert est l'unité ; ce qui garantit sa stable. Une autre particularité très intéressante est de pouvoir présenter une phase linéaire. En effet, une phase linéaire implique un temps de propagation du groupe constant.

2. Synthèse du filtre FIR

2.1. Méthode de transformé de Fourier

On se donne le gabarit fréquentiel d'un filtre passe bas idéal à respecter. La réponse impulsionnelle peut être calculée en faisant la transformé de fourrier inverse de la réponse fréquentielle.



La réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$ est périodique de période 2π . Elle est décomposable en série de fourrier :

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h(n) \cdot e^{-jn\Omega}$$

Sa réponse impulsionnelle peut être exprimée en fonction de $H(e^{j\Omega})$ par :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega$$

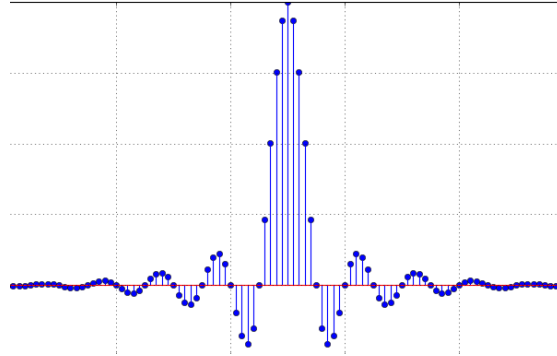
Ce filtre est non causal et admet une infinité de coefficients. Ces coefficients peuvent être calculés de la manière suivante :

Pour $n = 0$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega \times 0} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1 d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi}$$

Pour $n \neq 0$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{e^{jn\Omega}}{2\pi jn} \Big|_{-\Omega_c}^{\Omega_c} = \frac{1}{n\pi} \frac{e^{jn\Omega_c} - e^{-jn\Omega_c}}{2j} = \frac{\sin(n\Omega_c)}{n\pi}$$



Théoriquement, $h(n)$ existe pour $-\infty < n < +\infty$ et symétrique par rapport à $n=0$; c'est-à-dire $h(-n) = h(n)$. L'amplitude de de réponse impulsionnelle $h(n)$ diminue lorsque n augmente dans les deux sens. Pour faire la conception du filtre FIR, on doit faire la troncature de la séquence infinie de $h(n)$ pour obtenir $2M + 1$ coefficients dominants à cause de la symétrie des coefficients. Ce qui donne :

$$H(z) = h(M)z^M + \dots + h(1)z^1 + h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(M)z^{-M}$$

Le filtre obtenu a une fonction de transfert en z non causale, car elle contient des termes avec des puissances positives de z , ce qui signifie que la sortie du filtre dépend des futures entrées du filtre. Pour remédier à la fonction de transfert en z non causale, nous retardons la réponse impulsionnelle tronquée $h(n)$ de M échantillons pour obtenir le filtre FIR causal suivant:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{2M} z^{-2M} \quad \text{avec } b_n = h(n - M) \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, 2M$$

Exercice : Calculer les trois coefficients ($N = 3$) d'un filtre passe bas ayant les spécifications suivantes :

$$f_c = 800\text{Hz} ; \quad f_e = 8\text{KHz} .$$

Solution :

$$\Omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_e} = 2\pi \times \frac{800}{8000} = 0,2\pi$$

$$N = 3 = 2M + 1 \Rightarrow M = 1$$

$$h(0) = \frac{\Omega_c}{\pi} = \frac{0,2\pi}{\pi} = 0,2$$

$$h(1) = \frac{\sin(\Omega_c)}{\pi} = \frac{\sin(0,2\pi)}{\pi} = 0,187$$

Les coefficients du filtre FIR causal :

$$b_0 = h(0 - 1) = h(-1) = h(1) = 0,187$$

$$b_1 = h(1 - 1) = h(0) = 0,2$$

$$b_2 = h(2-1) = h(1) = h(1) = 0,187$$

La réponse impulsionnelle du filtre FIR :

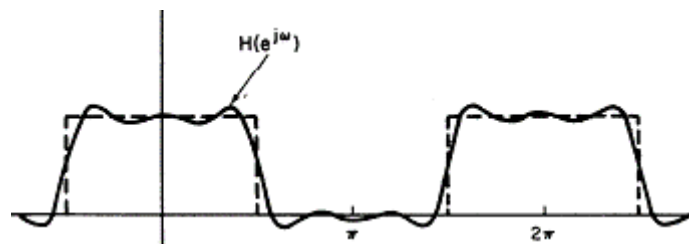
$$h(n) = 0,187\delta(n) + 0,2\delta(n-1) = 0,187\delta(n-2)$$

De manière similaire il est possible d'appliquer la transformée de Fourier inverse pour obtenir les coefficients des autres filtres. Le tableau suivant présente les formules nécessaires pour le calcul des coefficients des filtres passe haut, passe bande et coupe bande.

Type de filtre	Réponse impulsionnelle d'un filtre idéal
Passe bas	$h(n) = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\sin(n \cdot \Omega_c)}{n \cdot \pi} & -M \leq n \leq M \text{ et } n \neq 0 \end{cases}$
Passe haut	$h(n) = \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_c}{\pi} & n = 0 \\ -\frac{\sin(n \cdot \Omega_c)}{n \cdot \pi} & -M \leq n \leq M \text{ et } n \neq 0 \end{cases}$
Passe bande	$h(n) = \begin{cases} \frac{\Omega_H - \Omega_L}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\sin(n \cdot \Omega_H)}{n \cdot \pi} - \frac{\sin(n \cdot \Omega_L)}{n \cdot \pi} & -M \leq n \leq M \text{ et } n \neq 0 \end{cases}$
Coupe bande	$h(n) = \begin{cases} \frac{\pi - \Omega_H + \Omega_L}{\pi} & n = 0 \\ -\frac{\sin(n \cdot \Omega_H)}{n \cdot \pi} + \frac{\sin(n \cdot \Omega_L)}{n \cdot \pi} & -M \leq n \leq M \text{ et } n \neq 0 \end{cases}$

2.2. Méthode de fenêtre

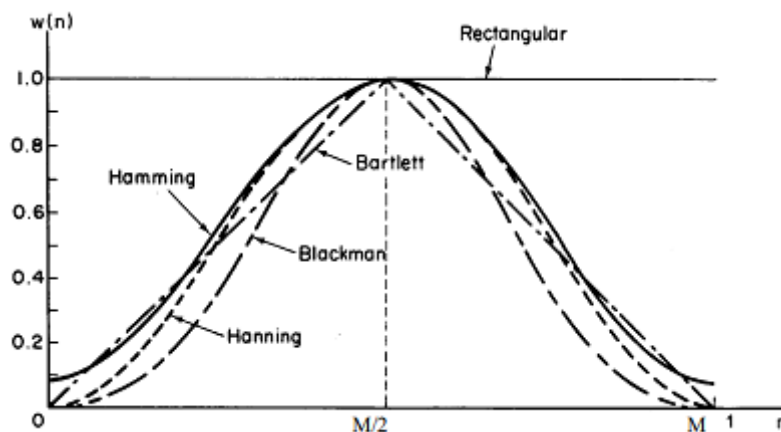
La troncature de la réponse impulsionnelle introduit des oscillations indésirables dans la réponse fréquentielle (phénomène de Gibbs).



Il est donc naturel de chercher une fonction fenêtre pouvant pondérer progressivement les coefficients pour amortir les oscillations. La nouvelle réponse impulsionnelle devient : $h_w(n) = h(n) \cdot w(n)$, où $w(n)$ désigne la fonction fenêtre.

Les principales fenêtres utilisées pour la conception des filtres FIR sont :

Fenêtre rectangulaire	$w_{rec}(n) = 1$	$-M \leq n \leq M$
Fenêtre de Bartlett	$w_{tri}(n) = 1 - \frac{ n }{M}$	$-M \leq n \leq M$
Fenêtre de Hanning	$w_{han}(n) = 0,5 + 0,5 \cos(\frac{n\pi}{M})$	$-M \leq n \leq M$
Fenêtre de Hamming	$w_{ham}(n) = 0,45 + 0,46 \cos(\frac{n\pi}{M})$	$-M \leq n \leq M$
Fenêtre de Blackman	$w_{black}(n) = 0,42 + 0,5 \cos(\frac{n\pi}{M}) + 0,08 \cos(\frac{2n\pi}{M})$	$-M \leq n \leq M$



L'application des fenêtres modifie les caractéristiques de réponse fréquentielle d'amplitude du filtre, la largeur du lobe principal devenant plus large et une atténuation accrue des lobes latéraux. Le tableau illustre le choix de la fenêtre en fonction des spécifications désirées du filtre FIR.

Bande de transition normalisée : $\Delta f = |f_a - f_c| / F_e$

Type de fenêtre	Fonction de. fenêtre pour $-M \leq n \leq M$	Longueur de fenêtre N	Ondulation dans la bande passante	Limite de la bande d'atténuation
Rectangulaire	1	$N = \frac{0,9}{\Delta f}$	0,7416	21 dB
Hanning	$0,5 + 0,5 \cos(\frac{n \cdot \pi}{M})$	$N = \frac{3,1}{\Delta f}$	0,0546	44 dB
Hamming	$0,54 + 0,46 \cos(\frac{n \cdot \pi}{M})$	$N = \frac{3,3}{\Delta f}$	0,0194	53 dB
Blackman	$0,42 + 0,5 \cos(\frac{n\pi}{M}) + 0,08 \cos(\frac{2n\pi}{M})$	$N = \frac{5,5}{\Delta f}$	0,0017	74 dB