Chapitre 6

Système de second ordre :

-Etude temporelle-

6.1 Définition :

Un système linéaire continu et invariant d'entrée e(t) et de sortie s(t), est dit de second ordre, lorsqu'il est régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de second ordre de la forme :

$$a_2.\frac{d^2s(t)}{dt^2}+a_1.\frac{ds(t)}{dt}+a_0.s(t)=b_0.e(t)$$

Ou sous une forme canonique :

$$(E1):\boxed{\frac{d^2s(t)}{dt^2}+2.m.\omega_0.\frac{ds(t)}{dt}+\omega_0^{\ 2}.s(t)=K.\omega_0^{\ 2}.e(t)}$$

Soit en divisant par $\omega_0^{\ 2}$:

$$(E2):\boxed{\frac{1}{\omega_0^{\ 2}}.\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2.m}{\omega_0}.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K.e(t)}$$

- *K : Gain statique (gain en régime permanent).* $K=\dfrac{s(\infty)}{e(\infty)}$.
- *m: Facteur (ou coefficient) d'amortissement (m>0).*
- ω_0 *: Pulsation propre du système non amorti ou pulsation naturelle (rad/s).*

6.2 Fonction de transfert :

En appliquant la transformation de Laplace à l'une des deux équations différentielles (E1) ou (E2) précédentes (avec des conditions initiales nulles), on obtient :

$$(E1)\xrightarrow{L}S(p).(p^2+2.m.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2})=K.\omega_0^{\ 2}.E(p)$$

D'où la fonction de transfert d'un système de second ordre:

$$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K.\omega_0^{\ 2}}{p^2+2.m.\omega_0.p+\omega_0^{\ 2}}=\frac{K}{\dfrac{1}{\omega_0^{\ 2}}.p^2+\dfrac{2.m}{\omega_0}.p+1}}$$

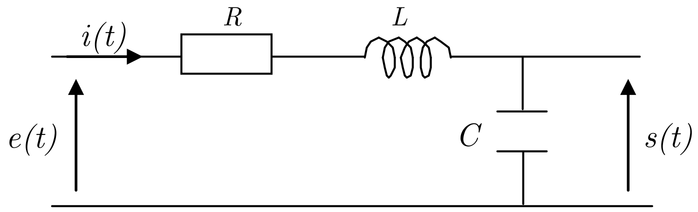
6.3 Schéma bloc :

Le schéma bloc d'un système de second ordre est de la forme suivante :

$$E(p) \rightarrow \boxed{\frac{K.\omega_0^{\,2}}{p^2 + 2.m.\omega_0.p + \omega_0^{\,2}}} \rightarrow S(p) \quad \text{Ou encore} \quad E(p) \rightarrow \boxed{\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^{\,2}}.p^2 + \frac{2.m}{\omega_0}.p + 1}} \rightarrow S(p)$$

6.4 Exemples :

6.4.1 Circuit R-L-C : *On considère le système électrique suivant :*



Comme on a vu pour le système du premier ordre, la fonction de transfert de ce système peut être déterminée par deux méthodes :

Méthode1 : *En déterminant en premier lieu l'équation différentielle liant s(t) à e(t) :*

$$s(t) = \frac{1}{C}\int i(t).dt \Rightarrow i = C.\frac{ds}{dt} \quad et \quad e = L.\frac{di}{dt} + R.i + s \Rightarrow e = L.C.\frac{d^2s}{dt^2} + R.C.\frac{ds}{dt} + s$$

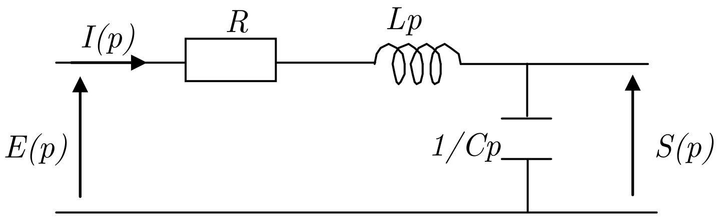
$$L.C.\frac{d^2s}{dt^2} + R.C.\frac{ds}{dt} + s = e \xrightarrow[syst\ de\ 2^{nd}\ ordre]{} K = 1;\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}};\quad \frac{2.m}{\omega_0} = R.C \Rightarrow m = \frac{1}{2}\frac{R.C}{\sqrt{L.C}}$$

D'où la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^{\,2}}p^2 + \frac{2.m}{\omega_0}p + 1} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

Méthode2 : *En passant du domaine temporel au domaine de Laplace:*

$$R \xrightarrow{L} R;\ L \xrightarrow{L} L.p;\ C \xrightarrow{L} \frac{1}{C.p}$$

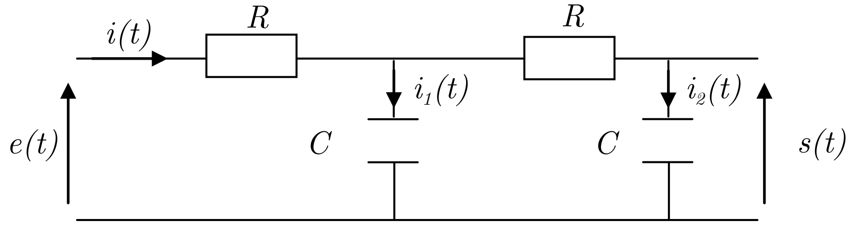


$$S(p)=\frac{1}{C.p}.I(p)\ ;\ E(p)=\left[R+L.p+\frac{1}{C.p}\right].I(p)=\left[(LCp^2+RCp+1)/C.p\right].I(p)$$

$$D'où :\ H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{LCp^2+RCp+1}$$

6.4.2 Deux cellules R-C en cascade :

On considère le circuit électrique suivant formé de deux cellules R-C :



En utilisant l'une des deux méthodes utilisées dans l'exemple précédent, on peut aisément montrer que ce circuit électrique est un système de second ordre :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{R^2C^2p^2+3.RCp+1}\equiv\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^{\,2}}p^2+\frac{2.m}{\omega_0}p+1}\Rightarrow\begin{cases}K=1\\ \omega_0=1/R.C\\ m=1.5\end{cases}$$

6.5 Régimes de fonctionnement :

Notons par D(p) le dénominateur de H(p) : $D(p)=p^2+2.m.\omega_0.p+\omega_0^{\,2}$

Les pôles de H(p) sont les solutions de l'équation D(p)=0

$D(p)=0\Rightarrow p^2+2.m.\omega_0.p+\omega_0^{\,2}=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta=(2.m.\omega_0)^2-4.\omega_0^{\,2}=4.\omega_0^{\,2}.(m^2-1).$

Suivant les valeurs de m, on distingue trois cas :

- $m>1\Rightarrow\Delta>0$ *:C'est le régime* $\boxed{\text{apériodique}}$ *: Le système est hyperamorti*

  H(p) possède 2 pôles réels: $p_1=\omega_0.(-m-\sqrt{m^2-1})$ *et* $p_2=\omega_0.(-m+\sqrt{m^2-1})$

- $m=1\Rightarrow\Delta=0$ *: Régime apériodique* $\boxed{\text{critique}}$

  H(p) possède un pôle double: $p_1=p_2=-m.\omega_0=-\omega_0$

- $m<1\Rightarrow\Delta<0$ *:Régime* $\boxed{\text{pseudopériodique}}$ *: Le système est faiblement amorti*

H(p) possède 2 pôles complexes conjugués: $p_1=\omega_0.(-m-j\sqrt{1-m^2})$ *et* $p_2=\omega_0.(-m+j\sqrt{1-m^2})$

6.6 Réponse indicielle :

On se propose de déterminer la réponse d'un système de second ordre à un échelon d'amplitude E : $e(t)=E.u(t) \xrightarrow{L} E(p)=\dfrac{E}{p}$.

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow S(p)=H(p).E(p) \Rightarrow \boxed{S(p)=\frac{KE.\omega_0^{\,2}}{p.(p^2+2.m.\omega_0.p+\omega_0^{\,2})}}$$

Trois cas se présentent suivant le régime de fonctionnement :

6.6.1 Régime apériodique (m>1) :

$$D(p)=p^2+2.m.\omega_0.p+\omega_0^{\,2}=(p-p_1).(p-p_2) \quad (Avec\, p_{1/2}=\omega_0.(-m\pm\sqrt{m^2-1}))$$

$$S(p)=\frac{KE.\omega_0^{\,2}}{p.(p^2+2.m.\omega_0.p+\omega_0^{\,2})}=\frac{KE.\omega_0^{\,2}}{p.(p-p_1).(p-p_2)}$$

La décomposition en éléments simples de S(p) et la transformée de Laplace inverse permettent de déterminer s(t) :

$$S(p) \xrightarrow{L^{-1}} \boxed{s(t)=K.E.\left[1+\frac{1}{p_1-p_2}.(p_2.e^{p_1.t}-p_1.e^{p_2.t})\right]}$$

6.6.2 Régime apériodique critique : m=1

Comme son nom l'indique c'est un cas particulier du régime apériodique.

$$D(p)=(p+m.\omega_0^{\,2})^2 \Rightarrow S(p)=\frac{KE.\omega_0^{\,2}}{p.(p+\omega_0)^2} \xrightarrow{L^{-1}} \boxed{s(t)=KE.\left[1-(1+\omega_0.t).e^{-\omega_0.t}\right]}$$

L'évolution de s(t) (pour différentes valeurs de m≥ 1) est donnée par la figure 6.1:

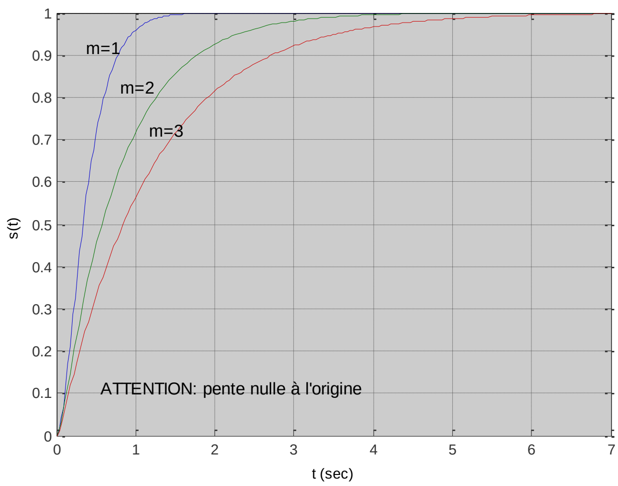


Fig 6.1 Réponse indicielle unitaire (E=1) d'un système de second ordre

(K=1, m={1,2,3}, ω_0= 5 rad/s)

Remarque :

On remarque bien la ressemblance de la réponse indicielle du système de second ordre hyper amorti (ou à fort amortissement) avec celle du premier ordre, toutefois il est important de noter que la pente de la tangente à l'origine est nulle. L'allure de la sortie présente une légère courbure au début de son évolution.

6.6.3 Régime pseudopériodique (m<1) :

$$S(p) = \frac{KE.\omega_0^{\,2}}{p.(p^2 + 2.m.\omega_0.p + \omega_0^{\,2})} \xrightarrow[Table]{L^{-1}} \boxed{s(t) = K.E.\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_p}.e^{-m.\omega_0.t}.sin(\omega_p.t + \varphi)\right]}$$

$$\omega_p = \omega_0.\sqrt{1 - m^2} \qquad \varphi = arc\cos(m)$$

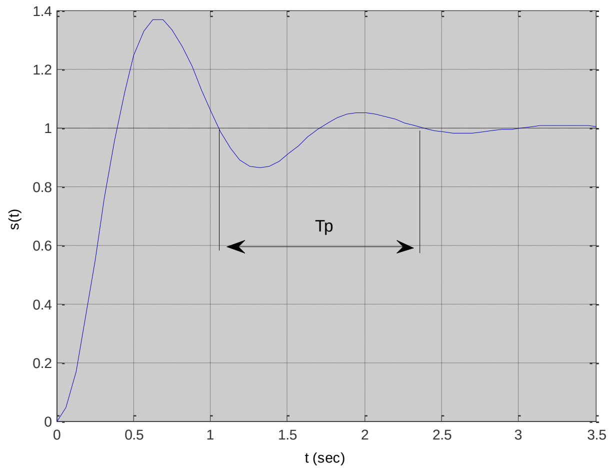


Fig 6.2 Réponse indicielle unitaire (E=1) d'un système de second ordre

(K=1, m=0.3, ω_0= 5 rad/s)

La réponse présente la forme d'une sinusoïde amortie de pulsation ω_p (c'est la pseudo pulsation ou pulsation propre amortie (rad/s)), de pseudo période :

$$T_p = \frac{2.\pi}{\omega_p} = \frac{2.\pi}{\omega_0.\sqrt{1 - m^2}}\,.$$

Remarque :

La réponse indicielle d'un système de second ordre tend vers la valeur finale K.E, sauf que le comportement du système à faible amortissement est oscillant, il présente un dépassement, contrairement à celui du système à fort amortissement où la valeur finale est atteinte sans jamais la dépasser. Cette propriété du non dépassement est exigée dans certains asservissements où le dépassement est interdit.

6.7 Temps de réponse (à 5%) (ou temps de stabilisation):

Comme on a vu pour le système de premier ordre, le système de second ordre est caractérisé par le temps de réponse à 5% ou temps de stabilisation qui peut être déterminé par deux méthodes :

6.7.1 Méthode analytique :

- *Si le régime est pseudopériodique (m<1), le temps de réponse (à 5%) est déterminé par la relation :*

$$\boxed{tr(5\%) = \frac{3}{m.\omega_0}}$$

- *Si le régime est apériodique (m>1), le temps de réponse (à 5%) est déterminé par la relation :*

$$\boxed{tr(5\%) = \frac{6.m}{\omega_0}}$$

6.7.2 Méthode graphique :

A partir de l'abaque du temps de réponse à 5% en fonction du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre su système non amorti d'un système du deuxième ordre :

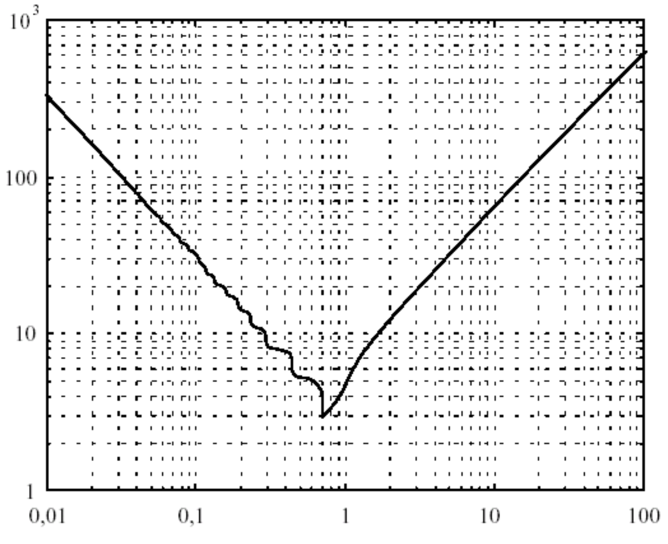


Fig 6.3 Courbe du tr(5%) d'un système de second ordre
$tr(5\%).\omega_0$ en fonction de m

Démarche :

Pour une pulsation naturelle ω_0 *fixée, le temps de réponse est fonction du facteur d'amortissement du système.*

En effet, pour un système très peu amorti, le régime transitoire dure longtemps à cause de la lente décroissance de l'amplitude des oscillations, et pour un système très amorti, il dure longtemps, à cause cette fois de la lenteur de son départ.

Sur la figure précédente, on voit que le temps de réponse à 5% est minimal pour un coefficient d'amortissement de 0.7 environ.

A partir d'un facteur d'amortissement m donné (en abscisse), on projette sur la courbe puis sur l'axe des ordonnés afin de déterminer son image tr(5%).ω_0.
Il suffit alors de diviser par la pulsation propre non amortie ω_0 *pour déduire tr(5%).*