ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES

1 - INTRODUCTION :

On veut caractériser les systèmes d'une part par leur fonction de transfert et, d'autre part, par leur comportement. Ce dernier peut être mis en évidence par la réponse s(t) à une entrée donnée. Classiquement, on peut apprendre beaucoup des systèmes en observant la réponse aux entrées suivantes :

- l'impulsion —> réponse impulsionnelle
- l'échelon —> réponse indicielle
- la rampe
- la sinusoïde —> réponse fréquentielle

Nous étudierons au chapitre suivant les réponses fréquentielles des systèmes.

1.1 - L'échelon :

C'est l'entrée la plus utilisée de toutes. Elle correspond à un changement brusque de consigne. Cette fonction est définie par :

$e(t) = a \quad \forall\ t > 0 \quad$ et $\quad e(t) = 0 \quad \forall\ t \leq 0$

Sa transformée de Laplace est $E(P) = \frac{a}{P}$

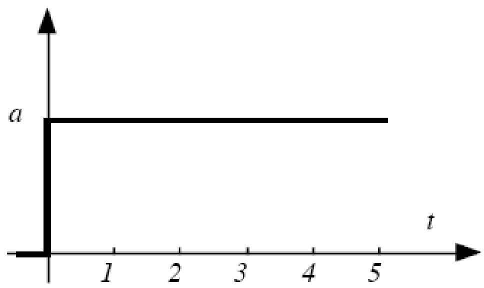


Figure 1 : la fonction échelon

On appelle **échelon unitaire** la fonction dont la TL est $\frac{1}{P}$ (a = 1). On le note souvent u(t).

On appelle **réponse indicielle** la réponse à l'échelon unité.

2.1 – La rampe :

La rampe de pente *a* est la primitive de l'échelon de hauteur *a*. Elle est définie par :

$e(t) = a\,t \quad \forall\ t > 0 \quad$ et $\quad e(t) = 0 \quad \forall\ t \leq 0$

Sa transformée de Laplace est $E(P) = \frac{a}{P^2}$

On peut définir également la rampe unitaire : la rampe de pente 1

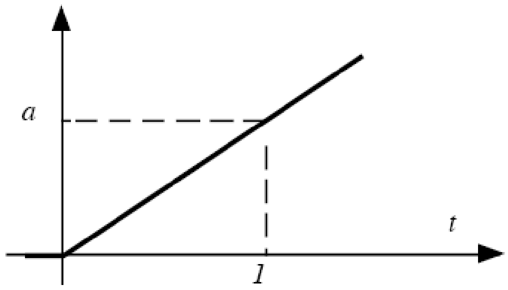


Figure 2 : la fonction rampe de pente a

3.1 – L'impulsion :

L'impulsion unité est, dans l'espace des distributions, la dérivée de l'échelon unitaire. On l'appelle aussi impulsion de Dirac. On la note généralement $\delta(t)$. Sa transformée de Laplace est TL[δ (t)] = 1

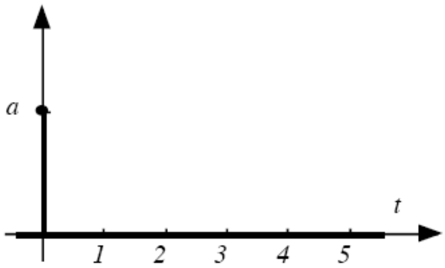


Figure 3 : La fonction impulsion de dirac de poids a

2 - SYSTEME DU PREMIER ORDRE :

1.1 - Définition :

C'est un système décrit par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

$$s(t) + \tau.\frac{ds(t)}{dt} = k.e(t) \qquad s(0)=s_0$$

La fonction de transfert est déterminée pour des conditions initiales nulles (s_0=0).

Par transformation de Laplace, on trouve:

$$S(p) + \tau.p.S(p) = k.E(p) \qquad \Rightarrow \qquad S(p).[1+\tau.p] = k.E(p)$$

On trouve alors la fonction de transfert suivante:

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau.p}$$

C'est la forme canonique de la fonction de transfert d'un système du premier ordre.

avec:

- K : **Gain statique**.
- τ : **Constante de temps**.

Le schéma fonctionnel d'un système de premier ordre est le suivant:

$$E(p \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1+\tau.p}} \longrightarrow S(p$$

2.2 - Réponse à une impulsion de Dirac (Réponse impulsionnelle):

On étudie la réponse s(t) du système à une entrée e(t) = δ(t) (réponse impulsionnelle)

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow S(p) = G(p)E(p) \Rightarrow S(p) = \frac{K}{1+\tau p} = \frac{K}{\tau}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$$

A partir de la table des transformées de Laplace

$$S(p) = \frac{1}{p+a} \Rightarrow s(t) = Exp(-at) \quad \text{Donc :} \quad \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}} \Rightarrow Exp(-\frac{t}{\tau})$$

$\boxed{s(t) = \frac{K}{\tau}Exp(-\frac{t}{\tau})}$ réponse impulsionnelle du système 1er ordre

* pour t = 0 =====> $s(0) = \frac{K}{\tau}$; * pour t ------> ∞ =====> s(t) ------> 0

* pour t = τ =====> $s(\tau) = \frac{K}{\tau}e^{-1} = 0{,}37\frac{K}{\tau}$ (avec e = 2,72)

* $s'(t) = -\frac{K}{\tau^2}Exp(-\frac{t}{\tau})$ < 0 pour tout t > 0

	0		+∞
s'(t)		—	
s(t)	K/τ	↘	0

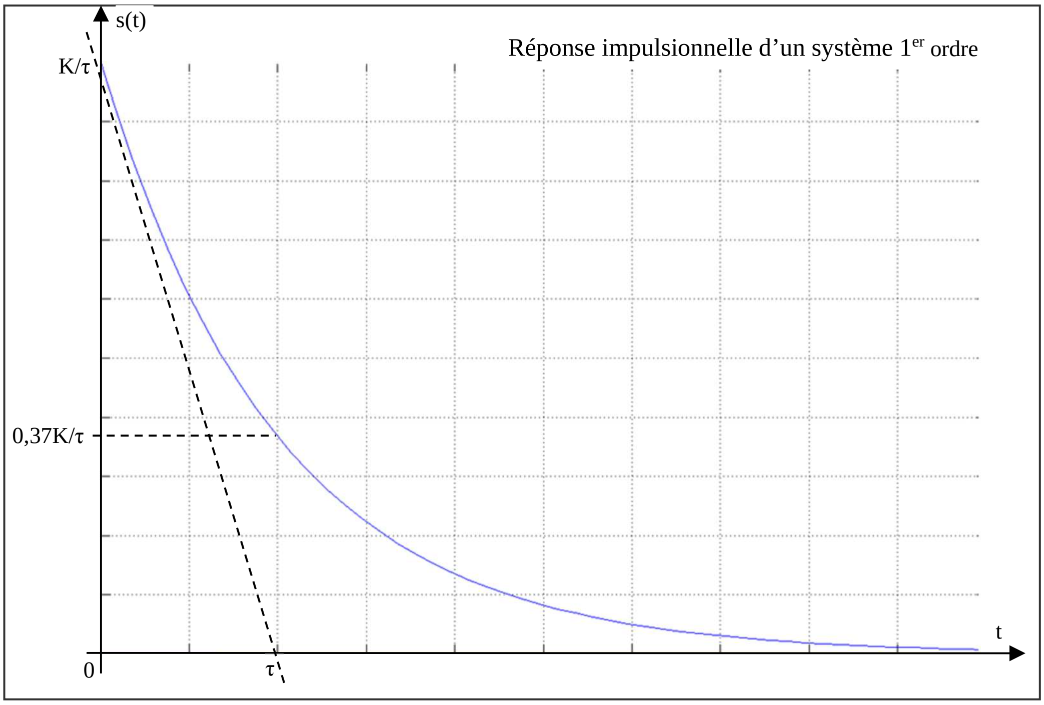


Figure 4 : Réponse d'un premier ordre à une impulsion

2.3 - Réponse à un échelon de position :

$e(t) = E_0u(t) \Longrightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$

$S(p) = G(p)\,E(p) = \frac{K}{1+\tau p} * \frac{E_0}{p} \Longrightarrow S(p) = \frac{KE_0}{p(1+\tau p)} = KE_0 * \frac{\frac{1}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})}$

D'après la table de Laplace : $S(p) = \frac{a}{p(p+a)} \xrightarrow{TL^{-1}} s(t) = [1 - Exp(-at)]u(t)$

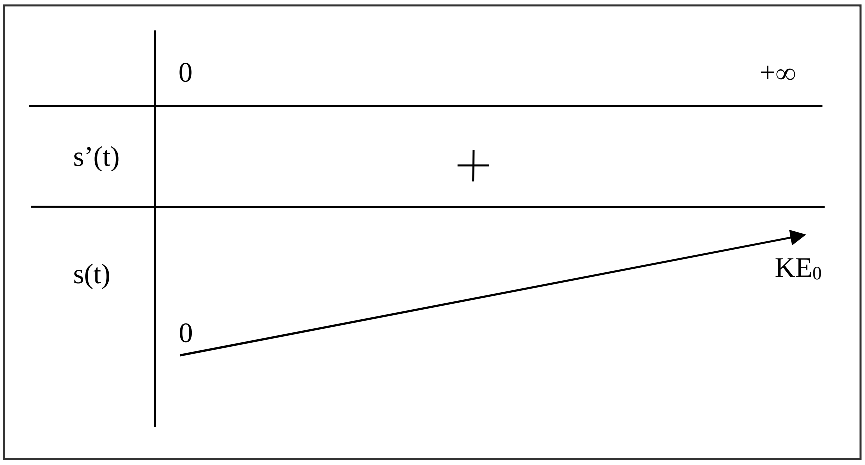
$$\boxed{s(t) = KE_0\left(1 - Exp(-\frac{t}{\tau})\right)}$$

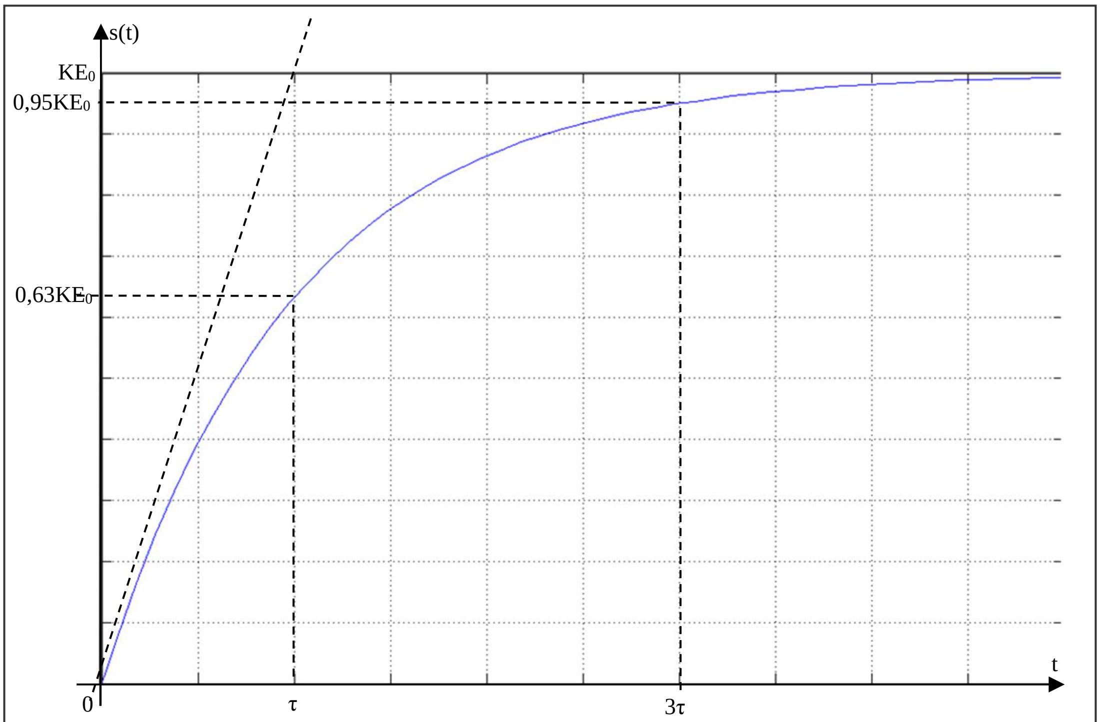
* pour $t = 0 \Longrightarrow s(0) = 0$

* pour $t = \tau \Longrightarrow s(\tau) = KE_0(1-\frac{1}{e}) = 0{,}63KE_0$

* pour t ------> ∞ $\Longrightarrow$ s(t) ------> KE_0

* $s'(t) = \frac{KE_0}{\tau}Exp(-\frac{t}{\tau}) > 0$ pour t > 0





Réponse à un échelon d'un système 1er

Figure 5 : Réponse d'un premier ordre à un échelon

On calcule le temps de réponse t_r à 5% prés : Le temps de réponse à 5% est obtenue lorsque la courbe s(t) atteint 95% de sa valeur finale.

$$s(tr) = 0.95\, s(\infty) = 0.95KE_0$$

$$KE_0\left(1 - Exp(-\frac{t_r}{\tau})\right) = 0{,}95KE_0 \Longrightarrow 1 - Exp(-\frac{t_r}{\tau}) = 0{,}95$$

$$Exp(-\frac{t_r}{\tau}) = 0{,}05 \Longrightarrow -\frac{t_r}{\tau} = Log\,0{,}05 \cong -3 \qquad \boxed{t_{r5\%} = 3.\tau}$$

2.4 - Réponse à une rampe:

e(t) = v(t) = E_0t ═══> $E(p)=\frac{E_0}{p^2}$

$$S(p)=G(p)E(p)=\frac{K}{1+\tau p}*\frac{E_0}{p^2} \quad = \quad KE_0*\frac{\frac{1}{\tau}}{(p+\frac{1}{\tau})p^2}$$

D'après la table de Laplace $S(p)=\frac{a}{p^2(p+a)} \xrightarrow{TL^{-1}} s(t)=\left[t-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}Exp(-at)\right]u(t)$

$\boxed{s(t)=KE_0\left(t-\tau+\tau Exp(-\frac{t}{\tau})\right)}$ Réponse à une rampe

* pour t = 0 ═══> s(0) = 0 ; pour t ------> ∞ ═══> s(t) ------> ∞

* pour t = τ ═══> $s(\tau)=0{,}37KE_0\tau$

$$s'(t)=KE_0\left(1-Exp(-\frac{t}{\tau})\right)$$

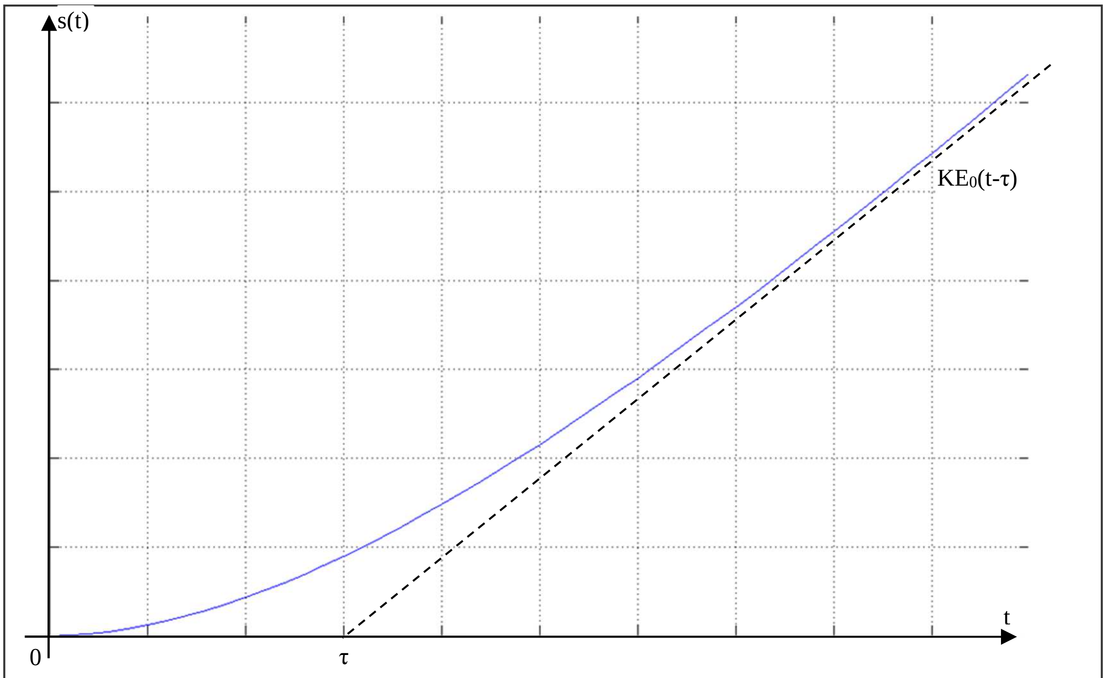
$$s'(t)=0\Rightarrow 1-Exp(-\frac{t}{\tau})=0 \quad \Rightarrow Exp(-\frac{t}{\tau})=1 \quad \Rightarrow -\frac{t}{\tau}=0 \quad \Rightarrow t=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{s(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}KE_0\,\frac{t-\tau+\tau Exp(\frac{-t}{\tau})}{t} \;=\; \lim_{t\to\infty}\left[KE_0-\frac{KE_0\tau}{t}+KE_0\tau\frac{Exp(\frac{-t}{\tau})}{t}\right] \;=\; KE_0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(s(t)-KE_0t\right)=\lim_{t\to\infty}KE_0\left(t-\tau+\tau Exp(\frac{-t}{\tau})-t\right)=\lim_{t\to\infty}KE_0\left(-\tau+\tau Exp(\frac{-t}{\tau})\right) = -KE_0\,\tau$$

Donc la droite $KE_0(t-\tau)$ est une asymptote à l'infini.

	0	$+\infty$
$s'(t)$	+	
$s(t)$	0 ↗	$+\infty$



Réponse à une rampe d'un système 1er ordre

Figure 5 : Réponse d'un premier ordre à une rampe

3 - SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE :

3.1 - Définition :

C'est un système décrit par une équation différentielle du second degré à coefficients constants.

L'équation la plus rencontrée est du type :

$$\boxed{s(t)+\frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}=Ke(t)}$$

Avec K : gain statique

m : coefficient d'amortissement et ω_0 : pulsation propre

On suppose que les conditions initiales sont nulles, en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle :

$$S(p)+\frac{2m}{\omega_0}pS(p)+\frac{1}{\omega_0^2}p^2S(p)=KE(p) \quad \Rightarrow (1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2)S(p)=KE(p)$$

$$\Rightarrow G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

$$\boxed{G(p)=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2}}$$

est la forme canonique de la fonction de transfert d'un système de second ordre.

3.2 – Réponse à un échelon :

$e(t) = E_0u(t)$; $E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$S(p)=G(p)E(p)=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2}*\frac{E_0}{p}$$

Il faut étudier : $D(p)=p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2 \;=(p-p_1)(p-p_2)$

$$\Delta' = m^2\omega_0^2-\omega_0^2=\omega_0^2(m^2-1)$$

Trois cas sont à considérer :

a) $\Delta' > 0$ ═══> $m^2-1>0$ ═══> $\boxed{m > 1}$ <u>Système hyper amorti</u>.

$p_1=-m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}$; $p_2=-m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}$

Avec $p_1p_2=\omega_0^2$ et $p_1+p_2=-2m\omega_0$

On a alors : $S(p)=\frac{K\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$

D'après la table de Laplace :

$$S(p)=\frac{ab}{p(p+a)(p+b)} \xrightarrow{TL^{-1}} s(t)=\left[1+\frac{b}{a-b}Exp(-at)-\frac{a}{a-b}Exp(-bt)\right]u(t)$$

On pose a = -p1 et b = -p2

$$s(t)=KE_0\left[1+\frac{m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}}{-2\omega_0\sqrt{m^2-1}}Exp\left(\left(-m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t\right)\right.$$

$$\left.-\frac{m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}}{-2\omega_0\sqrt{m^2-1}}Exp\left(\left(-m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t\right)\right]u(t)$$

$$\boxed{s(t)=KE_0\left[1-\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}Exp\left(-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})t\right)+\frac{m-\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}Exp\left(-\omega_0(m+\sqrt{m^2-1})t\right)\right]u(t)}$$

* pour t = 0 ═══> $s(0)=KE_0\left(1-\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}+\frac{m-\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}\right)$

$$=KE_0\left(1+\frac{-m-\sqrt{m^2-1}+m-\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}\right)$$

$=KE_0(1-1)=0$ ═══> $s(0)=0$

* pour $t\to\infty$ ═══> $s(t)\to KE_0$

$$s'(t)=KE_0\left[-\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}\left[-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})\right]Exp\left(-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})t\right)+\right.$$

$$\left.\frac{m-\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}\left[-\omega_0\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)\right]Exp\left(-\omega_0(m+\sqrt{m^2-1})t\right)\right]$$

$$s'(t)=0\Rightarrow-\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)\left[-\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)\right]Exp\left(-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})t\right)-$$

$$\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)Exp\left(-\omega_0(m+\sqrt{m^2-1})t\right)=0$$

$$\Rightarrow(m^2-m^2+1)Exp\left(-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})t\right)-(m^2-m^2+1)Exp\left(-\omega_0(m+\sqrt{m^2-1})t\right)=0$$

$$\Rightarrow Exp\left(-\omega_0(m-\sqrt{m^2-1})t\right)=Exp\left(-\omega_0(m+\sqrt{m^2-1})t\right)$$

$$\Rightarrow\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)*t=\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)*t$$

═══> <u>t = 0</u>

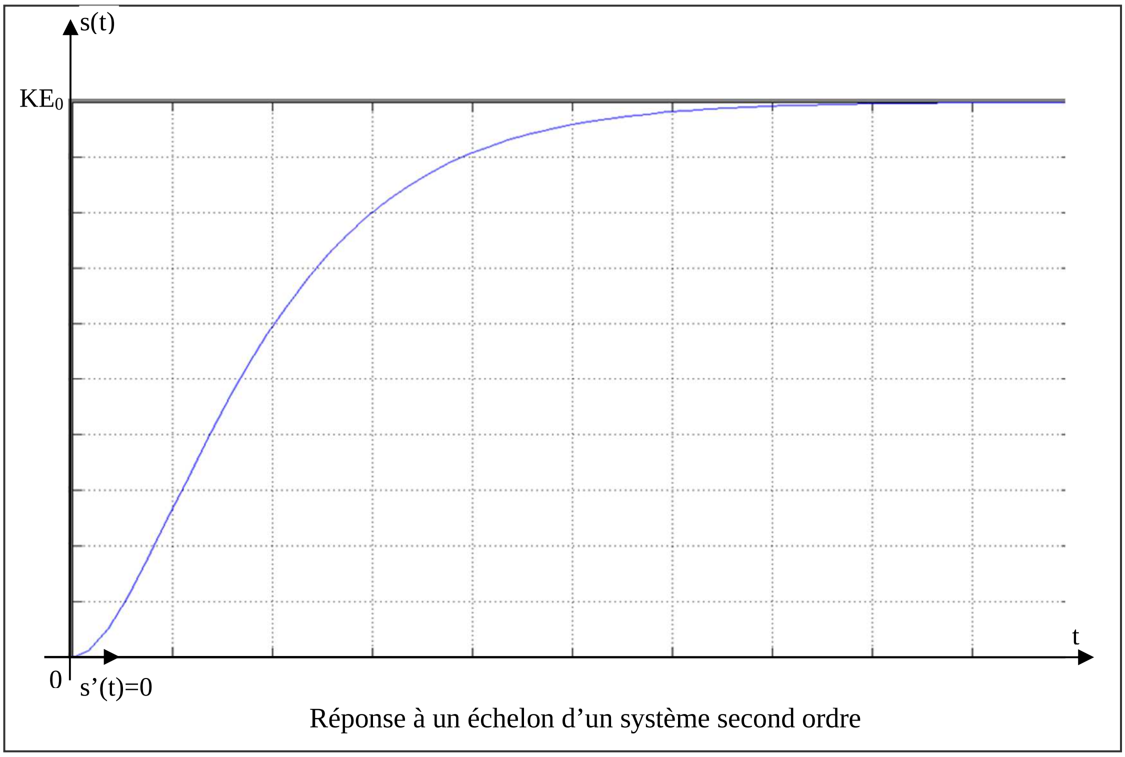


Figure 6 : Réponse un échelon d'un second ordre à fort amortissement

b) $\Delta' = 0$ ═════> $\boxed{m = 1}$ <u>Système hyper amorti</u>.

$D(p) = p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2$ possède une racine réelle double

$p_0 = -m\omega_0 = -\omega_0$; puisque m = 1 donc $D(p) = (p+\omega_0)^2$

$$S(p) = \frac{KE_0\omega_0^2}{p(p+\omega_0)^2} = KE_0 \frac{\omega_0^2}{p(p+\omega_0)^2}$$

D'après la table de Laplace :

$$S(p) = \frac{a^2}{p(p+a)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} s(t) = [1 - Exp(-at) - atExp(-at)]u(t)$$

$s(t) = KE_0(1 - Exp(-\omega_0 t) - \omega_0 tExp(-\omega_0 t))$ ═════> $\boxed{s(t) = KE_0 - KE_0(1+\omega_0 t)Exp(-\omega_0 t)}$

* pour t = 0 ═════> s(0) = 0

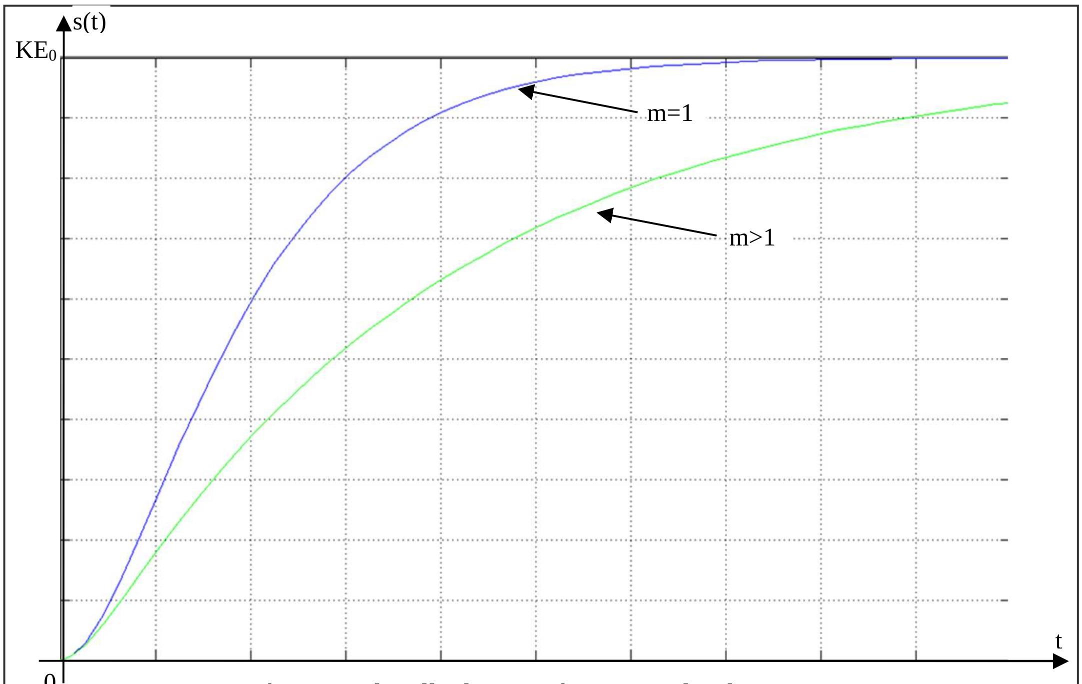
* pour t ------> ∞ $\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} \frac{pKE_0\omega_0^2}{p(p+\omega_0)^2} = \lim_{p\to 0} \frac{KE_0\omega_0^2}{(p+\omega_0)^2} = KE_0$

* $s'(t) = -KE_0\omega_0 Exp(-\omega_0 t) + KE_0(1+\omega_0 t)\omega_0 Exp(-\omega_0 t)$

$$= KE_0\omega_0 Exp(-\omega_0 t)(1+\omega_0 t - 1) = KE_0\omega_0^2 t Exp(-\omega_0 t)$$

s'(t) = 0 $\Longrightarrow$ t = 0

	0	$+\infty$
s'(t)	+	
s(t)	0 $\nearrow$	KE_0



Réponse indicielle d'un système second ordre $m \geq 1$

Figure 7 : Réponse à un échelon d'un second ordre

Rq : La réponse à un échelon d'un système de second ordre est plus rapide pour m très proche de 1.

c) $\Delta' < 0 \Longrightarrow$ $\boxed{0 < m < 1}$ <u>Système oscillatoire amorti</u>.

$\Delta' = -\omega_0^2(1-m^2)$; $D(p) = p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2$ possède deux racines complexes

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} = -\omega_0\left[m - j\sqrt{1-m^2}\right] \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2} = -\omega_0\left[m + j\sqrt{1-m^2}\right] \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} p_1 p_2 = \omega_0^2 \\ p_1 + p_2 = -2m\omega_0 \end{cases}$$

D'après la table de Laplace :

$$S(p)=\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}\xrightarrow{TL^{-1}} s(t)=\left[1+\frac{b}{a-b}Exp(-at)-\frac{a}{a-b}Exp(-bt)\right]u(t)$$

On pose a = -p1 et b = -p2

$$s(t)=KE_0\left[1+\frac{m\omega_0+j\omega_0\sqrt{m^2-1}}{-2j\omega_0\sqrt{m^2-1}}Exp\left(\left(-m\omega_0+j\omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t\right)\right.$$

$$\left.-\frac{m\omega_0-j\omega_0\sqrt{m^2-1}}{-2j\omega_0\sqrt{m^2-1}}Exp\left(\left(-m\omega_0-j\omega_0\sqrt{m^2-1}\right)t\right)\right]u(t)$$

$$s(t)=\left[KE_0+\left(-\frac{KE_0}{2}+j\frac{KE_0m}{2\sqrt{1-m^2}}\right)Exp\left(-\omega_0(m-j\sqrt{1-m^2})t\right)\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{KE_0}{2}-j\frac{KE_0m}{2\sqrt{1-m^2}}\right)Exp\left(-\omega_0(m+j\sqrt{1-m^2})t\right)\right]u(t)$$

$$=KE_0u(t)+\left[-\frac{KE_0}{2}Exp\left(+\omega_0j\sqrt{1-m^2}t\right)+j\frac{KE_0m}{2\sqrt{1-m^2}}Exp\left(+\omega_0j\sqrt{1-m^2}t\right)-\frac{KE_0}{2}Exp\left(-\omega_0j\sqrt{1-m^2}t\right)\right.$$

$$\left.-j\frac{KE_0m}{2\sqrt{1-m^2}}Exp\left(-\omega_0j\sqrt{1-m^2}t\right)\right]Exp(-\omega_0mt)u(t)$$

$$\Rightarrow s(t)=KE_0u(t)+\left[-\frac{KE_0}{2}\left(Exp\left(+\omega_0j\sqrt{1-m^2}t\right)+Exp\left(-\omega_0j\sqrt{1-m^2}t\right)\right)\right.$$

$$\left.+j\frac{KE_0m}{2\sqrt{1-m^2}}\left(Exp\left(+\omega_0j\sqrt{1-m^2}t\right)-Exp\left(-\omega_0j\sqrt{1-m^2}t\right)\right)\right]Exp(-\omega_0mt)u(t)$$

$$s(t)=KE_0u(t)+\left[-\frac{KE_0}{2}\left(2Cos\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right)+j\frac{KE_0m}{2\sqrt{1-m^2}}\left(2jSin\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right)\right]Exp(-\omega_0mt)u(t)$$

$$=\left[KE_0-KE_0\left(Cos\omega_0\sqrt{1-m^2}t+\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right)Exp(-\omega_0mt)\right]u(t)$$

$$\boxed{s(t)=\left[KE_0-KE_0Exp(-\omega_0mt)\left(Cos\omega_0\sqrt{1-m^2}t+\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right)\right]u(t)}$$

* pour t = 0 ====> s(0) = 0

* pour t ------> ∞

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} \frac{pKE_0\omega_0^2}{p(p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2)} = \lim_{p\to 0} \frac{KE_0\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = KE_0$$

$$* \; s'(t) = KE_0\omega_0 mExp(-\omega_0 mt)\left(Cos\omega_0\sqrt{1-m^2}t + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right)$$

$$-KE_0 Exp(-\omega_0 mt)\left(-\omega_0\sqrt{1-m^2}Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\omega_0\sqrt{1-m^2}Cos\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right)$$

$$= KE_0\omega_0 Exp(-\omega_0 mt)\Big[mCos\omega_0\sqrt{1-m^2}t + \frac{m^2}{\sqrt{1-m^2}}Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t +$$

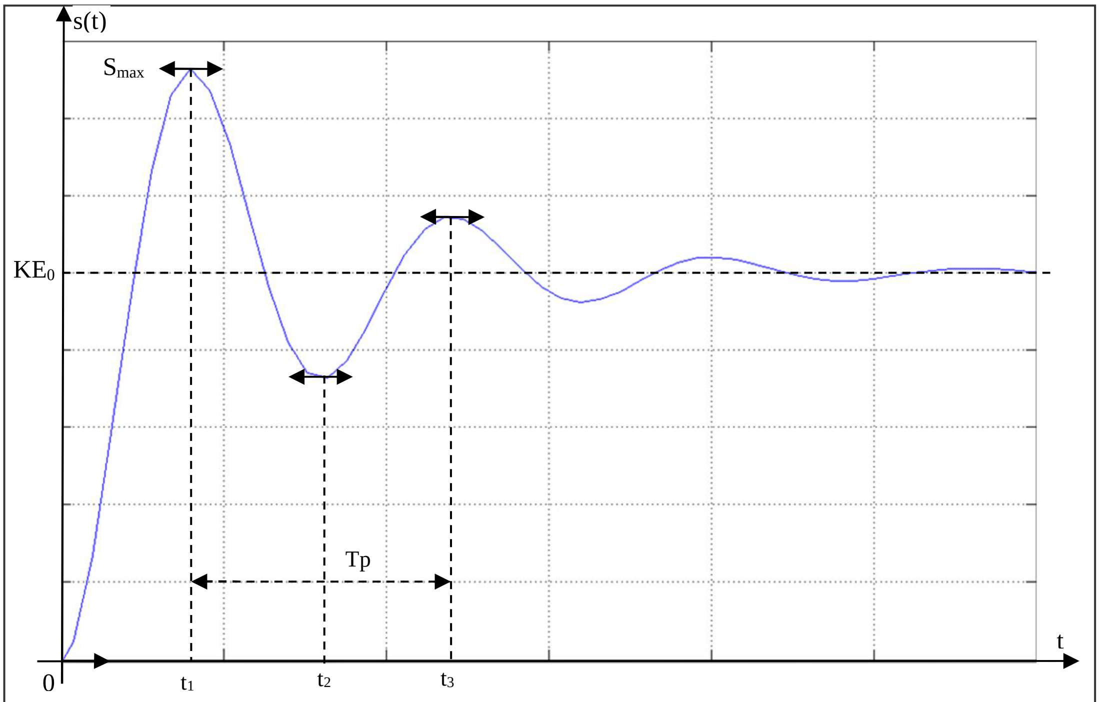
$$\sqrt{1-m^2}Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t - mCos\omega_0\sqrt{1-m^2}t\Big]$$

$$= KE_0\omega_0 Exp(-\omega_0 mt)\left[\left(\frac{m^2}{\sqrt{1-m^2}} + \sqrt{1-m^2}\right)Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right]$$

$$= KE_0\omega_0 Exp(-\omega_0 mt)\left(\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\right)Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t$$

s'(t) = 0 $\Longrightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t = 0$ $\Longrightarrow$ $Sin\omega_0\sqrt{1-m^2}t = 0$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\omega_0\sqrt{1-m^2}t = k\pi}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{t_e = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}}$ est le temps extremum



$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} \quad t_2 = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} \quad t_3 = \frac{3\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$

Réponse à un échelon d'un système second ordre (m < 1)

Figure 7 : Réponse à un échelon d'un second ordre à faible amortissement

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$: Pseudo période

$$D\% = 100\frac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty}$$: Dépassement

$$s_{max} = KE_0 - KE_0 Exp(-\omega_0 m t_e)(Cos\pi + Sin\pi) \quad \text{avec} \quad t_e = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$

$$\boxed{s_{max} = KE_0 + KE_0 Exp\left(-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right)}$$

$$D\% = 100\frac{KE_0 + KE_0 Exp\left(-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right) - KE_0}{KE_0} \Longrightarrow \boxed{D\% = 100 Exp\left(-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right)}$$

d) m = 0 $\Longrightarrow \Delta' = -\omega_0^2$

$$D(p) = p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = p^2 + \omega_0^2 = (p - j\omega_0)(p + j\omega_0)$$

D'après la table de Laplace :

$$S(p)=\frac{ab}{p(p+a)(p+b)} \xrightarrow{TL^{-1}} s(t)=\left[1+\frac{b}{a-b}Exp(-at)-\frac{a}{a-b}Exp(-bt)\right]u(t)$$

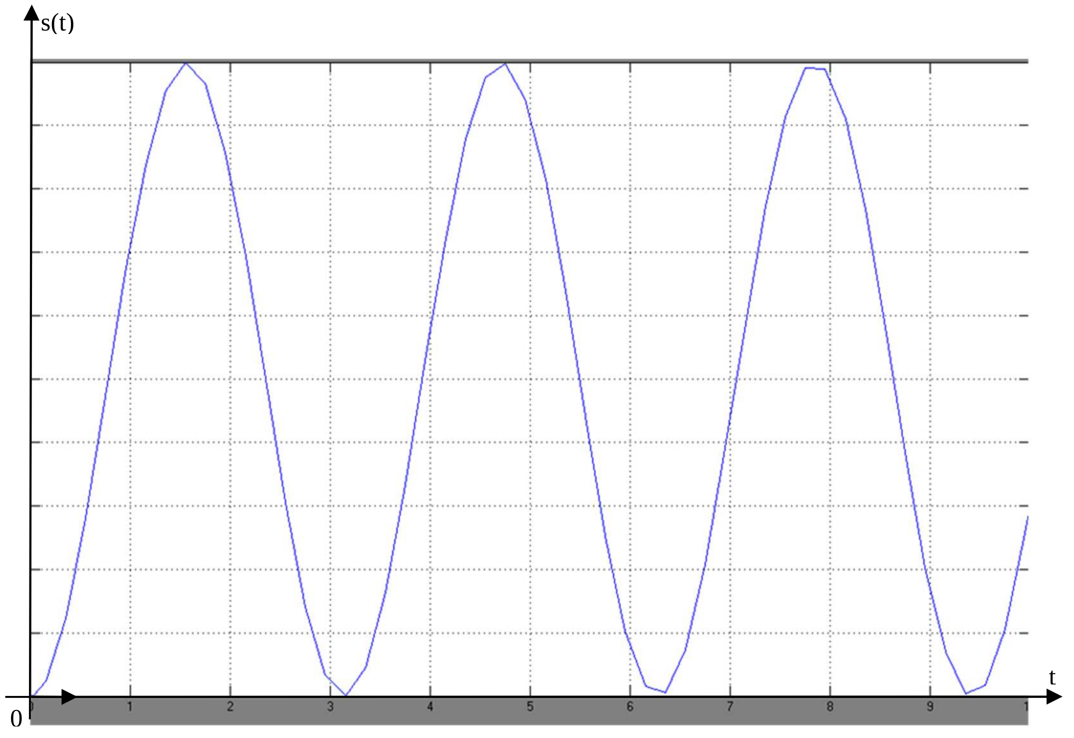
On pose a = -jω_0 et b = jω_0

$$s(t)=KE_0\left(1+\frac{j\omega_0}{-2j\omega_0}Exp(j\omega_0 t)-\frac{-j\omega_0}{-2j\omega_0}Exp(-j\omega_0 t)\right)$$

$$s(t)=KE_0\left(1-\frac{1}{2}Exp(j\omega_0 t)-\frac{1}{2}Exp(-j\omega_0 t)\right)$$

$$=KE_0\left[1-\frac{1}{2}\left(Exp(j\omega_0 t)+Exp(-j\omega_0 t)\right)\right]=KE_0\left(1-\frac{1}{2}2Cos\,\omega_0 t\right)$$

$$\boxed{s(t)=KE_0\left(1-Cos\,\omega_0 t\right)}$$



Réponse à un échelon d'un système second ordre (m = 0)

Figure 8: Réponse indicielle d'un second ordre à amortissement nul