

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE EN GÉNIE DES SYSTÈMES INDUSTRIELS

CONTRÔLE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS



Cours de deuxième année ingénieur
Ingénierie Système – IS2



Mars 2012
Benoît Marx
Maître de conférences
Centre de Recherche en Automatique de Nancy

Plan de la première partie du cours

1 Outils théoriques

- Signaux et systèmes
- Transformation de Laplace
- Fonction de transfert
- Réponse temporelle d'un système linéaire

2 Étude des systèmes du premier ordre

- Définition et présentation des systèmes du 1^{er} ordre
- Réponses temporelles des systèmes du 1^{er} ordre
- Réponses fréquentielles des systèmes du 1^{er} ordre
- Extensions

3 Systèmes du deuxième ordre

- Définition et présentation des systèmes d'ordre 2
- Réponses temporelles des systèmes d'ordre 2
- Réponses fréquentielles d'un système d'ordre 2

4 Systèmes d'ordre supérieur à 2

1.1 Signaux et systèmes

Qu'est ce qu'un système (physique, chimique, ...) ?



- un objet défini par une frontière, des variables d'entrée et de sortie
- un ensemble d'éléments reliés par des liens fonctionnels

On représente un système par un modèle ...

- qui est un ensemble de relations mathématiques entre des grandeurs physiques,
- qui **approche** le comportement réel du système,
- dont la complexité dépend de l'utilisation.

1.1 Signaux et systèmes

Signal

Grandeur physique mesurable porteuse d'une information

→ position, vitesse, température, ...

Quelques caractéristiques de signaux :

- monodimensionnel / vecteur
- entrée / sortie du système
- mesuré / non mesuré
- contrôlable / incontrôlable
- dépendant du temps, de l'espace, de la fréquence, ...
- temps continu ($x(t)$ connu $\forall t$) ou discret ($x(t)$ connu pour $t = kT$, $k \in \mathbb{N}$)



1.1 Systèmes linéaires, invariants dans le temps et causaux

Système linéaire

Le système Σ est linéaire si, pour toutes constantes α et β , et tous signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a la propriété suivante :

- si le signal $x_1(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y_1(t)$
- si le signal $x_2(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y_2(t)$
- alors le signal $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Système invariant dans le temps

Le système Σ est invariant dans le temps si :

- le signal $x(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t)$
- le signal $x(t - \tau)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t - \tau)$, pour tout τ

Système causal

L'effet (variation de la sortie) suit la cause (variation de l'entrée) dans le temps



1.1 Systèmes linéaires, invariants dans le temps et causaux

Eq. diff. linéaire à coeff. constants \leftrightarrow syst. linéaire invariant

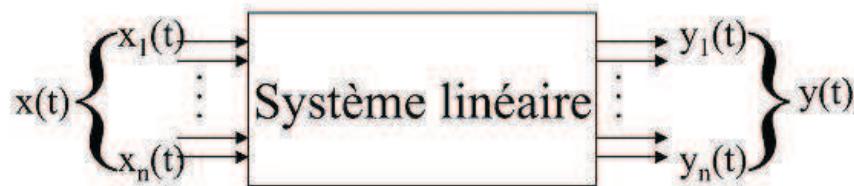
Un système d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec $n \geq m$:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

est linéaire, invariant dans le temps et causal.

Principe de superposition :

La réponse à $x(t) = \sum_{i=0}^n x_i(t)$ est $y(t) = \sum_{i=0}^n y_i(t)$ où $y_i(t)$ est la réponse à $x_i(t)$.



1.1 Linéarisation de systèmes dynamiques

Malheureusement ...

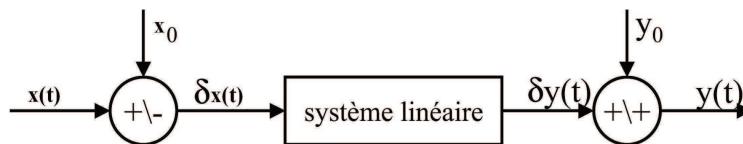
... aucun système n'est réellement linéaire

→ raideur d'un ressort en fonction de l'allongement

Un modèle linéaire :

- est une approximation valable autour d'un certain point de fonctionnement
- peut se déduire d'un modèle non linéaire par linéarisation : Si $y = f(x)$, alors on peut écrire :

$$\delta y = \left(\frac{df}{dx}(x) \right)_{x=x_0} \delta x$$

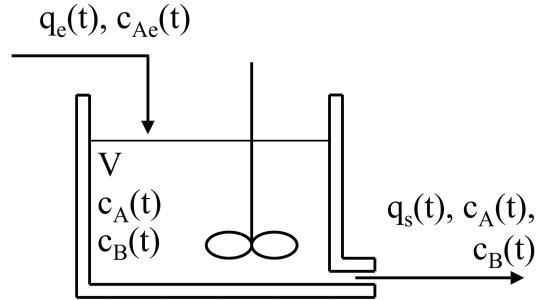


→ Mise en équation d'un pendule libre, et avec un couple.

1.1 Exemple : un réacteur chimique

- Hypothèses :

- V et q constants
- réaction $A \leftrightarrow B$
- vitesses de réaction :
 - $A \rightarrow B : k_1 = k_{01} e^{-\frac{E_{a1}}{RT}}$
 - $B \rightarrow A : k_2 = k_{02} e^{-\frac{E_{a2}}{RT}}$



- Pour $c_{Ae}(t)$ variant peu autour de c_{Ae0} , le réacteur est décrit par :

$$V\delta\dot{c}_A(t) + (q_s + Vk_1)\delta c_A(t) = q_e\delta c_{Ae}(t) + Vk_2\delta c_B(t)$$
$$V\delta\dot{c}_B(t) + (q_s + Vk_2)\delta c_B(t) = Vk_1\delta c_A(t)$$

- On peut le représenter par un système **linéaire causal invariant** :

- entrée : $\delta c_{Ae}(t) = c_{Ae}(t) - c_{Ae0}$
- sortie : $\delta c_A(t) = c_A(t) - c_{A0}$ ou $\delta c_B(t) = c_B(t) - c_{B0}$
- paramètres : V , q_e , k_1 et k_2 constants

1.2 Transformation de Laplace

Rappels. Définition et propriétés de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt$, $p \in \mathbb{C}$
- linéarité : $\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = X_1(p) + X_2(p)$
- dérivation : $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - x(0)$
- intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \frac{1}{p}X(p)$
- convolution : $\mathcal{L}(x(t) * y(t)) = X(p)Y(p)$
- valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$
- valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$

principal intérêt

La transformation de Laplace convertit une eq. diff. linéaire à coefficients constants en une équation polynomiale en p .

→ dans l'exemple du réacteur on peut écrire :

$$\Delta C_B(p) = \frac{\text{num}(p)}{\text{den}(p)} \Delta C_A(p) + \dots$$

→ autour d'une position d'équilibre on peut écrire : $\Delta Y(p) = \frac{\text{num}(p)}{\text{den}(p)} \Delta X(p)$

1.2 Transformation de Laplace (suite)

Rappels. Quelques transformées utiles :

- dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$
- échelon : $\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$
- exponentielle : $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$
- rampe : $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$
- cosinus : $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$
- sinus : $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

1.3 Définition d'une fonction de transfert

On suppose connaître la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système :

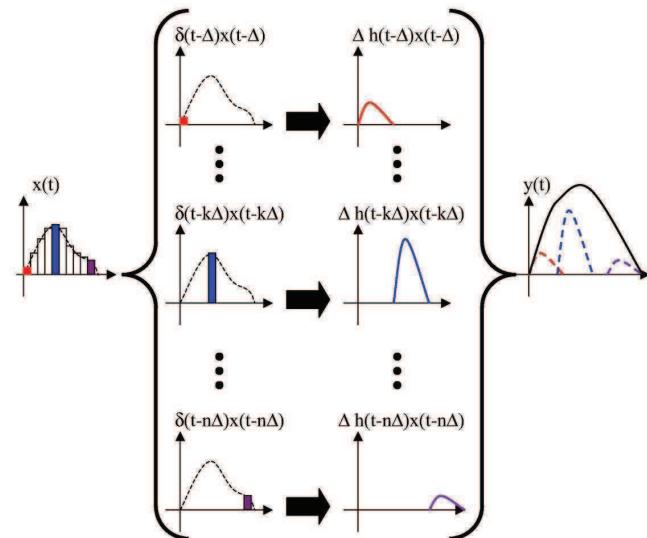
- approchons $x(t)$ par différentes impulsions de largeur Δ , retardées de $k\Delta$
- la sortie peut s'écrire :

$$y(t) = \sum_{k=0}^n \Delta h(t - k\Delta)x(k\Delta)$$

- en faisant tendre $\Delta \rightarrow 0$, on a :

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

- donc : $Y(p) = H(p)X(p)$



Fonction de transfert

La fonction de transfert décrit le comportement du système dynamique.
La fonction de transfert est donnée par la T.L. de la réponse impulsionnelle.
La fonction de transfert est définie par les coefficients de l'éq. diff.

1.3 Définition d'une fonction de transfert

La fonction de transfert s'obtient également à partir de l'équation différentielle entrée/sortie :

- On considère l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- après transformation de Laplace, on obtient :

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right) = \sum_{j=0}^m b_j \left(p^j X(p) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+) \right)$$

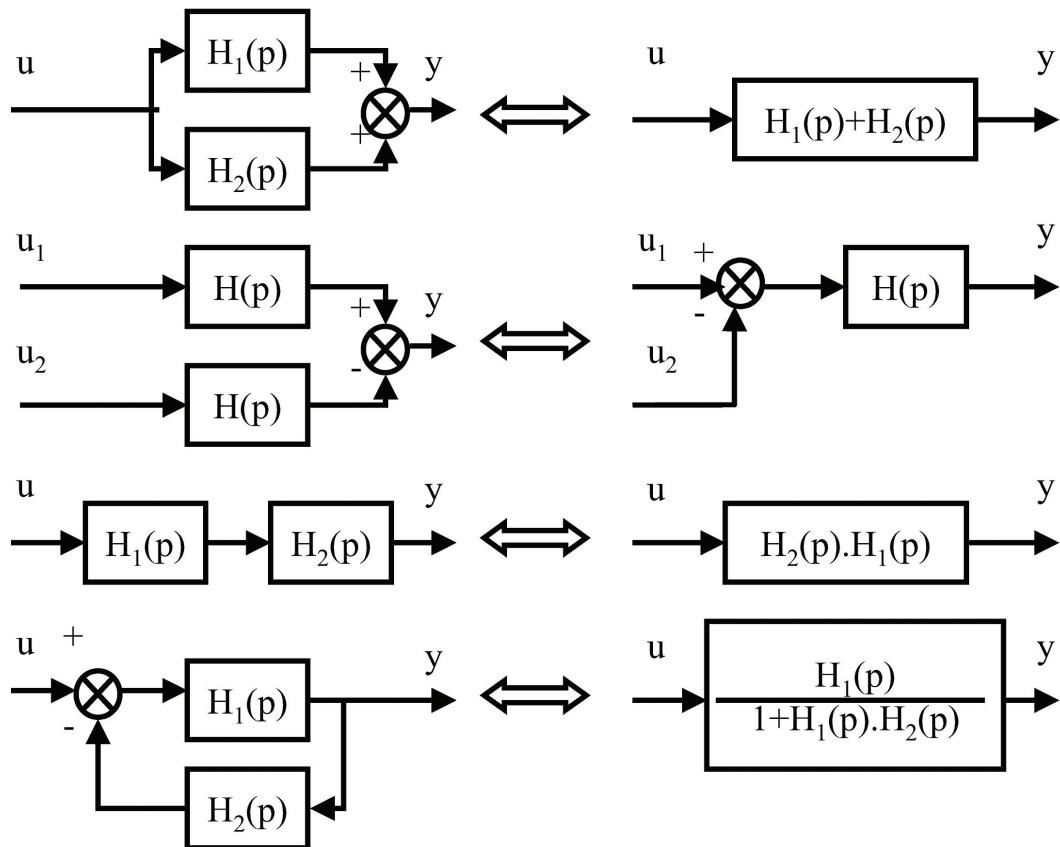
- autrement dit :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{H(p)} X(p) + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{C.I. \text{ sur } y(t) \text{ et } x(t)} - \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{j-1} b_j p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}$$

- pour des conditions initiales nulles, il vient :

$$Y(p) = H(p)X(p) \quad \text{avec} \quad H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

1.3 Fonction de transfert et algèbre des blocs



1.4 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = H(p)X(p) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Num_{k1}(p)}{Den(p)} y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Num_{k2}(p)}{Den(p)} x^{(k)}(0) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

- pôle simple réel distinct
 - réponse en exponentielle
 - convergeant si le pôle est négatif
- pôle réel multiple
 - réponse en exponentielle * puissance de t
 - convergeant si le pôle est négatif
- pôles complexes conjugués
 - coefficients complexes conjugués
 - réponse sinusoïdale

2.1 Définition et intérêt des systèmes du 1^{er} ordre

Définition

Un système du 1^{er} ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$

Vocabulaire :

- T est appelé *constante de temps* (unité : s)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Permet de modéliser un système dont la sortie :

- ... suit l'entrée avec un temps de réponse, quantifié par T
- ... amplifie l'entrée en régime permanent ($K = y(\infty)/x(\infty)$)

Exemple : réaction $A \rightarrow B$

2.2 Réponses temporelles d'un système du 1^{er} ordre

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? ($X(p) = 1$) (réponse impulsionale)
- $x(t)$ est un échelon? ($X(p) = \frac{1}{p}$) (réponse indicelle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? ($X(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$) (réponse fréquentielle)

Méthode :

Calculs de $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K}{1+Tp} X(p) \right)$ pour les différentes entrées possibles.

2.2 Réponse impulsuelle d'un système du 1^{er} ordre

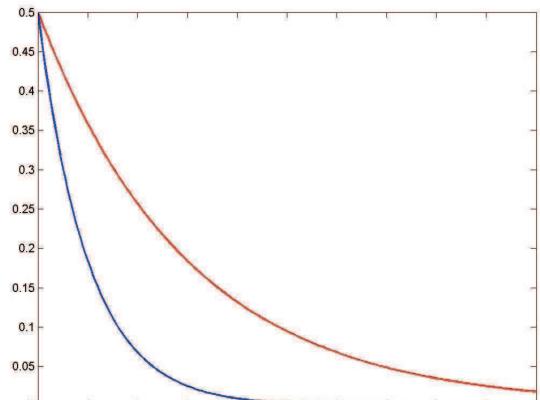
On considère une entrée impulsuelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1+Tp} 1 = \frac{K/T}{p + 1/T}$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$



en rouge : $K = 3, T = 6$

en bleu : $K = 1, T = 2$

À noter : discontinuité en $t = 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^-} = 0 \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} = K/T$

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée échelon unitaire : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{(1 + Tp)p} = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/T} \right)$$

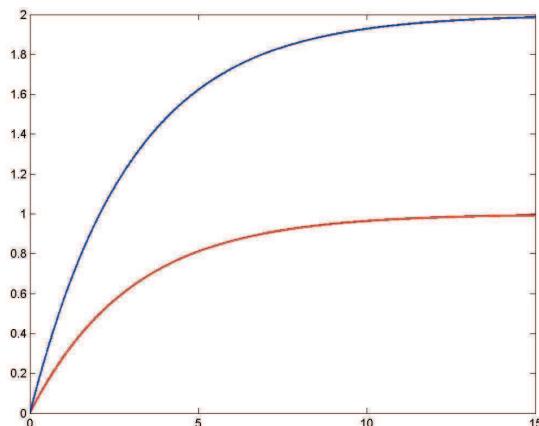
La réponse indicielle d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = K \left(1 - e^{-t/T} \right)$$

- K donne le gain statique (rapport des signaux en régime permanent)
- T quantifie la vitesse du système

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

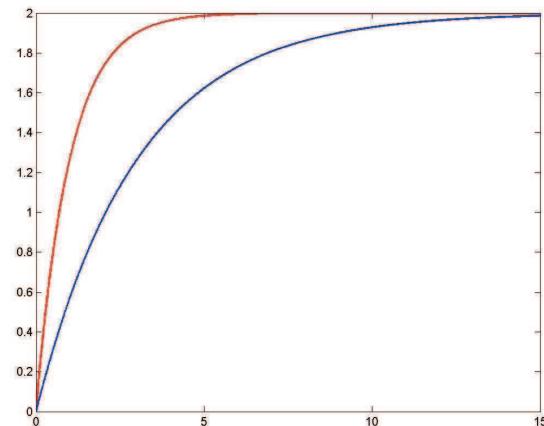
Influence du gain statique K



en rouge : $K = 1, T = 3$

en bleu : $K = 2, T = 3$

Influence du temps de réponse T



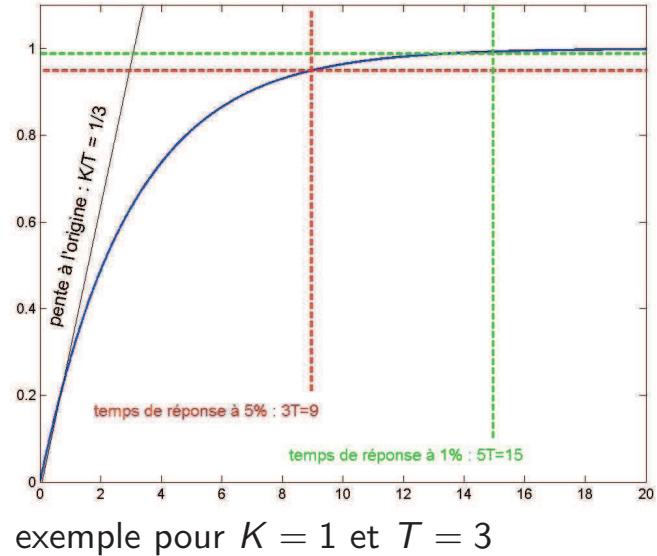
en rouge : $K = 2, T = 1$

en bleu : $K = 2, T = 3$

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

Quelques données à retenir :

- temps de réponse à 5% :
 $t_{5\%} \approx 3T$
- temps de réponse à 1% :
 $t_{1\%} \approx 5T$
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$
- valeur initiale de la pente :
 $\dot{y}(0) = K/T$



exemple pour $K = 1$ et $T = 3$

2.2 Réponse sinusoïdale d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{K}{1 + Tp} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{K}{1 + T^2 \omega^2} \left(\underbrace{\frac{T\omega}{p + 1/T}}_{\text{sinus}} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}_{\text{cosinus}} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2 + \omega^2}}_{\text{cosinus}} \right) \end{aligned}$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega KT}{1 + T^2 \omega^2} e^{-t/T}}_{\text{transitoire}} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \text{Atan}(\omega T))}_{\text{permanent}}$$

- la sortie oscille à la même fréquence ω que l'entrée
- le signal d'entrée est amplifié de $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$
- le signal d'entrée est déphasé de $\text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Atan}(\omega T)$

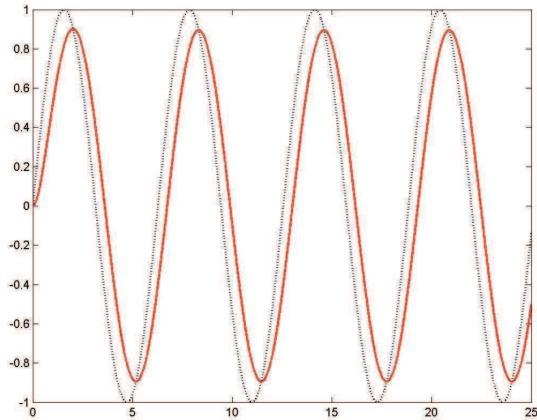
2.2 Exemples de réponses sinusoïdales d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée de la forme : $u(t) = \sin(\omega t)$

Rappel :

$$y(t) = \frac{\omega K T}{1 + T^2 \omega^2} e^{-t/T} + \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \text{Atan}(\omega T))$$

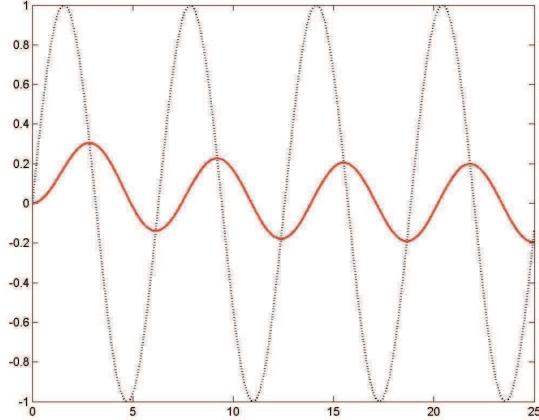
Réponse pour $K=1$, $T=0.5$ et $\omega=1$



en noir : entrée

en rouge : sortie

Réponse pour $K=1$, $T=0.5$ et $\omega=10$



en noir : entrée

en rouge : sortie

2.3 Réponse fréquentielle d'un système du 1^{er} ordre

Étude fréquentielle

Caractériser la réponse du système à une sinusoïde en fonction de la fréquence du signal d'entrée.

Réponse fréquentielle d'un système linéaire à $x(t) = \sin(\omega t)$

$$y(t) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{amplification } G(\omega)} \sin(\omega t \underbrace{- \text{Arg}(H(j\omega))}_{\text{déphasage } \phi(\omega)})$$

Justification :

- Tout signal peut se décomposer en somme pondérée de sinus (Fourier)
- Principe de superposition : $y(\sum_i u_i(t)) = \sum_i y(u_i(t))$

Dans le cas des systèmes du premier ordre :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$
$$\Phi(\omega) = -\text{Atan}(\omega T)$$

2.3 Diagramme de Bode

Construction d'un diagramme de Bode

- tracé du gain en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega)) = 20 \log(|H(j\omega)|)$$

- tracé de la phase :

$$\phi(\omega) = -\text{Atan}(\omega T) = \text{Arg}(H(j\omega))$$

- en fonction de ω , en échelle logarithmique (1 graduation $\sim 10 \times \omega$)

Intérêts du diagramme de Bode :

- synthétique (grande échelle de variation de ω)
- lorsque deux systèmes sont mis en série :
 - les gains en décibels s'ajoutent
 - les déphasages s'ajoutent

2.3 Diagramme de Bode d'un intégrateur pur

Fonction de transfert :

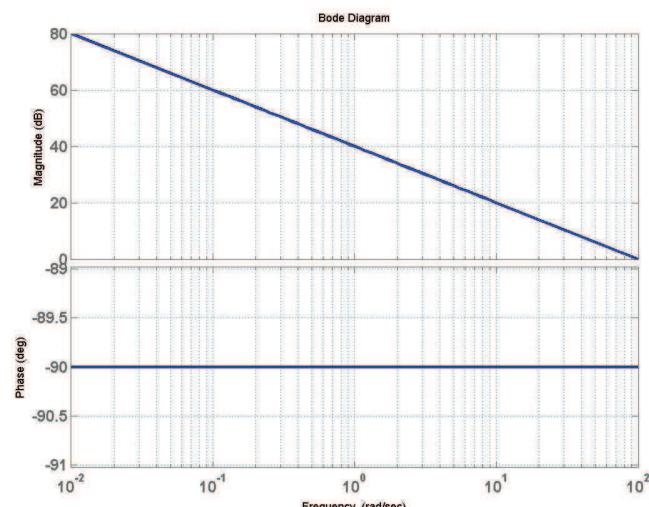
$$H(p) = \frac{K}{p}$$

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\left| \frac{K}{j\omega} \right| \right) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Exemple : $H(p) = \frac{100}{p}$

- pente du gain : -20 dB/dec
- gain nul pour : $\omega = K$
- déphasage constant
 $\phi(\omega) = -90^\circ$



2.3 Diagramme de Bode d'un système du 1^{er} ordre

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\left| \frac{K}{1+jT\omega} \right| \right) = 20 \log(K) - 10 \log(1 + T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -\text{Atan}(\omega T)$

Exemple : $H(p) = \frac{10}{1+10p}$

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

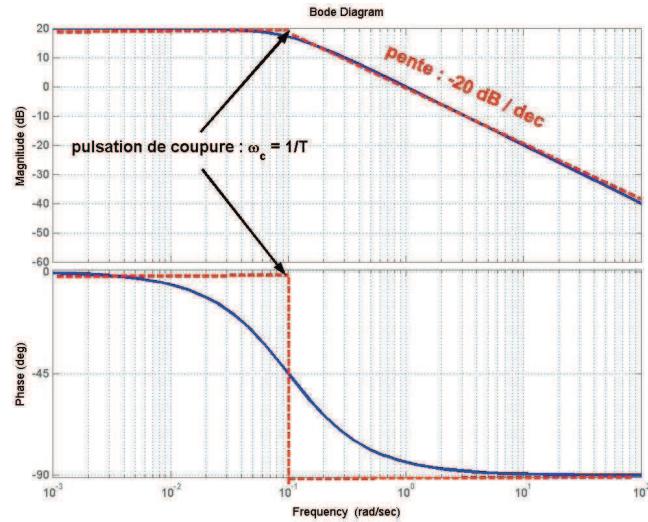
$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20 \log K \\ \phi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20 \log K - 20 \log(\omega T) \\ \phi(\omega) \approx -90^\circ \end{cases}$$

- Bandé passante

ex. BP à -3 dB $\omega \in [0 \quad \frac{1}{T}]$



2.4 Quelques réponses aux questions que vous ne vous posez pas.

Que se passe t-il lorsque ...

- deux systèmes du premier ordre sont en série ?**

- fonction de transfert globale : $H(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{K_1 K_2}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$
- gain global : $G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$
- phase globale : $\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$

- un système du premier ordre est bouclé par un gain K_c ?**

- fonction de transfert globale du premier ordre : $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+T_{BF}p}$
- gain statique du système en BF : $K_{BF} = \frac{K K_c}{1+K K_c}$
- constante de temps du système en BF : $T_{BF} = \frac{T}{1+K K_c}$

- le système est de la forme : $H(p) = K \frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$**

- pour $T_1 > T_2$: retard de phase sur $[T_1^{-1} \quad T_2^{-1}]$
- pour $T_2 > T_1$: avance de phase sur $[T_2^{-1} \quad T_1^{-1}]$
- dans les 2 cas : maximum de déphasage pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$

3.1 Définition et intérêt des systèmes d'ordre 2

Définition

Un système du deuxième ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2z}{\omega_0}p + 1}$

Vocabulaire :

- ω_0 est appelé *pulsation propre* (unité : rad/s)
- z est appelé *coefficient d'amortissement* (sans unité)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Permet de modéliser un système dont la sortie :

- ... suit l'entrée avec un temps de réponse
- ... oscille éventuellement avant de se stabiliser ($\neq 1^{er}$ ordre)
- ... varie peu au début de la réponse ($\neq 1^{er}$ ordre)

3.2 Réponses temporelles d'un système d'ordre 2

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? (réponse fréquentielle)

Méthode :

Calculs de $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2z}{\omega_0}p + 1} X(p) \right)$ pour les différentes entrées possibles.

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right)$$

- Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de z :

- $z > 1 \Rightarrow$ combinaison linéaire d'exponentielles :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} e^{-z\omega_0 t} \left(e^{\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} - e^{-\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} \right)$$

- $z = 1 \Rightarrow$ exponentielle $\times t$:

$$y(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

- $z < 1 \Rightarrow$ oscillations amorties :

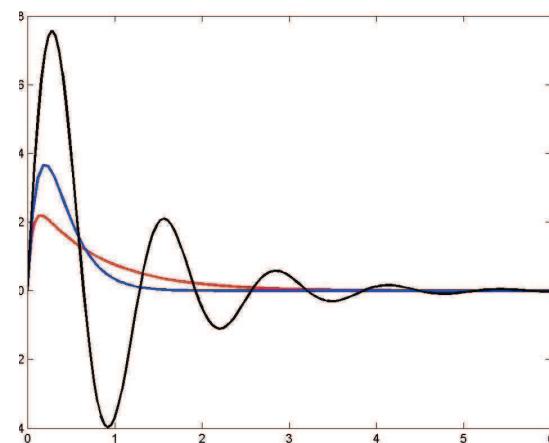
$$y(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - z^2} t)$$

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses impulsionales d'un système d'ordre 2 :

- en rouge :

$z = 2, K = 2$ et $\omega_0 = 5$



- en bleu :

$z = 1, K = 2$ et $\omega_0 = 5$

- en noir :

$z = 0.2, K = 2$ et $\omega_0 = 5$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée indicielle : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples

- Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = K \left(1 + \frac{e^{-z\omega_0 t}}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left((-z - \sqrt{z^2 - 1}) e^{\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} - (\sqrt{z^2 - 1} - z) e^{-\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} \right) \right)$$

- La valeur finale est K (le gain statique), atteinte par valeurs inférieures



3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$

- Pour $z = 1 \Rightarrow$ racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$

- La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2} \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = K (1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t})$$

- idem cas précédent : la valeur finale est K (le gain statique), atteinte par valeurs inférieures



3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées

- Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-z^2}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

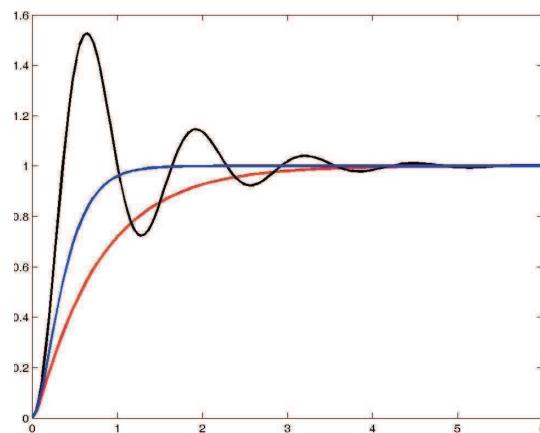
$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-z^2} t + \phi) \right), \text{ pour } \phi = \text{Atan} \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right)$$

- La valeur finale est K (le gain statique), atteinte après des oscillations amorties

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses indicielles d'un système d'ordre 2 :

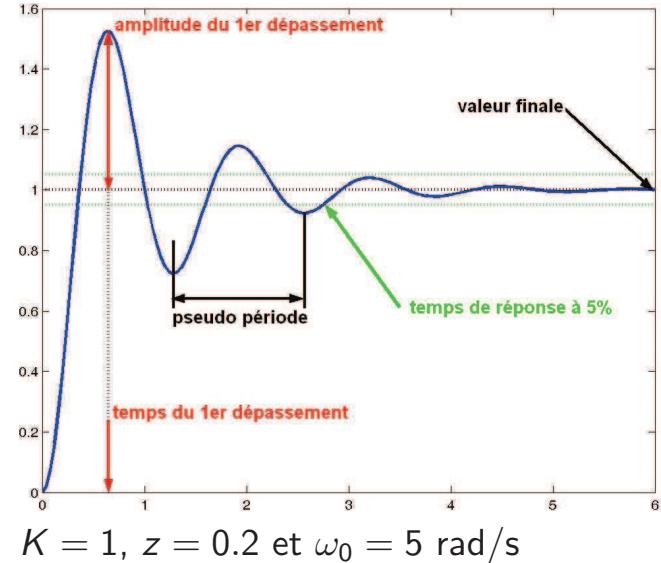
- en rouge :
 $z = 2, K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en bleu :
 $z = 1, K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en noir :
 $z = 0.2, K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s



3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Quelques données à retenir :

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$
- pseudo-période des oscillations :
 $T_n = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$
- temps de réponse à $x\%$:
 $t_{x\%} = \frac{\ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$
- temps de réponse à 5% :
 $t_{5\%} \approx \frac{3}{z\omega_0}$
- amplitude du 1^{er} dépassement :
 $X_p = Ke^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$
- instant du 1^{er} dépassement :
 $t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$



3.3 Réponse sinusoïdale d'un système d'ordre 2

En utilisant la forme : $y(t) = \int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau$ on peut montrer le résultat suivant :

La réponse sinusoïdale d'un système linéaire est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(j\omega)))$$

- la sortie oscille à la même fréquence que l'entrée : ω
- le signal d'entrée est amplifié de $G(\omega) = |H(j\omega)|$
- le signal d'entrée est déphasé de $\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$

La réponse sinusoïdale d'un système d'ordre 2 est :

$$y(t) = G(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

avec : $G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et $\phi(\omega) = -\text{Atan}\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

3.3 Réponse sinusoïdale d'un système d'ordre 2

On considère le système du deuxième ordre défini par :

$$K = 1 \quad , \quad z = 0.2 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

autrement dit :

$$H(p) = \frac{1}{0.01p^2 + 0.04p + 1}$$

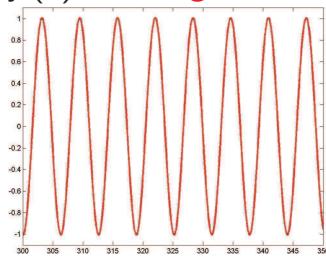
Influence de la pulsation du signal d'entrée sur la réponse :

- pulsation d'entrée :

$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

$x(t)$ en noir

$y(t)$ en rouge



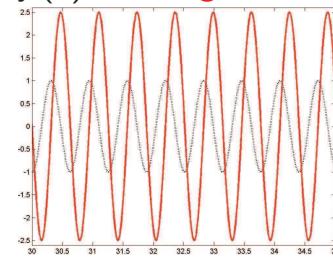
- gain unitaire
- pas de déphasage

- pulsation d'entrée :

$$\omega = 10 \text{ rad/s}$$

$x(t)$ en noir

$y(t)$ en rouge



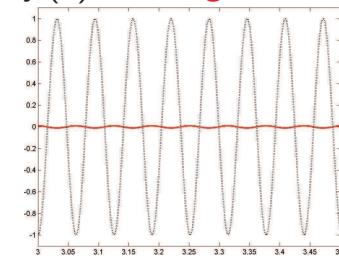
- amplification
- déphasage faible

- pulsation d'entrée :

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

$x(t)$ en noir

$y(t)$ en rouge



- atténuation
- déphasage fort

3.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre 2

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20\log(K) - 10\log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -\text{Atan}\left(\frac{\frac{2z\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

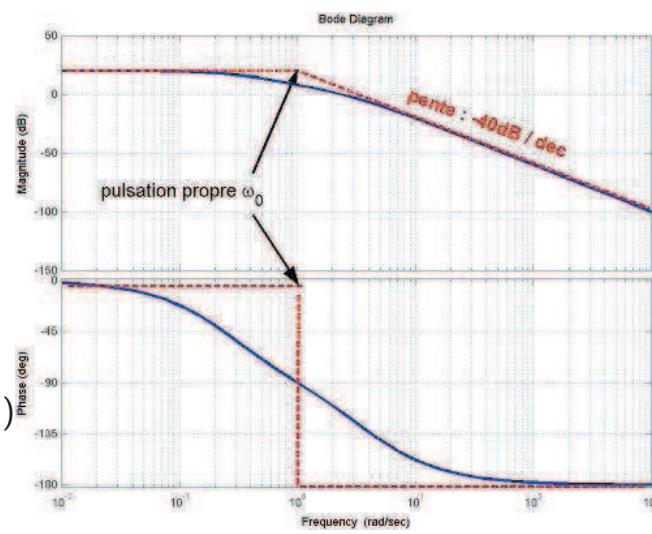
Exemple : $H(p) = \frac{10}{p^2 + 4p + 1}$

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20\log(K) \\ \phi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K\omega_0^2}{-\omega^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20\log(K\omega_0^2) - 40\log(\omega) \\ \phi(\omega) \approx -180^\circ \end{cases}$$



3.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre 2

Phénomène de résonance :

- si $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$

→ le gain décroît pour tout ω
→ exemple : $z = 2$, $K = 10$ et
 $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$

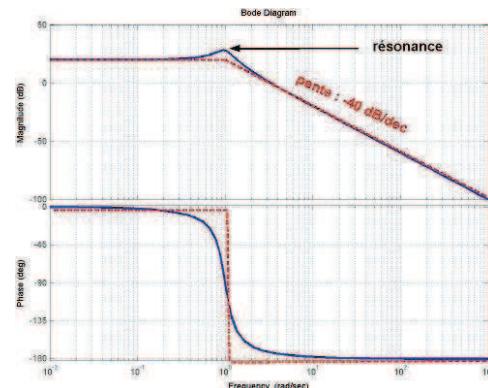
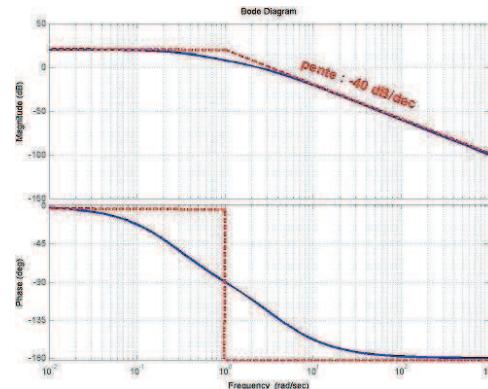
- si $z < \frac{1}{\sqrt{2}}$

→ le gain présente un maximum
ou **résonance**
→ le maximum est atteint en

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

ω_r : **pulsation de résonance**

→ exemple : $z = 0.2$, $K = 10$ et
 $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$



3.3 Pour résumer ...

z	$z < 1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2} < z < 1$	$z > 1$
temporel		oscillant	amorti
fréquentiel	résonance	gain monotone décroissant	

4.1 Systèmes d'ordre supérieur à 2

On considère un système décrit par : $Y(p) = H(p)X(p)$ où :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}$$

ou :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

Détermination de la réponse temporelle

- résolution de l'équation différentielle
- convolution : $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$
- par transformée de Laplace et décomposition en éléments simples

Détermination du comportement fréquentiel

- tracé du diagramme de Bode

4.2 Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

On peut décomposer une fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} = K_0 \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk} p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk} p + 1)} p^\alpha$$

Le terme $K_0 p^\alpha$ se traduit par

- gain : $20 \log(K_0) + 20\alpha \log(\omega)$ (pente : 20α dB/dec)
- phase : $90\alpha^\circ$

Le terme K_0 provoque :

- gain : $+20 \log(K_0)$
- phase : rien

Un terme $\frac{1}{T_{pk} p + 1}$ provoque, en $\omega = 1/T_{pk}$:

- gain : une rupture de pente de -20 dB/dec
- phase : un saut de -90°

Un terme $T_{zk} p + 1$ provoque, en $\omega = 1/T_{zk}$:

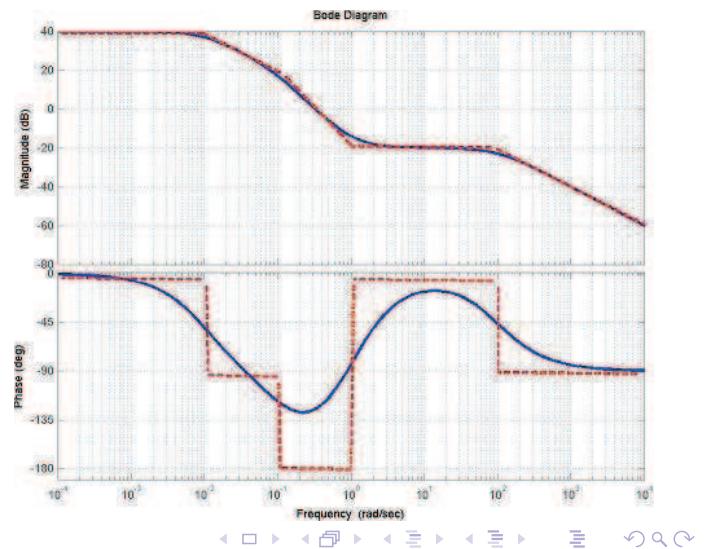
- gain : une rupture de pente de $+20$ dB/dec
- phase : un saut de $+90^\circ$

4.2 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture ↘ en $\omega = 0.01$
- rupture ↘ en $\omega = 0.1$
- double rupture ↗ en $\omega = 1$
- rupture ↘ en $\omega = 100$

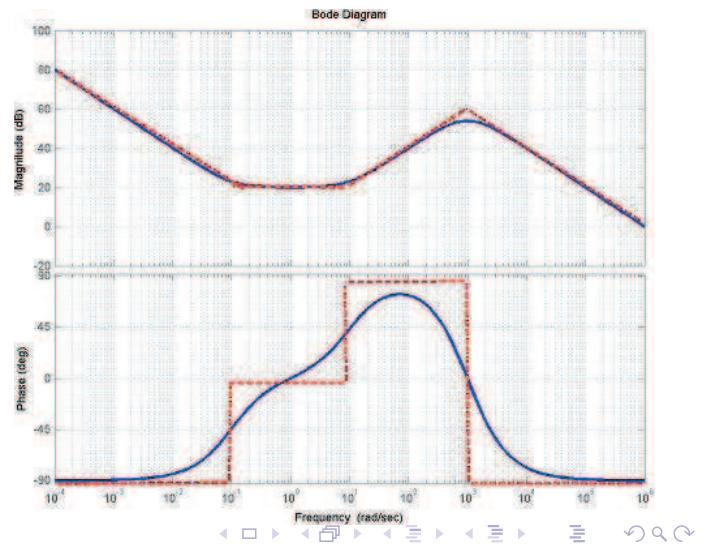


4.2 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p+1)(0.1p+1)}{p(0.001p+1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture ↗ en $\omega = 0.1$
- rupture ↗ en $\omega = 10$
- double rupture ↘ en $\omega = 1000$



Plan de la deuxième partie du cours

1 Boucle fermée

- Introduction (sur un exemple)
- Effet d'un bouclage sur un premier ordre
- Effet d'un bouclage sur un second ordre
- Schéma standard de régulation

2 Performances et robustesse en BF

- Stabilité
- Robustesse
- Précision
- Rejet de bruits et de perturbations

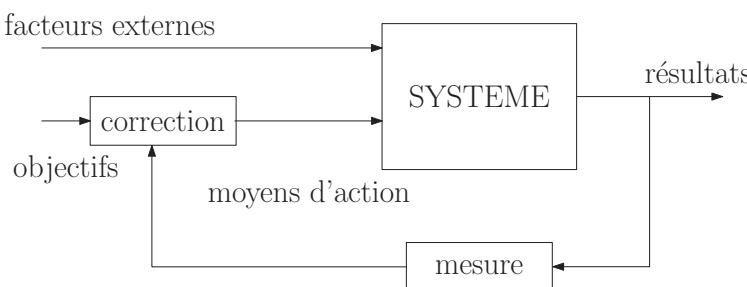
3 Quelques correcteurs élémentaires

- Correcteur proportionnel
- Correcteur à retard de phase
- Correcteur proportionnel intégral
- Correcteur à avance de phase
- Correcteur proportionnel intégral dérivé
- Correcteur RST

1.1 Introduction : pourquoi la BF ?

Pour améliorer les performances d'un système il faut :

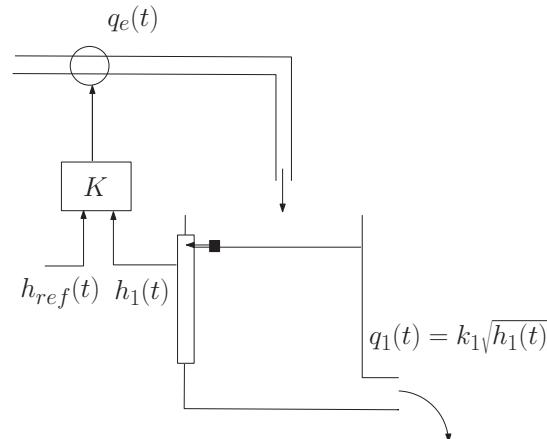
- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre
- mesurer les résultats obtenus
- adapter son action aux objectifs



1.1 Exemple de régulation

- On veut réguler la hauteur d'un réservoir en contrôlant le débit d'entrée :

- action : débit $q_e(t)$
- objectif : hauteur voulue $h_{ref}(t)$
- mesure : hauteur $h_1(t)$



- On peut commander directement :
 - $q_e(t) = Kh_{ref}(t)$
- Ou adapter la commande à la mesure:
 - si $h_1(t) > h_{ref}(t) \rightarrow$ on diminue $q_e(t)$
 - si $h_1(t) < h_{ref}(t) \rightarrow$ on augmente $q_e(t)$
 - $q_e(t)$ proportionnel à $h_{ref}(t) - h_1(t)$:
$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_1(t))$$



1.1 Exemple de régulation, en boucle ouverte

- Le système en boucle ouverte est décrit par :

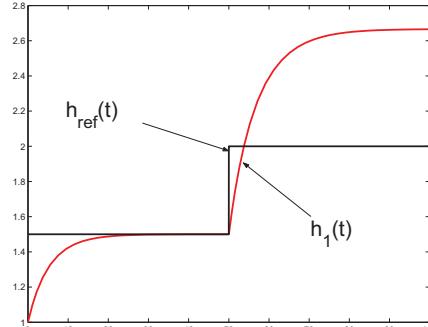
$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{q_e(t)}{S} - \frac{k_1}{S} \sqrt{h_1(t)} \\ q_e(t) &= Kh_{ref}(t) \end{aligned}$$

- Pour que $h_1(t)$ soit proche de h_{r0} , il faut :

$$K = \frac{k_1}{\sqrt{h_{r0}}}$$

- Cette commande ne fonctionne plus si $h_r(t)$ change :

- C.I. : $h_1(0) = 1$ et $h_r(0) = 1.5$
- au début $h_1(t)$ suit $h_{ref}(t) = 1.5$
- lorsque $h_{ref}(t)$ change ($t = 50$), $h_1(t)$ ne suit plus $h_{ref}(t)$



1.2 Exemple de régulation, en boucle fermée

- Le système en boucle fermée est décrit par :

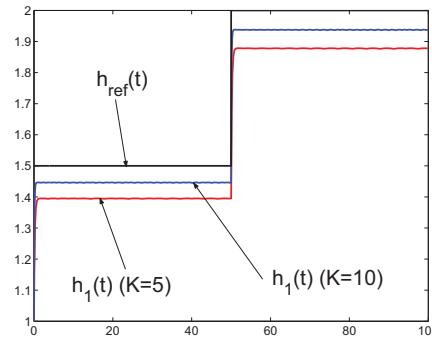
$$\begin{aligned}\dot{h}_1(t) &= \frac{q_e(t)}{S} - \frac{k_1}{S} \sqrt{h_1(t)} \\ q_e(t) &= K(h_{ref}(t) - h_1(t))\end{aligned}$$

- On peut linéariser ce système :

$$\Delta H_1(p) = \frac{G_0}{Tp + 1} \Delta H_{ref}(p), \text{ avec } G_0 = \frac{2K\sqrt{h_{10}}}{k_1 + 2K\sqrt{h_{10}}} \text{ et } T = \frac{2S\sqrt{h_{10}}}{k_1 + 2K\sqrt{h_{10}}}$$

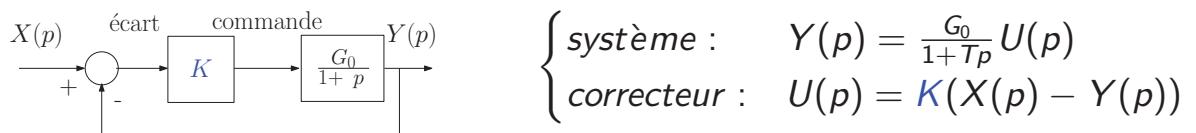
- Influence de K sur le système : lorsque K augmente :

- le gain statique G_0 tend vers 1
→ h_1 suit mieux h_{ref}
- la constante de temps T diminue
→ le suivi est plus rapide



1.2 Effet d'un bouclage sur un premier ordre

- Le résultat précédent se généralise à tout système du 1^{er} ordre, réglé avec un correcteur proportionnel K :



- Le système en BF est un premier ordre :

$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + T_{BF}p} X(p) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} \xrightarrow[K \gg 1]{} 1 \\ T_{BF} = \frac{T}{1+KG_0} \xrightarrow[K \gg 1]{} 0 \end{array} \right.$$

- Pour K grand :

- + suivi unitaire de $x(t)$ par $y(t)$
- + suivi rapide de $x(t)$ par $y(t)$
- commande grande : coûteuse, bruit amplifié

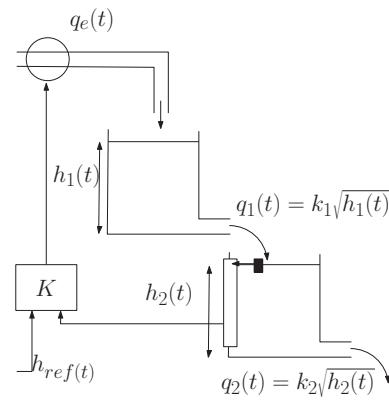
1.3 Exemple de régulation (compliquons un peu)

- On veut réguler $h_2(t)$ la hauteur du **deuxième** réservoir par $q_e(t)$ le débit d'entrée :

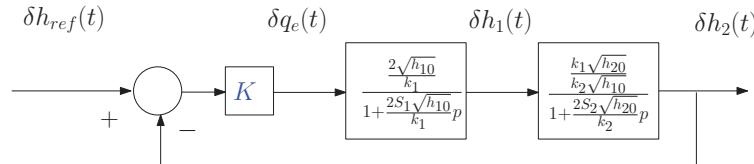
$$\dot{h}_1(t) = \frac{q_e(t)}{S_1} - \frac{k_1}{S_1} \sqrt{h_1(t)}$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{k_1}{S_2} \sqrt{h_1(t)} - \frac{k_2}{S_2} \sqrt{h_2(t)}$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$$



- On peut linéariser ce système (autour de $h_1(t) \approx h_{10}$ et $h_2(t) \approx h_{20}$)

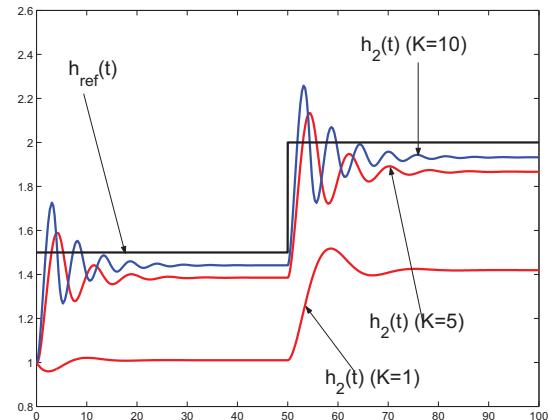


- Le gain statique en boucle fermée est donné par :

$$G_{BF} = \frac{2K\sqrt{h_{20}}}{k_2 + 2K\sqrt{h_{20}}} \xrightarrow{K \gg 1} 1$$

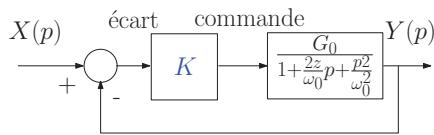
1.3 Exemple de régulation (compliquons un peu)

- conditions initiales :
 $h_{ref}(0) = 1.5$ et $h_2(0) = 1$
- variation de h_{ref} de $+0.5$ en $t = 50$
- Pour $K = 10$
 - oscillations fortes et rapides
 - dépassement de $h_2(\infty)$ très (trop) important
 - suivi correct



1.3 Effet d'un bouclage sur un second ordre

- Le résultat précédent se généralise à tout système du 2^{ème} ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{système : } Y(p) = \frac{G_0}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} U(p) \\ \text{correcteur : } U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{array} \right.$$

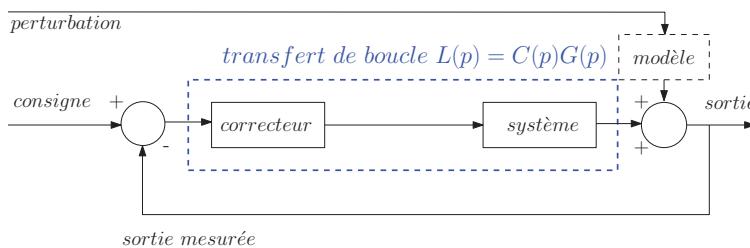
- Le système en BF est un second ordre :

$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{BF}^2}} X(p) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} & \xrightarrow[K \gg 1]{=} 1 \\ \omega_{BF} = \omega_0 \sqrt{1 + KG_0} & \xrightarrow[K \gg 1]{=} \gg 1 \\ z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+KG_0}} & \xrightarrow[K \gg 1]{=} 0 \end{array} \right.$$

- Pour K grand :

- + suivi unitaire de $x(t)$ par $y(t)$
- + suivi rapide de $x(t)$ par $y(t)$
- risque d'oscillations rapides (ω_{BF} grand) et importantes (z_{BF} petit)
- commande grande : coûteuse, bruit amplifié

1.4 Schéma standard de régulation



Objectifs :

- suivi de consigne par la sortie
- limiter l'influence des perturbations
- être robuste à des erreurs de modélisation

Hypothèses :

- capteur rapide (/ au système) → dynamique négligée
- actionneur rapide (/ au système) → dynamique négligée (ou intégrée)
- perturbations en sortie (entrée oubliée), parfois modélisées

- La synthèse du correcteur se fait à partir du **transfert de boucle** :

$$L(p) = C(p)G(p)$$

2.1 Stabilité d'un système

Définition.

Un système est **stable**

- ⇒ sa réponse impulsionnelle tend vers 0, quand $t \rightarrow \infty$
- ⇒ une entrée bornée provoque une sortie bornée
- ⇒ les pôles de la fonction de transfert sont tous à **partie réelle strictement négative**

- Tester la stabilité sans calculer les pôles en BF ?
→ critère de Routh
- Tester la stabilité en BF en connaissant la BO ?
→ critère du revers
- Exemple :

$$G(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)} \Rightarrow y(t) = a_1 e^{-2t} + \underbrace{a_2 e^t}_{\text{instable!}} + \dots$$

2.1 Étude de la stabilité par le critère de Routh

- Pour tester la stabilité de

$$G(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

- recopier les coefficients du dénominateur dans les deux premières lignes d'un tableau
- puis compléter selon la règle : $b_{i,j} = \frac{b_{i-1,1} b_{i-2,j+1} - b_{i-1,j+1} b_{i-2,1}}{b_{i-1,1}}$
- $G(p)$ stable \Leftrightarrow les termes de la 1^{ère} colonne sont de même signe.

a_n	a_{n-2}	\dots	a_0
a_{n-1}	a_{n-3}	\dots	0
$b_{3,1}$...	a_0	
$b_{4,1}$...	0	
$b_{5,1}$	a_0		
$b_{6,1}$	0		
a_0	0		

$$b_{3,1} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_{n-3} a_n}{a_{n-1}}$$

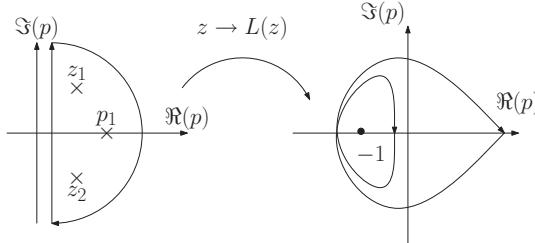
$$b_{4,1} = \frac{b_{3,1} a_{n-3} - b_{3,2} a_{n-1}}{b_{3,1}}$$

- Exemple 1. $G(p) = \frac{p+1}{p^3+2p^2+p-1}$ est-il stable ?

- Exemple 2. Quel gain choisir pour le rendre stable en BF ?

2.1 Étude de la stabilité par le critère de Nyquist

- Soit une fraction rationnelle en z : $L(z)$. Si z décrit un circuit fermé, dans le sens **négatif**, entourant n_z zéros de $L(z)$ et n_p pôles de $L(z)$
 $\Rightarrow L(z)$ **entoure le point $z = 0$ ($n_p - n_z$) fois, dans le sens négatif.**



- Le système en BF $F_{BF}(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$ est stable
 - $\Leftrightarrow F_{BF}$ n'a pas de pôles à $\Re(p) > 0$
 - $\Leftrightarrow 1 + L(p)$ n'a pas de racines à $\Re(p) > 0$
 - \Leftrightarrow lorsque z entoure le demi-plan complexe à $\Re(p) > 0$, $L(z)$ entoure -1 un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $L(z)$.
- Sur l'exemple : $n_p = 1$, $n_z = 2$ (donc $L(p)$ entoure -1 fois le point 0) et $L(p)$ entoure -2 fois le point -1 , donc le système est **instable en BF**

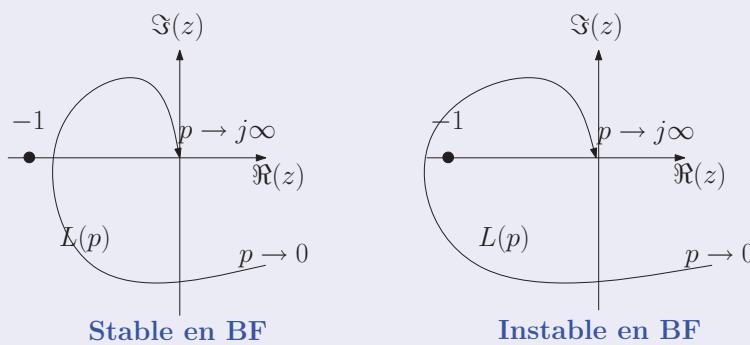
2.1 Étude de la stabilité par le critère du revers

- Si $L(p)$ est stable (c'est le cas de la plupart des systèmes physiques), alors on peut simplifier le critère de Nyquist

Critère du revers

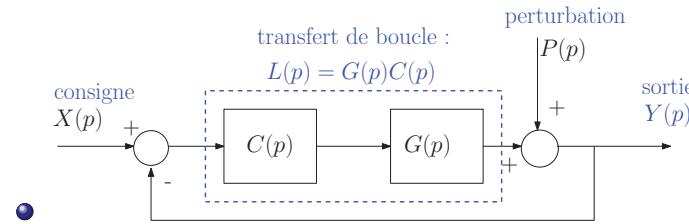
Le système en boucle fermée est **stable**ssi

le transfert de boucle $L(p)$ laisse le point -1 à **gauche**, quand $p \in [0 j\infty[$



- Le rôle du correcteur est alors de faire passer $L(p)$ droite du point -1 pour assurer la stabilité en BF
- si possible pas trop près

2.2 Performances et robustesse en BF



- Le système en BF est décrit par :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{L(p)}{1 + L(p)}}_{=F_{BF}, \text{ suivi de } X} X(p) + \underbrace{\frac{1}{1 + L(p)}}_{=S(p), \text{ sensibilité à } P} P(p)$$

- Connaissant $L(p) = G(p)C(p)$, peut-on savoir si le système en BF...
 - est stable ?
 - suit précisément $X(p)$?
 - reste stable si le gain statique de $G(p)$ varie ?
 - reste stable si la phase de $G(p)$ varie ?
 - atténue les perturbations $P(p)$?

2.2 Marges de robustesse en BF

On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas
 $\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1

- Marge de gain** : gain max par lequel on peut multiplier $L(p)$ sans passer par -1

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

où $\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$

- Marge de phase** : déphasage max qu'on peut ajouter à $L(p)$ sans passer par -1

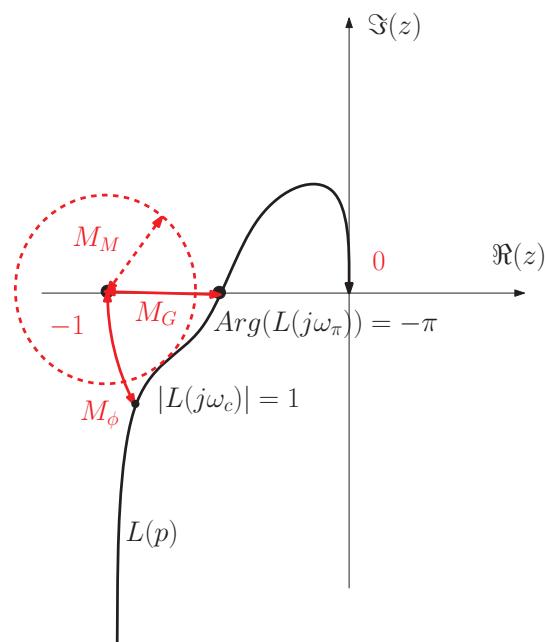
$$M_\phi = \text{Arg}(L(j\omega_c)) + 180$$

où $|L(j\omega_c)| = 1$

- Marge de module** : distance minimum entre $L(p)$ et -1

$$M_M = \min_\omega |1 + L(j\omega)|$$

- stabilité en BF** $\Leftrightarrow M_\phi > 0$



2.2 Marges de robustesse et diagramme de Bode

Les marge de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de $L(p)$

- **Marge de gain :**

trouver ω_π

telle que $\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

- **Marge de phase :**

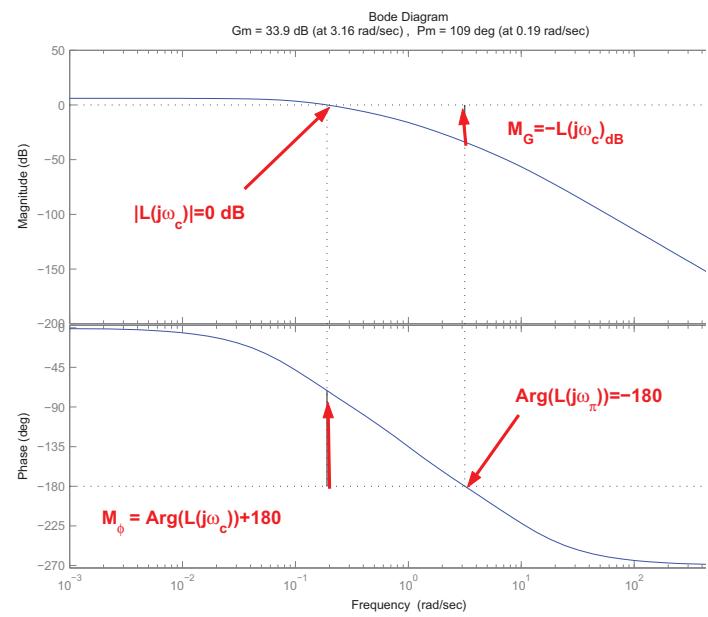
trouver ω_c

telle que $|L(j\omega_c)| = 1$

$$M_\phi = \text{Arg}(L(j\omega_c)) + 180$$

- **Valeurs indicatives :**

$M_G \approx 6 \text{ dB}$ et $M_\phi \approx 45^\circ$



2.3 Précision statique en BF

- La réponse à $X(p)$, l'entrée de référence, est :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p)$$

- L'erreur de régulation, $e(t) = x(t) - y(t)$, est donnée par :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

- Pour une entrée constante, $x(t) = x_0$, l'erreur statique est

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(p)} x_0 \end{aligned}$$

- Pour avoir e_∞ faible, il faut $|L(p)| >> 1$ en basses fréquences
- Si $L(p)$ contient un intégrateur $\Rightarrow e_\infty = 0$

2.3 Précision dynamique en BF

- Que devient l'erreur si $x(t)$ n'est pas constant ?
- L'erreur de poursuite est toujours définie par $e(t) = x(t) - y(t)$, donc :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

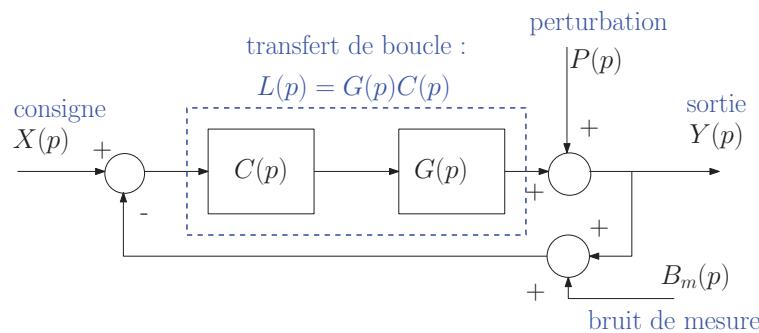
$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

- Quand $x(t) = x_0 + \dots + x_n t^n$, il faut au moins $(n+1)$ intégrateurs dans $L(p)$ pour annuler e_∞

$x(t)$ $L(p)$	$x(t) = x_0$	$x(t) = x_0 + x_1 t$	$x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$
$L(p) = \tilde{L}(p)$	$e_\infty = \frac{x_0}{1 + \tilde{L}(0)}$	$e_\infty = \infty$	$e_\infty = \infty$
$L(p) = \frac{1}{p} \tilde{L}(p)$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = \frac{x_1}{\tilde{L}(0)}$	$e_\infty = \infty$
$L(p) = \frac{1}{p^2} \tilde{L}(p)$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = \frac{x_2}{\tilde{L}(0)}$

2.4 Rejet des bruits de mesure et des perturbations

- Si on différentie *bruits de mesure* $B_m(p)$ et *perturbations* $P(p)$ on a :



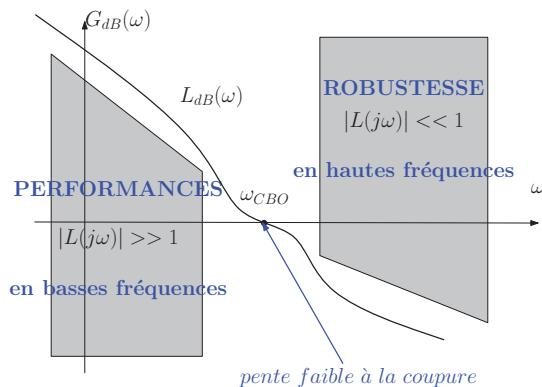
- La réponse $Y(p)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p) + \frac{1}{1 + L(p)} P(p) - \frac{L(p)}{1 + L(p)} B_m(p)$$

- Pour rejeter des perturbations en **basses fréquences** (lentes)
→ il faut $|L(j\omega)| \gg 1$, quand ω petit
- Pour rejeter des bruits en **hautes fréquences** :
→ il faut $|L(j\omega)| \ll 1$, quand ω grand

3 Objectifs de synthèse du correcteur

- On peut résumer les différents objectifs de synthèse d'un correcteur :
 \rightarrow trouver $C(p)$, tel que $L(p) = G(p)C(p)$



- Si le système en BF est proche d'un système d'ordre 2, on peut utiliser ces **relations empiriques** :

$$z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100} \quad \omega_{0BF} \approx \omega_{CBO} \quad 2 \leq \omega_{0BF} t_{rBF} \leq 3$$

z_{BF} : coeff. d'amort. en BF

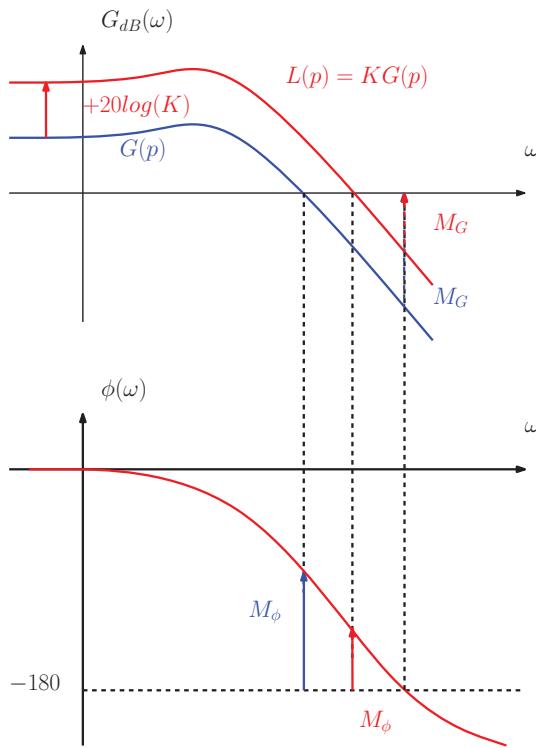
ω_{0BF} : puls. propre en BF

t_{rBF} : temps de montée en BF

M_ϕ^o : marge de phase en degré

ω_{CBO} : puls. de coupure en BO

3.1 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)



Correcteur Proportionnel

$$C(p) = K \quad u(t) = K(x(t) - y(t))$$

- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$ dB
 - phase de $L(p)$ inchangée

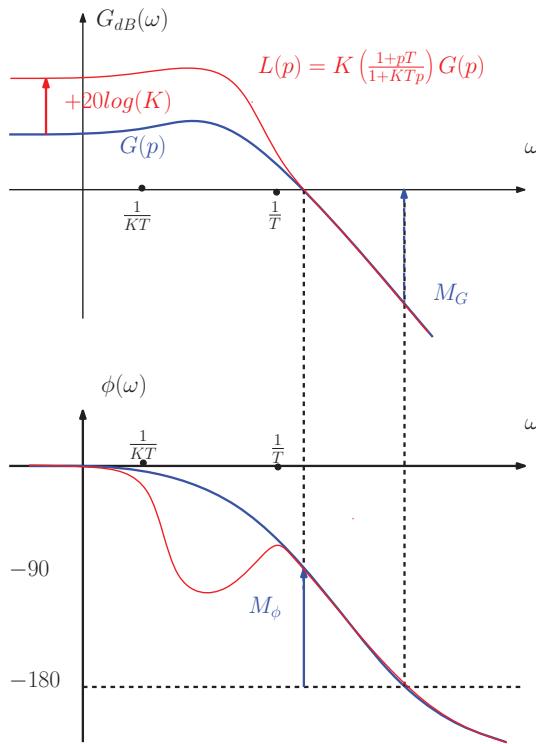
- Pour $K \gg 1$
 - **précision meilleure** car $|L(\omega)| \gg 1$ en BF

- Pour $K \gg 1$
 - **robustesse diminuée** car M_ϕ et $M_G \downarrow$

3.1 Réglage du correcteur P

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq \omega_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- On augmente **K**
 - pour augmenter le gain statique : **précision**
 - pour augmenter ω_{CBO} : **rapidité**
- On limite **K**
 - pour garder une marge de phase positive : **stabilité**
 - pour garder une marge de phase suffisante : **dépassement**
- Les spécifications sont souvent contradictoires :
 - compromis performance / robustesse**

3.2 Augmenter le gain en BF : retard de phase



- Correcteur à retard de phase

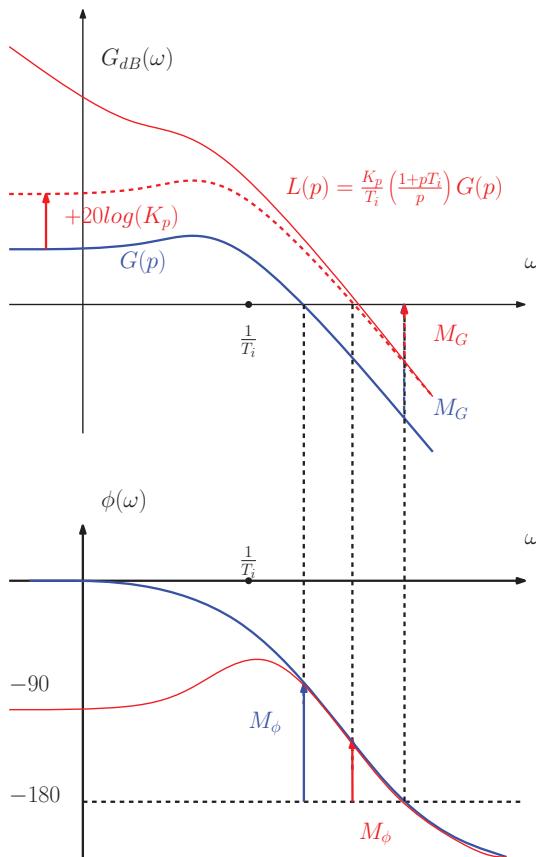
$$C(p) = K \frac{1+Tp}{1+KTp}, \quad K > 1$$

- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$, pour $\omega < 1/(KT)$
 - phase de $L(p)$ diminuée, pour $1/(KT) < \omega < 1/T$

- Pour $K \gg 1$
 - précision meilleure** car $|L(\omega)| \gg 1$ en BF

- robustesse peu changée** si $1/T < \omega_{CBO}$
(sinon : risque d'instabilité)

3.3 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)



- Correct. Proportionnel-Intégral
 $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i}\right)$
 $u(t) = K_p(x - y) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t (x - y)$

- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ translaté vers le haut, surtout en BF
 - phase de $L(p)$ diminuée de 90° en BF

- précision meilleure**
 $(|L(0)| \rightarrow \infty)$
 rejet de perturbation constantes suivie de référence constante

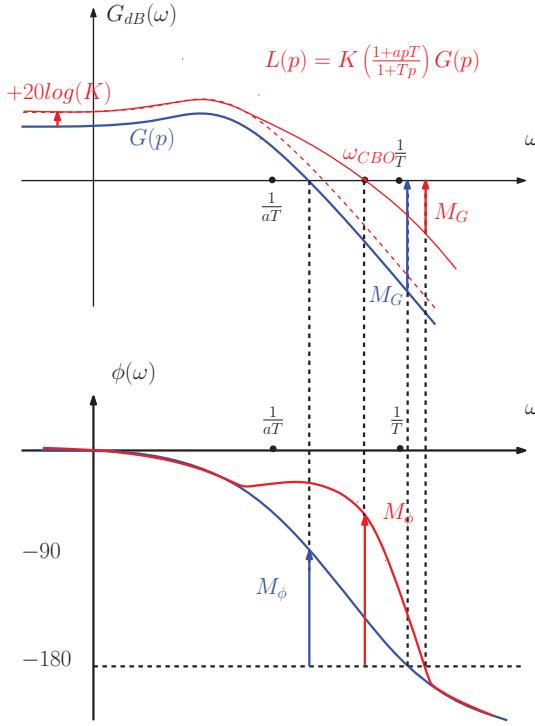
- robustesse diminuée**

- réponse parfois lente**

3.3 Réglage des correcteurs PI

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq w_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- Par construction on a $|L(0)| \rightarrow \infty$
 → **précision parfaite** sans augmenter **K**
- On augmente **K**
 → pour augmenter ω_{CBO} : **rapidité**
- On augmente **T_i** et on limite **K**
 → pour ne pas dégrader la marge de phase : **stabilité et dépassement**
- La précision parfaite se paye par une réponse lente

3.4 Améliorer la robustesse : avance de phase



- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K \frac{1+aTp}{1+Tp}, \quad a > 1$$

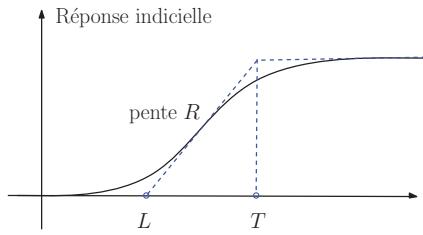
- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$ en BF et plus en HF
 - phase de $L(p)$ augmentée, pour $1/(aT) < \omega < 1/T$
- Pour $K \gg 1$
 - précision car $|L(0)| \nearrow$
 - rapidité car $\omega_{CBO} \nearrow$
- robustesse**
 - $M_\phi \nearrow$ car phase \nearrow pour $\omega \approx \omega_{CBO}$
 - possible détérioration de M_G

3.5 Avance et retard de phase : proportionnel intégral dérivé (PID)

- Pour accélérer le transitoire du PI on ajoute un terme Dérivé :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} + pT_d \right)$$

- Le régulateur obtenu cumule les effets d'un PI (en basses fréquences) et d'un retard de phase (en hautes fréquences)
- La méthode de Ziegler-Nichols permet d'avoir des valeurs des gains à partir de la réponse indicielle de $G(p)$ (stable)

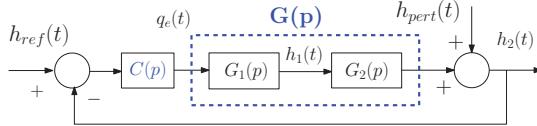


$C(p)$	P	PI	PID
K_p	$\frac{1}{LR}$	$\frac{0.9}{LR}$	$\frac{1.2}{LR}$
T_i		$3.3L$	$2L$
T_d			$0.5L$

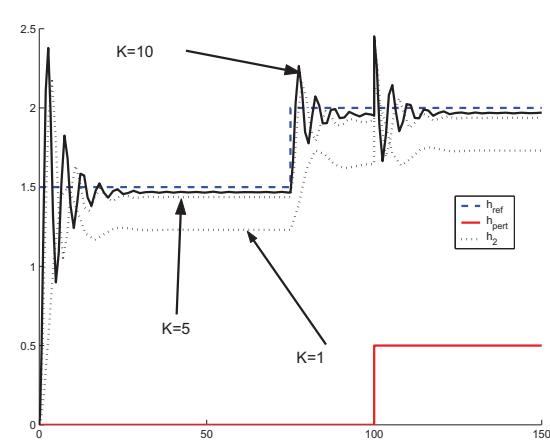
- Les valeurs obtenues sont approximatives, il faut ensuite affiner

3.5 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprendons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

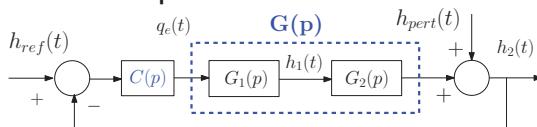


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert} .
- $h_1(0)=h_2(0)=0, h_{ref}(0)=1.5$
- avec $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre
- avec $C(p) = 10 \rightarrow$ assez précis

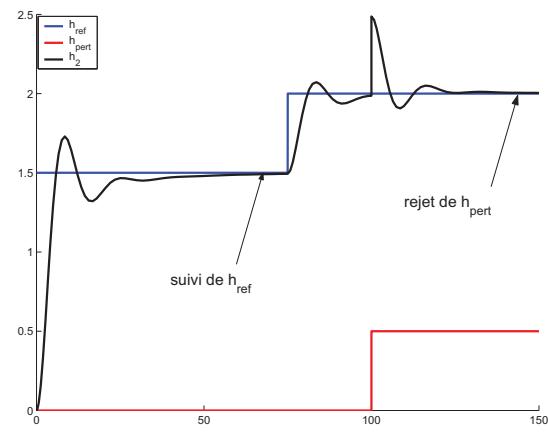


3.5 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprendons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

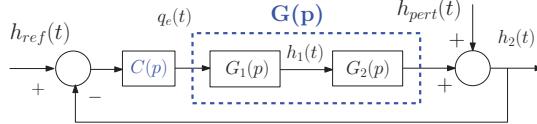


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert} .
- $h_1(0)=h_2(0)=0, h_{ref}(0)=1.5$
- avec $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre
- avec $C(p) = 10 \rightarrow$ assez précis
- avec $C(p) = \frac{p+0.05}{p}$
→ suivi et rejet corrects



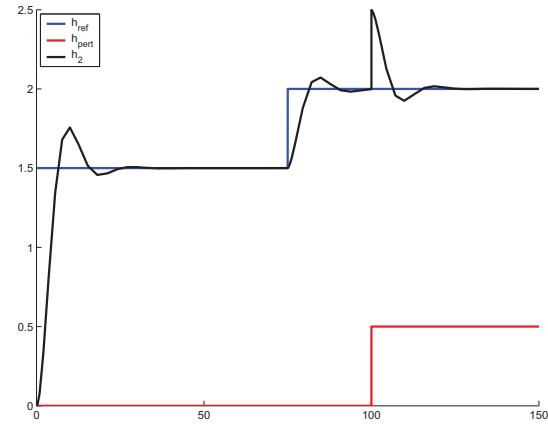
3.5 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprendons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation



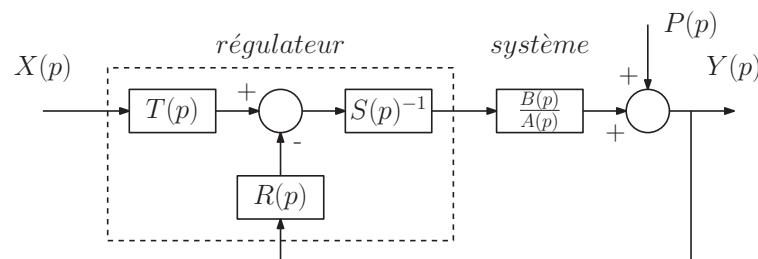
- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert} .
- $h_1(0)=h_2(0)=0$, $h_{ref}(0)=1.5$
- avec $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre
- avec $C(p) = 10 \rightarrow$ assez précis
- avec $C(p) = \frac{p+0.05}{p}$
 \rightarrow suivi et rejet corrects

- avec $C(p) = 0.9\left(1 + \frac{1}{12p} + 0.5p\right)$
 \rightarrow transitoire amélioré



3.6 Correcteur RST

- Structure du correcteur **RST** :



- Objectifs :**

- rejet parfait de perturbations constantes
- assurer des marges de robustesse minimales
- suivi de $X(p)$ par $Y(p)$ unitaire et défini par $\frac{B(p)}{M(p)}$
- La réponse du système est donnée par :

$$Y(p) = \frac{B(p)T(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)}X(p) + \frac{A(p)S(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)}D(p)$$

3.6 Correcteur RST

- Rejet de perturbations constantes $\Leftrightarrow S(0) = 0$
- Suivi unitaire de $X(p)$ par $Y(p) \Leftrightarrow T(0) = R(0)$
- Factoriser le dénominateur du système en BF par :

$$Den(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p) = M(p)F(p)$$

- $M(p)$: dénominateur de la G_{BF} entre $X(p)$ et $Y(p)$
- $F(p)$: fixé pour filtrer $D(p)$ et assurer la robustesse
- Il faut ensuite résoudre en **S(p)** et **R(p)** l'équation de Bezout

$$Den(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p)$$

qui a une solution unique pour : $\deg(R) = \deg(A)$ et $\deg(S) = \deg(A) + 1$

- Si on fixe $T(p) = F(p) \frac{R(0)}{F(0)}$, on a :

$$Y(p) = \frac{B(p) \frac{R(0)}{F(0)}}{M(p)} X(p) + \frac{A(p)S(p)}{F(p)M(p)} D(p)$$

3.6 Exemple de réglage d'un RST

- On cherche à réguler le système $H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{p+1}{p^3+3p^2+3p+1.4}$ pour
 - rejeter les perturbations constantes
 - suivre $X(p)$ avec un temps de réponse à 5% de 0.5 s et un dépassement max de 10%
 - avoir des marges $M_G > 6 \text{ dB}$, $M_\phi > 50$ et $M_M > 0.5$
- Pour pouvoir résoudre $Den = AS + BR$ il faut :

$$R(p) = r_0 + r_1 p + r_2 p^2 + r_3 p^3$$

$$S(p) = s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4$$

- les spécifications de suivi de $X(p)$ donnent :

$$\begin{cases} z &= 0.59 \\ \omega_0 &= 10.86 \end{cases} \Rightarrow M(p) = 0.0085p^2 + 0.11p + 1$$

- comme $B(p)$ est stable, on peut intégrer $B(p)$ dans $M(p)$

$$M(p) = (p+1)(0.0085p^2 + 0.11p + 1)$$

- on fixe le polynôme de filtrage à $F(p) = (p+2.1)^4$ et on a $Den(p)$:

$$Den(p) = (p+2.1)^4(p+1)(0.0085p^2 + 0.11p + 1)$$

3.6 Exemple de réglage d'un RST

- On résout l'équation de Bézout : $A(p)S(p) + B(p)R(p) = Den(p)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} s_4 \\ s_2 \\ s_2 \\ s_1 \\ r_3 \\ r_2 \\ r_1 \\ r_0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} d_7 \\ d_6 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{array} \right) \leftarrow \text{eq. en } p^7$$

$\leftarrow \text{eq. en } p^6$
 $\leftarrow \text{eq. en } p^5$
 $\leftarrow \text{eq. en } p^4$
 $\leftarrow \text{eq. en } p^3$
 $\leftarrow \text{eq. en } p^2$
 $\leftarrow \text{eq. en } p^1$
 $\leftarrow \text{eq. en } p^0$

- pour obtenir

$$R(p) = 6.1704p^3 + 25.4925p^2 + 36.8518p + 19.4481$$

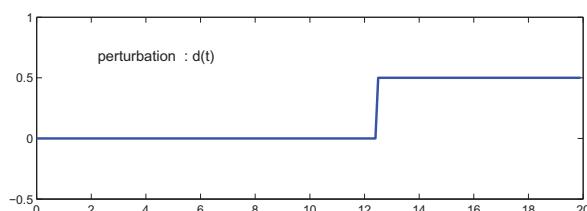
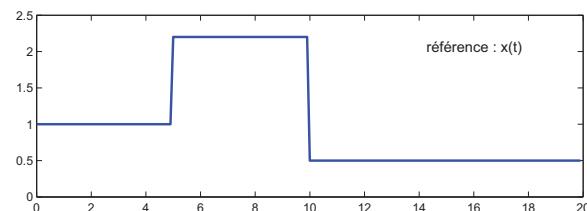
$$S(p) = 0.0085p^4 + 0.1631p^3 + 1.8039p^2 + 1.6493p$$

- enfin $T(p) = F(p)\frac{r_0}{f_0}$ donne :

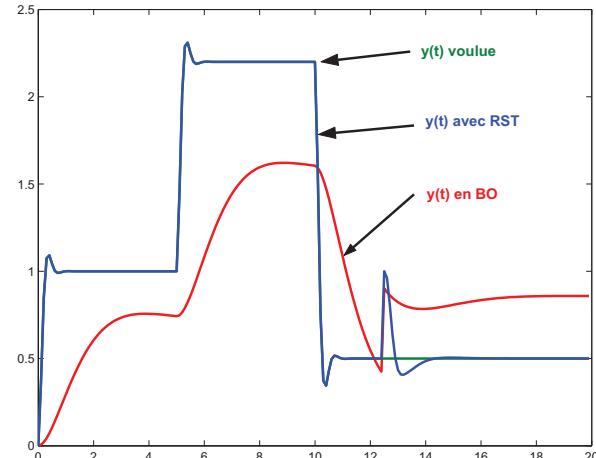
$$T(p) = p^4 + 8.4p^3 + 26.46p^2 + 37.044p + 19.4481$$

3.6 Exemple de réglage d'un RST

- Entrée de référence $x(t)$ et entrée de perturbation $d(t)$



- résultats de la régulation



CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 1
TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET FONCTIONS DE TRANSFERT

1. Exercice : Transformée de Laplace

- (a) Démontrer que $\mathcal{L}(x(t - \tau)) = e^{-\tau p}X(p)$ et calculez la T.L. de :

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq T \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) Déterminez la T.L. de $x(t) = t^2$.

- (c) Démontrez que $\mathcal{L}(e^{-at}x(t)) = X(p + a)$ et déterminez la T.L. de $x(t) = e^{-at}t^n$.

- (d) Déterminez la T.L. $x(t) = e^{-t+7}\Gamma(t - 7)$.

2. Exercice : transformée de Laplace inverse

Calculer le signal temporel (donc la transformée de Laplace inverse) correspondant à la fonction de la variable de Laplace suivante :

$$F(p) = \frac{(p + 1)e^{-7p}}{p^2(p + 5)}$$

3. Exercice : fonction de transfert

Donner la fonction de transfert du système dont la réponse à un échelon est :

$$y(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

4. Exercice : fonction de transfert, réponse temporelle

Dans chaque cas, déterminer la fonction de transfert $H(p) = Y(p)/X(p)$ et la réponse $y(t)$.

- (a) $\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$, avec $y(0) = 2$ et $x(t) = e^{-t}$
- (b) $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + x(t)$, avec $\dot{y}(0) = y(0) = 0$ et $x(t) = e^{-3t}$
- (c) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$, avec $\dot{y}(0) = y(0) = 0$ et $x(t) = e^{-2t}$
- (d) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = x(t)$, avec $\dot{y}(0) = y(0) = 0$ et $x(t) = 1$

5. Exercice : fonction de transfert, réponse temporelle

On considère un système, d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, représenté par :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad , \quad y(0) = 0$$

- (a) Donner la fonction de transfert du système, notée $G(p)$, telle que $Y(p) = G(p)X(p)$.
- (b) En utilisant le théorème de la valeur initiale, donner la valeur de la pente de la tangente à l'origine de la réponse indicielle de $G(p)$.
- (c) Calculer la réponse indicielle de $G(p)$, et vérifier le résultat précédent.

6. Exercice : étude d'un thermomètre

Un thermomètre est modélisé par un système du premier ordre, de constante de temps de 5 s. Il est placé dans un bain dont la température, initialement égale à θ_0 , augmente d'un degré par seconde. Quelle est l'erreur de mesure en régime établi ?

7. Exercice : modélisation d'un réservoir

On considère un réservoir de section S . Les débits d'entrée et de sortie sont notés respectivement $q_e(t)$ et $q_s(t)$. Le débit $q_s(t)$ est lié à la hauteur de liquide dans le réservoir, notée $h(t)$, par :

$$q_s(t) = k\sqrt{h(t)}$$

- (a) En écrivant le bilan de matière dans le réservoir, établir l'équation non linéaire modélisant le comportement du système.
- (b) Écrire la relation en régime établi quand l'alimentation est constante $q_e(t) = q_{e0}$.
- (c) On envisage des petites variations autour d'une position d'équilibre. On pose alors, pour toutes les grandeurs, $x = x_0 + \delta x$, où x_0 est la valeur à l'équilibre, et δx la variation autour de cette valeur. En linéarisant la relation différentielle autour d'un point d'équilibre, donner la fonction de transfert entre δq_e et δq_s
- (d) Le débit entrant augmente de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$. Au bout de combien de temps le débit sortant augmente de $0.099 \text{ m}^3/\text{s}$? La section du réservoir et la hauteur de liquide à l'équilibre sont données par : $k = \sqrt{2g}$, $S = 100 \text{ m}^2$, et $h_0 = 10 \text{ m}$.

8. Exercice : étude d'une climatisation

On modélise un système de climatisation par le système d'équations suivant

$$100\dot{\theta}(t) + \theta(t) = W(t) \quad (\text{enceinte})$$

$$W(t) = 100(\theta_{ref}(t) - \theta_m(t)) \quad (\text{climatisation})$$

$$4\dot{\theta}_m(t) + \theta_m(t) = \theta(t) \quad (\text{capteur})$$

où $\theta(t)$ est la température dans l'enceinte climatisée, $\theta_{ref}(t)$ est la température désirée par l'utilisateur, $W(t)$ est la puissance de chauffe ou de refroidissement et $\theta_m(t)$ est la mesure de température donnée par le capteur. Toutes ces grandeurs désignent des variations autour d'un point d'équilibre défini par la température de référence. On suppose par la suite que la condition initiale coïncide avec le point d'équilibre.

- (a) Donner la fonction de transfert entre $\theta_{ref}(t)$ et $\theta(t)$ et le schéma-bloc du système.
- (b) Donner la valeur finale de $\theta(t)$ pour une variation de consigne $\theta_{ref}(t) = 5 \text{ K}$.

CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 2
IDENTIFICATION, DIAGRAMMES DE BODE, ETC.

1. Exercice : réponse fréquentielle d'un système

On considère le système décrit par la fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{p+1}$.

- (a) Tracer le diagramme de Bode de $G(p)$, quelle est sa bande passante à -3 dB
- (b) Quelle est la réponse du système à l'entrée $x_1(t) = \sin(10t)$
- (c) Quelle est la réponse du système à l'entrée $x_2(t) = \sin(0.1t)$
- (d) Quelle est la réponse du système à l'entrée $x_3(t) = 2\sin(10t) + 4\sin(0.1t)$

2. Diagramme de Bode

On considère la fonction de transfert $H(p) = \frac{10(10p+1)^2}{p(100p+1)}$.

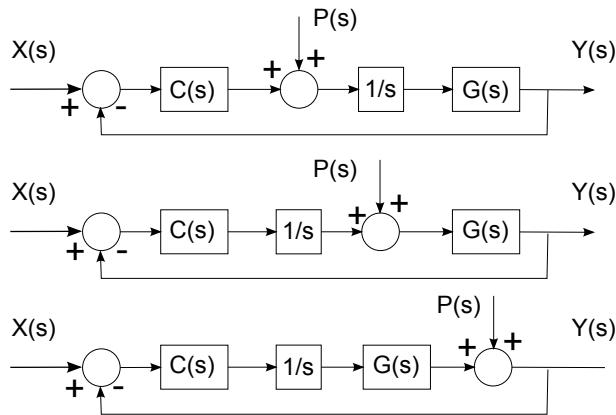
- (a) Tracez le diagramme de Bode (Gain en dB et phase) de $H(p)$.
- (b) Donnez la réponse établie de $H(p)$ à l'entrée $x(t) = \sin(0.001t) + \sin(10t)$.
- (c) Qu'appelle t-on la bande passante à $x \text{ dB}$?
- (d) Donnez la bande passante de $H(p)$ à 60 dB .

3. Influence d'une perturbation.

On considère un système $G(p)$ dont on veut réguler la position en le commandant en vitesse avec le correcteur $C(p)$. Le système est dans un environnement perturbé, il faut donc envisager différents cas possibles suivant où la perturbation $p(t)$ agit : sur la commande en vitesse, sur la commande en position, sur la sortie. On considère des entrées constantes : $x(t) = x_0$, $p(t) = p_0$ et les fonctions de transfert sont définies ci-dessous par :

$$C(p) = \frac{1}{1 + T_c p} \quad G(p) = \frac{3}{1 + T_g p}$$

Dans chacun des cas représentés à la figure ci-dessous, donnez l'erreur statique définie par : $e_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - y(t))$.



4. Identification d'un système à partir de sa réponse temporelle

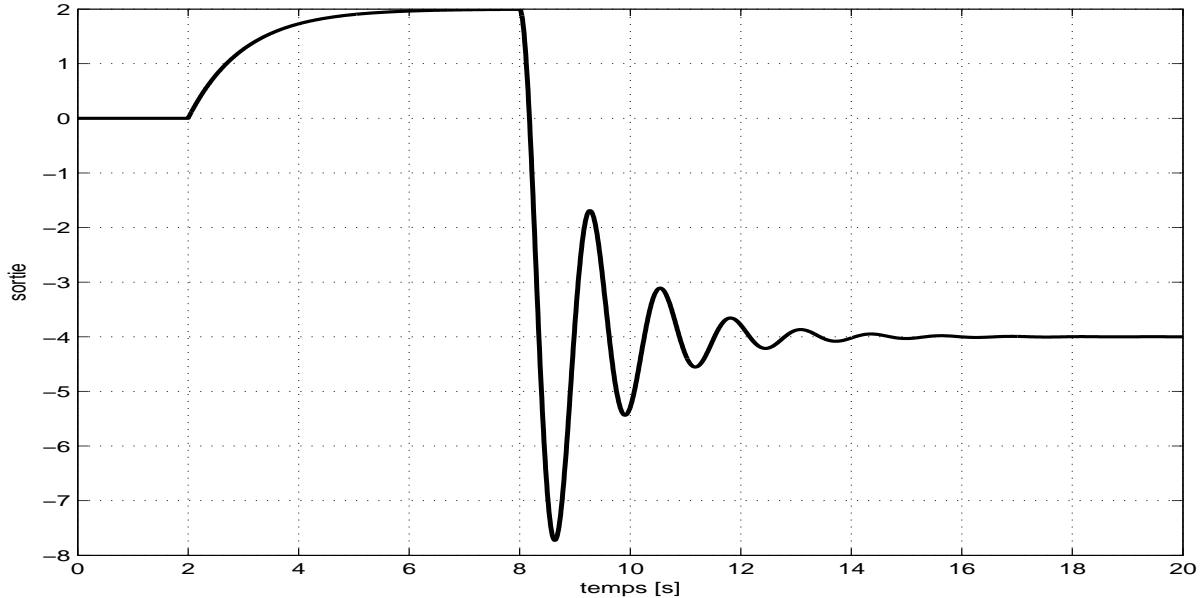
On considère le système à deux entrées et une sortie décrit par :

$$Y(p) = H_1(p)X_1(p) + H_2(p)X_2(p)$$

Afin de déterminer les paramètres des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$, on fait un relevé de la sortie $y(t)$ pour les entrées définies par :

$$x_1(t) = \Gamma(t - 2) \quad \text{et} \quad x_2(t) = 2\Gamma(t - 8)$$

L'évolution de la sortie est représentée à la figure ci-dessous.



- (a) Quel est l'ordre de chacune des fonctions de transfert ?
- (b) Déterminer les valeurs des différents paramètres de $H_1(p)$ et $H_2(p)$.
- (c) Tracer les diagrammes de Bode des deux fonctions de transfert identifiées.
- (d) Vérifier les résultats obtenus.

5. Régulation d'un réacteur chimique

On considère un réacteur de volume constant V , alimenté par un débit variable $q(t)$ de température variable $T(t)$ et de concentration en A notée $c_{Ae}(t)$. La vitesse de la réaction $A \rightarrow B$ dépend de la température selon la loi d'Arrhenius : $k(T) = ke^{-E/RT(t)}$ (où E est l'énergie d'activation et R la constante des gaz parfaits). On suppose que la réaction ne dégage ni ne consomme de chaleur et que le réacteur est thermiquement isolé.

On suppose que le débit $q_e(t)$, la concentration $c_{Ae}(t)$ et la température varient peu autour de q_0 , c_{Ae0} et T_0 respectivement et on note $\delta x(t) = x(t) - x_0$.

- (a) Montrez que la concentration en A en sortie est décrite par la relation ci-dessous, où les fonctions de transfert sont à expliciter.

$$\Delta C_A(p) = \frac{K_C}{T_C p + 1} \Delta C_{Ae}(p) + \frac{K_Q}{T_Q p + 1} \Delta Q(p) + \frac{K_T}{T_T p + 1} \Delta T(p)$$

Donnez le taux de conversion de A en B.

- (b) Afin de garantir la qualité du produit c'est-à-dire un taux de conversion constant, on aimerait le rendre indépendant de la température du fluide entrant. Quelle instrumentation faut-il ajouter au réacteur ?

CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 3
SYSTÈMES EN BOUCLE FERMÉE

1. Exercice : stabilité en BF par le critère de Routh

- (a) Le système $G_1(p)$, défini ci-dessous, est-il stable en boucle ouverte ?

$$G_1(p) = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 12p + 8}$$

- (b) Le système $G_2(p)$, défini ci-dessous, est-il stable lorsqu'il est régulé par un correcteur proportionnel de gain K ?

$$G_2(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

- (c) Même question pour le système $G_3(p)$ où T_1 , T_2 et T_3 sont des réels positifs.

$$G_3(p) = \frac{1 + T_1 p}{p^2(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}$$

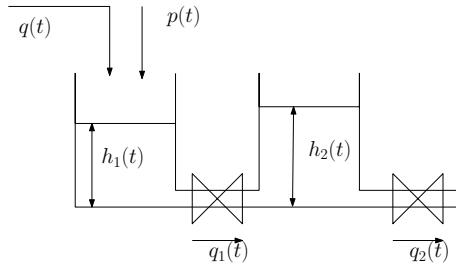
2. Exercice : stabilité et rapidité en BF par le critère de Routh

On considère le système $G(p) = \frac{1}{p^2 + 8p + 7}$.

- (a) Ce système est-il stable ? Quelle est l'allure de sa réponse indicielle en boucle ouverte ? Quel est son temps de réponse ?
- (b) Afin d'améliorer les performances du système, en particulier en précision, on décide de le réguler avec un correcteur proportionnel, de gain K . Quelle condition doit vérifier K pour au moins conserver la stabilité en boucle fermée ?
- (c) Afin de garantir une certaine vitesse de la réponse on désire placer les pôles du système en boucle fermée. Comment adapter le critère de Routh, si l'on désire que les pôles du système en boucle fermée soient à partie réelle inférieure à -3 ?
- (d) Afin d'obtenir une meilleure précision, on utilise un correcteur proportionnel-intégral $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_p}\right)$. Quelles conditions doivent vérifier T et K pour préserver la stabilité du système en boucle fermée ?

3. Exercice : étude d'une régulation de niveau

On considère deux réservoirs d'eau, de section identique S (en m^2), reliés par l'intermédiaire d'une restriction hydraulique assurant que le débit $q_1(t)$ est proportionnel à la différence des hauteurs dans les réservoirs. Une restriction identique en sortie du deuxième réservoir assure que le débit $q_2(t)$ est proportionnel à la hauteur d'eau dans le deuxième réservoir. Le système est alimenté par un débit $q(t)$ (en m^3/s), contrôlé par l'opérateur du réseau de distribution d'eau. Le système est perturbé par le débit $p(t)$ (en m^3/s) représentant les infiltrations ou la pluie tombant dans le premier réservoir.



Dans un premier temps on étudie le système en boucle ouverte, avec $q(t) = q_0$ et $p(t) = p_0$.

- Écrire les équations décrivant le système et donner les valeurs des hauteurs à l'équilibre. Par la suite on notera $\delta x(t)$ les variations de $x(t)$ autour de sa valeur à l'équilibre x_0 .
- Écrire la fonction de transfert entre $\delta p(t)$ et $\delta h_2(t)$
- On suppose que $p(t)$ augmente brutalement de 1, quelle est l'allure de l'évolution de $\delta h_2(t)$ (valeur finale, dépassement, etc.) ?

On étudie à présent le système en boucle fermée avec :

$$\delta q(t) = K_c(h_{20} - h_2(t)) = -K_c\delta h_2(t)$$

- Écrire les équations du système en boucle fermée.
- Quelle est à présent la fonction de transfert entre $\delta p(t)$ et $\delta h_2(t)$?
- Comment évolue $\delta h_2(t)$ à une brusque augmentation de $\delta p(t)$?

4. Exercice : marge de robustesse et spécification temporelles en BF

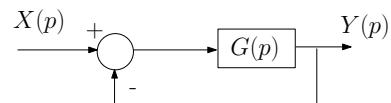
On considère le système suivant :

$$G(p) = \frac{4}{p(1 + \frac{p}{2})(1 + \frac{p}{8})}$$

- Tracer le diagramme de Bode de $G(p)$.
- Quelles sont les marges de phase et de gain du système ? Que peut-on conclure quant à sa stabilité en boucle fermée (avec retour et correcteur unitaires) ?
- Si on se contente de boucler le système avec un correcteur proportionnel unitaire, quels sont les temps de réponse et le dépassement approximatifs ?
- Quel gain choisir pour le correcteur pour obtenir une réponse en boucle fermée sans dépassement ?

5. Exercice : marge de robustesse et précision en BF

On considère le système représenté ci-dessous avec :



- Quelles sont les marges de phase et de gain de $G(p)$? Quel effet aurait un régulateur proportionnel sur ces marges ? Peut-on déstabiliser le système par un mauvais choix de ce régulateur ?
- Quelle est l'erreur en position lorsque l'entrée est donnée par $x(t) = \Gamma(t)$?
- Quelle est l'erreur en vitesse lorsque l'entrée est donnée par $x(t) = t$? Comment évolue cette erreur en fonction du gain d'un correcteur proportionnel ?

CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 5
SYNTHÈSE DE CORRECTEURS

1. Exercice : synthèse d'un correcteur à avance de phase

On considère le système défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2}{1 + 0.18p + 0.01p^2}$$

L'objectif de synthèse du correcteur $C(p)$ est que le système corrigé satisfasse les caractéristiques suivantes : temps de monté inférieur à $0.05\ s$ et dépassement inférieur à 10% (pas de contrainte sur l'erreur statique).

- (a) Tracez le diagramme de Bode du système en boucle ouverte sans correcteur et calculez les marges de robustesse de ce système (gain et phase) ainsi que le temps de montée et le dépassement en BO sans correcteur.
- (b) En utilisant les formules empiriques vues en cours, quelles caractéristiques doit avoir le transfert de boucle $L(p) = H(p)C(p)$ (z_{BF} , ω_{CBO} , M_ϕ^o) ?
- (c) Un correcteur proportionnel suffit-il ? Sinon, mis à part du gain, que doit apporter le correcteur ?
- (d) On considère le correcteur à avance de phase défini par :

$$C(p) = K_c \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \quad \text{avec } a > 1$$

- Tracez le diagramme de Bode de $C(p)$.
- Pour quelle valeur de ω le déphasage apporté par le correcteur est maximal ?
- Montrer que pour $K_c = 1$, le lieu de Nyquist de $C(p)$ est un demi cercle de centre $z_0 = (a + 1)/2$ et de rayon $r = (a - 1)/2$. En déduire la valeur du déphasage maximal.

- (e) Calculez les valeurs de a , T et K_c du correcteur répondant au CdC.

2. Exercice : synthèse d'un correcteur proportionnel-intégral

On considère le système défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2}{(1 + 2p) \left(1 + \frac{p}{63} + \frac{p^2}{3969} \right)}$$

Le cahier des charges pour le système, une fois corrigé, est : erreur statique nulle, dépassement inférieur à 10% et temps de montée minimal.

- (a) Quelle est la réponse indicielle du système en boucle ouverte sans correcteur ?
- (b) Quel correcteur choisir ?
- (c) Déterminer les paramètres du correcteur répondant au CdC.

Ce support de cours est à destination exclusive des étudiants inscrits à l'ENSGSI-INPL.

La reproduction à des fins pédagogiques hors ENSGSI en est interdite.

Toute demande devra être adressée à l'ENSGSI, qui transmettra à l'auteur