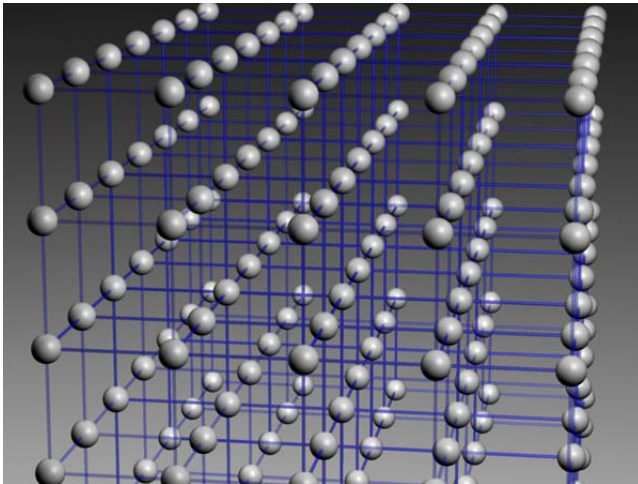


# Diktat kuliah MAP4022

## GELOMBANG



*Abdurrouf*  
*2016*

*Abdurrouf*

---

**Diktat kuliah MAP4022  
GELOMBANG**

.....  
*ketika angin surgawi membubung  
rinduku padamu tak lagi terbendung*  
.....

untuk almarhumah Ibu, pahlawan yang  
mengajariku mencintai ilmu.

RENCANA PROGRAM  
KEGIATAN PERKULIAHAN SEMESTER  
(RPKPS)  
JURUSAN FISIKA FMIPA  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
SEMESTER GANJIL 2014/2015

MATA KULIAH ; GELOMBANG  
KODE MATA KULIAH : MAP 4022  
BEBAN SKS : 3 SKS  
(3 SKS kuliah, 0 sks praktikum)  
TATAP MUKA : 14 Tatap muka @ 150 menit

Minggu ke-	Tujuan	Target perilaku	Materi
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mahasiswa memahami persamaan umum Gerak Harmonis Sederhana (GHS) dan mampu mencari solusinya</li> <li>Mahasiswa memahami konsep frekuensi pada GHS dan mampu mendefinisikannya</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 1.1 - 1.2
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mahasiswa memahami konsep energi pada GHS dan mampu memanfaatkannya untuk mencari frekuensi</li> <li>Mahasiswa mampu menunjukkan contoh GHS dan penerapannya dalam kehidupan</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 1.3 dan 1.5

Minggu ke-	Tujuan	Target perilaku	Materi
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami persamaan umum Gerak Harmonis Tereadam (GHR) dan mampu mencari solusinya</li> <li>• Mahasiswa memahami tipe GHR</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 2.1 - 2.2
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami parameter redaman pada GHR</li> <li>• Mahasiswa mampu memahami GHR elektronik</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 2.3 - 2.4
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami persamaan umum Gerak Harmonis Terpaksa (GHP) dan mampu mencari solusinya</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 3.1
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami perilaku amplitudo sebagai fungsi frekuensi</li> <li>• Mahasiswa memahami perilaku energi pada GHP</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 3.2 - 3.3
7	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami persamaan umum Gerak Harmonis Terkopel (GHK) dan mampu mencari solusinya</li> <li>• Mahasiswa memahami perilaku fisis GHK</li> <li>• Mahasiswa memahami contoh GHK</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 4.1 - 4.3
8-9	Pekan UTS		

Minggu ke-	Tujuan	Target perilaku	Materi
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami persamaan umum Gelombang Transversal (GT) dan mampu mencari solusinya</li> <li>• Mahasiswa memahami cara penggambaran GT</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 5.1
11	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami permasalahan bidang batas pada GT</li> <li>• Mahasiswa memahami konsep gelombang berdiri</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 5.2 - 5.3
12	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami konsep grup gelombang</li> <li>• Mahasiswa memahami efek Doppler</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 5.4 - 5.5
13	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa memahami persamaan umum Gelombang Longitudinal (GL) dan mampu mencari solusinya</li> <li>• Mahasiswa memahami perilaku energi pada GL</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 6.1 - 6.2
14	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa mengungkapkan kecepatan GL pada berbagai medium</li> <li>• Mahasiswa memahami konsep bidang batas pada GL</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 6.3 - 6.4

Minggu ke-	Tujuan	Target perilaku	Materi
15	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa mampu memahami konsep jalur transmisi, khususnya jalur transmisi ideal</li> <li>• Mahasiswa mampu memahami pantulan pada ujung jalur transmisi</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 7.1 - 7.2
16	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mahasiswa mampu memahami jalur transmisi sebagai filter</li> <li>• Mahasiswa mampu memahami jalur transmisi non ideal dan konsep absorpsi energi</li> </ul>	Pemahaman (C2) & Penerapan (C3)	Sub-bab 7.3 - 7.6
17-18	Pekan UAS		

# Prakata

Alhamdulillah, dengan izin Allah SWT diktat gelombang ini bisa ditulis.

Gelombang adalah salah satu cabang fisika yang meninjau perilaku osilasi dan gelombang dari entitas fisis, baik gelombang dan partikel, ketika perilaku gelombangnya lebih dominan. Konsep gelombang menjadi lebih penting karena mekanika kuantum, sebagai versi terbaru dari cara pandang fisika, bekerja dengan prinsip gelombang, dan karenanya sering disebut sebagai mekanika gelombang. Konsep gelombang dipakai antara lain untuk memahami fenomena fisis, seperti gelombang elektromagnetik, getaran mekanik, dan optika fisis. Di samping itu, konsep gelombang juga dipakai pada hampir semua cabang fisika seperti gelombang seismik di geofisika, USG di biofisika, pengolahan sinyal di instrumentasi, dan karakterisasi bahan pada fisika material.

Buku ini adalah kumpulan catatan penulis selama mengampu mata kuliah Gelombang dengan bobot 3 SKS di Jurusan Fisika UB, sejak tahun 2011 Sebagai rujukan utama, dipakai buku *The Physics of Vibration and Waves* karya Herbert J. Pain, edisi ke-6, tahun 2005. Penulis menyukai buku tersebut karena konsep yang disajikan selalu dikaitkan dengan realita fisis. Buku tersebut juga cukup berimbang dalam menggunakan pendekatan matematika dan logika. Karena saat ini banyak perguruan tinggi di Indonesia yang memakai buku Pain sebagai referensi, maka penulis memberanikan diri mengumpulkan catatan tersebut menuliskannya sebagai sebuah buku. Kami berharap buku ini membantu mahasiswa untuk memahami konsep gelombang.

Akhirnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada adik-adik mahasiswa Fisika UB yang mengambil mata kuliah gelombang, yang menjadi sumber inspirasi buku ini. Ucapan terima kasih yang tulus disampaikan kepada kolega penulis dalam mengajar mata kuliah Gelombang di Jurusan Fisika UB, Gancang Saroja S.Si., M.T., yang telah meyakinkan penulis untuk memulai pekerjaan ini. Ucapan terima kasih terbesar saya sampaikan kepada istri penulis (Triyuni Kurniawati, S.Ag., M.Pd.) dan putri kami (Ifti, Biba, dan Naila) yang berkurangi waktu kebersamaannya akibat aktivitas menulis ini.

Akhirnya, kami menunggu sumbang saran pembaca untuk kebaikan naskah ini. Semoga tulisan ini bermanfaat dan pahalanya bisa tersampaikan pada alamarhumah Ibu penulis, Ibu Istiqomah..

Malang, Medio September 2016

Penulis



# Daftar Isi

<b>1</b>	<b>Getaran Harmonis Sederhana</b>	<b>1</b>
1.1	Persamaan umum GHS dan solusinya . . . . .	1
1.2	Contoh GHS dan frekuensi naturalnya . . . . .	12
1.2.1	Pendekatan gaya pemulih . . . . .	12
1.2.2	Pendekatan torsi pemulih . . . . .	16
1.2.3	Pendekatan tegangan . . . . .	18
1.2.4	Pendekatan $s_{efektif}$ . . . . .	19
1.2.5	Pendekatan $s_{total}$ . . . . .	21
1.3	Energi pada GHS . . . . .	24
1.3.1	Hukum kekekalan energi mekanik . . . . .	27
1.3.2	Pendekatan potensial umum . . . . .	28
1.3.3	Integrasi langsung . . . . .	30
1.4	Superposisi GHS . . . . .	31
1.4.1	Superposisi 2 GHS sejajar . . . . .	31
1.4.2	Superposisi 2 GHS tegak lurus . . . . .	34
1.4.3	Superposisi $n$ GHS sejajar . . . . .	36
1.5	Penerapan GHS . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Getaran Harmonis Tereadam</b>	<b>41</b>
2.1	Persamaan umum GHR dan solusinya . . . . .	41
2.2	Berbagai tipe GHR . . . . .	43
2.2.1	GHR berat . . . . .	43
2.2.2	GHR kritis . . . . .	45
2.2.3	GHR ringan . . . . .	47
2.3	Parameter redaman . . . . .	49
2.3.1	Waktu relaksasi . . . . .	49
2.3.2	Penurunan logaritmik $\delta$ . . . . .	50
2.3.3	Faktor kualitas $Q$ . . . . .	50
2.3.4	Disipasi energi . . . . .	52
2.4	GHR pada sistem elektronik . . . . .	55

<b>3</b>	<b>Getaran Harmonis Terpaksa</b>	<b>59</b>
3.1	Persamaan GHP dan solusinya . . . . .	59
3.2	Perilaku GHP . . . . .	64
3.2.1	Perilaku $v_0$ sebagai fungsi $\omega$ . . . . .	65
3.2.2	Perilaku $\phi$ sebagai fungsi $\omega$ . . . . .	66
3.2.3	Perilaku $x_0$ sebagai fungsi $\omega$ . . . . .	68
3.2.4	Perilaku $a_0$ sebagai fungsi $\omega$ . . . . .	70
3.2.5	Komponen simpangan . . . . .	73
3.2.6	Vibrasi insulasi . . . . .	75
3.2.7	Efek suku tak tunak: ekspresi matematis . . .	76
3.3	Energi pada GHP . . . . .	77
3.3.1	Daya rerata . . . . .	77
3.3.2	Faktor kualitas . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Getaran Harmonis Terkopel</b>	<b>81</b>
4.1	Persamaan GHK dan solusinya . . . . .	81
4.2	Pengertian fisis GHK . . . . .	85
4.3	Berbagai model GHK . . . . .	89
4.3.1	OHS sejenis dengan kopel . . . . .	89
4.3.2	OHS sejenis tanpa kopel . . . . .	96
4.3.3	OHS tak sejenis . . . . .	100
4.3.4	GHK kompleks . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Gelombang Transversal</b>	<b>107</b>
5.1	Pers. umum gel. transversal . . . . .	107
5.2	Syarat batas . . . . .	116
5.2.1	Impedansi . . . . .	116
5.2.2	Gelombang pada bidang batas . . . . .	117
5.2.3	Reflektansi dan transmitansi: rasio laju energi	121
5.2.4	Kesesuaian impedansi . . . . .	122
5.3	Gelombang berdiri . . . . .	126
5.3.1	Batasan gelombang berdiri . . . . .	126
5.3.2	Energi pada tali yang bergetar . . . . .	128
5.4	Grup gelombang . . . . .	130
5.4.1	Kecepatan grup . . . . .	130
5.4.2	Teori lebar pita . . . . .	134
5.5	Struktur Periodik . . . . .	137
5.6	Efek Doppler . . . . .	140

<b>6</b>	<b>Gelombang Longitudinal</b>	<b>145</b>
6.1	Gelombang bunyi dalam gas . . . . .	145
6.2	Energi pada gelombang bunyi . . . . .	150
6.3	Kecepatan Gelombang Longitudinal . . . . .	153
6.3.1	Gelombang longitudinal pada pegas . . . . .	153
6.3.2	Gelombang longitudinal pada kawat elastik . .	154
6.3.3	Gelombang longitudinal pada zat padat . . . .	154
6.3.4	Gelombang longitudinal pada struktur periodik	157
6.4	Gelombang bunyi pada bidang batas . . . . .	159
<b>7</b>	<b>Jalur Transmisi</b>	<b>165</b>
7.1	Jalur Transmisi Ideal . . . . .	165
7.2	Pantulan pada ujung jalur transmisi . . . . .	169
7.3	Jalur transmisi sebagai filter . . . . .	172
7.4	Jalur transmisi dengan resistansi . . . . .	177
7.5	Absorpsi Energi . . . . .	180



# Daftar Tabel

1.1	Pola pendekatan gaya pemulih . . . . .	20
1.2	Contoh GHS (1) . . . . .	25
1.3	Contoh GHS (2) . . . . .	26
1.4	Pola pendekatan energi . . . . .	31
1.5	Pemanfaatan GHS . . . . .	39
2.1	Tipikal nilai $Q$ untuk beberapa osilator [2] . . . . .	51
2.2	Review faktor redaman dalam GHR . . . . .	51
2.3	Perbandingan antara GHR mekanis dan GHR listrik .	55
2.4	Perbandingan antara GHR dan GHS . . . . .	56
3.1	Jenis getaran harmonis . . . . .	60
3.2	Solusi GHP untuk berbagai gaya pemaksa . . . . .	63
3.3	Ketergantungan $x_0$ , $v_0$ , $a_0$ , dan $\phi$ pada $\omega$ . . . . .	72
3.4	Resonansi pada GHP . . . . .	72
5.1	Contoh pembagian gelombang . . . . .	107
5.2	Perbandingan ( $r$ dan $t$ ) versus ( $R$ dan $T$ ) . . . . .	121
6.1	. . . . .	159



# Daftar Gambar

1.1	Contoh GHS: “massa + pegas” . . . . .	2
1.2	Gambaran simpangan, kecepatan, dan percepatan pada GHS . . . . .	8
1.3	Gambaran fase awal getaran. . . . .	9
1.4	Contoh GHS translasi: sistem “massa + pegas vertikal”	13
1.5	Contoh GHS translasi: sistem dawai. . . . .	14
1.6	Contoh GHS translasi: bandul matematis. . . . .	15
1.7	Contoh GHS akibat fluida teraduk . . . . .	15
1.8	Contoh GHS akibat ayunan . . . . .	18
1.9	Contoh GHS listrik: rangkaian LC. . . . .	19
1.10	Contoh batang yang ditarik (kiri) dan batang berlubang yang dipuntir (kanan). . . . .	20
1.11	Distribusi energi pada GHS . . . . .	28
1.12	Skema superposisi 2 GHS sejajar dengan amplitudo sama	32
1.13	Skema superposisi 2 GHS sejajar dengan frekuensi sama.	33
1.14	Skema superposisi 2 GHS tegak lurus dengan frekuensi sama tetapi amplitudo berbeda . . . . .	34
1.15	Berbagai pola superposisi 2 GHS tegak lurus dengan amplitudo dan frekuensi yang sama . . . . .	35
1.16	Skema superposisi 2 GHS tegak lurus dengan amplitudo, frekuensi, dan fase awal yang berbeda . . . . .	37
1.17	Skema superposisi $n$ GHS sejajar dengan $\delta$ konstan . .	38
2.1	Contoh GHR mekanis (kiri), GHR fluida (tengah), dan GHR elektrik (kanan) . . . . .	42
2.2	Contoh GHR berat dengan berbagai kondisi awal . . .	44
2.3	Contoh GHR kritis dengan $x(0) = 0$ dan $\dot{x}(0) \neq 0$ . . .	45
2.4	Contoh GHR ringan. . . . .	47
2.5	<i>Micromachined cantilever</i> . . . . .	49
2.6	Hubungan antar parameter redaman . . . . .	52

2.7	Rangkaian RLC . . . . .	54
3.1	Diagram fase pada GHP mekanis . . . . .	61
3.2	Perilaku amplitudo kecepatan $v_0$ sebagai fungsi frekuensi $\omega$ . . . . .	65
3.3	Perilaku sudut fase $\phi$ sebagai fungsi frekuensi $\omega$ . . . . .	66
3.4	Perilaku amplitudo simpangan $x_0$ sebagai fungsi frekuensi $\omega$ . . . . .	69
3.5	Komponen simpangan . . . . .	74
3.6	Vibrasi insulasi . . . . .	75
3.7	Efek suku tak tunak pada simpangan . . . . .	76
3.8	Plot $P_{rata}$ sebagai fungsi $\omega$ . . . . .	78
3.9	Penguatan amplitudo simpangan pada berbagai nilai $Q$ . . . . .	80
4.1	Bandul matematis terkopel ditinjau dari sisi komponen pembentuknya (kiri) dan gerakannya (kanan) . . . . .	82
4.2	Gerak sefase (panel a) dan berlawanan fase (panel b) pada GHK . . . . .	86
4.3	Gerak pusat massa $x = \frac{1}{2}(X + Y)$ . . . . .	87
4.4	Gerak relatif antar osilator $y = \frac{1}{2}(X - Y)$ . . . . .	88
4.5	Nilai $x$ dan $y$ . . . . .	88
4.6	Contoh GHK yang tersusun atas “2 GHS + kopel” . . . . .	89
4.7	Sistem molekul diatomik (atas) dan sistem molekul triatomik (bawah). . . . .	92
4.8	Sistem GHK yang terdiri atas 2 OHS . . . . .	96
4.9	Plot nilai amplitudo arus sebagai fungsi frekuensi pada kopling induktor . . . . .	99
4.10	Sistem 3 OHS . . . . .	99
4.11	Kisi 2 dimensi (kiri) dan kisi 3 dimensi (kanan). . . . .	100
4.12	Sistem GHK yang tersusun atas 2 OHS tak sejenis. . . . .	101
4.13	GHK dengan gaya redaman dan gaya pemaksa. . . . .	104
5.1	Gelombang pada tali . . . . .	108
5.2	Kecepatan gelombang . . . . .	115
5.3	Gelombang pada tali . . . . .	117
5.4	Gelombang pada bidang batas . . . . .	118
5.5	Pemantulan pulsa pada bidang batas . . . . .	120
5.6	Gelombang berdiri . . . . .	127
5.7	Superposisi dua gelombang . . . . .	130
5.8	Hubungan dispersi . . . . .	131
5.9	Perubahan indeks bias $n$ terhadap frekuensi $\omega$ . . . . .	135



5.10	Gelombang dalam domain frekuensi, $\omega$ . . . . .	135
5.11	Gelombang pada Gambar 5.10, dinyatakan dalam domain waktu, $t$ . . . . .	136
5.12	Plot $\sin \left  \frac{ka}{2} \right $ sebagai fungsi $k$ . . . . .	138
5.13	Ketergantungan $\omega$ pada $k$ . . . . .	139
5.14	Sumber $S$ bergerak dengan kecepatan $u$ mendekati pengamat $P$ yang diam . . . . .	140
6.1	Perubahan volume gas akibat tekanan gelombang bunyi	147
6.2	Perbedaan fase beberapa kuantitas terhadap simpangan	149
6.3	Pergeseran yang terjadi pada gelombang longitudinal pada zat padat. . . . .	156
6.4	Gelombang longitudinal pada kisi. . . . .	158
6.5	Gelombang longitudinal pada bidang batas 2 medium.	160
7.1	Jalur transmisi ideal . . . . .	166
7.2	Pantulan pada ujung jalur transmisi . . . . .	169
7.3	Jalur transmisi pendek . . . . .	170
7.4	Jalur transmisi sebagai filter. . . . .	173
7.5	Konstanta propagasi . . . . .	173
7.6	Kasus $ \alpha  = 1$ . . . . .	176
7.7	Jalur transmisi dengan resistansi . . . . .	177
7.8	Profil tegangan pada jalur transmisi dengan resistansi	178



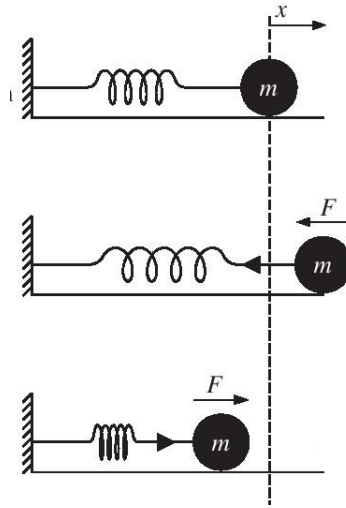
# Bab 1

## Getaran Harmonis Sederhana

### 1.1 Persamaan umum GHS dan solusinya

Getaran harmonik sederhana atau GHS (*simple harmonic oscillation* atau SHO) adalah gerakan bolak-balik di sekitar titik kesetimbangan. Akibat gerakan tersebut, partikel akan bergerak bolak-balik dengan simpangan berbentuk garis lurus (atau hampir lurus). Sistem yang mengalami GHS dikenal sebagai osilator harmonik sederhana atau OHS (*simple harmonic oscillator* atau SHO).

Salah satu contoh OHS adalah massa yang dihubungkan dengan pegas, dan kemudian ditarik/ditekan dari posisi setimbangnya sehingga massa mengalami GHS, seperti ditunjukkan pada Gambar 1.1. Pada panel atas, ditunjukkan pegas dalam keadaan setimbang (di mana simpangannya sama dengan nol  $x = 0$ ). Pada panel tengah, massa  $m$  dalam keadaan menyimpang ke kanan. Seperti kita ketahui, ketika massa sudah mencapai jarak terjauh ke kanan, maka massa tersebut akan kembali bergerak ke kiri. Ini berarti bahwa ketika massa sedang di kanan ( $x = \text{positif}$ ), ada gaya yang mengarahkan massa tersebut untuk bergerak ke kiri, atau  $F = \text{negatif}$ . Gaya tersebut dikenal sebagai gaya pemulih. Pada panel bawah, massa dalam keadaan menyimpang ke kiri ( $x = \text{negatif}$ ), sedangkan gaya pemulihnya mengarah ke kanan ( $F = \text{positif}$ ). Secara umum, dapat disimpulkan bahwa arah gaya pemulih selalu berlawanan dengan arah simpangan dan menyebabkan benda menuju titik kesetimbangan,  $F \propto -x$ . Hal ini bisa dituliskan dalam hukum Hooke



Gambar 1.1: Contoh GHS: “massa + pegas”

$$F = -sx, \quad (1.1)$$

di mana  $s$  adalah konstanta pegas.<sup>1</sup>

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa GHS dicirikan oleh

- adanya gerakan bolak-balik yang bersifat periodik, di sekitar titik kesetimbangan
- adanya gaya pemulih atau momen inersia yang mengarah ke titik kesetimbangan
- adanya pergantian bentuk energi yang kontinu antara energi kinetik dan energi potensial.

Kita tinjau kembali sistem massa dan pegas. Mengacu pada Persamaan (1.1), satu-satunya gaya yang bekerja adalah gaya pemulih, yang besarnya diberikan oleh hukum Hooke  $F = -sx$ . Dengan menggunakan hukum II Newton,  $\Sigma F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$ , maka persamaan gaya untuk GHS dapat ditulis sebagai

$$-sx = m\ddot{x}.$$

---

<sup>1</sup>Pada kebanyakan buku, dipakai notasi  $k$  untuk konstanta pegas. Pada buku ini, dipakai notasi  $s$  untuk konstanta pegas, sedangkan  $k$  dipakai untuk notasi bilangan gelombang.

Dengan demikian, didapatkan persamaan untuk getaran harmonis sederhana sistem massa pegas sebagai berikut

$$\ddot{x} + \frac{s}{m}x = 0. \quad (1.2)$$

Persamaan terakhir dapat dibandingkan dengan persamaan umum GHS

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.3)$$

di mana  $\omega$  merupakan karakteristik sistem dan dikenal sebagai frekuensi getaran. Dengan membandingkan Persamaan (1.2) dan Persamaan (1.3), didapatkan frekuensi getaran untuk sistem massa pegas adalah

$$\omega = \sqrt{\frac{s}{m}} \quad (1.4)$$

**Contoh soal:**

Tunjukkan bahwa  $\frac{s}{m}$  pada persamaan  $\ddot{x} + \frac{s}{m}x = 0$  memiliki dimensi kuadrat frekuensi.

**Penyelesaian:**

Dari persamaan GHS,  $\ddot{x} + \frac{s}{m}x = 0$ , didapatkan bahwa

$$\text{dimensi} \left[ \frac{s}{m} \right] = \text{dimensi} \left[ \frac{\ddot{x}}{x} \right].$$

Dapat dihitung bahwa

$$\text{dimensi} \left[ \frac{\ddot{x}}{x} \right] = \frac{[L][T]^{-2}}{[L]} = \frac{1}{[T]^2}.$$

Terlihat bahwa dimensi  $\frac{s}{m}$  adalah sama dengan dimensi frekuensi kuadrat, sehingga  $\frac{s}{m} = \omega^2$ , atau  $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$ .

**Soal:**

1. Tunjukkan bahwa  $\omega$  pada persamaan  $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$  memiliki dimensi frekuensi
2. Carilah frekuensi GHS pada bandul matematis, yang persamaan umumnya adalah  $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ .
3. Carilah frekuensi GHS pada rangkaian LC, yang persamaan umumnya adalah  $L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ .
4. Carilah frekuensi GHS pada piringan yang berputar, yang persamaan umumnya adalah  $\ddot{\theta} + \frac{c}{I}\theta = 0$ , dengan  $I$  adalah momen inersia dan  $c$  adalah konstanta puntir.

Sekarang kita mencari solusi untuk persamaan umum GHS. Dengan mengacu pada Persamaan (1.3), dapat diduga  $x$  merupakan fungsi dari frekuensi  $\omega$  dan waktu  $t$ , atau  $x = x(\omega, t)$ . Ungkapan untuk  $x$  dapat diperoleh dengan menggunakan metode operator, metode pemisalan, atau metode integrasi secara langsung <sup>2</sup>.

**Soal:**

Dengan menggunakan Persamaan (1.3), cek apakah persamaan berikut menggambarkan suatu GHS atau tidak.

- $x = x_0 \sin \omega t$
- $x = x_0 \cos \omega t$
- $x = x_0 \sin (\omega t + \phi)$
- $x = x_0 \cos (\omega t + \phi)$
- $x = x_{01} \sin \omega t + x_{02} \cos \omega t$
- $x = x_0 \sinh (\omega t + \phi)$
- $x = x_0 \cosh (\omega t + \phi)$
- $x = x_0 \exp (-i\omega t)$
- $x = x_0 \exp (-\omega t)$

<sup>2</sup>Buku ini memakai pendekatan metode operator. Metode yang lain hanya dipakai sebagai pembandingan

**Contoh soal:**

Turunkan solusi persamaan GHS dengan metode operator.

**Penyelesaian:**

Misalkan kita definisikan operator turunan  $D = \frac{d}{dt}$ , maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$(D^2 + \omega^2)x = 0.$$

Karena  $x \neq 0$ , maka  $(D^2 + \omega^2) = 0$  atau  $D = \pm i\omega$ . Untuk  $D = +i\omega$ , didapatkan  $Dx = i\omega x$  atau  $\frac{dx}{dt} = i\omega x$ , sehingga

$$x = Ae^{i\omega t}.$$

Dengan cara yang sama,  $D = -i\omega$  menghasilkan  $x = Be^{-i\omega t}$ . Dengan demikian, solusi lengkapnya adalah

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}.$$

**Contoh Soal:**

Turunkan solusi persamaan GHS dengan metode pemisalan

**Penyelesaian:**

Misalkan solusi GHS dinyatakan dalam bentuk

$$x = Be^{pt}.$$

Dengan demikian, kita dapatkan  $\dot{x} = pBe^{pt}$  dan  $\ddot{x} = p^2Be^{pt}$ . Jika hasil tersebut kita substitusikan ke Persamaan (1.3), maka didapatkan

$$p^2Be^{pt} + \omega^2Be^{pt} = 0.$$

Persamaan terakhir hanya benar bila  $p = -\omega^2$ , atau  $p = \pm i\omega$ . Dengan demikian, solusi GHS-nya adalah

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}.$$

**Contoh soal:**

Turunkan solusi persamaan GHS dengan integrasi langsung.

**Penyelesaian:**

Persamaan umum GHS adalah  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ . Misalkan  $u = \frac{dx}{dt}$ , maka  $\ddot{x} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{du}{dx}$  sehingga persamaan GHS menjadi

$$\begin{aligned} udu &= -\omega^2 x dx \\ \frac{1}{2}u^2 &= -\omega^2 \frac{1}{2}x^2 \\ \frac{dx}{dt} &= \pm i\omega x \\ \frac{dx}{x} &= \pm i\omega dt \\ x &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Ternyata ketiga metode (operator, pemisalan, dan integrasi langsung) menghasilkan solusi yang sama untuk GHS, yaitu:

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}. \quad (1.5)$$

Pertanyaan selanjutnya adalah: bisakah solusi di atas dinyatakan dalam bentuk lain?

**Contoh soal:**

Tunjukkan bahwa solusi persamaan GHS juga dapat dinyatakan sebagai  $x = C \cos \omega t + D \sin \omega t$ .

**Penyelesaian:**

Solusi GHS  $x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$  juga dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} x &= A [\cos \omega t + i \sin \omega t] + B [\cos \omega t - i \sin \omega t] \\ &= (A + B) \cos \omega t + i(A - B) \sin \omega t \\ &= C \cos \omega t + D \sin \omega t, \end{aligned}$$

di mana  $C = A + B$  dan  $D = i(A - B)$ .

**Soal:**

1. Dengan memilih  $C = E \sin \phi$  dan  $D = E \cos \phi$ , tunjukkan bahwa solusi persamaan GHS  $x = C \cos \omega t + D \sin \omega t$  juga dapat dinyatakan sebagai  $x = E \sin(\omega t + \phi)$ .
2. Dengan memilih  $C = F \cos \phi$  dan  $D = -F \sin \phi$ , tunjukkan bahwa solusi persamaan GHS  $x = C \cos \omega t + D \sin \omega t$  juga dapat dinyatakan sebagai  $x = F \cos(\omega t + \phi)$ .



Sekarang, kita dapat katakan bahwa solusi persamaan umum getaran harmonis sederhana dapat dinyatakan dalam salah satu ungkapan berikut

$$\begin{aligned}
 x &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \\
 x &= C \sin \omega t + D \cos \omega t \\
 x &= E \sin (\omega t + \phi_1) \\
 x &= F \cos (\omega t + \phi_2)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pada persamaan di atas

- $\omega$  adalah frekuensi getaran dan merupakan karakteristik sistem.  $\omega$  terkait adalah frekuensi linier  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  dan periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $t$  adalah waktu.
- $A, B, C, D, E$ , dan  $F$  adalah amplitudo, sedang  $\phi$  adalah fase. Nilai  $A, B, C, D, E, F, \phi_1$ , dan  $\phi_2$  bergantung pada syarat batas

Nilai  $x$  merepresentasikan jarak partikel dari titik kesetimbangannya dan dikenal sebagai simpangan. Arah  $x$  menunjukkan arah getaran. Nilai  $x =$  positif menunjukkan simpangan ke atas atau ke kanan, sedangkan nilai  $x =$  negatif menunjukkan simpangan ke bawah atau ke kiri. Kuantitas  $x$  juga dapat diganti  $y$  ataupun  $z$  tergantung arah getarannya. Pada getaran yang berbentuk rotasi,  $x$  bahkan dapat diganti dengan  $\theta$ .

Setelah mendapatkan ungkapan untuk simpangan  $x$ , kita dapat mencari ungkapan untuk kecepatan  $\dot{x}$  dan percepatan  $\ddot{x}$ . Misalkan kita pilih simpangan dalam bentuk

$$x = a \sin (\omega t + \phi),$$

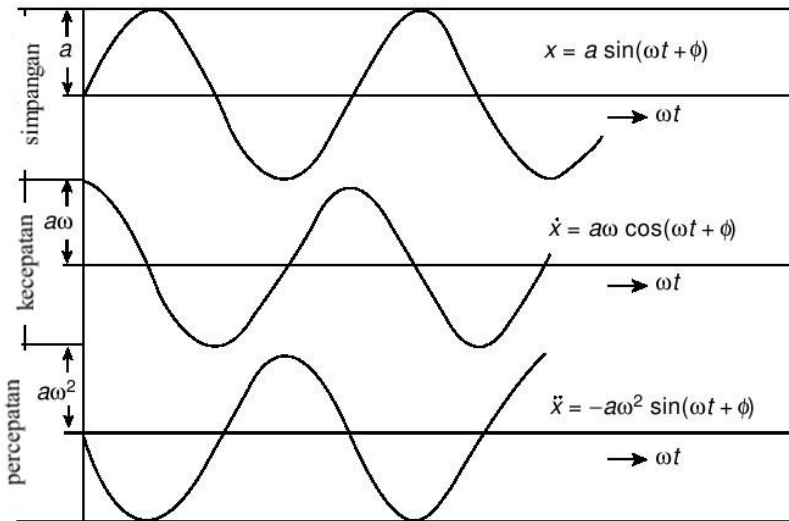
maka kecepatannya adalah

$$\dot{x} = a\omega \cos (\omega t + \phi),$$

dan percepatannya adalah

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \sin (\omega t + \phi) = -\omega^2 x.$$

Terlihat bahwa  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  dan memenuhi persamaan umum GHS  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ . Gambaran simpangan, kecepatan, dan percepatan



Gambar 1.2: Gambaran simpangan, kecepatan, dan percepatan pada GHS

disajikan pada Gambar 1.2.

**Contoh soal:**

Tinjau persamaan  $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ .

- Turunkan ungkapan untuk kecepatan  $\dot{x}$
- Turunkan ungkapan untuk percepatan  $\ddot{x}$
- Uji apakah persamaan tersebut menggambarkan GHS atau tidak.

**Penyelesaian:**

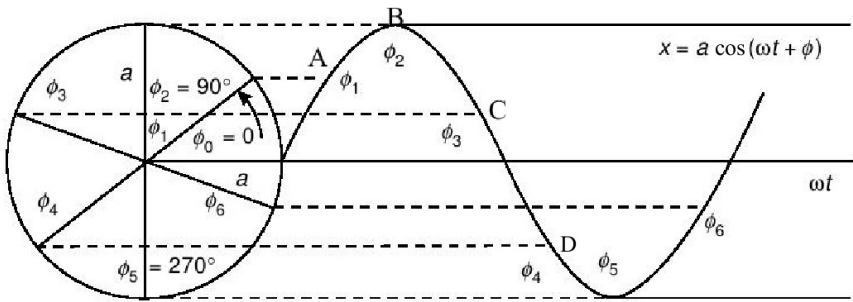
Karena  $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ , maka kecepatannya adalah

$$\dot{x} = -x_0\omega \sin(\omega t + \phi),$$

dan percepatannya adalah

$$\ddot{x} = -x_0a\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x.$$

Terlihat bahwa persamaan  $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$  memenuhi persamaan umum GHS  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ . Ini berarti  $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$  menggambarkan suatu GHS.



Gambar 1.3: Gambaran fase awal getaran.

Sekarang kita diskusikan fase. Nilai fase  $\phi$  terkait posisi benda (atau nilai simpangan)  $x$  pada saat getaran dimulai pada  $t = 0$ . Karena itu fase sering pula disebut sebagai fase awal. Ungkapan fase awal  $\phi$  bergantung pada

- pemilihan ungkapan gelombang: sin atau cos
- keadaan awal:  $x(0)$  dan  $\dot{x}(0)$ .

Gambaran fase disajikan pada Gambar 1.3.

#### Contoh soal:

Nyatakan fase awal getaran tersebut pada Gambar 1.3, jika getaran

- dinyatakan dalam  $x = a \sin(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik A
- dinyatakan dalam  $x = a \sin(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik B
- dinyatakan dalam  $x = a \cos(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik A
- dinyatakan dalam  $x = a \cos(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik B

#### Penyelesaian:

- Jika GHS dinyatakan dalam  $x = a \sin(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik A, maka  $\phi = \phi_1 = 2n\pi + \pi/4$  rad.
- Jika GHS dinyatakan dalam  $x = a \sin(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik B, maka  $\phi = \phi_2 = 2n\pi + \pi/2$  rad.
- Jika GHS dinyatakan dalam  $x = a \cos(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik A, maka  $\phi = \phi_1 = 2n\pi - \pi/4$  rad.

- Jika GHS dinyatakan dalam  $x = a \cos(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik  $B$ , maka  $\phi = \phi_2 = 2n\pi + 0 \text{ rad}$ .

**Soal:**

Nyatakan fase awal getaran tersebut pada Gambar 1.3, jika getaran

- dinyatakan dalam  $x = a \sin(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik  $C$
- dinyatakan dalam  $x = a \sin(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik  $D$
- dinyatakan dalam  $x = a \cos(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik  $C$
- dinyatakan dalam  $x = a \cos(\omega t + \phi)$  dan dimulai dari titik  $D$

**Contoh soal:**

Tinjau sebuah bandul bergetar dengan amplitudo  $a$ . Jika dipilih solusi dalam bentuk  $x = a \sin(\omega t + \phi)$  dan  $x(0) = a$ , carilah (a) konstanta fase  $\phi$  dan (b) nilai  $\omega t$  sehingga  $x = a/\sqrt{2}$ .

**Penyelesaian:**

Syarat batas  $x(0) = a$  memberi kita persamaan  $x(0) = a \sin(\phi) = a$  sehingga  $\phi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$  dan  $x = a \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ , dengan  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Kondisi  $x = a/\sqrt{2}$  dipenuhi ketika  $x = a \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + 2n\pi) = a/\sqrt{2}$  atau  $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin(\frac{\pi}{4})$ . Dengan demikian, maka  $\omega t + \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{4}$  atau  $\omega t = \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ .

**Soal:**

1. Tinjau sebuah bandul bergetar dengan amplitudo  $a$ . Jika dipilih solusi dalam bentuk  $x = a \cos(\omega t + \phi)$  dan  $x(0) = a$ , carilah (a) konstanta fase  $\phi$  dan (b) nilai  $\omega t$  sehingga  $x = a/\sqrt{2}$ .
2. Tinjau sebuah bandul bergetar dengan amplitudo  $a$ . Jika dipilih solusi dalam bentuk  $x = a \sin(\omega t + \phi)$  dan  $x(0) = a$ , carilah (a) konstanta fase  $\phi$  dan (b) nilai  $\omega t$  sehingga  $x = a/2$ .
3. Tinjau sebuah bandul bergetar dengan amplitudo  $a$ . Jika dipilih solusi dalam bentuk  $x = a \cos(\omega t + \phi)$  dan  $x(0) = a$ , carilah (a) konstanta fase  $\phi$  dan (b) nilai  $\omega t$  sehingga  $x = a/2$ .

**Soal:**

Simpangan sebuah getaran dinyatakan dengan persamaan  $y = 5 \cos \left( 4\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$  cm.

- Berapakah nilai amplitudo ( $A$ ), frekuensi sudut ( $\omega$ ), frekuensi linier ( $f$ ), periode ( $T$ ), dan fase awal ( $\phi$ )?
- Gambarkan getaran tersebut
- Berapakah nilai simpangan pada saat  $t = 2$  s?
- Berapakah nilai amplitudo kecepatannya?
- Berapakah nilai amplitudo percepatannya?

**Contoh soal:**

Tinjau sistem pegas + massa, dengan  $m = 0,8$  kg dan  $s = 180 \text{ Nm}^{-1}$ . Pada  $t = 0$  s, massa berada pada jarak 0,04 m dari titik kesetimbangan serta bergerak dengan kecepatan 0,5 m/s menjauhi titik kesetimbangan. Jika dipilih solusi dalam bentuk  $x = A \cos (\omega t + \phi)$ , carilah nilai  $A$ ,  $\omega$ , dan  $\phi$ .

**Penyelesaian**

Nilai frekuensinya adalah  $\omega = \sqrt{s/m} = 15 \text{ rad/s}$ . Selanjutnya dengan  $x = A \cos (\omega t + \phi)$ , persamaan syarat batasnya adalah

$$x_0 = A \cos \phi = 0,04 \quad (\#).$$

Persamaan untuk kecepatannya adalah  $\dot{x} = -\omega A \sin (\omega t + \phi)$ , dengan syarat batas

$$\dot{x}_0 = -15A \sin \phi = 0,5 \quad (\#\#).$$

$(\#)^2 + (\#\#)^2$  menghasilkan  $A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 0,04^2 + \left( \frac{0,5}{15} \right)^2$  atau  $A = 0,052 \text{ m}$ , sedangkan  $\frac{(\#\#)}{(\#)}$  menghasilkan  $\tan \phi = \frac{-0,5/15}{0,04} = -\frac{5}{6}$ , sehingga  $\phi = -39,81^\circ = 320,19^\circ = 5,59 \text{ rad}$ . Dengan demikian persamaan getarannya adalah  $x = 0,052 \cos (15t + 5,59)$ .

**Soal:**

Tinjau sistem pegas + massa, dengan  $m = 0,8$  kg dan  $s = 180 \text{ Nm}^{-1}$ . Pada  $t = 0$  s, massa berada pada jarak 0,04 m dari titik kesetimbangan serta bergerak dengan kecepatan 0,5 m/s menjauhi titik kesetimbangan. Jika dipilih solusi dalam bentuk  $x = A \sin (\omega t + \phi)$ , carilah nilai  $A$ ,  $\omega$ , dan  $\phi$ .

## 1.2 Contoh GHS dan frekuensi naturalnya

Secara umum, terdapat 6 kategori GHS, yaitu

- GHS akibat translasi
- GHS akibat ayunan kecil
- GHS akibat rotasi (puntir)
- GHS akibat pelenturan
- GHS akibat gerak fluida
- GHS akibat rangkaian listrik

Setiap GHS memiliki frekuensi yang khas, yang dikenal sebagai frekuensi naturalnya. Pada sub bab ini kita akan diskusikan berbagai contoh GHS dan menurunkan ungkapan frekuensinya dengan pendekatan gaya pemulih. Tergantung pada jenis getarannya, pendekatan di atas bisa muncul dalam bentuk

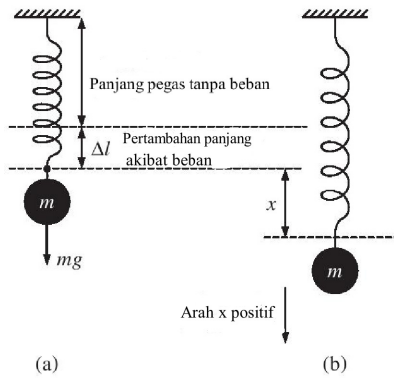
- pendekatan gaya pemulih, misalnya pada GHS translasi, ayunan kecil, pelenturan, dan fluida
- pendekatan torsi pemulih, misalnya pada GHS rotasi dan ayunan
- pendekatan tegangan, misalnya pada GHS rangkaian listrik

### 1.2.1 Pendekatan gaya pemulih

Pendekatan gaya pemulih dapat diterapkan pada GHS yang gerak osilasinya membentuk garis lurus atau hampir lurus, seperti pada GHS translasi, ayunan kecil, pelenturan, dan fluida. Pada pendekatan ini, kita harus mendefinisikan gaya pemulih, yaitu gaya yang menyebabkan benda yang berosilasi menuju titik kesetimbangannya. Contoh gaya pemulih adalah gaya pegas pada sistem “massa + pegas horizontal”, yang dibahas pada sub bab 1.1. Setelah ungkapan gaya pemulih didapatkan, selanjutnya kita pakai hukum II Newton,

$$F_{\text{pemulih}} = m\ddot{x}. \quad (1.7)$$

Dengan memanfaatkan persamaan di atas, kita dapat memperoleh ungkapan frekuensi GHS terkait.



Gambar 1.4: Contoh GHS translasi: sistem “massa + pegas vertikal”

**Contoh soal:**

Turunkan ungkapan frekuensi untuk sistem “massa + pegas vertikal”, seperti ditunjukkan pada Gambar 1.4.

**Penyelesaian**

Akibat adanya beban  $mg$ , maka persamaan gaya pada titik kesetimbangan (Gambar a) adalah

$$F = mg - s\Delta l = 0$$

Persamaan gaya pada sebarang posisi  $x$  dari titik kesetimbangan (Gambar b) adalah

$$\begin{aligned} F &= mg - s(\Delta l + x) \\ &= (mg - s\Delta l) - sx = -sx. \end{aligned}$$

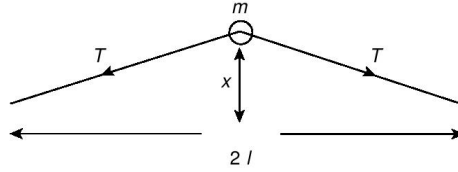
Mengingat  $F = m\ddot{x}$ , maka

$$\ddot{x} + \frac{s}{m}x = 0,$$

sehingga didapatkan  $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$ , seperti pada “massa + pegas horizontal”.

**Contoh soal:**

Turunkan ungkapan frekuensi untuk sistem dawai, seperti ditunjukkan pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5: Contoh GHS translasi: sistem dawai.

**Penyelesaian**

Gaya pemulihnya adalah

$$F = -2T \sin \theta \approx -2T \tan \theta = -2T \frac{x}{l}.$$

Dengan demikian, persamaan GHS-nya adalah

$$\ddot{x} + \frac{2T}{lm} x = 0,$$

sehingga frekuensinya adalah  $\omega = \sqrt{\frac{2T}{lm}}$ .

**Soal:**

Carilah frekuensi pada sistem dawai jika panjang tali  $2l$  dan benda berada pada jarak  $a$  terhadap ujung kiri.

Sistem GHS berikutnya yang bisa dianalisis dengan pendekatan gaya pemulih adalah GHS ayunan. Kita tinjau sebuah massa  $m$  diikat di ujung tali sepanjang  $l$ , dan diayunkan dengan sudut simpangan  $\theta$  yang kecil, pada daerah dengan percepatan gravitasi  $g$ . Sistem ini dikenal sebagai bandul matematis dan ditunjukkan pada Gambar 1.6. Karena  $\theta$  kecil, kita perlakukan gerak massa sebagai gerak translasi. Gaya pemulihnya adalah

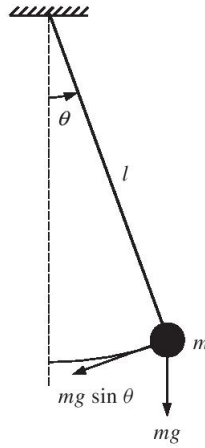
$$\begin{aligned} F &\approx -mg \sin \theta \\ &\approx -mg \tan \theta \\ &= -mg \frac{x}{l}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan GHS-nya adalah

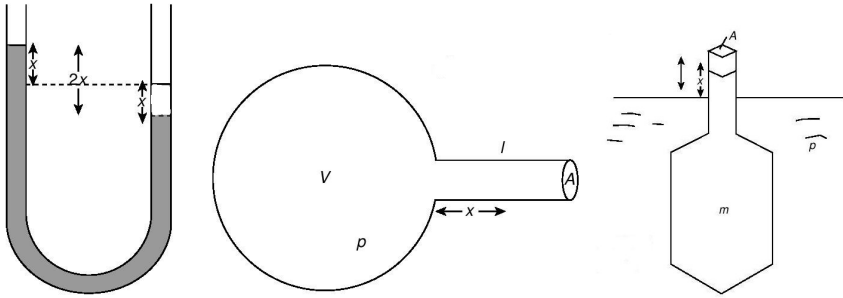
$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0.$$

Dengan membandingkan persamaan terakhir dan Persamaan (1.3), didapatkan frekuensi getaran bandul matematis  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .





Gambar 1.6: Contoh GHS translasi: bandul matematis.



Gambar 1.7: Contoh GHS akibat fluida teraduk: pipa-U (kiri), resonator Helmholtz (tengah), dan hidrometer (kanan)

Contoh GHS berikutnya yang frekuensinya dapat diperoleh dengan konsep gaya pemulih adalah GHS akibat gerakan fluida, seperti pipa-U, resonator Helmholtz, dan hidrometer (lihat Gambar 1.7). Lebih dahulu kita tinjau pipa-U (Gambar 1.7 (kiri)). Pada pipa-U, gaya pemulihnya berasal dari gaya berat fluida dengan panjang  $2x$ . Jika massa jenis fluida adalah  $\rho$  dan penampang tabung adalah  $A$ , maka gaya beratnya adalah

$$F = -\rho g 2x A.$$

Selanjutnya, karena gaya berat tersebut bisa menggerakkan seluruh fluida dengan panjang  $l$ , maka berlaku

$$-2\rho g A x = \rho A l \ddot{x}.$$

Dengan demikian, persamaan GHS pada pipa-U adalah

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l}x = 0,$$

yang menunjukkan frekuensinya adalah  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ .

**Contoh soal:**

Turunkan ungkapan frekuensi untuk resonator Helmholtz, seperti ditunjukkan pada Gambar 1.7 (tengah).

**Penyelesaian**

Pada resonator Helmholtz, gaya pemulihnya adalah  $F_{\text{pemulih}} = -\frac{\gamma p x A^2}{V}$ , sehingga persamaan gayanya adalah

$$-\frac{\gamma p x A}{V} = \rho A l \ddot{x}.$$

Dengan demikian, maka persamaan GHS-nya adalah

$$\ddot{x} + \frac{\gamma p A}{l \rho V} x = 0,$$

di mana  $\omega = \sqrt{\frac{\gamma p A}{l \rho V}} = v \sqrt{\frac{A}{lV}}$ , dengan  $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  adalah kecepatan bunyi di udara.

**Soal:**

Turunkan ungkapan frekuensi untuk hidrometer, seperti ditunjukkan pada Gambar 1.7 (kanan).

### 1.2.2 Pendekatan torsi pemulih

Pendekatan torsi pemulih dapat dipakai untuk menurunkan ungkapan frekuensi pada GHS yang gerak massanya membentuk busur lingkaran, seperti GHS akibat ayunan dan GHS akibat rotasi. Pada pendekatan ini, kita harus mendefinisikan torsi pemulih, yaitu torsi yang menyebabkan benda yang berotasi menuju titik kesetimbangannya. Setelah ungkapan torsi pemulih didapatkan, selanjutnya kita pakai hukum II Newton untuk rotasi,

$$\tau_{\text{pemulih}} = I \ddot{\theta}, \quad (1.8)$$

di mana  $I$  adalah momen inersia. Dengan memanfaatkan persamaan di atas, kita dapat memperoleh ungkapan frekuensi GHS terkait.

Contoh GHS akibat ayunan adalah bandul matematis (Gambar 1.6)). Pada sub bab 1.2.1, kita telah meninjau bandul matematis dengan pendekatan gaya pemulih. Sekarang kita akan meninjaunya lagi dengan pendekatan torsi pemulih. Untuk itu, kita perlakukan gerak massa sebagai gerak rotasi. Torsi pemulihnya adalah

$$\tau = -mg \sin \theta l \approx -mgl\theta$$

Sedang persamaan torsinya adalah

$$-mgl\theta = I\ddot{\theta}.$$

Karena momen insersia massa  $m$  yang berotasi dengan jari-jari  $l$  adalah  $I = ml^2$ , maka persamaan GHS-nya adalah

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

sehingga didapatkan frekuensi bandul matematis adalah  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Terlihat bahwa hasil yang diperoleh sama dengan hasil yang didapatkan dengan pendekatan gaya pemulih.

#### Soal:

Ingatkah anda tentang percobaan bandul matematis pada kuliah praktikum Fisika I? Bagaimana kita menentukan  $g$  melalui percobaan tersebut?

#### Contoh soal:

Turunkan ungkapan frekuensi untuk bandul fisis, seperti ditunjukkan pada Gambar 1.8 (kiri).

#### Penyelesaian

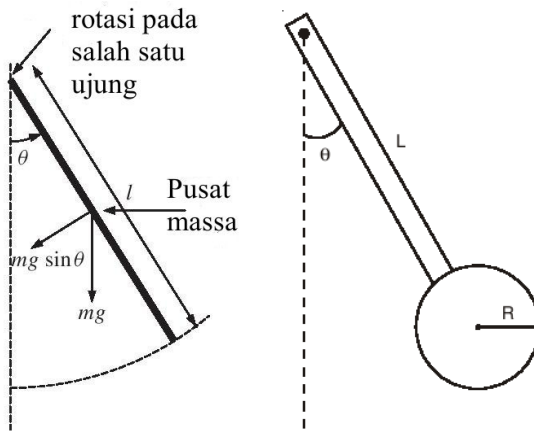
Torsi pemulih pada bandul fisis adalah

$$\tau \approx - (l/2) (mg \sin \theta) \approx - (l/2) (mg\theta).$$

Selanjutnya, karena  $\tau = I\ddot{\theta} = (\frac{1}{3}ml^2)\ddot{\theta}$ , maka persamaan GHS-nya adalah

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0,$$

sehingga didapatkan  $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ .



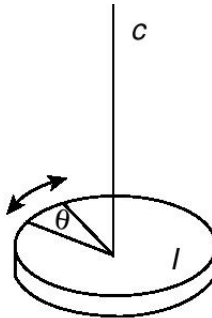
Gambar 1.8: Contoh GHS akibat ayunan: bandul fisis (kiri) dan batang+piringan berayun (kanan)

**Soal:**

Sebuah piringan homogen dan massa  $M$  dan jari-jari  $R$  ditaruh pada ujung batang homogen dengan panjang  $L$  dan massa  $m$ , seperti tampak pada Gambar 1.8 (kanan). Hitunglah frekuensi getarnya.

**Soal:**

Turunkan ungkapan untuk frekuensi osilasi dari piringan datar, yang diputar pada sumbu yang tegak lurus permukaannya, seperti pada gambar berikut.



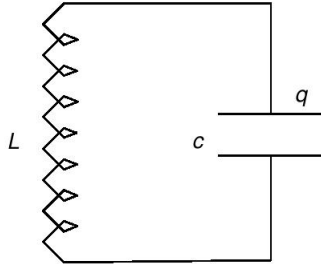
### 1.2.3 Pendekatan tegangan

Pendekatan tegangan dipakai untuk menganalisis GHS listrik. Prinsipnya, kita menghitung tegangan pada masing-masing komponen,

dan setelah itu menggunakan hukum II Kirchoff

$$\Sigma V = 0, \quad (1.9)$$

untuk mendapatkan frekuensinya.



Gambar 1.9: Contoh GHS listrik: rangkaian LC.

Berikut kita analisis rangkaian LC, seperti ditunjukkan pada Gambar 1.9. Persamaan tegangan pada rangkaian LC adalah

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{q}{C} \\ V_L &= L \frac{dI}{dt} = L\ddot{q}. \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan hukum II Kirchoff ( $V_L + V_C = 0$ ), didapatkan persamaan GHS sebagai berikut

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0,$$

di mana  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ . Ringkasan pendekatan “gaya pemulih” disajikan pada Tabel 1.1.

#### 1.2.4 Pendekatan $s_{efektif}$

Untuk sistem kompleks, dapat dipakai pendekatan  $s_{efektif}$ . Untuk itu, kita harus melakukan hal berikut

- Untuk kasus translasi, kita definisikan gaya pemulih dalam bentuk  $F = -s_{efektif}x$  dengan  $x$  adalah simpangan. Selanjutnya, frekuensi GHS-nya adalah

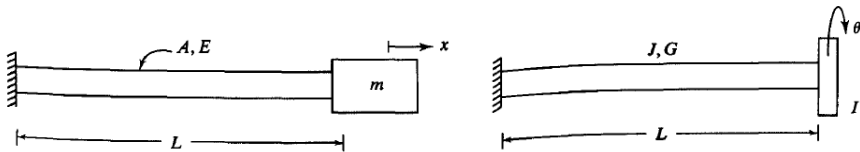
$$\omega = \sqrt{\frac{s_{efektif}}{m}}. \quad (1.10)$$

Tabel 1.1: Pola pendekatan gaya pemulih

Pendekatan	Hukum yang dipakai	Persamaan	Penerapan
Gaya pemulih	Hukum II Newton (translasi)	$F_{\text{pemulih}} = m\ddot{x}$	GHS translasi, ayunan, lenturan, dan fluida
Torsi pemulih	Hukum II Newton (rotasi)	$\tau_{\text{pemulih}} = I\ddot{\theta}$	GHS rotasi dan ayunan
Tegangan	Hukum II Kirchoff	$\Sigma V = 0$	GHS listrik

- Untuk kasus rotasi, kita definisikan torsi pemulih dalam bentuk  $\tau = -s_{\text{efektif}}\theta$  dengan  $\theta$  adalah sudut rotasi. Selanjutnya, frekuensi GHS-nya adalah

$$\omega = \sqrt{\frac{s_{\text{efektif}}}{I}}. \quad (1.11)$$



Gambar 1.10: Contoh batang yang ditarik (kiri) dan batang berlubang yang dipuntir (kanan).

**Contoh soal:**

Suatu batang dengan panjang  $L$ , luas penampang  $A$ , serta modulus Young  $E$  dihubungkan dengan benda dengan massa  $m$  (lihat Gambar 1.10 (kiri)). Jika massa  $m$  ditarik searah sumbu batang sehingga panjangnya bertambah dengan  $x$ , carilah frekuensi.

**Penyelesaian:**

Modulus Young didefinisikan sebagai  $E = \frac{F/A}{x/L} = \frac{FL}{xA}$ , sehingga  $F = \frac{EA}{L}x$  dan  $s_{\text{efektif}} = \frac{EA}{L}$ . Dengan demikian, frekuensi getar sistem tersebut adalah  $\omega = \sqrt{\frac{EA/L}{m}} = \sqrt{\frac{EA}{mL}}$ .

**Soal:**

Suatu batang dengan panjang  $L$ , modulus inersia putar  $J$ , serta modulus putar  $G$  dihubungkan dengan benda dengan momen inersia  $I$  (lihat Gambar 1.10 (kanan)). Jika benda diputar dengan sudut  $\theta$ , terus dilepas, buktikan bahwa frekuensinya adalah  $\sqrt{\frac{JG}{IL}}$ .

**Contoh soal:**

Carilah frekuensi (linier) pada atom model Thomson.

**Penyelesaian:**

Menurut Thomson, muatan negatif tersebar merata di seluruh atom dengan jari-jari  $R$ . Total muatan pada jari-jari  $r$  adalah  $q_{dalam} = -Ze \frac{r^3}{R^3}$ , sedangkan medan listriknya adalah  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{dalam}}{r^2} = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$ . Dengan demikian, gaya elektrostatisnya adalah

$$F = eE = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

Jika gaya tersebut dianggap sebagai gaya pemulih atau  $F = -s_{efektif}r$ , maka didapatkan  $s_{efektif} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ . Dengan demikian frekuensinya adalah  $\omega = \sqrt{\frac{s_{efektif}}{m}} = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$  dan frekuensi liniernya adalah  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$ .

**Soal:**

Sebuah elektron yang terikat pada inti hidrogen, dapat berosilasi dengan gaya pemulih  $F = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}x$ . Jika dipakai  $r = a_0$  (jari-jari Bohr), buktikan bahwa frekuensinya adalah  $\omega = 4.5 \times 10^{16}$  rad/s.

**1.2.5 Pendekatan  $s_{total}$** 

Pada susunan pegas, frekuensi GHS diberikan oleh

$$\omega = \sqrt{\frac{s_{total}}{m}}, \quad (1.12)$$

di mana  $s_{total}$  adalah konstanta pegas pengganti dari susunan pegas. Secara umum, terdapat 3 macam susunan pegas, yaitu (i) susunan seri, (ii) susunan paralel, dan (iii) kombinasi keduanya. Untuk susunan seri berlaku

$$\frac{1}{s_{total}} = \sum_i \frac{1}{s_i}. \quad (1.13)$$

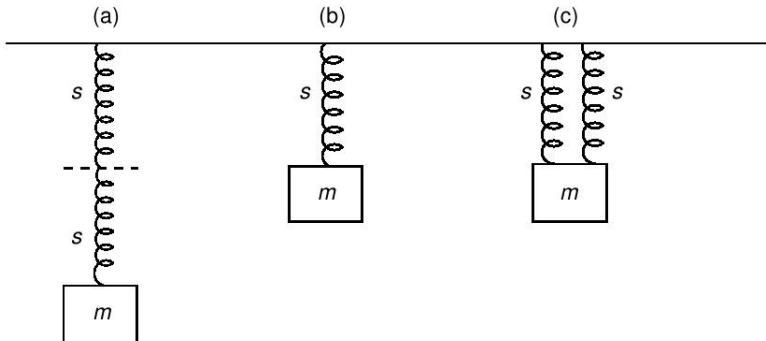
Sedangkan untuk susunan paralel berlaku

$$s_{total} = \sum_i s_i. \quad (1.14)$$

Untuk kombinasi seri dan paralel, dapat dipakai kombinasi dari Persamaan (1.13) dan (1.14).

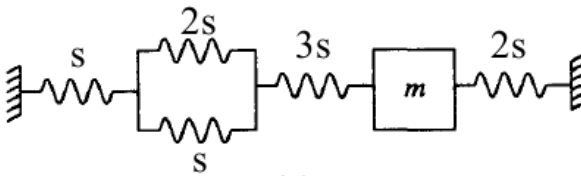
**Soal:**

Carilah nilai  $\omega$  dari ketiga susunan pegas pada gambar berikut.



**Soal:**

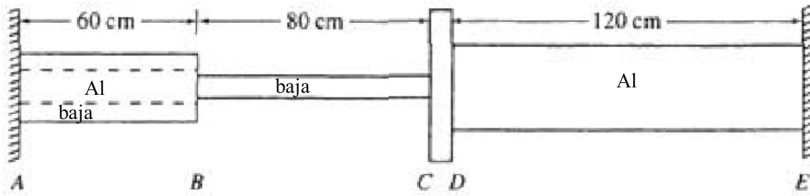
Tunjukkan bahwa frekuensi dari susunan pegas pada gambar berikut adalah  $\omega = \sqrt{\frac{13s}{5m}}$ .





**Contoh soal:**

Hitunglah  $s_{efektif}$  untuk sistem berikut, jika massa  $m$  dipuntir. (Gunakan  $G_{baja} = 80 \times 10^9 \text{ N/m}$ ,  $G_{aluminium} = 40 \times 10^9 \text{ N/m}$ , dan  $J = \frac{\pi}{2} r^4$ )

**Penyelesaian:**

Kita hitung  $s_{efektif}$  untuk masing-masing bagian

- inti AB:

$$s_{AB, inti} = \frac{1}{0,6} \left( \frac{\pi}{2} \times 0,02^4 \times 40 \times 10^9 \right) = 1,68 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$$

- selubung AB:

$$s_{AB, selubung} = \frac{1}{0,6} \left( \frac{\pi}{2} \times (0,04^4 - 0,02^4) \times 80 \times 10^9 \right) = 50,3 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$$

- batang BC:

$$s_{BC} = \frac{1}{0,8} \left( \frac{\pi}{2} \times 0,018^2 \times 80 \times 10^9 \right) = 1,65 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$$

- batang DE:

$$s_{DE} = \frac{1}{1,2} \left( \frac{\pi}{2} \times 0,025^2 \times 40 \times 10^9 \right) = 2,05 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$$

Berikutnya, karena  $s_{AB, inti}$  dan  $s_{AB, selubung}$  terhubung paralel, maka didapatkan

$$s_{AB} = s_{AB, inti} + s_{AB, selubung} = 51,98 \times 10^4 \text{ Nm/rad.}$$

Selanjutnya,  $s_{AB}$  dan  $s_{BC}$  terhubung seri, sehingga

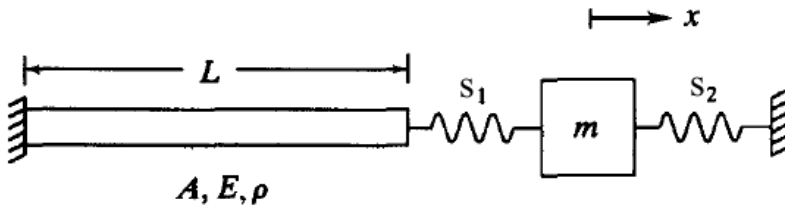
$$s_{AC} = \frac{s_{AB} s_{BC}}{s_{AB} + s_{BC}} = 1,6 \times 10^4 \text{ Nm/rad.}$$

Terakhir,  $s_{AC}$  dan  $s_{DE}$  terhubung paralel, sehingga

$$s_{total} = s_{AC} + s_{DE} = 3,65 \times 10^4 \text{ Nm/rad.}$$

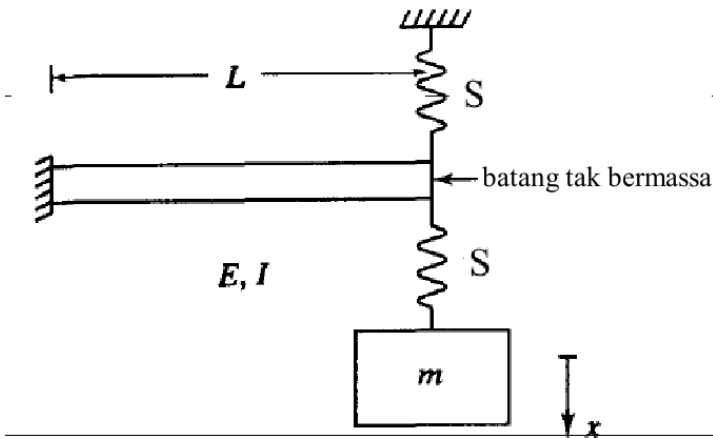
**Soal:**

Hitunglah  $s_{efektif}$  untuk susunan pegas berikut.



**Soal:**

Hitunglah  $s_{efektif}$  untuk susunan pegas berikut.



### 1.3 Energi pada GHS

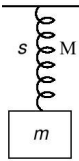
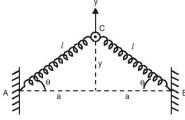
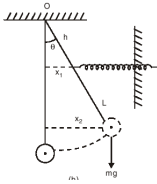
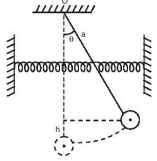
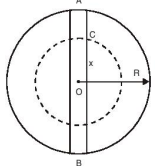
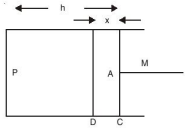
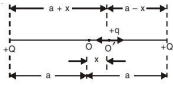
Pada sub bab ini kita akan membahas konsep energi pada GHS dan menggunakannya untuk mencari ungkapan untuk frekuensi getaran. Secara umum, ada beberapa pendekatan energi yang biasa dipakai, yaitu:

- hukum kekekalan energi mekanik

Tabel 1.2: Contoh GHS (1)

Nama sistem	Gambar	Frekuensi	Ref
Air yang bergoyang dalam panci kotak		$\omega = \sqrt{\frac{3gh}{L^2}}$	[5]
Setengah lingkaran pejal (jari-jari $a$ ) yang bergoyang		$\omega = \sqrt{\frac{15g}{26a}}$	[5]
Osilasi elastis		$\omega = \sqrt{\frac{AE}{mL}}$	[5]
Bantalan bola (massa $m$ , jari-jari $a$ , massa jenis $\rho_b$ ) berayun dalam silinder udara vertikal		$\omega = \sqrt{\frac{3\pi\gamma Pa}{4\rho_b V}}$	[5]
Batang berayun		$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$	[5]
Pivot dalam gelindingan radius $a$ dan massa $m$		$\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$	[3]
Silinder kayu berayun pada permukaan air		$\omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{d^2}{12L} + L}}$	[3]

Tabel 1.3: Contoh GHS (2)

Nama sistem	Gambar	Frekuensi	Ref
Benda massa $m$ digantung pada pegas dengan massa $M$ dan kekakuan $s$		$\omega = \sqrt{\frac{s}{m+M/3}}$	[3]
massa $m$ dihubungkan 2 pegas dengan konstan $s$		$\omega = \sqrt{\frac{2s}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right)}$	[4]
bandul matematis dihubungkan dengan pegas		$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{sh^2}{mL^2}}$	[4]
bandul matematis dihubungkan dengan 2 pegas		$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2sa^2}{mL^2}}$	[4]
benda berada dalam terowongan dalam bumi		$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}$	[4]
Sinder piston $M$ meluncur dalam silinder berisi gas		$\omega = \sqrt{\frac{PA}{Mh}}$	[4]
Muatan $q$ di antara 2 muatan $Q$ , terpisah sejauh $2a$		$\omega = \sqrt{\frac{Qq}{\pi\epsilon_0 a^3 m}}$	[4]

- pendekatan potensial umum
- pendekatan Lagrangian
- integrasi langsung

### 1.3.1 Hukum kekekalan energi mekanik

Misalkan simpangan getaran adalah  $x = a \sin(\omega t + \phi)$ , maka kita bisa mendapatkan ungkapan energi potensial dan energi kinetiknya sebagai berikut.

- Energi potensialnya adalah  $E_p = - \int_0^x \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ , atau

$$\begin{aligned} E_p &= - \int_0^x (-sx) dx = \frac{1}{2}sx^2 = \frac{1}{2}sa^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Terlihat bahwa  $E_{p\text{maks}} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$ .

- Energi kinetiknya adalah  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ , atau

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (1.16)$$

Terlihat bahwa  $E_{k\text{maks}} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$ .

- Selanjutnya, energi mekaniknya adalah

$$\begin{aligned} E_M &= E_p + E_k \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 a^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

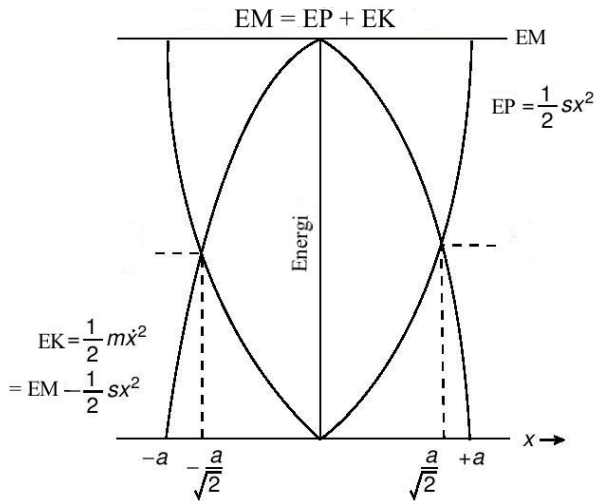
Terlihat bahwa  $E_M = E_{p\text{maks}} = E_{k\text{maks}}$ .

Distribusi energi pada GHS ditunjukkan pada Gambar 1.11.

Pada GHS, energi mekanik sistem konstan. Dengan demikian, berlaku

$$\frac{dE_M}{dt} = 0. \quad (1.18)$$

Dengan memanfaatkan Persamaan (1.18), kita dapat mencari ungkapan frekuensi getaran.



Gambar 1.11: Distribusi energi pada GHS

**Contoh soal:**

Energi potensial dan kinetik pada sistem pegas + massa dengan kekakuan  $s$  dan massa beban  $m$  adalah  $\frac{1}{2}sx^2$  dan  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . Carilah frekuensi GHS dengan menggunakan hukum kekekalan energi mekanik.

**Penyelesaian:**

Energi mekanik sistem adalah  $E = \frac{1}{2}sx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . Dengan menggunakan Persamaan (1.18), didapatkan  $sx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = (sx + m\ddot{x})\dot{x} = 0$ . Karena  $\dot{x} \neq 0$ , maka  $sx + m\ddot{x} = 0$  atau  $\ddot{x} + \frac{s}{m}x = 0$ . Ini berarti frekuensi getar sistem pegas + massa adalah  $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$ .

**Soal:**

Gunakan pendekatan hukum kekekalan energi mekanik  $\frac{dE}{dt} = 0$  untuk menurunkan ungkapan frekuensi pada (i) bandul matematis (ii) pipa-U, dan (iii) hidrometer.

**1.3.2 Pendekatan potensial umum**

Pada beberapa kasus getaran, kita lebih mudah mengetahui potensial umum yang menyebabkan suatu getaran terjadi. Misalkan sistem bergetar karena pengaruh energi potensial  $E_p = V(x)$ . Untuk merumuskan gaya pemulih  $F$ , mula-mula  $V(x)$  dievaluasi di sekitar  $x = x_0$

dengan menggunakan deret Taylor, sbb

$$V(x) = V(x_0) + x \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_0} + \frac{x^2}{2} \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} + \dots$$

Suku pertama  $V(x_0)$  bernilai konstan dan tidak mempengaruhi getaran. Suku kedua  $x \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_0}$  bernilai nol karena  $\left( \frac{dV}{dx} \right)_{x=x_0} = 0$ . Dengan demikian  $V(x) \approx \frac{x^2}{2} \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0}$  dan  $F = -\frac{dV}{dx} \approx -x \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0}$ , sehingga frekuensinya adalah

$$\omega \approx \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0}}. \quad (1.19)$$

**Contoh soal:**

Energi potensial pada sistem pegas + massa dengan kekakuan  $s$  dan massa beban  $m$  adalah  $\frac{1}{2}sx^2$ . Carilah frekuensi GHS dengan menggunakan pendekatan energi potensial.

**Penyelesaian:**

Frekuensi getarnya adalah

$$\omega \approx \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{d^2 \left( \frac{1}{2}sx^2 \right)}{dx^2} \right)_{x=x_0}} = \sqrt{\frac{s}{m}}.$$

**Contoh soal:**

Salah satu contoh potensial diberikan oleh  $V(x) = -ax^2 + bx^4$ . Carilah jarak setimbang  $x_0$  dan frekuensi getarannya. Tunjukkan bahwa frekuensinya tidak bergantung pada  $b$ .

**Penyelesaian**

Jarak setimbang diperoleh pada saat

$$\frac{dV}{dx} = -2ax + 4bx^3 = 2x(-a + 2bx^2) = 0,$$

yang menghasilkan  $x_0 = \sqrt{\frac{a}{2b}}$ . Selanjutnya gaya pemulihnya adalah

$$\begin{aligned} s &= \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x=x_0} = -2a + 12bx^2|_{x=x_0} \\ &= -2a + 12b \frac{a}{2b} = 4a. \end{aligned}$$

Dengan demikian, didapatkan  $\omega = \sqrt{\frac{4a}{m}} = 2\sqrt{\frac{a}{m}}$ .

**Soal:**

Salah satu contoh potensial adalah potensial Lennard-Jones, di mana interaksi antara 2 partikel diberikan oleh  $V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$ . Carilah jarak setimbang  $x_0$  dan frekuensi getarannya.

### 1.3.3 Integrasi langsung

Pada kasus di mana kita mengetahui ungkapan  $E_p$ ,  $E_k$ , dan  $E_M$ , kita dapat mencari ungkapan simpangan dengan mengintegrasikannya secara langsung. Karena  $E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  dan  $E_k = E_M - E_p$ , maka

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_M - E_p(x^2))}}. \quad (1.20)$$

Dari persamaan terakhir, akan diketahui hubungan  $x$  dan  $t$ , sehingga didapatkan ungkapan untuk frekuensi  $\omega$ .

**Contoh soal:**

Energi pada sistem pegas + massa dengan kekakuan  $s$  dan massa beban  $m$  adalah  $\frac{1}{2}sa^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}sx^2$ . Carilah  $x(t)$  dan  $\omega$  dengan integrasi langsung.

**Penyelesaian:**

Dari persamaan  $\frac{1}{2}sa^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}sx^2$ , didapatkan  $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{s(a^2 - x^2)}{m}}$ . Dengan demikian

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \sqrt{\frac{s}{m}} dt \\ \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) &= \sqrt{\frac{s}{m}}t + \text{konstanta}. \end{aligned}$$

Persamaan terakhir menghasilkan

$$x = a \sin\left(\sqrt{\frac{s}{m}}t + \phi\right).$$

Ini juga berarti bahwa  $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$ . Ternyata hasil yang diperoleh sama dengan cara sebelumnya.



Tabel 1.4: Pola pendekatan energi

Besaran yang diketahui	Hukum yang dipakai	Persamaan
$E_p$ dan $E_k$	Kekekalan energi mekanik	$\frac{dE_M}{dt} = 0$
$V$	Pendekatan potensial umum	$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{d^2 V}{dx^2} \right)_{x=x_0}}$
$E_p$	‘Pendugaan’	$\omega = \sqrt{\frac{E_p}{\frac{1}{2} m x^2}}$
$E_p$ dan $E_k$	Pendekatan Lagrange	$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$
$E_p$ , $E_k$ , dan $E_M$	Integrasi langsung	$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_M - E_p)}}$

**Soal:**

Carilah ungkapan energi potensial pada bandul matematis

- dengan perhitungan langsung
- dengan menggunakan  $E_p = \frac{1}{2} s_{efektif} x^2$ .

**Soal:** Energi pada bandul matematis dengan panjang tali  $l$  dan massa beban  $m$  adalah  $\frac{1}{2} m \frac{q}{l} a^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \frac{q}{l} x^2$ . Carilah  $\omega$  dengan cara:

- pendekatan energi mekanik
- pendekatan energi potensial
- metode pendugaan, dan
- integrasi langsung.

## 1.4 Superposisi GHS

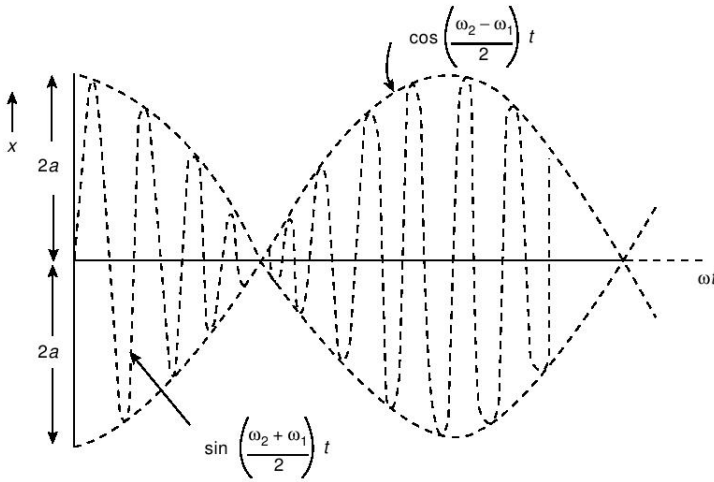
### 1.4.1 Superposisi 2 GHS sejajar

Ada 2 jenis superposisi GHS sejajar, yaitu (i) GHS sejajar dengan amplitudo sama dengan frekuensi berbeda, serta (ii) GHS sejajar de-

ngan frekuensi sama tetapi amplitudo berbeda. Kita akan tinjau lebih dahulu kasus pertama. Misalkan ada 2 GHS sejajar dengan amplitudo yang sama, yaitu  $x_1 = a \sin \omega_1 t$  dan  $x_2 = a \sin \omega_2 t$  dengan  $\omega_2 > \omega_1$ , maka perpaduan keduanya akan menghasilkan

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= a \sin \omega_1 t + a \sin \omega_2 t \\ &= 2a \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Contoh superposisi semacam ini disajikan pada Gambar 1.12.



Gambar 1.12: Skema superposisi 2 GHS sejajar dengan amplitudo sama

Sekarang kita tinjau kasus GHS sejajar dengan frekuensi yang sama, yaitu  $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \phi_1)$  dan  $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ . Pada kasus ini, perpaduan keduanya akan menghasilkan

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= a_1 \cos(\omega t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ &= R \cos(\omega t + \theta), \end{aligned} \quad (1.22)$$

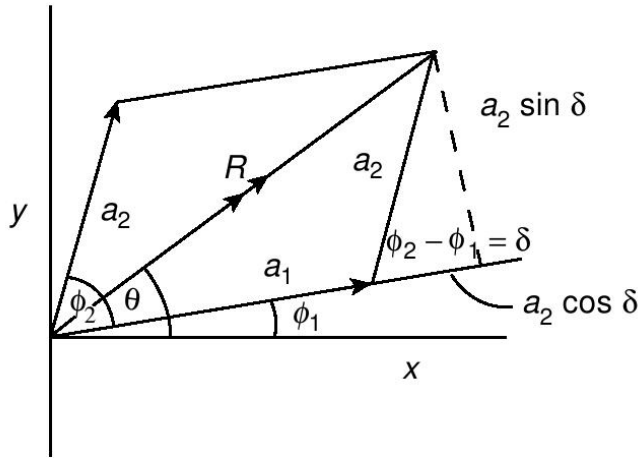
di mana

$$R^2 = (a_1 + a_2 \cos \delta)^2 + (a_2 \sin \delta)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \delta$$

$$\delta = \phi_2 - \phi_1$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2} \right)$$

Skema superposisi GHS sejajar dengan frekuensi sama ditunjukkan pada Gambar 1.13.



Gambar 1.13: Skema superposisi 2 GHS sejajar dengan frekuensi sama.

#### Contoh soal:

Pada percobaan 2 celah (percobaan Young), intensitas yang teramati merupakan superposisi dari 2 sumber dengan amplitudo yang sama  $a$  dengan beda fase  $\delta$ . Perhatikan bahwa intensitasnya adalah

$$I \propto R^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Jelaskan rentang nilai  $I$ .

#### Penyelesaian

Dalam kasus ini, kita punya dua sumber di mana  $x_1 = a \cos(\omega t + \phi_1)$  dan  $x_2 = a \cos(\omega t + \phi_2)$  di mana  $\phi_2 - \phi_1 = \delta$ . Kasus tersebut merupakan penjumlahan dua getaran segaris dengan amplitudo yang sama di mana resultannya adalah  $R^2 = 2a^2(1 + \cos \delta) = 2a^2(1 + 2\cos^2 \frac{\delta}{2} - 1) = 4a^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}$ , sehingga  $I \propto 4a^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}$ , seperti yang diharapkan. Dengan demikian nilai  $I$  adalah  $-4a^2 \leq I \leq 4a^2$ .

### 1.4.2 Superposisi 2 GHS tegak lurus

Superposisi 2 GHS tegak lurus ditentukan oleh sama atau tidaknya amplitudo, frekuensi, dan fase awal kedua GHS.

Misalkan ada 2 GHS tegak lurus dengan frekuensi sama, yaitu  $x = a_1 \cos(\omega t + \phi_1)$  dan  $y = a_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ , maka superposisi keduanya akan tergantung pada beda fase  $\delta = \phi_2 - \phi_1$ .

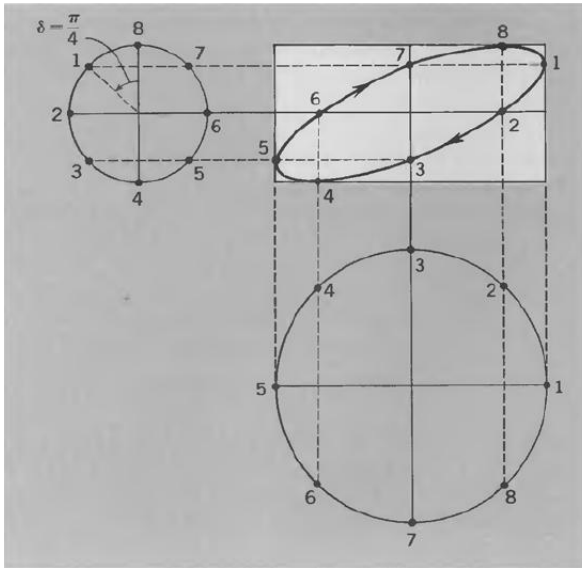
$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1). \quad (1.23)$$

Dengan mengukur  $x$  atau  $y$ , dapat diketahui beda fasenya, sebagai berikut

$$\delta = \phi_2 - \phi_1 = \arcsin\left(\frac{y_{x=0}}{y_{maks}}\right),$$

atau

$$\delta = \phi_2 - \phi_1 = \arcsin\left(\frac{x_{y=0}}{x_{maks}}\right). \quad (1.24)$$

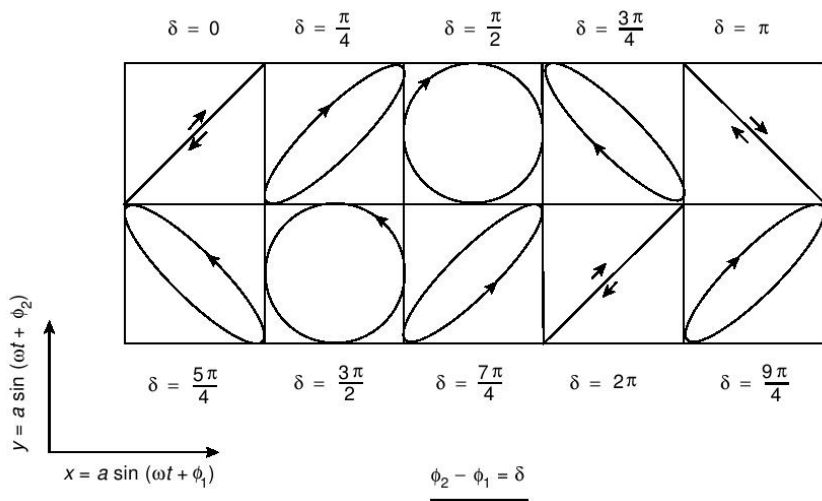


Gambar 1.14: Skema superposisi 2 GHS tegak lurus dengan frekuensi sama tetapi amplitudo berbeda

Gambaran skematis perpaduan 2 GHS yang saling tegak lurus ditunjukkan pada Gambar 1.14. GHS pertama (gambar bawah) memiliki gerak dalam arah horizontal dan menghasilkan posisi horizontal

$x$ , sedang GHS kedua (gambar kiri) memiliki gerak dalam arah vertikal dan menghasilkan posisi vertikal  $y$ . Dengan memplot nilai  $(x, y)$  dari waktu ke waktu dan menghubungkannya, maka didapatkan hasil superposisi kedua GHS tersebut, yang berupa “ellips” seperti ditunjukkan pada kotak kanan atas. Rasio lebar kotak terhadap tingginya menunjukkan rasio amplitudo GHS sejajar terhadap GHS vertikal. Kesamaan frekuensi antara kedua GHS, menyebabkan keduanya menempuh siklus dalam waktu yang sama, sehingga perpaduan keduanya muncul sebagai “ellips” tunggal.

Gambar 1.15 menyajikan superposisi 2 GHS dengan frekuensi dan amplitudo yang sama, tetapi dengan fase awal yang berbeda. Kesamaan amplitudo menyebabkan kedua GHS muncul dalam ukuran “kotak” dengan sisi yang sama. Perbedaan fase antara kedua GHS mengakibatkan perubahan bentuk antara “lingkaran”, “ellips”, dan “garis”, dengan orientasi yang berbeda. Sementara itu, kesamaan frekuensi antara kedua GHS menghasilkan superposisi dalam bentuk “lingkaran”, “ellips”, atau “garis” tunggal.



Gambar 1.15: Berbagai pola superposisi 2 GHS tegak lurus dengan amplitudo dan frekuensi yang sama

#### Contoh soal:

Turunkan Persamaan (1.23)

#### Penyelesaian

Dapat dihitung bahwa

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{x}{a_1} \sin \phi_2 - \frac{x}{a_2} \sin \phi_1 \right)^2 + \left( -\frac{x}{a_1} \cos \phi_2 + \frac{y}{a_2} \cos \phi_1 \right)^2 \\
 = & \frac{x^2}{a_1^2} \sin^2 \phi_2 + \frac{y^2}{a_2^2} \sin^2 \phi_1 - \frac{2xy}{a_1 a_2} \sin \phi_1 \sin \phi_2 \\
 & + \frac{x^2}{a_1^2} \cos^2 \phi_2 + \frac{y^2}{a_2^2} \cos^2 \phi_1 - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\
 = & \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (*)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{a_1} &= \sin \omega t \cos \phi_1 + \cos \omega t \sin \phi_1 \\
 \frac{y}{a_2} &= \sin \omega t \cos \phi_2 + \cos \omega t \sin \phi_2
 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{x}{a_1} \sin \phi_2 - \frac{x}{a_2} \sin \phi_1 \right)^2 + \left( -\frac{x}{a_1} \cos \phi_2 + \frac{y}{a_2} \cos \phi_1 \right)^2 \\
 = & \sin^2 \omega t (\sin \phi_2 \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \cos \phi_2)^2 \\
 & + \cos^2 \omega t (\cos \phi_1 \sin \phi_2 - \cos \phi_2 \sin \phi_1)^2 \\
 = & (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \sin^2(\phi_2 - \phi_1) \\
 = & \sin^2(\phi_2 - \phi_1) \quad (**)
 \end{aligned}$$

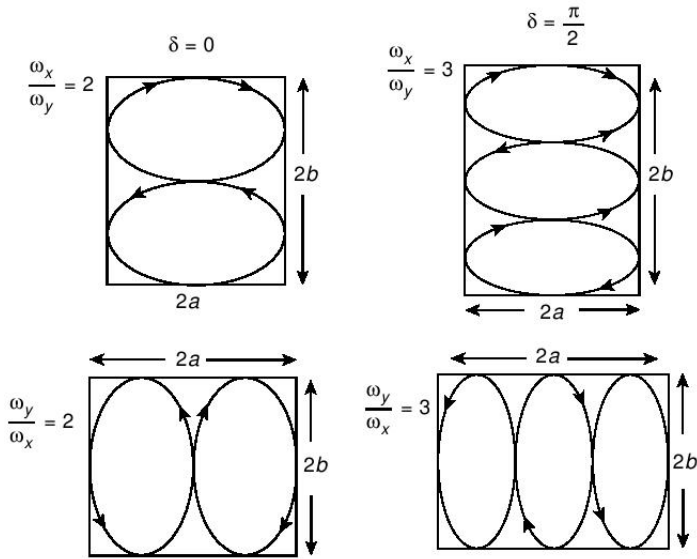
Dengan membandingkan (\*) dan (\*\*) didapatkan

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1).$$

Gambar 1.16 menyajikan superposisi 2 GHS tegak lurus dengan amplitudo, frekuensi, dan fase awal yang berbeda. Perbedaan amplitudo muncul sebagai perbedaan ukuran panjang dan lebar kotak. Perbedaan frekuensi muncul sebagai perbedaan jumlah “lingkaran” pada arah vertikal dan horizontal.

### 1.4.3 Superposisi $n$ GHS sejajar

Misalkan ada  $n$  GHS sejajar dengan amplitudo sama dan beda fase antara dua GHS yang berdekatan  $\delta$  yang sama, maka resultannya



Gambar 1.16: Skema superposisi 2 GHS tegak lurus dengan amplitudo, frekuensi, dan fase awal yang berbeda

adalah

$$\begin{aligned}
 R &= a \sin \omega t + a \sin (\omega t + \delta) + a \sin (\omega t + 2\delta) + \dots \\
 &\quad + a \sin [\omega t + (n-1)\delta] \\
 &= a \frac{\sin n\delta/2}{\sin \delta/2} = a \frac{\sin \alpha}{\alpha/n} = na \frac{\sin \alpha}{\alpha} = A \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

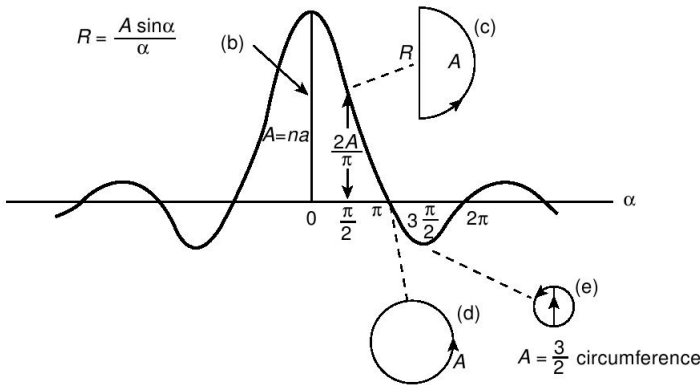
Hasil yang didapatkan pada Persamaan (1.25) disajikan pada Gambar 1.17.

Sekarang misalkan kita memiliki  $n$  GHS dg amplitudo sama tetapi dengan beda fase  $\delta$  sembarang. Dalam hal ini, resultan simpangannya pada arah  $x$  adalah

$$R_x = a \sum_i^n \cos \phi_i.$$

Nilai kuadratnya adalah

$$\begin{aligned}
 R_x^2 &= a^2 (\sum_i^n \cos \phi_i)^2 = a^2 \left[ \sum_i^n \cos^2 \phi_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \cos \phi_i \sum_j^n \cos \phi_j \right] \\
 &= a^2 [n \overline{\cos^2 \phi} + 0] = \frac{1}{2} na^2.
 \end{aligned}$$



Gambar 1.17: Skema superposisi  $n$  GHS sejajar dengan  $\delta$  konstan

Dengan cara yang sama didapatkan

$$R_y^2 = \frac{1}{2} n a^2$$

Dengan demikian, resultannya adalah

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = a\sqrt{n}. \quad (1.26)$$

## 1.5 Penerapan GHS

Kita akhiri bab ini dengan mendiskusikan penerapan GHS. Secara umum, GHS dapat dimanfaatkan antara lain untuk (i) menghitung nilai parameter tertentu dengan mengukur  $T$ , (ii) sebagai alat ukur waktu, serta (iii) untuk aplikasi khusus.

Kita mulai dengan manfaat yang pertama: menghitung nilai parameter tertentu dengan mengukur  $T$ . Seperti kita ketahui, setiap GHS memiliki ungkapan frekuensi natural  $\omega$  yang khas. Karena frekuensi terkait dengan periode,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , maka tiap GHS juga punya periode yang khas. Kekhasan nilai frekuensi dan periode ini dapat dipakai untuk menentukan besaran yang lain dari sistem. Mula-mula kita hitung  $T$  atau  $\omega$ . Karena  $T$  dan  $\omega$  merupakan fungsi parameter tertentu, maka dengan mengetahui  $T$  atau  $\omega$ , kita dapat mencari nilai parameter tersebut, seperti ditunjukkan pada Tabel 1.5.

Manfaat kedua dari GHS adalah sebagai alat ukur waktu. Ada dua pola yang biasa diambil, yaitu



Tabel 1.5: Pemanfaatan GHS untuk mengukur parameter fisis tertentu

sistem	rumusan $\omega$	parameter yang bisa dihitung
Massa + pegas	$\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$	kekakuan pegas $s$
Bandul matematis	$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$	percepatan gravitasi $g$
Piringan datar	$\omega = \sqrt{\frac{c}{I}}$	momen puntir $c$
Bandul fisis	$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$	percepatan gravitasi $g$
Dawai	$\omega = \sqrt{\frac{2Tx}{lm}}$	tegangan tali $T$
Pipa U	$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$	percepatan gravitasi $g$
Resonator Helmholtz	$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p A}{l \rho V}}$	massa jenis cairan $\rho$
Hidrometer	$\omega = \sqrt{\frac{\rho g A}{m}}$	massa jenis cairan $\rho$

- parameter GHS dipilih atau diset sedemikian rupa sehingga menghasilkan getaran dengan periode tertentu, misalnya 1 detik pada jam hidrometer (lihat soal).
- parameter GHS dibiarkan apa adanya, selanjutnya 1 detik didefinisikan dalam satuan periode GHS tersebut, misalnya dalam kasus jam Cesium.

**Soal:**

Hitunglah periode baterai hidrometer dengan massa 1 gram, luas permukaan  $2,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , massa jenis cairan  $\rho = 1,2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , dan gravitasi spesifik 1,2.

Manfaat GHS berikutnya adalah untuk aplikasi khusus. Contoh untuk kasus ini adalah pengengukuran ketebalan lapisan QCM (*quartz crystal microbalance*). QCM dapat dipakai untuk mengetahui perubahan ketebalan lapisan tipis (yang dideposisikan di atasnya) dengan mengukur perubahan frekuensinya, dengan menggunakan persamaan

$$\Delta h = -\frac{\Delta f}{2f_0^2}.$$



## Bab 2

# Getaran Harmonis Teredam

### 2.1 Persamaan umum GHR dan solusinya

Pada kebanyakan kasus, sangat jarang ditemui getaran harmonis sederhana. Umumnya, suatu getaran akan mengalami redaman, baik akibat gaya gesekan (kasus mekanik), akibat sistem resistif (kasus listrik), maupun akibat viskositas (kasus fluida). Getaran yang mengalami redaman dikenal sebagai getaran harmonis teredam (GHR atau *damped harmonic motion*).

Secara umum, besar gaya redaman bergantung kecepatan benda dan arahnya melawan arah gerak, atau<sup>1</sup>

$$f_{redaman} = -r\dot{x},$$

dengan  $r$  adalah suatu konstanta dan  $\dot{x}$  adalah kecepatan. Dengan demikian, pada GHR bekerja dua buah gaya, yaitu gaya pemulih dan gaya redaman, sehingga persamaan GHR adalah

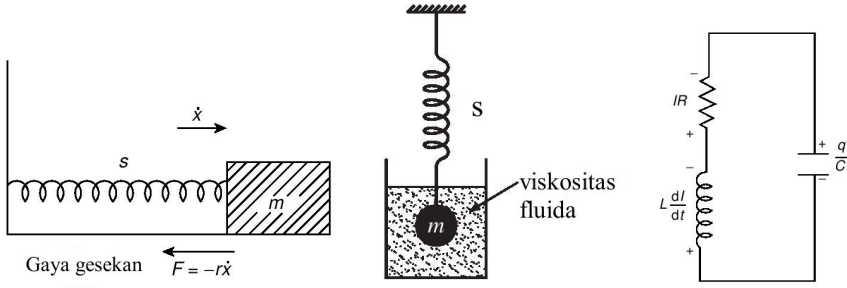
$$\begin{aligned} f_{pemulih} + f_{redaman} &= f_{inersia} \\ -sx - r\dot{x} &= m\ddot{x}, \end{aligned}$$

dan bisa ditulis sebagai

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0. \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Redaman akibat viskositas fluida, bisa berbentuk  $f_{redaman} = -r\dot{x}$  (yang kita pakai saat ini) atau  $f_{redaman} = -r_1\dot{x} - r_2\dot{x}^2$ . Untuk redaman akibat gesekan, maka  $f_{redaman} = \mu N$  dan dikenal sebagai redaman Coulumb, dan akan dibahas pada sub bab tersendiri.



Gambar 2.1: Contoh GHR mekanis (kiri), GHR fluida (tengah), dan GHR elektrik (kanan)

Sekarang kita akan mencari solusi dari Persamaan (2.1). Mula-mula kita definisikan  $\frac{d}{dt} \equiv D$ , sehingga Persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai

$$(mD^2 + rD + s)x = 0.$$

Selanjutnya, karena  $x \neq 0$ , maka

$$mD^2 + rD + s = 0.$$

Persamaan di atas adalah persamaan kuadrat yang solusinya (dengan menggunakan rumus *abc*) adalah

$$D_{1,2} = \frac{-r}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{r^2 - 4ms} = \frac{-r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}.$$

Misalkan  $\frac{r}{2m} \equiv p$  dan  $\sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}} \equiv q$ , maka didapatkan 2 nilai  $D$ , yaitu

$$D_1 = -p + q$$

dan

$$D_2 = -p - q.$$

Untuk  $D_1 = -p + q$  akan didapatkan

$$\begin{aligned} Dx &= D_1 x \\ \frac{dx}{dt} &= (-p + q)x, \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$x_1 = C_1 \exp [(-p + q)t].$$

Dengan cara yang sama,  $D_2 = -p - q$  menghasilkan  $x_2 = C_2 \exp [(-p - q)t]$ . Dengan demikian, solusi lengkapnya adalah

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= e^{-pt} (C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Jika dilakukan substitusi balik  $\frac{r}{2m} \equiv p$  dan  $\sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}} \equiv q$ , maka simpangan GHR dapat ditulis sebagai

$$x = \exp\left(\frac{-r}{2m}t\right) \left[ C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}t\right) \right].$$

Suku  $e^{-pt} = e^{-(r/2m)t}$  menggambarkan suatu sampul (*envelope*) gelombang yang meluruh seiring dengan waktu. Adalah sangat logis bila kecepatan redamannya ditentukan oleh faktor koefisien redaman  $r$ . Suku  $C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}$  menyatakan perilaku getaran, di mana perilaku spesifiknya ditentukan oleh nilai  $q = \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}$ .

## 2.2 Berbagai tipe GHR

Mengacu pada pada nilai  $q$ , dikenal tiga macam GHR, yaitu

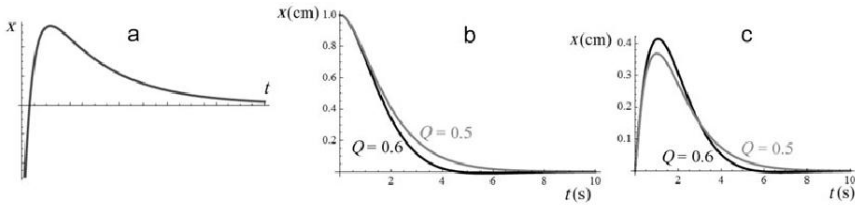
- $\frac{r^2}{4m^2} > \frac{s}{m}$  sehingga  $q$  riil  $\rightarrow$  getaran teredam berat
- $\frac{r^2}{4m^2} = \frac{s}{m}$  sehingga  $q$  nol  $\rightarrow$  getaran teredam kritis
- $\frac{r^2}{4m^2} < \frac{s}{m}$  sehingga  $q$  imajiner  $\rightarrow$  getaran teredam ringan

### 2.2.1 GHR berat

Kita mulai dengan getaran harmonis teredam berat berat. GHR berat terjadi jika  $\frac{r^2}{4m^2} > \frac{s}{m}$ , sehingga  $q = \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}$  bernilai riil. Dengan demikian solusi GHR berat adalah

$$\begin{aligned} x &= e^{-pt} (C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}) \\ &= e^{-pt} [C_1 (\cosh qt + \sinh qt) + C_2 (\cosh qt - \sinh qt)] \\ &= e^{-pt} [(C_1 + C_2) \cosh qt + (C_1 - C_2) \sinh qt] \\ x &= e^{-pt} [F \cosh qt + G \sinh qt] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Persamaan di atas menggambarkan getaran yang tidak bisa berosilasi karena tingginya redaman yang terjadi. Pada umumnya perilaku



Gambar 2.2: Contoh GHR berat dengan berbagai kondisi awal yang berbeda:  $x(0) \neq 0$  dan  $\dot{x}(0)$  sangat tinggi (kiri),  $x(0) \neq 0$  dan  $\dot{x}(0) = 0$  (tengah), serta  $x(0) = 0$  dan  $\dot{x}(0) \neq 0$  (kanan).

GHR berat bergantung pada kondisi awal (lihat Gambar 2.2) dan juga bergantung pada nilai redaman  $r$ .

**Contoh soal:** (*Pain Problem 2.1*)

Suatu getaran harmonis teredam berat dimulai dari jarak  $F$  dari titik kesetimbangan dalam keadaan diam. Jika simpangannya diberikan oleh

$$x = e^{-pt} (F \cosh qt + G \sinh qt)$$

di mana  $p = \frac{r}{2m}$  dan  $q = \left( \frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m} \right)^{1/2}$ , tunjukkan bahwa  $\frac{G}{F} = \frac{\frac{r}{2m}}{\sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}}$ .

**Penyelesaian**

Dari informasi soal, didapatkan bahwa (i) posisi awal benda adalah  $F$  atau  $x(0) = F$  dan (ii) benda dilepas dari keadaan diam atau  $\dot{x}(0) = 0$ . Dapat dibuktikan bahwa

$$x(0) = e^{-p \times 0} (F \cosh q \times 0 + G \sinh q \times 0) = F.$$

Selanjutnya persamaan untuk kecepatannya adalah

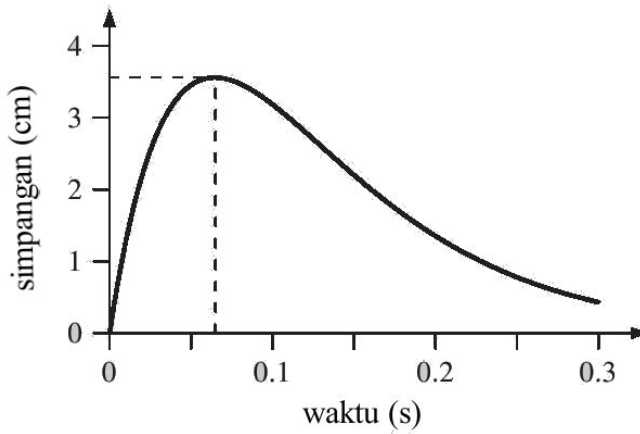
$$\dot{x} = e^{-pt} q [F \sinh qt + G \cosh qt] - p e^{-pt} [F \cosh qt + G \sinh qt].$$

Selanjutnya dengan menggunakan syarat batas  $\dot{x}(0) = 0$  didapatkan

$$qG - pF = 0,$$

atau

$$\frac{G}{F} = \frac{p}{q} = \frac{\frac{r}{2m}}{\sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 4ms}}.$$



Gambar 2.3: Contoh GHR kritis dengan  $x(0) = 0$  dan  $\dot{x}(0) \neq 0$ .

**Soal:**

Tunjukkan bahwa solusi GHR berat  $x = e^{-pt} [F \cosh qt + G \sinh qt]$  memenuhi persamaan umum GHR  $m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0$ .

### 2.2.2 GHR kritis

Selanjutnya kita diskusikan GHR kritis. Getaran teredam kritis terjadi jika  $\frac{r^2}{4m^2} = \frac{s}{m}$ , sehingga  $q = \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}} = 0$ . Dengan demikian solusi GHR kritis adalah

$$x = e^{-pt} (C_1 + C_2 t). \quad (2.4)$$

Perhatikan bahwa kita mengalikan  $C_2$  dengan  $t$ . Ini adalah prosedur standar matematika. Untuk mengujinya, silahkan dibuktikan apakah solusi  $x = e^{-pt} (C_1 + C_2 t)$  memenuhi persamaan GHR  $m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0$ , atau tidak.

**Contoh soal:**

Sebuah benda dengan massa 2,5 kg digantungkan pada pegas dengan konstanta kekakuan,  $s = 600 \text{ N/m}$ . (a) Tentukan konstanta redaman  $r$  yang menghasilkan redaman kritis. (b) Misalkan massa mendapat gaya impuls yang menghasilkan kecepatan  $1,5 \text{ ms}^{-1}$  pada  $t = 0$ . Tentukan simpangan maksimum dan saat terjadinya.

Redaman kritis terjadi jika  $\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m} = 0$  atau

$$r = 2\sqrt{sm} = 2 \times \sqrt{600 \times 2,5} = 77,5 \text{ kg/s.}$$

Persamaan umum GHR kritis adalah

$$x(t) = e^{-pt} (C_1 + C_2 t)$$

sehingga kecepatannya adalah

$$\dot{x}(t) = -pe^{-pt} (C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-pt},$$

di mana  $p = r/2m$ ,

Pada  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$  sehingga  $x(0) = C_1 = 0$  dan

$$\dot{x} = -pC_2 t e^{-pt} + C_2 e^{-pt} = C_2 e^{-pt} (1 - pt).$$

Pada  $t = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1,5$  sehingga  $\dot{x}(0) = C_2 = 1,5$ . Dengan demikian persamaan simpangan dan kecepatannya adalah

$$x(t) = 1,5 t e^{-pt}$$

$$\dot{x}(t) = 1,5 e^{-pt} (1 - pt).$$

Simpangan masimum terjadi jika  $\dot{x} = 0$  atau  $1 - pt_{maks} = 0$  atau

$$t_{maks} = \frac{1}{p} = \frac{2m}{r} = \frac{2 \times 2,5}{77,5} = 6,5 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

Pada saat tersebut, simpangannya adalah

$$\begin{aligned} x(t_{maks}) &= 1,5 t_{maks} e^{-pt_{maks}} \\ &= 1,5 \times 6,5 \times 10^{-2} \times e^{-1} = 3,5846 \times 10^{-2} \text{ m.} \end{aligned}$$

Plot  $x(t)$  sebagai fungsi  $t$  disajikan pada Gambar 2.3.

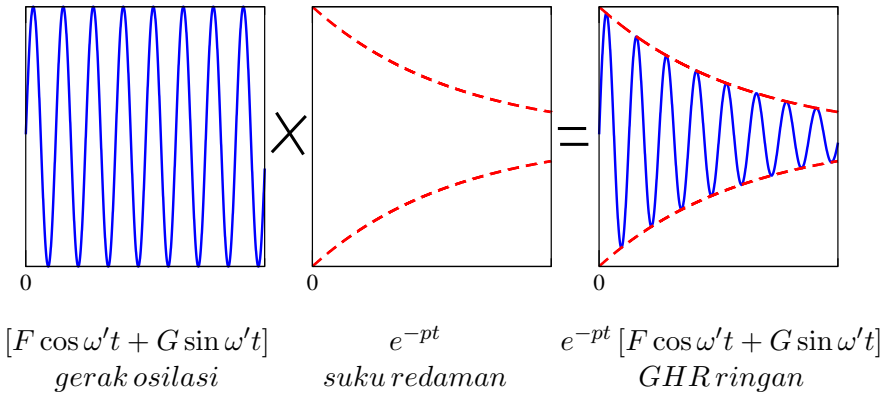
**Soal:** (*Pain Problem 2.2*)

Tunjukkan bahwa

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-(r/2m)t}$$

memenuhi persamaan  $m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0$  ketika  $\frac{r^2}{4m^2} = \frac{s}{m}$ .





Gambar 2.4: Contoh GHR ringan.

### 2.2.3 GHR ringan

Jenis GHR berikutnya adalah GHR ringan. GHR ringan terjadi jika  $\frac{r^2}{4m^2} < \frac{s}{m}$ , sehingga  $q = \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}$  bernilai imajiner, atau

$$q = \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}} = \sqrt{-\left(\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)} = \pm i \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \pm i \omega'.$$

Dengan demikian solusi GHR adalah

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-pt} (C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}) \\
 &= e^{-pt} [C_1 (\cos \omega' t + i \sin \omega' t) + C_2 (\cos \omega' t - i \sin \omega' t)] \\
 &= e^{-pt} [(C_1 + C_2) \cos \omega' t + i(C_1 - C_2) \sin \omega' t] \\
 x &= e^{-pt} [F \cos \omega' t + G \sin \omega' t]
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Persamaan di atas menggambarkan getaran dengan frekuensi  $\omega'$  yang amplitudonya meluruh dengan faktor  $e^{-pt}$ . Perhatikan bahwa  $\omega' = \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$  selalu lebih kecil dari frekuensi GHS  $\omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$ .

**Contoh soal:** (*Pain Problem 2.3*)

Solusi dari suatu getaran harmonis teredam diberikan oleh

$$x = e^{-(r/2m)t} (C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}).$$

Jika  $x(0) = A \cos \phi$  carilah  $C_1$  dan  $C_2$ , untuk menunjukkan bahwa  $\dot{x}(0) = -\omega' A \sin \phi$  hanya jika  $r/m$  sangat kecil atau  $\phi \approx \pi/2$ .

### Penyelesaian

Misalkan kita nyatakan  $C_1 = A_1 e^{i\phi}$  dan  $C_2 = A_2 e^{-i\phi}$ , maka simpangan getaran pada sembarang  $t$  dapat dinyatakan sebagai

$$x = e^{-(r/2m)t} \left( A_1 e^{i(\omega't + \phi)} + A_2 e^{-i(\omega't + \phi)} \right).$$

sehingga simpangannya pada  $t = 0$  adalah

$$x(0) = A_1 e^{i\phi} + A_2 e^{-i\phi} = F \cos \phi,$$

yang berarti  $A_1 = A_2 = \frac{F}{2}$ . Simpangannya sekarang dapat dinyatakan sebagai

$$x = \frac{1}{2} e^{-(r/2m)t} \left( F e^{i(\omega't + \phi)} + F e^{-i(\omega't + \phi)} \right).$$

Kecepatannya pada sembarang waktu  $t$  adalah

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{r}{2m} \right) e^{-(r/2m)t} \left( F e^{i(\omega't + \phi)} + F e^{-i(\omega't + \phi)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-(r/2m)t} i\omega' \left( F e^{i(\omega't + \phi)} - F e^{-i(\omega't + \phi)} \right). \end{aligned}$$

Kecepatannya pada  $t = 0$  adalah

$$\dot{x}(0) = -\frac{1}{2} \left( \frac{r}{2m} \right) \left( F e^{i\phi} + F e^{-i\phi} \right) + \frac{1}{2} i\omega' \left( F e^{i\phi} - F e^{-i\phi} \right).$$

Untuk  $r/m \rightarrow 0$  atau  $\phi \approx \pi/2$ , maka

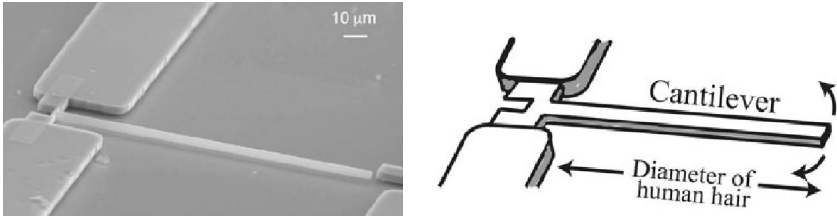
$$\begin{aligned} \dot{x}(0)|_{r/m \rightarrow 0} &= \frac{1}{2} i\omega' \left( F e^{i\phi} - F e^{-i\phi} \right) \\ &= -\omega' \left[ -i \frac{1}{2} \left( F e^{i\phi} - F e^{-i\phi} \right) \right] = -\omega' F \sin \phi. \end{aligned}$$

#### Contoh soal:

*Micromachined cantilever* (Gambar 2.5) adalah alat yang dipakai untuk mengukur tekanan gas atau berat molekul dengan membandingkan perbedaan nilai frekuensi GHR  $\omega'$  dan GHS  $\omega_0$  yang diukur di ruang hampa. Carilah nilai perbandingan tersebut.

### Penyelesaian

Karena  $\omega' = \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$ , maka  $\frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{r^2/4m^2}{\omega_0^2}}$ . Terlihat bahwa dengan membandingkan  $\omega'$  terhadap  $\omega_0$ , kita dapat mengetahui parameter redaman dan berat molekul atau tekanan yang diakibatkan olehnya.



Gambar 2.5: *Micromachined cantilever* (Y. Xu, J. -T. Lin, B. W. Alphenaar, and R. S. Keynton, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 143513 (2006).)

## 2.3 Parameter redaman

Amplitudo (dan juga energi) pada getaran harmonis teredam selalu mengalami peluruhan. Laju peluruhan tersebut dapat dinyatakan dalam salah satu parameter berikut

- waktu relaksasi  $t_r$
- penurunan logaritmik  $\delta$
- faktor kualitas  $Q$

### 2.3.1 Waktu relaksasi

Waktu relaksasi  $t_r$  (disebut juga waktu paro) adalah waktu yang diperlukan sehingga amplitudo getaran meluruh dengan faktor  $\frac{1}{e}$ . Untuk itu berlaku

$$\frac{A(t = t_r)}{A_0} = \frac{A_0 e^{-(r/2m)t_r}}{A_0} = e^{-(r/2m)t_r} = e^{-1},$$

yang menunjukkan bahwa

$$t_r = \frac{2m}{r}. \quad (2.6)$$

Perhatikan bahwa  $t_r$  bergantung pada  $r$ . Besaran  $t_r$  diperlukan karena, secara teoretik, GHR baru (akan benar-benar) berhenti pada  $t = \infty$ .

**Contoh soal:** (*Pain Problem 2.4*)

Tinjau sebuah rangkaian  $RC$  dengan muatan pada kapasitornya adalah  $q_0$  pada  $t = 0$ . Tunjukkan bahwa waktu relaksasinya adalah  $RC$ .

### Penyelesaian

Persamaan tegangan untuk rangkain  $RC$  adalah  $V_R + V_C = 0$ , di mana  $V_R = IR = R \frac{dq}{dt}$  dan  $V_C = \frac{1}{C}q$ . Dengan menata suku-sukunya, didapatkan persamaan  $\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q$  atau  $\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$  yang solusinya adalah  $\ln q = -\frac{1}{RC}t + k$  atau  $q = k \times e^{-(1/RC)t}$ , dengan  $k$  adalah konstanta. Dengan menerapkan syarat batas  $q(t = 0) = q_0$  didapatkan bahwa  $k = q_0$  atau  $q = q_0 e^{-(1/RC)t}$ . Waktu relaksasi terjadi ketika  $q = q_0 e^{-(1/RC)t_r} = q_0 e^{-1}$  yang berarti bahwa  $t_r = RC$ .

### 2.3.2 Penurunan logaritmik $\delta$

Penurunan logaritmik ( $\delta$ ) didefinisikan sebagai logaritma natural dari rasio nilai dua puncak yang berurutan

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}},$$

di mana  $A_n$  adalah amplitudo pada saat  $t_n = n\tau' = n \frac{2\pi}{\omega'}$ , sedang  $A_{n+1}$  adalah amplitudo pada saat  $t_{n+1} = (n+1)\tau' = (n+1) \frac{2\pi}{\omega'}$ . Dengan demikian, nilai  $\delta$  adalah

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \frac{Ae^{-(r/2m)t_n} \sin(\omega' t_n + \phi)}{Ae^{-(r/2m)t_{n+1}} \sin(\omega' t_{n+1} + \phi)} \\ &= \ln \frac{Ae^{-(r/2m)n\tau'} \sin(\omega' n\tau' + \phi)}{Ae^{-(r/2m)(n+1)\tau'} \sin(\omega' (n+1)\tau' + \phi)} \\ &= \ln e^{(r/2m)\tau'} \\ \delta &= \left( \frac{r}{2m} \right) \tau' \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\delta$  juga terkait dengan  $t_r$  dalam bentuk  $\delta = \frac{\tau'}{t_r}$ .

### 2.3.3 Faktor kualitas $Q$

Amplitudo pada GHR meluruh dengan faktor  $e^{-(r/2m)t}$ . Karena energi sebanding dengan kuadrat amplitudo, maka energi meluruh dengan faktor  $e^{-(r/m)t}$ , dengan waktu relaksasi  $t_{r, \text{energi}} = m/r$ . Dalam selang waktu tersebut, osilator telah mengalami vibrasi dengan sudut  $Q = \omega' t_{r, \text{energi}} = \omega' m/r$ , atau

$$Q = \frac{m}{r} \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \quad (2.8)$$

Tabel 2.1: Tipikal nilai  $Q$  untuk beberapa osilator [2]

Sistem	$Q$
kertas berat yang digantungkan pada pita karet	10
bandul jam	75
rangkaian LCR	200
senar biola yang dipetik	1000
osilator rongga mikrowave	10000
kristal kuartz	1000000

Tabel 2.2: Review faktor redaman dalam GHR

parameter	simbol	definisi	rumusan
waktu relaksasi	$t_r$	waktu yang diperlukan sehingga amplitudo getaran meluruh dengan faktor $\frac{1}{e}$	$t_r = \frac{2m}{r}$
Penurunan logaritmik	$\delta$	logaritma natural dari dua puncak yang berurutan	$\delta = \left(\frac{r}{2m}\right) \tau'$
faktor kualitas	$Q$	nilai sudut (dalam radian) sehingga energi meluruh dengan faktor $\frac{1}{e}$ .	$Q \approx \frac{\omega_0 m}{r}$

Jadi, faktor kualitas ( $Q$ ) didefinisikan sebagai nilai sudut (dalam radian) sehingga energi meluruh dengan faktor  $\frac{1}{e}$ . Untuk  $\frac{s}{m} \gg \frac{r^2}{4m^2}$ , maka  $\sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \approx \sqrt{\frac{s}{m}} = \omega_0$ , sehingga

$$Q \approx \frac{\omega_0 m}{r}. \quad (2.9)$$

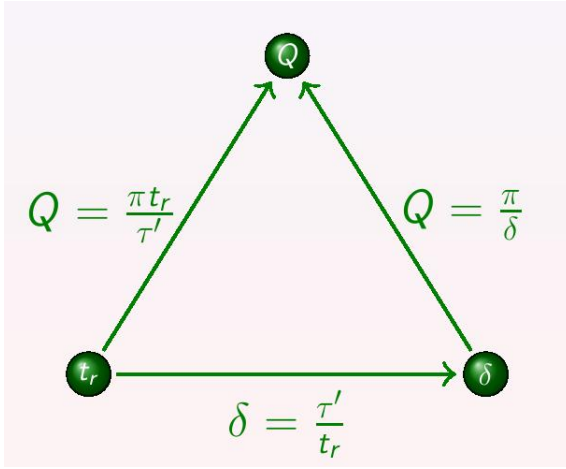
**Contoh soal:**

Nyatakan frekuensi GHR  $\omega'$  dalam variabel faktor kualitas  $Q$ .

**Penyelesaian**

Frekuensi GHR  $\omega'$  dapat dinyatakan sebagai  $\omega' = \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{4m^2\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Hasil (2.8) juga menunjukkan bahwa nilai  $Q$  yang besar berkorelasi dengan nilai  $\omega'$  yang kecil, dan sebaliknya. Untuk  $Q$  yang sangat besar, maka  $\omega' \approx \omega_0$ . Daftar nilai  $Q$  untuk beberapa kasus getaran disajikan pada Tabel 2.1. Review definisi  $Q$ ,  $t_r$ , dan  $\delta$  disajikan pada Tabel 2.2, sedangkan hubungan antar ketiganya disajikan pada



Gambar 2.6: Hubungan antar parameter redaman

Gambar 2.6.

### 2.3.4 Disipasi energi

Disipasi energi ialah kehilangan energi, akibat redaman, hamburan, atau gesekan. Besar energi disipasi dinyatakan sbb

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} s x^2 \right) \\
 &= m \ddot{x} \dot{x} + s x \dot{x} \\
 &= \dot{x} (m \ddot{x} + s x) \\
 &= \dot{x} (-r \dot{x}).
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, maka

$$\frac{dE}{dt} = -r \dot{x}^2. \quad (2.10)$$

Selanjutnya, dapat juga dihitung fraksi disipasi energi. Fakta bahwa  $E \propto e^{-(r/m)t} \propto e^{-(\omega_0/Q)t}$ , memungkinkan kita menghitung besar kehilangan energi ( $\Delta E$ ) dalam variabel  $Q$ , sebagai berikut

$$\Delta E = \frac{dE}{dt} \Delta t = -\frac{\omega_0}{Q} E \Delta t.$$

Dengan mengabaikan tanda minus (yang hanya menunjukkan arah perubahan), didapatkan fraksi energi hilang per satuan waktu

$$\left| \frac{\Delta E/E}{\Delta t} \right| = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (2.11)$$

**Contoh soal:**

Hitunglah fraksi energi yang hilang per periode dan per radian.

**Penyelesaian**

Jika dipilih  $\Delta t = \tau' \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$  pada Persamaan (2.11), maka didapatkan fraksi energi hilang per siklus

$$\left| \frac{\Delta E/E}{\tau} \right| = \frac{2\pi}{Q}.$$

Selanjutnya, karena 1 siklus =  $2\pi$  radian, didapatkan fraksi energi hilang per radian

$$\left| \frac{\Delta E/E}{\text{radian}} \right| = \frac{1}{Q}.$$

**Contoh soal:** (*Pain Problem 2.5*)

Jika  $\omega'^2 = \omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}$ , perlihatkan bahwa

- Jika  $\omega_0^2 - \omega'^2 = 10^{-6} \omega_0^2$  maka  $Q = 500$  dan  $\delta = \pi/500$
- Jika  $\omega_0 = 10^6$  rad/s dan  $m = 10^{-10}$  kg, maka  $s = 100$  N/m dan  $r = 2 \times 10^{-7}$  Nsm<sup>-1</sup>
- Jika simpangan maksimum pada  $t = 0$  s adalah  $10^{-2}$  m, maka  $E = 5 \times 10^{-3}$  J dengan waktu relaksasi  $t_{r,energi} = 0,5$  ms
- Energi yang hilang pada siklus pertama adalah  $2\pi \times 10^{-5}$  J

**Penyelesaian**

- Karena  $\omega'^2 = \frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2} = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$ , maka  $\frac{1}{4Q^2} = 1 - \frac{\omega'^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega'^2}{\omega_0^2} = 10^{-6}$ . Dengan demikian  $Q^2 = \frac{1}{4} \times 10^6$  atau  $Q = 500$ .

Selanjutnya dengan memanfaatkan definisi  $Q = \omega_0 \frac{m}{r}$ , maka  $\delta = \frac{r}{2m} \tau'$  dapat dinyatakan sebagai  $\delta = \frac{\tau'}{2} \omega_0 \frac{1}{\omega_0(m/r)} = \frac{\tau' \omega_0}{2} \frac{1}{Q} = \frac{(2\pi/\omega_0) \omega_0}{2} \frac{1}{Q} = \frac{\pi}{Q}$  atau  $\delta = \pi/500$

- Dengan memanfaatkan hubungan  $s = m\omega_0^2$  maka didapatkan  $s = 10^{-10} \times (10^6)^2 = 100$  N/m. Selanjutnya dengan memanfaatkan hubungan  $Q = \omega_0 \frac{m}{r}$  didapatkan  $r = \frac{\omega_0 m}{Q}$  atau  $r = \frac{10^6 \times 10^{-10}}{500} = 2 \times 10^{-7}$  Ns/m

- Energi getaran adalah  $E = \frac{1}{2}sa^2 = \frac{1}{2} \times 10^2 \times (10^{-2})^2 = 5 \times 10^{-3} \text{ J}$ . Karena energi meluruh dengan pola  $E = E_0 e^{-(r/m)t}$ , maka waktu relaksasinya adalah  $t_r = m/r = 10^{-10} / (2 \times 10^{-7}) = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s} = 0.5 \text{ ms}$ .
- Dengan menggunakan  $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$ , maka  $\Delta E = 2\pi \times E/Q = 2\pi \times (5 \times 10^{-3}) / (5 \times 10^2) = 2\pi \times 10^{-5} \text{ J}$

**Soal:** (*Pain Problem 2.6*)

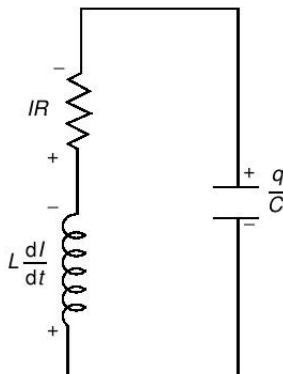
Tunjukkan bahwa fraksi perubahan frekuensi di sekitar frekuensi resonansi  $\omega_0$  pada gerak harmonis teredam adalah mendekati  $(8Q^2)^{-1}$ .

**Soal:**

Ketika kunci  $E$  pada gitar (dengan frekuensi 330 Hz) dipetik, maka intensitasnya menurun dengan faktor 2 setelah 4 s. Tentukan (i) konstanta peluruhan  $\lambda$ , (ii) faktor kualitas  $Q$ , dan (iii) energi yang hilang setiap siklus..

**Soal:**

Sebuah elektron yang tereksitasi pada sebuah atom berperilaku sebagai osilator harmonis teredam ketika melepaskan radiasi. Jika waktu paro atom adalah  $10^{-8} \text{ s}$  dan panjang gelombang radiasinya adalah 500 nm, dugalah nilai faktor kualitas,  $Q$ , -nya.



Gambar 2.7: Rangkaian RLC



Tabel 2.3: Perbandingan antara GHR mekanis dan GHR listrik

	GHR mekanis	GHR listrik
Persamaan	Persamaan gaya (Hukum II Newton)	Persamaan tegangan (Hukum II Kirchoff)
simpangan	jarak $x, \theta$	muatan $q$
besaran inersia	massa $m, I$	induktansi $L$
besaran redaman	konstanta redaman $r$	hambatan $R$
besaran pemulih	konstanta kekakuan $s, c$	invers kapasitansi $\frac{1}{C}$

## 2.4 GHR pada sistem elektronik

Salah satu contoh sistem GHR elektronik adalah rangkaian RLC. Persamaan tegangan (HK II Krichoff) pada rangkaian RLC adalah  $L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0$  atau

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Persamaan di atas memiliki solusi

$$q = q_0 \exp \left[ -\frac{R}{2L}t \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t \right].$$

GHR elektrik teredam ringan bila  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$  atau  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , dengan  $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ . Perbandingan antara GHR mekanis dan GHR listrik disajikan pada Tabel 2.3.

### Contoh soal:

Sebuah rangkaian RLC memiliki  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 1,0 \text{ } \mu\text{F}$ , and  $R = 1 \text{ } \Omega$ . (a) Hitunglah waktu yang dibutuhkan sehingga muatan pada kapasitornya menjadi separo dari muatan semula. (b) Hitunglah jumlah periode yang terjadi selama waktu tersebut.

### Penyelesaian

Dinamika muatan pada rangkaian RLC diberikan oleh

$$q = q_0 \exp \left[ -\frac{R}{2L}t \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t \right] \propto q_0 e^{-(r/2L)t},$$

atau

$$t = \frac{2L}{R} \ln \left( \frac{q}{q_0} \right) = \frac{2 \times 10^{-2} \times \ln 2}{1} = 13,86 \text{ ms}.$$

Tabel 2.4: Perbandingan antara GHR dan GHS

	GHS	GHR
simpangan	konstan	Meluruh dengan faktor $e^{-pt}$
frekuensi	frekuensi natural $\omega_0$	frekuensi baru $\omega' < \omega_0$
energi	konstan $\frac{dE}{dt} = 0$	Meluruh dengan faktor $e^{-2pt}$ , $\frac{dE}{dt} = -rx^2$ .

Pada kasus tersebut nilai  $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{4 \times (10^{-2})^2} = 2,5 \times 10^3$  jauh lebih kecil dari  $\frac{1}{LC} = \frac{1}{10^{-2} \times 10^{-6}} = 10^8$ , sehingga termasuk GHR ringan dan  $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  dapat diganti dengan  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^4$ . Dengan demikian jumlah periode yang terjadi adalah

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi/\omega_0} = \frac{\omega_0 t}{2\pi} = \frac{10^4 \times 13,86 \times 10^{-3}}{2\pi} \approx 22.$$

**Contoh soal:**

Hitunglah fraksi kehilangan energi per siklus pada rangkaian RLC, sebagai fungsi frekuensi angular  $\omega'$ .

**Penyelesaian**

Fraksi kehilangan energi per siklus adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta E/E}{\tau} &= \frac{E_{awal} - E_{akhir}}{E_{awal}} \\
 &= 1 - \frac{E_{akhir}}{E_{awal}} \\
 &= 1 - e^{-(R/L)\tau'} \\
 &\approx 1 - 1 + \frac{R}{L}\tau' \\
 &= \frac{R\tau'}{L} \\
 &= \frac{2\pi R}{\omega' L}.
 \end{aligned}$$

Hasil yang sama dapat diperoleh dengan cara

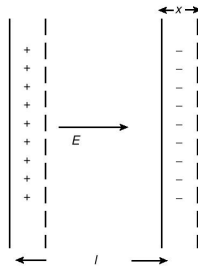
$$\frac{\Delta E/E}{\tau} = \frac{\omega_0 \tau'}{Q} = \frac{\omega_0}{\omega_0 L/R} \tau' = \frac{R}{L} \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi R}{\omega' L}.$$

**Soal:** (*Pain Problem 2.7*)

Tunjukkan bahwa faktor kualitas pada rangkaian RLC adalah  $Q = \omega_0 L/R$ .

**Contoh soal:** (*Pain Problem 2.8*)

Suatu plasma terdiri atas kumpulan ion dan elektron dengan rapat yang sama  $n_i = n_e = n$  dengan muatan yang berlawanan  $\pm e$  dan  $m_i > m_e$  (lihat gambar di bawah). Jarak relatif antara ion dan elektron  $l$  menghasilkan gaya pemulih. Jika elektron bergeser sejauh  $x$  dari  $l$ , maka akan timbul medan pemulih sebesar  $E = \frac{nex}{\epsilon_0}$ . Tunjukkan bahwa gaya pemulih per satuan luas adalah  $\frac{xn^2e^2l}{\epsilon_0}$  dan menghasilkan frekuensi  $\omega_e^2 = \frac{ne^2}{m_e\epsilon_0}$ .



## Penyelesaian

### Cara 1

Jika kita mengasumsikan  $E$  homogen, maka gaya pemulih yang dialami elektron adalah

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{pemulih}}}{\text{luas}} &= \frac{\text{jumlah ion}}{\text{luas}} \times \text{muatan ion} \times \text{medan pemulih} \\ &= nl \times (-e) \times \frac{nex}{\epsilon_0} = -\frac{n^2e^2xl}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Menurut Hukum II Newton, gaya per satuan luas yang dialami elektron adalah  $\frac{F}{\text{luas}} = \frac{\text{massa}}{\text{luas}} \ddot{x} = m_e n l \ddot{x}$ . Dengan membandingkan kedua persamaan di atas, didapatkan  $m_e n l \ddot{x} = -\frac{n^2e^2xl}{\epsilon_0}$  atau

$$\ddot{x} + \frac{ne^2}{m_e\epsilon_0} x = 0,$$

yang menghasilkan osilasi dengan  $\omega_e^2 = \frac{ne^2}{m_e\epsilon_0}$ .

*Cara 2*

Sebagai alternatif, gaya per satuan luas juga dapat dihitung dengan cara berikut. Mula-mula kita hitung polarisasi per atom, yang timbul akibat adanya medan listrik  $\vec{E}$ , yaitu

$$\frac{|\vec{P}|}{\text{atom}} = \alpha \vec{E} = \frac{ex}{\varepsilon_0}.$$

polarisasi timbul akibat pergeseran elektron sejauh  $x$ , dan merupakan gaya pemulih yang timbul akibat pergeseran tersebut. Polarisasi per unit volume adalah

$$\frac{|\vec{P}|}{\text{volume}} = n \frac{ex}{\varepsilon_0}.$$

Jika papan memiliki lebar  $l$ , maka

$$\frac{|\vec{P}|}{\text{luas}} = nl \frac{ex}{\varepsilon_0}.$$

Selanjutnya gaya per satuan luasnya adalah

$$\frac{F_{\text{pemulih}}}{\text{luas}} = q \frac{|\vec{P}|}{\text{luas}} = (-ne) \left( nl \frac{ex}{\varepsilon_0} \right) = -\frac{n^2 exl}{\varepsilon_0}.$$

Perhitungan frekuensi selanjutnya dapat dilakukan dengan cara yang sama, seperti cara 1.

**Soal:** (*Pain Problem 2.9*)

Tinjau fraksi perubahan energi jika sebuah bandul matematis panjang talinya memendek dengan faktor  $\Delta l$ .

## Bab 3

# Getaran Harmonis Terpaksa

### 3.1 Persamaan GHP dan solusinya

Sejauh ini kita sudah membahas 2 tipe getaran, yaitu

- Gerak harmonis sederhana (GHS) atau *simple harmonic oscillation* (SHO): getaran ini muncul karena suatu gaya penggerak sesaat, dan setelah itu dibiarkan bergetar tanpa gaya penggerak lagi. Pada GHS, sistem tidak mengalami redaman, sehingga (secara teoritis) GHS akan berlangsung terus menerus dan tidak pernah berhenti. GHS ini adalah model getaran yang sangat ideal, dan diberikan oleh persamaan umum

$$m\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

- Gerak harmonis teredam (GHR) atau *damped simple harmonic oscillation* (DHO): getaran ini muncul karena satu gaya penggerak sesaat, dan setelah itu dibiarkan bergetar tanpa gaya penggerak lagi. Pada GHR, sistem mengalami redaman, sehingga GHR akan berlangsung dengan simpangan semakin kecil sampai kemudian berhenti. GHR ini adalah model getaran yang lebih riil, dan diberikan oleh persamaan umum

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Secara umum, semua sistem di alam memiliki efek redaman. Untuk menghilangkan efek redaman, perlu diberikan gaya pemaksa yang

Tabel 3.1: Jenis getaran harmonis

	tanpa redaman	dengan redaman
tanpa gaya pemaksa	GHS	GHR
dengan gaya pemaksa	GHP-r	GHP (GHP+r)

bekerja secara terus menerus. Getaran seperti ini dikenal gerak harmonis terpaksa (GHP) atau *forced harmonic oscillation* (FHO). Pembagian GHP disajikan pada Tabel 3.1.

Pada GHP, bekerja 3 buah gaya, yaitu gaya pemulih, gaya redaman, dan gaya pemaksa. Jika dipilih gaya pemaksa dalam bentuk  $F_0 \cos \omega t$ , maka persamaan gaya untuk GHP adalah

$$\begin{aligned} \text{Gaya inersia} &= \text{gaya pemulih} + \text{gaya redaman} + \text{gaya pemaksa} \\ m\ddot{x} &= (-sx) + (-r\dot{x}) + (F_0 \cos \omega t), \end{aligned}$$

dan dapat ditulis sebagai

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F_0 \cos \omega t. \quad (3.1)$$

Perhatikan bahwa gaya pemaksa dipilih dalam bentuk sinusoidal / cosinusoidal, sehingga polanya sama dengan getaran yang terjadi.  $\omega$  adalah frekuensi gaya pemaksa.

Sekarang kita akan mencari persamaan simpangan untuk GHP. Hal ini dapat diperoleh dengan memecahkan Persamaan (3.1). Ada dua macam solusi untuk Persamaan (3.1), yaitu

- Solusi homogen: yaitu solusi dengan mengambil suku kanan sama dengan nol ( $m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0$ ). Kasus ini tereduksi menjadi kasus GHR, dan solusinya, menurut Persamaan (2.2), adalah  $x = e^{-pt} (C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt})$ , di mana  $p = \frac{r}{2m}$  dan  $q = \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}$ . Solusi ini menghasilkan getaran dengan amplitudo yang semakin kecil seiring waktu, sehingga solusinya dikenal sebagai solusi tak tunak atau *transient solution*.
- Solusi tak homogen, yaitu solusi dengan mengambil suku kanan tidak sama dengan nol ( $m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F_0 \cos \omega t$ ). Solusi ini menghasilkan getaran dengan amplitudo konstan, sehingga solusinya dikenal sebagai solusi tunak atau *steady state solution*.

Solusi lengkap GHP harusnya merupakan jumlahan dari kedua solusi di atas. Tetapi karena solusi tak tunak mengalami peluruhan, maka

pada waktu yang lama setelah mulainya getaran, solusi lengkap GHP didominasi oleh solusi tunak.

Sekarang kita fokus pada solusi tunak GHP. Kita mulai dengan persamaan umum GHP (Persamaan (3.1))

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F_0 \cos \omega t.$$

Misalkan kita tuliskan  $F_0 \cos \omega t = \Re [F_0 e^{i\omega t}]$ , di mana  $\Re [x]$  adalah bagian riil dari bilangan kompleks  $x$ . Sekarang kita misalkan solusinya adalah  $x = \Re [A e^{i\omega t}]$ . Dengan demikian persamaan GHP menjadi

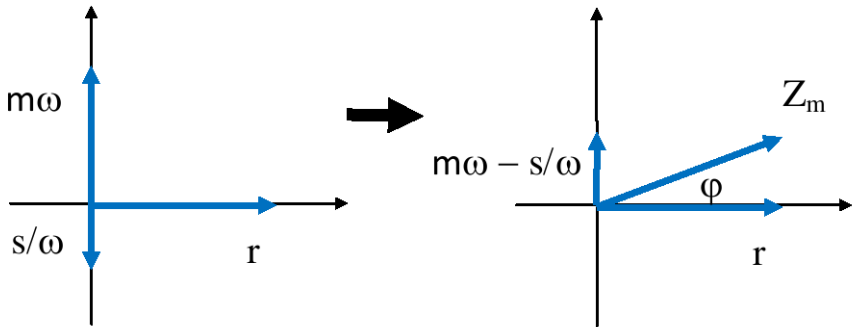
$$(-\omega^2 m + i\omega r + s) \Re [A e^{i\omega t}] = \Re [F_0 e^{i\omega t}],$$

sehingga

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{-\omega^2 m + i\omega r + s} = \frac{F_0}{i\omega r - (\omega^2 m - s)} \\ &= \frac{-iF_0}{\omega [r + i(\omega m - s/\omega)]} = \frac{-iF_0}{\omega Z_m e^{i\phi}}. \end{aligned}$$

Pada perhitungan di atas, kita definisikan

- $Z_m$  adalah impedansi mekanis,  $Z_m = \sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}$
- $\phi$  adalah sudut antara  $\mathbf{Z}_m$  dan  $\mathbf{r}$



Gambar 3.1: Diagram fase pada GHP mekanis

Dengan demikian, maka

$$x = \Re [A e^{i\omega t}] = \Re \left[ \frac{-iF_0}{\omega Z_m e^{i\phi}} e^{i\omega t} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \Re \left[ \frac{-iF_0}{\omega Z_m} e^{i(\omega t - \phi)} \right] \\
&= \Re \left[ \frac{-iF_0}{\omega Z_m} (\cos(\omega t - \phi) + i \sin(\omega t - \phi)) \right] \\
x &= \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa untuk gaya pemaksa  $F_0 \cos \omega t$ , solusinya adalah  $x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$ . Jika dibandingkan dengan ungkapan umum simpangan  $x = x_0 \sin(\omega t - \phi)$ , terlihat bahwa amplitudo simpangan pada GHP adalah  $x_0 = \frac{F_0}{\omega Z_m}$ .

**Contoh soal:**

Dengan mengacu pada Gambar 3.1, tunjukkan bahwa  $r + i(\omega m - s/\omega) = Z_m e^{i\phi}$ .

**Penyelesaian**

Dengan mengacu pada gambar, terlihat bahwa

$$\begin{aligned}
r + i(\omega m - s/\omega) &= Z_m \cos \phi + i Z_m \sin \phi \\
&= Z_m (\cos \phi + i \sin \phi) \\
&= Z_m e^{i\phi}
\end{aligned}$$

**Contoh soal:**

Tunjukkan untuk gaya pemaksa  $F_0 \sin \omega t$ , solusinya adalah  $x = -\frac{F_0}{\omega Z_m} \cos(\omega t - \phi)$

**Penyelesaian**

Dalam hal ini, gaya pemaksa  $F_0 \sin \omega t = \Im [F_0 e^{i\omega t}]$ , sehingga

$$\begin{aligned}
x &= \Im \left[ \frac{-iF_0}{\omega Z_m} e^{i(\omega t - \phi)} \right] \\
&= \Im \left[ \frac{-iF_0}{\omega Z_m} (\cos(\omega t - \phi) + i \sin(\omega t - \phi)) \right] \\
&= -\frac{F_0}{\omega Z_m} \cos(\omega t - \phi).
\end{aligned}$$

Dari contoh di atas, diketahui bahwa ungkapan spesifik simpangan pada GHP bergantung pada bentuk gaya pemaksanya. Selanjutnya kita juga dapat menghitung kecepatan dan percepatan getar, di mana  $x = \frac{dx}{dt}$  dan  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Nilai  $x$ ,  $v$ , dan  $a$  untuk  $F = F_0 \cos(\omega t)$  dan



$F = F_0 \sin(\omega t)$  disajikan pada Tabel 3.2. Terlihat bahwa frekuensi GHP selalu sama dengan frekuensi gaya pemaksanya. Juga dapat diketahui bahwa ungkapan amplitudo simpangan  $x_0 = \frac{F_0}{\omega Z_m}$ , amplitudo kecepatan  $v_0 = \frac{F_0}{Z_m}$ , dan amplitudo percepatan  $a_0 = \frac{\omega F_0}{Z_m}$ , tidak bergantung pada osilasi gaya pemaksanya.

Tabel 3.2: Solusi GHP untuk berbagai gaya pemaksa

	$F = F_0 \cos(\omega t)$	$F = F_0 \sin(\omega t)$
simpangan	$x = \left(\frac{F_0}{\omega Z_m}\right) \sin(\omega t - \phi)$	$x = -\left(\frac{F_0}{\omega Z_m}\right) \cos(\omega t - \phi)$
kecepatan	$v = \left(\frac{F_0}{Z_m}\right) \cos(\omega t - \phi)$	$v = \left(\frac{F_0}{Z_m}\right) \sin(\omega t - \phi)$
percepatan	$a = -\left(\frac{F_0 \omega}{Z_m}\right) \sin(\omega t - \phi)$	$a = \left(\frac{F_0 \omega}{Z_m}\right) \cos(\omega t - \phi)$

**Soal:** (*Pain Problem 3.2*)

Simpangan pada suatu GHP+r (GHP dengan redaman) pada  $t = 0$  adalah nol, sedang peluruannya mengikuti pola  $e^{-k}$ . Perhatikan bahwa untuk redaman yang sangat kecil, maka rata-rata amplitudo simpangannya adalah  $\frac{x_0}{t} = \frac{F_0}{2km\omega_0}$ .

### Penyelesaian

Peluruhan GHP+r secara umum adalah mengikuti  $\exp\left(-\frac{rt}{2m}\right)$ . Karena peluruhan GHP+r dalam soal ini adalah  $e^{-k}$ , maka didapatkan bahwa faktor redaman GHP+r adalah.

$$r = \frac{2mk}{t}.$$

Amplitudo simpangan maksimum diberikan oleh

$$x_0 = \frac{F_0}{\omega \sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}} = \frac{F_0}{\omega \sqrt{r^2 + \frac{m}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

Untuk redaman yang sangat kecil maka  $\omega \approx \omega_0$ , sehingga

$$x_0 \approx \frac{F_0}{\omega r} = \frac{F_0}{r\omega_0} = \frac{F_0}{(2mk/t)\omega_0} = \frac{F_0 t}{2mk\omega_0},$$

sehingga didapatkan  $\frac{x_0}{t} = \frac{F_0}{2mk\omega_0}$ .

**Soal:** (*Pain Problem 3.3*)

Persamaan gaya suatu GHP-r adalah  $m\ddot{x} + sx = F_0 \sin \omega t$ . Tunjukkan bahwa solusinya adalah  $x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

### Penyelesaian

Misalkan kita pilih  $x = A(\omega) \sin \omega t$  maka persamaan GHP-r menjadi

$$(-\omega^2 m + s) A(\omega) \sin \omega t = F_0 \sin \omega t,$$

yang berarti

$$A(\omega) = \frac{\mathbf{F}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Dengan demikian solusi tak homogen GHP-r adalah

$$x = \frac{\mathbf{F}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t,$$

Dan solusi lengkap GHP-r adalah

$$x = \frac{\mathbf{F}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

## 3.2 Perilaku GHP

Kecepatan getaran didapatkan dari turunan posisi terhadap waktu. Untuk gaya pemaksa  $F_0 \cos \omega t$  didapatkan  $x = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi)$ , sehingga

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi) \right] = \frac{F_0}{Z_m} \cos(\omega t - \phi). \quad (3.3)$$

Dari persamaan di atas, didapatkan bahwa

- Amplitudo kecepatan pada GHP adalah  $v_0 = \frac{F_0}{Z_m}$ .
- Nilai impedansi mekanis  $Z_m$  memenuhi persamaan  $\mathbf{Z}_m = \frac{\mathbf{F}_0}{\mathbf{v}}$ , seperti yang diharapkan.
- Dengan membandingkan  $v$  dan  $F$ , didapatkan bahwa  $F$  dan  $v$  berbeda fase sebesar  $\phi$ .
- Dengan membandingkan  $v$  dan  $x$ , didapatkan bahwa  $v$  mendahului  $x$  sebesar  $90^\circ$ .

### 3.2.1 Perilaku $v_0$ sebagai fungsi $\omega$

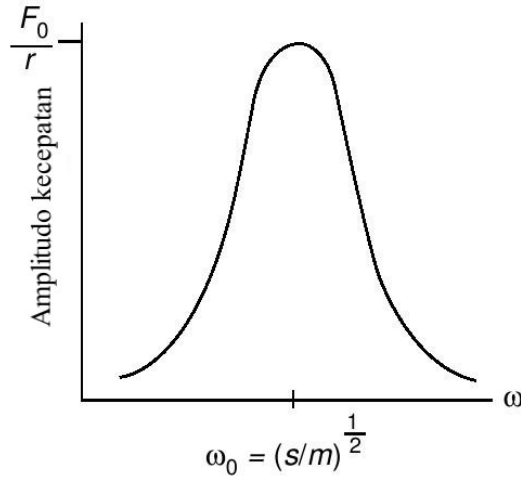
Amplitudo kecepatan  $v_0 = \frac{F_0}{Z_m}$  dapat dituliskan sebagai

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}}, \quad (3.4)$$

yang menunjukkan ketergantungannya pada frekuensi  $\omega$ . Kondisi ekstrimnya adalah sebagai berikut:

- Pada  $\omega$  yang sangat kecil, maka  $\omega m \rightarrow 0$  sehingga nilai  $v$  sangat dipengaruhi oleh kekakuan  $s$  (*stiffnes controlled*)
- Pada  $\omega$  yang sangat besar, maka  $s/\omega \rightarrow 0$  sehingga nilai  $v$  sangat dipengaruhi oleh masa  $m$  (*mass controlled*)
- Pada  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$ , maka  $\omega m - s/\omega = 0$  sehingga
  - nilai impedansi mencapai minimum,  $Z_m = r$  dan nilai  $v_0$  mencapai maksimum  $v_0 = \frac{F}{r}$ .
  - nilai fase  $\phi = 0$  sehingga  $v$  sefase dengan  $F$ .

Frekuensi  $\omega_0$  dikenal sebagai frekuensi resonansi dari kecepatan.



Gambar 3.2: Perilaku amplitudo kecepatan  $v_0$  sebagai fungsi frekuensi  $\omega$

### 3.2.2 Perilaku $\phi$ sebagai fungsi $\omega$

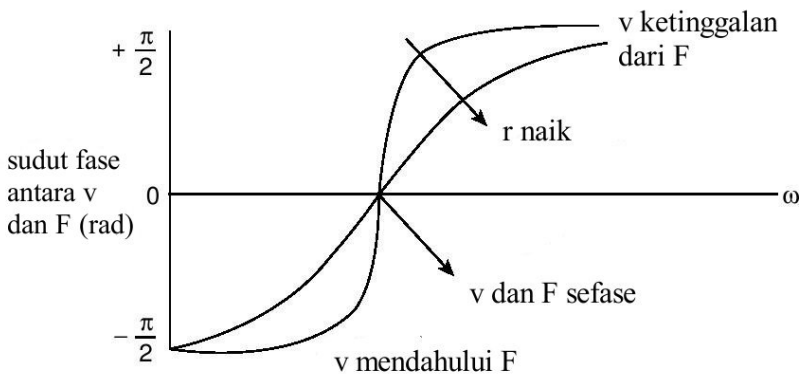
Sudut fase  $\phi$  adalah beda fase antara kecepatan  $v$  dan gaya  $F$ . Nilai  $\phi$  diberikan oleh

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega m - s/\omega}{r} \right).$$

kita tinjau lebih dahulu ketergantungan  $\phi$  terhadap  $\omega$ . Kondisi ekstrimnya adalah

- Jika  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$  maka  $\omega m = s/\omega$  sehingga  $\phi = 0$  dan  $v$  sefase dengan  $F$ .
- Jika  $\omega > \omega_0$  maka  $\omega m > s/\omega$  sehingga  $\phi$  positif dan  $v$  ketinggalan dari  $F$ . Jika  $\omega \rightarrow \infty$  maka  $\phi \rightarrow 90^\circ$ .
- Jika  $\omega < \omega_0$  maka  $\omega m < s/\omega$  sehingga  $\phi$  negatif dan  $v$  mendahului  $F$ . Jika  $\omega \rightarrow 0$  maka  $\phi \rightarrow -90^\circ$ .

Perlu dicatat di sini bahwa  $\phi$  juga merupakan fungsi  $\frac{1}{r}$ , yang berarti  $\phi$  mengecil dengan bertambahnya  $r$ . Plot  $\phi$  sebagai fungsi  $\omega$  pada berbagai nilai  $r$  disajikan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3: Perilaku sudut fase  $\phi$  sebagai fungsi frekuensi  $\omega$

**Contoh soal:** (*Pain Problem 3.4*)

Jika

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

dengan  $A$  dan  $B$  konstanta, dan  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , tunjukkan bahwa

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

Selanjutnya dengan menuliskan  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$  di mana  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$  dan  $\Delta\omega t \ll 1$ , perhatikan bahwa

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t).$$

### Penyelesaian

Syarat batas  $x(0) = 0$  memberikan kita  $A = 0$ , sehingga

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + B \sin \omega_0 t,$$

dan

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0 \cos \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + B\omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Syarat batas  $\dot{x}(0) = 0$  memberikan kita

$$\dot{x}(0) = \frac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + B\omega_0 = 0,$$

yang berarti bahwa  $B = -\frac{F_0\omega}{m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$ . Dengan demikian simpangan  $x$  dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} - \frac{F_0\omega}{m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega_0 t \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menuliskan  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$  di mana  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ , didapatkan

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - (\omega_0^2 + 2\omega_0\Delta\omega + \Delta\omega^2))}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \sin \omega_0 t \cos \Delta \omega t + \cos \omega_0 t \sin \Delta \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \\
& = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(-2\omega_0 \Delta \omega)} \left( \sin \omega_0 t \cos \Delta \omega t + \cos \omega_0 t \sin \Delta \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).
\end{aligned}$$

Selanjutnya karena  $\Delta \omega t \ll 1$ , maka

$$\begin{aligned}
x & \simeq \frac{F_0}{m} \frac{1}{(-2\omega_0 \Delta \omega)} \left( \sin \omega_0 t + \Delta \omega t \cos \omega_0 t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \\
& = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \left( -\frac{\omega_0}{\Delta \omega} \sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t + \frac{\omega}{\Delta \omega} \sin \omega_0 t \right) \\
& = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega} \sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t \right) \\
& = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t).
\end{aligned}$$

### 3.2.3 Perilaku $x_0$ sebagai fungsi $\omega$

Amplitudo simpangan  $x_0 = \frac{F_0}{\omega Z_m}$  dapat dituliskan sebagai

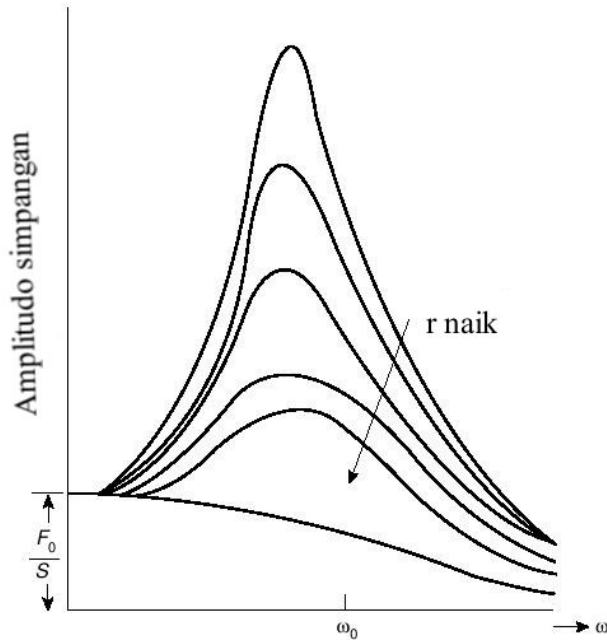
$$x_0 = \frac{F_0}{\omega \sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}}, \quad (3.5)$$

yang menunjukkan ketergantungannya pada frekuensi  $\omega$ . Kondisi ekstremnya adalah sebagai berikut:

- Pada  $\omega$  yang sangat kecil, maka  $Z_m = \sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2} \rightarrow s/\omega$  sehingga  $x_0 \approx \frac{F_0}{\omega s/\omega} = \frac{F_0}{s}$ .
- Pada  $\omega$  yang sangat besar, maka  $Z_m = \sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2} \rightarrow \omega m$  sehingga  $x_0 \approx \frac{F_0}{\omega^2 m}$ .
- Simpangan maksimum terjadi jika  $\frac{d}{d\omega} (\omega Z_m) = 0$ . Kondisi tersebut memberikan kita  $\omega = 0$  atau  $\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}$ , dengan  $\omega_{r,x}$  adalah frekuensi resonansi untuk simpangan. Terlihat bahwa  $\omega_{r,x} < \omega_0$ .

#### Soal:

Turunkan ungkapan frekuensi resonansi untuk simpangan pada GHP.



Gambar 3.4: Perilaku amplitudo simpangan  $x_0$  sebagai fungsi frekuensi  $\omega$

### Penyelesaian:

Kita tuliskan simpangan dalam bentuk

$$x(\omega) = \frac{F_0}{\omega \sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega^2 (r/m)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

Dengan demikian,  $x$  akan maksimum jika  $\frac{d}{d\omega} \left( \sqrt{\omega^2 (r/m)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right) = 0$ . Kondisi di atas memberikan kita  $2\omega (r/m)^2 + 2(\omega^2 - \omega_0^2) 2\omega = 2\omega \left[ (r/m)^2 + 2(\omega^2 - \omega_0^2) \right]$ . Dengan demikian, ada dua kemungkinan solusi, yaitu  $\omega = 0$  dan  $(r/m)^2 + 2(\omega^2 - \omega_0^2) = 0$ . Kondisi terakhir memberikan kita nilai frekuensi resonansi untuk simpangan pada GHP sebesar  $\omega_{r,x} = \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}$ ,

### Soal:

Turunkan ungkapan amplitudo simpangan pada frekuensi resonansi pada GHP.

### Penyelesaian:

Karena  $x(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega^2(r/m)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$  dan  $\omega_{r,x} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2}}$ , maka

$$\begin{aligned} x(\omega_{r,x}) &= \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2}\right)(r/m)^2 + \frac{r^4}{4m^4}}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}\right)(r/m)^2}} \\ &= \frac{F_0/r}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}} = \frac{F_0/r\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{4m^2\omega_0^2}}}. \end{aligned}$$

**Soal:** (*Pain Problem 3.6*)

Tunjukkan bahwa pada keadaan resonansi, amplitudo simpangan GHP+r diberikan oleh  $x = \frac{F_0}{\omega' r}$ , di mana  $F_0$  adalah amplitudo gaya pemaksa dan  $\omega'^2 = \frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}$ .

### 3.2.4 Perilaku $a_0$ sebagai fungsi $\omega$

Percepatan pada GHP diberikan oleh  $a = -\frac{F_0\omega}{Z_m} \sin(\omega t - \phi)$ , dengan amplitudo kecepatan  $a_0 = \frac{F_0\omega}{Z_m} = \frac{F_0\omega}{\sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}}$  atau

$$a_0 = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{r}{\omega}\right)^2 + (m - s/\omega^2)^2}}. \quad (3.6)$$

Kondisi ekstrim untuk  $a_0$  adalah sebagai berikut:

- Pada  $\omega$  yang sangat kecil, nilai  $\sqrt{\dots} \approx \sqrt{(s/\omega^2)^2} = s/\omega^2$ . Dengan demikian, maka  $\frac{F_0\omega^2}{s} \approx 0$
- Pada  $\omega$  yang sangat besar, nilai  $\sqrt{\dots} \approx \sqrt{(m)^2} = m$ . Dengan demikian, maka  $\frac{F_0}{m}$
- Nilai  $a_0$  mencapai maksimum jika  $\sqrt{\dots}$  minimum atau  $\frac{d\sqrt{\dots}}{d\omega} = 0$ . Hal ini terjadi pada  $\omega_{r,a} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2s+r^2/m}}$ .

**Soal:**

Turunkan ungkapan frekuensi resonansi untuk percepatan pada GHP.

**Penyelesaian:**



Kita tuliskan amplitudo percepatan dalam bentuk  $a(\omega) = \frac{F_0\omega}{\sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\frac{r}{\omega}\right)^2 + \left(m - \frac{s}{\omega^2}\right)^2}}$ . Dengan demikian,  $a$  akan maksimum jika

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left( \sqrt{\left(\frac{r}{\omega}\right)^2 + \left(m - \frac{s}{\omega^2}\right)^2} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{\cdot}} \left[ \frac{-2r^2}{\omega^3} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(m - \frac{s}{\omega^2}\right) \left(-2s \frac{1}{\omega^3}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\omega^5 \sqrt{\cdot}} [-\omega^2 (r^2 + 2ms) + 2s^2] = 0 \end{aligned}$$

Kondisi di atas memberikan kita  $-\omega^2 (r^2 + 2ms) + s^2 = 0$ , atau

$$\omega_{r,a} = \sqrt{\frac{2s^2}{r^2 + 2ms}} = \sqrt{\frac{s}{m(2s + r^2/m)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2s + r^2/m}}.$$

**Contoh soal:**

Turunkan ungkapan amplitudo percepatan pada frekuensi resonansi pada GHP.

**Penyelesaian:**

Karena  $a(\omega) = \frac{F_0\omega}{\sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}} = \frac{F_0\omega^2}{m\sqrt{\omega^2 \left(\frac{r}{m}\right)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$  dan  $\omega_{r,a} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2s + r^2/m}}$ , maka

$$\begin{aligned} a(\omega_{r,a}) &= \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{\omega_0^2 \left(\frac{r}{m}\right)^2}{2s + r^2/m} + \left(\frac{\omega_0^2}{2s + r^2/m} - \omega_0^2\right)^2}} \frac{\omega_0^2}{2s + r^2/m} \\ &= \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{\left(\frac{r}{m}\right)^2 \frac{m}{s}}{2s + r^2/m} + \left(\frac{1}{2s + r^2/m} - 1\right)^2}} \frac{1}{2s + r^2/m} \\ &= \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{\frac{r^2}{ms}}{2s + r^2/m} + \left(\frac{1 - 2s + r^2/m}{2s + r^2/m}\right)^2}} \frac{1}{2s + r^2/m} \\ &= \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{r^2}{ms} (2s + r^2/m) + (1 - 2s + r^2/m)^2}} \end{aligned}$$

Ketergantungan amplitudo simpangan  $x_0$ , amplitudo kecepatan  $v_0$ , amplitudo percepatan  $a_0$  serta sudut fase  $\phi$  pada frekuensi  $\omega$

Tabel 3.3: Ketergantungan  $x_0$ ,  $v_0$ ,  $a_0$ , dan  $\phi$  pada  $\omega$ 

	amplitudo simpangan	amplitudo kecepatan	amplitudo per- cepatan	sudut fase
ungkapan umum	$\frac{F_0}{\omega Z_m}$	$\frac{F_0}{Z_m}$	$\frac{F_0 \omega}{Z_m}$	$\phi = \arctan\left(\frac{\omega m - s/\omega}{r}\right)$
$\omega$ rendah	$\frac{F_0}{s}$	$\frac{F_0 \omega}{s} \approx 0$	$\frac{F_0 \omega^2}{s} \approx 0$	negatif
$\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$	$-\frac{F_0}{r \omega_0}$	$\frac{F_0}{r}$	$\frac{F_0 \omega_0}{s}$	nol
$\omega$ tinggi	$\frac{F_0}{\omega^2 m} \approx 0$	$\frac{F_0}{\omega m} \approx 0$	$\frac{F_0}{m}$	positif

Tabel 3.4: Resonansi pada GHP

jenis resonansi	frekuensi	amplitudo
simpangan	$\omega_{r,x} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{2m^2 \omega_0^2}}$	$x(\omega_{r,x}) = \frac{F_0/r \omega_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{4m^2 \omega_0^2}}}$
kecepatan	$\omega_{r,v} = \omega_0$	$v(\omega_{r,v}) = \frac{F_0}{r}$
percepatan	$\omega_{r,a} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2s+r^2/m}}$	lihat contoh soal

disajikan pada Tabel 3.3. Terlihat bahwa  $x_0$  pada  $\omega$  tinggi,  $v_0$  pada  $\omega$  rendah dan tinggi, serta  $a_0$  pada  $\omega$  rendah, nilainya hampir sama dengan nol. Sebaiknya nilai kuantitas  $x_0$  pada  $\omega$  rendah,  $v_0$  pada  $\omega$  resonansi, dan  $a_0$  pada  $\omega$  tinggi tidak bergantung pada frekuensi  $\omega$ . Kondisi resonansi untuk simpangan, kecepatan, dan percepatan disajikan pada Tabel 3.4.

**Soal:** (*Pain Problem 3.7*)

Tunjukkan bahwa kuantitas berikut nilainya tidak bergantung pada frekuensi,

- amplitudo simpangan pada frekuensi rendah
- amplitudo kecepatan pada frekuensi resonansi
- amplitudo percepatan pada frekuensi tinggi

**Soal:**

Tunjukkan bahwa kuantitas berikut nilainya mendekati nol,

- amplitudo simpangan pada frekuensi tinggi
- amplitudo kecepatan pada frekuensi rendah dan tinggi
- amplitudo percepatan pada frekuensi rendah

**3.2.5** Komponen simpangan

Telah diuraikan bahwa  $\phi$  adalah sudut antara  $\mathbf{Z}_m$  terhadap  $\mathbf{r}$ . Ini berarti bahwa  $\cos \phi = \frac{r}{Z_m}$  dan  $\sin \phi = \frac{X_m}{Z_m}$ . Dengan demikian, simpangan getaran terpaksa dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi) \\
 &= \frac{F_0}{\omega Z_m} [\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi] \\
 &= \frac{F_0}{\omega Z_m} \left[ \sin \omega t \frac{r}{Z_m} - \cos \omega t \frac{X_m}{Z_m} \right] \\
 &= \frac{F_0 r}{\omega Z_m^2} \sin \omega t - \frac{F_0 X_m}{\omega Z_m^2} \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

Suku  $\frac{F_0 r}{\omega Z_m^2} \sin \omega t$  dikenal sebagai suku resistif, sedang suku  $\frac{F_0 X_m}{\omega Z_m^2} \cos \omega t$  dikenal sebagai suku reaktif. Plot masing-masing komponen simpangan dan simpangan total dinyatakan dalam Gambar 3.5.

**Contoh soal:** (*Pain Problem 3.8*)

Perhatikan kurva pada Gambar 3.5. Tunjukkan bahwa untuk  $r$  yang kecil, nilai maksimum kurva adalah  $F_0/(2\omega_0 r)$  pada  $\omega_1 = \omega_0 - r/2m$ , dan nilai minimumnya adalah  $-F_0/(2\omega_0 r)$  pada  $\omega_2 = \omega_0 + r/2m$ .

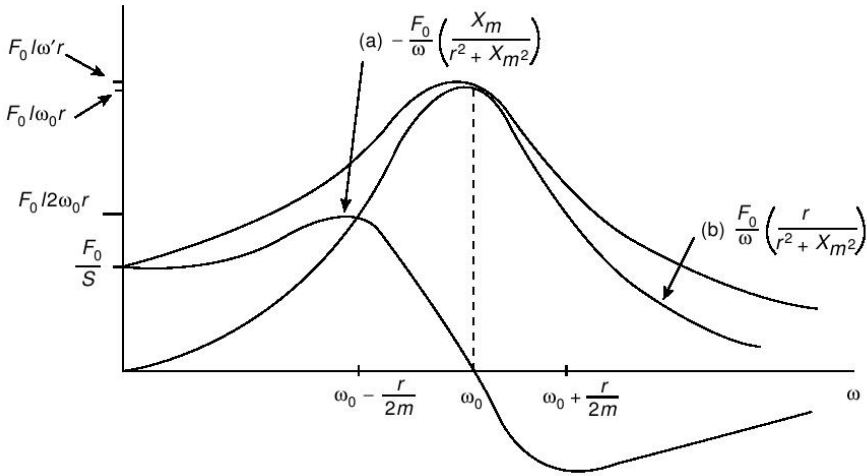
**Penyelesaian**

Kurva (a) diberikan oleh

$$x_m = -\frac{F_0 X_m}{\omega Z_m^2} = -\frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2},$$

dengan  $\omega_0^2 = s/m$ . Nilai minimum dan maksimum  $x_m$  tercapai bila  $\frac{dx_m}{d\omega} = 0$ , atau

$$m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^2 r^2 = 0.$$



Gambar 3.5: Komponen simpangan

Persamaan terakhir memiliki 2 solusi, yaitu  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0 r/m}$ , dan  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_0 r/m}$ . Karena  $r$  sangat kecil, maka

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0 r/m} = \sqrt{\left(\omega_0 - \frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{r^2}{4m^2}} \approx \omega_0 - \frac{r}{2m}.$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_0 r/m} = \sqrt{\left(\omega_0 + \frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{r^2}{4m^2}} \approx \omega_0 + \frac{r}{2m}.$$

Selanjutnya, nilai maksimum dan minimum dapat diperoleh dengan memasukkan nilai  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  ke dalam  $x_m$ .

$$\begin{aligned} x_{a, maks} &= x_m(\omega_1) = -\frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega_1^2)}{m^2 (\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 r^2} \\ &= \frac{F_0}{2\omega_0 r - \omega_0 r^2/m} \approx \frac{F_0}{2\omega_0 r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{a, min} &= x_m(\omega_2) = -\frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega_2^2)}{m^2 (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_2^2 r^2} \\ &= -\frac{F_0}{2\omega_0 r + \omega_0 r^2/m} \approx -\frac{F_0}{2\omega_0 r}. \end{aligned}$$

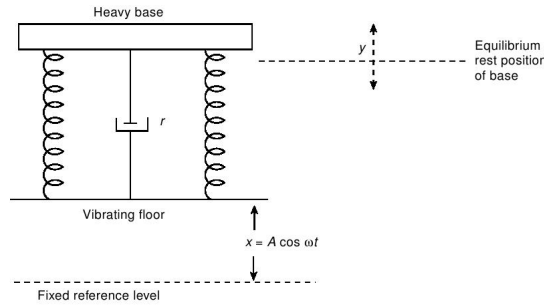
**Soal:** (*Pain Problem 3.9*)

Persamaan  $\ddot{x} + \omega^2 x = \left(-\frac{eE_0}{m}\right) \cos \omega t$  memerikan gerak tak teredam dari elektron terikat dengan muatan  $-e$  dan massa  $m$ , di bawah pengaruh medan listrik bolak-balik  $F_0 \cos \omega t$ . Untuk elektron dengan kerapatan  $n$ , tunjukkan bahwa suseptibilitas elektriknya adalah

$$\chi_e = \frac{nex}{\varepsilon_0 E} = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega)}.$$

**3.2.6** Vibrasi insulasi

Tinjau suatu rantai bergetar dengan simpangan  $x = A \cos \omega t$ . Misalkan di atas rantai tersebut diletakkan osilator yang terdiri atas papan berat yang disanggah oleh pegas dengan kekakuan  $s$  dan redaman  $r$ . Jika simpangan papan dinyatakan dalam sumbu  $y$ , maka percepatannya bergantung gaya pemulih pegas  $-sy$ , redaman pegas  $-r\dot{y}$ , pemulih tanah  $-sx$ , dan redaman tanah  $r\dot{x}$ . Persamaan matematisnya adalah:



Gambar 3.6: Vibrasi insulasi

$$m\ddot{y} = -r(\dot{y} - \dot{x}) - s(y - x) \quad (3.7)$$

Jika diperkenalkan koordinat baru  $X = y - x$ , maka

$$m\ddot{X} + r\dot{X} + sX = m\ddot{x}.$$

Karena  $x = A \cos \omega t$ , maka  $\ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t$ , sehingga

$$m\ddot{X} + r\dot{X} + sX = -mA\omega^2 \cos \omega t.$$

Solusi tunak dari persamaan di atas adalah

$$X = \frac{mA\omega^2}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi).$$

Selanjutnya, karena  $X = y - x$ , maka

$$y = A \left[ \frac{m\omega}{Z_m} \sin(\omega t - \phi) + \cos \omega t \right]. \quad (3.8)$$

**Soal:**

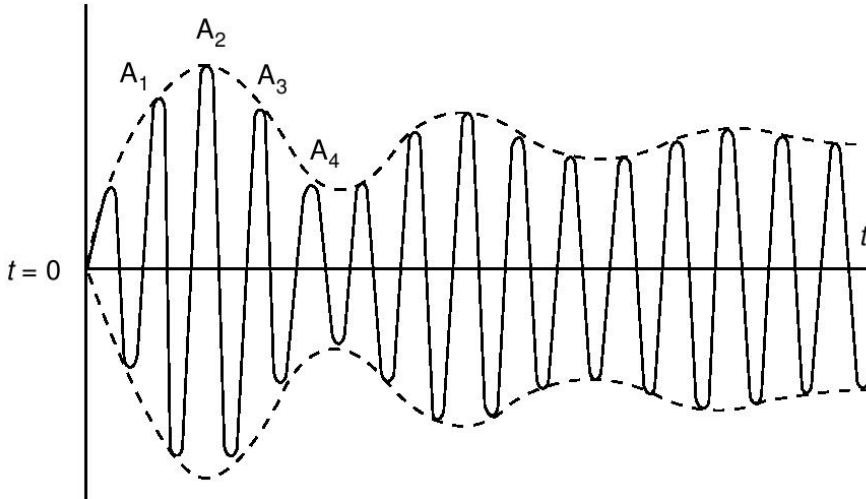
Tunjukkan bahwa pada vibrasi insulasi  $\frac{y_{maks}}{A} = \frac{(r^2 + s^2/\omega^2)^{1/2}}{Z_m}$ .

### 3.2.7 Efek suku tak tunak: ekspresi matematis

Sejauh ini kita hanya meninjau solusi tunak saja. Jika solusi tak tunak diperhitungkan, maka solusi lengkap GHP  $m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F_0 \cos \omega t$  adalah

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi) + x_{GHR} \\ &= \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi) + e^{-pt} (C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}) \end{aligned}$$

di mana  $Z_m = \sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}$ ,  $p = \frac{r}{2m}$ , dan  $q = \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}$ .



Gambar 3.7: Efek suku tak tunak pada simpangan

### 3.3 Energi pada GHP

#### 3.3.1 Daya rerata

Gaya pemaksa biasanya diberikan pada sebuah getaran harmonis teredam, dengan tujuan untuk menghindari redaman. Untuk menjaga agar tidak ada redaman, maka resonator sebagai sumber gaya pemaksa  $F(t)$  perlu memberikan daya terus menerus kepada sistem. Daya sesaat ( $P$ ) yang diberikan adalah

$$\begin{aligned} P &= Fv = (F_0 \cos \omega t) \left( \frac{F_0}{Z_m} \cos(\omega t - \phi) \right) \\ &= \frac{F_0^2}{Z_m} \cos \omega t \cos(\omega t - \phi). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Daya rata-ratanya ( $P_{rerata}$ ) diberikan oleh

$$\begin{aligned} P_{rerata} &= \frac{\text{kerja dalam satu periode}}{\text{periode}} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T P dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{F_0^2}{Z_m} \int_0^T [\cos^2 \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \phi] dt \\ &= \frac{F_0^2}{2Z_m} \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dalam perhitungan di atas telah dipakai  $\int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = 0$  dan  $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$ .

#### Contoh soal:

Hitunglah daya yang hilang akibat redaman Tunjukkan bahwa nilaiya sama dengan daya yang diberikan resonator.

#### Penyelesaian

Daya redaman sesaat adalah

$$P_{redaman} = f_{redaman} v_{redaman} = (r\dot{x})(\dot{x}) = r\dot{x}^2 = r \frac{F_0^2}{Z_m^2} \cos^2(\omega t - \phi).$$

Daya redaman rata-ratanya adalah

$$P_{rerata} = \frac{1}{T} r \frac{F_0^2}{Z_m^2} \int_0^T \cos^2(\omega t - \phi) dt = r \frac{F_0^2}{2Z_m^2} = \frac{F_0^2}{2Z_m} \cos \phi.$$

Dalam perhitungan di atas dipakai  $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \phi) dt = \frac{1}{2}$  dan  $r = Z_m \cos \phi$ . Terlihat bahwa daya redaman rerata sama dengan daya resonator rerata.

**Soal:** (*Pain Problem 3.11*)

Tunjukkan bahwa energi disipasi per siklus akibat gaya gesek  $r\dot{x}$  pada frekuensi angular  $\omega$  adalah  $\pi r \omega x_{max}^2$ .

**Contoh soal:**

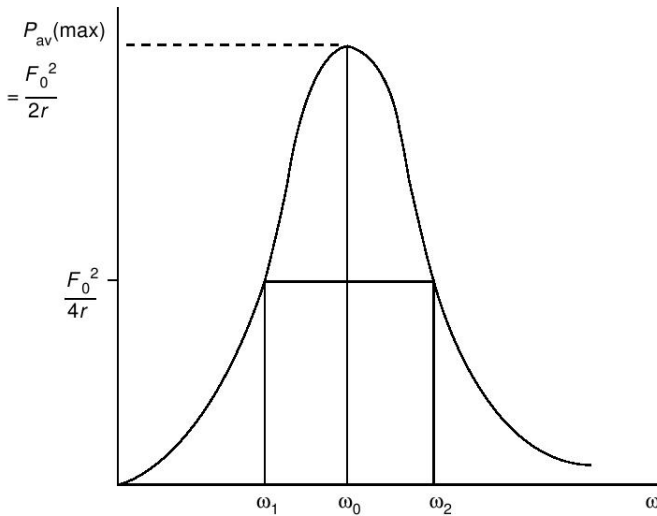
Diskusikan perilaku  $P_{rerata}$ , tunjukkan syarat  $P_{rerata, maks}$  dan berikan nilainya

**Penyelesaian**

Perilaku  $P_{rerata}$  diberikan oleh

$$P_{rerata} = \frac{F_0^2}{2Z_m} \cos \phi = \frac{F_0^2}{2\sqrt{r^2 + (\omega m - s/\omega)^2}} \cos \phi.$$

Hal ini berarti bahwa  $P_{rerata}$  mencapai maksimum bila (i)  $\phi = 0$  dan (ii)  $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}} = \omega_0$ . Nilai  $P_{rerata, maks}$  adalah  $\frac{F_0^2}{2r}$ .



Gambar 3.8: Plot  $P_{rerata}$  sebagai fungsi  $\omega$



### 3.3.2 Faktor kualitas

Faktor kualitas didefinisikan sebagai  $Q = \omega \frac{m}{r}$ , Sekarang kita akan menyatakan  $Q$  dalam variabel frekuensi resonansi  $\omega_0$  dan FWHM (*full width at half maximum*)  $\Delta\omega$ , pada kurva  $P_{rerata}$  sebagai fungsi  $\omega$ , seperti diperlihatkan pada Gambar 3.10. Karena  $P_{rerata}(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2}P_{rerata}(\omega_0)$  dan  $P_{rerata} \propto \frac{1}{2Z_m^2}$  (Persamaan (3.10)), maka

$$\frac{r}{m} = \Delta\omega. \quad (3.11)$$

Dengan demikian didapatkan

$$Q = \frac{\omega}{r/m} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (3.12)$$

#### Contoh soal:

Turunkan ungkapan (3.11).

#### Penyelesaian

Jika  $P_{rerata}(\omega_{1,2}) = \frac{1}{2}P_{rerata}(\omega_0)$  dan  $P_{rerata} \propto \frac{1}{2Z_m^2}$  (Persamaan (3.10)), maka nilai  $\omega_{1,2}$  memenuhi

$$\begin{aligned} Z_m^2(\omega_{1,2}) &= 2Z_m^2(\omega_0) \\ r^2 + (\omega_{1,2}m - s/\omega_{1,2})^2 &= 2r^2. \\ (\omega_{1,2}m - s/\omega_{1,2})^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Dengan mengambil  $\omega_0 = \sqrt{s/m}$ , dan fakta bahwa  $\omega_2 > \omega_0 > \omega_1$ , maka didapatkan  $\omega_2 - \omega_0^2/\omega_2 = \frac{r}{m}$  dan  $\omega_1 - \omega_0^2/\omega_1 = -\frac{r}{m}$ . Pengurangan persamaan pertama dengan persamaan kedua menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{2r}{m} &= \omega_2 - \omega_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2} + \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \\ &= (\omega_2 - \omega_1) + \omega_0^2 \left( -\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_1} \right) \\ &= (\omega_2 - \omega_1) + \omega_0^2 \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2\omega_1} \right) \\ &= \Delta\omega \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_2\omega_1} \right) \end{aligned}$$

Karena  $\omega_2 = \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega$  dan  $\omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega$ , maka  $\omega_2\omega_1 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Delta\omega^2 \approx \omega_0^2$ . Dengan demikian, maka  $\frac{2r}{m} \approx 2\Delta\omega$  atau  $\frac{r}{m} = \Delta\omega$ .

$Q$  juga dapat dipandang sebagai faktor penguatan amplitudo. Pada frekuensi resonansi untuk simpangan  $\omega_{r,x} = \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}$ , amplitudo simpangan dapat dinyatakan sebagai

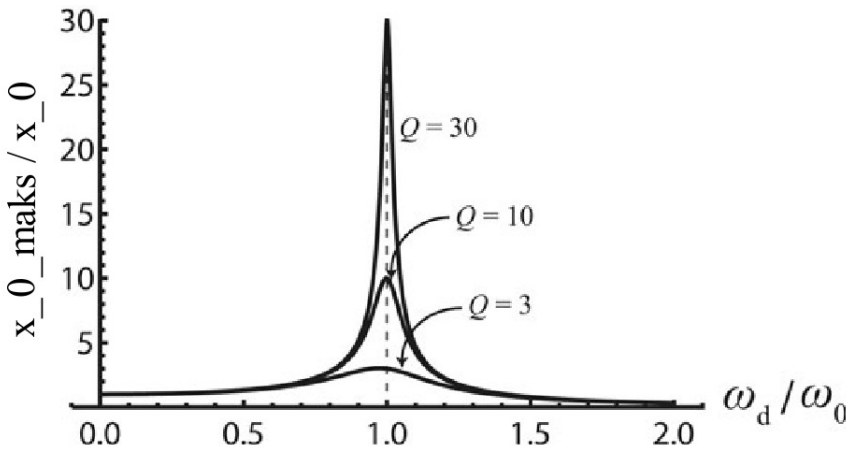
$$x_{0,maks} = \frac{F_0}{\omega_{r,x}r} = \frac{x_0 s}{\omega_{r,x}r}.$$

Dapat dihitung bahwa

$$\left( \frac{x_{0,maks}}{x_0} \right)^2 = \frac{s^2}{\omega_{r,x}^2 r^2} = \frac{m^2 \omega_0^4}{r^2 \left( \frac{s}{m} - \frac{r^2}{2m^2} \right)} = \frac{\left( \frac{m^2 \omega_0^2}{r^2} \right) \omega_0^2}{\left( \omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2} \right)} = \frac{Q^2}{\left( 1 - \frac{1}{4Q^2} \right)}.$$

Dengan demikian

$$\frac{x_{0,maks}}{x_0} = Q \left( 1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{-1/2} \approx Q \left( 1 + \frac{1}{8Q^2} \right) \approx Q. \quad (3.13)$$



Gambar 3.9: Penguatan amplitudo simpangan pada berbagai nilai  $Q$

## Bab 4

# Getaran Harmonis Terkopel

### 4.1 Persamaan GHK dan solusinya

Sejauh ini kita selalu membatasi diri pada kasus osilator harmonis (OH) tunggal. Sekarang kita akan memperluas tinjauan kita untuk sistem yang terdiri atas lebih dari 1 OH tunggal.<sup>1</sup> Untuk itu, kita tinjau dua buah bandul matematis (sebagai salah satu contoh OH tunggal) yang dihubungkan dengan sebuah kopel berbentuk pegas, membentuk sistem bandul matematis terkopel. Bandul matematis terkopel adalah salah satu contoh osilator harmonik terkopel (OHK). Osilator harmonis terkopel menghasilkan “getaran harmonis terkopel atau GHK”. Dikatakan demikian, karena sekarang kedua bandul tidak bergetar secara bebas, tetapi saling terkait satu sama lain.

Sekarang kita mencari persamaan GHK pada bandul matematis terkopel, seperti diperlihatkan pada Gambar 4.1. Dengan asumsi masing-masing bandul merupakan osilator harmonis sederhana, maka gaya yang bekerja hanya gaya pemulih dan gaya kopel. Dengan demikian, gerakan massa kedua (kanan) diberikan oleh

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l} + s(y - x). \quad (4.1)$$

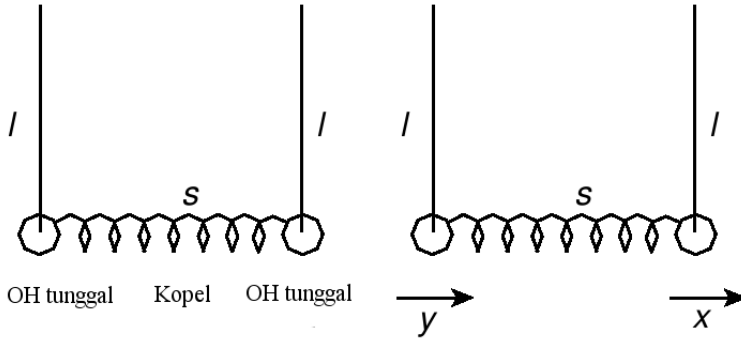
Dengan cara yang sama, gerakan massa pertama (kiri) diberikan oleh

$$m\ddot{y} = -mg\frac{y}{l} + s(x - y). \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>Dalam hal ini, OH dengan susunan pegas (seperti yang kita bahas pada bab 1) termasuk OH tunggal, karena hanya terdiri atas 1 buah massa.

Perhatikan bahwa: jika kita menghilangkan gaya kopel, maka suku  $s(y - x)$  (pada Persamaan (4.3)) dan suku  $s(x - y)$  (pada Persamaan (4.4)) akan hilang, dan permasalahannya tereduksi menjadi dua bandul matematis yang tidak saling terkait.



Gambar 4.1: Bandul matematis terkopel ditinjau dari sisi komponen pembentuknya (kiri) dan gerakannya (kanan)

Untuk memecahkan persamaan GHK, kita definisikan frekuensi bandul matematis tunggal sebagai frekuensi natural,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , sehingga kedua persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{s}{m}(x - y) \quad (4.3)$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{s}{m}(x - y). \quad (4.4)$$

Persamaan (4.3) dan (4.4) saling terkait dan harus diselesaikan secara serentak. Solusinya dapat dicari dengan salah satu cara berikut, yaitu;

- transformasi koordinat
- solusi dugaan
- metode matriks

### Metode transformasi koordinat

Untuk menyelesaikan Persamaan (4.3-4.4), didefinisikan koordinat baru, yaitu koordinat pusat massa<sup>2</sup>  $X \equiv x + y$  dan koordinat relatif

---

<sup>2</sup>Pusat massa didefinisikan sebagai  $X_{pm} = \frac{1}{2}(x + y)$

$Y \equiv x - y$ . Selanjutnya penjumlahan kedua persamaan ((4.3) + (4.4)) menghasilkan

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0, \quad (4.5)$$

yang terkait dengan gerakan pusat massa

$$X = X_0 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (4.6)$$

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4.7)$$

Selanjutnya pengurangan kedua persamaan ((4.3) - (4.4)) menghasilkan

$$\ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + 2\frac{s}{m}\right) Y = 0, \quad (4.8)$$

yang terkait dengan gerakan relatif massa

$$Y = Y_0 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (4.9)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{s}{m}}. \quad (4.10)$$

### Metode solusi dugaan

Misalkan dipilih  $x = Ae^{i\omega_1 t}$  dan  $y = Be^{i\omega_2 t}$ , maka Persamaan (4.3 dan 4.4) dapat ditulis sebagai

$$\left[-\omega_1^2 A + \frac{g}{l} A + \frac{s}{m} (A - B)\right] e^{i\omega t} = 0 \quad (4.11)$$

$$\left[-\omega_2^2 B + \frac{g}{l} B - \frac{s}{m} (A - B)\right] e^{i\omega t} = 0. \quad (4.12)$$

Penjumlahan kedua persamaan di atas menghasilkan  $(-\omega_1^2 + \frac{g}{l})(A + B) = 0$ , yang berarti gerak dalam koordinat  $A + B$  memiliki frekuensi  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Pengurangan keduanya menghasilkan  $(-\omega_2^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{s}{m})(A - B) = 0$ , yang berarti gerak dalam koordinat  $A - B$  memiliki frekuensi  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{s}{m}}$ . Hasil ini sesuai dengan hasil pada Persamaan (4.6-4.10).

### Metode matriks (1)

Dengan mendefinisikan  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  dan  $\omega_s = \sqrt{\frac{s}{m}}$ , Persamaan (4.11 & 4.12) dapat ditulis sebagai

$$(\omega_0^2 + \omega_s^2 - \omega^2) A - \omega_s^2 B = 0$$

$$-\omega_s^2 A + (\omega_0^2 + \omega_s^2 - \omega^2) B = 0.$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} (\omega_0^2 + \omega_s^2 - \omega^2) & -\omega_s^2 \\ -\omega_s^2 & (\omega_0^2 + \omega_s^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0.$$

Persamaan matriks hanya benar bila determinan matriks pertama sama dengan nol, atau

$$(\omega_0^2 + \omega_s^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^4 = 0,$$

atau

$$(\omega_0^2 + \omega_s^2 - \omega^2) = \pm \omega_s^2.$$

Dengan demikian, didapatkan nilai  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  dan  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{s}{m}}$ . Hasil ini sesuai dengan hasil pada Persamaan (4.6-4.10).

### **Metode matriks (2)**

Metode matriks juga bisa diterapkan dengan cara lebih formal dengan menulis ulang persamaan gerak (Persamaan (4.1-4.2))

$$m\ddot{x} + \left(m\frac{g}{l} + s\right)x - sy = 0.$$

$$m\ddot{y} - sx + \left(m\frac{g}{l} + s\right)y = 0.$$

Kedua persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (m\frac{g}{l} + s) & -s \\ -s & (m\frac{g}{l} + s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan mendefinisikan  $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \equiv M$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \mathcal{X}$ , dan  $\begin{pmatrix} (m\frac{g}{l} + s) & -s \\ -s & (m\frac{g}{l} + s) \end{pmatrix} \equiv S$ , maka didapatkan persamaan umum getaran terkopel

$$S\mathcal{X} + M\ddot{\mathcal{X}} = 0. \quad (4.13)$$

Karena  $\ddot{\mathcal{X}} = -\omega^2 \mathcal{X}$ , maka didapatkan  $(-M\omega^2 + S)\mathcal{X} = 0$ , Dengan demikian, nilai frekuensi dapat dicari dari nilai determinan

$$|S - M\omega^2| = 0. \quad (4.14)$$

Untuk kasus kita, didapatkan

$$\begin{aligned} S - M\omega^2 &= \begin{pmatrix} (m\frac{g}{l} + s) & -s \\ -s & (m\frac{g}{l} + s) \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (m\frac{g}{l} + s - m\omega^2) & -s \\ -s & (\frac{g}{l} + \frac{s}{m} - m\omega^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Karena  $|S - M\omega^2| = 0$  maka

$$\begin{vmatrix} (m\frac{g}{l} + s - m\omega^2) & -s \\ -s & (\frac{g}{l} + \frac{s}{m} - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(m\frac{g}{l} + s - m\omega^2\right)^2 - s^2 = 0$$

$$\left(m\frac{g}{l} + s - m\omega^2\right) = \pm s$$

$$\omega_{1,2}^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{s}{m}\right) \mp \left(\frac{s}{m}\right)$$

Dengan demikian, didapatkan  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  dan  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{s}{m}}$ .

Dari contoh kita, yaitu 2 bandul matematis identik ( $\omega_{OH}^2 = \frac{g}{l}$ ) yang dihubungkan dengan kopel berbentuk pegas ( $\omega_{pegas}^2 = \frac{s}{m}$ ), didapatkan frekuensi getaran

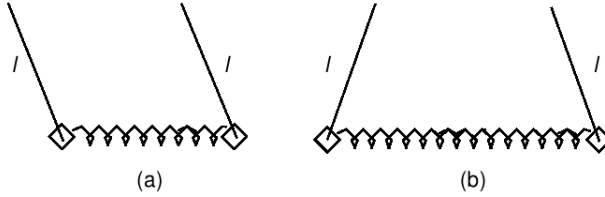
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{pusat\ massa} = \omega_{OH} \\ \omega_2 &= \omega_{relatif} = \sqrt{\omega_{OH}^2 + 2\omega_{kopel}^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

## 4.2 Pengertian fisis GHK

Terkait dengan gerakan kedua osilator pada GHK, ada 2 kasus khusus yang perlu ditinjau, yaitu

- Kasus sefase atau  $x = y$  (Gambar 4.2(a)). Pada kasus ini jarak relatif kedua massa tetap ( $Y = 0$ ) dan hanya ada satu jenis frekuensi, yaitu  $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Pada kasus ini, kedua massa bergerak sefase / searah dan pegas tidak berfungsi sebagai kopel sehingga panjang pegas (yang juga berarti jarak antara 2 massa) selalu sama.

- Kasus berlawanan fase atau  $x = -y$  (Gambar 4.2(b)). Pada kasus ini pusat massa tidak bergerak ( $X = 0$ ) dan hanya ada satu jenis frekuensi, yaitu  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{s}{m}}$ . Pada kasus ini, kedua massa bergerak tidak sefase / berlawanan arah. Pegas berfungsi sebagai kopel sehingga panjang pegas (yang juga berarti jarak antara 2 massa) selalu berubah, memanjang atau memendek.



Gambar 4.2: Gerak sefase (panel a) dan berlawanan fase (panel b) pada GHK

Terkait dengan GHK, ada beberapa istilah yang sering dipakai, yaitu

- Koordinat  $X$  dan  $Y$ , yaitu koordinat yang menggambarkan gerakan sistem, disebut koordinat normal.  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  disebut frekuensi normal atau modulus normal.
- Masing-masing GHS disebut modulus atau mode (getar). Sistem kita memiliki 2 modulus. Energi untuk tiap modulus dapat dinyatakan sebagai

$$E_X = a\dot{X}^2 + bX^2$$

$$E_Y = a\dot{Y}^2 + bY^2,$$

Sedang energi totalnya dapat dinyatakan sebagai

$$E_T = E_x + E_Y = a\dot{X}^2 + bX^2 + a\dot{Y}^2 + bY^2 \quad (4.16)$$

Ini berarti sistem kita memiliki  $2 \times 2$  komponen energi atau 4 derajat kebebasan. Derajat kebebasan adalah bilangan/jumlah cara menyatakan energinya.

### Solusi dalam $x$ dan $y$

Dari pembahasan sebelumnya, kita dapatkan solusi dalam  $X$  dan  $Y$ . Misalkan dipilih solusi dalam bentuk

$$X = X_0 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$



$$Y = Y_0 \cos(\omega_2 t + \phi_2).$$

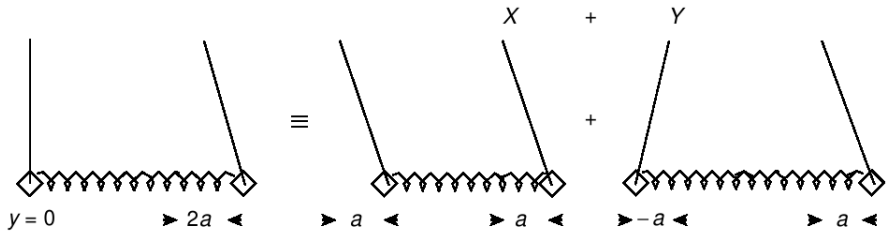
Selanjutnya dengan (i) mengingat  $X = x + y$  dan  $Y = x - y$ , dan (ii) memilih  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  dan  $X_0 = Y_0 = 2a$ , maka didapatkan

$$x = a [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \quad (4.17)$$

$$y = a [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]. \quad (4.18)$$

Misalkan sistem mula-mula berada pada kondisi  $x(0) = y(0) = 0$  dan  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ . Selanjutnya massa kanan ditarik sepanjang  $2a$ , kemudian dilepas. Getaran sistem dapat dipandang dengan 2 cara, yaitu

- cara pandang 1 (koordinat  $xy$ ): benda kiri diam ( $y = 0$ ) sedang benda kanan bergetar dengan amplitudo  $2a$  ( $x \neq 0$ ).
- cara pandang 2 (koordinat  $XY$ ): pusat massa bergetar dengan amplitudo  $a$  ( $X \neq 0$ ), sedang koordinat relatif bergetar dengan amplitudo  $2a$  ( $Y \neq 0$ ).

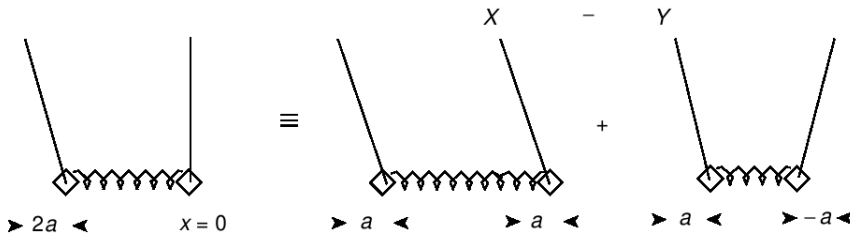


Gambar 4.3: Gerak pusat massa  $x = \frac{1}{2}(X + Y)$

Misalkan sistem mula-mula berada pada kondisi  $x = y = 0$  dan  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ . Selanjutnya massa kiri ditekan sepanjang  $2a$ , kemudian dilepas. Getaran sistem dapat dipandang dengan 2 cara, yaitu

- cara pandang 1 (koordinat  $xy$ ): benda kanan diam ( $x = 0$ ) sedang benda kiri bergetar dengan amplitudo  $2a$  ( $y \neq 0$ ).
- cara pandang 2 (koordinat  $XY$ ): pusat massa bergetar dengan amplitudo  $a$  ( $X \neq 0$ ), sedang koordinat relatif bergetar dengan amplitudo  $2a$  ( $Y \neq 0$ ).

#### Perilaku individual osilator



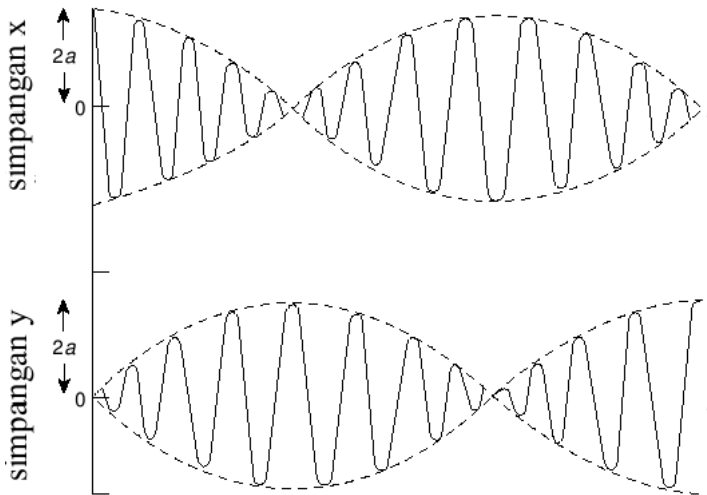
Gambar 4.4: Gerak relatif antar osilator  $y = \frac{1}{2} (X - Y)$

Persamaan gerak dalam variabel  $xy$  juga dapat ditulis sebagai

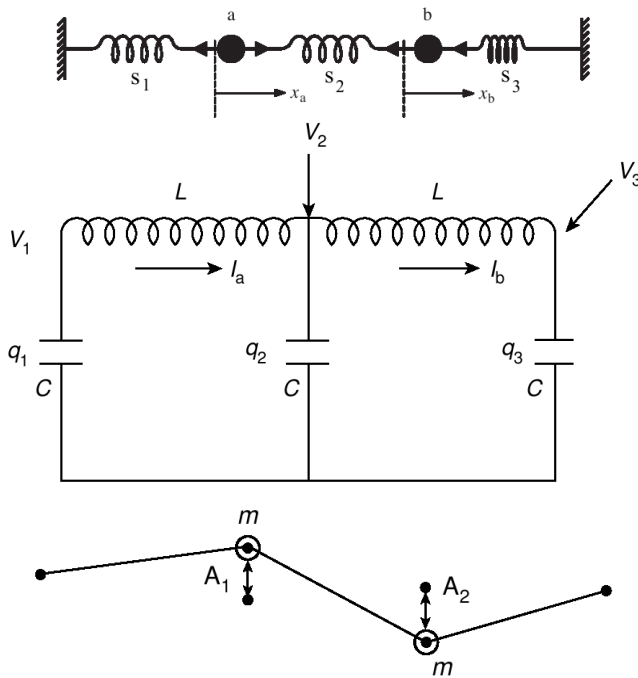
$$\begin{aligned} x &= a [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ &= 2a \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} y &= a [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \\ &= 2a \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Hasil yang didapatkan dari Persamaan (4.19-4.20) disajikan pada Gambar 4.5. Hasil tersebut menunjukkan bahwa  $x$  dan  $y$  mencapai maksimum secara bergantian.



Gambar 4.5: Nilai  $x$  dan  $y$



Gambar 4.6: Contoh GHK yang tersusun atas “2 GHS + kopel”

## 4.3 Berbagai model GHK

### 4.3.1 OHS sejenis dengan kopel

Pada sub bab 4.1, kita telah membahas 2 buah bandul matematis yang dihubungkan dengan sebuah kopel berbentuk pegas, yang secara umum masuk dalam kategori sistem “2 OHS sejenis + kopel”. Sistem GHK ini memiliki 2 derajat kebebasan dan karenanya memiliki 2 macam frekuensi. Contoh sistem sejenis antara lain adalah:

- dua sistem “massa+pegas” yang dihubungkan dengan kopel berbentuk pegas (Gambar 4.6 (atas))
- dua rangkaian LC yang dihubungkan dengan kopel berbentuk kapasitor (Gambar 4.6 (tengah))
- dua sistem massa + dawai yang dihubungkan dengan kopel berbentuk dawai (Gambar 4.6 (bawah))

**Contoh soal:**

Carilah frekuensi GHK pada Gambar 4.6 (atas), jika konstanta kekakuan pegasnya adalah  $s_1 = s_2 = s_3 = s$ .

**Penyelesaian**

Persamaan geraknya adalah

$$m\ddot{x}_a = -sx_a - s(x_a - x_b) = -2sx_a + sx_b$$

$$m\ddot{x}_b = -sx_b - s(x_b - x_a) = sx_a - 2sx_b.$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{x}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s & -s \\ -s & 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan memanfaatkan hasil  $\ddot{x}_a = -\omega^2 x_a$  dan  $\ddot{x}_b = -\omega^2 x_b$ , didapatkan

$$\begin{pmatrix} 2s - m\omega^2 & -s \\ -s & 2s - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = 0.$$

Karena  $\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} \neq 0$  maka  $\begin{pmatrix} 2s - m\omega^2 & -s \\ -s & 2s - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$ . Dengan kata lain, maka

$$\begin{vmatrix} 2s - m\omega^2 & -s \\ -s & 2s - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Hasil terakhir juga dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (4.14). Solusi persamaan di atas adalah  $[2s - m\omega^2]^2 = s^2$  atau  $2s - m\omega^2 = \pm s$ , yang memberikan dua jenis frekuensi yaitu  $\omega_1 = \sqrt{\frac{s}{m}}$  dan  $\omega_1 = \sqrt{3\frac{s}{m}}$ .

Masalah ini juga dapat dipecahkan dengan mengingat bahwa sistem kita adalah 2 pegas ( $\omega_{OH} = \sqrt{\frac{s}{m}}$ ) yang dihubungkan dengan kopel berbentuk pegas ( $\omega_{kopel} = \sqrt{\frac{s}{m}}$ ). Mengacu pada Persamaan (4.15), frekuensi getarnya adalah

$$\omega_1 = \omega_{OH} = \sqrt{\frac{s}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{OH}^2 + 2\omega_{kopel}^2} = \sqrt{\frac{s}{m} + 2\frac{s}{m}} = \sqrt{3\frac{s}{m}}$$

**Soal:**

Carilah frekuensi GHK pada Gambar 4.6 (atas), jika  $s_1 = s_2 = s$  dan  $s_3 = 2s$ .

**Contoh soal:**

Dengan menggunakan hukum II Kirchoff, tunjukkan bahwa frekuensi GHK pada Gambar 4.6 (tengah) adalah  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  dan  $\omega_2 = \sqrt{3\frac{1}{LC}}$ . Tunjukkan bahwa hasil yang sama dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (4.15).

**Penyelesaian**

Dengan bermodalkan persamaan tegangan

$$V_1 - V_2 = L\dot{I}_a, \quad V_2 - V_3 = L\dot{I}_b,$$

dan persamaan arus

$$\dot{q}_1 = -I_a, \quad \dot{q}_2 = I_a - I_b, \quad \dot{q}_3 = I_b,$$

maka didapatkan

$$L\dot{I}_a = V_1 - V_2 = \frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{C}.$$

Diferensiasi terhadap  $t$  dan perkalian dengan  $C$ , menghasilkan

$$LC\ddot{I}_a = \dot{q}_2 - \ddot{q}_1 = -I_a - (I_a - I_b) = -2I_a + I_b.$$

Dengan cara yang sama, didapatkan

$$LC\ddot{I}_b = \dot{q}_3 - \ddot{q}_2 = -I_a - I_b - I_b = I_a - 2I_b.$$

Dengan menggunakan  $\ddot{I}_a = -\omega^2 I_a$  dan  $\ddot{I}_b = -\omega^2 I_b$ , didapatkan

$$\begin{pmatrix} 2 - LC\omega^2 & -1 \\ -1 & 2 - LC\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \end{pmatrix} = 0.$$

Persamaan terakhir menghasilkan

$$(2 - LC\omega^2)^2 - 1 = 0,$$

atau  $2 - LC\omega^2 = \pm 1$ . Persamaan terakhir menghasilkan  $\omega_1^2 = \frac{1}{LC}$  dan  $\omega_2^2 = \frac{3}{LC}$ .

**Soal:**

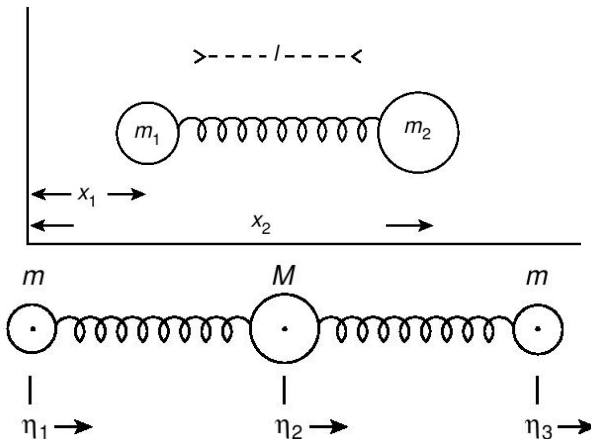
Dengan menggunakan hukum II Kirchoff, turunkan ungkapan untuk frekuensi GHK pada Gambar 4.6 (tengah) jika  $C_{kiri} = C_{kanan} = C$  dan  $C_{tengah} = C_0$ .

**Soal:**

Dengan menggunakan Persamaan (4.15), carilah frekuensi sistem pada Gambar 4.6 (bawah), ketika kedua massa bergerak (a) sefase dan (b) berlawanan fase.

Contoh lain GHK yang terdiri atas “OHS sejenis + kopel” adalah GHK yang terdiri atas “ $n$  GHS + kopel”, seperti

- molekul diatomik yang dapat dibayangkan terdiri atas 1 “massa + pegas” ditambah 1 massa (Gambar 4.7 (atas))
- molekul triatomik yang dapat dibayangkan terdiri atas 2 “massa + pegas” ditambah 1 massa (Gambar 4.7 (bawah)) .



Gambar 4.7: Sistem molekul diatomik (atas) dan sistem molekul triatomik (bawah).

**Contoh soal:**

Pada Gambar 4.7 (atas), Dua massa  $m_1$  dan  $m_2$  dihubungkan dengan pegas yang kekakuannya  $s$ , Jika pertambahan panjangnya adalah  $x$ , tunjukkan bahwa frekuensinya adalah

$$\omega = \sqrt{\frac{s}{\mu}},$$

di mana  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  adalah massa tereduksi. Gunakan persamaan tersebut untuk menunjukkan bahwa nilai  $s$  untuk NaCl adalah  $s = 120 \text{ Nm}^{-1}$ . ( $m_{\text{Na}} = 23 \text{ a.m.u}$ ,  $m_{\text{Cl}} = 35 \text{ a.m.u}$ ,  $1 \text{ a.m.u} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , dan  $\nu_{\text{NaCl}} = 1,14 \times 10^{13} \text{ Hz}$ ).

**Penyelesaian**

Anggap pertambahan panjang  $x$  bernilai positif. Gaya yang bekerja pada  $m_1$  berarah ke  $x$ -positif, sedangkan gaya pada  $m_2$  mengarah ke  $x$ -negatif. Dengan demikian persamaan geraknya adalah

$$m_1 \ddot{x}_1 = -s(x_1 - x_2),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -s(x_2 - x_1).$$

Kita kurangi persamaan kedua dengan persamaan pertama, sehingga didapatkan

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -s \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_2 - x_1).$$

Jika kita definisikan koordinat baru  $x_2 - x_1 \equiv X$ , maka didapatkan

$$\ddot{X} = -s \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) X = -\frac{s}{\mu} X.$$

Persamaan terakhir memberikan getaran dengan frekuensi

$$\omega = \sqrt{\frac{s}{\mu}},$$

di mana  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  adalah massa tereduksi. Hasil ini juga menunjukkan bahwa molekul diatomik dapat dianggap sebagai sistem “massa (tereduksi) + pegas”.

Untuk molekul NaCl,

$$\mu = \frac{23 \times 35}{23 + 35} \times \text{u} = 2,3 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

dan  $\omega = 2\pi \times 1,14 \times 10^{13}$ . Menggabungkan kedua hasil tersebut, didapatkan kekakuan molekul NaCl  $s = 118 \text{ Nm}^{-1}$ .

**Contoh soal: (Pain, Problem 4.19)**

Gambar 4.7 (bawah) menunjukkan molekul triatomik dengan molekul berat  $M$  terikat pada dua atom dengan massa  $m$  pada kedua sisinya, di mana  $m < M$ . Ikatan antar molekul diperikan dengan pegas dengan kekakuan  $s$  dan pada keadaan setimbang pusat atom berada sepanjang garis lurus. Gerak harmonis sederhana dianggap terjadi sepanjang sumbu linier dan diberikan oleh

$$\eta_J = \eta_J e^{i\omega t},$$

di mana  $\eta_J$  adalah pergeseran atom ke- $J$  dari posisi kesetimbangannya.

Dengan menata persamaan yang ada dan memecahkannya dengan menggunakan metode matriks, tunjukkan bahwa mode normal memiliki frekuensi

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{s}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{s(M + 2m)}{mM}.$$

Deskripsikan gerakan atom dalam setiap mode.

### Penyelesaian

Persamaan gerak sistem adalah

$$m\ddot{\eta}_1 = -s(\eta_1 - \eta_2),$$

$$M\ddot{\eta}_2 = -s(\eta_2 - \eta_1) - s(\eta_2 - \eta_3),$$

$$m\ddot{\eta}_3 = -s(\eta_3 - \eta_2).$$

Dengan mengasumsikan  $\eta_i = a_i e^{i\omega t}$ , didapatkan

$$\begin{pmatrix} s - m\omega^2 & -s & 0 \\ -s & 2s - M\omega^2 & -s \\ 0 & -s & s - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

atau

$$\begin{vmatrix} s - m\omega^2 & -s & 0 \\ -s & 2s - M\omega^2 & -s \\ 0 & -s & s - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$



Persamaan determinan menghasilkan

$$(s - m\omega^2) [(2s - M\omega^2)(s - m\omega^2) - 2s^2] = 0.$$

Dengan menset suku pertama pada persamaan di atas sama dengan nol didapatkan  $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{s}{m}$ . Selanjutnya dengan menset suku kedua sama dengan nol  $(2s - M\omega^2)(s - m\omega^2) - 2s^2 = 0$  dan dengan sedikit penataan atas suku-sukunya didapatkan

$$\omega^2 \left( \omega^2 - \frac{s(M+2m)}{mM} \right) = 0,$$

yang memberikan nilai frekuensi

$$\omega_1^2 = 0 \quad \omega_3^2 = \frac{s(M+2m)}{mM}.$$

Sekarang kita masukkan nilai  $\omega$  ke dalam persamaan matriks (Persamaan (4.21)). Untuk  $\omega = \omega_1 = 0$ , persamaan matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan di atas menghasilkan

$$a_1 = a_2 = a_3 = a \Rightarrow \vec{\eta} = (1, 1, 1).$$

Karena  $\omega = \omega_1 = 0$  berarti tidak ada vibrasi, yang ada hanya translasi.

Untuk  $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{s}{m}$ , persamaan matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix} 0 & -s & 0 \\ -s & 2s - M\frac{s}{m} & -s \\ 0 & -s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan di atas menghasilkan

$$a_2 = 0 \quad a_1 = a = a_3 \Rightarrow \vec{\eta} = a(1, 0, -1),$$

yang berarti atom tengah diam, sedang dua atom yang lain bervibrasi secara asimetris.

Untuk  $\omega = \omega_3 = \frac{s(M+2m)}{mM}$ , persamaan matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix} 2m/M & 1 & 0 \\ 1 & M/m & 1 \\ 0 & 1 & 2m/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan di atas menghasilkan

$$a_2 = -(2m/M) a_1 \quad a_3 = a_1 \Rightarrow \vec{\eta} = a(1, -2m/M, 1).$$

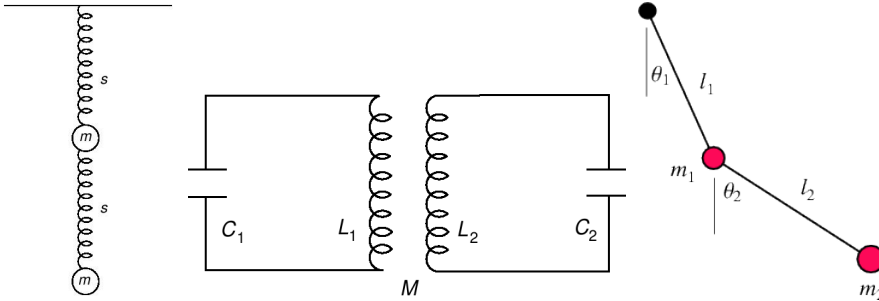
Dalam mode ini, dua atom ujung bervibrasi secara simetris, sedang atom tengah bervibrasi dengan fase yang berlawanan.

### 4.3.2 OHS sejenis tanpa kopel

Sistem GHK yang terdiri dari OHS sejenis yang paling sederhana adalah sistem “2 OHS”. Contoh untuk kasus ini adalah

- sistem 2 “massa+pegas” (Gambar 4.8 (kiri))
- sistem 2 rangkaian LC (Gambar 4.8 (tengah))
- sistem 2 bandul matematis (Gambar 4.8 (kanan)).

Pada kasus tersebut, tidak terdapat kopel riil antara kedua OHS. Sekalipun demikian, karena keduanya terhubung, akan terbentuk kopling, misalnya dalam bentuk induktansi mutual (untuk kasus rangkain LC) atau keterkaitan simpangan (kasus pegas) dan keterkaitan sudut (kasus bandul matematis).



Gambar 4.8: Sistem GHK yang terdiri atas 2 OHS

#### Contoh soal (Pain, Problem 4.5):

Dua buah massa yang sama (seperti ditunjukkan pada gambar 4.8 (kiri)) berosilasi dalam arah vertikal. Tunjukkan bahwa frekuensi dari mode normal dari osilasi adalah

$$\omega^2 = \left(3 \pm \sqrt{5}\right) \frac{s}{2m}.$$

#### Penyelesaian

Satu-satunya pengaruh gravitasi pada sistem adalah menggeser posisi kesetimbangan massa, sehingga dapat diabaikan dalam perhitungan. Misalkan pergeseran massa atas dan bawah berturut-turut adalah  $x_1$  dan  $x_2$ . Analog dengan problem sebelumnya, persamaan geraknya adalah

$$m\ddot{x}_1 = -sx_1 - s(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -s(x_2 - x_1).$$

Kedua persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2s & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

dan menghasilkan

$$\begin{vmatrix} -(2s + m\omega^2) & -s \\ -s & -(s + m\omega^2) \end{vmatrix} = 0,$$

yang memberikan nilai frekuensi

$$m^2\omega^4 + 3sm\omega^2 + s^2 = 0$$

$$\omega^4 + 3\frac{s}{m}\omega^2 + \left(\frac{s}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \left(3 \pm \sqrt{5}\right) \frac{s}{2m}.$$

#### Contoh soal:

Hitunglah frekuensi dari GHK yang dibentuk oleh dua buah rangkaian LC (seperti ditunjukkan pada Gambar 4.8 (tengah)).

#### Penyelesaian

Misalnya induktor pertama memiliki lilitan sejumlah  $n_1$  sehingga induktansi dirinya adalah  $L_1 = n_1^2\phi$ , dengan  $\phi$  adalah fluks medan magnet pada kumparan. Induktor kedua jumlah lilitannya  $n_2$  dan induktansi dirinya  $L_2 = n_2^2\phi$ . Jika kedua induktor tersebut membentuk kopling induktor, maka faktor kopelnya adalah induktasi mutual, yang didefinisikan sebagai

$$M = kn_1n_2\phi = k\sqrt{\frac{L_1}{\phi}}\sqrt{\frac{L_2}{\phi}}\phi = k\sqrt{L_1L_2},$$

di mana  $k$  adalah koefisien kopling. Jika  $k \gg 1$  disebut kopling kuat,  $k \ll 1$  disebut kopling lemah, dan  $k \approx 1$  disebut kopling sedang.

Persamaan tegangan untuk kedua induktor adalah

$$i\omega L_1 I_1 - i \frac{1}{\omega C_1} I_1 + i\omega M I_2 = 0,$$

$$i\omega L_2 I_2 - i \frac{1}{\omega C_2} I_2 + i\omega M I_1 = 0.$$

Dengan mengalikan persamaan pertama dengan  $-i\omega/L_1$  dan persamaan pertama dengan  $-i\omega/L_2$  didapatkan

$$\omega^2 I_1 - \omega_1^2 I_1 + \frac{M}{L_1} \omega^2 I_2 = 0 \quad \text{atau} \quad (\omega_1^2 - \omega^2) I_1 = \frac{M}{L_1} \omega^2 I_2 = 0$$

$$\omega^2 I_2 - \omega_2^2 I_2 + \frac{M}{L_2} \omega^2 I_1 = 0 \quad \text{atau} \quad (\omega_2^2 - \omega^2) I_2 = \frac{M}{L_2} \omega^2 I_1 = 0,$$

di mana  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}}$  dan  $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2}}$  adalah frekuensi dasar masing-masing induktor.

Hasil kali kedua persamaan terakhir adalah

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = \frac{M}{L_1 L_2} \omega^4 = k^2 \omega^4,$$

di mana  $k = \sqrt{\frac{M}{L_1 L_2}}$ . Untuk kasus  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ , didapatkan

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = \pm k \omega^2,$$

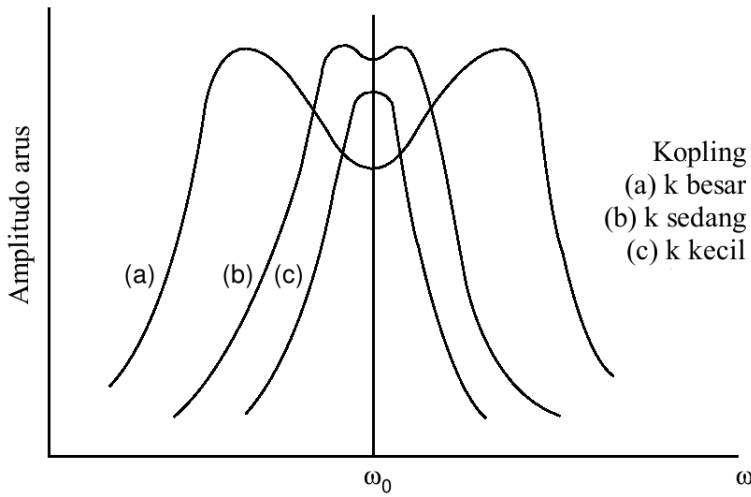
yang memberikan nilai

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}.$$

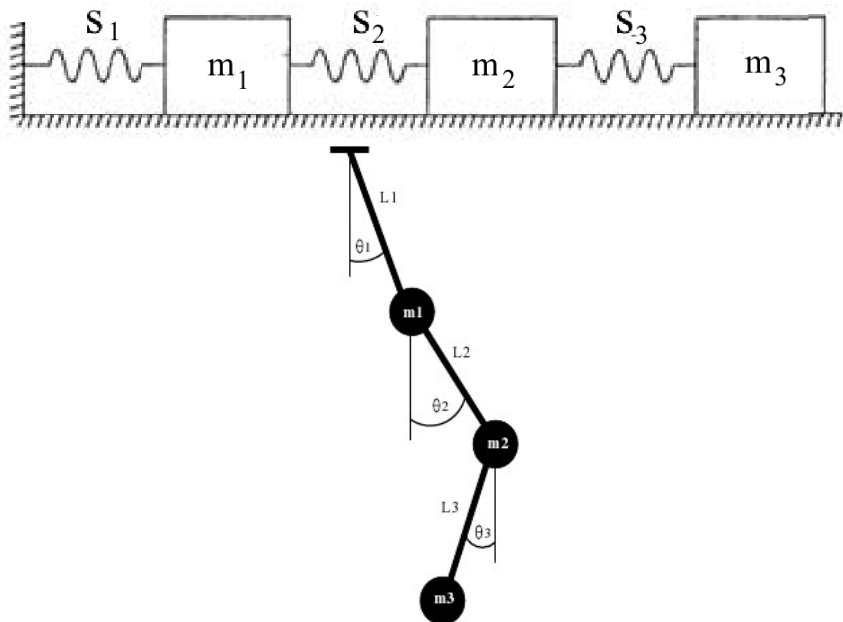
Solusi positif memberikan nilai

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k}} \quad \text{dan} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k}}.$$

Di mana  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$  jika  $k = 0$ . Plot nilai amplitudo arus sebagai fungsi frekuensi disajikan pada Gambar 4.9.

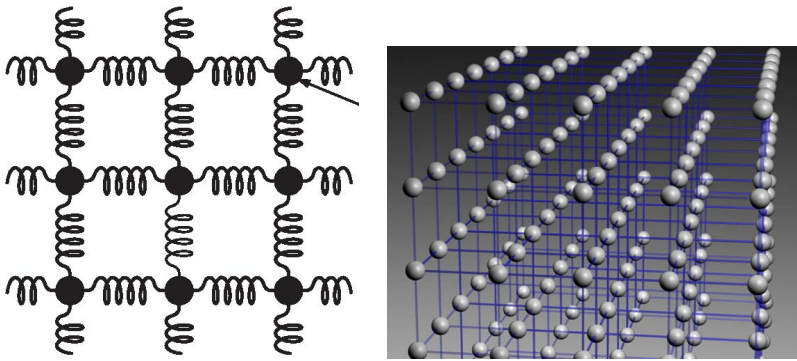


Gambar 4.9: Plot nilai amplitudo arus sebagai fungsi frekuensi pada kopling induktor



Gambar 4.10: Sistem 3 OHS

Contoh sistem GHK yang terdiri atas OHS sejenis, yang lebih kompleks antara lain adalah



Gambar 4.11: Kisi 2 dimensi (kiri) dan kisi 3 dimensi (kanan).

- GHK yang tersusun atas 3 GHS, seperti 3 bandul matematis (Gambar 4.10 (atas)) atau 3 sistem massa pegas (Gambar 4.10 (bawah)).
- Sistem “ $n$  GHS”, seperti
  - kisi 1 dimensi yang padat dibayangkan sebagai  $n$  ’sistem massa + pegas”
  - kisi 2 dimensi yang padat dibayangkan sebagai  $n$  ’sistem massa + pegas” 2 dimensi (Gambar 4.11 (kiri))
  - kisi 3 dimensi yang padat dibayangkan sebagai  $n$  ’sistem massa + pegas” 3 dimensi (Gambar 4.11 (kanan)).

**Soal:**

Carilah frekuensi dari sistem 3 “massa + pegas”, pada Gambar 4.10 (atas)

**Soal:**

Carilah frekuensi dari sistem 3 bandul matematis, pada Gambar 4.10 (bawah).

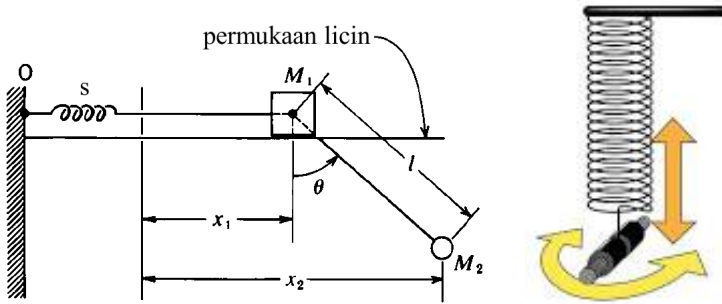
### 4.3.3 OHS tak sejenis

Contoh GHK yang terdiri atas OHS tak sejenis, antara lain adalah

- sistem GHK yang terdiri atas 2 buah OHS yang berbeda tanpa kopel, seperti “sistem massa pegas + bandul matematis” (Gam-

bar 4.12 (kiri)) dan ‘sistem massa pegas + torsional’ atau yang dikenal sebagai bandul wilberforce (Gambar 4.12 (kanan))

- GHK yang terdiri atas 2 OHS yang berbeda dan kopel



Gambar 4.12: Sistem GHK yang tersusun atas 2 OHS tak sejenis.

**Contoh soal:**

Carilah frekuensi pada “sistem massa pegas + bandul matematis” (Gambar 4.12 (kiri)).

**Penyelesaian**

Persamaan geraknya adalah

$$M_1 \ddot{x}_1 = -sx_1 - M_2 g \frac{x_1 - x_2}{l}$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -M_2 g \frac{x_2 - x_1}{l}$$

Dengan demikian, didapatkan

$$\begin{pmatrix} -M_1 \omega^2 + s + M_2 \frac{g}{l} & -M_2 \frac{g}{l} \\ -M_2 \frac{g}{l} & -M_2 \omega^2 + M_2 \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan mengambil determinan matriks pertama sama dengan nol, didapatkan

$$\left( -M_1 \omega^2 + s + M_2 \frac{g}{l} \right) \left( -M_2 \omega^2 + M_2 \frac{g}{l} \right) - \left( M_2 \frac{g}{l} \right)^2 = 0$$

$$M_1 \omega^4 - \left( M_1 \frac{g}{l} + s + M_2 \frac{g}{l} \right) \omega^2 + s \frac{g}{l} = 0.$$

Nilai frekuensinya adalah

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2M_1} \left[ M_1 \frac{g}{l} + s + M_2 \frac{g}{l} \pm \sqrt{\left( M_1 \frac{g}{l} + s + M_2 \frac{g}{l} \right)^2 - 4M_1 s \frac{g}{l}} \right] \\ &= \frac{1}{2M_1} \left[ M_1 \frac{g}{l} + s + M_2 \frac{g}{l} \pm \sqrt{\left( M_1 \frac{g}{l} - s + M_2 \frac{g}{l} \right)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2M_1} \left[ M_1 \frac{g}{l} + s + M_2 \frac{g}{l} \pm \left( M_1 \frac{g}{l} - s + M_2 \frac{g}{l} \right) \right].\end{aligned}$$

Kita ambil tanda positif, sehingga didapatkan frekuensi yang pertama, yaitu

$$\omega_1^2 = \frac{M_1 + M_2}{M_1} \frac{g}{l}.$$

Kita ambil tanda negatif, sehingga didapatkan frekuensi yang kedua, yaitu

$$\omega_1^2 = \frac{s}{M_1}.$$

#### Contoh soal:

Jika persamaan gerak pada bandul wilberforce (Gambar 4.12 (kanan)) adalah

$$m\ddot{z} + sz + \frac{1}{2}\epsilon\theta = 0$$

$$I\ddot{\theta} + \delta\theta + \frac{1}{2}\epsilon z = 0,$$

carilah frekuensinya.

#### Penyelesaian

Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & \frac{1}{2}\epsilon \\ \frac{1}{2}\epsilon & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan demikian, maka  $M \equiv \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix}$ , dan  $S \equiv \begin{pmatrix} s & \frac{1}{2}\epsilon \\ \frac{1}{2}\epsilon & \delta \end{pmatrix}$ , sehingga persamaan frekuensinya adalah

$$|S - M\omega^2| = \begin{vmatrix} s - m\omega^2 & \frac{1}{2}\epsilon \\ \frac{1}{2}\epsilon & \delta - I\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$



Persamaan terakhir memberikan kita

$$(s - m\omega^2)(\delta - I\omega^2) - \frac{1}{4}\epsilon^2 = mI\omega^4 - (sI + m\delta)\omega^2 + \left(s\delta - \frac{1}{4}\epsilon^2\right) = 0.$$

Kita bagi persamaan di atas dengan  $mI$  dan kita definisikan  $\frac{s}{m} = \omega_z^2$  dan  $\frac{\delta}{I} = \omega_\theta^2$ . Dengan demikian didapatkan

$$\omega^4 - (\omega_z^2 + \omega_\theta^2)\omega^2 + \left(\omega_z^2\omega_\theta^2 - \frac{\epsilon^2}{4mI}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left[ (\omega_z^2 + \omega_\theta^2) \pm \sqrt{(\omega_z^2 + \omega_\theta^2)^2 - 4 \left( \omega_z^2\omega_\theta^2 - \frac{\epsilon^2}{4mI} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\omega_z^2 + \omega_\theta^2) \pm \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + 4 \frac{\epsilon^2}{4mI}} \right]\end{aligned}$$

#### 4.3.4 GHK kompleks

Yang dimaksudkan dengan GHK kompleks di sini adalah GHK yang terdiri atas gabungan OHS, OHR, dan OHP, baik sejenis atau bukan, dan dengan kopel atau tidak.

##### Contoh soal: (Pain, Problem 4.10)

Perhatikan Gambar 4.13. Gaya sebesar  $F_0 \cos \omega t$  bekerja pada bandul kanan. Jika terdapat redaman dengan konstanta  $r$ , tunjukkan bahwa persamaan geraknya adalah

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x - r\dot{x} - s(x - y) + F_0 \cos \omega t$$

$$m\ddot{y} = -\frac{mg}{l}y - r\dot{y} + s(x - y).$$

Perlihatkan juga bahwa persamaan gerak untuk mode normal  $X = x + y$  dan  $Y = x - y$  adalah getaran teredam dengan gaya  $F_0 \cos \omega t$ . Pecahkan persamaan untuk  $X$  dan  $Y$  dengan mengabaikan  $r$ . Perlihatkan bahwa

$$\frac{y}{x} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2}.$$

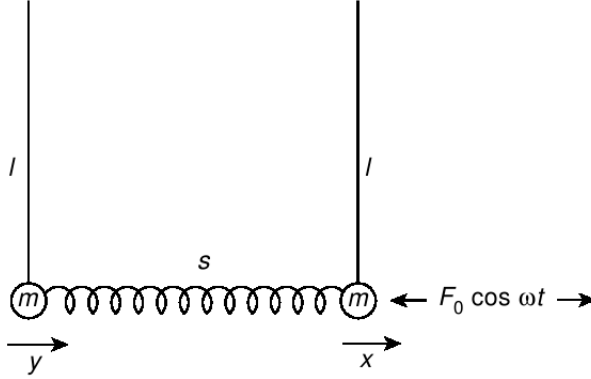
#### Penyelesaian

Persamaan gerak sistem adalah

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + m\omega_1^2 x + s(x - y) = F_0 \cos \omega t$$

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + m\omega_1^2 y - s(x - y) = 0,$$

dengan  $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$ . Penjumlahan kedua persamaan tersebut, dan dengan mendefinisikan  $X \equiv x + y$ , menghasilkan



Gambar 4.13: GHK dengan gaya redaman dan gaya pemaksa.

$$m\ddot{X} + r\dot{X} + m\omega_1^2 X = F_0 \cos \omega t.$$

Selanjutnya pengurangan persamaan pertama dengan persamaan kedua, dan dengan mendefinisikan  $Y \equiv x - y$ , menghasilkan

$$m\ddot{Y} + r\dot{Y} + m\omega_2^2 Y = F_0 \cos \omega t,$$

di mana  $\omega_2^2 = \omega_1^2 + \frac{2s}{m}$ . Persamaan terakhir adalah persamaan getaran terpaksa dan solusinya adalah

$$X = \frac{F_0/m}{\left[ (\omega_1^2 - \omega^2) + \left( \frac{\omega}{rm} \right)^2 \right]^{1/2}} \sin(\omega t - \phi_x) \quad (4.22)$$

$$\tan \phi_x = \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega r/m},$$

dan

$$Y = \frac{F_0/m}{\left[ (\omega_2^2 - \omega^2) + \left( \frac{\omega}{rm} \right)^2 \right]^{1/2}} \sin(\omega t - \phi_y) \quad (4.23)$$

$$\tan \phi_y = \frac{\omega^2 - \omega_y^2}{\omega r / m}.$$

Selanjutnya kita diminta untuk mengabaikan pengaruh  $r$  atau menganggap  $r \rightarrow 0$ , sehingga

$$\phi_{x,y} \rightarrow \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{jika } \omega^2 > \omega_{1,2}^2 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{jika } \omega^2 < \omega_{1,2}^2 \end{cases}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \left[ (\omega_{1,2}^2 - \omega^2) + \left( \frac{\omega}{rm} \right)^2 \right]^{1/2} &\rightarrow |\omega_{1,2}^2 - \omega^2| \\ &= \begin{cases} -(\omega_{1,2}^2 - \omega^2) & \text{jika } \omega^2 > \omega_{1,2}^2 \\ +(\omega_{1,2}^2 - \omega^2) & \text{jika } \omega^2 < \omega_{1,2}^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dengan demikian penjumlahan pada penyebut Persamaan (4.22-4.23) saling menghilangkan dan

$$X = \frac{F_0/m}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

dan

$$Y = \frac{F_0/m}{\omega_2^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Dengan demikian, mengingat bahwa  $x = \frac{1}{2}(X + Y)$  dan  $y = \frac{1}{2}(X - Y)$ , maka

$$x = \frac{F_0}{2m} \cos \omega t \left[ \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right]$$

dan

$$x = \frac{F_0}{2m} \cos \omega t \left[ \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right].$$

Selanjutnya, rasio keduanya adalah

$$\frac{y}{x} = \frac{\omega_2^2 - \omega^2 - (\omega_1^2 - \omega^2)}{\omega_2^2 - \omega^2 + \omega_1^2 - \omega^2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2}.$$



## Bab 5

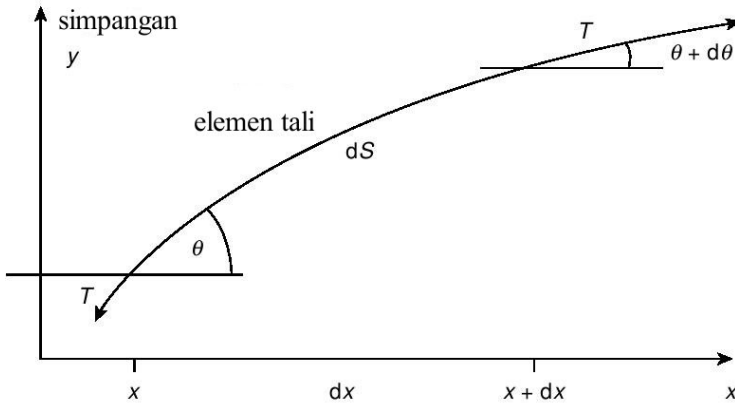
# Gelombang Transversal

### 5.1 Persamaan umum gelombang transversal dan solusinya

Gelombang adalah getaran yang menjalar. Misalkan suatu titik berge-  
tar dalam arah  $y$ , maka posisinya terhadap titik kesetimbangan akan  
berubah dari waktu ke waktu. Kita katakan bahwa simpangannya me-  
rupakan fungsi waktu atau secara matematis ditulis sebagai  $y = y(t)$ .  
Pada kasus gelombang, getaran tersebut juga menjalar, sehingga sim-  
pangannya bergantung pada waktu dan juga posisinya,  $y = y(x, t)$ .  
Klasifikasi gelombang disajikan pada Tabel 5.1.

Tabel 5.1: Contoh pembagian gelombang

parameter	jenis gelombang
arah jalar vs arah getar	gel. transversal & longitudinal
kebutuhan akan medium	gel. mekanik & elektromagnetik
bentuk gelombang	gel. sinusoidal, kotak, gergaji, dan lain-lain
adanya sumber	gel. homogen & non homogen
jumlah frekuensi	gel. mono & polikromatik
dimensi	gel. 1, 2, atau 3 dimensi
perubahan posisi	gel. diam dan berjalan
keterkaitan dengan sumber	gel. primer, dan sekunder
bentuk muka gelombang	gel. bidang, silinder, & sferis
jumlah gelombang	pulsa dan gel. kontinyu



Gambar 5.1: Gelombang pada tali

Kita tinjau gelombang transversal, yaitu jenis gelombang di mana arah getarnya tegak lurus dengan arah jalarnya. Untuk mendapatkan persamaan umum gelombang transversal, kita tinjau gelombang pada tali seperti diperlihatkan pada Gambar 5.1. Gaya transversal yang bekerja pada elemen tali dari  $x \rightarrow x + dx$  adalah

$$\begin{aligned}
 F_{trans} &= T \sin(\theta + d\theta) - T \sin \theta \approx T \tan(\theta + d\theta) - T \tan \theta \\
 &= T \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] \\
 &\approx T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx
 \end{aligned}$$

Hukum II Newton menyatakan bahwa jumlah gaya transversal sama dengan massa kali percepatan transversal,  $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ . Dengan demikian, gaya transversal pada tali adalah

$$F_{trans} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

di mana  $\rho$  adalah massa per satuan panjang. Dengan mempergunakan kedua ungkapan  $F_{trans}$  di atas, didapatkan  $T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$  atau

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (5.1)$$

**Contoh soal:**

Perhatikan Persamaan (5.1).

- Dengan memanfaatkan definisi  $\rho$  dan  $T$ , carilah dimensi dari  $\frac{\rho}{T}$ ?
- Dengan memanfaatkan definisi  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  dan  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , carilah dimensi dari  $\frac{\rho}{T}$ ?
- Apakah kedua hasil di atas sama? Besaran apakah, yang masih terkait gelombang, yang setara dengan  $\frac{\rho}{T}$ ?

**Penyelesaian**

- Dengan memanfaatkan definisi  $\rho$  dan  $T$ , kita dapat menghitung bahwa  $\dim \left[ \frac{\rho}{T} \right] = \frac{\dim[\rho]}{\dim[T]} = \frac{[M][L]^{-1}}{[M][L][T]^{-2}} = [L]^{-2} [T]^2 = \frac{1}{([L]/[T])^2}$ .
- Dengan memanfaatkan definisi  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  dan  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , kita juga dapat menghitung bahwa  $\dim \left[ \frac{\rho}{T} \right] = \frac{\dim \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]}{\dim \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right]} = \frac{[L]^{-1}}{[L][T]^{-2}} = [L]^{-2} [T]^2 = \frac{1}{([L]/[T])^2}$ .
- Ternyata bahwa  $\frac{\rho}{T} = \frac{1}{v^2}$ , di mana  $v$  adalah laju / kecepatan jalar gelombang.

Sekarang kita dapat menyimpulkan bahwa persamaan umum gelombang homogen 1 dimensi adalah

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (5.2)$$

Dengan membandingkan Pers. (5.1) dan Pers. (5.2), didapatkan bahwa gelombang yang menjalar dalam tali memiliki kecepatan / laju penjaran sebesar  $v = \sqrt{T/\rho}$ . Untuk mengetahui apakah suatu simpangan (persamaan  $y = y(x, v, t)$ ) merupakan simpangan gelombang atau bukan, cukup dengan menguji apakah simpangan tersebut memenuhi Pers. (5.2) atau tidak.

**Contoh soal:**

Apakah persamaan berikut memberikan sebuah gelombang yang menjalar? Jika ya, berapakah kecepatannya?

- $y = y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$
- $y = y_0 \exp[i(10x - 5t)]$
- $y = y_0 \sin(2kx - \omega t)$

**Penyelesaian**

- Untuk  $y = y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$ , didapatkan

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -ky_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

dan

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y_0 \cos(kx - \omega t + \phi) = -k^2 y.$$

Sementara itu

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega y_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

dan

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y_0 \cos(kx - \omega t + \phi) = -\omega^2 y.$$

Terlihat bahwa

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{(\omega/k)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Dengan membandingkan hasil terakhir dengan Persamaan (5.2), dapat disimpulkan bahwa  $y = y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$  adalah persamaan gelombang dengan  $v = \omega/k$ .

- Untuk  $y = y_0 \exp[i(10x - 5t)]$ , didapatkan  $\frac{\partial y}{\partial x} = 10i y$  dan  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -100 y$ . Sementara itu  $\frac{\partial y}{\partial t} = -i5y$  dan  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -25y$ . Terlihat bahwa  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{100}{25} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ . Membandingkan hasil tersebut dengan persamaan umum gelombang 1 dimensi (Persamaan (5.2)) didapatkan bahwa  $y = y_0 \exp[i(10x - 5t)]$  adalah persamaan simpangan gelombang dengan  $v^2 = 4$  atau  $v = 2$  m/s.
- Untuk  $y = y_0 \sin(2kx - \omega t)$ , didapatkan  $\frac{\partial y}{\partial x} = 2ky_0 \cos(2kx - \omega t)$  dan  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -4k^2 y_0 \sin(2kx - \omega t) =$



$-4k^2y$ . Sementara itu  $\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_0 \cos(2kx - \omega t)$  dan  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y_0 \sin(2kx - \omega t) = -\omega^2 y$ . Terlihat bahwa  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{4k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ . Karena  $\frac{\omega}{k} = v$ , maka didapatkan  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{4}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ . Ini berarti  $y = y_0 \sin(2kx - \omega t)$  adalah bukan persamaan gelombang.

**Soal:**

Apakah persamaan berikut memerikan sebuah gelombang yang menjalar? Jika ya, berapakah kecepatannya?

- $y = y_0 \sin(kx - \omega t)$
- $y = y_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$
- $y = y_1 \sin(kx - \omega t + \phi) + y_2 \cos(kx - \omega t + \phi)$
- $y = y_0 \sin(2x - 4t)$
- $y = y_0 \sin[(kx - \omega t)^2]$
- $y = y_0 \exp[i(kx - \omega t)]$
- $y = y_0 \exp(kx - \omega t)$
- $y = y_0(kx - \omega t)$
- $y(x, t) = A \exp[-B(x - vt)^2]$

Sekarang kita akan mencari persamaan simpangan pada gelombang, yang merupakan solusi dari persamaan umum gelombang pada Persamaan 5.2. Mengacu pada variabel yang muncul pada persamaan tersebut, kita dapat menduga bahwa solusi yang kita cari haruslah merupakan fungsi dari waktu  $t$ , jarak  $x$ , dan kecepatan  $v$ , atau  $y = y(v, x, t)$ . Pada kasus ini,  $y$  adalah arah getaran ( $y$  disebut sebagai simpangan) sedang  $x$  adalah arah penjalaran. Perhatikan bahwa solusi persamaan gelombang adalah fungsi dari  $x$  dan  $t$ . Ini berarti *gelombang selalu merambat*. (Sebagai perbandingan, solusi persamaan getaran bukan fungsi dari  $x$ . Ini berarti, *getaran tidak merambat*.)

Solusi umum dari persamaan gelombang adalah

$$y = y_1 + y_2 = y_1(vt - x) + y_2(vt + x). \quad (5.3)$$

Perhatikan bahwa  $vt$  dan  $x$  memiliki dimensi yang sama. Ini berarti bahwa perubahan  $t$  haruslah terkait dengan perubahan  $x$ . Selanjutnya didefinisikan fase gelombang  $\varphi = vt \pm x$ , di mana  $\varphi$  selalu bernilai konstan sehingga  $d\varphi = vdt \pm dx = 0$ . Untuk gelombang yang menjalar ke kanan (atau ke arah  $x$  positif),  $v$  bernilai positif, sehingga  $d\varphi = vdt - dx = 0$  dan  $\varphi = vt - x$  atau  $y_{kanan} = y_1(vt - x)$ . Untuk gelombang yang menjalar ke kiri (atau ke arah  $x$  negatif),  $v$  bernilai negatif, sehingga  $d\varphi = vdt + dx = 0$  dan  $\varphi = vt + x$  atau  $y_{kiri} = y_1(vt + x)$ .

**Contoh soal:**

Tunjukkan bahwa  $y = f_2(vt + x)$  adalah solusi dari persamaan gelombang  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .

**Penyelesaian**

Salah satu model solusi persamaan gelombang adalah

$$y = f_2(vt + x).$$

Misalkan  $u = vt + x$ , maka

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u},$$

dan

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2},$$

Dengan cara yang sama, didapatkan

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial f_2}{\partial u},$$

dan

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( v \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) = v \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}.$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa  $y = f_2(vt + x)$  memenuhi persamaan umum gelombang

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

yang menunjukkan bahwa  $y = f_2(vt + x)$  adalah solusi yang benar.

**Soal:**

Tunjukkan bahwa  $y = f_2(vt - x)$  adalah solusi dari persamaan gelombang  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .

**Soal:**

Buktikan bahwa solusi untuk persamaan umum gelombang 1 dimensi  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$  adalah  $y = y_1 + y_2 = y_1(vt - x) + y_2(vt + x)$ .

Jika gelombang menjalar ke kanan, maka kita bisa menuliskan persamaannya sebagai  $y = f(vt - x)$ . Karena gelombang bersifat periodik, maka dipilih  $f(vt - x) = a \sin[k(vt - x)]$ . Konstanta  $a$  adalah amplitudo gelombang, sedang konstanta  $k$  adalah konstanta yang bisa mengubah argumen fungsi

$$(vt - x) \text{ meter} = [k(vt - x)] \text{ radian}.$$

Hal ini berarti  $[k] = \text{radian/meter}$ , atau

$$k = \text{bilangan gelombang} = \frac{\text{sudut lingkaran (radian)}}{\text{periode gelombang (meter)}},$$

atau

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.4)$$

Dengan demikian, didapatkan persamaan simpangan gelombang

$$y = a \sin[k(vt - x)] = a \sin(\omega t - kx + \phi_0), \quad (5.5)$$

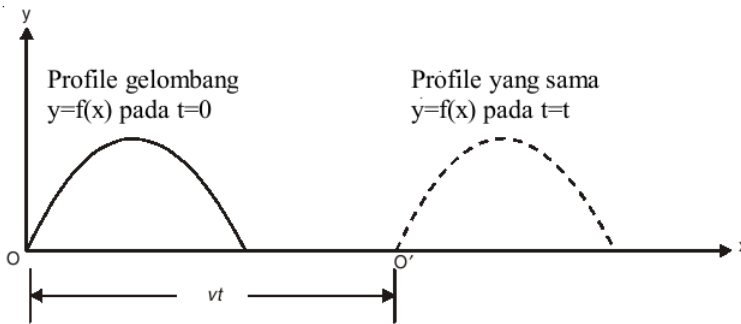
dengan  $\phi_0$  adalah fase awal gelombang.

**Soal:**

Simpangan sebuah gelombang diberikan oleh persamaan  $y = 0,1 \sin(0,1x - 0,1t + \frac{\pi}{2})$  m. Carilah (a) amplitudo gelombang  $A$ , (b) bilangan gelombang atau vektor penalaran  $k$ , (c) panjang gelombang  $\lambda$ , (d) frekuensi sudut gelombang  $\omega$ , (e) periode gelombang  $T$ , (f) kecepatan gelombang  $v$ , dan (g) fase awal gelombang  $\phi_0$ .

**Soal:**

Buktikan bahwa  $y(x, t) = f(x - vt)$  menunjukkan gelombang yang menjalar ke kanan.

**Soal:**

Gelombang sinusoidal menjalar ke arah  $x$ -positif pada tali dengan amplitudo 2 cm, panjang gelombang 1 m dan kecepatan 5 m/s. Kondisi awalnya adalah  $y = 0$  dan  $\frac{\partial y}{\partial t} < 0$  pada  $x = 0$  dan  $t = 0$ . Carilah simpangan pada sembarang posisi dan waktu  $y = f(x, t)$ .

Gelombang 1 dimensi [ $y = y_0 \sin(\omega t - kx)$ ] adalah fungsi dari posisi  $x$  dan waktu  $t$ , sehingga harus digambarkan dalam 2 koordinat. Sebagai alternatif, gelombang 1 dimensi dapat digambarkan dalam 2 cara, yaitu

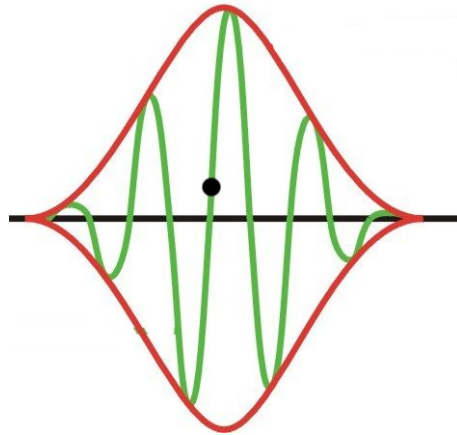
- Gelombang pada posisi  $x$  konstan.

Dalam hal ini simpangan  $y$  (pada sumbu- $y$ ) diplot sebagai fungsi waktu  $t$  (pada sumbu- $x$ ). Gelombang akan memiliki periode waktu sebesar  $T$ , yang nilainya adalah  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  dengan  $\omega$  adalah frekuensi angular gelombang dalam ruang waktu.

- Gelombang pada waktu  $t$  konstan.

Dalam hal ini simpangan  $y$  (pada sumbu- $y$ ) diplot sebagai fungsi jarak  $x$  (pada sumbu- $x$ ). Gelombang akan memiliki periode ruang sebesar  $\lambda$ , yang nilainya adalah  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  dengan  $k$  adalah bilangan gelombang ( $k$  juga dikenal sebagai frekuensi angular gelombang dalam ruang spasial).

Setelah mendapatkan ungkapan untuk simpangan, sekarang kita akan



Gambar 5.2: Kecepatan gelombang.  $v_p$  adalah kecepatan partikel / titik hitam bergerak vertikal (partikel tidak bergerak horizontal),  $v$  adalah kecepatan gelombang hijau bergerak horizontal, sedang  $v_g$  adalah kecepatan sampul merah bergerak horizontal

menghitung kecepatan gelombang. Ada 3 jenis kecepatan gelombang, yaitu:

- Kecepatan partikel, yaitu kecepatan getar partikel terhadap titik kesetimbangan, atau  $v_p = \frac{\partial y}{\partial t}$
- Kecepatan gelombang atau kecepatan fase, yaitu kecepatan gerak titik gelombang (misalnya puncak, lembah, atau simpul) ke arah penjalarannya, atau  $v = \frac{\partial x}{\partial t}$ .
- Kecepatan grup, yaitu kecepatan pergeseran sebuah grup gelombang, atau  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ , di mana  $\omega = kc$ . Kecepatan grup hanya muncul pada gelombang paduan dari berbagai frekuensi.

**Soal:**

Simpangan sebuah gelombang diberikan oleh persamaan  $y = 0,1 \sin(0,1x - 0,1t)$  m. Gambarkan gelombang tersebut dalam (a) ruang spasial / sebagai fungsi  $x$  dan (b) ruang waktu / sebagai fungsi  $t$ .

**Soal:**

(a) Sebuah tali elastik terikat pada bagian ujung atasnya. Tali tersebut memiliki massa 1 gram dan panjang 0,1 m. Sebuah benda dengan massa 1,1 kg digantungkan di ujung bawah tali sehingga tali mengalami pertambahan panjang sebesar 0,022 m. Hitunglah laju penjalaran gelombang transversal sepanjang tali. Jika massa beban berosilasi bebas, carilah periode osilasinya. (b) Gangguan transversal menjalar dari bagian bawah tali dan dipantulkan di bagian ujung atasnya. Gelombang pantul menjalar ke atas lagi melalui tali untuk kemudian dipantulkan lagi pada ujung atas. Jika proses tersebut berlangsung simultan, berapa kali gangguan akan melewati bagian titik tengah tali dalam satu periode osilasi?

## 5.2 Syarat batas

### 5.2.1 Impedansi

Gelombang adalah getaran yang merambat. Bila gelombang melalui suatu medium, maka medium yang dilalui tersebut akan bergetar. Jika pengaruh gelombang dinyatakan dalam ungkapan gaya transversal ( $F_{trans}$ ), ukuran kelembaman medium terhadap pengaruh getaran gelombang dinyatakan dalam besaran impedansi ( $Z$ ), maka kecepatan getar medium ( $v_{trans}$ ) dapat dinyatakan sebagai

$$\text{kecepatan transversal} = \frac{\text{gaya transversal}}{\text{impedansi}}$$

Dengan demikian, impedansi untuk gelombang transversal dapat dibataskan sebagai

$$Z = \frac{F_{transversal}}{v_{transversal}}. \quad (5.6)$$

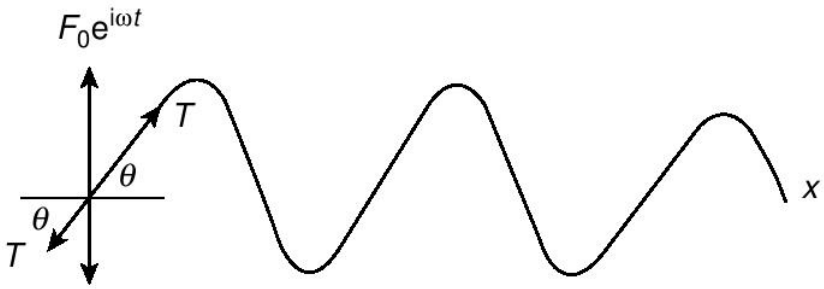
Ada 2 jenis nilai impedansi, yaitu (i) impedansi riil jika mediumnya bersifat disipatif dan (ii) impedansi kompleks jika mediumnya bersifat non disipatif.

Sekarang kita hitung impedansi tali. Dari Gambar 5.1 diperoleh

$$\begin{aligned} F_{transversal} &= T \sin \theta \approx T \tan \theta \\ &= T \frac{\partial y}{\partial x} = T \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = T (v_{trans}) \left( \frac{1}{v} \right) = \frac{T v_{trans}}{v}, \end{aligned}$$

atau

$$Z = \frac{F_{transversal}}{v_{transversal}} = \frac{T}{v}.$$



Gambar 5.3: Gelombang pada tali

Selanjutnya, mengingat  $v = \sqrt{T/\rho}$  atau  $T = \rho v^2$ , maka

$$Z = \rho v. \quad (5.7)$$

**Contoh soal:**

Sebuah titik massa  $M$  terkonsentrasi pada pada sebuah titik pada tali dengan rapat massa  $\rho$ . Kita katakan bagian tali tanpa massa  $M$  sebagai medium 1 dan bagian tali dengan massa  $M$  sebagai medium 2. Sebuah gelombang transversal dengan frekuensi  $\omega$  dan kecepatan  $v$  menjalar dari medium ke kanan dan melalui medium 2. Hitunglah impedansi pada medium 1 dan medium 2 tersebut.

**Penyelesaian**

Medium 1 adalah tali dengan impedansi

$$Z_1 = Z_{tali} = \rho v.$$

Medium 2 adalah partikel titik dengan massa  $M$  yang diikat pada tali. Impedansi medium 2 adalah jumlah impedansi tali dan partikel, yang nilainya adalah

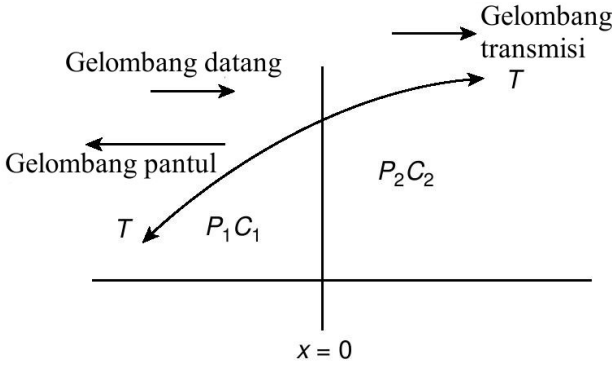
$$Z_{partikel} = \frac{F}{v} = \frac{-kx}{v} = \frac{-M\omega^2 x}{i\omega v} = iM\omega,$$

sehingga impedansi medium 2 adalah

$$Z_2 = Z_{tali} + Z_{partikel} = \rho v + iM\omega.$$

### 5.2.2 Gelombang pada bidang batas

Misalkan sebuah gelombang datang (menjalar ke kanan)  $y_i = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)}$  mengenai bidang batas medium 1 dan medium 2, sehing-



Gambar 5.4: Gelombang pada bidang batas

ga sebagian gelombang dipantulkan  $y_r = B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}$ , sedang sebagian yang lain diteruskan  $y_t = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)}$ . Misalkan bidang batas medium berada di  $x = 0$  (lihat Gambar 5.4). Pada kasus ini, syarat batas yang harus dipenuhi adalah

- Amplitudo gelombang bersifat kontinu

$$y_i + y_r|_{x=0} = y_t|_{x=0}.$$

sehingga didapatkan

$$A_1 + B_1 = A_2. \quad (5.8)$$

- Gaya transversal bersifat kontinu

$$T_1 \frac{\partial}{\partial x} (y_i + y_r) \Big|_{x=0} = T_2 \frac{\partial}{\partial x} (y_t) \Big|_{x=0}.$$

sehingga didapatkan

$$Z_1 (A_1 - B_1) = Z_2 A_2. \quad (5.9)$$

Selanjutnya dapat dihitung

$$\text{koefisien refleksi } (r) = \frac{\text{amplitudo gel pantul}}{\text{amplitudo gel datang}}$$



$$\text{koefisien transmisi } (t) = \frac{\text{amplitudo gel transmisi}}{\text{amplitudo gel datang}}$$

Dari Persamaan (5.8) dan (5.9), didapatkan

$$r = \frac{B_1}{A_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (5.10)$$

$$t = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (5.11)$$

Dapat dibuktikan bahwa

$$1 + r = t \quad (5.12)$$

### Contoh soal:

Sebuah titik massa  $M$  terkonsentrasi pada pada sebuah titik pada tali dengan rapat massa  $\rho$ . Kita katakan bagian tali tanpa massa  $M$  sebagai medium 1 dan bagian tali dengan massa  $M$  sebagai medium 2. Sebuah gelombang transversal dengan frekuensi  $\omega$  dan kecepatan  $v$  menjalar dari medium ke kanan dan melalui medium 2. Hitunglah koefisien refleksi dan koefisien transmisi ketika gelombang melewati bidang batas medium 1 dan medium 2.

### Penyelesaian

Untuk kasus kita  $Z_1 = \rho v$  dan  $Z_2 = \rho v + iM\omega$ . Mengacu Persamaan (5.11), didapatkan

$$\begin{aligned} t &= \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\rho v}{\rho v + (\rho v + iM\omega)} = \frac{2\rho v}{2\rho v + iM\omega} \\ &= \frac{1}{1 + i(m\omega/2\rho v)} = \frac{1}{1 + iq}, \end{aligned}$$

dengan  $q = M\omega/(2\rho v)$ . Selanjutnya koefisien refleksi  $r$ -nya adalah

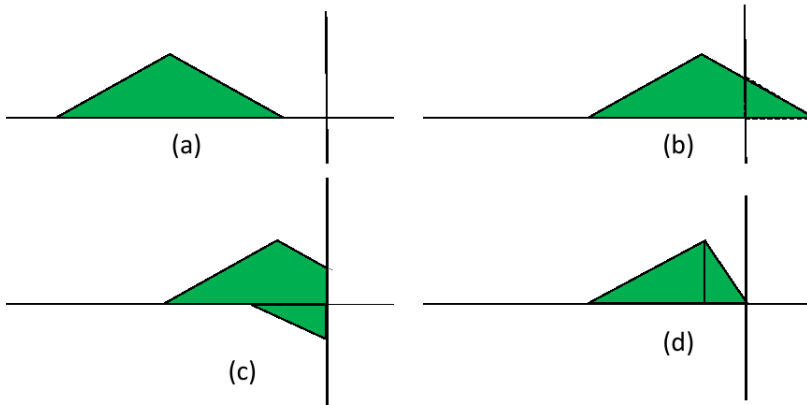
$$r = t - 1 = \frac{1}{1 + iq} - \frac{1 + iq}{1 + iq} = \frac{-iq}{1 + iq}.$$

### Contoh soal:

Gelombang atau pulsa yang mengenai medium dengan  $Z_2 = \infty$  akan dipantulkan seluruhnya, dan mengalami pembalikan fase. Misalkan sebuah pulsa berbentuk segitiga dengan panjang  $l$ , dipantulkan pada ujung tali yang terikat ( $Z_2 = \infty$ ). Sketsalah bentuk pulsa setelah seperempat bagian pulsa melewati bidang batas.

### Penyelesaian

Karena  $Z_2 = \infty$ , maka pulsa akan dipantulkan seluruhnya, dan mengalami pembalikan fase, seperti diperlihatkan pada gambar berikut,



Gambar 5.5: Pemantulan pulsa pada bidang batas

- Gambar (a): pulsa sebelum melewati bidang batas
- Gambar (b): pulsa setelah seperempat bagian melewati bidang batas, andaikata tidak dipantulkan
- Gambar (c): pulsa setelah seperempat bagian melewati bidang batas dan dipantulkan dengan perbedaan fase sebesar  $180^\circ$ .
- Gambar (d): pulsa setelah seperempat bagian melewati bidang batas, dipantulkan, dan dengan memperhatikan syarat kontinuitas.

Situasi sebenarnya ditunjukkan oleh Gambar (d).

#### Soal:

Sketsalah bentuk pulsa berbentuk segitiga dengan lebar  $l$  ketika melewati bidang 2 dengan  $Z_2 = \infty$ .

- setelah tiga perempat bagian pulsa melewati bidang batas.
- setelah setengah bagian pulsa melewati bidang batas.
- setelah semua bagian pulsa melewati bidang batas.

### 5.2.3 Reflektansi dan transmitansi: rasio laju energi

Laju energi yang dibawa oleh gelombang (dengan frekuensi  $\omega$ , kecepatan  $v$ , dan amplitudo  $A$ ), yang menjalar pada medium dengan rapat massa  $\rho$ , adalah hasil kali energi total  $\frac{1}{2}\rho\omega^2 A$  dan kecepatannya  $v$ , atau

$$\text{laju energi} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v = \frac{1}{2}\omega^2 Z A^2$$

Dengan demikian, akan didapatkan

$$\text{reflektansi } (R) = \frac{\text{Laju energi yang dipantulkan}}{\text{Laju energi yang datang}}$$

$$\text{transmitansi } (T) = \frac{\text{Laju energi yang diteruskan}}{\text{Laju energi yang datang}}$$

Dari Persamaan (5.8) dan (5.9), didapatkan

$$R = \frac{Z_1 B_1^2}{Z_1 A_1^2} = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (5.13)$$

$$T = \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_1^2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (5.14)$$

Dapat dibuktikan bahwa

$$R + T = 1 \quad (5.15)$$

Tabel 5.2 memaparkan perbedaan  $r$  dan  $t$  terhadap  $R$  dan  $T$ .

Tabel 5.2: Perbandingan ( $r$  dan  $t$ ) versus ( $R$  dan  $T$ )

$r$ dan $t$	$R$ dan $T$
rasio amplitudo	rasio laju energi
$r = \frac{B_1}{A_1}$	$R = \frac{Z_1 B_1^2}{Z_1 A_1^2} = r^2$
$t = \frac{A_2}{A_1}$	$T = \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_1^2} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2$
$1 + r = t$	$R + T = 1$

**Soal:**

Hitunglah  $r$ ,  $t$ ,  $R$ , dan  $T$  untuk

- gelombang yang menjalar pada tali dengan ujung bebas ( $Z_2 = 0$ )
- gelombang yang menjalar pada tali dengan ujung terikat ( $Z_2 = \infty$ )

**Soal:**

Nyatakan  $R$  dan  $T$  dalam  $\rho$

**Soal:**

Jika  $n = \frac{1}{Z}$ , nyatakan  $R$  dan  $T$  dalam  $n$ .

### 5.2.4 Kesesuaian impedansi

Misalkan suatu gelombang menjalar dari medium 1 ke medium 3. Mengacu pada Persamaan (5.13), maka akan ada fraksi gelombang yang dipantulkan, selama  $Z_1 \neq Z_3$ . Untuk menghindari pemantulan gelombang atau membuat reflektansinya sama dengan nol, maka kita dapat menempatkan medium 2 di antara medium 1 dan 3. Medium 2 tersebut haruslah memiliki impedansi

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$$

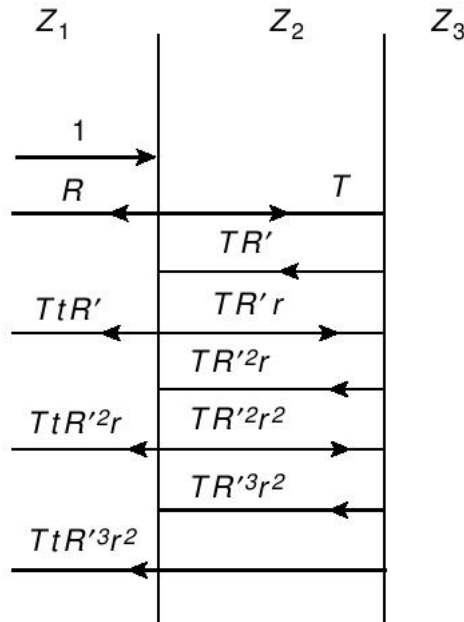
dengan ketebalan

$$L = \frac{\lambda_2}{4},$$

di mana  $\lambda_2$  adalah panjang gelombang pada medium 2. Kedua syarat di atas dikenal sebagai kesesuaian impedansi (*impedansi matching*).

**Contoh soal (*Pain Problem 5.9*):**

Pada gambar di bawah, medium 1 (dengan impedansi  $Z_1$ ) dan medium 3 (dengan impedansi  $Z_3$ ) dipisahkan oleh medium 2 dengan impedansi  $Z_2$  dengan ketebalan  $\lambda_2/4$ . Jika cahaya (dengan amplitudo 1) datang tegak lurus bidang batas medium, tunjukkan bahwa total amplitudo gelombang pantul di medium 1 adalah nol jika  $R' = R$ . Perhatikan juga bahwa hal tersebut mencerminkan  $Z_2^2 = Z_1 Z_3$ .

**Penyelesaian**

Kita definisikan terlebih dahulu

- $R$  adalah koefisien pemantulan di bidang batas  $1 \rightarrow 2$ . Pemantulan ini menghasilkan pergeseran fase  $\pi$
- $R'$  adalah koefisien pemantulan di bidang batas  $2 \rightarrow 3$ . Pemantulan ini menghasilkan pergeseran fase  $\pi$
- $r$  adalah koefisien pemantulan di bidang batas  $2 \rightarrow 1$ . Pemantulan ini menghasilkan pergeseran fase  $\pi$
- $T$  adalah koefisien transmisi di bidang batas  $1 \rightarrow 2$ .

- $t$  adalah koefisien transmisi di bidang batas  $2 \rightarrow 1$ .
- Penjalaran gelombang dalam medium 2 (dengan ketebalan  $\lambda_2/4$ ) menghasilkan pergeseran fase  $\pi/2$ . Perjalanan bolak-balik menghasilkan pergeseran fase  $\pi$ .
- Setiap pergeseran fase  $\pi$  menghasilkan pembalikan amplitudo, atau secara matematis menghasilkan tanda minus.

Dengan demikian total amplitudo pantul di medium 1 (dengan asumsi  $Z_1 > Z_2 > Z_3$ ) adalah

$$-R_{total} = -R + TR't - TR'rR't + TR'rR'rR't + \dots$$

atau

$$\begin{aligned} R_{total} &= R - TtR' (1 - rR' + r^2R'^2 + \dots) \\ &= R - TtR' (1 - rR' + (-rR')^2 + \dots) \end{aligned}$$

Karena baik  $r$  maupun  $R'$  lebih kecil dari 1, maka kita gunakan jumlahan deret.

$$TtR' (1 - rR' + (-rR')^2 + \dots) = \frac{TtR'}{1 + rR'} = \frac{Tt}{1 + rR'} R'$$

Selanjutnya kita pakai hubungan Stokes

$$Tt + R^2 = 1$$

$$R + r = 0,$$

sehingga

$$R_{total} = R - \frac{TtR'}{1 + rR'} = R - \frac{1 - R^2}{1 - RR'} R'.$$

Terlihat bahwa  $R_{total} = 0$  jika  $R = R'$ , Selanjutnya, karena  $R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$  dan  $R' = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}$ , maka kondisi  $R = R'$  juga menghasilkan  $Z_2^2 = Z_1 Z_3$ .

#### Contoh soal:

Pada soal sebelum ini, telah dipakai hubungan Stokes

$$Tt + R^2 = 1$$

$$R + r = 0,$$

Buktikan hubungan tersebut.

### Penyelesaian

Kita tinjau bidang batas medium 1 dan medium 2, dengan

- Koefisien transmisi  $1 \rightarrow 2$  adalah  $T$
- Koefisien refleksi  $1 \rightarrow 2$  adalah  $R$
- Koefisien transmisi  $2 \rightarrow 1$  adalah  $t$
- Koefisien refleksi  $2 \rightarrow 1$  adalah  $r$
- Dengan demikian, maka jumlah total cahaya ke kiri adalah  $1 + R$ , sedang jumlah total cahaya ke kanan adalah  $T$ .

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} R \\ \leftarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} RT \\ \rightarrow \end{array} \right. + \begin{array}{c} Tt \\ \leftarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} T \\ \rightarrow \end{array} \right. = \begin{array}{c} R \\ \leftarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} RT + Tr \\ \rightarrow \end{array} \right. \\
 \begin{array}{c} R^2 \\ \leftarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} \\ \rightarrow \end{array} \right. \quad \quad \quad \begin{array}{c} R^2 + Tt \\ \leftarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} T \\ \rightarrow \end{array} \right.
 \end{array}$$

Sekarang ditinjau dua pola penjalaran cahaya, yaitu

- Cahaya  $R$  datang dari kiri pada bidang batas  $1 \rightarrow 2$  (gambar kiri), menjadi  $RT$  ke kanan dan  $R^2$  ke kiri.
- Cahaya  $T$  datang dari kanan pada bidang batas  $2 \rightarrow 1$  (gambar tengah), menjadi  $RT$  ke kanan dan  $R^2$  ke kiri.
- Dari gambar kanan bawah, terlihat bahwa jumlah total cahaya ke kiri adalah  $R + [R^2 + Tt]$ , sedang jumlah total cahaya ke kanan adalah  $T + [RT + Tr]$ .
- Karena kedua skenario tersebut sama, maka berlaku

$$1 + R = R + [R^2 + Tt] \Rightarrow R^2 + Tt = 1$$

$$T = T + [RT + Tr] \Rightarrow RT + Tr = 0 \Rightarrow R + r = 0$$

#### Soal:

Hubungan antara impedansi dan indeks bias adalah  $Z = 1/n$ . Cahaya dengan  $\lambda = 450 \text{ nm}$  menjalar dari medium 1 (udara,  $n_u = 1$ ) menuju dan medium 3 (gelas,  $n_g = 1,5$ ). Supaya tidak terjadi pemantulan, carilah indeks bias medium 2 dan tentukan ketebalannya.

**Soal:**

(a) Seberkas cahaya jatuh tegak lurus pada permukaan gelas. Berapa bagian dari sinar datang yang dipantulkan, jika indeks bias gelas  $n$  adalah 1,5? (b) Magnesium Fluoride ( $\text{MgF}_2$ ) digunakan sebagai lapisan anti pantul untuk gelas yang indeks biasnya 1,39. Berapakah ketebalan  $\text{MgF}_2$  yang diperlukan jika panjang gelombangnya adalah 550 nm dan indeks bias gelas adalah  $n = 1,5$ ? Jelaskan mengapa kamera lensa biasanya memiliki warna ungu. (c) Misalkan anda ingin memaksimalkan pantulan untuk cahaya  $\lambda = 550$  nm. Berapakah ketebalan  $\text{MgF}_2$  yang diperlukan untuk tujuan tersebut?

## 5.3 Gelombang berdiri

### 5.3.1 Batasan gelombang berdiri

Misalkan sebuah gelombang menjalar ke arah  $x$ -positif pada tali dengan panjang  $l$ . Kedua ujung tali dalam keadaan terikat, sehingga gelombang dipantulkan dengan perbedaan fase  $\pi$ . Persamaan simpangannya dapat ditulis sebagai:

$$y = \underbrace{ae^{i(\omega t - kx)}}_{\text{gel. datang}} + \underbrace{be^{i(\omega t + kx)}}_{\text{gel. pantul}} \quad (5.16)$$

Karena kedua ujung terikat, maka

- $y_{x=0} = 0$  sehingga  $a + b = 0$  atau  $b = -a$  sehingga

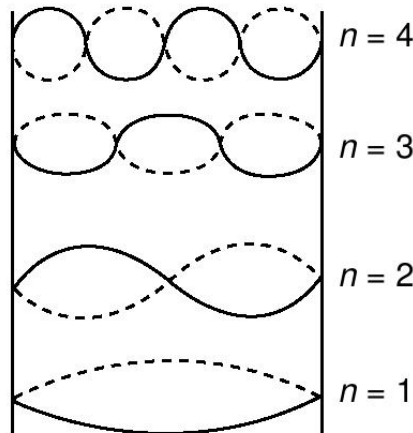
$$\begin{aligned} y &= ae^{i(\omega t - kx)} - ae^{i(\omega t + kx)} \\ &= ae^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{ikx}) \\ &= (-2i) ae^{i\omega t} \sin kx, \end{aligned}$$

- $y_{x=l} = 0$  sehingga  $kl = n\pi$  atau  $k_n = \frac{n\pi}{l}$ . Karena  $\omega = kc$ , maka diperoleh  $\omega_n = \frac{n\pi}{l}c$

Dengan demikian, diperoleh persamaan umum gelombang berdiri

$$\begin{aligned} y_n &= (-2i) ae^{i\omega_n t} \sin \left( \frac{\omega_n}{c} x \right) \\ &= 2a(-i) (\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t) \sin \left( \frac{\omega_n}{c} x \right) \end{aligned}$$





Gambar 5.6: Gelombang berdiri

$$\begin{aligned}
 &= (-2ai \cos \omega_n t + 2a \sin \omega_n t) \sin \left( \frac{\omega_n}{c} x \right) \\
 &= (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \left( \frac{\omega_n}{c} x \right) \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

di mana  $(A_n^2 + B_n^2)^{1/2} = 2a$  adalah amplitudo dari getaran ke- $n$ . Terlihat bahwa gelombang berdiri memenuhi  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k_n^2 y = 0$ . Hal ini mengindikasikan bahwa gelombang tersebut dapat dianggap sebagai gelombang yang tidak menjalar atau dikenal sebagai *gelombang diam*. Ketergantungan gelombang berdiri pada  $n$  menyebabkan gelombang berdiri dengan panjang tali yang sama, bisa muncul dalam beragam frekuensi. Gambaran gelombang berdiri disajikan pada Gambar 5.6.

**Contoh soal:**

*The Pirastro Eudoxa:* Senar dari sebuah cello memiliki kerapatan  $\rho = 1,70 \text{ gm}^{-1}$  dan panjang  $l = 0,70 \text{ m}$ . Tegangan pada senar diatur sehingga menghasilkan frekuensi dasar 220 Hz. (i) Berapakah tegangan tali? (ii) Jika senar dilepas dari cello dan digantungi sebuah massa  $m$ , berapakah nilai massa yang dapat menghasilkan tegangan yang sama? (iii) Berapakah panjang gelombang bunyi di udara? (Anggap kecepatan bunyi di udara adalah 340 m/s dan percepatan gravitasi adalah  $9,81 \text{ ms}^{-2}$ .)

**Penyelesaian**

- Untuk frekuensi dasar  $\lambda = 2L$  sehingga  $c = \lambda \nu = 2L\nu$ . Selan-

jutnya tegangan tali adalah

$$T = \rho c^2 = \rho (2L\nu)^2 = \frac{1,7 \times (2 \times 0,7 \times 220)^2}{1000} = 161 \text{ N}$$

- Kesimbangan terjadi pada saat  $mg = T$  atau  $m = T/g = 16.4 \text{ kg}$
- Karena  $\nu_{\text{bunyi, udara}} = \nu_{\text{bunyi, senar}}$  maka

$$\lambda_{\text{bunyi, udara}} = \frac{c_{\text{bunyi, udara}}}{\nu_{\text{bunyi, udara}}} = \frac{c_{\text{bunyi, udara}}}{\nu_{\text{bunyi, senar}}} = \frac{340}{220} = 1.54 \text{ m}$$

### Soal:

Sebuah tabung laser He-Ne (helium-neon) dengan panjang of 0,40 m, beropreasi pada panjang gelombang 633 nm. Berapakah perbedaan frekuensi antara dua gelombang berdiri yang berurutan dalam tabung tersebut?

### 5.3.2 Energi pada tali yang bergetar

Ada dua jenis energi yang dimiliki tali bergetar, yaitu energi kinetik  $E_{kin} = \frac{1}{2} \int \rho \dot{y}^2 dx$  dan energi potensial  $E_{pot} = \frac{1}{2} T \int \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$ . Pada kasus tali yang terikat pada kedua ujungnya, maka terbentuk gelombang berdiri. Dengan demikian, terjadi berbagai modus getar, di mana tiap modus getar memiliki energi kinetik dan potensial yang khas, yaitu

$$E_{kin, n} = \frac{1}{2} \int \rho y_n^2 dx \quad (5.18)$$

$$E_{pot, n} = \frac{1}{2} T \int \left( \frac{\partial y_n}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (5.19)$$

Mengacu pada Persamaan (5.17) untuk  $y_n$ , didapatkan

$$\dot{y}_n = (-A_n \omega_n \sin \omega_n t + B_n \omega_n \cos \omega_n t) \sin \left( \frac{\omega_n}{c} x \right)$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial x} = \frac{\omega_n}{c} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cos \left( \frac{\omega_n}{c} x \right)$$

Selanjutnya, dapat dihitung energi per mode getar, sebagai berikut

$$E_n = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{4} m \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2). \quad (5.20)$$

Total energinya adalah

$$E_{total} = \sum_n E_n$$

**Contoh soal (*Pain Problem 5.12*):**

Energi total pada suatu modus ke- $n$ , dapat dihitung dengan cara

$$E_n = EK_{max;n} = \frac{1}{2} \rho dx \omega_n^2 (y_n^2)_{max},$$

di mana  $y_n^2 = (A_n^2 + B_n^2) \sin^2 \frac{\omega_n x}{c}$ . Tunjukkan bahwa rumusan tersebut menghasilkan nilai energi total yang seharusnya.

**Penyelesaian**

Jumlahan energi sepanjang tali adalah

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) \int_0^l \sin^2 \left( \frac{\omega_n x}{c} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) \frac{c}{\omega_n} \int_0^l \sin^2 \left( \frac{\omega_n x}{c} \right) d \left( \frac{\omega_n x}{c} \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) \frac{c}{\omega_n} \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_n l}{c} \right) \\ &= \frac{1}{4} m \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) \end{aligned}$$

yang tidak lain adalah energi total pada gelombang tali, Persamaan (5.20).

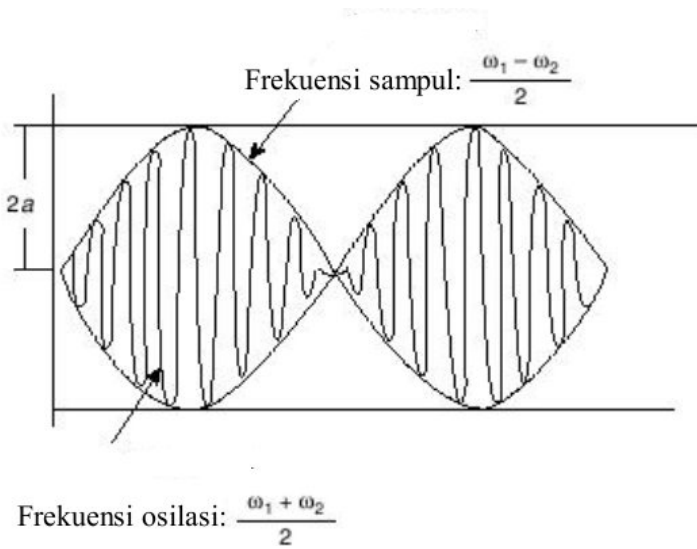
**Contoh soal:**

*Standing wave ratio* (SWR) didefinisikan sebagai rasio amplitudo maksimum terhadap amplitudo minimum pada gelombang berdiri. Nyatakan SWR dalam koefisien refleksi  $r$ .

**Penyelesaian**

*Standing wave ratio* didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} SWR &= \frac{\text{amplitudo maksimum}}{\text{amplitudo minimum}} \\ &= \frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1} = \frac{A_1/A_1 + B_1/A_1}{A_1/A_1 - B_1/A_1} \\ &= \frac{1 + r}{1 - r}. \end{aligned}$$



Gambar 5.7: Superposisi dua gelombang

Dengan melakukan transformasi invers, didapatkan  $r = \frac{SWR-1}{SWR+1}$ .

## 5.4 Grup gelombang

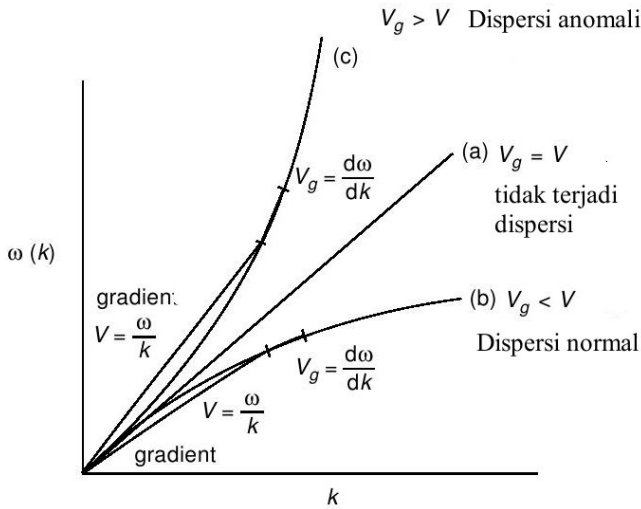
### 5.4.1 Kecepatan grup

Sekarang kita diskusikan superposisi 2 gelombang. Misalkan kita punya dua gelombang, yaitu  $y_1 = a \cos(\omega_1 t - k_1 x)$  dan  $y_2 = a \cos(\omega_2 t - k_2 x)$ , maka perpaduan keduanya adalah

$$\begin{aligned}
 y &= y_1 + y_2 \\
 &= 2a \cos \left[ \frac{(\omega_1 - \omega_2) t}{2} - \frac{(k_1 - k_2) x}{2} \right] \\
 &\quad \times \cos \left[ \frac{(\omega_1 + \omega_2) t}{2} - \frac{(k_1 + k_2) x}{2} \right] \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

Plot Persamaan (5.21) disajikan pada Gambar 5.7. Terlihat bahwa gelombang hasil superposisi memiliki dua jenis frekuensi, yaitu  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$  dan  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ .

Suatu gelombang yang memiliki lebih dari 1 macam frekuensi, akan memiliki kecepatan grup gelombang,  $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ .  $v_g$  berbeda dengan kecepatan fase,  $v = \frac{\omega}{k}$ . Ada tiga kemungkinan untuk nilai  $v_g$ , yaitu



Gambar 5.8: Hubungan dispersi

- jika  $\omega/k$  konstan, maka  $v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{v(k_2 - k_1)}{k_2 - k_1} = v$ . Ini adalah kasus non dispersif.
- jika  $\omega/k$  tidak konstan, maka

$$\begin{aligned}
 v_g &= \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \\
 &= \frac{d}{dk}(kv) = v + k \frac{dv}{dk} \\
 &= v + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \frac{dv}{\left(-\frac{2\pi}{\lambda^2}\right) d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.
 \end{aligned}$$

- jika  $\frac{dv}{d\lambda}$  positif, maka  $v_g < v$ . Ini adalah kasus dispersi normal.
- jika  $\frac{dv}{d\lambda}$  negatif, maka  $v_g > v$ . Ini adalah kasus dispersi anomali.

Hubungan dispersi untuk ketiga kasus tersebut disajikan pada Gambar 5.8.

**Contoh soal (Pain problem 5.14):**

Sebuah grup gelombang terdiri atas dua panjang gelombang, yaitu  $\lambda$  dan  $\lambda + \Delta\lambda$ , di mana  $\Delta\lambda/\lambda$  sangat kecil. Perhatikan bahwa jumlah gelombang osilasi (gelombang dengan panjang gelombang  $\lambda$ ) yang terdapat dalam di antara dua modulasi nol yang berurutan (setengah panjang gelombang sampul) mendekati  $\lambda/\Delta\lambda$ .

**Penyelesaian**

- Mula-mula kita cari hubungan antara  $\omega$  dan  $\lambda$ , di mana

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

- Nilai yang ditanyakan adalah jumlah gelombang osilasi dalam setengah panjang gelombang grup, ataa

$$X = \frac{1/(\lambda_{osilasi})}{1/(\frac{1}{2}\lambda_{grup})} = \frac{\lambda_{grup}}{2\lambda_{osilasi}} = \frac{\omega_{osilasi}}{2\omega_{grup}}.$$

- Selanjutnya kita hitung

$$\begin{aligned}\omega_{osilasi} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ &= 2\pi v \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} \right) = \frac{2\pi v}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} \lambda + (\lambda + \Delta\lambda)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{grup} &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \\ &= 2\pi v \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} \right) = \frac{2\pi v}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} \lambda - (\lambda + \Delta\lambda)\end{aligned}$$

- Dengan demikian nilai yang dicari adalah

$$X = \frac{\lambda + \lambda + \Delta\lambda}{2(\lambda - \lambda - \Delta\lambda)} = \frac{2\lambda + \Delta\lambda}{-2\Delta\lambda} \approx -\frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

**Contoh soal:**

Cahaya kuning dari lampu sodium memiliki 2 komponen panjang gelombang, yaitu 589,00 nm dan 589,59 nm. Indeks bias sebuah gelas untuk panjang gelombang tersebut, berturut-turut adalah 1,6351 dan 1,6350. Tentukan (i) kecepatan fase cahaya sodium dalam gelas untuk kedua panjang gelombang tersebut (ii) kecepatan grup dari pulsa sodium yang ditransmisikan melalui gelas.

### Penyelesaian

- Karena  $n = \frac{c_{udara}}{c_{gelas}} = \frac{c_{udara}}{v}$ , maka  
 $v = \frac{c_{udara}}{1,6351} = 0,61158 c_{udara}$  untuk  $n = 1,6351$   
 $v = \frac{c_{udara}}{1,6350} = 0,61162 c_{udara}$  untuk  $n = 1,6350$
- Untuk menghitung  $v_g$ , lebih dahulu dihitung

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{dv}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{v}{n} \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\begin{aligned} v_g &= v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = v - \left( -\lambda \frac{v}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) = v \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \\ &= \frac{0,61162 c + 0,61158 c}{2} \left[ 1 + \frac{589,295}{1,63505} \left( \frac{-0,0001}{0,59} \right) \right] \\ &= 0,5742 c \end{aligned}$$

#### Contoh soal:

Hitunglah kecepatan grup dan kecepatan fase pada mekanika kuantum, dan bandingkan dengan kecepatan partikel klasik.

### Penyelesaian

Pada gelombang partikel, kecepatan grup didefinisikan sebagai

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

Sebaliknya kecepatan fase didefinisikan sebagai

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p}.$$

Karena  $E = \frac{p^2}{2m} + V$ , maka kecepatan grupnya adalah

$$v_g = \frac{d\left(\frac{p^2}{2m} + V\right)}{dp} = \frac{p}{m} = v_{partikel klasik},$$

sedang kecepatan fasenya adalah

$$v = \frac{\frac{p^2}{2m} + V}{p} = \frac{p}{2m} + \frac{V}{p} = \frac{1}{2} v_{partikel klasik} + \frac{V}{p}.$$

Untuk partikel bebas, didapatkan bahwa  $v = \frac{1}{2}v_{\text{partikel klasik}}$ .

**Contoh soal:**

Tinjau anomali dispersi pada gelombang elektromagnetik.

**Penyelesaian**

Pada gelombang elektromagnetik, kecepatan (fase) gelombang diberikan oleh

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = (\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r)^{-1/2}.$$

Dengan demikian kecepatan grupnya adalah

$$\begin{aligned} v_g &= v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\epsilon_r} \frac{d\epsilon_r}{d\lambda} \\ &= v - \lambda \left( -\frac{v}{2\epsilon_r} \right) \frac{d\epsilon_r}{d\lambda} = v + \frac{\lambda v}{2\epsilon_r} \frac{d\epsilon_r}{d\lambda} \\ &= v \left( 1 + \frac{\lambda}{2\epsilon_r} \frac{d\epsilon_r}{d\lambda} \right). \end{aligned}$$

Karena  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$ , maka  $\epsilon_r = n^2$  dan

$$\frac{d\epsilon_r}{d\lambda} = \frac{d\epsilon_r}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = (2n) \left( -\frac{\omega^2}{2\pi c} \frac{dn}{d\omega} \right) = -\frac{\omega^2 n}{\pi c} \frac{dn}{d\omega}.$$

Dengan demikian, maka

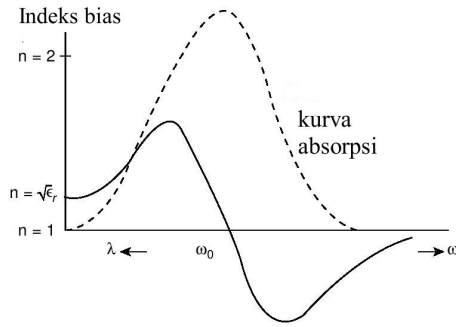
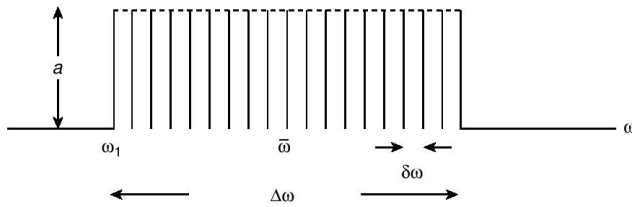
$$\begin{aligned} v_g &= v \left( 1 + \frac{\lambda}{2\epsilon_r} \frac{d\epsilon_r}{d\lambda} \right) = v \left( 1 + \frac{\lambda}{2\epsilon_r} \left( -\frac{\omega^2 n}{\pi c} \frac{dn}{d\omega} \right) \right) \\ &= v \left( 1 - \frac{\lambda\omega^2 n}{2\pi\epsilon_r c} \frac{dn}{d\omega} \right) = v \left( 1 - \frac{\omega}{\epsilon_r} \frac{dn}{d\omega} \right) \end{aligned}$$

Terlihat bahwa  $v_g > v$  jika  $\frac{dn}{d\omega}$  bernilai negatif. Kurva  $\frac{dn}{d\omega}$  disajikan pada Gambar 5.9.

### 5.4.2 Teori lebar pita

Kita mulai dengan mendiskusikan persamaan gelombang dalam domain frekuensi,  $\omega$ , seperti diperlihatkan pada Gambar 5.10. Misalkan kita memiliki sejumlah  $n$  gelombang dengan amplitudo yang sama,  $a$ , tetapi masing-masing berbeda frekuensinya sebesar  $\delta\omega$  dengan frekuensi terendah adalah  $\omega_1$ . Gelombang resultannya dapat ditulis sebagai



Gambar 5.9: Perubahan indeks bias  $n$  terhadap frekuensi  $\omega$ Gambar 5.10: Gelombang dalam domain frekuensi,  $\omega$ 

$$R(\omega) = a \cos[\omega_1 t] + a \cos[(\omega_1 + \delta\omega)t] + a \cos[(\omega_1 + 2\delta\omega)t] \\ + \dots + a \cos[(\omega_1 + (n-1)\delta\omega)t]$$

atau

$$R(\omega) = \sum_{n=0}^{n-1} a \cos[(\omega_1 + n\delta\omega)t], \quad (5.22)$$

Sekarang kita akan menyatakan ungkapan terakhir dalam domain  $t$ . Dapat dihitung bahwa

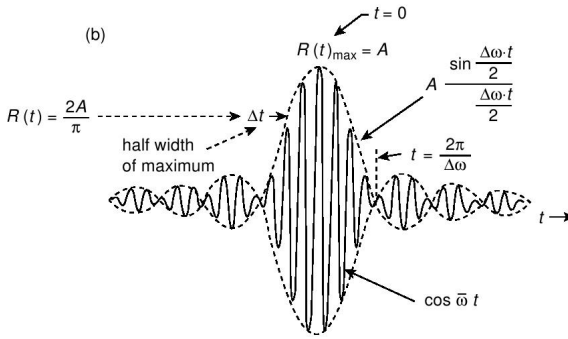
$$R(\omega) = a \frac{\sin[n(\delta\omega)t/2]}{\sin[(\delta\omega)t/2]} \cos \bar{\omega}t,$$

di mana frekuensi rata-rata  $\bar{\omega}$  diberikan oleh

$$\bar{\omega} = \omega_1 + \frac{1}{2}(n-1)(\delta\omega).$$

Terlihat bahwa  $R(\omega)$  berubah menjadi  $R(t)$ . Misalkan  $n(\delta\omega) = \Delta\omega$ , maka

$$R(t) = a \frac{\sin[\Delta\omega.t/2]}{\sin[\Delta\omega.t/2n]} \cos \bar{\omega}t.$$



Gambar 5.11: Gelombang pada Gambar 5.10, dinyatakan dalam domain waktu,  $t$

Untuk  $n$  yang besar, akan diperoleh

$$\begin{aligned}
 R(t) &= a \frac{\sin [\Delta\omega.t/2]}{\Delta\omega.t/2n} \cos \bar{\omega}t \\
 &= na \frac{\sin [\Delta\omega.t/2]}{\Delta\omega.t/2} \cos \bar{\omega}t \\
 &= A \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \bar{\omega}t,
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

di mana  $A = na$  dan  $\alpha = \Delta\omega t/2$  adalah setengah beda fase antara komponen pertama dan terakhir, pada waktu  $t$ . Plot Persamaan (5.23) disajikan pada Gambar 5.11.

Dari Gambar 5.11. terlihat bahwa

$$R = \begin{cases} 1 & \text{pada } \alpha = 0 \text{ atau } t_1 = 0 \\ 0 & \text{pada } \alpha = \pi \text{ atau } t_2 = 2\pi/\Delta\omega \end{cases},$$

atau

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Hasil terakhir dapat ditulis sebagai

$$\Delta\omega\Delta t = 2\pi. \tag{5.24}$$

Hasil di atas dikenal sebagai teori lebar pita, dan diperumum sebagai  $\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi$ . Persamaan terakhir bisa muncul dalam berbagai bentuk, antara lain:

- Karena  $E = \hbar\omega$ , maka didapatkan  $\Delta E\Delta t = h$ .

- Karena  $\omega = 2\pi\nu$ , maka didapatkan  $\Delta\nu\Delta t = 1$ .
- Dengan memanfaatkan hubungan  $\omega = kv$  dan  $t = x/v$ , diperoleh  $\Delta k\Delta x \approx 2\pi$ .
- Dari persamaan terakhir dan dengan mengingat  $p = \hbar k$ , didapatkan  $\Delta p\Delta x \approx \hbar$ . **Persamaan terakhir dikenal** dalam mekanika kuantum sebagai ketidakpastian Heisenberg.
- Selanjutnya, dengan mengingat  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , maka  $\Delta k\Delta \left(\frac{1}{\lambda}\right) \approx 1$ .

## 5.5 Gelombang transversal pada struktur periodik

Persamaan gaya transversal pada struktur periodik adalah

$$m\ddot{y}_r = \frac{T}{a} (y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}).$$

di mana  $T$  adalah gaya elastis antar atom dan  $a$  adalah jarak antar atom. Untuk  $a \approx \delta x$  yang sangat kecil (biasanya  $a$  dalam orde angstrom), suku kanan dapat diuraikan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} (y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}) &\approx \frac{1}{\delta x} (y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}) \\ &= \frac{y_{r+1} - y_r}{\delta x} - \frac{y_r - y_{r-1}}{\delta x} \\ &= \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{r+1/2} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{r-1/2} = \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_r dx. \end{aligned}$$

Seperti biasanya, suku kiri dapat ditulis sebagai

$$m\ddot{y}_r = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

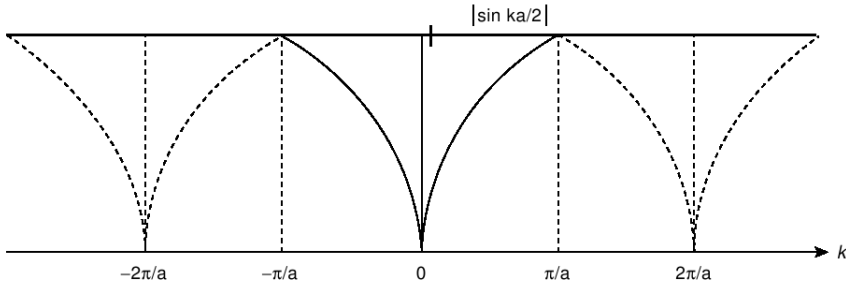
di mana  $\rho$  adalah massa per satuan panjang.

Dengan demikian, persamaan gelombangnya adalah

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

yang merepresentasikan gelombang dengan kecepatan  $\sqrt{T/\rho}$ . Solusi dari persamaan di atas adalah

$$y_r = A_r e^{i(\omega t - kx)} = A_r e^{i(\omega t - kra)}.$$



Gambar 5.12: Plot  $\sin \left| \frac{ka}{2} \right|$  sebagai fungsi  $k$

Substitusi persamaan di atas ke dalam persamaan gelombang menghasilkan

$$-\omega^2 m = \frac{T}{a} \left( e^{ika} + e^{-ika} - 2 \right) = \frac{T}{a} \left( e^{ika/2} + e^{-ika/2} \right)^2 = -\frac{4T}{a} \sin^2 \frac{ka}{2},$$

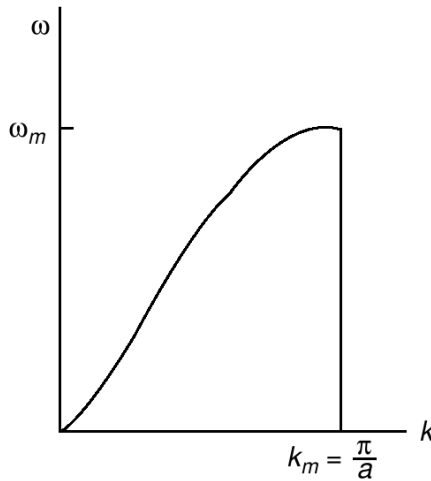
memberikan nilai frekuensi

$$\omega^2 = \frac{4T}{ma} \sin^2 \frac{ka}{2},$$

dan kecepatan gelombang

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k} \left[ \sqrt{\frac{k^2 T a}{m}} \frac{\sin(ka/2)}{(ka/2)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{T}{m/a}} \frac{\sin(ka/2)}{(ka/2)} = c \frac{\sin(ka/2)}{(ka/2)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Plot  $\sin \left| \frac{ka}{2} \right|$  sebagai fungsi  $k$  disajikan pada Gambar 5.12. Pengulangan bentuk yang terjadi dikenal sebagai Zona Brillouin.

Gambar 5.13: Ketergantungan  $\omega$  pada  $k$ 

Ada 2 kasus khusus dari Persamaan (5.25), yaitu

- Jika  $\lambda$  sangat besar, maka  $\omega^2 \approx \frac{4T}{ma} \frac{k^2 a^2}{4} = \frac{T}{m/a} k^2$  dan  $v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{m/a}} = c$ .
- Jika  $\lambda$  sangat pendek atau  $\lambda = 2a$  maka  $k = k_m = \frac{\pi}{a}$ ,  $\omega = \omega_m = \sqrt{\frac{4T}{ma}}$ ,  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{T}{m/a}} = \frac{2}{\pi} c$ , dan  $\frac{y_r}{y_{r+1}} \propto e^{ika} = e^{i\pi} = -1$  yang menunjukkan kondisi berlawanan fase. Salah satu tipikal nilai adalah  $T/a = 15 \text{ N/m}$  dan  $m = 60 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , sehingga didapatkan  $\omega^2 \approx 10^{27} \text{ rad/s}$  dan  $\nu \approx 15 \times 10^{12} \text{ Hz}$ .

Ketergantungan  $\omega$  pada  $k$  disajikan pada Gambar 5.13.

**Contoh soal:**

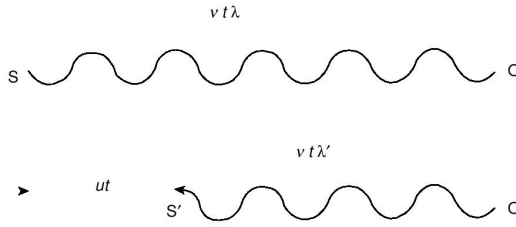
Konstanta gaya untuk ikatan ionik dalam kristal adalah  $15 \text{ N/m}$ . Hitunglah panjang gelombang untuk NaCl dan KCl.

**Penyelesaian**

Nilai frekuensi untuk sistem dua atom adalah

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{a} \left[ \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right]}.$$

- Untuk kasus NaCl, dapat dipakai  $T/a = 15 \text{ N/m}$ ,  $m = m_{Na} = 23 \text{ a.m.u}$ , dan  $M = m_{Cl} = 395 \text{ a.m.u}$  dengan  $1 \text{ a.m.u} = 1,66 \times$



Gambar 5.14: Sumber  $S$  bergerak dengan kecepatan  $u$  mendekati pengamat  $P$  yang diam

$10^{-27}$  kg, sehingga didapatkan  $\omega = 3,6085 \times 10^{13}$  rad/s atau  $f = 0,5741 \times 10^{13}$  Hz, yang setara dengan  $\lambda = 52,2 \mu\text{m}$ . Nilai tersebut cukup dekat dengan nilai pengamatan  $\lambda = 61 \mu\text{m}$ .

- Untuk kasus KCl, dapat dipakai  $T/a = 15$  N/m,  $m = m_{\text{Cl}} = 35$  a.m.u, dan  $m = m_{\text{K}} = 39$  a.m.u dengan  $1 \text{ a.m.u} = 1,66 \times 10^{-27}$  kg, sehingga didapatkan  $\omega = 3,1301 \times 10^{13}$  rad/s atau  $f = 0,4977 \times 10^{13}$  Hz, yang setara dengan  $\lambda = 60,2449 \mu\text{m}$ . Nilai tersebut cukup dekat dengan nilai pengamatan  $\lambda = 71 \mu\text{m}$ .

## 5.6 Efek Doppler

Efek Doppler terjadi jika suatu sumber  $S$  atau pengamat  $P$  ada yang bergerak. Misalkan sumber  $S$  bergerak dengan kecepatan  $u$  mendekati pengamat  $P$  yang diam, seperti ditunjukkan pada Gambar 5.26. Dalam hal ini maka lintasan yang ditempuh cahaya andai pengamatnya diam ( $\nu\lambda t$ ) akan sama dengan lintasan yang ditempuh oleh  $S$  ( $ut$ ) ditambah dengan lintasan yang ditempuh cahaya dengan asumsi pengamatnya bergerak ( $\nu\lambda't$ ). Dengan demikian, maka

$$\nu\lambda t = ut + \nu\lambda't.$$

Dengan substitusi  $\lambda = c/\nu$  dan  $\lambda' = c/\nu'$ , didapatkan

$$ct = ut + c\frac{\nu}{\nu'}t.$$

Dengan demikian, frekuensi yang diterima pengamat adalah

$$\nu' = \frac{c}{c - u}\nu. \quad (5.26)$$

**Contoh soal:**

Turunkan ungkapan frekuensi yang diterima pengamat bila sumber  $S$  bergerak dengan kecepatan  $u$  menjauhi pengamat  $P$  yang diam.

**Penyelesaian**

Dalam hal ini maka lintasan yang ditempuh cahaya andai pengamat bergerak ( $\nu\lambda't$ ) akan sama dengan lintasan yang ditempuh oleh  $S$  ( $ut$ ) ditambah dengan lintasan yang ditempuh cahaya dengan asumsi pengamat diam ( $\nu\lambda't$ ). Dengan demikian, maka

$$\nu\lambda't = ut + \nu\lambda t.$$

Dengan substitusi  $\lambda = c/\nu$  dan  $\lambda' = c/\nu'$ , didapatkan

$$c \frac{\nu}{\nu'} t = ut + ct,$$

atau

$$\nu' = \frac{c}{c+u} \nu.$$

**Contoh soal (*Pain problem 5.22*):**

Tunjukkan bahwa pada efek Doppler, perubahan frekuensi yang dicatat oleh pengamat yang diam ketika sebuah sumber  $S'$  melewati pengamat tersebut adalah  $\Delta\nu = \frac{2\nu c u}{(c^2 - u^2)}$  di mana  $c = \nu\lambda$  adalah kecepatan signal dan  $u$  adalah kecepatan sumber  $S'$ .

**Penyelesaian**

Mula-mula, sumber  $S$  bergerak dengan kecepatan  $u$  mendekati pengamat  $O$  yang diam, sambil memancarkan gelombang dengan frekuensi  $\nu$ . Pada kasus ini, frekuensi yang diterima pengamat  $\nu'$  adalah:

$$\nu_{mendekat} = \frac{c}{c-u} \nu.$$

Selanjutnya sumber menjauhi pengamat, dengan kecepatan  $u$ , sehingga frekuensi yang diterima pengamat adalah

$$\nu_{menjauh} = \frac{c}{c+u} \nu.$$

Perubahan frekuensi yang diterima pengamat adalah

$$\Delta\nu = \nu_{menjauh} - \nu_{mendekat}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c\nu}{c+u} - \frac{c\nu}{c-u} \\
&= \frac{-2\nu uc}{c^2 - u^2},
\end{aligned}$$

atau  $|\Delta\nu| = \frac{2\nu uc}{c^2 - u^2}$ .

**Contoh soal (*Pain problem 5.23*):**

Pada efek Doppler, sebuah sumber  $S'$  dan pengamat  $O'$  bergerak dalam arah yang sama, masing-masing dengan kecepatan  $u$  dan  $v$ . Dengan menganggap pengamat diam (dengan cara menambahkan faktor  $-v$  pada kecepatan sistem), tunjukkan bahwa pengamat mencatat frekuensi  $\nu' = \frac{c-v}{c-u}\nu$ .

**Penyelesaian**

Pada efek Doppler, sebuah sumber  $S'$  dan pengamat  $O'$  bergerak dalam arah yang sama, masing-masing dengan kecepatan  $u$  dan  $v$ . Dengan menganggap pengamat diam (dengan cara menambahkan faktor  $-v$  pada kecepatan sistem), tunjukkan bahwa pengamat mencatat frekuensi  $\nu' = \frac{c-v}{c-u}\nu$ .

Penyelesaian cara 1

Kita anggap pengamat  $O$  bergerak dengan kecepatan  $v$  menjauhi sumber. Dalam kasus ini, persamaan geraknya adalah

$$\nu\lambda t = ut + \nu\lambda't - vt.$$

Selanjutnya dengan (i) mencoret  $t$  pada kedua sisi, (ii) substitusi  $\nu\lambda = c$ , (iii) substitusi  $\lambda' = \frac{c}{\nu'}$ , serta (iv) menata suku-sukunya, didapatkan

$$c - u + v = c\frac{v}{\nu'},$$

atau

$$\nu' = \frac{c}{c - u + v}\nu.$$

Selanjutnya hasil tersebut dapat *dilihat* dalam perspektif pengamat  $O$  yang diam. Dalam perspektif tersebut, maka terjadi transformasi sebagai berikut

$$v \rightarrow v = v - v = 0$$

$$c \rightarrow c - v$$

$$u \rightarrow u - v$$



sehingga

$$\nu' = \frac{c - v}{c - u} \nu.$$

*Penyelesaian cara 2*

Kita anggap pengamat  $O$  diam, sehingga persamaan lintasan gelombangnya menjadi

$$\nu \lambda t = (u - v) t + \nu \lambda' t,$$

atau

$$(c - v) t = (u - v) t + \nu \frac{(c - v)}{\nu'} t.$$

Dari persamaan terakhir diperoleh

$$\nu' = \frac{c - v}{c - u} \nu.$$

**Contoh soal (*Pain problem 5.24*):**

Cahaya dari sebuah bintang dengan panjang gelombang  $\lambda = 6 \times 10^{-7}$  m didapatkan bergeser sejauh  $\Delta\lambda = 10^{-11}$  m ke arah merah, ketika dibandingkan dengan dengan cahaya dengan  $\lambda$  yang sama di dalam kerangka laboratorium. Jika kecepatan cahaya adalah  $c = 3 \times 10^8$  m/s, tunjukkan bahwa bumi dan bintang saling menjauh dengan kecepatan  $u = 5$  km.

**Penyelesaian**

Frekuensi yang dicatat pengamat yang diam, akibat sumber yang bergerak menjauhi pengamat dengan kecepatan  $u$  dan memancarkan gelombang dengan frekuensi  $\nu$  adalah

$$\nu' = \frac{c}{c + u} \nu,$$

yang dapat dinyatakan dalam panjang gelombang

$$\lambda' = \frac{c + u}{c} \lambda.$$

Dengan demikian perubahan panjang gelombangnya adalah

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{c + u}{c} \lambda - \lambda = \frac{u}{c} \lambda,$$

atau

$$u = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c.$$

Dengan memasukkan  $\Delta\lambda = 10^{-11}$  m,  $\lambda = 6 \times 10^{-7}$  m, dan  $c = 3 \times 10^8$  m/s, maka diperoleh  $u = 5$  km.



## Bab 6

# Gelombang Longitudinal

### 6.1 Gelombang bunyi dalam gas

Salah satu contoh gelombang longitudinal adalah gelombang bunyi dalam medium gas. Kehadiran gelombang bunyi menyebabkan gas mengalami gangguan sehingga merubah tekanan  $p$ , volume  $V$ , dan kerapatan  $\rho$ , tanpa merubah massa  $m$  -nya. Misalkan gas mula-mula berada dalam volume  $V_0$ , tekanan  $p_0$ , dan kerapatan massa  $\rho_0$ . Akibat adanya gelombang bunyi, gas berada dalam volume  $V$ , tekanan  $p$ , dan kerapatan massa  $\rho$ . Kondisi tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} p_0 &\rightarrow p = p_0 + \Delta p \\ V_0 &\rightarrow V = V_0 + \Delta V, \\ \rho_0 &\rightarrow \rho = \rho_0 + \Delta \rho \end{aligned} \quad (6.1)$$

Kita hitung massa gas setelah mengalami gangguan

$$\begin{aligned} \rho V &= (\rho_0 + \Delta \rho) (V_0 + \Delta V) \\ &= \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right) V_0 \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right) \\ &= \rho_0 V_0 (1 + s)(1 + \delta). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Pada persamaan di atas telah didefinisikan fraksi perubahan volume (dilatasi)

$$\delta = \frac{\Delta V}{V},$$

dan fraksi perubahan kerapatan (kondensasi)

$$s = \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$

Berikutnya dapat dibuktikan bahwa (lihat contoh soal) bahwa

$$s = -\delta. \quad (6.3)$$

**Contoh soal:**

Untuk kasus dengan gas massa  $m$  tetap, carilah hubungan antara  $s$  dan  $\delta$ .

**Penyelesaian**

Karena massa gas  $m$  tetap, maka berlaku

$$\rho V = \rho_0 V_0,$$

yang implikasinya pada Persamaan (6.2) adalah

$$(1 + s)(1 + \delta) = 1 + s + \delta + s\delta = 1.$$

Untuk gelombang suara,  $s$  dan  $\delta$  biasanya dalam orde  $10^{-3}$ , sehingga suku  $s\delta$  dalam orde  $10^{-6}$  dan dapat diabaikan. Dengan demikian, didapatkan  $s = -\delta$ .

Sekarang kita cari keterkaitan perubahan tekanan  $\Delta p$ . dengan  $\delta$  dan  $s$ , Misalkan gelombang bunyi menyebabkan gas mengalami proses perubahan adiabatik. Dalam hal ini, kita dapat mendefinisikan kompresibilitas adiabatik dalam modulus bulk sebagai berikut

$$B_a = -\frac{dP}{dV/V} = -V \frac{dP}{dV}.$$

Untuk kasus kita  $dP = \Delta P$  dan  $dV = \Delta V$ , sehingga modulus bulk adiabatik dapat dinyatakan sebagai

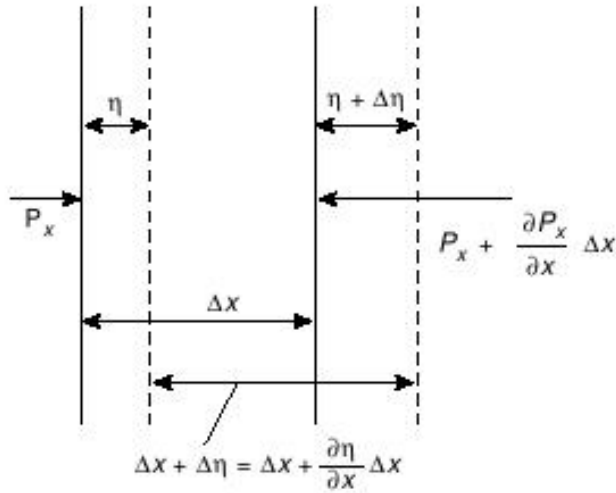
$$B_a = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = -\frac{\Delta p}{\delta}, \quad (6.4)$$

atau

$$\Delta p = -\delta B_a = s B_a. \quad (6.5)$$

Sekarang kita mencoba mencari persamaan gelombang bunyi dalam gas. Akibat adanya tekanan gelombang bunyi, maka gas mengalami perubahan volume, seperti ditunjukkan pada Gambar 6.1. Jika penampang gas  $A$  tidak berubah, maka perubahan volume hanya muncul sebagai perubahan panjang elemen gas.

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Delta x}{A \Delta x} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (6.6)$$



Gambar 6.1: Perubahan volume gas akibat tekanan gelombang bunyi

Pada kasus ini, gaya netto per satuan luas<sup>1</sup> yang bekerja dalam arah  $x$  adalah

$$\begin{aligned} P_x - P_{x+\Delta x} &= P_x - \left( P_x + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \\ &= -\frac{\partial (P_0 + \Delta p)}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial \Delta p}{\partial x} \Delta x. \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengingat  $\Delta p = -B_a \delta = -B_a \frac{\partial \eta}{\partial x}$ , maka diperoleh

$$\text{Gaya per satuan luas} = B_a \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Akibat gaya tersebut, maka massa sejumlah  $\rho_0 \Delta x$  mengalami percepatan sebesar  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ , sehingga Hukum II Newton dapat ditulis sebagai

$$B_a \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$

atau

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{B_a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0. \quad (6.7)$$

yang merupakan persamaan umum gelombang longitudinal dengan kecepatan  $v = \sqrt{B_a / \rho_0}$ . Dengan menggunakan rumusan  $B_a = \gamma P$

<sup>1</sup>Karena gas termasuk fluida, maka hampir semua besarnya didefinisikan dalam nilai per satuan luas atau per satuan volume.

(lihat contoh soal) maka kecepatan gelombang longitudinal dapat ditulis sebagai

$$v = \sqrt{\gamma P / \rho_0} \quad (6.8)$$

**Contoh soal:**

Hitunglah kompresibilitas gas pada proses adiabatik.

**Penyelesaian**

Untuk kasus adiabatik, hubungan  $P$  dan  $V$  adalah  $PV^\gamma = \text{konstan}$  atau

$$V^\gamma dP + P\gamma V^{\gamma-1} dV = 0,$$

yang memberikan hubungan  $\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V}$ . Dengan demikian,

$$B_a = V \left( -\frac{dP}{dV} \right) = V \left( \gamma \frac{P}{V} \right) = \gamma P,$$

**Soal:**

Hitunglah kompresibilitas gas pada proses isotermis.

**Contoh soal (Pain Problem 6.1):**

Tunjukkan bahwa pada gas dengan temperatur  $T$ , kecepatan termal molekulnya hampir sama dengan kecepatan suara.

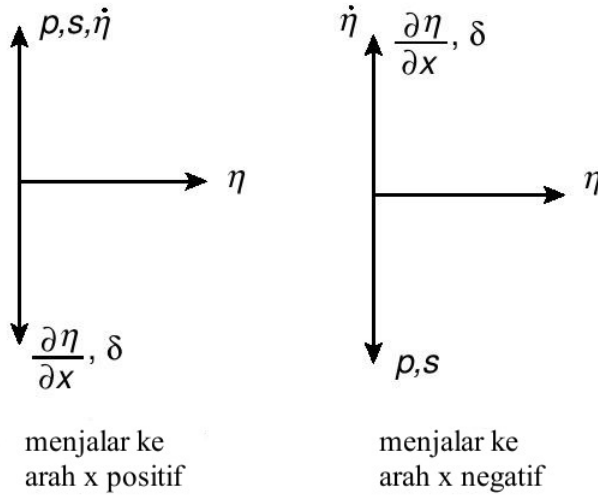
**Penyelesaian**

Energi kinetik sebuah molekul (dengan massa  $M$  dan kecepatan  $c$ ) adalah sama dengan energi termalnya akibat temperatur  $T$ , atau

$$\frac{1}{2} M c^2 = \frac{3}{2} k T,$$

sehingga kecepatan rata-rata termalnya adalah  $c_{\text{termal}} = \sqrt{3 \frac{kT}{M}}$ . Selanjutnya dengan menggunakan persamaan gas ideal  $pV = NkT$ , didapatkan

$$c_{\text{termal}} = \sqrt{3 \frac{pV}{NM}} = \sqrt{3 \frac{p}{\rho}}.$$



Gambar 6.2: Perbedaan fase beberapa kuantitas terhadap simpangan

Kecepatan bunyi di udara adalah  $c_{bunyi} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$  dengan  $\gamma \approx 1,4$ . Dengan demikian dapat dikatakan bahwa

$$\frac{c_{thermal}}{c_{bunyi}} \approx \sqrt{\frac{3}{1,4}} \approx 1.46$$

Sekarang kita akan mencari solusi dari persamaan gelombang (Pers. (6.7)). Solusi umum persamaan gelombang yang menjalar ke arah  $x$  positif adalah

$$\eta = \eta_m e^{i(\omega t - kx)}. \quad (6.9)$$

Perhatikan bahwa  $\eta$  ke arah  $x$ , sama dengan arah penjalaran gelombang. Kita juga dapat menghitung kecepatannya

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = i\omega \eta.$$

Selanjutnya, kita dapat mendefinisikan fraksi perubahan volume  $\delta = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -ik\eta$ . Karena didapatkan  $s = ik\eta$ . Selanjutnya nilai tekanan adalah

$$p = B_a s = iB_a k \eta. \quad (6.10)$$

Dari uraian di atas, bisa kita simpulkan bahwa  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  dan  $\delta$  mendahului  $\eta$  sebesar  $90^\circ$ , sedangkan  $p$ ,  $s$ , dan  $\dot{\eta}$  ketinggalan dari  $\eta$  sebesar  $90^\circ$ , seperti ditunjukkan pada Gambar 6.2.

**Contoh soal:**

Turunkan hubungan fase untuk gelombang yang menjalar ke arah  $x$  negatif.

**Penyelesaian**

Dengan cara yang sama, solusi umum persamaan gelombang yang menjalar ke arah  $x$  negatif adalah

$$\eta = \eta_m e^{i(\omega t + kx)},$$

sehingga

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = i\omega \eta.$$

Selanjutnya dapat dihitung bahwa  $\delta = \frac{\partial \eta}{\partial x} = ik\eta = -s$ , yang berarti bahwa  $s = -ik\eta$  dan nilai tekanannya adalah

$$p = B_a s = -iB_a k\eta.$$

**6.2 Energi pada gelombang bunyi**

Energi kinetik per satuan luas pada gelombang suara adalah

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho dx \dot{\eta}^2,$$

Di mana  $\rho$  adalah massa per satuan volume. Karena  $\dot{\eta} = \dot{\eta}_m \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \right] = \dot{\eta}_m \sin (\omega t - kx)$ , maka

$$\overline{\dot{\eta}^2} = \frac{\int_0^\lambda \dot{\eta}^2 dx}{\lambda} = \frac{\dot{\eta}_m^2 \int_0^\lambda \sin^2 (\omega t - kx) dx}{\lambda} = \frac{1}{2} \dot{\eta}_m^2.$$

Dengan demikian energi kinetik rata-rata (per satuan volume) -nya adalah

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{4} \rho_0 \dot{\eta}_m^2 = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 \eta_m^2 = \frac{1}{4} \rho_0 \dot{\eta}_m^2. \quad (6.11)$$

Energi potensial gelombang suara adalah

$$E_{pot} = - \int p dV.$$



Sekarang kita pakai  $p = B_a s$  dan  $dV = -V_0 ds$ , sehingga

$$E_{pot} = \int B_a s V_0 ds = \frac{1}{2} B_a s^2 V.$$

Mengingat  $s = -\delta$  dan  $\delta = \dot{\eta}/c^2$ , maka energi potensial per satuan luas adalah

$$E_{pot} = \frac{1}{2} B_a \frac{\dot{\eta}^2}{c^2} dx = \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\eta}^2 dx.$$

Sehingga didapatkan energi potensial rata-rata (per satuan volume) sebaai berikut

$$\overline{E_{pot}} = \frac{1}{4} \rho_0 \dot{\eta}_m^2. \quad (6.12)$$

Dengan memanfaatkan Persamaan (6.11-6.12) didapattkan nilai energi total (per satuan volume) rata-rata gelombang bunyi adalah

$$\overline{E_{tot}} = \overline{E_{kin}} + \overline{E_{pot}} = \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\eta}_m^2, \quad (6.13)$$

Selanjutnya didapatkan intensitas gelombang bunyi

$$I = \overline{E_{tot} c} = \frac{1}{2} \rho_0 c \dot{\eta}_m^2 = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 \eta_m^2 = \rho_0 c \dot{\eta}_{rms}^2 = \frac{p_{rms}^2}{\rho_0 c} = p_{rms}^2 \dot{\eta}_{rms}. \quad (6.14)$$

Nilai impedansi (per satuan volume) -nya adalah

$$\text{Impedansi} = \frac{\text{tekanan}}{\text{kecepatan}} = \frac{p}{\dot{\eta}} = -\frac{i B_a k \eta}{i \omega \eta} = -\rho_0 c.$$

#### Contoh soal (Pain Problem 6.2):

Kecepatan bunyi di udara dengan kerapatan  $1,29 \text{ kg/m}^3$  dapat dianggap sebesar  $330 \text{ m/s}$ . Tunjukkan bahwa untuk intensitas  $10 \text{ W/m}^2$ , tekanannya adalah  $\approx 6,5 \times 10^{-4} \text{ atm}$ .

#### Penyelesaian

Hubungan antara intensitas ( $I$ ), kecepatan bunyi ( $c$ ), tekanan rata-rata ( $p_{rms}$ ), dan kerapatan udara ( $\rho_0$ ) adalah

$$I = \frac{p_{rms}^2}{\rho_0 c}$$

atau

$$\begin{aligned}
 p_{rms} &= \sqrt{I\rho_0 c} \\
 &= \sqrt{10 \times 1,29 \times 330} \\
 &= 65,2457 \text{ Pa} \\
 &= \frac{65,2457 \text{ Pa}}{101325 \text{ Pa/atm}} = 6,4392 \times 10^{-4} \text{ atm}
 \end{aligned}$$

**Contoh soal (Pain Problem 6.3):**

Tunjukkan bahwa untuk intensitas  $10 \text{ W/m}^2$  dan frekuensi  $500 \text{ Hz}$ , simpangannya adalah  $\approx 6,9 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

**Penyelesaian**

Hubungan antara amplitudo ( $\eta_m$ ), intensitas ( $I$ ), kecepatan bunyi ( $c$ ), frekuensi ( $\nu$ ), dan kerapatan udara ( $\rho_0$ ) adalah

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c (2\pi\nu)^2 \eta_m^2,$$

atau

$$\eta_m = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c}}.$$

Dengan memanfaatkan data pada soal 6.2 ( $\rho_0 = 1,29 \text{ kg/m}^3$  dan  $c = 330 \text{ m/s}$ ), didapatkan  $\eta_m = 6,9 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

**Soal (Pain Problem 6.4):**

Gelombang bunyi yang nyaris tak terdengar memiliki intensitas  $10^{-10} I_0$ . Tunjukkan bahwa simpangan dari gelombang suara pada tingkat tersebut dan frekuensi  $500 \text{ Hz}$  adalah  $\approx 10^{-10} \text{ m}$ ; yaitu dalam dimensi ukuran molekul udara.

**Soal (Pain Problem 6.5):**

Suatu peralatan Hi-fi dimainkan dengan suara sangat keras pada intensitas  $100 I_0$  di dalam suatu ruangan kecil dengan luas  $3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ . Tunjukkan bahwa keluaran bunyinya adalah  $10 \text{ W}$ .

**Contoh soal (Pain Problem 6.6):**

Gelombang suara, yang sebuah dalam air sedangkan yang lain di udara, memiliki intensitas yang sama. Perhatikan bahwa rasio dari tekanan di air terhadap tekanan di udara adalah sekitar 60.

**Penyelesaian**

Hubungan antara intensitas bunyi ( $I$ ), tekanan medium ( $p$ ), kecepatan bunyi ( $c$ ), dan kerapatan medium ( $\rho_0$ ) adalah

$$I = \frac{p_{rms}^2}{\rho_0 c}.$$

Jika  $I_{air} = I_{udara}$  maka

$$\frac{p_{air}}{p_{udara}} = \sqrt{\frac{(\rho_0 c)_{air}}{(\rho_0 c)_{udara}}}.$$

Dengan memanfaatkan data dari soal 6.2 ( $\rho_{0,udara} = 1,29 \text{ kg/m}^3$  dan  $c_{udara} = 330 \text{ m/s}$ ) dan soal 6.10 ( $\rho_{0,air} \times c_{air} = 1.43 \times 10^6 \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ), didapatkan  $\frac{p_{air}}{p_{udara}} = 57,95$ .

**Soal (Pain Problem 6.6):**

Gelombang suara, yang sebuah dalam air sedangkan yang lain di udara. Perhatikan bahwa rasio dari tekanan di air terhadap tekanan di udara adalah sekitar 60. Ketika tekanannya sama, tunjukkan bahwa rasio intensitanya adalah  $\approx 3 \times 10^{-2}$ .

## 6.3 Kecepatan gelombang longitudinal pada berbagai medium

Pada sub bab ini, kita akan menerapkan konsep gelombang longitudinal pada berbagai kasus, untuk mendapatkan ungkapan kecepatannya. Pada akhirnya, kita akan membandingkan masing-masing rumusan kecepatan tersebut, dan membuat suatu kesimpulan.

### 6.3.1 Gelombang longitudinal pada pegas

Kita tinjau gelombang longitudinal pada pegas. Gaya yang bekerja pada pegas adalah

$$F = KA \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

di mana  $K$  adalah modulus elastisitas dan didefinisikan sebagai

$$K = \frac{\text{tegangan}}{\text{regangan}} = \frac{F/A}{\Delta x/x} = \frac{F}{\Delta x} \frac{x}{A} = \frac{s(L+l)}{A}.$$

Jumlah total gaya yang bekerja adalah

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( s(L+l) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx = s(L+l) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx.$$

Gaya tersebut akan menggerakkan pegas dengan rapat massa per satuan volume  $\rho$  sehingga memiliki gaya  $\rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ . Selanjutnya persamaan gelombang dapat diperoleh melalui hukum II Newton sehingga didapatkan kecepatan

$$v_{\text{pegas}} = \sqrt{\frac{s(L+l)/A}{\rho}} \quad (6.15)$$

### 6.3.2 Gelombang longitudinal pada kawat elastik

Berikutnya kita tinjau gelombang longitudinal pada kawat elastik.

- Sebuah gelombang bunyi pada kawat memiliki simpangan  $\eta$  di  $x$  dan simpangan  $\eta + d\eta$  di  $x + dx$ .
- Gaya di  $x$  adalah  $AY \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$ , sedangkan di  $x + dx$  adalah  $AY \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) dx$ , sehingga gaya netto  $AY \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx$ .
- Dengan menggunakan hukum II Newton, didapatkan

$$AY \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx = \rho A dx \ddot{\eta} = \rho A \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dx$$

sehingga  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$ , yang berarti bahwa

$$v_{\text{kawat elastik}} = \sqrt{Y/\rho}. \quad (6.16)$$

Dalam ungkapan yang lebih umum, kecepatan longitudinal bunyi pada tali elastik diperoleh dari kecepatan bunyi dalam gas  $v = \sqrt{\frac{B_a}{\rho}}$ , di mana kompresibilitas gas adiabatik  $B_a$  diganti dengan modulus Young  $Y$ .

### 6.3.3 Gelombang longitudinal pada zat padat

Sebelum membahas perilaku gelombang longitudinal pada zat padat, kita tinjau lebih dahulu sifat-sifat zat padat, antara lain:

- Pada medium padat, terjadi regangan pada 2 arah, yaitu:
  - regangan longitudinal, yaitu regangan yang searah dengan arah gangguan, atau  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ , di mana  $\eta$  adalah pergeseran pada arah  $x$ .
  - regangan transversal, yaitu regangan tegak lurus terhadap arah gangguan, atau  $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ , di mana  $\beta$  adalah pergeseran pada arah  $y$ .
- Rasio regangan pada kedua arah (rasio Poisson) adalah  $\sigma = -\frac{\partial \beta / \partial y}{\partial \eta / \partial x}$ , di mana nilai  $\sigma$  berkisar antara  $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ , dengan nilai yang paling umum adalah  $\sigma \approx \frac{1}{3}$ . Relasi antara  $\sigma$  (bilangan Poisson),  $\lambda$  (konstanta Lamé),  $Y$  (modulus Young) dan  $\mu$  (modulus geser) adalah

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$\lambda = \frac{\sigma Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$$

$$Y = \lambda + 2\mu - 2\lambda\sigma$$

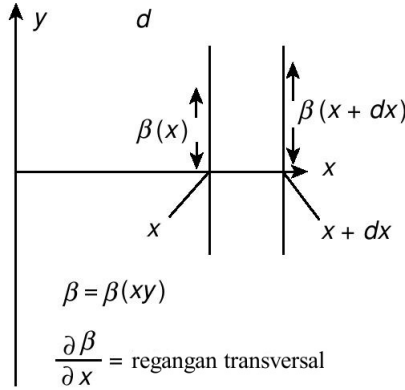
Misalkan sebuah gelombang longitudinal melewati zat padat pada arah  $x$ . Pada kasus ini, gelombang tersebut akan diteruskan tidak hanya ke arah horizontal (searah dengan arah datang,  $x$ ), tetapi juga diteruskan ke arah transversal (tegak lurus terhadap arah datang atau  $y$ ). Pergeseran pada arah  $x$  dinyatakan dalam  $\eta$  di mana  $\eta = \eta(x)$ . Pada sisi lain, pergeseran pada arah  $y$  dinyatakan dalam  $\beta$  di mana  $\beta = \beta(x)$ . Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan

$$\text{tegangan geser transversal} = \mu \times \text{regangan geser transversal} = \mu \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

di mana, secara intuitif, modulus geser ( $\mu$ ) didefinisikan sebagai  $\mu = \frac{\text{tegangan geser transversal}}{\text{regangan geser transversal}}$ .

Sekarang kita akan mencari ungkapan untuk kecepatan gelombang apada arah  $y$  atau yang biasa dikenal sebagai kecepatan transversal. Gaya persatuan luas dalam arah  $y$  adalah

$$T_{x+dx} - T_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) dx = \mu \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} dx$$



Gambar 6.3: Pergeseran yang terjadi pada gelombang longitudinal pada zat padat.

Gaya tersebut menyebabkan sejumlah massa per satuan luas ( $\rho dx$ ) mengalami percepatan  $\ddot{y} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ . Dengan demikian diperoleh  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0$ , yang menggambarkan gelombang bunyi dengan kecepatan

$$v_{T, \text{zat padat}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (6.17)$$

.

Selanjutnya, kita hitung kecepatan gelombang longitudinal pada arah  $x$  atau kecepatan longitudinal. Untuk kasus *bulk solid*, akan timbul kecepatan longitudinal, yang diperoleh dengan mengganti  $\mu$  (pada Persamaan (6.17)) dengan  $\lambda + 2\mu$ , sehingga

$$v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

di mana  $\lambda$  adalah konstanta Lamé. Selanjutnya dengan hubungan  $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ , didapatkan

$$v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{B - \frac{2}{3}\mu + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{B + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}. \quad (6.18)$$

**Contoh soal (Pain Problem 6.9):**

Sebuah zat padat memiliki rasio Poisson  $\sigma = 0,25$ , Tunjukkan bahwa rasio antara kecepatan longitudinal dan kecepatan transversal dalam medium tersebut adalah  $\sqrt{3}$ . Selanjutnya gunakan kecepatan ( $c_L$  dan  $c_T$ ) yang diberikan di buku, untuk menentukan rasio antara kecepatan longitudinal dan kecepatan transversal dalam bumi.

**Penyelesaian**

Masalah pertama adalah mencari  $\frac{c_L}{c_T}$  jika  $\sigma$  diketahui. Nilai  $\frac{c_L}{c_T}$  dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{c_L}{c_T} = \frac{\sqrt{(B + (4/3)\mu)/\rho}}{\sqrt{\mu/\rho}} = \sqrt{\frac{B + (4/3)\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{B}{\mu}}.$$

Karena  $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ , maka  $\frac{B}{\mu} = \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{\mu}$ . Karena  $\sigma = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$  maka  $\frac{\lambda}{\mu} = \left(\frac{1}{2\sigma} - 1\right)^{-1}$ . Dengan demikian didapatkan

$$\frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2\sigma} - 1\right)^{-1}} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{2\sigma} - 1\right)^{-1}}.$$

Dengan memasukkan nilai  $\sigma = 0,25$ , didapatkan  $\frac{c_L}{c_T} = \sqrt{3}$ .

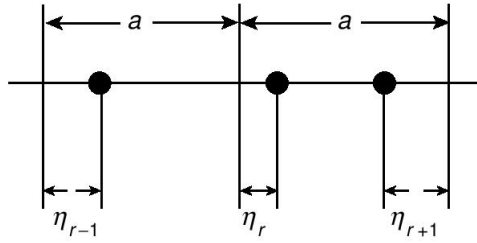
Masalah kedua adalah mencari  $\sigma$  jika  $\frac{c_L}{c_T}$  diketahui. Dengan memanfaatkan persamaan  $\frac{c_L}{c_T} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{2\sigma} - 1\right)^{-1}}$ , dan dengan sedikit manipulasi aljabar, didapatkan

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{(c_L/c_T)^2 - 2} \right]^{-1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(c_L/c_T)^2 - 2}{(c_L/c_T)^2 - 1} \right].$$

Dengan memanfaatkan nilai kecepatan gelombang bunyi (pada buku), di mana  $c_L = 8 \text{ km/s}$  dan  $c_T = 4,45 \text{ km/s}$ , didapatkan  $\sigma_{bumi} = 0,2759$ , suatu nilai yang masih dalam rentang nilai referensi  $0,25 \leq \sigma_{bumi} \leq 0,5$ .

**6.3.4 Gelombang longitudinal pada struktur periodik**

Sekarang kita tinjau gelombang longitudinal pada struktur periodik atau kisi, seperti ditunjukkan pada Gambar 6.4. Misalkan Jika dimensi kisi adalah  $a$  dan gaya antar atom adalah  $T$ , sehingga konstanta kekakuan kisi adalah  $s = T/a$ . Jika pergeseran longitudinal adalah  $\eta$ ,



Gambar 6.4: Gelombang longitudinal pada kisi.

maka regangannya adalah  $\varepsilon = \eta/a$ . Dengan demikian, makategangan dalam arah longitudinal adalah

$$\text{regangan} = \frac{\text{gaya}}{\text{luas}} = \frac{s\eta}{a^2} = \frac{s\varepsilon a}{a^2} = \frac{s\varepsilon}{a}$$

dan modulus Youngnya adalah

$$Y = \frac{\text{tegangan}}{\text{regangan}} = \frac{s\varepsilon/a}{\varepsilon} = \frac{s}{a}.$$

Dengan demikian, kecepatan gelombang dalam struktur periodik adalah

$$v_L = \sqrt{\frac{s/a}{\rho}}.$$

Jika kita bisa mengukur modulus Young  $Y$ , maka konstanta pegas dapat dicari dengan  $s = Ya$ , sehingga frekuensi gelombang dalam kristal adalah

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ya}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ya}{\rho a^3}} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \frac{c_L}{2\pi a}.$$

Untuk  $v_L = 5 \times 10^3$  m/s dan  $a = 2 \times 10^{-10}$  m, didapatkan  $\nu = 3 \times 10^{12}$  Hz. Nilai tersebut sama dengan frekuensi gelombang transversal infra merah, dan satu orde lebih tinggi dari gelombang ultrasonik yang bisa dihasilkan saat ini.

Sebagai penutup, kita tuliskan kecepatan gelombang longitudinal pada berbagai medium, seperti diperlihatkan pada Tabel 6.1. Secara umum, kecepatan gelombang dipengaruhi oleh inersia medium (dalam bentuk  $\rho$ ) dan kemampuan medium untuk menyimpan energi (yang dapat dinyatakan dalam besaran  $B$ ,  $Y$ ,  $K$ ,  $\mu$ , atau  $T/A$ ). Rumusan ini sama dengan rumusan kecepatan pada gelombang transversal. Sebagai perbandingan, kecepatan gelombang transversal pada tali adalah  $v = \sqrt{\frac{T/A}{\rho}}$ , di mana  $T$  = tegangan tali dan  $\rho$  = massa per satuan volume.



Tabel 6.1:

Medium	Kecepatan bunyi	Keterangan
gas	$v_L = \sqrt{\frac{B_a}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$	$B_a$ = kompresibilitas adiabatik
kawat elastik	$v_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu-2\lambda\sigma}{\rho}}$	$Y$ = modulus Young
pegas	$v_L = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{sx/A}{\rho}}$	$K$ = modulus kekakuan = $\frac{F/A}{\Delta x/x}$
zat padat	$v_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$	$\lambda$ = konstanta Lamé
	$v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	$\mu$ = modulus geser
bumi	$v_T = f(\sigma)\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	$\sigma$ = rasio regangan = $-\frac{\partial\beta/\partial y}{\partial\eta/\partial x}$
kristal	$v_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{s/a}{\rho}}$	$s$ = kekakuan kristal
Pada semua kasus, $\rho$ adalah massa per satuan volume		

## 6.4 Gelombang bunyi pada bidang batas

Pada sub bab ini kita akan mendiskusikan fenomena ketika gelombang datang dari medium 1 ke medium 2, dengan impedansi yang berbeda, seperti ditunjukkan pada Gambar 6.5. Jika gelombang datang dari medium 1 dengan  $z_1 = \rho_1 c_1$  menuju medium 2 dengan  $z_2 = \rho_2 c_2$ , maka pada bidang batasnya berlaku syarat kontinuitas kecepatan partikel  $\dot{\eta}$  dan tekanan akustik  $p$ , sebagai berikut

$$\dot{\eta}_i + \dot{\eta}_r = \dot{\eta}_t, \quad (6.19)$$

$$p_i + p_r = p_t, \quad (6.20)$$

di mana indeks  $i$  untuk gelombang datang,  $r$  untuk gelombang pantul, dan  $t$  untuk gelombang transmisi. Dengan mengingat  $p = \rho c \dot{\eta}$ , maka kontinuitas tekanan akustik dapat ditulis sebagai

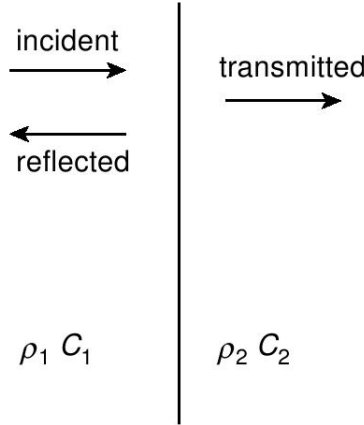
$$\rho_1 c_1 \dot{\eta}_i - \rho_1 c_1 \dot{\eta}_r = \rho_2 c_2 \dot{\eta}_t,$$

atau dengan mengingat  $Z = \rho c$ , maka

$$Z_1 \dot{\eta}_i - Z_1 \dot{\eta}_r = Z_2 \dot{\eta}_t. \quad (6.21)$$

Dengan memanfaatkan pers. (6.19) dan (6.21), didapatkan

$$\dot{\eta}_i = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \dot{\eta}_t \quad t = \frac{\dot{\eta}_t}{\dot{\eta}_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (6.22)$$



Gambar 6.5: Gelombang longitudinal pada bidang batas 2 medium.

Dengan cara yang sama, didapatkan

$$\dot{\eta}_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{Z_2}{Z_1} \right) \dot{\eta}_r \quad r = \frac{\dot{\eta}_r}{\dot{\eta}_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (6.23)$$

Persamaan di atas mengindikasikan bahwa

- $\dot{\eta}_t$  dan  $\dot{\eta}_i$  selalu sefase
- $\dot{\eta}_r$  dan  $\dot{\eta}_i$  sefase bila  $Z_1 > Z_2$  dan berlawanan fase bila  $Z_1 < Z_2$
- $1 + r = t$ .

**Soal:**

Deskripsikan perbedaan fase pada tekanan,  $p_t$  dan  $p_r$  terhadap  $p_i$ .

Berikutnya kita hitung transmitansi dan reflektansi gelombang longitudinal, yang merupakan rasio intensitas. Intensitas gelombang bunyi didefinisikan sebagai

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{Z_1 (\dot{\eta}_r^2)_{rms}}{Z_1 (\dot{\eta}_i^2)_{rms}} = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_2 (\dot{\eta}_t^2)_{rms}}{Z_1 (\dot{\eta}_i^2)_{rms}} = \frac{Z_2}{Z_1} \left( \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

Dapat dibuktikan bahwa

$$R + T = 1.$$

**Soal (Pain Problem 6.10):**

Perlihatkan bahwa ketika gelombang suara jatuh tegak lurus pada bidang batas baja-air, maka 86% dari energinya dipantulkan. Perlihatkan pula bahwa untuk gelombang yang jatuh tegak lurus pada bidang batas air-es, maka 82,3% dari energinya ditransmisikan.

**Contoh soal (Pain Problem 6.12):**

Tinjau gelombang akustik berdiri pada (a) tabung dengan kedua ujung terbuka dan (b) tabung dengan satu ujung terbuka dan ujung lain tertutup.

**Penyelesaian**

Amplitudo sebuah gelombang yang menjalar dalam tabung dengan panjang  $l$ , dapat dituliskan sebagai

$$\eta = (A \cos kx + B \sin kx) \sin \omega t,$$

sehingga

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = (-Ak \sin kx + Bk \cos kx) \sin \omega t.$$

- Untuk kasus ke dua ujung terbuka, maka amplitudo pada kedua bidang batas nilainya tetap atau turunan amplitudo  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$  di  $x = 0$  dan  $x = l$ . Secara matematis, hal tersebut dapat ditulis sebagai

$$\left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{x=0} = (Bk \cos kx) \sin \omega t = 0 \rightarrow B = 0,$$

dan

$$\left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{x=l} = (-Ak \sin kl) \sin \omega t = 0 \rightarrow k = n \frac{\pi}{l}.$$

Dengan demikian, simpangannya dapat ditulis sebagai

$$\eta = A \cos kx \sin \omega t,$$

dengan panjang gelombang  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{n\pi/l} = \frac{2l}{n}$ .

- Untuk kasus ujung di  $x = 0$  terbuka sedang dan ujung di  $x = l$  tertutup, maka

- amplitudo pada ujung di  $x = 0$  nilainya tetap atau turunan amplitudonya  $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ , sehingga

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]_{x=0} = (Bk \cos kx) \sin \omega t = 0 \rightarrow B = 0,$$

- amplitudo pada ujung di  $x = l$  nol atau  $(\eta)_{x=l} = 0$ , sehingga

$$[\eta]_{x=l} = (Ak \cos kl) \sin \omega t = 0 \rightarrow k = (2n + 1) \frac{\pi}{2l}.$$

Dengan demikian, simpangannya dapat ditulis sebagai

$$\eta = A \cos kx \sin \omega t,$$

$$\text{dengan panjang gelombang } \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(2n+1)\pi/2l} = \frac{4l}{(2n+1)}$$

**Contoh soal (Pain Problem 6.14):**

Dengan menggunakan kondisi adiabatik  $P = P_0 \left[ \frac{V_0}{V_0(1+\delta)} \right]^\gamma$ , tunjukkan bahwa kecepatan gelombang yang menjalar adalah  $c = c_0 (1 + s)^{(\gamma+1)/2}$ , di mana  $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ .

**Penyelesaian**

Jika proses adiabatik memenuhi  $P = P_0 \left[ \frac{V_0}{V_0(1+\delta)} \right]^\gamma$  dengan  $\delta = \frac{\partial \eta}{\partial x}$  dan  $\gamma = v/V$ , maka

$$P = P_0 (1 + \delta)^{-\gamma},$$

dan

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -P_0 \gamma (1 + \delta)^{-(\gamma+1)} \frac{\partial \delta}{\partial x} = -\gamma P_0 (1 + \delta)^{-(\gamma+1)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Selanjutnya karena  $(1 + \delta)(1 + s) = 1$ , maka

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\gamma P_0 (1 + s)^{(\gamma+1)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Dengan menggunakan hukum II Newton, maka

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}.$$

Dengan memanfaatkan dua persamaan terakhir, didapatkan

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{\gamma P_0 (1+s)^{(\gamma+1)}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0.$$

Persamaan terakhir memerikan gelombang yang menjalar dengan kecepatan  $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} (1+s)^{(\gamma+1)/2} = c_0 (1+s)^{(\gamma+1)/2}$ , di mana  $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ .

**Soal (Pain Problem 6.15):**

Beberapa gelombang longitudinal pada plasma menunjukkan gabungan fenomena elektrik dan akustik, dan memenuhi hubungan  $\omega^2 = \omega_e^2 + 3aTk^2$  dengan  $\omega_e$  adalah frekuensi elektron dalam plasma dan  $a$  adalah konstanta Boltzmann. Tunjukkan bahwa hasil kali kecepatan fase dan kecepatan grup gelombang terkait dengan energi termal rata-rata dari elektron.

**Soal (Pain Problem 6.17):**

Sebuah gelombang dekat permukaan fluida encer tak terkompresi dengan kerapatan  $\rho$  memiliki kecepatan fase

$$v^2(k) = \left[ \frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho} \right] \tanh kh,$$

di mana  $g$  adalah percepatan gravitasi,  $T$  adalah tegangan permukaan,  $k$  bilangan gelombang, dan  $h$  adalah kedalaman fluida. Jika  $h \ll \lambda$  berarti fluidanya dangkal. Sebaliknya, bila  $h \gg \lambda$  berarti fluidanya dalam. Tinjau kecepatan gelombang dan panjang gelombangnya pada berbagai kasus.



## Bab 7

# Jalur Transmisi

### 7.1 Jalur Transmisi Ideal

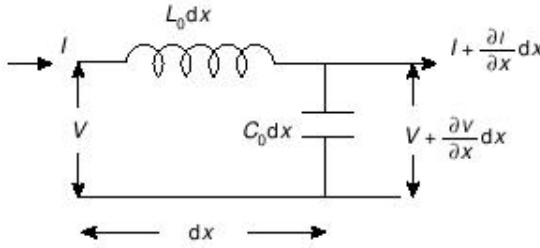
Pada bab ini kita akan membahas aliran arus  $I$  dan tegangan  $V$  pada suatu kabel, dengan menganalogikan keduanya sebagai gelombang. Ada dua jenis kabel yang paling umum, yaitu kabel kawat sejajar (*lecher wires*) dan kabel koaksial (*coaxial cables*). Kedua medium kabel dapat mengirim gelombang arus listrik dan tegangan AC dari generator AC ke terminal. Kita dapat menganalogikan  $V$  dan  $I$  sebagai gelombang, setidaknya karena nilai arus dan tegangan AC bervariasi menurut waktu dan ruang ( $V = V(x, t)$  dan  $I = I(x, t)$ ), sebagaimana gelombang. Arus yang mengalir pada kabel akan membentuk medan magnet dan medan listrik sehingga antara kedua kawat kabel terbentuk induktor dengan induktansi diri per satuan panjang  $L_0$  (henry/meter) dan kapasitor dengan kapasitansi per satuan panjang  $C_0$  (farad/meter). Kecepatan gelombang dari  $I$  dan  $V$  akan ditentukan oleh  $L_0$  dan  $C_0$ .

Kita tinjau kabel yang tidak memiliki hambatan  $R$  (yang dikenal sebagai *lossless cable*). Pada kasus ini, kabel berlaku sebagai jalur transmisi ideal, seperti diperlihatkan pada Gambar 7.1. Kita sekarang akan mencoba menurunkan “persamaan gelombang” untuk  $I$  dan  $V$ . Pada jalur transmisi ideal berlaku

beda tegangan = tegangan jatuh dari induktansi diri

Secara matematis dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx = - (L_0 dx) \frac{\partial I}{\partial t},$$



Gambar 7.1: Jalur transmisi ideal

atau

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Persamaan di atas memberikan

$$dV = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} dx \quad (7.1)$$

$$dI = -\frac{1}{L_0} \frac{\partial V}{\partial x} dt \quad (7.2)$$

Persamaan arus yang mengalir juga dapat ditulis sebagai

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d(C_0 dx V)}{dt},$$

atau

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (7.3)$$

Sekarang kita dapat mencari persamaan gelombang untuk  $V$ . Dengan substitusi pers. (7.2) ke dalam (7.3), diperoleh

$$\frac{1}{\partial x} \left[ -\frac{1}{L_0} \frac{\partial V}{\partial x} dt \right] = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t},$$

atau

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (7.4)$$

Persamaan (7.4) menunjukkan bahwa baik  $V$  menjalar dengan kecepatan  $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ . Dengan cara yang sama (lihat soal) kita dapatkan persamaan untuk  $I$ ,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0. \quad (7.5)$$



**Contoh soal:**

Jika  $L_0$  adalah induktansi diri per satuan panjang dan  $C_0$  adalah kapasitansi per satuan panjang, tunjukkan bahwa dimensi  $1/\sqrt{L_0 C_0}$  sama dengan dimensi kecepatan.

**Penyelesaian**

Kita misalkan  $L_{0t}$  adalah kapasitansi total dan  $C_{0t}$  adalah kapasitansi total. Dengan demikian maka

$$\dim \left[ \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \right] = \dim \left[ \frac{L}{\sqrt{L_{0t} C_{0t}}} \right] = \dim \left[ \frac{L}{T} \right] = \dim [\text{kecepatan}].$$

Pada perhitungan di atas telah dipakai konsep bahwa  $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_{0t} C_{0t}}}$ .

**Soal:**

Dengan substitusi pers. (7.1) ke dalam (7.3), carilah persamaan umum gelombang arus dan turunkan ungkapan untuk kecepatannya.

**Contoh soal:**

Carilah ungkapan kecepatan pada kabel koaksial.

**Penyelesaian**

Untuk kabel koaksial, didapatkan  $C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(r_2/r_1)}$  dan  $L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$ , sehingga

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

Nilai ini sama dengan nilai kecepatan gelombang elektromagnetik pada bahan. Untuk polythene,  $\mu_r = 1$  dan  $\epsilon_r = 10$ , sehingga  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 10}} \approx \frac{c}{3}$ .

Sekarang kita akan cari solusi persamaan gelombang untuk  $V$  (Persamaan (7.4)) dan  $I$  (Persamaan (7.5)). Untuk tegangan yang menjalar ke kanan, didapatkan

$$V_+ = V_{0+} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \right] \quad (7.6)$$

untuk  $V$  dan

$$I_+ = I_{0+} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \right] \quad (7.7)$$

untuk  $I$ . Pada kedua persamaan terakhir, tanda  $+$  menunjukkan gelombang yang menjalar ke kanan.

Berikutnya kita hitung impedansi untuk gelombang ke kanan. Dari hubungan  $\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}$ , didapatkan  $\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}$  atau  $-V'_+ = -vL_0 I'_+$ . Integrasi dari persamaan di atas menghasilkan  $V_+ = vL_0 I_+$ . Seperti kita ketahui, impedansi adalah rasio tegangan terhadap arus,

$$Z_0 = \frac{V_+}{I_+} = vL_0 = \frac{1}{vC_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (7.8)$$

**Contoh soal:**

Carilah ungkapan impedansi gelombang pada kabel koaksial.

**Penyelesaian**

Untuk kabel koaksial, didapatkan  $C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(r_2/r_1)}$  dan  $L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$ , sehingga

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

**Contoh soal:**

Carilah ungkapan impedansi gelombang pada kabel *lecher*.

**Penyelesaian**

Untuk kabel *lecher* dengan jari-jari  $r$  dan jarak separasi  $d$ , maka kapasitansinya adalah

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln(d/r)}.$$

Dengan demikian, impedansinya adalah

$$Z = \frac{1}{vC} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\pi\epsilon}{\ln(d/r)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{d}{r}\right).$$

**Contoh soal:**

Carilah ungkapan impedansi untuk gelombang ke kiri.

**Penyelesaian**

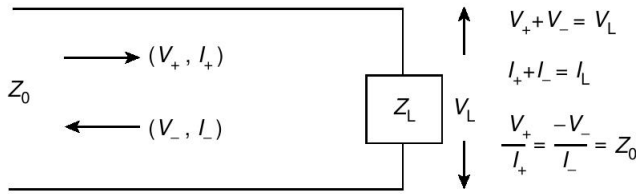
Persamaan  $V$  dan  $I$  untuk gelombang yang menjalar ke kiri berturut-turut adalah  $V_- = V_{0-} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt+x)\right]$  dan  $I_- = I_{0-} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt+x)\right]$ . Dari hubungan  $\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}$ , didapatkan

$V'_- = -vL_0I'_-$ . Integrasi dari persamaan di atas menghasilkan  $V_- = -vL_0I_-$ , atau

$$Z_0 = \frac{V_-}{I_-} = -vL_0 = -\frac{1}{vC_0} = -\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

## 7.2 Pantulan pada ujung jalur transmisi

Suatu gelombang datang ( $V_+, I_+$ ) melewati suatu kabel dengan impedansi  $Z_0$  dan kemudian melewati beban dengan impedansi  $Z_L$ , seperti diperlihatkan pada Gambar 7.2. Permasalahan ini identik dengan problem gelombang yang melewati bidang batas 2 medium. Pada kasus ini, sebagian gelombang akan dipantulkan pada ujung jalur transmisi sehingga menghasilkan ( $V_-, I_-$ ), dan sebagian yang lain akan ditransmisikan sehingga menghasilkan ( $V_L, I_L$ ). Syarat batas yang harus dipenuhi adalah



Gambar 7.2: Pantulan pada ujung jalur transmisi

$$V_+ + V_- = V_L \quad (7.9)$$

$$I_+ + I_- = I_L \quad (7.10)$$

$$\frac{V_+}{I_+} = Z_0 \quad \frac{V_-}{I_-} = -Z_0 \quad \frac{V_L}{I_L} = Z_L \quad (7.11)$$

Dengan memanfaatkan syarat batas di atas, didapatkan

- Koefisien refleksi amplitudo tegangan  $\frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$
- Koefisien refleksi amplitudo arus  $\frac{I_-}{I_+} = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$
- Koefisien transmisi amplitudo tegangan  $\frac{V_L}{V_+} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}$
- Koefisien transmisi amplitudo arus  $\frac{I_L}{I_+} = \frac{2Z_0}{Z_L + Z_0}$

**Contoh soal:**

Buktikan bahwa  $\frac{I_L}{I_+} = \frac{2Z_0}{Z_L + Z_0}$ .

**Penyelesaian**

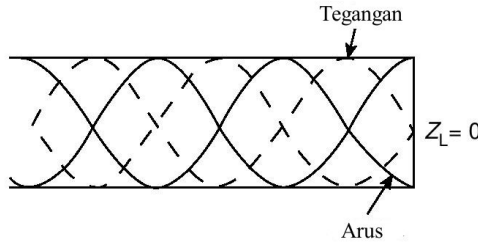
Substitusi Persamaan (7.11) ke dalam Persamaan (7.9) menghasilkan  $(I_+ - I_-)Z_0 = I_L Z_L$  atau  $I_+ - I_- = I_L \frac{Z_L}{Z_0}$ . Dengan menjumlahkan persamaan terakhir dan Persamaan (7.10), didapatkan  $2I_+ = \left(\frac{Z_L}{Z_0} + 1\right) I_L$  atau  $\frac{I_L}{I_+} = \frac{2Z_0}{Z_L + Z_0}$ .

**Soal:**

Buktikan bahwa  $\frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$ ,  $\frac{I_-}{I_+} = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$ , dan  $\frac{V_L}{V_+} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}$ .

**Soal:**

Apa yang terjadi jika  $Z_L = Z_0$ ?



Gambar 7.3: Jalur transmisi pendek

Sekarang kita tinjau kasus ketika tidak ada beban atau  $Z_L = 0$ . Kasus ini dikenal sebagai jalur transmisi rangkaian pendek, seperti diperlihatkan pada Gambar 7.3. Pada kasus tersebut  $Z_L = 0$  sehingga  $V_L = V_+ + V_- = 0$  atau

$$V_- = -V_+.$$

Pada setiap posisi  $x$  berlaku

$$V_+ = Z_0 I_+ = V_{0+} e^{i(\omega t - kx)},$$

dan

$$V_- = -Z_0 I_- = V_{0-} e^{i(\omega t + kx)},$$

di mana  $V_{0-} = V_{0+}$ . Pada setiap posisi  $x$  akan diperoleh

$$V_x = V_+ + V_- = V_{0+} (e^{-ikx} - e^{ikx}) e^{i\omega t} = -2iV_{0+} \sin kx e^{i\omega t} \quad (7.12)$$

$$I_x = I_+ + I_- = \frac{V_{0+}}{Z_0} \left( e^{-ikx} + e^{ikx} \right) e^{i\omega t} = \frac{2V_{0+}}{Z_0} \cos kx e^{i\omega t}. \quad (7.13)$$

**Contoh soal (Pain Problem 7.5):**

Tunjukkan impedansi pada jalur transmisi pada  $x$  adalah

$$Z_x = Z_0 \frac{Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}}{Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}},$$

di mana  $\gamma$  adalah konstanta propagasi dan  $A$  dan  $B$  adalah amplitudo arus pada  $x = 0$ . Pada  $x = l$ , impedansinya adalah

$$Z_l = Z_L \frac{Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}}{Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l}}.$$

**Penyelesaian**

Terlebih dahulu kita definisikan arus dan tegangan pada arah  $x$ -positif dan  $x$ -negatif

- Arus pada arah  $x$ -positif:  $I_+ = I_{0+}e^{(\omega t - \gamma x)} = Ae^{-\gamma x}$ 
  - Arus pada arah  $x$ -negatif:  $I_- = I_{0-}e^{(\omega t + \gamma x)} = Be^{\gamma x}$
  - Tegangan pada arah  $x$ -positif:  $V_+ = I_+ Z_0 = Z_0 Ae^{-\gamma x}$
  - Tegangan pada arah  $x$ -negatif:  $V_- = -I_- Z_0 = -Z_0 Be^{\gamma x}$

Dengan demikian, impedansi pada posisi  $x$  adalah

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{V(x)}{I(x)} \\ &= \frac{V_+ + V_-}{I_+ + I_-} \\ &= \frac{Z_0 Ae^{-\gamma x} + (-Z_0 Be^{\gamma x})}{Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}} \\ &= Z_0 \frac{Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}}{Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}}. \end{aligned}$$

Jika jalur transmisi memiliki panjang  $l$  dengan beban  $Z_L$ , maka

$$Z_l = Z_L \frac{Ae^{-\gamma(l-0)} - Be^{\gamma(l-0)}}{Ae^{-\gamma(l-0)} + Be^{\gamma(l-0)}} = Z_L \frac{Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}}{Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l}}.$$

**Soal (Pain Problem 7.6):**

Tunjukkan impedansi pada jalur transmisi pada  $x$  (problem 7.5) dapat dinyatakan sebagai

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_0 \sinh(\gamma l) + Z_L \cosh(\gamma l)}{Z_0 \cosh(\gamma l) + Z_L \sinh(\gamma l)}.$$

**Soal (Pain Problem 7.7):**

Tunjukkan bahwa pada problem 7.6, akan didapatkan hasil

$$Z_{sc} = Z_0 \tanh(\gamma l)$$

untuk rangkaian terhubung pendek dan

$$Z_{op} = Z_0 \coth(\gamma l)$$

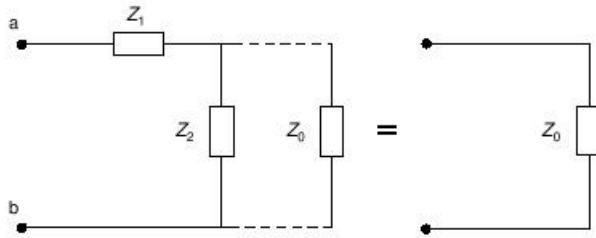
untuk rangkaian terbuka.

**Soal (Pain Problem 7.9):**

Tunjukkan bahwa impedansi karakteristik  $Z_0$  akan *matching* dengan impedansi beban  $Z_L$  dengan menambahkan kabel sepanjang seperempat panjang gelombang dengan impedansi  $Z_m^2 = Z_0 Z_L$ .

### 7.3 Jalur transmisi sebagai filter

Sekarang kita tinjau suatu kasus di mana kabel dengan impedansi  $Z_1$  diberi beban dengan impedansi  $Z_2$ . Selanjutnya beban tersebut dirangkai secara paralel dengan beban lain dengan impedansi  $Z_0$ , seperti diperlihatkan pada Gambar 7.4. Di sini kita harus memilih nilai  $Z_0$  sehingga impedansi totalnya sama dengan  $Z_0$ . Dari gambar di atas, diperoleh



Gambar 7.4: Jalur transmisi sebagai filter.

$$Z_1 + \left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_0} \right)^{-1} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_0}{Z_2 + Z_0} = Z_0,$$

sehingga diperoleh

$$Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}. \quad (7.14)$$

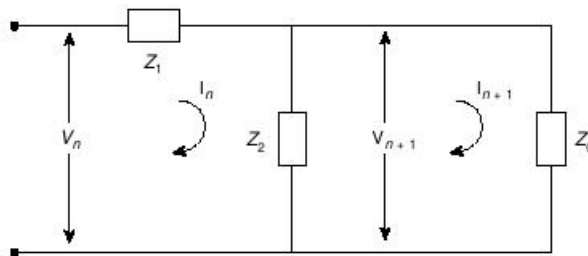
Jika kita ukur mulai titik tengahnya, akan diperoleh  $Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}$ .

#### Contoh soal:

Buktikan persamaan (7.14).

#### Penyelesaian

Dari persamaan  $Z_1 + \frac{Z_2 Z_0}{Z_2 + Z_0} = Z_0$ , didapatkan  $Z_1 Z_2 + Z_1 Z_0 + Z_2 Z_0 = Z_0 Z_2 + Z_0^2$  atau  $Z_0^2 - Z_1 Z_0 - Z_1 Z_2 = 0$ . Dengan cemikian, maka  $Z_0 = \frac{1}{2} \left[ Z_1 \pm \sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2} \right] = Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}$ .



Gambar 7.5: Konstanta propagasi

Berikutnya kita akan menghitung konstanta propagasi  $\alpha$ , yaitu rasio tegangan pada  $Z_0$  dan tegangan pada  $Z_1$ . Dari Gambar 7.5 didapatkan  $V_n = I_n Z_0$  dan  $V_n - V_{n+1} = V_n \frac{Z_1}{Z_0}$ , sehingga

$$\alpha = \frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{V_n - V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0}.$$

Dengan memanfaatkan nilai  $Z_0$  dari Persamaan (7.14), maka didapatkan

$$\alpha = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} - \left[ \left( 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (7.15)$$

#### Contoh soal:

Turunkan Persamaan (7.15),

#### Penyelesaian

Kita mulai dengan definisi  $\alpha$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0} = \frac{\frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} - Z_1}{\frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} - \frac{Z_1}{2}}{\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} + \frac{Z_1}{2}} \times \frac{\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} - \frac{Z_1}{2}}{\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} - \frac{Z_1}{2}} \\ &= \frac{\left( \frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2 \right) - Z_1 \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} + \frac{Z_1^2}{4}}{\left( \frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2 \right) - \frac{Z_1^2}{4}} \\ &= \frac{Z_1}{4Z_2} + 1 - \frac{1}{Z_2} \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} + \frac{Z_1}{4Z_2} \\ &= 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} - \left[ \frac{Z_1^2}{4Z_2^2} + \frac{Z_1}{Z_2} \right]^{1/2} \\ \alpha &= \left( 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \right) - \left[ \left( 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Sekarang kita lihat kembali Persamaan (7.15). Pada persamaan tersebut, dapat terjadi 2 kemungkinan, yaitu (i)  $Z_1$  dan  $Z_2$  keduanya bernilai imajiner, atau (ii)  $Z_1$  dan  $Z_2$  keduanya bernilai riil sehingga  $Z_1/Z_2$  selalu riil. Untuk kasus kedua bisa dibedakan atas 2 kondisi,



yaitu

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 &\geq 1 \Rightarrow \alpha \text{ riil} \\ \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 &< 1 \Rightarrow \alpha \text{ kompleks} \end{aligned}$$

Kita mulai dengan mendiskusikan kasus  $\alpha$  riil. Syarat  $\alpha$  riil adalah  $\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 \geq 1$  atau  $\frac{Z_1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) \geq 0$ . Karena  $\left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) > 0$ , maka ada tiga kemungkinan nilai  $\frac{Z_1}{4Z_2}$ , yang pada gilirannya mempengaruhi  $\alpha$ , yaitu

- $\frac{Z_1}{4Z_2} = 0$  sehingga  $\alpha = 1$
- $\frac{Z_1}{4Z_2} > 0$  sehingga  $\alpha = 0$

Kedua kasus tersebut dapat disederhanakan sebagai  $\frac{Z_1}{4Z_2} \geq 0$  sehingga  $0 < \alpha < 1$ . Pada kedua kasus tersebut berlaku (i) arus menurun, dan (ii) tidak ada perubahan fase.

- $\frac{Z_1}{4Z_2} < -1$  sehingga  $\alpha \leq 0$

Pada kasus ini berlaku (i) arus menurun, dan (ii) ada perubahan fase.

#### Contoh soal:

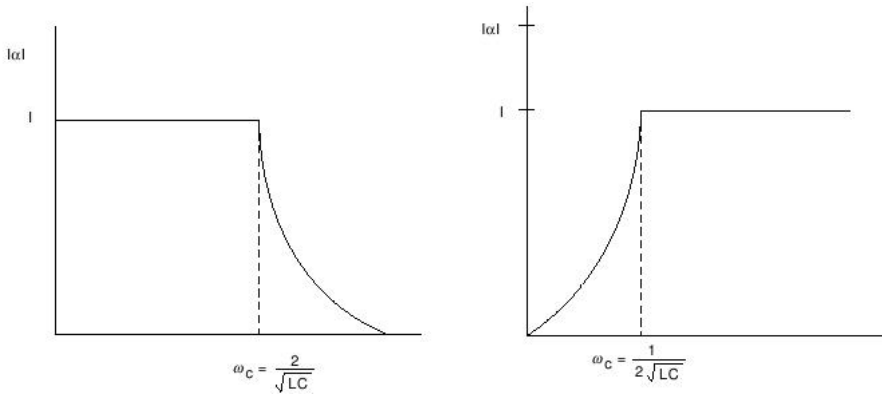
Buktikan bahwa  $\alpha = 0$  untuk kasus  $\frac{Z_1}{4Z_2} > 0$ .

#### Penyelesaian

Misalkan  $\frac{Z_1}{4Z_2} = x$ , maka

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + 2x - \left[(1 + 2x)^2 - 1\right]^{1/2} \\ &= 1 + 2x - [4x + 4x^2]^{1/2} \\ &= 1 + 2x - 2x \left[\frac{1}{x} + 1\right]^{1/2} \\ &\approx 1 + 2x - 2x \left[1 - \frac{1}{2x}\right] \\ &= 1 + 2x - [2x - 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berikutnya kita tinjau kasus  $\alpha$  kompleks. Syarat  $\alpha$  kompleks adalah  $\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 < 1$  atau  $\frac{Z_1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) < 0$ . Ini berarti bahwa

Gambar 7.6: Kasus  $|\alpha| = 1$ 

$-1 < \frac{Z_1}{4Z_2} < 0$ , yang memberikan nilai  $\alpha$ , sbb

$$\alpha = \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) - i \left[1 - \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2\right]^{1/2}$$

Jika  $|\alpha| = 1$ , maka

$$\alpha = \cos \beta - i \sin \beta,$$

di mana  $\cos \beta = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$ . Ada 2 kasus yang bisa ditinjau, yaitu:

- Contoh kasus 1: Gambar 7.6 (kiri). Pada kasus ini,  $Z_1 = i\omega L$  dan  $Z_2 = 1/(i\omega C)$ . Dengan demikian,  $|\alpha| = 1$  bila  $0 \leq \omega^2 LC \leq 4$  atau  $\omega < \omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ .
- Contoh kasus 2: 7.6 (kanan). Pada kasus ini  $Z_1 = 1/(i\omega C)$  dan  $Z_2 = i\omega L$ . Dengan demikian  $|\alpha| = 1$  bila  $0 \leq \frac{1}{\omega^2 LC} \leq 4$  atau  $\omega > \omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ .

#### Contoh soal (Problem 7.12):

Sebuah jalur transmisi memiliki  $Z_1 = i\omega L$  dan  $Z_2 = (i\omega C)^{-1}$ . Jika pergeseran fase per seksi  $\beta$  sangat kecil, tunjukkan bahwa  $\beta = k$  dan kecepatan fase tidak bergantung pada frekuensi.

#### Penyelesaian

Jika  $\beta$  sangat kecil, maka

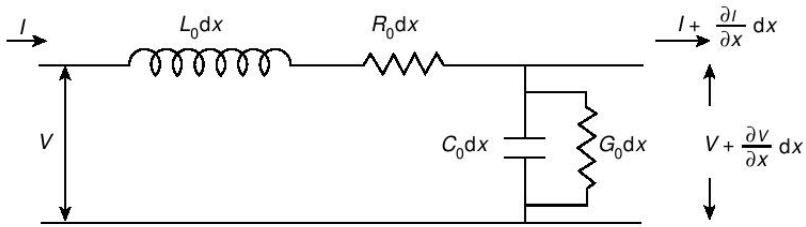
$$\sin \beta = \left[1 - \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2\right]^{1/2} \approx \beta.$$

Nilai  $\sin \beta$  yang kecil juga berarti  $\left[1 - \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2\right]$  mendekati nol, atau juga berarti  $\frac{Z_1}{2Z_2}$  sangat kecil. Selanjutnya dengan memasukkan  $Z_1 = i\omega L$  dan  $Z_2 = (i\omega C)^{-1}$ , didapatkan

$$\beta \approx \left[1 - \left(1 + 2\frac{Z_1}{2Z_2}\right)\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\omega^2 LC} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}} = k.$$

## 7.4 Jalur transmisi dengan resistansi

Sekarang kita tinjau jalur transmisi dengan resistansi, seperti diperlihatkan pada Gambar 7.7. Jika  $V = V_0 e^{i\omega t}$  dan  $I = I_0 e^{i\omega t}$ , maka tegangan dan arus per satuan panjang sepanjang kabel adalah



Gambar 7.7: Jalur transmisi dengan resistansi

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} - R_0 I = -i\omega L_0 I - R_0 I = -(R_0 + i\omega L_0) I \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t} - G_0 V = -i\omega C_0 V - G_0 V = -(G_0 + i\omega C_0) V \quad (7.17)$$

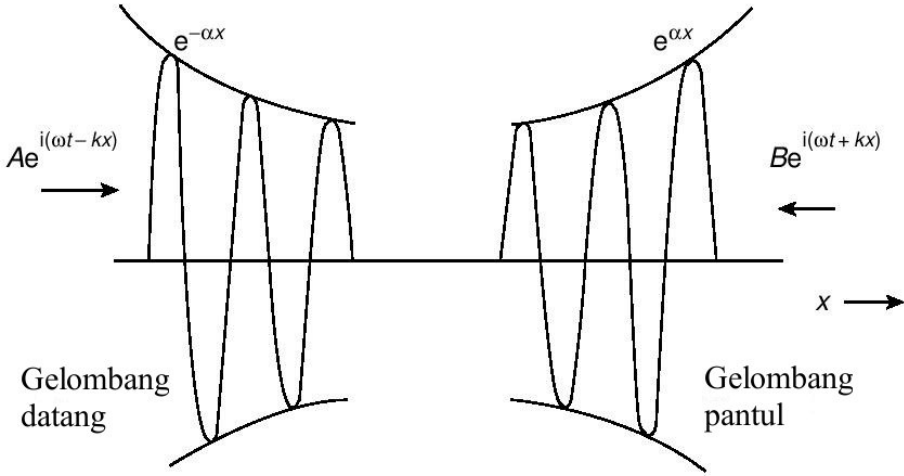
Dari persamaan di atas didapatkan

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -(R_0 + i\omega L_0) \frac{\partial I}{\partial x} = (R_0 + i\omega L_0) (G_0 + i\omega C_0) V = \gamma^2 V,$$

atau

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \gamma^2 V = 0.$$

Di mana  $\gamma$  adalah konstanta propagasi yang nilainya adalah  $\gamma^2 = (R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) + i\omega (L_0 G_0 + R_0 C_0)$ . Jika  $\gamma$  dimodelkan sebagai  $\gamma = \alpha + ik$ , maka  $\gamma^2 = (\alpha^2 - k^2) + i2\alpha k$ , di mana kita dapatkan koefisien atenuasi  $\alpha$  diberikan oleh  $\alpha^2 = R_0 G_0$  dan bilangan gelombang  $k$



Gambar 7.8: Profil tegangan pada jalur transmisi dengan resistansi

diberikan oleh  $k^2 = \omega^2 L_0 C_0$ . Dengan mengingat  $V = V_0$ , maka solusi persamaan di atas adalah

$$\begin{aligned} V &= (Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}) e^{i\omega t} \\ &= Ae^{-\alpha x} e^{i(\omega t - kx)} + Be^{\alpha x} e^{i(\omega t + kx)}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Profil tegangan ditunjukkan pada Gambar

Selanjutnya kita rumuskan untuk arus dan daya. Dengan cara yang sama, didapatkan

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -(G_0 + i\omega C_0) \frac{\partial V}{\partial x} = (R_0 + i\omega L_0) (G_0 + i\omega C_0) I = \gamma^2 I,$$

atau

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \gamma^2 I = 0.$$

Solusinya tentu saja sama, yaitu

$$I = A' e^{-\gamma x} e^{i\omega t} + B' e^{\gamma x} e^{i\omega t}. \quad (7.19)$$

Dengan demikian dayanya adalah

$$P = IV \propto e^{-2\alpha x}, \quad (7.20)$$

yang menunjukkan kehilangan daya dengan koefisien  $2\alpha$ .

Berikutnya kita hitung impedansi. Dengan memanfaatkan Persamaan. (7.19), didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial x} &= \frac{\partial I}{\partial x} (A'e^{-\gamma x}e^{i\omega t} + B'e^{-\gamma x}e^{i\omega t}) \\ &= -\gamma (A'e^{-\gamma x}e^{i\omega t} - B'e^{-\gamma x}e^{i\omega t}) \\ &= -\gamma (I_+ - I_-).\end{aligned}$$

Selanjutnya, menurut Persamaan. (7.2)  $\frac{\partial I}{\partial x} = -(C_0 + i\omega G_0)V$ , sehingga didapatkan

$$-\gamma (I_+ - I_-) = -(G_0 + i\omega C_0)V,$$

atau

$$\frac{\gamma}{(G_0 + i\omega C_0)} (I_+ - I_-) = V_+ + V_-.$$

Dengan demikian didapatkan impedansi

$$\text{impedansi} = \begin{cases} Z'_0 = \sqrt{\frac{R_0 + i\omega L_0}{G_0 + i\omega C_0}} & \text{untuk gel ke kiri} \\ -Z'_0 = -\sqrt{\frac{R_0 + i\omega L_0}{G_0 + i\omega C_0}} & \text{untuk gel ke kanan} \end{cases} \quad (7.21)$$

**Contoh soal (Problem 7.13):**

Dalam jalur transmisi terdisipasi dengan  $\frac{R_0}{\omega L_0}$  dan  $\frac{G_0}{\omega C_0}$  sangat kecil, tunjukkan bahwa konstanta pelemahannya adalah  $\alpha = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$  dan  $k = \omega \sqrt{L_0 C_0} = \frac{\omega}{c}$ . Untuk  $G_0 = 0$ , tunjukkan bahwa  $Q = \frac{k}{2\alpha}$ .

**Penyelesaian**

Konstanta propagasi diberikan oleh

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)} \\ &= \sqrt{(i\omega L_0) \left( \frac{R_0}{i\omega L_0} + 1 \right) (i\omega C_0) \left( \frac{G_0}{i\omega C_0} + 1 \right)} \\ &= i\omega \sqrt{L_0 C_0} \left( 1 + \frac{R_0}{i\omega L_0} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{G_0}{i\omega C_0} \right)^{1/2} \\ &\approx i\omega \sqrt{L_0 C_0} \left( 1 + \frac{R_0}{i2\omega L_0} \right) \left( 1 + \frac{G_0}{i2\omega C_0} \right) \\ &= i\omega \sqrt{L_0 C_0} \left( 1 - \frac{R_0 G_0}{4\omega L_0 C_0} + \frac{1}{i\omega} \left( \frac{R_0}{2L_0} + \frac{G_0}{2C_0} \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx i\omega\sqrt{L_0C_0}\left(1 + \frac{1}{i\omega}\left(\frac{R_0}{2L_0} + \frac{G_0}{2C_0}\right)\right) \\
&= i\omega\sqrt{L_0C_0} + \sqrt{L_0C_0}\left(\frac{R_0}{2L_0} + \frac{G_0}{2C_0}\right) \\
&= \left(\frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\right) + i\omega\sqrt{L_0C_0}
\end{aligned}$$

Bandungkan dengan ungkapan  $\gamma = \alpha + ik$ , maka didapatkan  $\alpha = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$  dan  $k = \omega\sqrt{L_0C_0} = \frac{\omega}{c}$ .

**Soal (Problem 7.14):**

Dengan mengekspansikan suku-sukunya, tunjukkan bahwa solusi problem 7.13 dapat dinyatakan sebagai  $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$ , di mana  $Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$  dan bernilai riil.

## 7.5 Absorpsi Energi

Kita akhiri bab ini dengan meninjau 5 persamaan yang terkena dalam fisika. Untuk kasus 1 dimensi, persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

- persamaan Laplace:  $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$
- persamaan Poisson:  $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \text{konstanta}$
- persamaan Helmholtz:  $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \text{konstanta} \times \phi$
- persamaan difusi:  $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = (\text{konstanta positif}) \times \frac{\partial\phi}{\partial t}$
- persamaan gelombang:  $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = (\text{konstanta positif}) \times \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$

Kita tinjau persamaan difusi. Tipikal persamaan difusi dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{d} \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (7.22)$$

di mana  $d$  adalah difusivitas yang dimensinya adalah  $L^2T^{-1}$ . Nilai  $d$  terantung pada proses fisis yang terjadi, yaitu

- untuk proses viskositas,  $d = \frac{\eta}{\rho}$ , di mana  $\eta$  = koefisien viskositas dan  $\rho$  = rapat massa

- untuk proses konduktivitas termal,  $d = \frac{K}{\rho C_p}$ , di mana  $K$  = koefisien konduksi termal,  $\rho$  = rapat massa, dan  $C_p$  = panas jenis pada tekanan tetap
- untuk medan magnetik tak uniform,  $d = (\mu\sigma)^{-1}$ , di mana  $\mu$  = permeabilitas dan  $\sigma$  = konduktivitas
- untuk gerak Brown,  $d = \frac{\bar{x}^2}{t} = \frac{2RT}{6\pi\eta N}$ , di mana  $\bar{x}$  = jarak rata-rata

Selanjutnya kita tinjau persamaan gelombang yang disertai difusi

Persamaan gelombang yang disertai difusi dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{1}{d} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (7.23)$$

Misalkan kita coba solusi dalam bentuk

$$\phi = \phi_m e^{i(\omega t - \gamma x)}.$$

Solusi di atas menghasilkan

$$-\gamma^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\omega}{d}.$$

Misalkan  $\gamma = k - i\alpha$  dengan  $\alpha \ll k$ , maka

$$\gamma^2 = k^2 - 2ik\alpha - \alpha^2 \approx k^2 - i2k\alpha.$$

Dengan membandingkan kedua persamaan terakhir, didapatkan  $\alpha = \frac{\omega}{d2k} = \frac{c}{2d}$ . Dengan demikian solusi gelombang dengan difusi adalah

$$\phi = \phi_m e^{-(c/2d)x} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (7.24)$$

#### Contoh soal (Problem 7.16):

Medan listrik  $H$  terlokalisir dalam medium konduktor elektrik dengan permeabilitas  $\mu$  dan konduktivitas  $\sigma$  akan berdifusi melalui medium dalam arah  $x$  dengan laju

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.$$

Tunjukkan bahwa konstanta peluruhan medan akan diberikan oleh  $L^2\mu\sigma$ , di mana  $L$  adalah dimensi medium. Tunjukkan bahwa untuk kasus tembaga dengan jari-jari 1 m, nilai konstantanya lebih kecil dari 100 s.

#### Penyelesaian

Persamaan gelombang diberikan oleh

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$$

atau

$$\mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$$

di mana  $\mu\sigma$  memiliki dimensi  $L^{-2}T$ , dengan  $(\mu\sigma)^{-1}$  dikenal sebagai konstanta difusi. Misalkan dilakukan pemisahan variabel, sehingga  $H = T(t)X(x)$ , maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{\mu\sigma}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2,$$

di mana  $\lambda$  adalah konstanta dengan dimensi  $L^{-1}$ . Persamaan untuk  $T$  adalah

$$\frac{dT}{T} = -\frac{1}{\mu\sigma} \lambda^2 dt,$$

yang solusinya adalah

$$T(t) = T_0 e^{-\frac{1}{\mu\sigma} \lambda^2 t} = T_0 e^{-\frac{1}{\mu\sigma} \lambda^2 t}.$$

Persamaan untuk  $X$  adalah

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0,$$

yang solusinya adalah

$$X(x) = X_0 e^{\pm i\lambda x}.$$

Dengan demikian solusi lengkapnya adalah

$$H(x, t) = X_0 e^{\pm i\lambda x} T_0 e^{-\frac{1}{\mu\sigma} \lambda^2 t} = H_0 e^{\pm i\lambda x} e^{-\frac{1}{\mu\sigma} \lambda^2 t} = H_0 e^{\pm ix/L} e^{-t/(L^2 \mu\sigma)}.$$

Persamaan terakhir menunjukkan sebuah gelombang dengan faktor atenuasi  $\tau = L^2 \mu\sigma$ . Dengan memasukkan harga yang ada, didapatkan  $\tau = (1^2) (1,26 \times 10^{-6}) (5,8 \times 10^7) = 73,08 \text{ s}$ .



# Bibliografi

- [1] H.J. Pain, The Physics of Vibrations and Waves, 6th ed., John Wiley & Sons, 2005.
- [2] G.C. King, Vibrations and Waves, Wiley, 2009
- [3] A.P. French, Vibrations and Waves, W.W. Norton and Company, 1971.
- [4] R.N. Chaudhuri, Waves and Oscillations, New Age International Pub., 2010.
- [5] A. Buffler, Lecture Notes on Vibrations and Waves.