Laget av Ane Sofie Espeset, Emilie G Sælen, Ingrid Jortveit, Ingrid Midttun og Ronja Bakketeig

Tea time

Som jenter flest er vi alle glade i gossip, så det obligatoriske møtet hver lørdag er det beryktede teselskapet. Vi møtes alle til samme tid, hvor vi drikker rykende fersk te og snakker om ukens gossip. Hver bidige gang klarer samtlige av jentene å brenne seg på tungen. I forrige ukes teselskap ble det snakket om hvordan vi skulle løse den beryktede matematikk obligen. I det en av oss brant oss på tungen, kom den fantastiske ideen opp om å kombinere tedrikking med den obligatoriske oppgaven, slik at vi senere er klar over hvor lang tid det tar før tevannet når den perfekte temperatur. For morroskyld fortsatte vi helt til vannet var blitt romtemperert.

Utregning

Vi skjønte fort at den enkleste måten å plotte kurven til Newtons avkjølingslov, var å gjøre det om til en generell funksjon. Som til og med barn i barnehagen vet, finner vi dette ved å regne Newtons avkjølingslov som en differentiallikning. Så da var det bare å sette i gang! Nedenfor ser du utregningen, hvor det i lyserosa er en form for mellomregning.

$\dot{T}(t) = \alpha(T_K - T(t)) \qquad T(0) = T_0$

$\dot{T}(t) = \alpha T_K - \alpha T(t)$ = funksjon av t

$\dot{T}(t) + \alpha T(t) = \alpha T_K$

$\dot{T}(t) e^{\alpha t} + \alpha T(t) e^{\alpha t} = \alpha T_K e^{\alpha t} \quad | \cdot e^{\alpha t}$

Bruker produktregel for derivasjon (motsatt vei):

$\overset{\dot{u}}{\dot{T}(t)} \overset{v}{e^{\alpha t}} + \overset{u}{T(t)} \overset{\dot{v}}{\alpha e^{\alpha t}}$

$\frac{d}{dt}(u \cdot v) = \frac{d}{dt}(T(t) \cdot e^{\alpha t})$

$\frac{d}{dt}(T(t) \cdot e^{\alpha t}) = \alpha T_K e^{\alpha t} \quad | \int dt$

$\int \frac{d}{dt}(T(t) \cdot e^{\alpha t})\, dt = \int \alpha T_K e^{\alpha t}\, dt$

$e^{\alpha t} T(t) + c = \frac{\alpha T_K}{\alpha} e^{\alpha t} + c \quad | \cdot e^{-\alpha t}$

$T(t) = \frac{\alpha T_K}{\alpha} + ce^{-\alpha t}$

Generell løsning: $T(t) = T_K + ce^{-\alpha t}$

$T(0) = T_0$

$T_0 = T_K + ce^{-\alpha \cdot 0}$

$T_0 = T_K + ce^{0}$

$T_0 = T_K + c \cdot 1$

$T_0 = T_K + c$

$c = T_0 - T_K$

$T(t) = T_K + (T_0 - T_K)e^{-\alpha t}$

Romtemperatur = T_K = 25 °C

Starttemperatur = T_0 = 88 °C

Etter 180 minutter ($t = 180$) var temperaturen 26 °C ($T(180) = 26$)

$T(180) = 25 + (88 - 25)e^{-\alpha \cdot 180} = 26$

$\alpha = -\ln\left(\frac{26-25}{88-25}\right)$

$\alpha = 0{,}023$

Resultat av utregningen

Etter litt gøy regning endte vi til slutt opp med den generelle formelen:

$$T(t) = T_K + (T_0 - T_K) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$T_K = romtemperatur = 25\,°C$$
$$T_0 = starttemperatur = 88\,°C$$

Etter 180 minutter måtte vi avsluttet forsøket ettersom det var leggetid, men da var temperaturen nede på 26 °C. Det vil si at:

$$T(180) = 26$$

Ved hjelp av denne informasjonen, kunne vi ved hjelp av utregning finne ut at $\alpha = 0.023$. Vi har også laget et program i python nedenfor som regner ut α.

Verdier fra forsøket

Vi skrev ned hva den nye temperaturen var etter omtrent hvert minutt, og disse verdiene lagret vi i en egen tekstfil i python. Filen kalte vi for “verdier.txt”

```
0,88
2,81
3,79
4,76
5,74
6,72
7,70
8,69
9,67
10,66
11,64
12,63
13,61
14,60
15,59
16,58
17,57
18,56
19,55
20,55
21,54
22,53
23,52
24,51
25,50
26,50
27,49
28,49
29,48
30,47
31,47
32,46
33,46
34,45
35,45
36,44
37,44
38,43
39,43
40,42
41,42
42,41
43,41
44,41
45,40
46,40
47,40
48,39
49,39
50,39
51,38
52,38
53,38
54,37
55,37
56,37
57,37
58,36
59,36
60,36
61,36
62,36
63,35
64,35
65,35
66,35
67,34
68,34
69,34
70,34
72,33
75,33
81,32
85,31
90,31
95,30
101,30
104,29
110,29
130,28
140,27
160,27
165,26
180,26
```

Plotting av målte verdier

Først valgte vi å plotte grafen ut fra egne verdier:

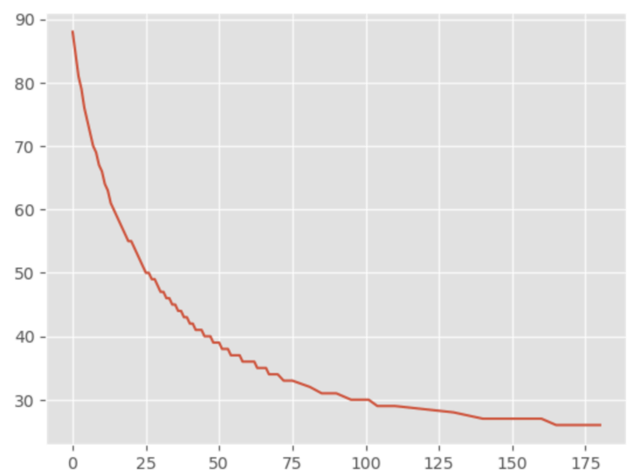
```
[8]: import numpy as np
     import matplotlib.pyplot as plt
     plt.style.use("ggplot")

     def read_data(filename):
         data  =  np.loadtxt(filename, delimiter = ",")
         tid = data[:,0]
         temp = data[:,1]
         return tid , temp
```

```
[9]: tid , temp = read_data("verdier.txt")
```

```
[10]: plt.plot(tid,temp)
```

```
[10]: [&lt;matplotlib.lines.Line2D at 0x7f7009465950&gt;]
```



Grafen henter inn verdiene fra filen “verdier.txt”, for å så helte inn verdiene “tid” som er i den første kolonnen (index = 0), og verdiene “temp” som er i den andre kolonnen (index = 1).

Utregning av α i python

Ved hjelp av programmet nedenfor kunne vi regne ut α:

```
[14]: # Finner alpha

      import math

      T_K = 25
      T_0 = 88
      T_t = 26
      t = 180

      alpha = -math.log( (T_t - T_K) / (T_0 - T_K) ) / t
      print("Varmeoverføringskoeffisienten α =", alpha)

      Varmeoverføringskoeffisienten α = 0.023017415146619626
```

Plotting av begge grafene

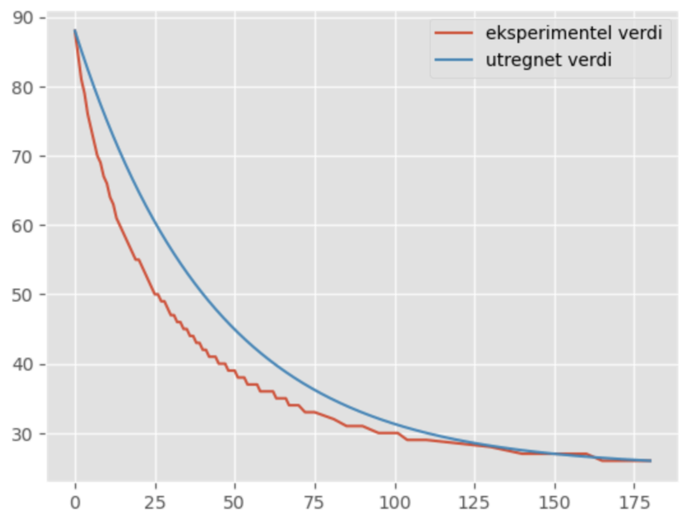
Vi definerte Newtons avkjølingslov som funksjonen vi hadde regnet ut tidligere. Vi ønsket at den skulle starte med en y-verdi lik 88, slik som i forsøket, og avslutte med en temperaturverdi lik 26. Vi ønsket at den skulle gå fra x-verdien 0 til x-verdien 180. I plottet nedenfor plotter vi både den eksperimentelle verdien som vi har funnet ut av gjennom forsøket (rød graf), og den utregnede verdien gjennom utregning av Newtons avkjølingslov (blå graf.)

```
[11]: def T(t,alpha,T0,Tk):
          return Tk + np.exp(-alpha * t) * (T0 -Tk)

[12]: t = np.linspace(0,180,1000)
      Tk = 25
      T0 = 88
      alpha = 0.023017415146619626

      plt.plot(tid,temp, label = "eksperimentel verdi")
      plt.plot(t,T(t,alpha,T0,Tk), label = "utregnet verdi")
      plt.legend()

      plt.show()
```



Konklusjon

Jo lengre vannet har vært i koppen, jo varmere blir koppen og da blir temperaturendringene lavere. Vi ser på vår graf at den synker fortere enn Newtons avkjølingslov. I starten vil vannet bruke energi på å varme opp koppen, som kan være grunnen til at våre verdier er lavere enn Newtons avkjølingslov. Gjennom litt prøving og testing fant vi ut at teen var best drikkenes når vannet var rundt 70℃. Med dette vet vi fra nå av at hver gang vi lager oss te må vi vente rundt 7 minutter.