Càlcul II

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

M. Carme Leseduarte
M. Dolors Llongueras
Antoni Magaña
Jordi Saludes

CURS 2014/2015

Índex

1 Corbes **6**

1.1 Parametrització d'una corba 6

1.2 El vector tangent a una corba 12

1.3 El tríedre de Frenet 21

1.4 La longitud d'arc 27

1.5 La curvatura d'una corba 30

Curvatura per a corbes planes en coordenades cartesianes 32

Curvatura per a corbes a l'espai 33

1.6 La torsió d'una corba 36

Les fórmules de Frenet-Serret 40

2 Funcions de diverses variables **45**

2.1 Camps escalars i camps vectorials 45

2.2 Nocions topològiques bàsiques 48

2.3 Representació gràfica de camps escalars 53

3 Càlcul diferencial **65**

3.1 Límits, límits direccionals i continuïtat 65

Límits 65

Límits direccionals 67

Continuïtat 68

3.2 Derivades direccionals 69

3.3 Derivades parcials. Vector gradient. Matriu jacobiana 72

3.4 Diferenciabilitat 76

3.5 La regla de la cadena 81

Càlcul ràpid de la derivada direccional 83

Una propietat geomètrica del gradient 84

3.6 Derivades d'ordre superior. La fórmula de Taylor d'ordre 2 86

Derivades d'ordre superior 86

La fórmula de Taylor d'ordre 2 89

3.7 Extrems relatius per a camps escalars 91

3.8 Extrems absoluts en un conjunt compacte 99

3.9 Extrems condicionats. Els multiplicadors de Lagrange 102
3.10 El teorema de la funció implícita 109
3.11 El teorema de la funció inversa 115

4 Càlcul integral **117**

4.1 Integrals dobles 117
La integral doble sobre rectangles 117
La integral doble sobre recintes més generals 122
4.2 El canvi de variable a la integral doble 127
El canvi de variable en general 127
El canvi a coordenades polars 129
4.3 Integrals triples 133
4.4 El canvi de variable a la integral triple 137
El canvi a coordenades cilíndriques 138
El canvi a coordenades esfèriques 139
4.5 Aplicacions de les integrals triples 140

5 Integrals de línia **143**

5.1 Integral d'un camp escalar sobre una corba 144

5.2 Integral d'un camp vectorial sobre una corba 147

5.3 Camps conservatius 155

5.4 El teorema de Green 164

6 Integrals de superfície **169**

6.1 Representació d'una superfície 169

6.2 Àrea d'una superfície parametritzada 180

6.3 Integral d'un camp escalar sobre una superfície 184

6.4 Integral d'un camp vectorial sobre una superfície 185

6.5 El teorema de la divergència 188

6.6 El teorema de Stokes 193

1 Corbes

1.1 Parametrització d'una corba

Tenim diferents maneres de determinar una corba, per exemple

- mitjançant una equació:
  (a) $x^2+3y^2=1$ (definida implícitament)
  (b) $y=3+\sqrt{x}$ (definida explícitament en coordenades cartesianes)
  (c) $r=2(1-\cos\alpha)$ (definida explícitament en coordenades polars)
- com la intersecció de dues superfícies:
  (a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=11 & \text{(esfera)} \\ x+y+z=3 & \text{(pla)} \end{cases}$
  (b) $\begin{cases} z=x^2+y^2 & \text{(paraboloide)} \\ y=z & \text{(pla)} \end{cases}$
- amb una parametrització:
  (a) $r(t)=(t-\sin t, 1-\cos t), \quad t\in[0,6\pi]$
  (b) $r(t)=(\cos t, \sin t, t), \quad t\in\mathbb{R}$

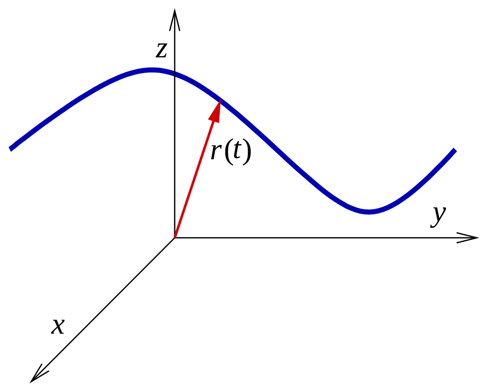
En aquest tema considerarem usualment corbes donades per parametritzacions.

Definició 1.1 Una funció vectorial $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ o, simplement,

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

derivable en I (essent I un interval, semirecta o tot $\mathbb{R}$) serveix com a *forma paramètrica per a una corba* C, en el sentit que, quan t recorre l'interval I, l'extrem del vector $r(t)$ descriu la corba C.

Direm que C és una *corba derivable (o diferenciable)* i que està *parametritzada* per $r(t)$. O també, que $r(t)$ és una parametrització de la corba C.



Identificarem $r(t)$ amb el punt extrem del vector i parlarem del punt $r(t)$ de la corba.

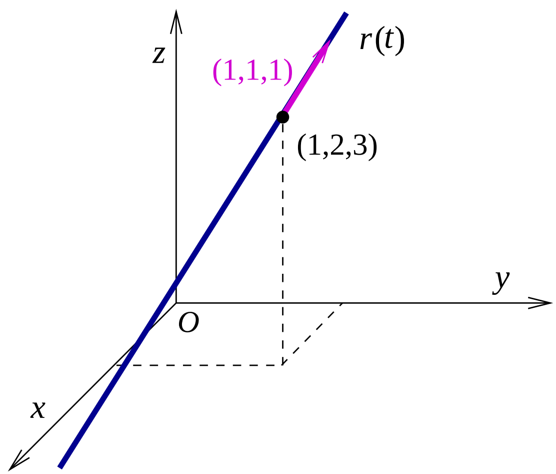
La parametrització $r(t)$, $t \in I$ associa a la corba una *orientació*, que representa el sentit en què es recorre la corba segons avança t en I. Insistirem més endavant sobre això.

Exemples 1.2 (a) La funció vectorial $r(t) = (1,2,3) + t(1,1,1)$, o també

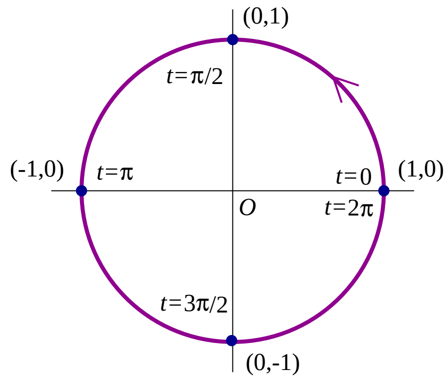
$$r(t) = (1+t, 2+t, 3+t) \text{ o, fins i tot, } r(t) = (1+t)\vec{i} + (2+t)\vec{j} + (3+t)\vec{k}$$

serveix com a forma paramètrica per a una recta, la que passa pel punt $(1,2,3)$ i té vector director $\vec{u} = (1,1,1)$.

Quan t varia a tot $\mathbb{R}$, l'extrem del vector de posició, $r(t)$, descriu una recta.



(b) La funció $r(t) = (\cos t, \sin t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ serveix com a forma paramètrica per a la circumferència centrada a l'origen i de radi 1 (al pla).



$$\begin{array}{llll}
\text{Per a} & t = 0 & \text{estem al punt} & (1,0), \\
\text{per a} & t = \frac{\pi}{4} & \cdots & (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \\
\text{per a} & t = \frac{\pi}{2} & \cdots & (0,1), \\
\text{per a} & t = \pi & \cdots & (-1,0), \\
\text{per a} & t = \frac{3\pi}{2} & \cdots & (0,-1), \\
\text{per a} & t = 2\pi & \cdots & (1,0).
\end{array}$$

Com que $r(0) = r(2\pi)$, es tracta d'una corba tancada. En aquest cas, la circumferència és recorreguda en sentit antihorari o positiu (contrari al de les agulles del rellotge).

Observació 1.3 Diverses parametritzacions poden originar la mateixa corba. Per exemple, la funció $s(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ amb $t \in [0, \pi]$ també és una parametrització de la circumferència centrada a l'origen i de radi 1 (recorreguda en sentit antihorari). De fet, $u(t) = (\cos \omega t, \sin \omega t)$ amb $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ és una parametrització d'aquesta circumferència per a tot $\omega \neq 0$.

S'ha de diferenciar entre la corba i la parametrització.

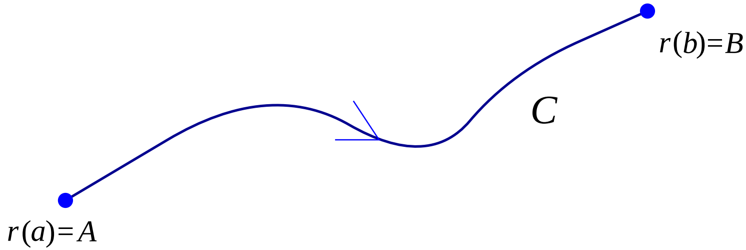
Exemples 1.4 (a) La funció $s(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ també dóna lloc a la circumferència centrada a l'origen i de radi 1. Tanmateix, aquesta parametrització fa que la circumferència es recorri dues vegades en sentit antihorari.

(b) Sabeu trobar una parametrització diferent de l'anterior de la recta que passa pel punt $(1, 2, 3)$ i té vector director $(1, 1, 1)$?

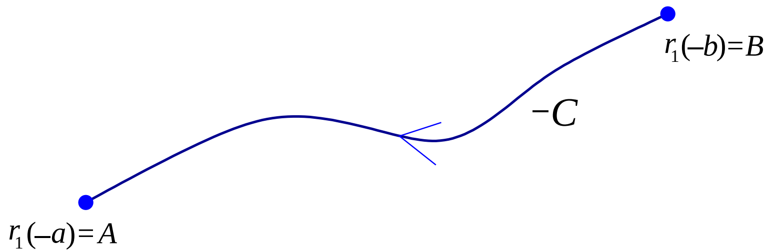
(c) I una altra parametrització de la circumferència del primer apartat?

Si tenim una corba parametritzada per $r(t)$, una forma de trobar una altra parametrització diferent és canviant-li l'orientació. A continuació exposarem dues maneres de com fer-ho. (Aquesta no és l'única manera de trobar noves parametritzacions, però és útil de vegades.)

Sigui C una corba parametritzada per $r(t)$, $t \in [a,b]$ (amb una certa orientació induïda per aquesta parametrització).



(A) La parametrització $r_1(t) = r(-t)$, $t \in [-b,-a]$ inverteix l'orientació de la corba. De fet, determina la mateixa corba (mateix gràfic) però recorreguda en sentit contrari. La podem denotar, si cal, per $-C$.



(B) La parametrització $r_2(t) = r(a+b-t)$, $t \in [a,b]$ també inverteix l'orientació de C donada per $r(t)$.

Per acabar aquesta secció, vegem més exemples de corbes. L'últim és especialment interessant.

Exemples 1.5 (a) Quina és la corba representada per $r(t) = (2\cos t, -3\sin t)$ quan $0 \le t \le 2\pi$?

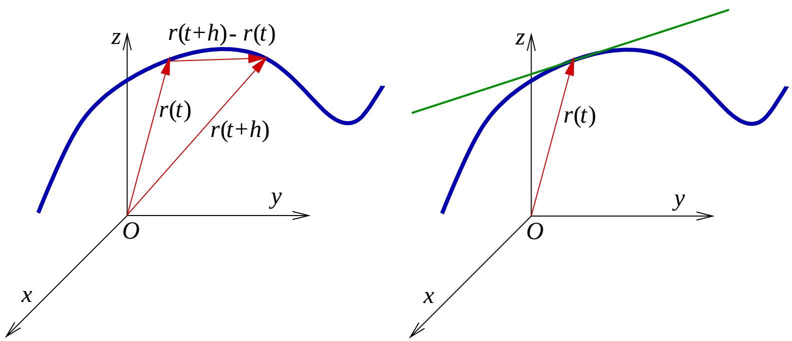
(b) Quina és la corba representada per $r(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ quan $0 \le t \le 4\pi$?

(c) Com es podria donar una parametrització de la paràbola $y = x^2 + 2x + 1$?

1.2 El vector tangent a una corba

Definició 1.6 Sigui C una corba derivable parametritzada per $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. El vector $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, si no és nul, es diu que és *tangent* a C en el punt $r(t)$.

Aquesta definició es pot justificar gràficament.



Les corbes de classe $\mathcal{C}^1$ amb vector tangent no nul a cada punt es diuen *regulars*.

La recta tangent a la corba C en un punt $r(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ serà:

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Observació 1.7 Una corba C parametritzada per $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ amb $t \in I$ pot interpretar–se també com el camí que descriu un mòbil: podem considerar t el temps i utilitzar $r(t)$ per indicar la posició del mòbil a l'instant t. Si $r(t)$ és derivable dues vegades, aleshores podem donar un sentit físic a $r'(t)$ i $r''(t)$.

Definició 1.8 El vector $r'(t)$ rep el nom de *velocitat* a l'instant t i $r''(t)$ s'anomena *acceleració*.

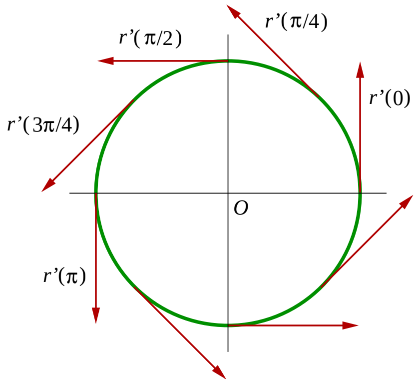
Observació 1.9 El vector tangent $r'(t)$ és qui dóna l'orientació a la corba.

Retornem a l'exemple de la circumferència unitat parametritzada per

$$r(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi].$$

El vector tangent en cada punt és $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Tenim, per exemple, $r'(0) = (0,1)$, $\quad r'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\quad r'(\frac{\pi}{2}) = (-1,0)$, etc. Si els representem gràficament, observem que la circumferència està orientada en sentit antihorari.



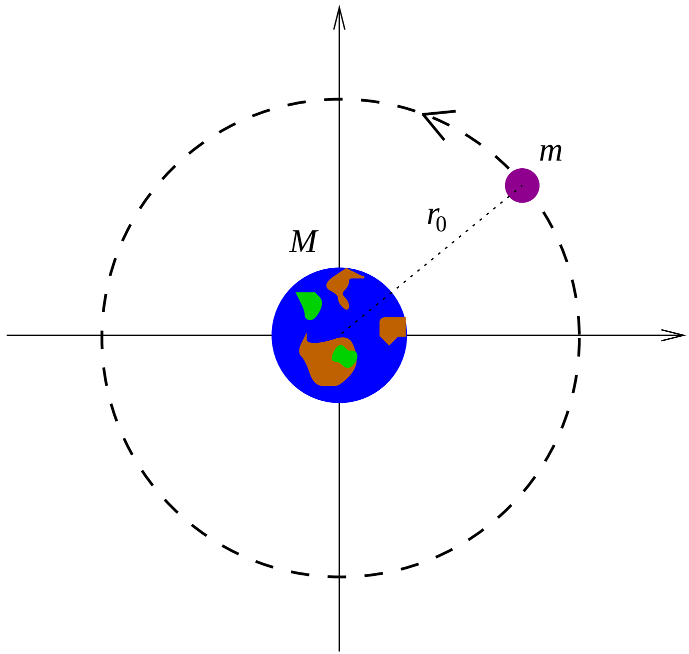
Exemples 1.10 (a) Sigui C la circumferència parametritzada per

$$r(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t) \text{ amb } \rho > 0 \text{ quan } t \in [0, 2\pi].$$

Comproveu que el vector tangent a cada punt és perpendicular al radi vector.

(b) Sigui C la corba parametritzada per $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ amb $t \in [0, \infty)$. Comproveu que l'angle que forma el vector tangent a la corba en cada punt amb el pla XY és constant i val $\frac{\pi}{4}$ radians.

Exemple 1.11 Considerem un satèl·lit de massa m movent–se amb rapidesa constant v al voltant d'un planeta de massa M en una òrbita circular (plana) de radi r_0 (distància al centre del planeta).



Trobem primer una parametrització de la trajectòria que descriu el satèl·lit.

Prenem com a origen de coordenades el centre del cos esfèric.

La parametrització serà del tipus

$$r(t) = (r_0 \cos kt, r_0 \sin kt)$$

essent k una constant adequada que faci que la rapidesa sigui v. Per trobar k n'hi ha prou amb calcular $||r'(t)||$:

$$r'(t) = kr_0(-\sin kt, \cos kt)$$

i, per tant,

$$||r'(t)|| = |k|r_0.$$

Imposant que coincideixi amb v, obtenim, per exemple, $k = \frac{v}{r_0}$. És a dir, la trajectòria que descriu el satèl·lit està donada per

$$r(t) = \left(r_0 \cos \frac{vt}{r_0}, r_0 \sin \frac{vt}{r_0}\right)$$

amb $t \geq 0$ (aquesta parametrització ens dóna una orientació antihorària).

La seva velocitat és

$$r'(t) = v\left(-\sin \frac{vt}{r_0}, \cos \frac{vt}{r_0}\right),$$

amb mòdul $||r'(t)|| = v$, i l'acceleració

$$r''(t) = \frac{v^2}{r_0}\left(-\cos \frac{vt}{r_0}, -\sin \frac{vt}{r_0}\right) = -\frac{v^2}{r_0^2} r(t).$$

L'acceleració té la mateixa direcció que $r(t)$ però el sentit és oposat. És a dir, es dirigeix cap al centre del cos esfèric.

Aquesta acceleració multiplicada per la massa m del satèl·lit s'anomena *força centrípeta*.

Aquesta força ha de coincidir amb la força amb què s'atrauen els dos cossos:

$$-\frac{v^2 m}{r_0^2} r(t) = -\frac{GmM}{r_0^3} r(t).$$

Calculant el mòdul d'aquestes dues forces i simplificant, obtenim

$$v^2 = \frac{GM}{r_0}.$$

Si denotem per T el període d'una revolució (el temps que triga el satèl·lit en fer una volta completa al voltant de l'altre cos), llavors $v = \frac{2\pi r_0}{T}$. Substituint aquest valor a l'expressió anterior obtenim

$$T^2 = r_0^3 \frac{4\pi^2}{GM},$$

igualtat que ens diu que *el quadrat del període és proporcional al cub del radi* (un cas particular de la tercera llei de Kepler).

Definició 1.12 Es defineix l'angle que formen dues corbes $r(t)$ i $s(u)$ en un punt on es tallin com l'angle que formen els seus respectius vectors tangents en aquest punt.

Exemple 1.13 Comprovem que les circumferències C_1 i C_2, parametritzades per $r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, i $s(u) = (0, \cos u, \sin u)$, $u \in [0, 2\pi]$, es tallen en dos punts formant angles rectes.

Primer hem de trobar els punts on es tallen.

Igualant les dues parametritzacions obtenim $\cos t = 0$, $\sin t = \cos u$ i $0 = \sin u$.

La primera igualtat ens diu que $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$. La tercera que $u = 0$ o $u = \pi$.

Combinant aquests valors amb la segona igualtat obtenim els punts $P_1 = (0, 1, 0)$ i $P_2 = (0, -1, 0)$.

En P_1 tenim $t = \frac{\pi}{2}$ i $u = 0$. Per tant, els vectors tangents respectius són:

$$r'(\tfrac{\pi}{2}) = (-1, 0, 0) \quad \text{i} \quad s'(0) = (0, 0, 1)$$

que, evidentment, són perpendiculars.

Anàlogament al punt P_2.

Definició 1.14 Sigui C una corba regular parametritzada per $r(t)$, $t \in [a,b]$. Considerem una funció φ bijectiva

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [c,d] & \longrightarrow & [a,b] \\ u & \longmapsto & \varphi(u) \end{array}$$

tal que $\varphi(u)$ és derivable amb $\varphi'(u) \neq 0$, $\forall u \in [c,d]$. Aleshores φ és un *canvi de paràmetre*. El nou paràmetre és la variable u.

Podem pensar tot això com un *canvi de temps*, fent servir un "rellotge" diferent, que s'obté amb la composició:

$$\sigma : [c,d] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{r} \mathbb{R}^2 (\text{ o bé } \mathbb{R}^3).$$

Així, la nova parametrització de la corba és

$$\sigma(u) = (r \circ \varphi)(u) = r(\varphi(u)), \; u \in [c,d].$$

Observem que

- Si $\varphi'(u) > 0$,$\forall u$, llavors el canvi de paràmetre conserva l'orientació de $r(t)$.
- Si $\varphi'(u) < 0$,$\forall u$, llavors el canvi de paràmetre inverteix l'orientació de $r(t)$.

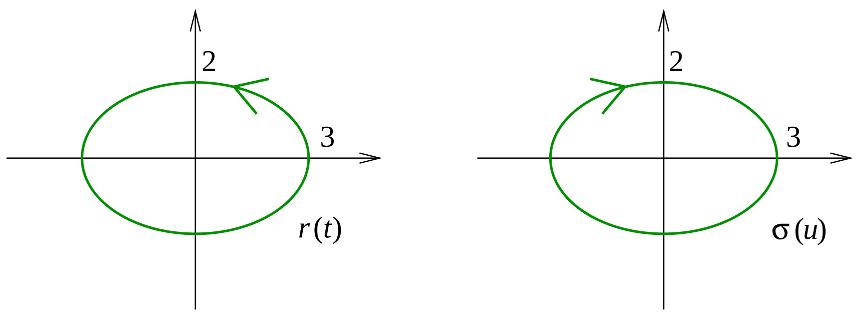
Exemple 1.15 Sigui C l'el·lipse parametritzada per $r(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Considerem el canvi de paràmetre següent:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0,1] & \longrightarrow & [0,2\pi] \\ u & \mapsto & \varphi(u) = 2\pi(1-u) \end{array}$$

Per tant, la nova parametrització de C és

$$\sigma(u) = (r \circ \varphi)(u) = r(\varphi(u))$$
$$\sigma(u) = (3\cos(2\pi(1-u)), 2\sin(2\pi(1-u))),\ u \in [0,1]$$

Observem que $\varphi'(u) = -2\pi$, $\forall u$ Així, aquest canvi de paràmetre canvia l'orientació donada per $r(t)$.



Noteu que, evidentment, el canvi de parametrització pot produir un canvi en la rapidesa amb què es recorre la corba. De fet, es pot calcular exactament com varia la rapidesa en canviar la parametrització. Calculeu-la a l'exemple anterior.

1.3 El tríedre de Frenet

A cada punt d'una corba regular (donada per una parametrització $r(t)$) es pot definir un *vector tangent unitari:*

$$T(t) = \frac{r'(t)}{||r'(t)||}$$

Observació 1.16 El vector $T'(t)$ és perpendicular a $T(t)$.

Per comprovar–ho n'hi ha prou amb derivar la igualtat

$$T(t) \cdot T(t) = 1 \quad (u \cdot u = ||u||^2 \quad \forall u)$$

Derivant a les dues bandes de la igualtat es té

$$T'(t) \cdot T(t) + T(t) \cdot T'(t) = 0 \quad \equiv \quad 2T(t) \cdot T'(t) = 0.$$

Si $T'(t) \neq 0$, es pot construir el vector

$$N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||}$$

que anomenarem *vector normal principal* a la corba.

La *recta normal* a la corba donada per $r(t)$ en un punt P és aquella que passa per P i té la direcció del vector normal principal a la corba en P.

Els vectors T i N determinen, en cada punt de la corba, un pla: *el pla osculador* a la corba.

Exemples 1.17 (a) $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ amb $t \in \mathbb{R}$. Trobem el pla osculador al punt P corresponent a $t = \frac{\pi}{2}$. $P = (0, 1, \frac{\pi}{2})$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{||r'(t)||} = \frac{(-\sin t, \cos t, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Al punt P serà

$$T(\tfrac{\pi}{2}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

I el vector normal principal:

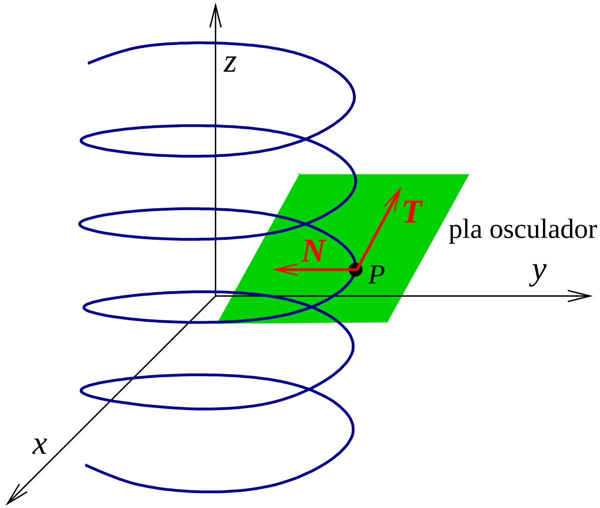
$$N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||} = \frac{(-\cos t, -\sin t, 0)}{1}$$

Al punt P tindrem:

$$N(\tfrac{\pi}{2}) = (0, -1, 0)$$

I el pla osculador (equació vectorial):

$$(x, y, z) = (0, 1, \tfrac{\pi}{2}) + \lambda(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) + \mu(0, -1, 0)$$



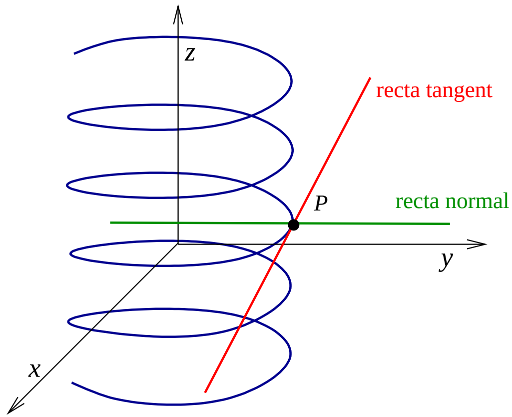
I l’equació implícita:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z-\frac{\pi}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{o, equivalentment, } x+z=\frac{\pi}{2}.$$

Hem substituït el vector $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ per $(-1,0,1)$, que té la mateixa direcció. La recta normal a la corba en P té equació vectorial

$$(x,y,z) = (0,1,\tfrac{\pi}{2}) + \lambda(0,-1,0).$$

I la recta tangent en P serà $(x,y,z) = (0,1,\frac{\pi}{2}) + \lambda(-1,0,1)$.



(b) Sigui C una corba plana. Quin és el seu pla osculador?

El vector tangent unitari i el vector normal principal generen el pla osculador. El vector $T \times N$ (vector associat al pla osculador) s'anomena *vector binormal*:

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

Tal i com està definit, és clar que B és perpendicular, en cada punt, a T i a N. A més a més, també té mòdul 1:

$$||B(t)|| = ||T(t)|| \cdot ||N(t)|| \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Definició 1.18 En cada punt de la corba donada per $r(t)$ tenim 3 vectors perpendiculars entre sí: T, N i B que, en aquest ordre, determinen un sistema de referència orientat positivament. Aquests tres vectors formen l'anomenat *tríedre de Frenet:*

$$\begin{cases} T(t) = \dfrac{r'(t)}{||r'(t)||} \\ N(t) = \dfrac{T'(t)}{||T'(t)||} \\ B(t) = T(t) \times N(t) \end{cases}$$

Exemple 1.19 Tornem a l'hèlix d'abans $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ amb $t \in \mathbb{R}$. El tríedre de Frenet en cada punt de l'hèlix ve donat pels vectors:

$$\begin{cases} T(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1) \\ N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \\ B(t) = T(t) \times N(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1) \end{cases}$$

Observació 1.20 Sigui C una corba parametritzada per $r(t)$. Pensem que es tracta de la trajectòria que recorre un mòbil (en funció del temps). *El vector acceleració està contingut al pla osculador de la corba.* Vegem-ho:

De la definició de $T(t)$ tenim:

$$r'(t) = ||r'(t)|| \cdot T(t)$$

Derivant aquesta relació obtenim

$$r''(t) = ||r'(t)||' \cdot T(t) + ||r'(t)|| \cdot T'(t)$$

Substituint $T'(t)$ per $||T'(t)|| \cdot N(t)$ obtenim

$$\begin{aligned} r''(t) &= ||r'(t)||' \cdot T(t) + ||r'(t)|| \cdot ||T'(t)|| \cdot N(t) = \\ &= a_T \cdot T(t) + a_N \cdot N(t) \end{aligned}$$

a_T i a_N són les components *tangencial* i *normal (o centrípeta)* de l'acceleració, respectivament.

Noteu que també es poden calcular de la manera següent:

$$a_T = r''(t) \cdot T(t) = \frac{r''(t) \cdot r'(t)}{||r'(t)||} = \frac{a(t) \cdot v(t)}{||v(t)||}$$

$$a_N = ||r''(t) \times T(t)|| = \frac{||r''(t) \times r'(t)||}{||r'(t)||} = \frac{||a(t) \times v(t)||}{||v(t)||}$$

Observacions 1.21 (a) No és difícil veure que el pla osculador en cada punt de la corba també és el definit pels vectors $r'(t)$ i $r''(t)$. Només cal adonar–se que el subespai generat per T i N és el mateix que el generat per r' i r''.

(b) De l'apartat anterior **no** es dedueix que r'' tingui la mateixa direcció que el vector normal.

(c) El que sí que es dedueix és que per trobar un vector amb la mateixa *direcció* i *sentit* que el binormal n'hi ha prou amb calcular $r'(t) \times r''(t)$. (Multiplicant $r'(t)$ per l'expressió de $r''(t)$ d'abans s'obté $r'(t) \times r''(t) = \|r'(t)\|^2 \|T'(t)\| B(t)$.)

1.4 La longitud d'arc

Definició 1.22 Sigui C la corba parametritzada per $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ quan $t \in [a,b]$. La longitud d'aquesta corba ve donada per

$$l(C) = \int_a^b ||r'(t)||\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

La longitud d'una corba no depèn de la parametrització.

Ja hem vist que una mateixa corba es pot representar mitjançant diverses parametritzacions. Per al moviment al llarg d'una corba, el paràmetre convenient és el temps. Tanmateix, per estudiar les propietats geomètriques d'una corba és convenient fer servir l'anomenat paràmetre *longitud d'arc*, definit per

$$s(t) = \int_a^t ||r'(u)||\,du.$$

Definició 1.23 Una corba regular C donada per $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$ amb $s \in I$ es diu que està parametritzada pel paràmetre longitud d'arc si $||r'(s)|| = 1$ per a tot $s \in I$.

Exemple 1.24 Sigui l'hèlix donada per $r(s) = (b\sin s, b\cos s, s\sqrt{1-b^2})$.

$$r'(s) = (b\cos s, -b\sin s, \sqrt{1-b^2}) \text{ i } ||r'(s)|| = b^2 + 1 - b^2 = 1$$

Noteu que per calcular la longitud de l'hèlix des de $s = 0$ fins a $s = 3$ hem de fer

$$\int_0^3 ||r'(s)||\,ds = \int_0^3 1\,ds = 3.$$

En general, si una corba C està donada per $r(s)$ amb $s \in [a,b]$ i s és el paràmetre longitud d'arc, aleshores

$$L = \int_a^b ||r'(s)||\,ds = \int_a^b 1\,ds = b-a.$$

Trobar parametritzacions fent servir el paràmetre arc és, en general, difícil.

Exemples 1.25 (a) Trobem una parametrització en termes del paràmetre arc per a la corba donada per $r(t) = (\frac{t^2}{2}, 0, \frac{t^3}{3})$ amb $0 \leq t \leq 2$.

Per fer això posem

$$s(t) = \int_0^t ||r'(u)||\,du = \int_0^t \sqrt{u^2+u^4}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t 2u\sqrt{1+u^2}\,du = \left[\frac{1}{2}\frac{2}{3}(u^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^t = \frac{1}{3}\left((t^2+1)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

Aïllant t en termes de s obtenim

$$t = \sqrt{(3s+1)^{\frac{2}{3}}-1}$$

La nova parametrització s'obté substituint t per l'expressió anterior a la parametrització inicial:

$$r(s) = \left(\frac{1}{2}((3s+1)^{\frac{2}{3}}-1), 0, \frac{1}{3}((3s+1)^{\frac{2}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}\right).$$

El nou paràmetre s varia a l'interval $[0, 3.39345]$ (quan $t = 0$, $s = 0$ i quan $t = 2$, $s = \frac{1}{3}(\sqrt{5^3} - 1) \approx 3.39345$). Quant val la longitud d'aquesta corba?

(b) Trobeu una parametrització pel paràmetre longitud d'arc per a la corba donada per $r(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$.

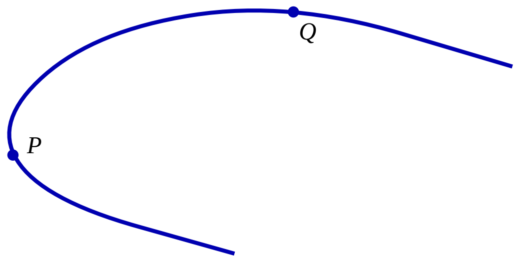
(c) Parametritzeu per l'arc la corba que en cartesianes està donada per $y = \ln(\sin x)$ des de $x = 2\arctan\frac{1}{e}$ fins $x = \frac{\pi}{2}$.

(d) Feu el mateix per a la corba donada per $y = x^2$ quan $x \in [0, 1]$.

1.5 La curvatura d'una corba

Començarem per les corbes planes.

Ara buscarem una manera de mesurar quant ràpidament es doblega una corba.

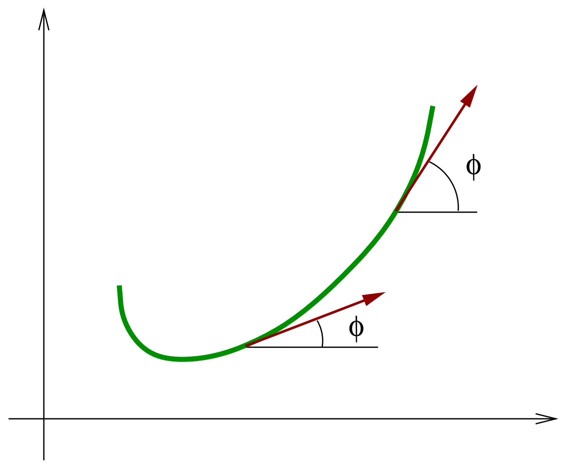


La curvatura ha de ser més gran en P que en Q.

Definició 1.26 La curvatura és la magnitud de la taxa de variació de l'angle ϕ que forma el vector tangent unitari amb l'eix horitzontal respecte a la longitud d'arc:

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| .$$

Un dibuix ens pot ajudar a entendre aquesta definició. (L'angle que formen el vector tangent a la corba i l'eix d'abscisses el mesurem en sentit antihorari.)



Observació 1.27 Una recta té curvatura $\kappa = 0$ ja que ϕ és constant.

Curvatura per a corbes planes en coordenades cartesianes

Suposem que tenim una corba donada explícitament per $y = f(x)$ amb $x \in [a,b]$.

Sabem que $y' = \frac{dy}{dx} = \tan\phi$. Per tant, $\phi = \arctan\frac{dy}{dx} = \arctan y'$. Volem trobar $\frac{d\phi}{ds}$. Per la regla de la cadena

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{y''}{1+(y')^2}\frac{dx}{ds}. \qquad (*)$$

Recordant que

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

tenim que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$$

i, per tant,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Substituint a $(*)$ obtenim

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = \left|\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

Curvatura per a corbes a l'espai

Observació 1.28 El vector tangent unitari $T(s)$ es pot escriure com

$$T(s) = (\cos\phi, \sin\phi)$$

La seva derivada és

$$T'(s) = \frac{dT(s)}{ds} = \frac{d\phi}{ds}(-\sin\phi, \cos\phi)$$

El mòdul d'aquest darrer vector és precisament

$$||T'(s)|| = \left|\left|\frac{dT}{ds}\right|\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = \kappa$$

Aprofitem aquesta observació per definir la curvatura d'una corba a l'espai.

Definició 1.29 Sigui C una corba parametritzada pel paràmetre longitud d'arc. La curvatura de C en cada punt és el mòdul de la variació del vector tangent unitari en aquell punt respecte a la longitud d'arc:

$$\kappa = \left|\left|\frac{dT}{ds}\right|\right|$$

Ara buscarem una fórmula alternativa per calcular la curvatura que no requereixi la parametrització per l'arc.

Com que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}$$

tenim

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

Recordant que

$$\frac{ds}{dt} = ||r'(t)||$$

obtenim

$$\kappa = \frac{\left|\left|\frac{dT}{dt}\right|\right|}{||r'(t)||} = \frac{||T'(t)||}{||r'(t)||}$$

Aquesta fórmula encara és massa complicada. Vegem una altra possibilitat.

Teorema 1.30 *Sigui C una corba regular diferenciable dues vegades parametritzada per $r(t)$ amb $t \in I$. Aleshores*

$$\kappa(t) = \frac{||r'(t) \times r''(t)||}{||r'(t)||^3}$$

DEMOSTRACIÓ. Ja sabem que

$$r''(t) = ||r'(t)||' \cdot T(t) + ||r'(t)|| \cdot ||T'(t)|| \cdot N(t)$$

Posant $||T'(t)|| = \kappa(t)||r'(t)||$ obtenim

$$r''(t) = ||r'(t)||' \cdot T(t) + ||r'(t)||^2 \cdot \kappa(t) \cdot N(t)$$

Multiplicant vectorialment per $r'(t)$ ens queda

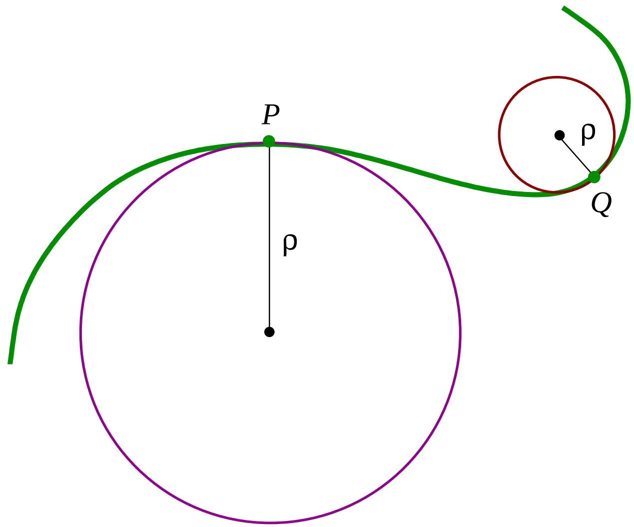
$$r'(t) \times r''(t) = ||r'(t)||^2 \cdot \kappa(t) \cdot \left(r'(t) \times N(t)\right)$$

Prenent mòduls obtenim

$$||r'(t) \times r''(t)|| = ||r'(t)||^3 \kappa(t)$$

Observació 1.31 Aquesta fórmula també és vàlida per a corbes planes si les considerem dins de l'espai ficades al pla $z = 0$; és a dir, si una corba plana ve donada per la parametrització $r(t) = (x(t), y(t))$, podem pensar que, a l'espai, la parametrització és de la forma $r(t) = (x(t), y(t), 0)$.

Definició 1.32 S'anomena *radi de curvatura* d'una corba en un punt $r(t)$ al número $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$, i és el radi d'una circumferència (continguda en el pla osculador de la corba) de centre $r(t) + \rho(t) \cdot N(t)$ que en el punt $r(t)$ té la mateixa curvatura que la corba.



1.6 La torsió d'una corba

Una corba plana es pot doblegar més o menys dins del pla que la conté (el seu pla osculador). Una corba a l'espai es pot doblegar al seu pla osculador i també fora d'ell. Penseu, per exemple, en una hèlix. Vista des de dalt, la confondríem amb una circumferència i, per tant, la seva curvatura és constant. Tanmateix, l'hèlix se "surt" del pla. Buscarem una manera de mesurar com se "surt" una corba del seu pla osculador. Aquesta mesura ens la proporcionarà la *torsió*.

Suposem que tenim una corba C parametritzada pel paràmetre longitud d'arc: $r(s)$. Aleshores el tríedre de Frenet serà:

$$\begin{cases} T(s) = r'(s) \\ N(s) = \dfrac{r''(s)}{||r''(s)||} \\ B(s) = T(s) \times N(s) \end{cases}$$

Recordem que el vector binormal és el vector associat al pla osculador a la corba. Per tant, la seva derivada ens dirà com varia el pla osculador.

$$B'(s) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s)$$

Observacions 1.33 (a) $\kappa(s) = ||r''(s)||$

(b) $T'(s) = r''(s) \quad \Longrightarrow \quad T'(s) = ||r''(s)||\,N(s) \quad \Longrightarrow \quad T'(s) = \kappa(s)\,N(s).$

Com que $T'(s) = \kappa(s)\,N(s)$, tindrem $B'(s) = T(s) \times N'(s) \quad (*)$.

És fàcil comprovar que $N'(s)$ és ortogonal a $N(s)$ (n'hi ha prou amb derivar la igualtat $N(s) \cdot N(s) = 1$). Aleshores, està contingut en el pla generat per $T(s)$ i $B(s)$. És a dir,

$$N'(s) = \lambda(s)T(s) + \tau(s)B(s).$$

Substituint en $(*)$ obtenim

$$B'(s) = T(s) \times (\lambda(s)T(s) + \tau(s)B(s)) = \tau(s)(T(s) \times B(s)) = -\tau(s)N(s).$$

Resumint:

$$B'(s) = -\tau(s)N(s).$$

La funció $\tau(s)$ mesura, en cada punt, la velocitat amb què s'allunya la corba del pla osculador en aquell punt.

Definició 1.34 Sigui $r(s)$ una parametrització (que fa servir el paràmetre longitud d'arc) d'una una corba C. S'anomena *torsió* de C a la funció $\tau(s)$ definida per $\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s)$.

La torsió és independent de la parametrització.

Si la torsió és constant i val zero, aleshores la corba és plana (està continguda en el seu pla osculador).

Observació 1.35 Si la torsió és nul·la a tots els punts aleshores el vector $B'(s)$ també és nul i, per tant, el vector binormal serà constant. Això equival a dir que el pla osculador també és constant (la corba és plana).

És difícil trobar la torsió d'una corba fent servir la definició que acabem de veure. Vegem com calcular-la còmodament.

Teorema 1.36 *Sigui C una corba diferenciable almenys tres vegades parametritzada per $r(t)$ amb $t \in [a,b]$. Aleshores*

$$\tau(t) = \frac{[r'(t) \times r''(t)] \cdot r'''(t)}{||r'(t) \times r''(t)||^2} = \frac{det[r'(t), r''(t), r'''(t)]}{||r'(t) \times r''(t)||^2}.$$

Exemple 1.37 Vegem que la torsió d'una hèlix és constant. Considerem l'hèlix donada per $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ amb $t \geq 0$.

Fent càlculs senzills obtenim

$$r'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$
$$r''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0) \qquad r'(t) \times r''(t) = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$
$$r'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$$

Com que $det[r'(t), r''(t), r'''(t)] = a^2 b$ i $||r'(t) \times r''(t)|| = a\sqrt{a^2+b^2}$ la torsió és

$$\tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Noteu que si $b = 0$ la corba és una circumferència i, per tant, és plana. En aquest cas la torsió és nul·la. Per $b > 0$ la torsió és positiva i per $b < 0$ és negativa.

(Quant val la curvatura d'aquesta hèlix? Sol. $\kappa(t) = \frac{a}{a^2+b^2}$)

Les fórmules de Frenet-Serret

La curvatura i la torsió determinen la corba (excepte moviments euclidians; és a dir, moviments que són composició d'una translació i una rotació).

Les fórmules de Frenet-Serret ens donen relacions que permeten reconstruir la corba conegudes la seva curvatura i la seva torsió.

Suposem que la corba està parametritzada amb el paràmetre longitud d'arc. Aleshores es compleixen les igualtats següents:

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)\, N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)\, T(s) + \tau(s)\, B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)\, N(s) \end{cases}$$

Les relacions anteriors també es poden expressar matricialment:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Exemple 1.38 Comproveu les fórmules de Frenet-Serret per a l'hèlix definida per

$$r(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Exemple 1.39 Dissenyar una trajectòria d'elevació per a una aeronau que surt d'una pista en direcció N i ha de prendre direcció SW. Hi ha certes condicions de vol de l'aeronau que s'han de tenir en compte:

- Per enfilar aquest rumb l'aeronau ha d'estar a més de 2500 m d'altura.
- L'angle d'elevació no pot superar els 10°.
- La velocitat respecte de l'aire (que suposem en repòs) ha d'estar sempre per sobre dels 300 km/h.
- Els girs han de tenir un radi de curvatura de 4 km com a mínim.

Es vol trobar una corba d'enlairament en forma d'hèlix que respecti totes aquestes condicions. Concretament:

(a) Doneu una parametrització general d'una hèlix que respecti els condicionants anteriors i expresseu matemàticament les restriccions.

(b) Doneu un exemple concret d'hèlix que compleixi totes les condicions.

(c) Per tal de minimitzar la despesa de carburant, trobeu entre totes les possibles hèlixs la que minimitza el recorregut.

Una parametrització general de l'hèlix que es demana és

$$r(u) = (R\cos u, R\sin u, bu) \quad u \in [0, 3\pi/4 + 2n\pi].$$

El vector tangent serà $r'(u) = (-R\sin u, R\cos u, b)$.

Imposem les condicions:

- L'aeronau surt de la pista en direcció N. A l'inici de l'enlairament tenim

$$r'(0) = (0, R, b),$$

  que sobre la pista (el pla horitzontal) correspon a aquesta direcció.

- L'aeronau abandona la trajectòria en direcció SW. El paràmetre u fa el paper de l'angle en el cercle projecció de la trajectòria. Això vol dir que al final del recorregut, aquest angle ha de correspondre a la direcció SW, és a dir $u_n = 3\pi/4 + 2n\pi$, essent n les voltes senceres que s'han de fer mentre l'aeronau s'enlaira.

- La inclinació no pot superar els 10°. Sigui, per exemple, α l'angle d'inclinació: l'angle que forma el vector tangent amb un pla horitzontal. Calculem la projecció de $r'(u)$ sobre el vector unitari vertical $\vec{k} = (0,0,1)$:

$$r'(u)\cdot\vec{k} = b = \|r'(u)\|\cos(90-\alpha) \leq \sqrt{R^2+b^2}\sin(10^\circ) \approx 0.1736\sqrt{R^2+b^2}.$$

  O, equivalentment,

$$\frac{b}{0.1736} \leq \sqrt{R^2+b^2}.$$

- L'altura a la que es troba l'aeronau quan abandona l'hèlix ha de ser més gran o igual que 2500 m:

$$b\cdot u_n \geq 2.5.$$

- El radi de curvatura dels girs ha de ser més gran o igual que 4 km. La curvatura d'aquesta hèlix és $\kappa = R/(b^2+R^2)$. Per tant,

$$\frac{b^2+R^2}{R} \geq 4.$$

Deixem de banda, de moment, la condició sobre la velocitat (només caldrà fer un canvi de paràmetre per ajustar-la, i no influeix en les característiques geomètriques que hem vist, ni en la longitud).

La longitud de la trajectòria és

$$l = \int_0^{u_n}\sqrt{R^2+b^2}\,du = u_n\sqrt{R^2+b^2}.$$

Aplicant ara les condicions que ja teníem obtenim:

$$l = u_n\sqrt{R^2+b^2} \geq \frac{2.5}{b}\cdot\frac{b}{0.1736} = 14.397.$$

Aquesta fita inferior es prendrà si les desigualtats que hem vist són de fet, igualtats. Per a $n=0$ obtenim $b = 2.5/u_0 = 1.061$ i, aleshores serà $R = 6.02$. Aquests valors satisfan la condició sobre la curvatura:

$$\frac{b^2+R^2}{R} = \frac{1.061^2+6.02^2}{6.02} \geq 4.$$

Respecte a la velocitat. Fem el canvi $u = \omega t$, essent t el temps en hores. Ha de ser

$$\|r'(t)\| = \omega\sqrt{R^2+b^2} \geq 300.$$

Amb els valors que hem trobat correspon a un mínim quan $\omega \approx 49.08$.

La trajectòria que ens demanen és

$$r(t) = (6.02\cos(49.08t), 6.02\sin(49.08t), 52.07t)\ t \in [0, 3\pi/4].$$

2 Funcions de diverses variables

2.1 Camps escalars i camps vectorials

Sovint necessitem més d'una variable per descriure magnituds relativament senzilles. Vegem uns exemples.

- L'àrea d'un rectangle de base b i altura h ve donada per la funció $A(b,h) = b \cdot h$.
- El volum d'un cilindre circular recte de radi r i altura h és

$$V(r,h) = \pi r^2 h.$$

- El volum d'un paral·lelepípede rectangular (ortòedre) d'amplada x, llargària y i altura z és

$$V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z.$$

- La força gravitacional sobre una massa m situada en un punt (x,y,z) produïda per una massa M situada a l'origen de coordenades ve donada, segons la llei de gravitació de Newton, per

$$F(x,y,z) = \frac{-GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z).$$

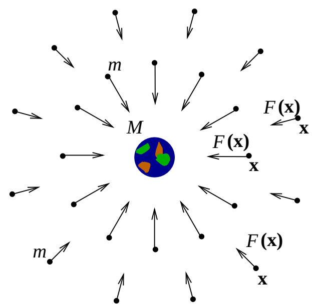
Noteu que als tres primers exemples, les imatges de les funcions són nombres. Al quart exemple la imatge de cada punt és un vector.

Definició 2.1 (a) Un *camp escalar* és una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Un *camp vectorial* és una funció $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Usualment tindrem $n = 2$ o $n = 3$.

Els tres primers exemples que hem vist són camps escalars. Altres camps escalars: el que assigna a cada punt de l'espai la seva temperatura, el que dóna a cada punt d'un sòlid la seva densitat...

El camp gravitacional és un exemple clar de camp vectorial. Altres exemples: un camp de velocitats, el camp magnètic...

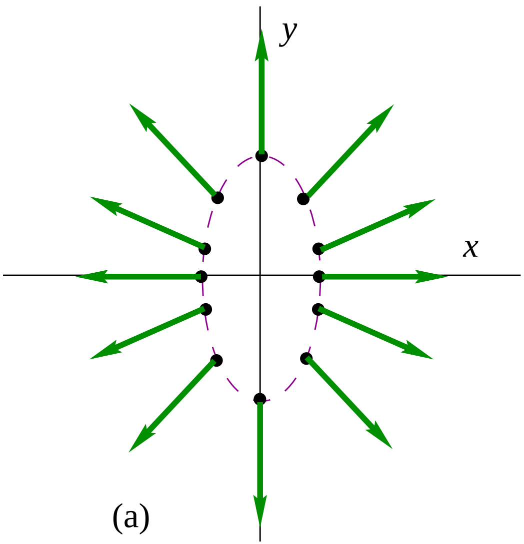


Camp gravitacional

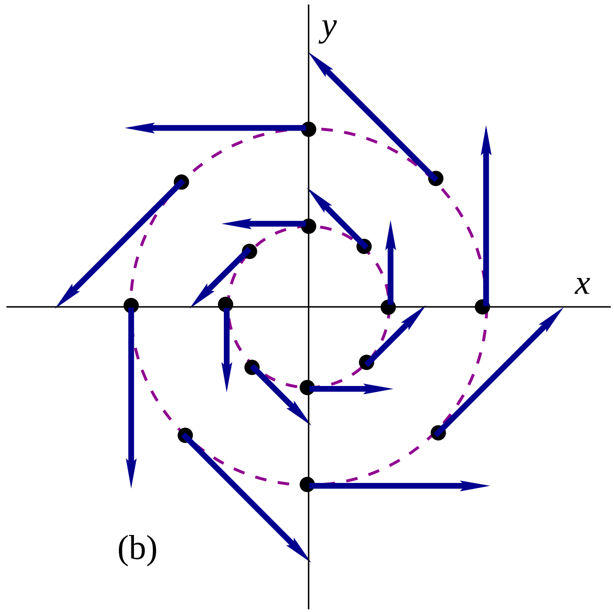
Un camp vectorial F assigna un vector $F(\mathbf{x})$ a cada punt del seu domini. Per tenir una idea geomètrica de com és un camp vectorial es dibuixa el vector $F(\mathbf{x})$ amb origen el punt $\mathbf{x}$. Vegem tres exemples.

Exemples 2.2 (a) $F(x,y) = (2x,y)$ a $\mathbb{R}^2$.

(b) $F(x,y) = (-y,x)$ a $\mathbb{R}^2$. (Aquest camp pot representar, per exemple, el moviment que efectua una partícula de pols enganxada en un disc que gira.)

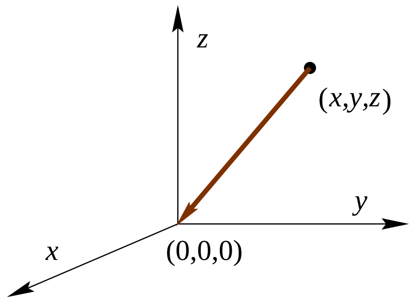


(a)



(b)

(c) $F(x,y,z) = -(x,y,z)$ a $\mathbb{R}^3$. A cada punt li associem el vector posició canviat de signe.



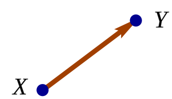
(c)

En aquest capítol i en els següents analitzarem les funcions de diverses variables. Volem obtenir per a aquestes funcions resultats anàlegs als que tenim per a funcions d'una variable. En particular, ens interessarà trobar màxims i mínims de camps escalars. Per poder fer això, caldrà estudiar–ne el domini.

2.2 Nocions topològiques bàsiques

Com ja sabem, la distància entre dos punts ve donada pel mòdul del vector que els uneix: si $X = (x_1, x_2, x_3)$ i $Y = (y_1, y_2, y_3)$, aleshores

$$d(X,Y) = ||X - Y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$



Farem servir la notació $\mathbb{R}^n$ amb $n = 2,3$ per referir–nos al pla o a l'espai, respectivament.

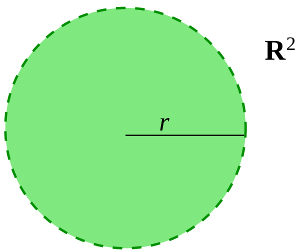
Definició 2.3 (a) Es defineix la *bola oberta* centrada en A i radi $r > 0$ com el conjunt de punts de $\mathbb{R}^n$ tals que la seva distància a A és inferior a r:

$$B(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n \,:\, d(A,X) < r\}.$$

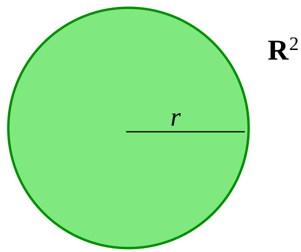
(b) Es defineix la *bola tancada* centrada en A i radi $r > 0$ com el conjunt de punts de $\mathbb{R}^n$ tals que la seva distància a A és inferior o igual a r:

$$\overline{B}(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n \,:\, d(A,X) \leq r\}.$$

A $\mathbb{R}^2$ aquests conjunts són *discos*.

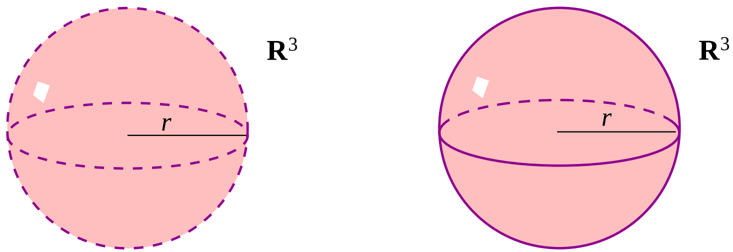


Disc obert



Disc tancat

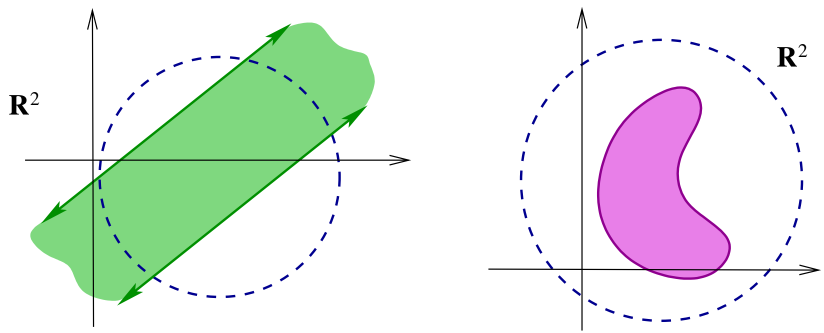
A $\mathbb{R}^3$ són *boles*.



Bola oberta

Bola tancada

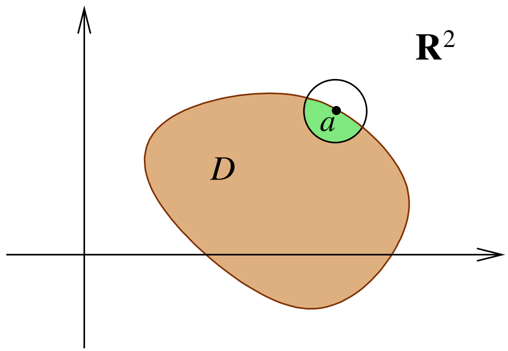
Definició 2.4 Un conjunt de $\mathbb{R}^n$ és *fitat* si podem trobar una bola oberta amb radi finit que el contingui.



Conjunt no fitat

Conjunt fitat

Definició 2.5 Es diu que un punt a és de la *frontera* d'un conjunt D sii tota bola centrada en a conté punts que són de D i punts que no són de D.

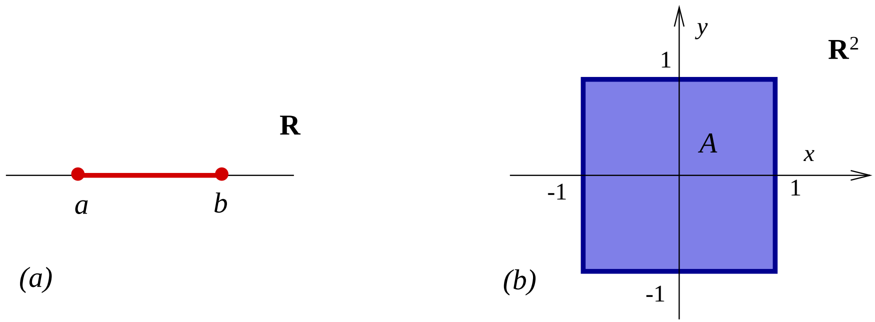


Definició 2.6 Un conjunt s'anomena *tancat* si, i només si, conté la seva frontera.

El conjunt buit $\emptyset$ i el conjunt total $\mathbb{R}^n$ són tancats per definició.

Exemples 2.7 (a) A $\mathbb{R}$ l'interval $[a,b]$ és tancat (la seva frontera està formada per dos punts: a i b).

(b) A $\mathbb{R}^2$, el conjunt $A = \{(x,y) \ : \ |x| \leq 1 \text{ i } |y| \leq 1\}$ és tancat. Quina és la seva frontera?



Definició 2.8 Un conjunt tancat i fitat s'anomena *compacte*.

Els conjunts compactes són els conjunt "macos" de $\mathbb{R}^n$, és a dir, representen per als camps escalars continus el mateix que els intervals tancats per a les funcions contínues d'una variable.

Exemples 2.9 Estudiem els conjunts següents:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x+y \leq 1\}$

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x+y| < 1\}$

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x|+|y| \leq 1\}$

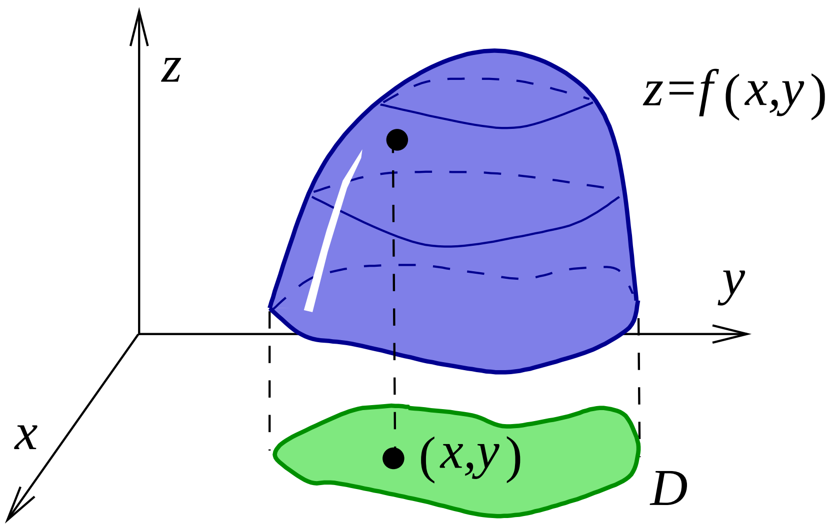
(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 4,\ |z| \leq 1\}$

2.3 Representació gràfica de camps escalars

Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ és un camp escalar de dues variables definit en un subconjunt D del pla xy, entendrem per gràfica de f el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D \text{ i } z = f(x,y)\}.$$

La gràfica de f és una *superfície* de $\mathbb{R}^3$.



Exemples 2.10 Vegem algunes superfícies senzilles.

(a) $z = f(x,y) = 1 - x - y$.

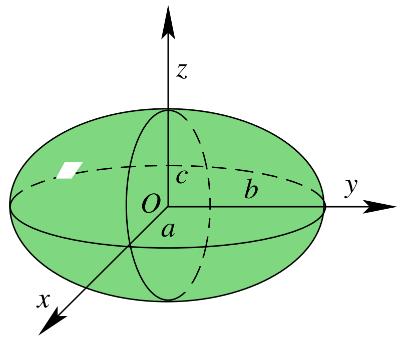
(b) $z = f(x,y) = 2$.

(c) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$.

Durant el curs apareixeran sovint certs tipus de *quàdriques*: superfícies algebraiques de segon ordre. A continuació veurem les equacions reduïdes i la gràfica de les quàdriques més usuals.

- El·lipsoide

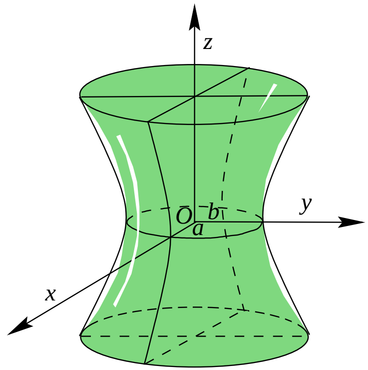
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Evidentment, si $a = b = c$ obtenim una *esfera*.

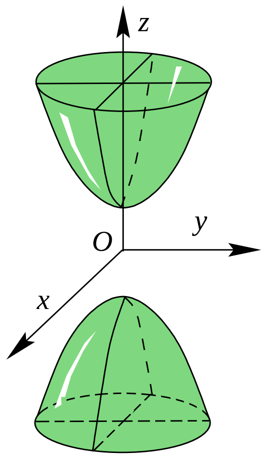
- Hiperboloide d'una fulla

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



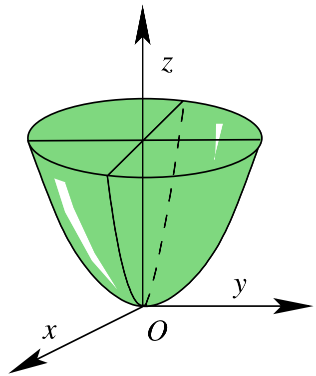
- Hiperboloide de dues fulles

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



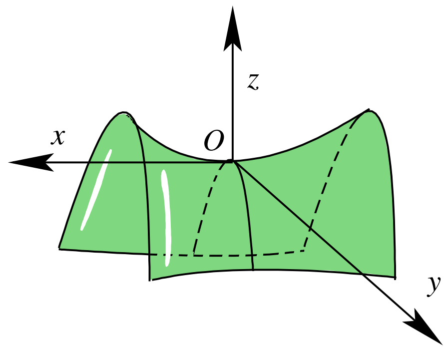
- Paraboloide el·líptic

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



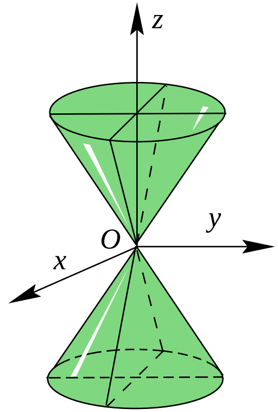
- Paraboloide hiperbòlic

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



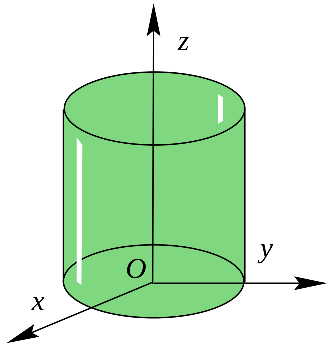
- Con

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



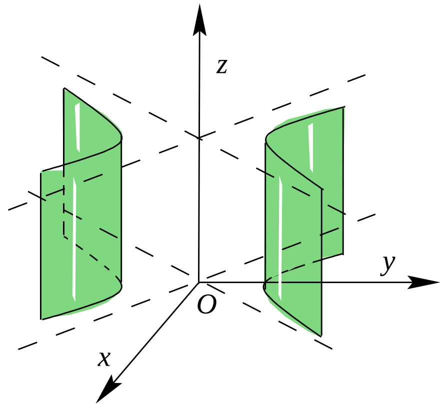
- Cilindre el·líptic

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



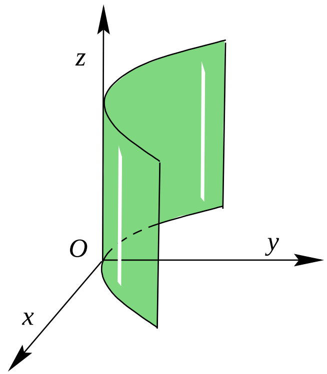
- Cilindre hiperbòlic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

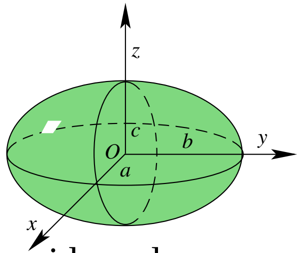


- Cilindre parabòlic

$$y = kx^2$$

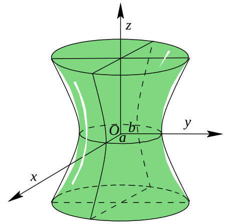


Observació 2.11 Canviant l'ordre de les variables tindríem quàdriques anàlogues però "tombades".



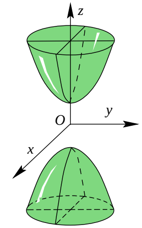
el·lipsoide real

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



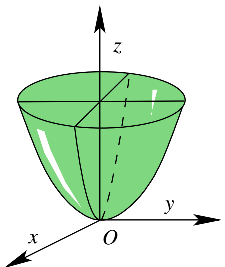
hiperboloide d'una fulla

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



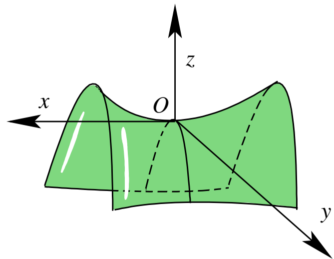
hiperboloide de dues fulles

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



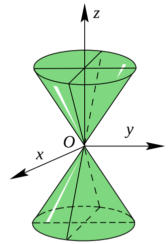
paraboloide el·líptic

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



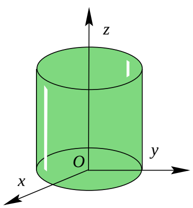
paraboloide hiperbòlic

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$



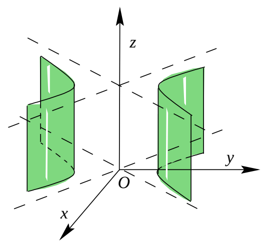
con real

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



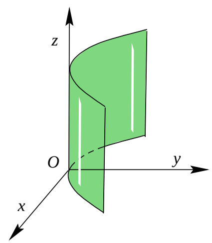
cilindre el·líptic real

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



cilindre hiperbòlic

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



cilindre parabòlic

$$y=\frac{x^2}{2p}$$

Imp.

Sortir

Noteu que moltes de les superfícies anteriors estan definides implícitament per l'equació que hem vist. No totes les superfícies són de la forma $z = f(x,y)$. De fet, per les que no ho són, necessitem dues funcions per donar z en funció de x i y.

Per dibuixar la gràfica de camps escalars de dues variables acostuma a ser útil pensar en les *corbes de nivell*.

Definició 2.12 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un camp escalar. El conjunt

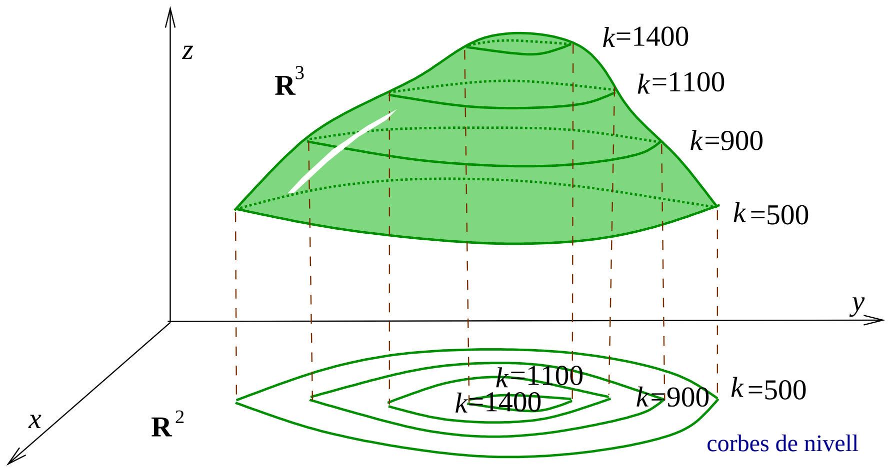
$$L_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k\}$$

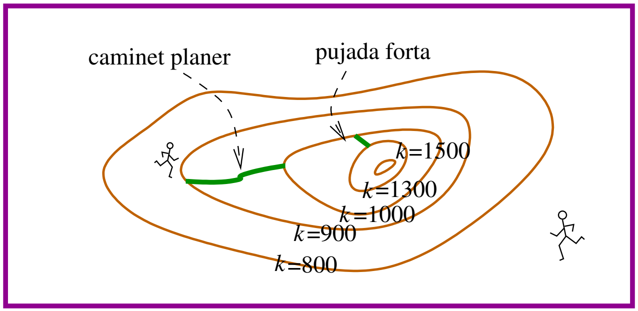
s'anomena *corba de nivell* (de valor k) de f.

Gràficament, podem obtenir les corbes de nivell tallant la gràfica de la funció $z = f(x,y)$ pel pla horitzontal $z = k$ (nivell k). Això determina una corba que es projecta sobre el pla $z = 0$. Variant la k les obtenim totes.

Les corbes de nivell ens donen informació sobre el comportament de la funció.

Exemple 2.13 Un exemple d'aplicació és un mapa topogràfic d'una muntanya.





Una persona que camina tota l'estona per una corba de nivell es troba sempre a la mateixa altura. La distància entre les corbes de nivell (desnivell) assenyala si hi ha una forta pujada o un camí planer.

Anàlogament a les corbes, es defineixen les *superfícies de nivell* per a les funcions de tres variables.

Exemples 2.14 Dibuixem les corbes de nivell de les funcions següents

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

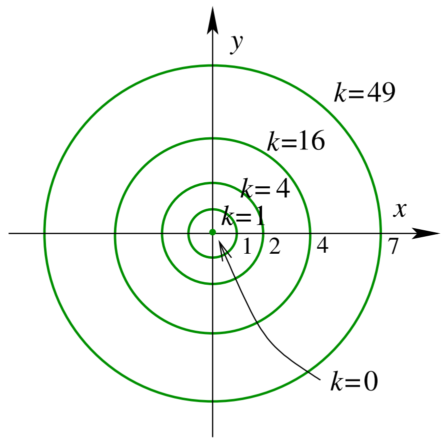
(b) $f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$.

(c) $f(x,y) = y^2 - x^2$.

(a) Són $x^2 + y^2 = k$.
Només té sentit per a $k \geq 0$.

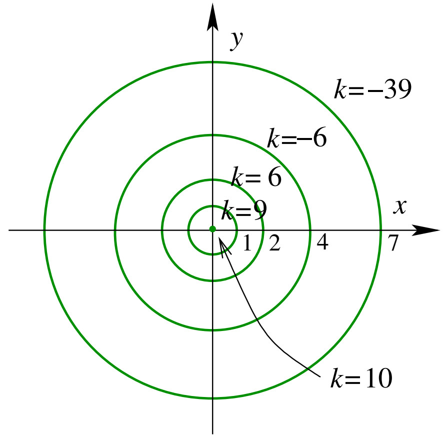
- Si $k = 0$ és l'origen.
- Si $k > 0$ són circumferències centrades a l'origen de radi $\sqrt{k}$.

  Quan la k creix el radi augmenta.

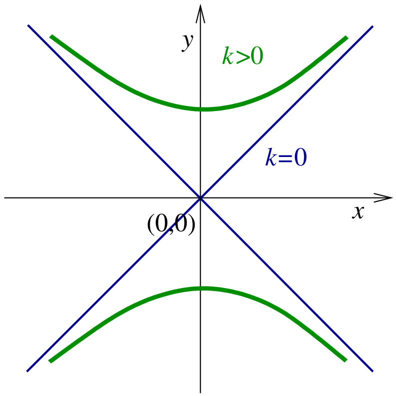


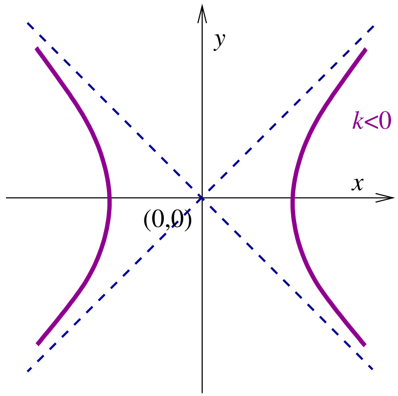
(b) Són $10 - x^2 - y^2 = k$.
Només té sentit per a $k \leq 10$.

- Si $k = 10$ és l'origen.
- Si $k < 10$ són circumferències centrades a l'origen de radi $\sqrt{10-k}$.
  Quan la k decreix el radi augmenta.

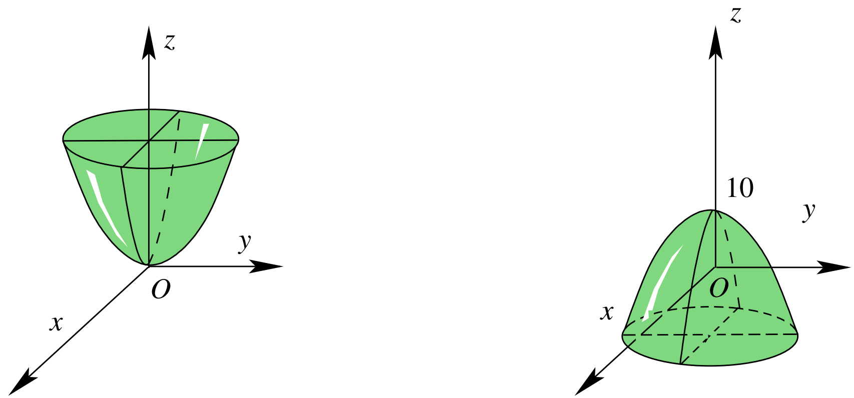


(c) Són $y^2 - x^2 = k$. Si $k = 0$ són les bisectrius del 1r i 3r quadrant i del 2n i 4r quadrant. Si $k \neq 0$ són hipèrboles equilàteres "tombades" o "dretes" segons el signe de k.





A continuació veurem un esquema de les superfícies corresponents als apartats (a) i (b). Podem obtenir la segona a partir de la primera fent la simètrica respecte del pla $z = 0$ i després pujant–la 10 unitats.



Exemple 2.15 Trobeu el domini i classifiqueu totes les corbes de nivell de la funció

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - 1}.$$

3 Càlcul diferencial

3.1 Límits, límits direccionals i continuïtat

Límits

Les funcions amb què treballarem són funcions definides en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$: camps escalars o vectorials de dues o tres variables. Escriurem $\mathbb{R}^n$ per indicar indistintament $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Siguin $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un camp escalar de dues variables i $(a,b) \in D$. Suposem que f està definida en D excepte, potser, en el punt (a,b).

Definició 3.1

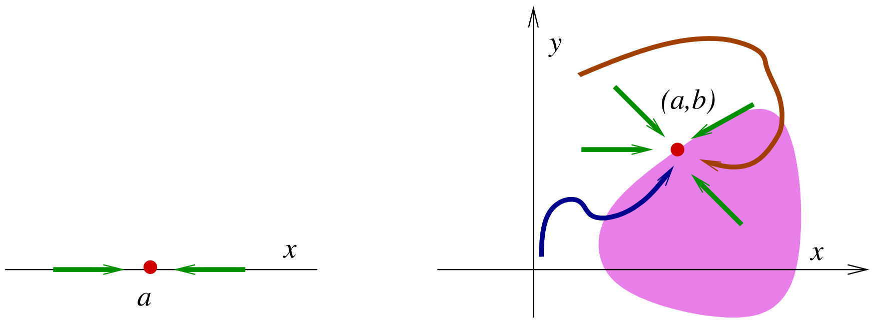
- (Intuïtiva) Direm que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ sii tots els punts suficientment propers a (a,b) tenen imatges suficientment properes a l.
- (Formal) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que si $0 < d\big((x,y),(a,b)\big) < \delta$ aleshores $d\big(f(x,y),l\big) < \varepsilon$.

Les definicions anteriors són anàlogues per a funcions de tres variables.

Les propietats dels límits que ja coneixem per a funcions d'una variable són vàlides també ara:

- Si el límit existeix, és únic.
- El comportament del límit amb les operacions algebraiques és el mateix.
- També hi ha les mateixes indeterminacions.

Una diferència important. Per a funcions d'una variable, quan ens apropem a un punt a hi ha, bàsicament, dues maneres de fer–ho, per l'esquerra i per la dreta (els límits laterals). Per a funcions de dues (i tres) variables hi ha infinites maneres d'acostar–nos al punt (a,b).



Si la funció té límit en un punt, aleshores ha de tenir límit (el mateix) independentment de la forma que triem per acostar–nos al punt.

Si el valor del límit d'una funció en un punt no és el mateix per a *totes* les possibles formes d'aproximar–nos al punt, aleshores la funció no té límit en aquest punt.

Límits direccionals

Una manera d'aproximar–se a un punt (a,b) és a través de les rectes que hi passen:

$$(x,y) = (a,b) + t(u,v)$$

Definició 3.2 S'anomena *límit direccional* de la funció f en el punt (a,b) segons la direcció del vector (u,v) a $\lim_{t\to 0} f(a+tu, b+tv)$.

Si en calcular els límits direccionals d'una funció en un punt aquests depenen de la direcció triada, aleshores no existeix el límit de la funció en aquell punt.

Exemple 3.3 Busquem els límits direccionals de $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ en el punt $(0,0)$.

Fixat un vector (u,v), considerem la recta d'equació paramètrica $(x,y) = t(u,v)$. El límit direccional serà

$$\lim_{t\to 0} f(tu,tv) = \lim_{t\to 0} \frac{tu-tv}{tu+tv} = \frac{u-v}{u+v}$$

Aquest límit depèn del vector triat i, per tant, la funció no té límit en $(0,0)$.

Els límits direccionals són útils per provar que no existeix el límit en un cert punt, però no serveixen per assegurar l'existència del límit.

Malgrat els límits direccionals siguin tots iguals, això no vol dir que hi hagi límit, encara hi ha infinites maneres d'acostar–se al punt (per paràboles, per cúbiques...).

Exemple 3.4 Comproveu que els límits direccionals de la funció $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ en el punt $(0,0)$ són tots iguals. Què passa si feu $y = kx^2$?

Continuïtat

Definició 3.5 Es diu que una funció f és *contínua* en un punt $(a,b) \in D$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Una funció és contínua en un conjunt D si ho és a tots els punts del conjunt D.

Observació 3.6 Les definicions i propietats que hem vist es poden generalitzar sense problemes a camps vectorials.

Per exemple, sigui $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un camp vectorial:

$$F(x,y,z) = (f_1(x,y,z),\, f_2(x,y,z),\, f_3(x,y,z)).$$

El camp F és continu si tots els camps escalars que formen les seves components són camps continus.

Exemple 3.7 Estudieu la continuïtat dels camps següents:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2-2x+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+y^2}}$

3.2 Derivades direccionals

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un camp escalar. Si intentem escriure una definició de derivada anàloga a la que coneixem per a funcions d'una variable se'ns planteja un problema greu: el quocient incremental

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \left(h \in \mathbb{R}^n\right)$$

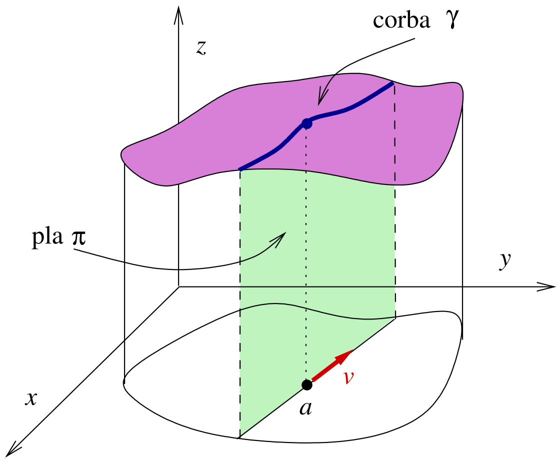
no té sentit. (Per què?)

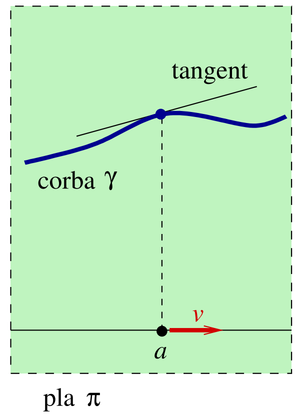
Si volem una definició semblant a la que coneixem per funcions d'una variable, hem de fer uns petits canvis.

Definició 3.8 Siguin $v \in \mathbb{R}^n$ un vector unitari i f un camp escalar definit en un entorn d'un punt $a \in \mathbb{R}^n$. Anomenarem *derivada direccional* de f en el punt a segons la direcció del vector v al

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t},$$

sempre i quan aquest límit existeixi. En aquest cas, la denotarem per $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ o també $f'_v(a)$ (de vegades s'omet la prima: $f_v(a)$; i de vegades s'escriu $D_v f(a)$).





Per a les funcions de dues variables, la derivada direccional admet una interpretació geomètrica bastant intuïtiva: és el pendent (respecte del pla XY) de la recta tangent a la corba intersecció de la superfície $z = f(x,y)$ amb el pla vertical que conté la recta del pla XY que passa pel punt a i té vector director v. (També és el coeficient de variació de la funció f en la direcció i sentit del vector v.)

Exemple 3.9 Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calculem la derivada direccional de f en el punt $(1,2)$ segons la direcció del vector $(1,1)$.

Com que el vector que ens donen no és unitari, primer busquem un vector que tingui la mateixa direcció i sentit que ell però que sigui unitari: $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}, 2+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1,2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 5}{t} = \cdots = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+3\sqrt{2}t}{t} = 3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Problema. Sorgeixen unes qüestions interessants relacionades amb la derivada direccional: en quina direcció és màxima la derivada direccional? I mínima? I nul·la? Per respondre aquestes preguntes necessitem conceptes nous.

3.3 Derivades parcials. Vector gradient. Matriu jacobiana

Definició 3.10 Sigui f un camp escalar $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. En el cas que v sigui un vector de la base canònica de $\mathbb{R}^n$, aleshores la derivada direccional s'anomena *derivada parcial.*

Notacions usuals per a les derivades parcials (a $\mathbb{R}^3$):

$e_1 = (1,0,0)$	$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$	$f'_x(a)$	$f_x(a)$
$e_2 = (0,1,0)$	$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$	$f'_y(a)$	$f_y(a)$
$e_3 = (0,0,1)$	$\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)$	$f'_z(a)$	$f_z(a)$

Observació 3.11 Calcular una derivada parcial equival a calcular la derivada d'una funció d'una variable: se suposa que totes les altres variables són constants.

Exemples 3.12 Calculem les derivades parcials de les funcions que segueixen:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + 6xy - 4y^3$

(b) $f(x,y) = x^2 \sin(xy)$

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^3}}$

Definició 3.13 Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un camp escalar amb derivades parcials. El vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

s'anomena *gradient* de f en el punt (x,y,z) i es denota per $\nabla f(x,y,z)$.

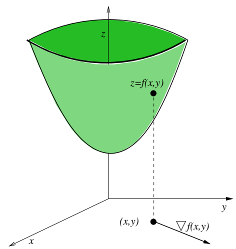
Pels camps escalars de dues variables tenim $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Exemples 3.14 Determinem el gradient de les funcions següents:

(a) $z = f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$

(b) $z = f(x,y) = e^{xy} + sin(xy)$

Noteu que si $z = f(x,y)$ representa una superfície a l'espai, el ∇f és un vector que està al pla XY, no a l'espai.



Definició 3.15 Sigui $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funció de diverses variables. Suposem que $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ i que cada una d'aquestes funcions escalars té derivades parcials en un punt a. La matriu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

s'anomena matriu *jacobiana* de F o matriu de les derivades parcials de F. La denotarem per $DF(a)$.

Exemple 3.16 Sigui $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per

$$F(x,y) = (x^2 + y^2 - 2xy,\ \sin(xy),\ x^2 \ln(x+3y))$$

La matriu jacobiana de F en un punt (x,y) del seu domini és

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y & 2y - 2x \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 2x\ln(x+3y) + \frac{x^2}{x+3y} & \frac{3x^2}{x+3y} \end{pmatrix}$$

La matriu jacobiana avaluada, per exemple, en el punt $(1,0)$ és

$$DF(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.4 Diferenciabilitat

Malauradament, l'existència de *totes* les derivades direccionals en un punt no implica ni tan sols que la funció sigui contínua en aquell punt.

Un exemple d'això ens el dóna la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

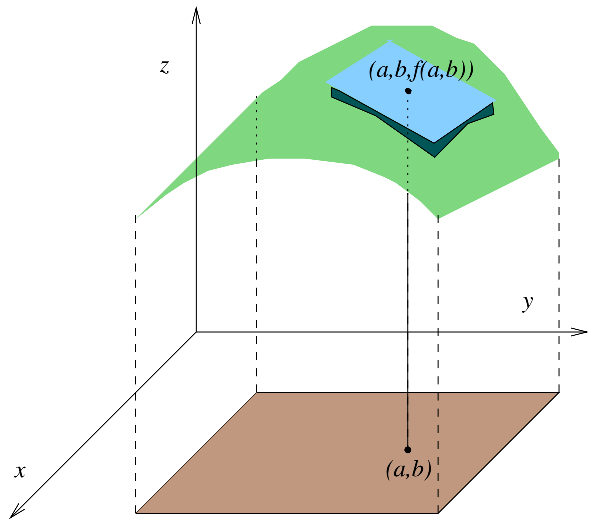
(Comproveu que no és contínua en $(0,0)$ prenent $x = y^2$...)

Necessitem una definició raonable de "derivada" d'una funció en un punt de manera que es compleixin propietats anàlogues a les que tenim per a les funcions d'una variable.

La definició no és senzilla. Per començar, la nomenclatura és diferent: ara parlarem de funció *diferenciable* en un punt.

Per introduir aquest concepte, vegem primer com hauria de ser l'equació del pla tangent a la gràfica d'una funció $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en un punt (a,b) del seu domini (suposant que la funció és prou maca com per tenir pla tangent).

Problema: Suposem que la superfície definida per l'equació $z = f(x,y)$ admet pla tangent en el punt $(a,b,f(a,b))$. Quina és l'equació d'aquest pla tangent?



Un pla no vertical té una equació de la forma $z = Ax + By + C$. Si el pla ha de ser tangent a la gràfica de f, els pendents al llarg dels eixos x i y han de coincidir amb $f'_x(a,b)$ i $f'_y(a,b)$, respectivament, que són les taxes de canvi de f respecte de x i y.

Per tant serà de la forma $z = f'_x(a,b)x + f'_y(a,b)y + C$.

Imposant que el pla passi pel punt $(a,b,f(a,b))$ trobem el valor de C.

L'equació del pla tangent és doncs:

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b).$$

El pla tangent és una "aproximació prou bona" de la funció f a prop de (a,b). Rigorosament:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - f'_x(a,b)(x-a) - f'_y(a,b)(y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0.$$

Aquesta és la idea que farem servir per dir que una funció és diferenciable en un punt (a,b).

Definició 3.17 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Es diu que f és *diferenciable* en (a,b) si existeixen les derivades parcials de f en (a,b) i

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - f'_x(a,b)(x-a) - f'_y(a,b)(y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0.$$

Teorema 3.18 *Si* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *és una funció* diferenciable *en un punt* (a,b) *del seu domini, aleshores la superfície* $z=f(x,y)$ *té un únic pla tangent en el punt* $(a,b,f(a,b))$ *i la seva equació és*

$$z-f(a,b)=f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)$$

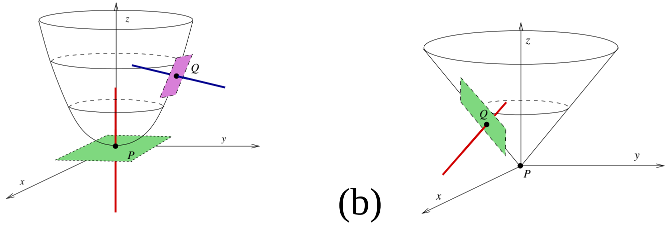
Definició 3.19 La recta perpendicular al pla tangent en el punt $P=(a,b,f(a,b))$ s'anonema *recta normal* a la superfície $z=f(x,y)$ en el punt P. La seva equació és

$$\frac{x-a}{f'_x(a,b)}=\frac{y-b}{f'_y(a,b)}=\frac{z-f(a,b)}{-1}$$

Exemples 3.20 Calculem el pla tangent i la recta normal a les superfícies següents en els punts que s'indiquen.

(a) $f(x,y)=2x^2+3y^2$ en $P=(0,0,0)$ i després en $Q=(0,1,3)$.

(b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ en $P=(0,0,0)$ i en $Q=(1,0,1)$.



(a) (b)

La definició de diferenciabilitat es pot generalitzar a funcions de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. El concepte de pla tangent és converteix en varietat lineal...

Teorema 3.21 *Si f és un camp escalar diferenciable en a, aleshores f és continu en a.*

Vegem ara una condició suficient de diferenciabilitat.

Teorema 3.22 *Sigui f un camp escalar $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existeixen totes les derivades parcials de f en a i aquestes són contínues en una bola oberta centrada en a, aleshores f és diferenciable en el punt a. (Es diu també que f és diferenciable amb continuïtat o de classe $\mathcal{C}^1$.)*

Observacions 3.23 (a) Un camp vectorial serà diferenciable si ho són tots els seus camps escalars components.

(b) Per tal que una funció sigui diferenciable en un punt del seu domini és necessari que existeixin totes les derivades parcials de la funció en aquest punt.

(c) Si un camp vectorial és diferenciable en un punt, segur que és continu en aquell punt. (Si la funció no és contínua en un punt, no hi pot ser diferenciable.)

3.5 La regla de la cadena

Considerem la composició de funcions següent:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^p \\ a & \longrightarrow & G(a) & \longrightarrow & F(G(a)) \end{array}$$

Teorema 3.24 *Suposem que G és diferenciable en a i que F és diferenciable en $G(a)$. Aleshores la funció $F \circ G$ és diferenciable en a i*

$$D(F \circ G)(a) = DF(G(a)) \cdot DG(a).$$

A la igualtat anterior, el producte que apareix és el producte de les matrius jacobianes respectives avaluades en els punts indicats.

Exemple 3.25 Siguin $G:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definides per les expressions:

$$G(x,y) = (x^2+2xy,\ 3x+2y^2) \qquad \text{i} \qquad F(u,v) = (2u,\ u-v,\ v^2)$$

Calculem, $D(F\circ G)(1,0)$, per exemple.

Serà:

$$D(F\circ G)(1,0) = DF(G(1,0))\cdot DG(1,0) = DF(1,3)\cdot DG(1,0)$$

Les matrius jacobianes de F i G són:

$$DF(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad DG(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2y & 2x \\ 3 & 4y \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$D(F\circ G)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

I en un punt (x,y) qualsevol, tindrem:

$$D(F\circ G)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2(3x+2y^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x+2y & 2x \\ 3 & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+4y & 4x \\ 2x+2y-3 & 2x-4y \\ 18x+12y^2 & 24xy+16y^3 \end{pmatrix}$$

Evidentment hi ha una altra manera de fer aquest exercici: efectuar la composició de les dues funcions i després calcular la matriu jacobiana.

Càlcul ràpid de la derivada direccional

Recordeu que derivada direccional de f en un punt a és:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Considereu la recta $r(t) = a + tv$ i la funció $g(t) = f(r(t))$. Aleshores

$$g'(0) = \nabla f(r(0)) \cdot r'(0) = \nabla f(a) \cdot v.$$

Resumint:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v}$$

Exemple 3.26 Ara podem respondre tres qüestions que teníem pendents.

Sabem que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = ||\nabla f(a)|| \cdot ||v|| \cdot \cos\alpha = ||\nabla f(a)|| \cdot \cos\alpha$$

essent α l'angle que formen el gradient i el vector v.

- La derivada direccional serà màxima quan $\alpha = 0$, és a dir, quan v tingui la mateixa direcció i sentit que $\nabla f(a)$, i el màxim val $||\nabla f(a)||$.
- La derivada direccional serà mínima quan $\alpha = \pi$, és a dir, quan v tingui la mateixa direcció que $\nabla f(a)$ però sentit oposat, i el mínim val $-||\nabla f(a)||$.
- La derivada direccional serà nul·la quan v sigui perpendicular a $\nabla f(a)$.

Exemple 3.27 Calculeu la derivada direccional de $f(x,y) = e^{xy}$ al punt $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ segons les direccions que s'indiquen:

(a) Seguint la direcció del vector $(3,4)$. (Solució: $\frac{7\sqrt{2}e}{10}$.)

(b) Seguint la direcció de màxim creixement de f. (Solució: $\sqrt{e}$.)

(c) Recorrent la corba $x^2 + y^2 = 1$ en sentit antihorari. (Solució: 0.)
(Per fer la derivada direccional d'una funció seguint la direcció d'una corba es considera el vector tangent a la corba en el punt corresponent.)

Una propietat geomètrica del gradient

- Per a un camp escalar de dues variables, el vector gradient en un punt (a,b) és perpendicular a la corba de nivell de $f(x,y)$ que passa per aquell punt.
- Per a un camp escalar de tres variables, el vector gradient en un punt (a,b,c) és perpendicular a la superfície de nivell de $f(x,y,z)$ que passa per aquell punt.

Vegem la primera propietat.

Considerem la corba de nivell $f(x,y)=k$, i sigui $r(t)=(x(t),y(t))$ una parametrització d'aquesta corba. Aleshores es compleix $f(r(t))=k$.

Derivant aquesta igualtat obtenim

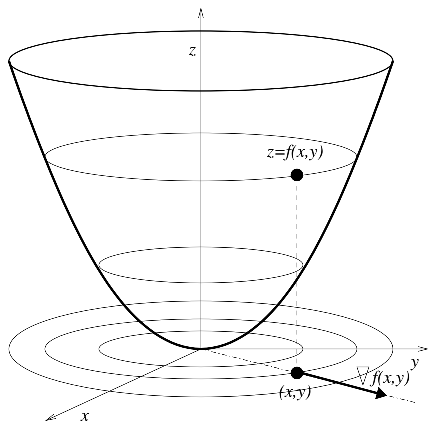
$$\nabla f(r(t))\cdot r'(t)=\nabla f(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t))=0,$$

igualtat que ens diu que el gradient és perpendicular al vector tangent a la corba.

Exemple 3.28 Donat el camp escalar de dues variables definit per $f(x,y)=x^2+y^2$, el seu gradient en un punt (x,y) és $\nabla f(x,y)=(2x,2y)$.

Les corbes de nivell són circumferències ($x^2+y^2=k$) centrades en $(0,0)$.

Noteu que en cada punt (x,y), el gradient té la direcció del radi i, per tant, és perpendicular a qualsevol corba de nivell.



Exemple 3.29 Trobem la recta normal i el pla tangent a l'el·lipsoide

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=3 \text{ en el punt } (1,1,2).$$

La recta normal serà: $(x,y,z)=(1,1,2)+t(2,2,1)$.

El pla tangent té equació $2x+2y+z=6$.

(Hi ha una altra manera de fer aquest aquest problema: quina?)

3.6 Derivades d'ordre superior. La fórmula de Taylor d'ordre 2

Derivades d'ordre superior

Sigui $f(x,y)$ una funció de dues variables. Les derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ depenen també de les variables x i y. Així, doncs, es poden derivar respecte de x i de y. Obtindrem quatre derivades parcials de *segon ordre*, que denotarem de la manera següent:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}$ $\quad f$ es deriva dues vegades respecte de x.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}$ $\quad f$ es deriva primer respecte de x i després respecte de y.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$ $\quad f$ es deriva primer respecte de y i després respecte de x.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$ $\quad f$ es deriva dues vegades respecte de y.

Les derivades parcials de segon ordre s'acostumen a escriure en una matriu, anomenada *matriu hessiana*:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.30 Trobem les derivades de segon ordre de la funció $f(x,y) = x^2 y + e^{xy}$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cdots = 2y + y^2 e^{xy}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cdots = 2x + (1+xy)e^{xy}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cdots = 2x + (1+xy)e^{xy}$

- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cdots = x^2 e^{xy}$

Les derivades de segon ordre es poden derivar de nou (n'obtindríem 8 derivades de tercer ordre):

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \cdots$$

Quantes derivades de segon ordre té una funció de tres variables? I de tercer ordre?

Problema: el resultat de la derivació d'una funció de diverses variables depèn o no de l'ordre de derivació respecte a les diferents variables? És a dir, per exemple,

$$¿ \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad ?$$

Teorema 3.31 *Si $f(x,y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ són funcions contínues a l'entorn d'un punt (a,b), aleshores*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

La fórmula de Taylor d'ordre 2

En aquest apartat donarem una aproximació d'una funció $z = f(x,y)$ a l'entorn d'un punt $(a,b,f(a,b))$ mitjançant un polinomi de dues variables de grau 1 o 2.

De fet, el polinomi de grau 1 ja sabem quin és. Quin?

Definició 3.32 Sigui $f(x,y)$ una funció de dues variables diferenciable almenys dues vegades i amb derivades segones contínues en un punt (a,b). Aleshores el polinomi

$$p_2(x,y) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}(x-a,y-b) \cdot Hf(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

és el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x,y)$ en el punt (a,b).

Desenvolupant la fórmula anterior s'obté:

$$p_2(x,y) = f(a,b) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right] +$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right]$$

Exemples 3.33 Trobem el polinomi de Taylor de grau 2 de les funcions següents en els punts que s'indiquen.

(a) $f(x,y) = e^x \sin(x+y)$ en $(0,0)$. (Solució: $p_2(x,y) = x+y+x^2+xy$.)

(b) $f(x,y) = e^{xy}$ en $(0,1)$. (Solució: $p_2(x,y) = 1+\frac{1}{2}x^2+xy$.)

Quins serien els polinomis de Taylor de grau 1 als mateixos punts?

Teorema 3.34 *(***La fórmula de Taylor d'ordre 2***)*
Sigui $f(x,y)$ una funció de dues variables diferenciable almenys dues vegades i amb derivades segones contínues en un punt (a,b). Aleshores

$$f(x,y) = p_2(x,y) + R_2(x,y)$$

on $R_2(x,y)$ tendeix cap a zero quan (x,y) tendeix cap a (a,b). (Es pot donar una expressió explícita de $R_2(x,y)$, que depèn de les derivades de tercer ordre.)

3.7 Extrems relatius per a camps escalars

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un camp escalar.

Definició 3.35
- Es diu que f té un *màxim relatiu* (o local) en un punt a si $f(a) \geq f(x)$ per a tot x d'un entorn de a.
- Es diu que f té un *mínim relatiu* (o local) en un punt a si $f(a) \leq f(x)$ per a tot x d'un entorn de a.

Per no dir sempre màxims o mínims, es parla d'*extrems* relatius.

Teorema 3.36 (Condició necessària d'extrem relatiu) *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Si f té extrem relatiu en un punt a de l'interior de D, aleshores $\nabla f(a) = \mathbf{0}$.*

DEMOSTRACIÓ. Donat un vector v, considerem la recta $r(t) = a + tv$ i restringim f sobre aquesta recta. Ens queda així una funció d'una variable: $g(t) = f(r(t)) = f(a + tv)$. Aquesta funció té extrem relatiu en $t = 0$ i, per tant,

$$g'(0) = \nabla f(a) \cdot v = 0.$$

Com que el raonament anterior és vàlid per a qualsevol vector no nul v, ha de ser $\nabla f(a) = 0$.

Noteu que, en el cas que f tingui tres variables, la condició $\nabla f(a) = \mathbf{0}$ vol dir

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0 \end{array}\right\}$$

Noteu també que el teorema **no** diu que on el gradient s'anul·la segur que hi ha extrem relatiu.

El resultat anterior es fa servir per determinar els punts on *potser* estaran els extrems relatius.

Definició 3.37 Els punts de la funció f on el gradient és nul s'anomenen *punts crítics* de f.

Resumint: per a funcions diferenciables,

els extrems relatius de f, si n'hi ha, s'assoleixen en punts crítics de f.

Exemple 3.38 Busquem els punts crítics de $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Calculem les derivades parcials, les igualem a zero i resolem el sistema d'equacions que s'obté:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y + 3 = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y - 2 = 0\end{array}\right\}$$

En aquest cas només hi ha un punt crític: $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Serà màxim relatiu? mínim relatiu? o cap de les dues coses?

Per poder contestar (parcialment) aquestes preguntes necessitem un altre resultat.

Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció amb derivades parcials de segon ordre contínues en un punt a. Denotarem per $Hf(a)$ la matriu hessiana de f avaluada en el punt a:

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

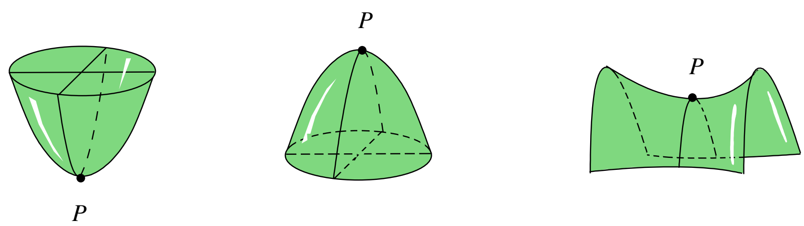
Teorema 3.39 (Condicions suficients d'extrem relatiu) *Sigui a un punt crític de f. Aleshores:*

(a) *Si* $\det\big(Hf(a)\big) > 0$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$, *la funció f té un mínim relatiu en a.*

(b) *Si* $\det\big(Hf(a)\big) > 0$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, *la funció f té un màxim relatiu en a.*

(c) *Si* $\det\big(Hf(a)\big) < 0$, *la funció té un* punt de sella *en a.*

(d) *Si* $\det\big(Hf(a)\big) = 0$, *pot haver–hi o no extrem relatiu en a. Per saber–ho cal fer un estudi més detallat de la funció.*



Per funcions de més de dues variables també hi ha un criteri suficient d'extrem relatiu. Sigui a un punt crític de f i $Hf(a)$ la matriu hessiana de f en aquest punt crític:

$$Hf(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

Calculem els determinants principals

$$A_1 = D_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ A_n = \det Hf(a).$$

Aleshores:

- $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$, ..., $A_n > 0 \Longrightarrow f$ té un mínim relatiu en a.
- $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, etc. $\Longrightarrow f$ té un màxim relatiu en a.
- $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$, $A_3 \geq 0$, ..., $A_n \geq 0$ i algun d'ells és zero, el criteri no decideix.
- $A_1 \leq 0$, $A_2 \geq 0$, $A_3 \leq 0$, etc. i algun d'ells és zero, el criteri no decideix.
- En altre cas no hi ha extrem en a: és un punt de sella.

(Aquest resultat s'anomena criteri de Sylvester.)

Ara podem acabar l'exemple d'abans.

Exemple 3.40 La funció

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

té només un punt crític: $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Vegem si en aquest punt hi ha extrem relatiu o punt de sella.

Calculem la matriu hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Noteu que la matriu hessiana és constant.

Avaluada en el punt $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ s'obté la mateixa matriu.

El determinant és 3 i $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) > 0$.

Per tant, en aquest punt hi ha un mínim relatiu.

Vegem altres exemples.

Exemples 3.41 (a) Determinem els extrems relatius de la funció

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy.$$

Primer busquem els punts crítics:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}\right\}$$

De la segona equació traiem $x = y^2$.
Substituint aquesta relació a la primera equació obtenim

$$y^4 + y = 0 \quad \text{o} \quad y(y^3 + 1) = 0,$$

que té solucions $y = 0$ i $y = -1$.
Com que $x = y^2$, per $y = 0$ s'obté $x = 0$; i per $y = -1$ s'obté $x = 1$.
És a dir, la funció f té dos punts crítics: $(0,0)$ i $(1,-1)$.
Calculem la matriu hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

I ara l'avaluem a cada un dels punts crítics:

- En el punt $(0,0)$:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

com que el determinant és negatiu, en $(0,0)$ hi ha un punt de sella.

- En el punt $(1,-1)$:

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

com que el determinant és positiu i la $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(1,-1) = 6 > 0$, en el punt $(1,-1)$ hi ha un mínim relatiu.

(b) Determineu els extrems relatius de la funció $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ quan $0 < x < \pi$ i $0 < y < \pi$. (Sol. Té un màxim relatiu en el punt $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$).

(c) El polinomi de Taylor de grau 2 d'una certa funció $f(x,y)$ en el punt $(0,0)$ és $p_2(x,y) = xy$. Té f extrem relatiu $(0,0)$?

(d) Comproveu que si A, B i C són nombres reals no nuls, aleshores la funció $f(x,y) = Ax^3 + Bxy + Cy^2$ té un punt de sella i un extrem relatiu. Quines condicions han de satisfer A, B i C per tal que la funció tingui un màxim relatiu?

(e) Determineu els extrems relatius de la funció $f(x,y) = y^2 - 4x^2y + 4x^4 - 2$. (Sol. Té mínim relatiu als punts de la forma $y = 2x^2$.)

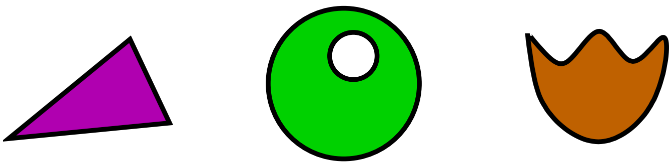
3.8 Extrems absoluts en un conjunt compacte

Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un camp escalar.

Definició 3.42
- Es diu que f té un *màxim absolut* en un punt $a \in D$ si $f(a) \geq f(x)$ per a tot $x \in D$.
- Es diu que f té un *mínim absolut* en un punt $a \in D$ si $f(a) \leq f(x)$ per a tot $x \in D$.

El teorema de Weierstrass que coneixem per a funcions d'una variable admet una generalització per a funcions de diverses variables.

Teorema 3.43 (Teorema de Weierstrass)
Sigui f un camp escalar continu definit en un conjunt compacte D. Aleshores f assoleix en D un màxim i un mínim absoluts.



Com determinar el màxim i el mínim absoluts?

- Primer es busquen els punts crítics de f dins de D (a l'interior del conjunt D).
- Després es busquen els punts crítics de f restringida a la frontera de D.
- Es calculen les imatges de tots els punts crítics (tant els de l'interior de D com els de la frontera).
- Es comparen els valors anteriors i se seleccionen el major i el menor, que seran, respectivament, el màxim absolut i el mínim absolut.

Exemple 3.44 Determinem els extrems absoluts de la funció $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ en el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Evidentment f és contínua: és polinòmica.

També és clar que D és un conjunt compacte: és un disc centrat en $(0,0)$ de radi 1. (La frontera de D és la circumferència $x^2 + y^2 = 1$.)

És a dir, l'existència de màxim i mínim absoluts està assegurada. Per trobar–los seguim el procediment descrit abans:

- Els punts crítics de f dins de D són aquells que anul·len el gradient de f i que estan dins de D. En aquest cas tenim:

$$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y) = (0,0)$$

La solució del sistema anterior és $x = y = 0$. Ja tenim un punt crític: $P_1 = (0,0)$. (Efectivament $P_1 \in D$).

- Ara hem de restringir f sobre la frontera de D i trobar–hi els punts crítics. Per fer això tenim, de moment, dues opcions: aïllar una de les variables i substituir–la en la funció o (preferible aquí) parametritzar la corba.

  Una parametrització de la corba és $r(t) = (\cos t, \sin t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$. La funció avaluada sobre la corba anterior serà

$$f(x,y) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t = 1 + \frac{1}{2}\sin 2t.$$

  Els punts crítics d'aquesta funció són

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

  A més a més, hem de tenir en compte els punts corresponents a $t = 0$ i a $t = 2\pi$, que en aquest cas coincideixen per ser la corba tancada: $P_6 = P_7 = (1,0)$.

- Per determinar el màxim i el mínim absoluts només cal avaluar la funció $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ als punts anteriors i comparar els resultats:

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f(0,0) = 0 & f(P_4) &= f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{1}{2} \\ f(P_2) &= f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{3}{2} & f(P_5) &= f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{1}{2} \\ f(P_3) &= f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{3}{2} & f(P_6) &= f(1,0) = 1 \end{aligned}$$

- Així, doncs, el màxim absolut de la funció val $\frac{3}{2}$ s'assoleix als punts P_2 i P_3. El mínim absolut val 0 i s'assoleix al punt $(0,0)$.

Exemple 3.45 Justifiqueu l'existència i determineu els extrems absoluts de la funció $f(x,y) = xy$ sobre el conjunt del pla fitat per les corbes $y = x^2 + 4$ i $y = x^4 - 2x^2$.

3.9 Extrems condicionats. Els multiplicadors de Lagrange

Descripció del problema: L'objectiu és determinar els extrems absoluts d'una funció escalar $f(x,y)$ quan els punts (x,y) tenen la restricció de pertànyer a un cert subconjunt S de $\mathbb{R}^2$ de la forma $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$.

Exemple 3.46 Trobeu el màxim i el mínim absoluts de la funció $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ sobre el conjunt $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

Hi ha diverses maneres de resoldre aquest problema:

(a) Aïllar una de les variables a l'equació $g(x,y) = 0$ i substituir–la a la funció $f(x,y)$. Així s'introdueix la restricció en la funció f i ens queda un problema d'extrems absoluts amb una variable.

Al nostre cas seria $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ amb $x \in [-1,1]$ ...

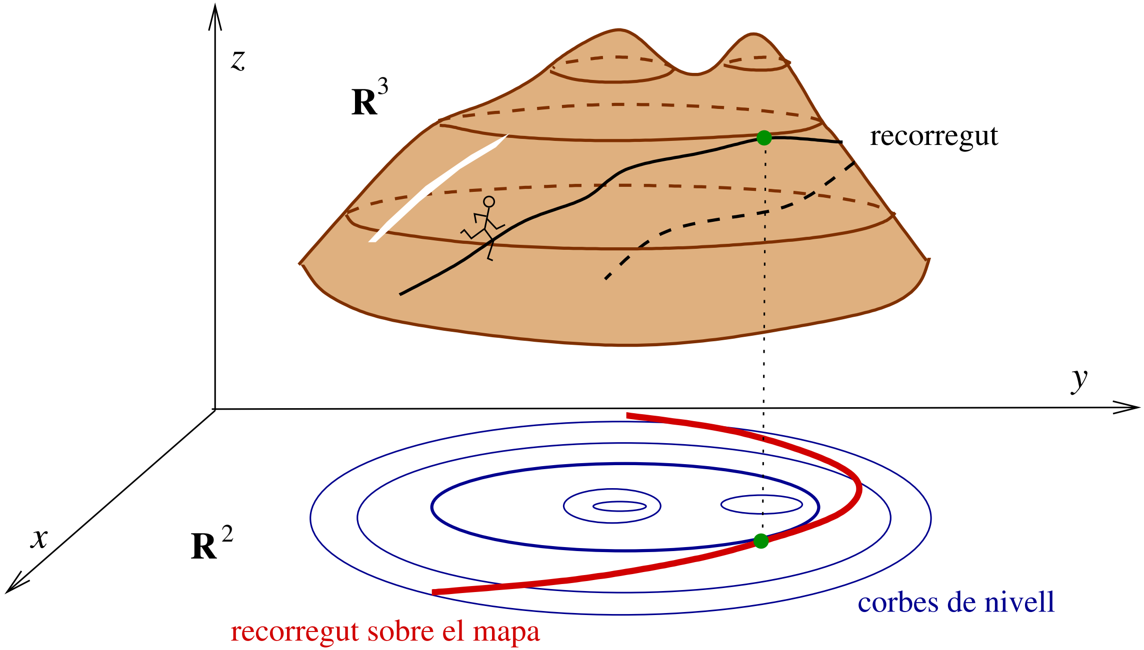
(b) Parametritzar el conjunt S (per exemple si es tracta d'una corba...).

Al cas que ens ocupa seria, per exemple, $r(t) = (\cos t, \sin t)$ amb $t \in [0,2\pi]$ i substituir a la funció...

(c) Si no sabem, no podem o no volem aplicar cap dels dos mètodes anteriors, aleshores es pot fer servir l'anomenat *mètode dels multiplicadors de Lagrange*.

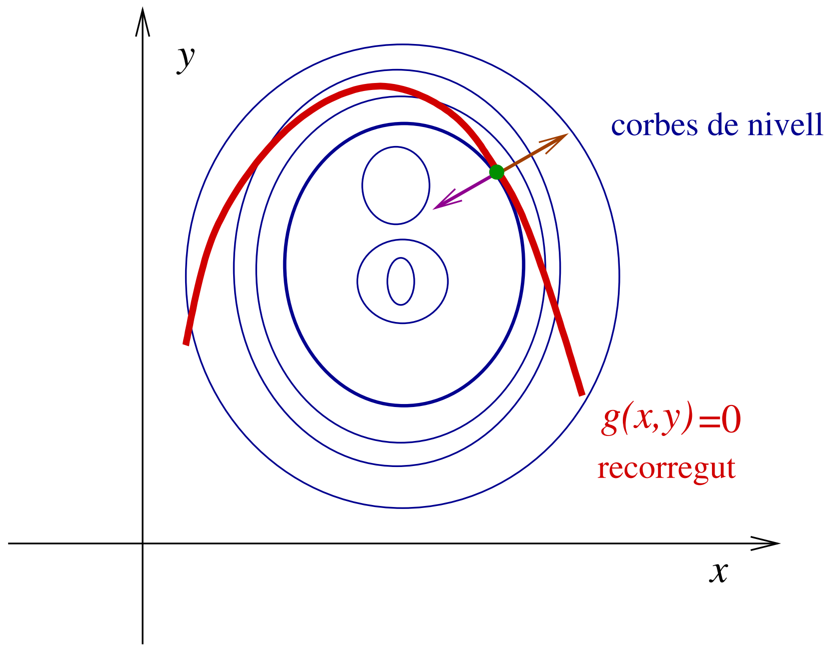
Vegem primer la idea geomètrica en què es fonamenta aquest mètode.

Suposem que seguim un camí per la muntanya i volem saber quina és l'altura màxima que assolim en aquest camí (i. e. es vol determinar el màxim de la funció altura amb la restricció que els punts de la muntanya que ens interessen són només els que pertanyen al camí que seguim: el camí és la restricció).



És clar que, al punt més alt de la trajectòria P, la corba de nivell que passa per P és tangent al camí que seguim. Abans d'aquest punt màxim les corbes de nivell tallen el camí en més d'un punt, i després ja no el tallen.

Així, doncs, per trobar els extrems d'una funció f al llarg d'una corba C podríem dibuixar les corbes de nivell de f i veure quines i a on són tangents a C. Tanmateix, això és força difícil.



Però la idea geomètrica ens proporciona una condició analítica que podem aprofitar: la normal a la corba de nivell de f en P té la mateixa direcció que la normal a la trajectòria C.

O, en altres termes:

$$\nabla f(P) \,||\, \nabla g(P)$$

Equivalentment:

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

Per tant, hem de buscar els punts P de la corba C ($g(P) = 0$) que satisfan la relació

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

És a dir, hem de buscar les solucions del sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

O, equivalentment:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\big(f - \lambda g\big)(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

La funció $L = f - \lambda g$ s'anomena *funció de Lagrange* o lagrangiana i λ és el multiplicador de Lagrange.

Noteu que λ és un paràmetre auxiliar que introduïm i que, de vegades, haurem de calcular com a pas previ per determinar les solucions del sistema.

Exemple 3.47 Determineu els màxims i mínims de la funció $f(x,y) = 2x + 3y$ al llarg de la circumferència definida per $x^2 + y^2 = 1$.

Fer–ho aplicant els tres mètodes que hem vist:

(a) Aïllant.

(b) Parametritzant.

(c) Lagrange.

(Sol. El màxim s'assoleix en $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ i el mínim en $\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$.)

Al teorema següent es resumeix i es generalitza el mètode de Lagrange.

Teorema 3.48 Mètode dels multiplicadors de Lagrange.

(a) *Siguin* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. *Si* f *té un màxim o un mínim en un punt* $P \in S$, *aleshores existeix un* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) \\ g(P) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

(b) *Quan* S *està definida per més d'una restricció, el mètode també es pot aplicar:*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_k(x) = 0\}$$

Si f *té un màxim o un mínim en un punt* $P \in S$, *aleshores existeixen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *tals que*

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \lambda_2 \nabla g_2(P) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(P) \\ g_1(P) = 0 \\ g_2(P) = 0 \\ \cdots \\ g_k(P) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Si S és un conjunt compacte aleshores els extrems absoluts de f sobre S es troben entre les solucions de $(*)$.

Exemple 3.49 Determineu les distàncies màxima i mínima de l'origen de coordenades a la corba intersecció del cilindre $x^2+y^2=1$ amb el pla $x-z+1=0$. (És la corba un conjunt compacte?)

Mètode 1. Lagrange

Funció a optimitzar: $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ o (preferible) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Les restriccions són l'equació del cilindre i la del pla.

Mètode 2. Parametritzar

Podríem trobar una parametrització de la corba intersecció d'aquestes dues superfícies?

3.10 El teorema de la funció implícita

A l'assignatura Àlgebra Lineal us van ensenyar a resoldre sistemes d'equacions lineals compatibles indeterminats.

Per donar la solució d'un d'aquests sistemes el que es fa és posar unes incògnites (les principals) en funció d'unes altres (les lliures).

Quines incògnites poden ser lliures? Quines no?

Exemple 3.50 Al següent sistema compatible indeterminat, determinem les incògnites principals i les lliures:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+t &= 4 \\ 2x+3y+z+t &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Problema: decidir si una equació o sistema d'equacions (no necessàriament lineals) defineix implícitament unes variables en funció d'unes altres.

Comencem per un exemple concret: l'equació $x^2+y^2-4=0$ defineix implícitament y en funció de x:

$$y=\sqrt{4-x^2} \quad \text{o} \quad y=-\sqrt{4-x^2}$$

Quina de les dues?

Sense més informació no podem decidir quina de les dues funcions és la que ens interessa.

Tanmateix, si ens pregunten si l'equació $x^2+y^2-4=0$ defineix y en funció de x al voltant del punt $(0,2)$ això ens permet decidir que es tracta de la primera: $y=\sqrt{4-x^2}$ ($x=0 \implies y=2$).

És una qüestió local

A l'exemple anterior hem pogut aïllar y. I si no sabem o no podem fer–ho?

Exemple 3.51 A l'equació $y^2+z^2+xz-e^z-4=0$ no sabem aïllar z. Això no vol dir, però, que la z no es pugui posar en funció de x i y als punts que són solució de l'equació.

Teorema 3.52 Teorema de la funció implícita definida per una equació
Sigui $F(x_1,\ldots,x_n)=0$ una equació de n variables. Suposem que F és una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en un entorn d'un punt $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ tal que $F(a_1,a_2,\ldots,a_n)=0$ i que $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq 0$. Aleshores existeix un entorn U de $(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ i una funció f de classe $\mathcal{C}^1$ tal que

- $a_n=f(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$.
- $x_n=f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ *per a tot* $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in U$.
- $F\big(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\big)=0$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$.

Exemple 3.53 Comprovem que l'equació $y^2+xz+z^2-e^z=4$ defineix $z=f(x,y)$

en un entorn del punt $(0,e,2)$. Calculeu les derivades parcials de $f(x,y)$ en el punt $(0,e)$.

Primer considerem la funció $F(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$, que és diferenciable a qualsevol punt. (De fet és de classe $\mathcal{C}^\infty$.) I comprovem si es compleixen les hipòtesis:

- $F(0,e,2) = 0$ i $\frac{\partial F}{\partial z}(0,e,2) = 4 - e^2 \neq 0$.

Per tant, podem assegurar que efectivament l'equació $y^2 + xz + z^2 - e^z = 4$ defineix z com a funció implícita diferenciable de x i de y en un entorn del punt $(0,e,2)$: $z = f(x,y)$.

Com trobar les derivades parcials de $f(x,y)$?

El teorema que hem vist es pot generalitzar al cas de sistemes d'equacions.

Teorema 3.54 Teorema de les funcions implícites definides per un sistema d'equacions
Considerem el sistema d'equacions donat per

$$\left.\begin{array}{r} F_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)=0 \\ F_2(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)=0 \\ \dots \\ \dots \\ F_n(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)=0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

Suposem que cada F_i és de classe $\mathcal{C}^1$ en un entorn d'un punt $A=(a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_n)$ que és solució del sistema $(*)$ ($F_i(A)=0$ per a cada i). I suposem també que el determinant

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{array}\right|_A \neq 0.$$

Aleshores exiteixen un entorn U de $(a_1,\dots,a_k)$ i n funcions $f_1,\dots f_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ tals que

- $b_i=f_i(a_1,\dots,a_k)$ *per* $i=1,\dots,n$
- $y_i=f_i(x_1,\dots,x_k)$ *per a* $i=1,\dots,n$ *i per a tot* $(x_1,\dots x_k)\in U$ *i compleixen* $(*)$.

Les funcions f_i s'anomenen funcions implícites definides pel sistema $(*)$.

Com al cas d'una sola funció, es poden calcular les derivades parcials de les f_i. Per fer–ho cal resoldre un sistema d'equacions lineals.

Exemples 3.55 (a) Comencem per un sistema d'equacions lineals compatible indeterminat. Quines variables del sistema poden ser lliures?

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z-t &= 0 \\ 2x+4y-z+2t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(b) Demostreu que les equacions

$$\left.\begin{aligned} 2x &= v^2-u^2 \\ y &= uv \end{aligned}\right\}$$

defineixen u i v en funció de x i y a tot punt tal que $u,v \neq 0$. Trobeu $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial u}{\partial y}$. (Nota: en aquest exemple es poden aïllar u i v en funció de x i y.)

(c) Donat el sistema

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 3 \\ xy+yz+xz &= -1 \end{aligned}\right\}$$

(1) Demostreu que les seves solucions defineixen un corba parametritzada C de la forma $r(z)=(x(z),y(z),z)$ en un entorn del punt $P=(-1,1,-1)$.

(2) Escriviu l'equació de la recta tangent a la corba en P.

Exemple 3.56 Comproveu que l'equació $x^3+y^3+3xy+3=0$ defineix y com a funció implícita diferencialble de x en un entorn del punt $(1,-1)$. Sigui $f(x)$ aquesta funció. Té f extrem relatiu en $x=1$?

3.11 El teorema de la funció inversa

Problema: Donada una funció $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, quan admet inversa?

Podem donar solució local a aquest problema.

Teorema 3.57 *Siguin $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funció de classe C^1 i a un punt del domini de F. Si el determinant de la matriu jacobiana de F és diferent de zero en el punt a, aleshores la funció F té inversa local de classe C^1 i, a més a més,*

$$D(F^{-1})(F(a)) = \big(DF(a)\big)^{-1}$$

Noteu que potser no coneixem F^{-1} però sí les seves derivades parcials en un punt.

Exemples 3.58 (a) Sigui $F(x,y) = (3x+2y^2, 1-xy)$. Té F inversa local al punt $(-1,1)$? En cas afirmatiu calculeu $D(F^{-1})(-1,2)$.

(b) Demostreu que el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

defineix les variables u i v com a funcions implícites de x i y en un entorn del punt $(x,y,u,v) = (2,-1,2,1)$.

Siguin $u(x,y)$ i $v(x,y)$ aquestes funcions implícites. Si $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, podem assegurar que F és inversible en un entorn del punt $(2,-1)$? Raoneu la resposta. En cas afirmatiu, calculeu $DF^{-1}(2,1)$.

(c) Considereu l'equació

$$z^3 - 2xz + y = 0.$$

(1) Comproveu que l'equació anterior defineix la variable z com a funció implícita diferenciable de x i y en un entorn del punt $(1,-4,2)$. Sigui $z = f(x,y)$ aquesta funció.

(2) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 1 de $f(x,y)$ en el punt $(1,-4)$.

(3) Es defineix $F(x,y) = \big(x, f(x,y)\big)$. Comproveu que F admet inversa diferenciable en un entorn del punt $(1,-4)$ i determineu $D\big(F^{-1}\big)(1,2)$.

(d) Quan admet inversa una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$?

4 Càlcul integral

4.1 Integrals dobles

El problema de calcular àrees planes va donar lloc al concepte d'integral d'una funció real de variable real (Càlcul I).

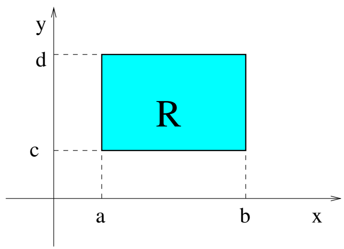
El problema de *calcular volums de sòlids* a l'espai dóna origen a la noció d'integral doble (o integral d'una funció real de dues variables).

Objectiu: calcular integrals de funcions de dues variables en recintes del pla.

Començarem pels recintes més senzills.

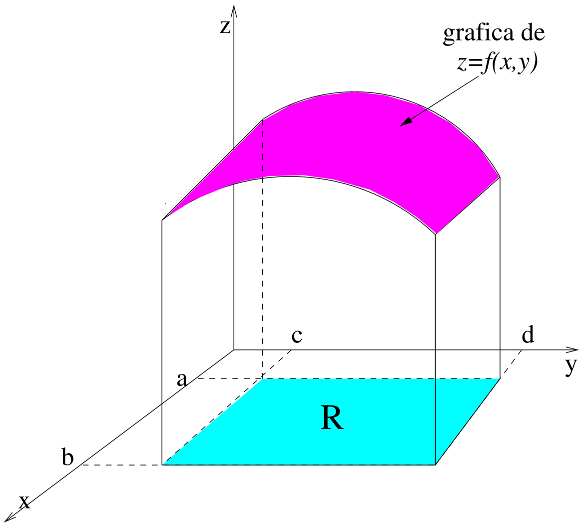
La integral doble sobre rectangles

Sigui f una funció contínua de dues variables definida sobre un rectangle R del pla xy.



$$R = [a,b] \times [c,d]$$

Suposem que $f(x,y) \geq 0$.



Considerem la regió V de l'espai que està per sobre de R i per sota de la gràfica de f.

Definició 4.1 El volum de la regió V situada per sobre de R i per sota de la gràfica de $f(x,y)$ s'anomena *integral doble* de $f(x,y)$ sobre R i es denota per

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy.$$

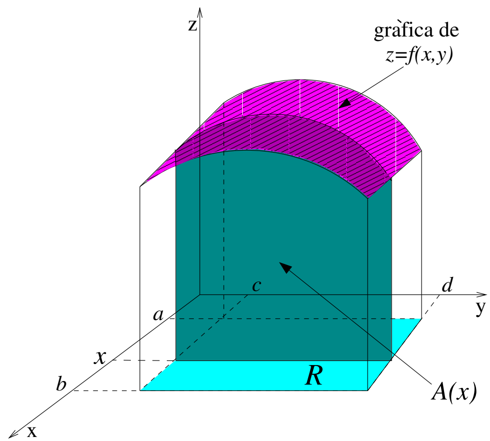
Exemple 4.2 Si $f(x,y) = k$ amb $k \geq 0$ aleshores

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = k(b-a)(d-c).$$

Problema: si $f(x,y)$ no és constant, com calcular la integral doble resultant?

Hi ha un mètode bastant útil per calcular volums: *el principi de Cavalieri* o mètode de la secció transversal.

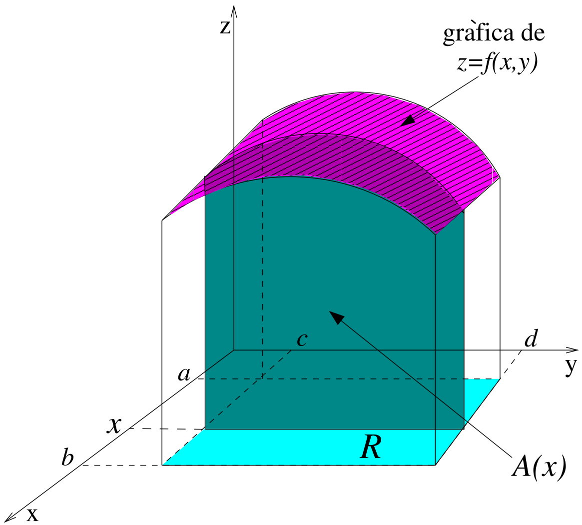
Suposem que tenim un cos sòlid V (definit com abans) i que per a cada x compresa entre a i b coneixem l'àrea de la secció transversal que s'obté en tallar el sòlid per un pla vertical perpendicular a l'eix OX i que passa per x.

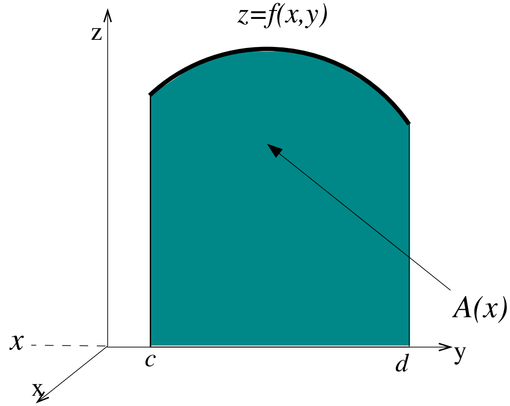


Denotarem per $A(x)$ l'àrea d'aquesta secció transversal. Aleshores, segons el principi de Cavalieri, el volum del sòlid és

$$Volum(V) = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Farem servir el principi de Cavalieri per avaluar integrals dobles. Només cal adonar–se quant val $A(x)$.





L'àrea de la secció transversal $A(x)$ es calcula fent una integral d'una variable:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Per tant,

$$\boxed{Volum(V) = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx.}$$

La integral $\displaystyle\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$ s'anomena *integral iterada*, ja que es determina integrant primer respecte de y i després integrant el resultat obtingut respecte de x.

Observació 4.3 Evidentment, el raonament anterior continua essent vàlid si els plans verticals de tall són perpendiculars a l'eix OY. En aquest cas, obtenim

$$Volum(V) = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Tenim, doncs, el resultat següent.

Teorema 4.4 (Teorema de Fubini) *Sigui f una funció contínua en un rectangle $R=[a,b]\times[c,d]$. Aleshores:*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Exemples 4.5 (a) Siguin $f(x,y)=x^2+y^2$ i $R=[0,1]\times[0,2]$.

Calculeu $\iint_R f(x,y)dxdy$. (Sol. $\frac{10}{3}$.)

(b) Siguin $f(x,y)=\cos x \sin y$ i $R=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.

Calculeu $\iint_R f(x,y)dxdy$. (Sol. 1.)

La integral doble sobre recintes més generals

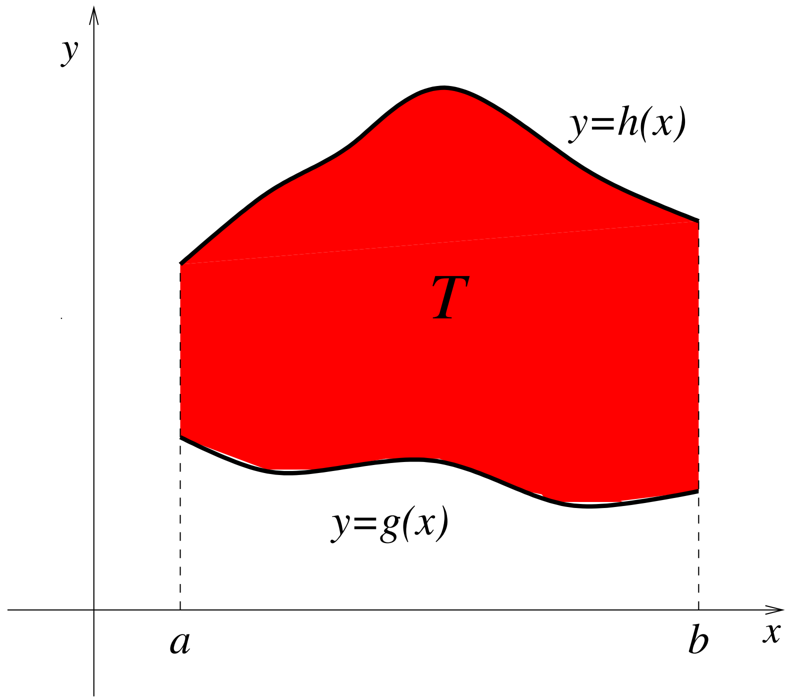
Calcularem integrals dobles sobre regions de $\mathbb{R}^2$ més generals que els rectangles. Bàsicament, considerarem dos tipus de regions.

(Atenció: els dibuixos que veurem representen únicament les regions sobre les quals farem les integrals dobles; no hi apareix enlloc la gràfica de la funció de dues variables que hem d'integrar.)

- *Regions de tipus I.* Són aquelles que es poden descriure de la manera següent:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ i } g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

essent $g(x)$ i $h(x)$ funcions contínues en $[a,b]$ i tals que $g(x) \leq h(x)$ per a tot $x \in [a,b]$.

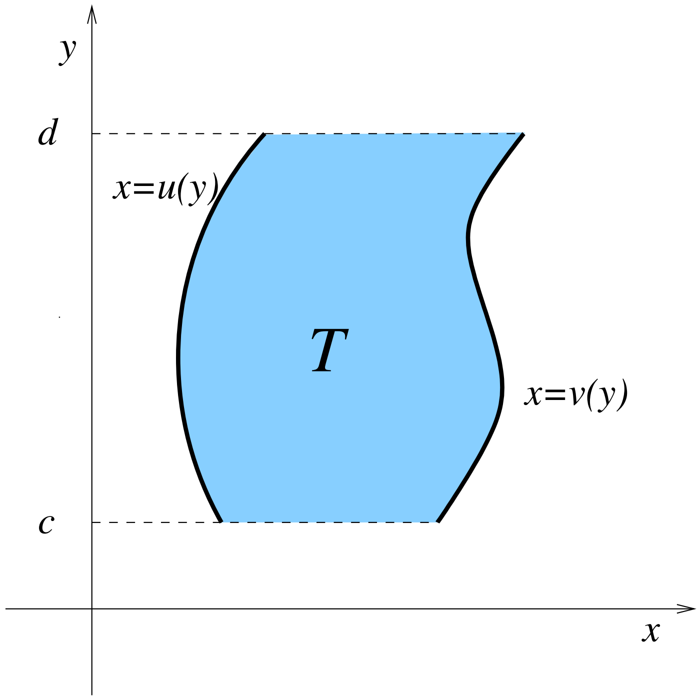


Regió de tipus I

- *Regions de tipus II.* Són aquelles que es poden descriure de la manera següent:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \leq y \leq d \;\text{ i }\; u(y) \leq x \leq v(y)\},$$

essent $u(y)$ i $v(y)$ funcions contínues en $[c,d]$ tals que $u(y) \leq v(y)$ $\forall y \in [c,d]$.



Regió de tipus II

A les regions de tipus I i tipus II les anomenarem *regions elementals* en el pla.

Observació 4.6 Algunes regions elementals es poden descriure com regions de tipus I i també com regions de tipus II. Depenent de la integral a calcular, haurem de decidir quina de les dues descripcions és més convenient.

Exemples 4.7 Descriure els conjunts següents com regions de tipus I i de tipus II.

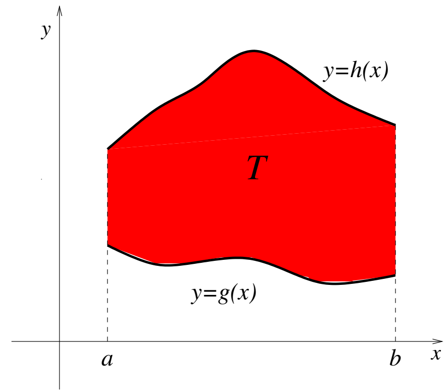
(a) El disc de radi a centrat a l'origen de coordenades.

(b) El triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(2,0)$ i $(1,1)$.

Per calcular una integral doble d'una funció $f(x,y)$ sobre un recinte del tipus anterior, procedirem de la manera següent:

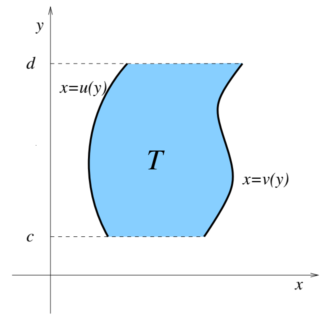
- Sobre una regió de tipus I:

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$



- Sobre una regió de tipus II:

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$



Exemples 4.8 Calculeu el valor de la integral de la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre:

(a) El triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(2,0)$ i $(1,1)$.

(b) El disc de radi a centrat a l'origen de coordenades.

(Noteu que, en ambdós casos, el resultat que s'obtingui representarà un volum. Quin?)

(a) Al primer cas és preferible descriure el triangle com una regió de tipus II:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 \text{ i } y \le x \le 2-y\}.$$

La integral quedarà:

$$\iint_T (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x^2+y^2)dx \right) dy = \cdots = \frac{4}{3}$$

Com quedaria la integral si haguéssim descrit T com una regió de tipus I?

(b) Al segon exemple tant fa com descriguem el disc. Aquí la dificultat la trobem en fer la integral:

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\right)dx$$
$$= \int_{-a}^{a}\left(2x^2\sqrt{a^2-x^2} + \frac{2\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)dx = \cdots$$

Observació 4.9 Tot i que la integral doble s'introdueix per calcular volums, també serveix per calcular àrees planes:

$$\text{Àrea}(T) = \iint_T 1\,dxdy.$$

Per què?

4.2 El canvi de variable a la integral doble

El canvi de variable en general

Suposeu que hem de calcular

$$\iint_{A_{xy}} f(x,y)\,dxdy.$$

Si no sabem fer-la (o resulta molt difícil) amb les coordenades cartesianes, podem intentar un *canvi de variable*.

Un canvi de variable consisteix a fer

$$\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \end{cases}$$

Tanmateix, les funcions $g_i(u,v)$ no poden ser qualssevol. (Per exemple, imagineu que fem $x = 3$ i $y = 0$.)

Per tal que les funcions g_1 i g_2 proporcionin realment un canvi de variable s'han de complir un seguit de condicions.

- Hem de determinar una regió D_{uv} tal que la funció $G : D_{uv} \longrightarrow A_{xy}$ definida per $G(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$ sigui bijectiva (serà $x = g_1(u,v)$ i $y = g_2(u,v)$).
- Les funcions g_1 i g_2 han de ser $\mathcal{C}^1$ en D_{uv}.
- El determinant de la matriu jacobiana o jacobià de G ha de ser diferent de zero en tota la regió D_{uv}:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{per a tot } (u,v) \in D_{uv}.$$

Si es compleixen les condicions anteriors, aleshores

$$\boxed{\iint_{A_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_{uv}} f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)\,|J|\,dudv.}$$

Normalment, el procés de determinar la regió D_{uv} es realitza observant com es descriu la regió A_{xy} fent servir les noves variables u i v.

(L'aparició de J no hauria de sorprendre...)

El canvi a coordenades polars

Un canvi molt freqüent a la integral doble consisteix a utilitzar les coordenades polars:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

En aquest cas tenim $g_1(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$ i $g_2(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$. El jacobià d'aquest canvi serà, doncs,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \rho} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \rho} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

La regió $D_{\rho\varphi}$ on varien ρ i φ dependrà del problema concret que haguem de resoldre.

Exemples 4.10 (a) Tornem a l'exemple que havíem deixat abans: calcular la integral de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre el disc de radi a centrat en $(0,0)$.

El disc, en coordenades polars, es descriu fent variar el radi ρ entre 0 i a, i l'angle φ entre 0 i 2π.

La funció $f(x,y) = x^2 + y^2$ en coordenades polars és $f(\rho,\varphi) = \rho^2$.

Per tant,

$$\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D_{\rho\varphi}} \rho^2\,\rho\,d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \rho^3\,d\rho\right)d\varphi = \frac{\pi a^4}{2}.$$

(b) Sigui D el tros de corona circular comprès entre les circumferències $x^2+y^2 = a^2$ i $x^2+y^2 = b^2$ situat al primer quadrant, essent $0 < a < b$. Calculeu

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy.$$

(Sol. $\frac{\pi}{2}\left[b^2\ln b - a^2\ln a - \frac{1}{2}(b^2-a^2)\right]$.)

(c) Escriviu en coordenades polars la integral doble:

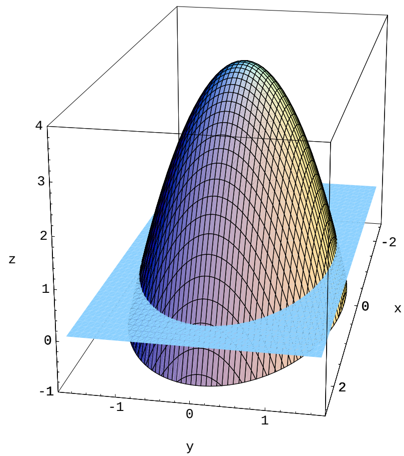
$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

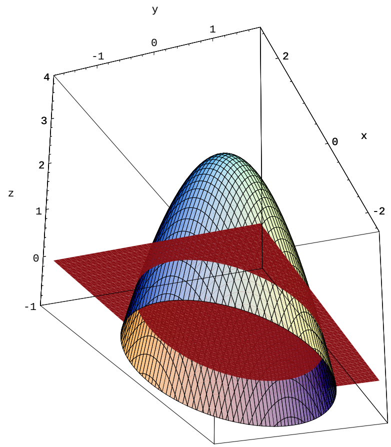
essent $R = [0,1]\times[0,1]$. Indiqueu el volum que estem calculant. (No cal avaluar la integral.)

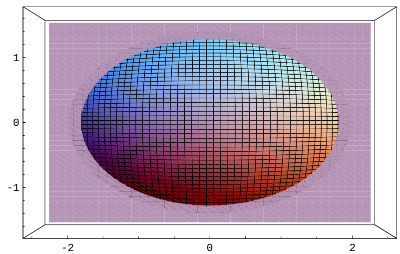
(Sol. $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\sec\varphi}\rho^2\,d\rho\right)d\varphi$)

(d) Trobeu el volum de la regió sòlida limitada pel paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ i el pla $z = 0$.

A les gràfiques següents teniu la regió sòlida limitada entre el paraboloide i el pla des de diferents punts de vista. La darrera gràfica mostra la projecció d'aquesta regió sobre el pla $z = 0$.







$$V = \iint_E (4 - x^2 - 2y^2)\,dxdy = 4\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} (4 - x^2 - 2y^2)\,dy \right) dx$$
$$= 4\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} (4 - x^2 - 2y^2)\,dy.$$

Per calcular aquesta integral és preferible fer un canvi de variable:

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\varphi \end{cases}$$

amb $0 < \rho < 1$ i $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

El jacobià d'aquest canvi en valor absolut és $|J| = 2\sqrt{2}\rho$. Per tant,

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (4 - 4\rho^2\cos^2\varphi - 4\rho^2\sin^2\varphi) 2\sqrt{2}\rho\,d\rho = \cdots = 4\pi\sqrt{2}.$$

Observació 4.11 Quan el recinte on hem de fer la integral és una el·lipse d'equació reduïda $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, de vegades és convenient fer el canvi a *coordenades el·líptiques* (una modificació de les coordenades polars):

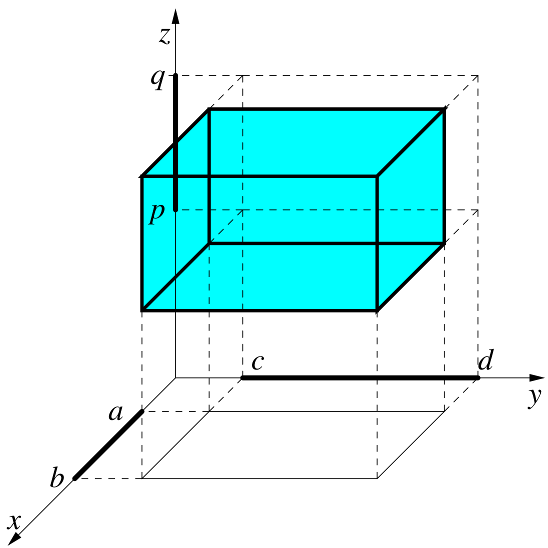
$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{amb } 0 < \rho < 1 \text{ i } 0 < \varphi < 2\pi. \quad |J| = ab\rho.$$

4.3 Integrals triples

Si la densitat d'un sòlid no és uniforme, aleshores per calcular la seva massa es necessita una *integral triple*, o el que és el mateix, una integral d'una funció real de tres variables sobre una regió de l'espai.

Com al cas de la integral doble, començarem primer pels recintes més senzills: els ortoedres (les "caixes").

Sigui P l'ortoedre definit per $P = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$:



Donada una funció $f(x,y,z)$ contínua sobre P, es defineix

$$\begin{aligned}\iiint_P f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_p^q \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,dx\right) dy\right) dz \\ &= \int_p^q \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)\,dy\right) dx\right) dz \\ &= \int_a^b \left(\int_p^q \left(\int_c^d f(x,y,z)\,dy\right) dz\right) dx \\ &= \cdots\end{aligned}$$

(Quants ordres possibles hi ha?)

Exemple 4.12 Sigui P l'ortoedre definit per $[0,1]\times[-\frac{1}{2},0]\times[0,\frac{1}{3}]$. Determineu

$$\iiint_P (x+2y+3z)^2 dxdydz.$$

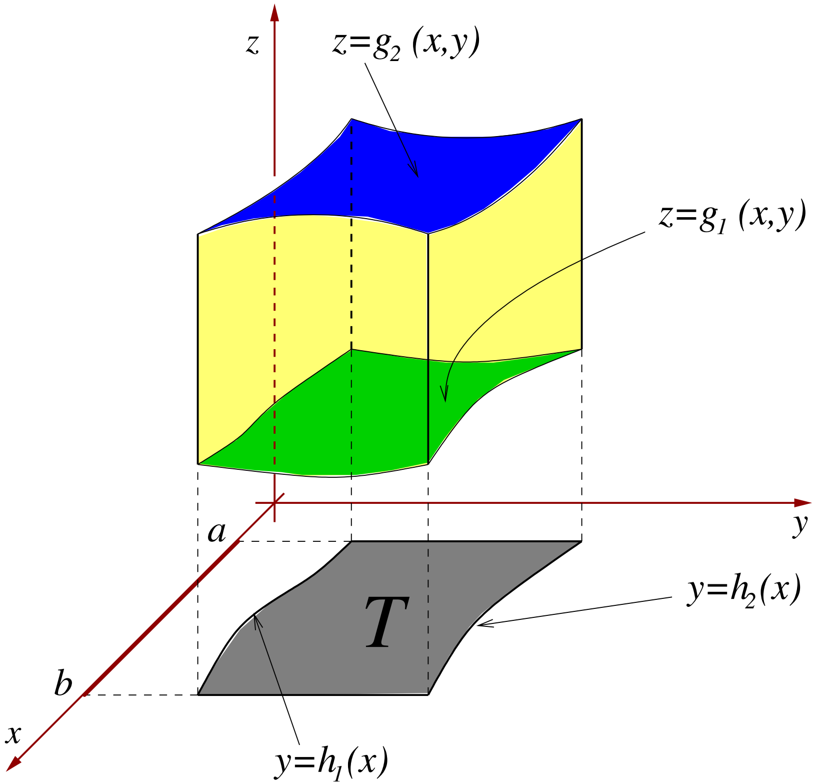
(Sol. $\frac{1}{12}$.)

Com al cas d'integrals dobles, calcularem integrals triples sobre regions elementals de l'espai tridimensional.

Una regió elemental de l'espai és aquella que s'obté demanant que una de les variables estigui entre dues funcions de les altres variables (dues superfícies) i que el domini d'aquestes dues funcions sigui una regió elemental del pla.

Per exemple, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T, \quad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$, essent T una regió elemental del pla (regió de tipus I o de tipus II).

Noteu que T és la projecció de D sobre el pla XY.



Sobre aquests conjunts es defineix

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_T \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.}$$

És a dir, la integral triple es redueix a tres integrals iterades.

Finalment, la integral anterior quedarà de la forma

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Observació 4.13 De vegades, depenent de la regió elemental, serà preferible fer-ne la projecció sobre el pla $x = 0$ o sobre el pla $y = 0$.

Exemples 4.14 (a) Poseu el límits d'integració a la integral de la funció $f(x,y,z)$ a l'interior de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i al primer octant.

(b) Calculeu $\iiint_D xy\,dxdydz$ essent D la regió de $\mathbb{R}^3$ limitada pels plans coordenats i el pla $x + y + z = 1$. (Sol. $\frac{1}{120}$.)

(c) Sigui D la regió fitada pels plans $x = 0$, $y = 0$ i $z = 2$, i la superfície $z = x^2 + y^2$, i que està al quadrant on $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Dibuixeu la regió i calculeu

$$\iiint_D x\, dxdydz. \qquad \text{(Sol. } \tfrac{8\sqrt{2}}{15}.\text{)}$$

(d) Avalueu la integral

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_{x^2+y^2}^2 dz.$$

Digueu quina és la regió D on es calcula aquesta integral i interpreteu el resultat. (Sol. $\frac{2}{3}$.)

4.4 El canvi de variable a la integral triple

$$\iiint_{A_{xyz}} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{D_{uvw}} f\big(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)\big)\, |J|\, dudvdw.$$

essent:

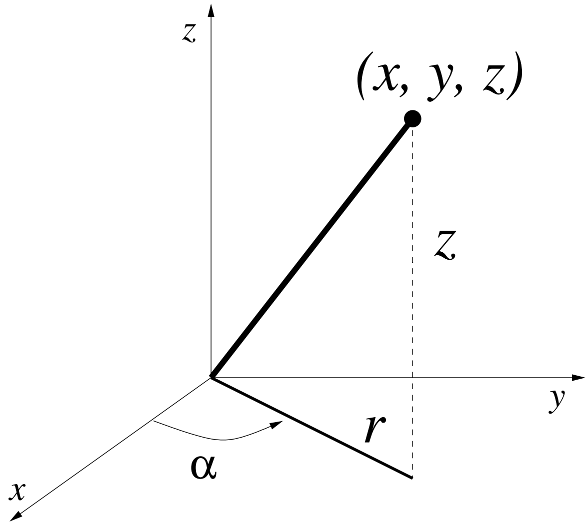
$$\begin{cases} x = g_1(u,v,w) \\ y = g_2(u,v,w) \\ z = g_3(u,v,w) \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_1}{\partial w} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial w} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

La funció $G = (g_1, g_2, g_3)$ ha de ser bijectiva, de classe $\mathcal{C}^1$ i amb $J \neq 0$ per a tot $(u, v, w) \in D_{uvw}$.

El canvi a coordenades cilíndriques

Les *coordenades cilíndriques* (r, α, z) d'un punt (x, y, z) estan definides per les relacions següents:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha & 0 < r \\ y = r\sin\alpha & 0 \leq \alpha < 2\pi \\ z = z & -\infty < z < \infty \end{cases}$$



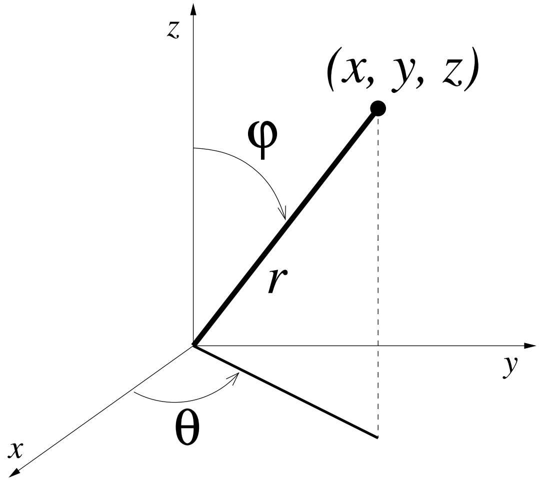
El jacobià del canvi és (en valor absolut)

$$|J| = r.$$

El canvi a coordenades esfèriques

Les *coordenades esfèriques* (r, θ, φ) d'un punt (x, y, z) estan definides per les relacions següents:

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta & 0 < r \\ y = r \sin\varphi \sin\theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = r \cos\varphi & 0 \leq \varphi < \pi \end{cases}$$



El jacobià del canvi és (en valor absolut)

$$|J| = r^2 \sin\varphi.$$

Observació 4.15 Sovint, en referir-nos als angles θ i φ, en diem *longitud* i *colatitud*, respectivament, relacionant-los amb les coordenades geogràfiques. Tanmateix, la longitud geogràfica és $|\theta|$, i es parla de longitud est o longitud oest depenent si θ és positiu o negatiu en mesurar-lo des del meridià de Greenwich. La latitud geogràfica és $|\frac{\pi}{2} - \varphi|$, i es parla de latitud nord o latitud sud depenent si $\frac{\pi}{2} - \varphi$ és positiu o negatiu (si està per sobre de l'equador o per sota).

Exemples 4.16 (a) Determineu les coordenades cilíndriques i esfèriques del punt $(1,-1,2)$.

(b) Quina és la gràfica dels punts que en coordenades cilíndriques satisfan $r = a$? I la dels punts que satisfan $\alpha = \frac{\pi}{4}$?

(c) Quina és la gràfica dels punts que en coordenades esfèriques satisfan $r = a$? I la dels punts que satisfan $\varphi = \frac{\pi}{4}$?

4.5 Aplicacions de les integrals triples

- Càlcul de la massa d'un cos D de $\mathbb{R}^3$ coneguda la densitat $\rho(x,y,z)$ a cada punt:

$$M(D) = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dxdydz.$$

- Càlcul del volum d'un cos D de $\mathbb{R}^3$:

$$V(D) = \iiint_D 1\,dxdydz.$$

- Càlcul del valor mitjà d'una funció $f(x,y,z)$ sobre D:

$$\overline{f} = \frac{1}{V(D)} \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz.$$

- Càlcul del centre de masses d'un cos D de $\mathbb{R}^3$ coneguda la densitat $\rho(x,y,z)$. Si M és la massa de D, les coordenades del centre de masses $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ són:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

- Càlcul dels moments d'inèrcia al voltant dels eixos de coordenades:

$$I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz \quad \text{(respecte a l'eix } x\text{)}$$

$$I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz \quad \text{(respecte a l'eix } y\text{)}$$

$$I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz \quad \text{(respecte a l'eix } z\text{)}$$

Exemples 4.17 • Calculeu la massa del sòlid limitat entre els cilindres parabòlics $z=9-y^2$ i $z=(x-3)^2$ si la densitat a cada punt és inversament proporcional a la distància d'aquest punt a l'eix OZ.

(Sol. $48k$, essent k la constant de proporcionalitat.)

- Determineu la fórmula per calcular el volum d'una esfera de radi R. (Sol. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.)
- La temperatura a cada punt de l'interior del cub $C = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ és proporcional al quadrat de la distància del punt a l'origen.
  - Quina és la temperatura mitjana?
  - En quins punts del cub s'assoleix aquesta temperatura mitjana?
- Calculeu el centre de masses de l'hemisferi definit per les desigualtats

  $$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{i} \quad z \geq 0.$$

  Suposeu que la densitat és constant.
  (Sol. $(0, 0, \frac{3}{8})$.)
- Determineu els moments d'inèrcia de l'hemisferi anterior.
  (Sol. $I_x = I_y = I_z = \frac{4\pi}{15}\rho$.)

Càlcul II
ETSEIAT

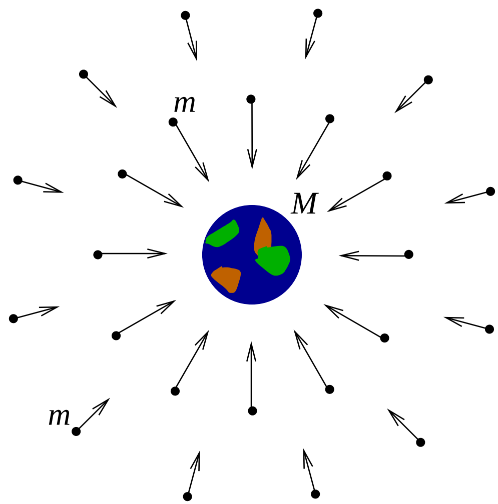
Imp.
Sortir

5 Integrals de línia

Recordem breument dos conceptes que ja coneixem.

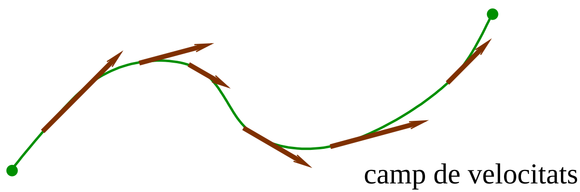
- Un **camp escalar** és una funció definida sobre una regió D de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ que assigna un nombre real a cada punt de D (exemples concrets en són la temperatura o la pressió).

- Un **camp vectorial** és una funció definida sobre una regió D de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ que assigna un vector (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) a cada punt de D (exemples concrets en són el camp gravitatori o un camp de velocitats).



Sobre una corba de $\mathbb{R}^3$ (o de $\mathbb{R}^2$) pot haver–hi definit un camp escalar o un camp vectorial:

- Si pensem que la corba és un filferro, podem tenir una funció que ens dóna la densitat a cada punt.
- Si pensem que la corba és la trajectòria d'una certa partícula que es mou en un camp de forces tenim, doncs, un camp vectorial definit en cada punt de la corba.



5.1 Integral d'un camp escalar sobre una corba

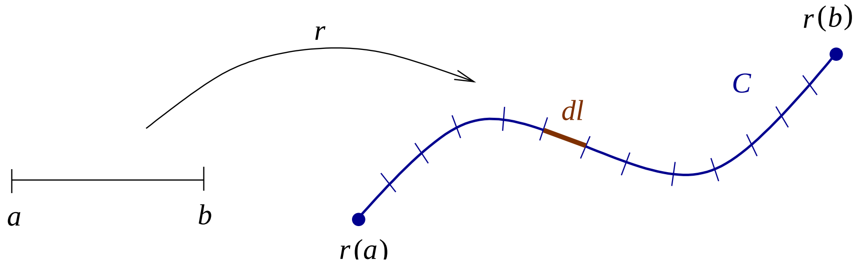
Definició 5.1 Si C és una corba regular parametritzada per $r(t)$ amb $t \in [a,b]$ i $f(x,y,z)$ és un camp escalar continu definit sobre la corba, aleshores *la integral de f sobre C* es defineix com

$$\int_C f\,dl = \int_a^b f(r(t))||r'(t)||\,dt$$

La integral de línia no depèn de la parametrització de la corba.

Aquesta definició es pot justificar de la manera següent. Suposem que $f(x,y,z)$ assigna a cada punt de la corba la seva densitat (lineal). Un segment infinitesimal de la corba tindrà massa

$$dm = f(r(t))dl \qquad \text{on} \qquad dl = ||r'(t)||dt$$



I, per tant, la massa total de la corba serà $M = \int_a^b f(r(t))||r'(t)||\,dt$.

Observacions 5.2 (a) Si la funció f és constant i igual a 1 aleshores la integral de línia ens dóna la longitud de la corba.

(b) Si $f(x,y,z)$ és la densitat lineal i M és la massa total de la corba, el centre de masses està situat al punt de coordenades $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, on

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x f(x,y,z)\,dl, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y f(x,y,z)\,dl, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\int_C z f(x,y,z)\,dl$$

(c) També es pot definir el valor mitjà d'un camp escalar f sobre una corba C:

$$\overline{f} = \frac{\int_C f\,dl}{l(C)}$$

essent $l(C)$ la longitud de la corba C.

Exemple 5.3 Sigui $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ una parametrització d'un tros d'hèlix amb densitat lineal $f(x,y,z) = k\left(x^2+y^2+z^2\right)$. Trobem–ne la massa.

Necessitem el vector tangent (de fet, el mòdul del vector tangent):

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \quad \text{i} \quad ||r'(t)|| = \sqrt{2}$$

De la definició anterior

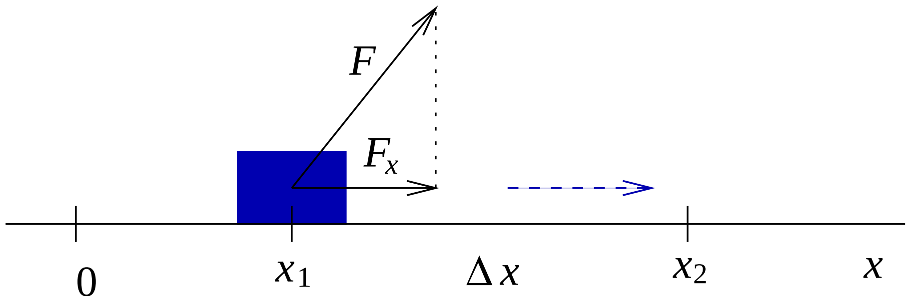
$$M = \int_0^{2\pi} f(x(t),y(t),z(t))||r'(t)||\,dt = \int_0^{2\pi} k\left(\cos^2 t + \sin^2 t + t^2\right)\sqrt{2}\,dt$$
$$= k\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1+t^2)\,dt = \cdots = k\pi\frac{2\sqrt{2}}{3}(3+4\pi^2).$$

Exercici: Comproveu que el centre de masses d'una hèlix amb les mateixes condicions que l'exemple anterior ve donat per

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{1}{3+4\pi^2}\left(6, -6\pi, 3\pi(1+2\pi^2)\right).$$

5.2 Integral d'un camp vectorial sobre una corba

Considerem una partícula que es mou en línia recta i una força constant F que actua sobre ella. Es defineix el *treball que fa la força F sobre la partícula* quan aquesta es desplaça des de x_1 fins a x_2 com el producte $W = F_x \cdot \Delta x$, on F_x és la component de F en la direcció del desplaçament i $\Delta x = x_2 - x_1$.

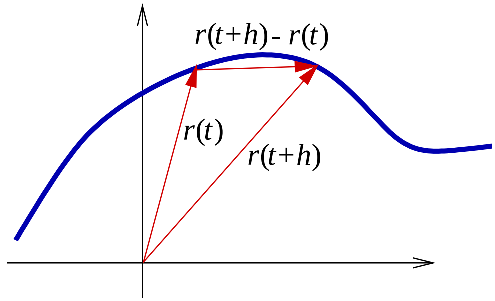


En general, com calcular el treball si la trajectòria no és una línia recta i la força no és constant?

Suposem que una partícula es mou a través d'un camp de forces seguint la trajectòria donada per $r(t)$ amb $t \in [a,b]$ i sotmesa a l'acció de la força $F(r(t))$ en cada punt. Volem definir el treball total realitzat per F quan la partícula recorre la corba C descrita per $r(t)$.

Considerem un interval de temps de la forma $[t, t+h]$. Si h és prou petit, una estimació del treball en aquest període pot ser

$$F(r(t)) \cdot [r(t+h) - r(t)]$$



Denotem per $W(t)$ el treball realitzat fins a l'instant t. ($W(t+h)$ serà el treball fins a l'instant $t+h$.) Aleshores

$$W(t+h) - W(t) \approx F(r(t)) \cdot [r(t+h) - r(t)].$$

Dividint per h obtenim

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \approx \frac{F(r(t)) \cdot [r(t+h) - r(t)]}{h}.$$

Si exigim (sota bones hipòtesis de les funcions) que el límit quan $h \to 0$ sigui el mateix en ambdós membres de l'expressió anterior tenim

$$W'(t) = F(r(t)) \cdot r'(t).$$

Com que $W(a) = 0$ i $W(b)$ és el treball total, tenim

$$W(b) - W(a) = \int_a^b W'(t)\,dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt.$$

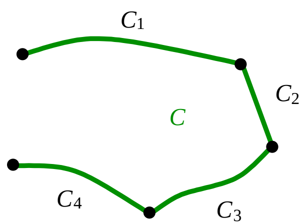
El raonament anterior ens serveix per justificar la definició següent.

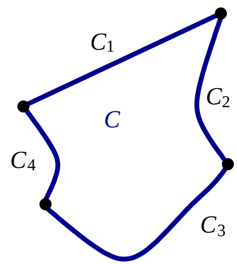
Definició 5.4 Sigui F un camp vectorial continu sobre una corba C (de classe $\mathcal{C}^1$) parametritzada per $r(t)$ amb $t \in [a,b]$. *La integral de F sobre C* és

$$\int_C F\,dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt.$$

Si una corba no és regular, però ho és a trossos, obtenim la integral de línia com la suma de les integrals sobre els corresponents trossos.

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n \Longrightarrow \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}.$$



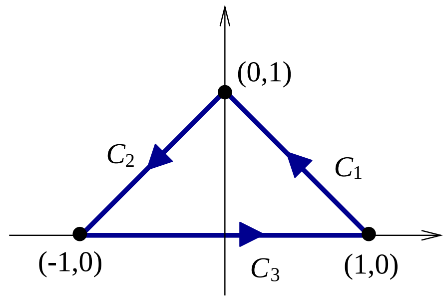


Exemples 5.5 (a) Trobem el treball realitzat quan un objecte recorre la corba C parametritzada per $r(t) = (t, t^2, t^3)$ amb $t \in [-1, 1]$ sotmès a la força $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$.

$$\int_C F\,dr = \int_{-1}^{1} (t^3, t^5, t^4)(1, 2t, 3t^2)\,dt = \int_{-1}^{1} (t^3 + 5t^6)\,dt = \frac{10}{7}.$$

(b) Sigui ara C el triangle de vèrtexs $(1,0)$, $(0,1)$ i $(-1,0)$ recorregut en sentit antihorari, i sigui $F(x,y) = (e^y, -\sin \pi x)$. Calculem el treball que fa F sobre C.

Primer necessitem una parametrització de C. Observem que C és regular a trossos (3 segments). De fet, parametritzarem cadascun dels costats de C.



Sigui C_1 el segment que va de $(1,0)$ a $(0,1)$, una parametrització és, per exemple, $r_1(t) = (1-t, t)$ amb $t \in [0,1]$.
(Nota: $r_1(t) = (x(t), y(t)) = (1,0) + t(-1,1)$)
Sigui C_2 el segment que va de $(0,1)$ a $(-1,0)$, una parametrització és, per exemple, $r_2(t) = (-t, 1-t)$ amb $t \in [0,1]$.
Sigui C_3 el segment que va de $(-1,0)$ a $(1,0)$, una parametrització és, per exemple, $r_3(t) = (2t-1, 0)$ amb $t \in [0,1]$.

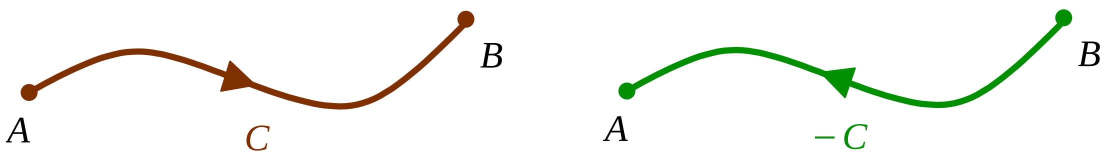
Aleshores

$$\begin{aligned}\int_C F\,dr &= \int_{C_1} F\,dr_1 + \int_{C_2} F\,dr_2 + \int_{C_3} F\,dr_3 \\ &= \int_0^1 (e^t, -\sin\pi(1-t))(-1,1)\,dt + \int_0^1 (e^{1-t}, -\sin\pi(-t))(-1,-1)\,dt \\ &+ \int_0^1 (e^0, -\sin\pi(2t-1))(2,0)\,dt = \cdots = 4 - 2e - \frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

Observació 5.6 Si canviem la parametrització de C per una altra parametrització que conserva el sentit, la integral de línia és la mateixa.

De fet, quan integrem sobre una corba parametritzada, ho fem en el sentit (orientació) determinat per la parametrització.

A la figura següent $\int_C = -\int_{-C}$.



Teorema 5.7 *Siguin $r(t)$ i $s(t)$ dues parametritzacions diferents d'una mateixa corba C, i F un camp vectorial. Aleshores*

$$\int_C F dr = \int_C F ds$$

si r i s tenen la mateixa orientació, i

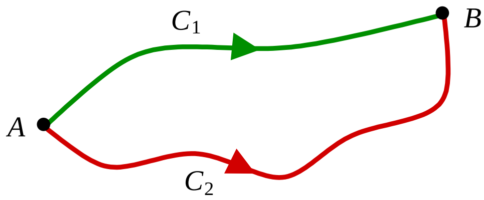
$$\int_C F dr = -\int_C F ds$$

si r i s tenen orientacions oposades.

Exemple 5.8 Siguin $r(t) = (\sin t, \cos t)$ i $s(t) = (\cos t, \sin t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ dues parametritzacions de la circumferència centrada en $(0,0)$ i de radi 1. Considerem el camp $F(x,y) = (y, -x)$. Aleshores

$$\int_C F dr = \int_0^{2\pi} (\cos t, -\sin t)(\cos t, -\sin t) = \cdots = 2\pi.$$
$$\int_C F ds = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t)(-\sin t, \cos t) = \cdots = -2\pi.$$

Observació 5.9 En general, si canviem la corba, és a dir, el recorregut per anar d'un punt A a un punt B, sí que varia el valor de la integral:



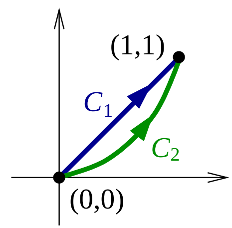
$$\int_{C_1} F\,dr \neq \int_{C_2} F\,dr.$$

L'exemple següent mostra que la integral de línea des d'un punt fins a un altre *pot* dependre del camí que els uneix.

Exemple 5.10 Sigui $F(x,y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$ per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ amb $y \geq 0$. Calculem la integral de línia de F des de $(0,0)$ fins a $(1,1)$ seguint dues trajectòries diferents:

(a) el segment C_1 donat per $r(t) = (t,t)$ amb $0 \leq t \leq 1$; i

(b) la corba C_2 definida per $s(t) = (t,t^2)$ amb $0 \leq t \leq 1$.



Al primer cas tenim

$$\int_{C_1} F\,dr = \int_0^1 (\sqrt{t}, t^3 + t)(1,1)\,dt = \cdots = \frac{17}{12}.$$

Al segon serà

$$\int_{C_2} F\,ds = \int_0^1 (t, t^3 + t^2)(1, 2t)\,dt = \cdots = \frac{7}{5}.$$

Notació en forma diferencial

Siguin el camp

$$\begin{aligned} F \ : \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad\qquad (\text{ o bé } \mathbb{R}^2) \\ (x,y,z) &\longrightarrow (P,Q,R) \end{aligned}$$

i la corba C regular parametritzada per $r(t)$, $t \in [a,b]$.

Escrivim la integral de línia de F sobre C com

$$\begin{aligned} \int_C F\,dr &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt \\ &= \int_a^b (P(r(t)), Q(r(t)), R(r(t)))\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)\,dt \\ &= \int_a^b (P,Q,R)\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\,dt \\ &= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right)\,dt \\ &= \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \end{aligned}$$

La notació diferencial és

$$\int_C F\,dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Exemple 5.11 Avaluem $\int_C xy^2\,dx + yz\,dy - x^3\,dz$ on C és la corba parametritzada per $r(t) = (t, t^2, t^3)$ amb $t \in [-1, 2]$.

Tenim

$$dx = dt, \qquad dy = 2t dt, \qquad dz = 3t^2 dt$$

aleshores

$$\begin{aligned} \int_C xy^2\,dx + yz\,dy - x^3\,dz &= \int_{-1}^{2} t\,t^4\,dt + t^2t^3 2t\,dt - t^3 3t^2\,dt \\ &= \int_{-1}^{2} \left(-2t^5 + 2t^6\right)\,dt = \cdots = \frac{111}{7}. \end{aligned}$$

5.3 Camps conservatius

No totes les integrals de línea entre dos punts depenen del camí escollit per anar d'un punt a l'altre.

Exemple 5.12 Calculem el treball realitzat per una força constant $F(x,y,z) = (k_1, k_2, k_3)$ en recórrer una corba C parametritzada per $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ amb $t \in [a,b]$.

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b (k_1,k_2,k_3)(x'(t),y'(t),z'(t))\,dt = \int_a^b (k_1x'(t)+k_2y'(t)+k_3z'(t))dt \\ &= [k_1x(t)+k_2y(t)+k_3z(t)]_a^b = [(k_1,k_2,k_3)(x(t),y(t),z(t))]_a^b \\ &= (k_1,k_2,k_3)[r(b)-r(a)]. \end{aligned}$$

En aquest exemple el treball només depèn dels punts extrems de la corba: $r(a)$ i $r(b)$ i no de la corba que els uneixi.

Definició 5.13 Un camp vectorial tal que el treball només depèn dels punts extrems i no del camí que els uneix s'anomena **camp conservatiu**.

Com hem vist a l'exemple anterior, un camp de forces constant és conservatiu.

El resultat següent ens dóna més camps conservatius.

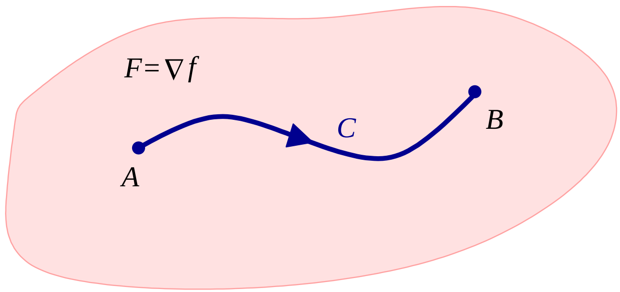
Teorema 5.14 *(TFC per a integrals de línia) Sigui C una corba parametritzada per $r(t)$ amb $t \in [a,b]$ que comença en un punt $A = r(a)$ i acaba en $B = r(b)$. Si f és un camp escalar de classe C^1 en un conjunt obert que conté a C aleshores*

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a)) = f(B) - f(A).$$

Noteu que ∇f és un camp vectorial. Si posem $F = \nabla f$ aleshores

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

i F és un camp conservatiu.

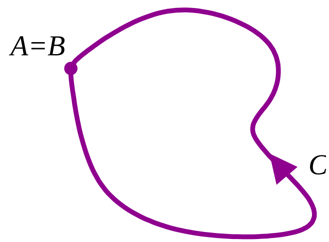


Es diu que un camp vectorial F **prové o deriva d'un potencial** (un camp escalar f) si F és el gradient d'aquest camp escalar f.

Acabem de veure que si F deriva d'un potencial aleshores és conservatiu.

Observació 5.15 Si la corba C és tancada (i.e. $A = r(a) = r(b) = B$), aleshores

$$\int_C \nabla f \cdot dr = \oint_C \nabla f \cdot dr = 0.$$



En paraules: si un camp de forces deriva d'un potencial, el treball realitzat al llarg de qualsevol camí tancat és zero.

Exemple 5.16 Calculem el treball realitzat quan un objecte recorre l'hèlix C parametritzada per $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ sotmès a la força

$$F(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z).$$

Si trobem un camp escalar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$, aleshores el camp serà conservatiu i el treball només dependrà dels valors de f als extrems de la corba: $r(0) = (1,0,0)$ i $r(2\pi) = (1,0,2\pi)$.

En aquest cas concret no és difícil veure (a ull) que $F(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ essent

$$f(x,y,z) = \frac{k}{2}\ln(x^2+y^2+z^2).$$

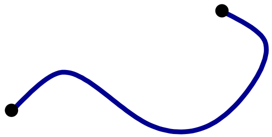
Per tant,

$$W = \int_C F\,dr = \frac{k}{2}(\ln(1+4\pi^2) - \ln 1) = \frac{k}{2}\ln(1+4\pi^2).$$

Amb aquest exemple es planteja un problema general:

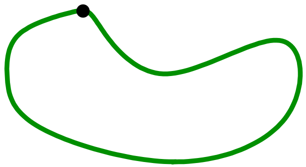
- com saber si un camp vectorial F prové d'un potencial f?
- i, en cas afirmatiu, com trobar una funció potencial f?

Per poder donar una condició que ens permeti saber quan un camp deriva d'un potencial necessitem alguns conceptes nous. En $\mathbb{R}^2$ ens interessaran les corbes tancades i simples.

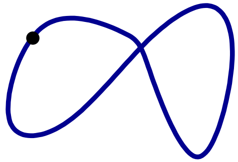


corba no tancada i simple

corba no tancada i no simple

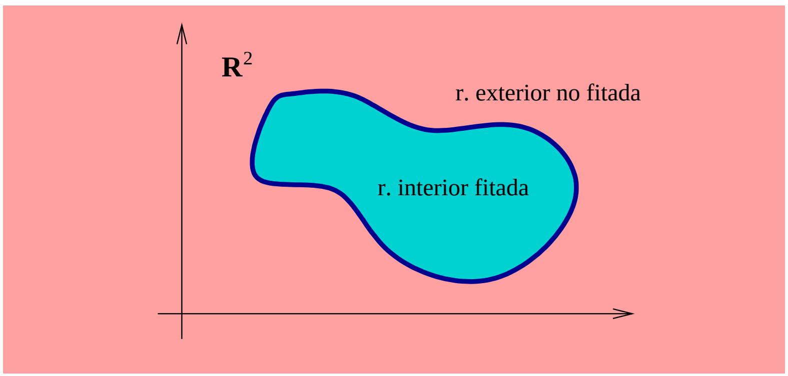


corba tancada i simple

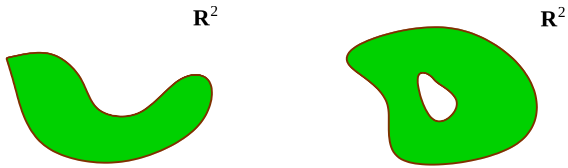


corba tancada i no simple

Una corba plana tancada i simple divideix el pla en dues regions: una regió interior fitada i una altra exterior no fitada.



Definició 5.17 Una regió fitada de $\mathbb{R}^2$ tal que la seva frontera és una corba tancada i simple es diu *conjunt simplement connex* o (*regió de Jordan*)



conjunt simplement connex   conjunt no simplement connex

Teorema 5.18 *(Tractem per separat els camps de $\mathbb{R}^2$ i els de $\mathbb{R}^3$)*

- *Sigui $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un camp vectorial de classe C^1 en un conjunt simplement connex i obert de $\mathbb{R}^2$. Aleshores*

$$F \text{ és un gradient } \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

- *Sigui $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un camp vectorial de classe C^1 en un conjunt simplement connex i obert de $\mathbb{R}^3$. Aleshores*

$$F \text{ és un gradient } \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

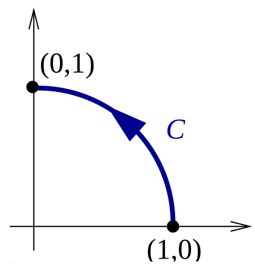
Nota: a $\mathbb{R}^3$ es diu que un conjunt és simplement connex si tota corba tancada que hi està continguda es pot "contreure" a un punt. Un conjunt és *obert* si per a tot punt del conjunt és possible trobar una bola oberta continguda totalment dins del conjunt.

Exemple 5.19 Determinem si el camp $F(x,y) = (3x^2y, x^3y)$ és un gradient a $\mathbb{R}^2$. Només cal veure si coincideixen les derivades parcials:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2y$$

per tant, no és un gradient.

Exemple 5.20 Trobeu el treball realitzat sobre un objecte que es mou per l'arc circular C donat per $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ quan $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sotmès a la força $F(x,y) = (y^2, 2xy - e^y)$.



És fàcil veure que F deriva d'un potencial:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Podem acabar el problema de tres maneres (com a mínim):

(1) Directament:

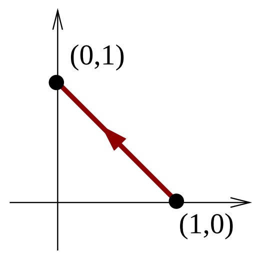
$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t, 2\cos t \sin t - e^{\sin t})(-\sin t, \cos t)dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t \sin t - \sin t - e^{\sin t}\cos t)dt = \left[-\cos^3 t + \cos t - e^{\sin t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - e.$$

(2) Per ser F un gradient, el treball només depèn dels punts inicial i final. Per tant, podem triar un camí que els uneixi més fàcil que l'anterior:

$$\mathbf{s}(t) = (1-t, t) \text{ amb } t \in [0,1].$$

Aleshores

$$W = \int_0^1 (t^2, 2(1-t)t - e^t)(-1,1)dt = \cdots$$
$$= \int_0^1 (2t - 3t^2 - e^t)dt = \left[t^2 - t^3 - e^t\right]_0^1 = 1 - e.$$



(3) Buscant la funció potencial $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - e^y.$$

Clarament, de la primera derivada parcial i integrant respecte de x surt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \Longrightarrow f(x,y) = \int y^2 dx = y^2 x + \phi(y)$$

on $\phi(y)$ només depèn de y.

Derivant respecte de y l'expressió de f que acabem de trobar, tenim

$$f(x,y) = y^2 x + \phi(y) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \phi'(y)$$

Igualant amb la segona derivada parcial que ja coneixíem, obtenim

$$2xy + \phi'(y) = 2xy - e^y \Longrightarrow \phi'(y) = -e^y$$

i, per tant, $\phi(y) = -e^y + k$.

És a dir, $f(x,y) = y^2 x - e^y + k$. Coneguda la funció potencial, el treball es calcula ràpidament:

$$W = \int_C F\,dr = f(0,1) - f(1,0) = 1 - e.$$

5.4 El teorema de Green

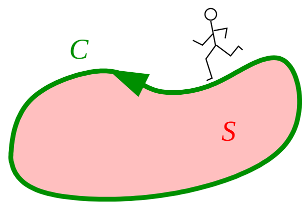
El resultat que veurem tot seguit relaciona una integral de línia sobre una corba tancada i simple amb una integral doble sobre la regió limitada per la corba.

Teorema 5.21 (Teorema de Green) *Sigui S una regió tancada simplement connexa limitada per una corba regular a trossos, tancada i simple C. Si $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ és un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^1$ en un conjunt obert que conté a C, aleshores*

$$\oint_C F dr = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

on la integral de línia es fa al llarg de C en sentit antihorari.

Segons el sentit positiu o antihorari, si caminem per la corba tenim sempre la regió a la nostra esquerra.



Noteu que si F deriva d'un potencial, aquesta integral val zero.

Notació alternativa:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

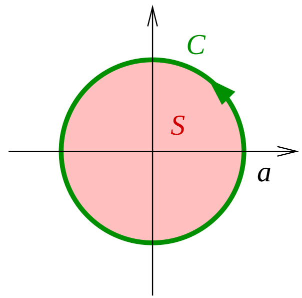
Exemples 5.22 (a) Calculem

$$\oint_C xy^2dx + x^2ydy$$

essent C la circumferència $x^2+y^2=a^2$ recorreguda en sentit antihorari.

Evidentment, la regió S tancada per la corba és

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2\}.$$



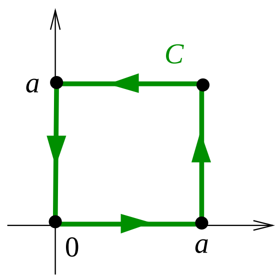
Aplicant el teorema de Green tenim

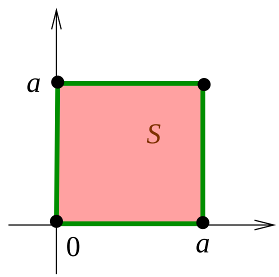
$$\oint_C xy^2dx+x^2ydy=\iint_S(2xy-2xy)dxdy=0.$$

(b) Trobem

$$\oint_C(1+10xy+y^2)dx+(6xy+5x^2)dy$$

essent C el quadrat de vèrtexs $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) i $(0,a)$.





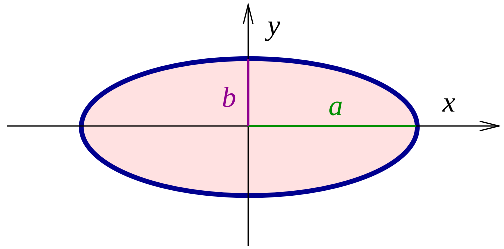
Pel teorema de Green, la integral que ens demanen és equivalent a la integral doble

$$\iint_S (6y+10x-10x-2y)dxdy = \int_0^a dx \int_0^a 4ydy = 2a^3.$$

(c) Determinem l'àrea tancada per l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Podem resoldre el problema aplicant el teorema de Green. Sabem que

$$A(S) = \iint_S 1dxdy.$$



Aquesta integral es pot convertir en una integral de línia si trobem un camp $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

N'hi ha molts camps que compleixen aquesta propietat. Podem prendre, per exemple, $F(x,y) = (0,x)$.

Una parametrització de l'el·lipse és $(x,y) = (a\cos t, b\sin t)$, amb $t \in [0,2\pi]$. Aleshores

$$A(S) = \iint_S 1dxdy = \oint F(a\cos t, b\sin t)(-a\sin t, b\cos t)dt.$$

Substituint i operant obtenim:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = ab\left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Altres camps que compleixen la propietat anterior:

$$F(x,y) = (-y,0), \quad F(x,y) = \left(-\tfrac{y}{2}, \tfrac{x}{2}\right)\ldots$$

6 Integrals de superfície

L'objectiu d'aquest tema és definir les integrals de superfície i veure les seves aplicacions: càlcul d'àrees de superfícies no planes, càlcul de la massa d'una làmina coneguda la seva densitat superficial...

Per fer això primer hem de definir el concepte de superfície i veure com es pot representar.

6.1 Representació d'una superfície

Ja coneixem dues maneres de representar una superfície:

- *Implícitament:* $g(x,y,z) = 0$. La superfície es considera com el conjunt de punts $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfan l'equació.
- *Explícitament:* $z = f(x,y)$.

Exemple 6.1 Una esfera de radi 1 i centrada a l'origen de coordenades admet la representació implícita següent:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

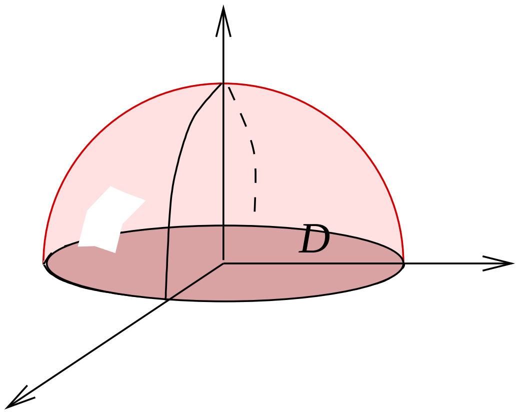
Si aïllem z en funció de x i y s'obtenen dues funcions:

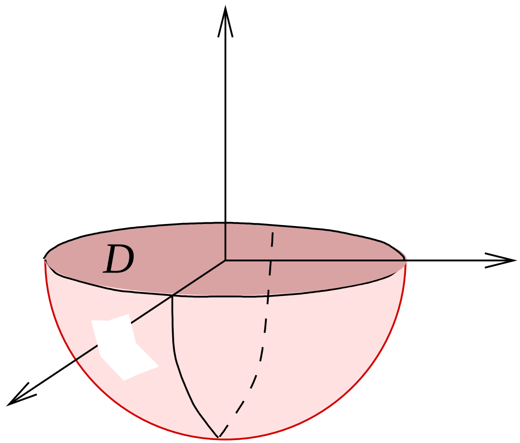
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{i} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x,y) \in D,$$

on D és el disc unitat.

La primera és la representació explícita de la semiesfera superior.

La segona la de la semiesfera inferior.

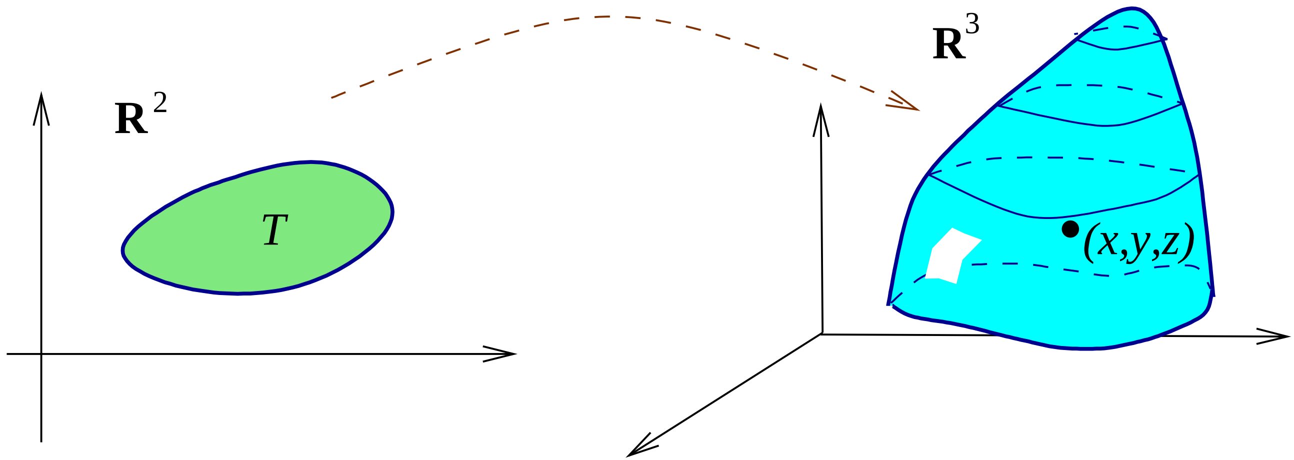




Hi ha una tercera manera de donar una superfície: la **representació paramètrica** mitjançant tres equacions que expressen x, y i z en funció de dos paràmetres, u i v:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \text{O també } r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Els paràmetres u i v varien en un conjunt connex bidimensional $T \in \mathbb{R}^2$ (que no és necessàriament la projecció de la superfície sobre el pla $z = 0$).



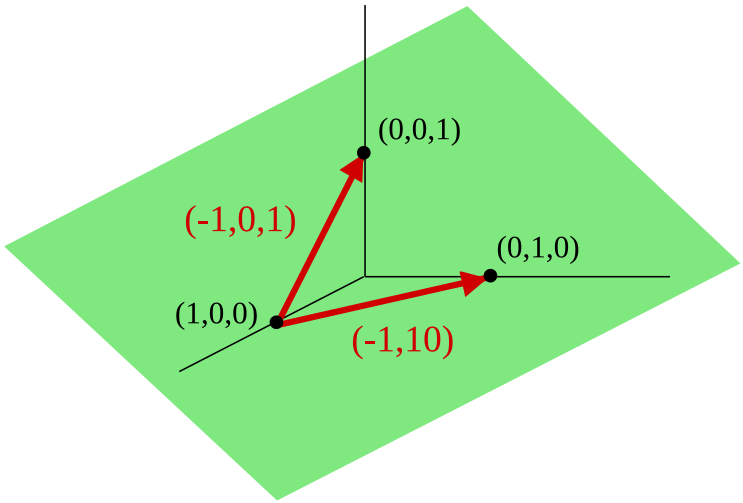
Exemples 6.2 (a) Trobem una representació paramètrica del pla que passa pels punts $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$.

Com que tenim tres punts del pla, només hem de trobar dos vectors directors: $(-1,1,0)$ i $(-1,0,1)$, per exemple. Aleshores, una parametrització d'aquest pla ve donada per

$$(x,y,z) = (1,0,0) + u(-1,1,0) + v(-1,0,1), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

O, si es prefereix, per

$$r(u,v) = (1-u-v, u, v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$



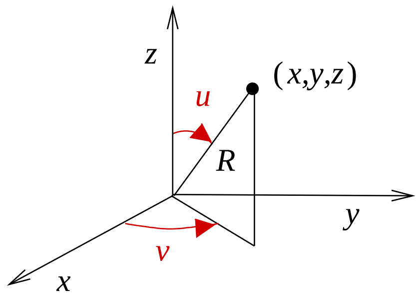
(Recordem que és fàcil representar aquest pla de forma implícita: $x+y+z=1$. I també de forma explícita: $z=1-x-y$.)

(b) Trobem ara una parametrització d'una esfera centrada en $(0,0,0)$ i radi R.

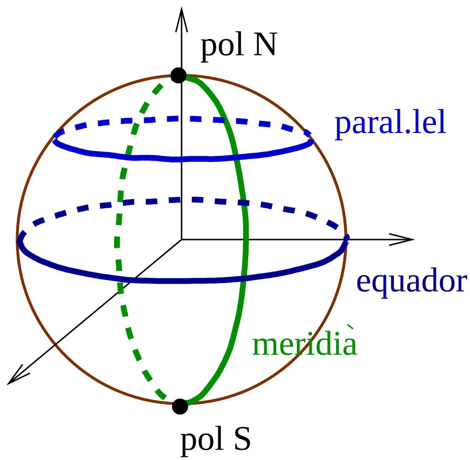
Per fer–ho, considerem que els paràmetres u i v representen la *colatitud* i la *longitud*, respectivament.

Aplicant la trigonometria bàsica és fàcil deduir que

$$\begin{cases} x = R\sin u\cos v \\ y = R\sin u\sin v \\ z = R\cos u \end{cases}$$



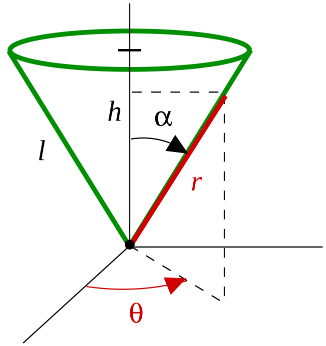
En aquest cas, $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$.



(c) Busquem ara una representació paramètrica d'un con d'altura h amb vèrtex a l'origen de coordenades i tal que la seva generatriu forma un angle α amb l'eix de les z.

Per a aquesta superfície prenem com a paràmetres la distància des d'un punt de la superfície fins a l'origen, r, i la *longitud*, θ.

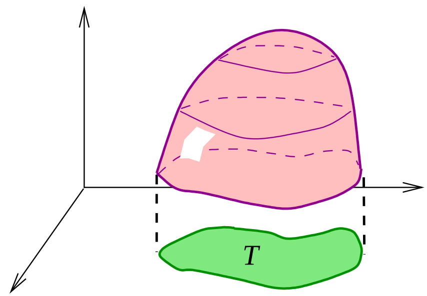
$$\begin{cases} x = r\sin\alpha\cos\theta \\ y = r\sin\alpha\sin\theta \\ z = r\cos\alpha \end{cases}$$



amb $(r,\theta) \in [0, \frac{h}{\cos\alpha}] \times [0, 2\pi]$.

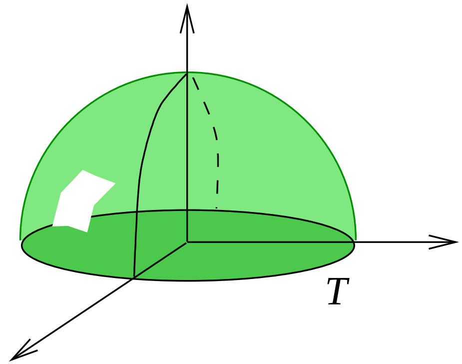
(d) Si tenim una superfície donada de forma explícita per $z = f(x,y)$, en particular, tenim també una representació paramètrica:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$$



En aquest cas, el conjunt T on varien els paràmetres (x,y) és la projecció de la superfície sobre el pla $z=0$.
Un exemple concret: la semiesfera donada per $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. La parametrització seria

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$



I el conjunt T el cercle de radi 1 centrat en $(0,0)$.

Observació 6.3 No totes les funcions $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ donen lloc a una superfície. (Imagineu que les tres components fossin constants, per exemple.)

Perquè una funció d'aquesta mena sigui la representació paramètrica d'una superfície s'han de complir una sèrie de requisits que ara veurem.

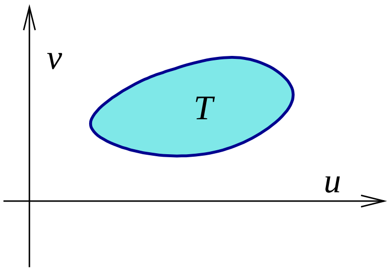
Suposem que una superfície està representada per

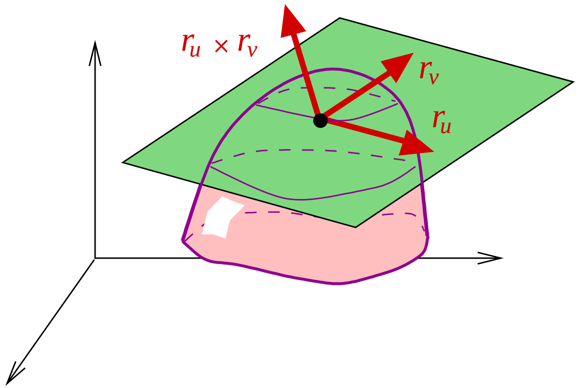
$$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)), \quad (u,v)\in T.$$

Suposem també que les components x, y i z són derivables respecte de u i de v. Aleshores podem considerar els vectors

$$r_u(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$$
$$r_v(u,v) = \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

Geomètricament, aquests vectors es poden pensar com els vectors directors del pla tangent a la superfície en el punt $r(u,v)$.





El vector associat al pla tangent a la superfície en el punt $r(u,v)$ serà

$$r_u(u,v) \times r_v(u,v).$$

Per tal que una aplicació com la d'abans sigui la representació paramètrica d'una superfície demanarem dues coses:

- que les components dels vectors r_u i r_v siguin funcions contínues en cada punt (això evita la presència d'arestes o punxes en la superfíce en fer que el pla tangent es mogui per ella amb continuïtat),
- que el vector $r_u \times r_v$ sigui no nul (això evita degeneracions: un punt o una corba).

Definició 6.4 El producte vectorial $r_u \times r_v$ s'anomena *producte vectorial fonamental* de la representació paramètrica $r(u,v)$ i es pot considerar, en cada punt, com un vector normal a la superfície.

Exemples 6.5 (a) Considerem l'esfera centrada a l'origen i de radi R donada per la parametrització

$$r(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$$

amb $(\varphi,\theta) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$.
Els vectors tangents seran

$$r_\varphi(\varphi,\theta) = (R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, -R\sin\varphi)$$
$$r_\theta(\varphi,\theta) = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\cos\theta, 0)$$

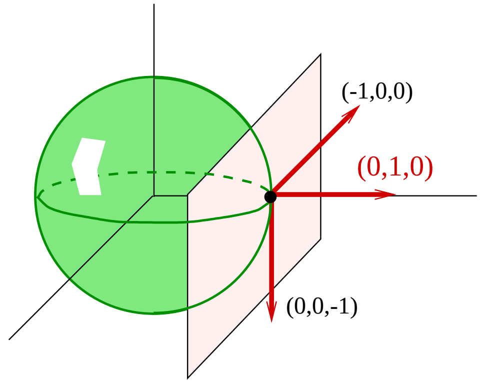
I el producte vectorial fonamental

$$r_\varphi \times r_\theta = \cdots = R \sin\varphi \cdot r(\varphi, \theta).$$

És a dir, paral·lel al radi vector.

Particularitzem aquests càlculs en un punt concret: $P = (0,1,0)$, que s'obté quan $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i $\theta = \frac{\pi}{2}$. Tenim:

$$\begin{aligned} r_\varphi(\pi/2, \pi/2) &= (0,0,-1) \\ r_\theta(\pi/2, \pi/2) &= (-1,0,0) \\ r_\varphi \times r_\theta(\pi/2, \pi/2) &= (0,1,0) \end{aligned}$$



(b) Trobem ara el producte vectorial fonamental quan la superfície està donada explícitament per $z = f(x,y)$. Sabem que una representació paramètrica és

$$r(x,y) = (x, y, f(x,y)).$$

Els vectors tangents són

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

I el producte vectorial fonamental

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

Evidentment, aquest darrer vector és no nul.

Observació 6.6 Recordem que si $z = f(x,y)$ aleshores un vector normal a la superfície el sabem trobar com el gradient de la funció $g(x,y,z) = z - f(x,y)$:

$$\nabla g = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

Exemple 6.7 Sigui $z = 3x^2 + 2y^2$ (quina mena de superfície és?). Busquem el pla tangent en el punt $(0,0,0)$.

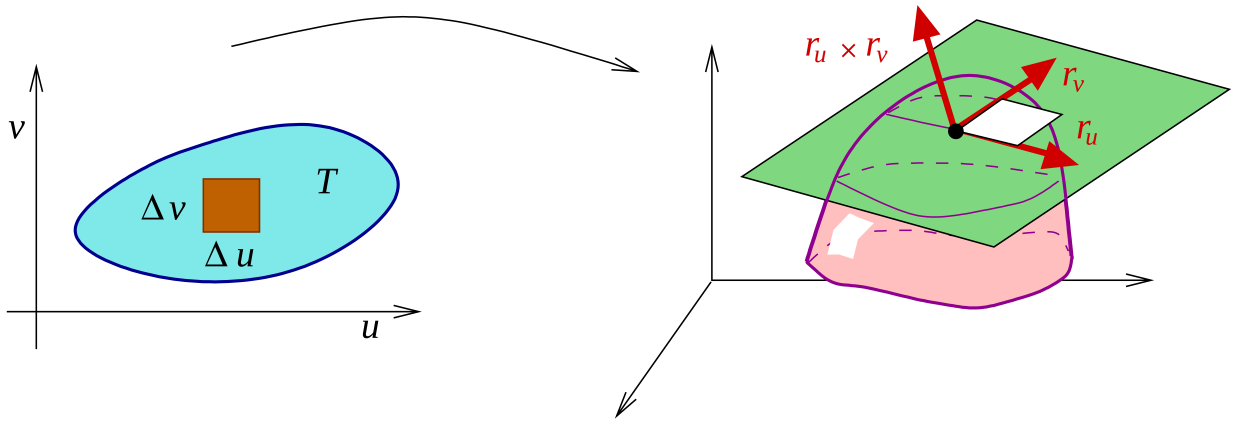
El vector associat al pla tangent en cada punt (x,y,z) és $(-6x, -4y, 1)$. Per tant, en el punt $(0,0,0)$ serà $(0,0,1)$. L'equació del pla tangent serà , clarament,

$$z = 0.$$

Trobeu l'equació del pla tangent a aquesta mateixa superfície en el punt $(1,1,5)$.

6.2 Àrea d'una superfície parametritzada

Ja hem vist que els vectors $r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$ i $r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$ poden interpretar–se geomètricament com vectors tangents a la superfície en el punt $r(u,v)$.



Considerem en T un segment rectilini horitzontal. La seva imatge per r és una corba situada en la superfície $r(T)$. Si pensem que per a v fixada u representa el temps, aleshores r_u és el vector velocitat d'aquesta corba. Quan el temps augmenta Δu, un punt situat en $r(u,v)$ es desplaça per la corba i recorre una distància que es pot aproximar per $\|r_u\|\Delta u$ (espai = velocitat · temps).

Anàlogament si ho fem per a v.

Per tant, un rectangle en T d'àrea $\Delta u \cdot \Delta v$ es converteix en una porció de $r(T)$ que aproximarem pel paral·lelogram determinat pels vectors $r_u \Delta u$ i $r_v \Delta v$. L'àrea d'aquest paral·lelogram és el mòdul del producte vectorial dels seus costats:

$$\|r_u \Delta u \times r_v \Delta v\| = \|r_u \times r_v\| \Delta u \Delta v.$$

Aquest raonamet ens porta a la definició següent.

Definició 6.8 L'àrea d'una superfície parametritzada S es defineix com

$$a(S) = \iint_T \|r_u \times r_v\| \, dudv,$$

essent T la regió on varien els paràmetres u i v.

Exemple 6.9 Apliquem aquesta definició quan S està donada de forma explícita per $z = f(x,y)$.

Aleshores $r(x,y) = (x,y,f(x,y))$, T és la projecció de S sobre el pla xy i el mòdul del producte vectorial fonamental és

$$\|r_x \times r_y\| = \|(-f_x, -f_y, 1)\| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}.$$

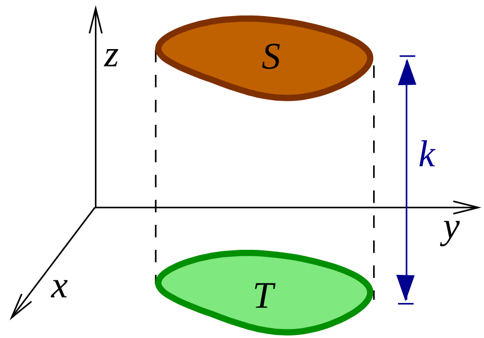
Per tant,

$$a(S) = \iint_T \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy$$

Cas particular: funció constant

Noteu que si $z = f(x,y) = k$, aleshores

$$a(S) = \iint_T dxdy = a(T).$$



Exemple 6.10 Calculem l'àrea d'un hemisferi S de radi R.

Ho farem de dues maneres.

- Fent servir una parametrització de S:

$$r(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$$

amb $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$ i $\theta \in [0,2\pi]$ ($T = [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,2\pi]$).
No és difícil veure que $\|r_\varphi \times r_\theta\| = R^2|\sin\varphi|$. Per tant,

$$a(S) = \iint_T \|r_\varphi \times r_\theta\|\, d\varphi d\theta = \iint_T R^2|\sin\varphi| d\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} R^2|\sin\varphi| d\theta = 2\pi R^2.$$

- Ara suposant que ens donen S de forma explícita:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Aleshores

$$a(S) = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1}\, dxdy$$
$$= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dy.$$

Fent un canvi a coordenades polars, aquesta darrera integral es converteix en

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot r\, d\alpha = \cdots = 2\pi R^2.$$

6.3 Integral d'un camp escalar sobre una superfície

Definició 6.11 Sigui $S = r(T)$ una superfície parametritzada descrita per una funció r de classe $\mathcal{C}^1$ definida en una regió T del pla u, v. I sigui f un camp escalar definit i fitat sobre S. Es defineix *la integral de superfície de f sobre S* com

$$\iint_S f\,da = \iint_T f(r(u,v))\|r_u \times r_v\|\,du\,dv$$

sempre que la integral doble del segon membre de la igualtat existeixi.

Exemples 6.12 (a) Si $f(x,y) = 1$ aleshores

$$\iint_S f\,da = \iint_T \|r_u \times r_v\|\,du\,dv = a(S).$$

(b) Si el camp escalar f s'interpreta com la densitat (massa per unitat d'àrea) d'una làmina prima adaptada a la superfície S, aleshores la massa total serà

$$m = \iint_S f\,da.$$

El centre de masses es troba al punt de coordenades $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ on

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x f(x,y,z)da, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y f(x,y,z)da, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z f(x,y,z)da.$$

Determineu, per concretat, el centre de masses de la superfície d'una semiesfera de radi R i densitat constant k. (Sol. $(0,0,R/2)$)

6.4 Integral d'un camp vectorial sobre una superfície

Sigui S una superfície regular. Designem per n el vector normal unitari a la superfície que té el mateix sentit que el producte vectorial fonamental; és a dir, en cada punt de la superfície,

$$n = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}.$$

Definició 6.13 Sigui S una superfície parametritzada per $r(u,v)$ amb $(u,v) \in T$. La integral d'un camp vectorial F continu sobre S és

$$\iint_S F\,dr = \iint_S (F \cdot n)\,da = \iint_{T(u,v)} F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v)\,du\,dv.$$

Aquesta integral és el *flux de F a través de S*.

(Flux: volum de fluid que passa a través de la superfície S per unitat de temps.)

Vegem com queda aquesta fórmula si la superfície està donada de forma explícita per $z = f(x,y)$ amb $(x,y) \in T$.

Aleshores una parametrització de la superfície és

$$r(x,y) = (x,y,f(x,y)), \quad (x,y) \in T$$

i sabem que el producte vectorial fonamental dóna

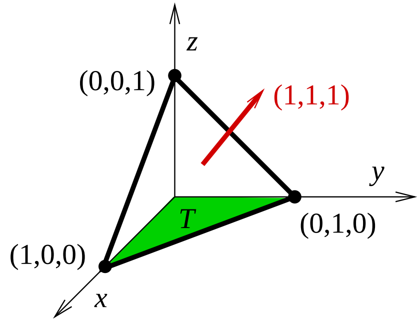
$$r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1).$$

El camp vectorial serà $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$. Per tant,

$$\begin{aligned}\iint_S (F \cdot n)\, da &= \iint_T (F_1, F_2, F_3) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\, dxdy \\ &= \iint_T (-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3)\, dxdy.\end{aligned}$$

(Recordem que on hi hagi una z s'ha de substituir per $f(x,y)$.)

Exemples 6.14 (a) Sigui S la porció de pla limitada pel triangle de vèrtexs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$, i sigui $F(x,y,z) = (x,y,z)$ un camp vectorial definit sobre S. Calculem $\iint_S (F \cdot n)\, dS$ fent servir una representació explícita del pla: $z = 1 - x - y$ (els paràmetres (x,y) varien en el triangle T del pla xy de vèrtexs $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$, que és la projecció de S sobre el pla xy).



El camp F, avaluat sobre S és $F(x,y,z) = (x,y,z) = (x,y,1-x-y)$.
El vector normal és $(1,1,1)$.
Per tant,

$$\iint_S (F\cdot n)\,da = \iint_T (x+y+1-x-y)\,dxdy = A(T) = \frac{1}{2}.$$

Nota: de fet, el vector normal pot ser $(1,1,1)$ però també $(-1,-1,-1)$. Depenent de si agafem un o l'altre, el flux tindrà un sentit o el contrari.

(b) Determinem el flux que passa a través de la superfície $z = xy$ amb $0 \le x \le 1$ i $0 \le y \le 2$ per a cada un dels camps següents (prendre en cada cas el vector normal unitari ascendent).

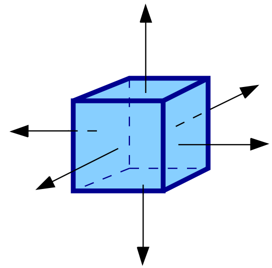
(1) $F(x,y,z) = (x^2y, 0, z^2)$

$$\iint_S (F\cdot n)\,da = \iint_T (x^2y, 0, x^2y^2)\cdot(-y,-x,1)\,dxdy = 0.$$

(2) $F(x,y,z) = (-xy^2, z, 0)$

$$\iint_S (F \cdot n)\, da = \iint_T (-xy^2, xy, 0) \cdot (-y, -x, 1)\, dxdy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^2 (xy^3 - x^2 y)\, dy = \cdots = \frac{4}{3}.$$

(c) Trobeu el flux total del camp $F(x,y,z) = (xy, 4yz^2, yz)$ que surt del cub unitat: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.



Sol. $^7/_3$. (S'han de fer sis integrals de superfície.)

6.5 El teorema de la divergència

Aquest teorema ens permetrà calcular el flux que surt d'una superfície tancada mitjançant una integral triple. Necessitem primer una definició.

Definició 6.15 Anomenarem *divergència d'un camp vectorial* $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ (i la denotarem per $\nabla \cdot F$) a

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

sempre que aquestes derivades existeixin.

Teorema 6.16 (Teorema de la divergència) *Sigui D un sòlid limitat completament per una superfície tancada S, i sigui $F(x,y,z)$ un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^1$ definit en D. Aleshores*

$$\iint_S F\,dr = \iint_S (F \cdot n)\,da = \iiint_D \nabla \cdot F(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D \nabla \cdot F\,dV,$$

on n és el vector normal unitari que surt de S.

Exemples 6.17 (a) També es pot calcular la divergència d'un camp de dues variables: $F(x,y) = (x, y^2)$.

$$\nabla \cdot F(x,y) = 1 + 2y.$$

(b) Calculeu la divergència del camp

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \right).$$

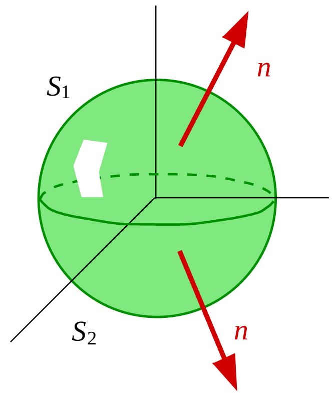
(Sol. $\nabla \cdot F = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.)

(c) Calculem el flux total del camp $F(x,y,z) = (xy, 4yz^2, yz)$ que surt del cub unitat: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. (El farem aplicant el teorema de la divergència.)

$$\begin{aligned} \iint_S (F \cdot n)\, da &= \iiint_D (y + 4z^2 + y)\, dxdydz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (2y + 4z^2) dz = \cdots = \int_0^1 (2y + \frac{4}{3}) dy = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 6.18 Ara *comprovarem* el teorema de la divergència sobre la bola unitat B amb un camp vectorial concret: $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Denotarem per D el disc del pla xy de radi 1 centrat en $(0,0)$.

Per calcular el flux total que surt per la superfície, la dividim en dues parts: la semiesfera superior, S_1, i la semiesfera inferior, S_2.
A S_1 és $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.
A S_2 és $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.
Calcularem el flux que surt per cada una de elles i després sumarem els resultats.



A la primera tenim:

$$\iint_{S_1} (F\cdot n)\,da = \iint_D (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right)dxdy$$
$$= \iint_D \frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr = \cdots = 2\pi.$$

I a la segona:

$$\iint_{S_2} (F\cdot n)\,da = \iint_D (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},-1\right)dxdy$$
$$= \iint_D \frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr = \cdots = 2\pi.$$

Per tant, el flux total que surt de l'esfera és 4π.

(Nota: a la segona integral hem fet servir el vector normal que apunta cap a baix: $(f_x, f_y, -1)$.)

(Més ràpid: Flux$= \iint_S (x,y,z)(x,y,z)da = A(S)$.)

Finalment calcularem el flux fent servir el teorema de la divergència:

$$\nabla \cdot F = 3.$$

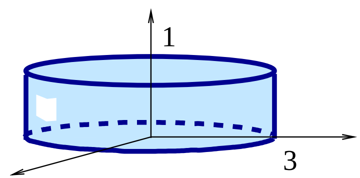
El flux total que surt de l'esfera serà

$$\iiint_B 3\,dxdydz = 3 \cdot \mathrm{Volum}(B) = 3\frac{4}{3}\pi = 4\pi.$$

Exemple 6.19 Trobem el flux total que surt del sòlid, T, definit per $0 \le x^2 + y^2 \le 9$, $0 \le z \le 1$, essent $F(x,y,z) = (x, 2y^2, 3z^2)$.

Apliquem directament el teorema de la divergència:

$$\text{Flux} = \iiint_T (1+4y+6z)\,dxdydz = \cdots = 36\pi.$$



6.6 El teorema de Stokes

Aquest resultat és una generalització del teorema de Green a l'espai. Necessitem una definició prèvia.

Definició 6.20 Donat un camp vectorial $F(x,y,z) = (P,Q,R)$, es defineix el seu rotacional com

$$\operatorname{rot}(F) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

sempre que aquestes derivades parcials existeixin.

Observació 6.21 Si denotem $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, aleshores

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F.$$

(I també: $\operatorname{grad}(f) = \nabla f$, $\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F$)

Exemples 6.22 Trobem el rotacional dels camps següents:

(a) $F(x,y,z) = (x,y,z)$.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \cdots = (0,0,0).$$

(b) $F(x,y,z) = (3z^2, xy, x)$.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z^2 & xy & x \end{vmatrix} = \cdots = (0, 6z-1, y).$$

Definició 6.23 Un camp F tal que $\operatorname{rot}(F) = 0$ s'anomena *irrotacional*.

Observació 6.24 Tots els camps conservatius són irrotacionals. En efecte, si $F = (P,Q,R)$, per ser conservatiu es compleixen les igualtats següents:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

i, per tant,

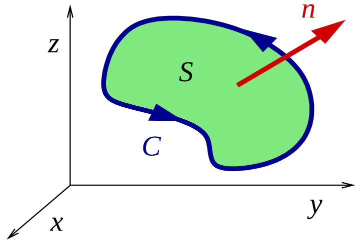
$$\operatorname{rot}(F)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=(0,0,0).$$

Exemple 6.25 Calculem el rotacional del camp $F(x,y,z)=(yz,xz,xy)$.

(Sol. El rotacional és $(0,0,0)$ ja que F és el gradient de $f(x,y,z)=xyz$, és a dir, F és un camp conservatiu.)

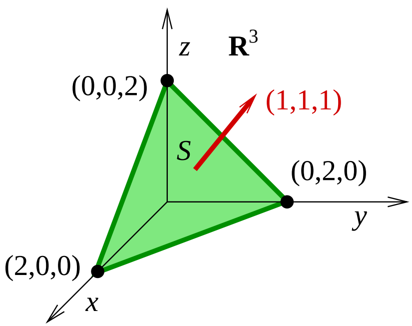
Teorema 6.26 (Teorema de Stokes) *Sigui S una superfície (regular) amb normal unitària superior $\mathbf{n}$. Suposem que la frontera de S és una corba regular a trossos C orientada en sentit antihorari respecte a $\mathbf{n}$. Donat un camp vectorial $F=(P,Q,R)$ de classe C^1 en S, aleshores*

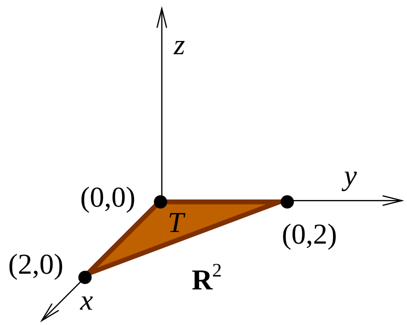
$$\oint_C F\,dr=\iint_S(\operatorname{rot}(F)\cdot n)\,da.$$



La integral $\oint_C F\,dr$ s'anomena *la circulació de F al voltant de C*.

Exemple 6.27 Comprovem el teorema de Stokes sobre el triangle de vèrtexs $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ i $(0,0,2)$, essent $F(x,y,z) = (2z,-y,x)$.





La superfície S ve donada per $z = 2-x-y$, i els paràmetres (x,y) varien dins del triangle del pla xy de vèrtexs $(0,0)$, $(2,0)$ i $(0,2)$. Denotarem aquest triangle per T.

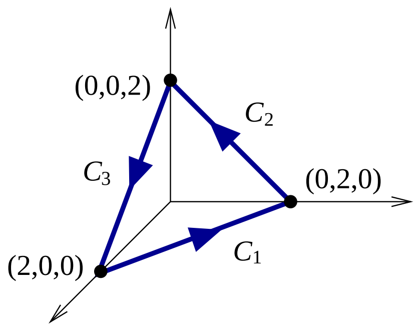
Calculem el rotacional del camp:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & -y & x \end{vmatrix} = \cdots = (0,1,0).$$

Tenim, doncs,

$$\iint_S (\mathrm{rot}(F)\cdot n)da = \iint_T (0,1,0)\cdot(1,1,1)dxdy = \text{Àrea}(T) = 2.$$

Per calcular la circulació hem de fer tres integrals de línea i, per tant, parametritzar prèviament tres segments: C_1 el segment que va de $(2,0,0)$ a $(0,2,0)$, C_2 el que va de $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$ i C_3 el que va de $(0,0,2)$ a $(2,0,0)$.



Una parametrització de C_1:

$$(x,y,z) = (2,0,0) + t(-2,2,0) \quad \text{amb} \quad t \in [0,1].$$

Una parametrització de C_2:

$$(x,y,z) = (0,2,0) + t(0,-2,2) \quad \text{amb} \quad t \in [0,1].$$

Una parametrització de C_3:

$$(x,y,z) = (0,0,2) + t(2,0,-2) \quad \text{amb} \quad t \in [0,1].$$

La circulació de $F(x,y,z) = (2z,-y,x)$ serà

$$\oint_C F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_0^1 (0,-2t,2-2t)(-2,2,0)dt + \int_0^1 (4t,-2+2t,0)(0,-2,2)dt$$
$$+ \int_0^1 (4-4t,0,2t)(2,0,-2)dt = \cdots = -2+2+2 = 2.$$