Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de
Matemàtica Aplicada II
ETSEIAT

Càlcul II - EI
Curs 2009–2010
Quadrimestre de Tardor
6 de novembre de 2009

Primer parcial

1. Considereu la corba C parametritzada per $r(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t\,,\, 1-\sin t\,,\, -\frac{3}{5}\cos t\right)$, quan $t \in [0, 2\pi]$.
   (a) Demostreu que està parametritzada per l'arc.
   (b) Calculeu-ne la curvatura i la torsió.
   (c) Escriviu el tríedre de Frenet.
   (d) Demostreu que la corba és una circumferència i calcule-ne el centre i el radi.

2. Contesteu els dos apartats que segueixen:
   (a) Classifiqueu les corbes de nivell de la funció donada per $f(x,y) = \dfrac{x^2}{1-y^2}$.
   (b) Representeu i estudieu topològicament el conjunt $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y < 3\}$.

3. Considereu la superfície S definida per $z^2 = x^2 + y^2$ i el pla $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$.
   (a) Comproveu que no hi ha cap punt de S on el pla tangent sigui paral·lel a π.
   (b) Denotem per C la corba intersecció de S i π. Quins punts de C estan a distància màxima i mínima de l'origen de coordenades?

4. Considereu l'equació $xy + z + 3xz^5 = 4$.
   (a) Enuncieu el teorema de la funció implícita.
   (b) Proveu que l'equació anterior defineix z com a funció implícita diferenciable de x i y en un cert entorn del punt $(1,0,1)$. Diguem que g és aquesta funció (és a dir, $z = g(x,y)$).
   (c) Calculeu la derivada direccional de g en el punt $(1,0)$ segons la direcció del vector $(3,-4)$.
   (d) Doneu un valor aproximat de $g(1.5\,, 0.5)$ amb dos decimals.

① $r(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t,\ 1-\sin t,\ -\frac{3}{5}\cos t\right)$ $t \in [0, 2\pi]$

(a) $r'(t) = \left(-\frac{4}{5}\sin t,\ -\cos t,\ \frac{3}{5}\sin t\right)$

$\|r'(t)\| = 1 \Rightarrow$ està parametritzada per l'arc.

(b) Aprofitant que està parametritzada per l'arc: $K = \|r''(t)\|$

$K = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 \quad \forall t.$

(c) $T = r'(t) = \left(-\frac{4}{5}\sin t,\ -\cos t,\ \frac{3}{5}\sin t\right)$

$N = \frac{r''(t)}{\|r''(t)\|} = \left(-\frac{4}{5}\cos t,\ \sin t,\ \frac{3}{5}\cos t\right)$

$B = \left(-\frac{3}{5},\ 0,\ -\frac{4}{5}\right)$

(d) Com que B és constant, la corba està continguda en un pla.

Per tant, la torsió és $\tau = 0$.

La única corba plana amb curvatura constant és la circumferència.

El seu radi és $\rho = \frac{1}{K} = 1$. Centre: $r(t) + \rho \cdot N(t) = (0, 1, 0)$.

② (a) $f(x,y) = \frac{x^2}{1-y^2}$ $\qquad \frac{x^2}{1-y^2} = k$. $\quad$ · $k=0 \Rightarrow \quad x = 0$ (una recta vertical)

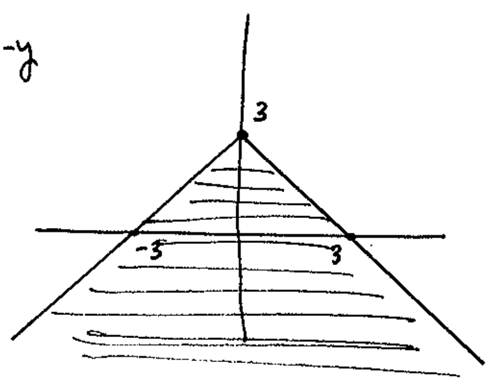
· $k \neq 0$: $\quad x^2 = k - ky^2$, $\quad x^2 + ky^2 = k$, $\quad \frac{x^2}{k} + y^2 = 1$

· $k>0$, El·lipses

· $k<0$, Hipèrboles

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + y < 3\}$ $\qquad y-3 < x < 3-y$

$|x| < 3-y \Rightarrow y < 3$



· No fitat. $\quad$ · Frontera: dues semirectes

· No tancat. $\quad$ · No compacte.

③ $z^2 = x^2 + y^2$ con

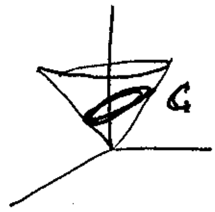
$x + y - 2z + 1 = 0$ pla

(a) El gradient al con hauria de ser paral·lel al vector associat al pla:

$(2x, 2y, -2z) = k\cdot(1, 1, -2) \Rightarrow \quad x = \frac{k}{2}, \quad y = \frac{k}{2}, \quad z = k.$

$\Rightarrow k^2 = \frac{2k^2}{4} \Rightarrow k = 0$!! Al vèrtex, el con no té pla tangent.

(b) $C \qquad z^2 = x^2+y^2 \ \cap \ x+y-2z+1=0$



Es pot comprovar que C és una el·lipse. Per tant, és un conjunt compacte. La funció distància a l'origen assolirà màxim i mínim absoluts.

$$L = x^2+y^2+z^2 - \lambda(x^2+y^2-z^2) - \mu(x+y-2z+1)$$

Hem de resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=0 \\ x^2+y^2-z^2=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{array}\right\}$$

Les seves solucions són:

P_1: $x = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

P_2: $x = \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

El màxim es troba a P_1 i el mínim a P_2.

4 (a) Mireu els apunts de teoria.

(b) Considerem $F(x,y,z) = xy + z + 3xz^5 - 4$.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ F(1,0,1) = 0+1+3-4=0 \ \checkmark \\ \cdot\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 1+15xz^4 \ \Rightarrow\ \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 16 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, g \text{ tq } z=g(x,y) \ldots$$

(c) $dF = (y+3z^5)dx + x\,dy + (1+15xz^4)dz = 0$

$$dz = \underbrace{\boxed{-\frac{y+3z^5}{1+15xz^4}}}_{\frac{\partial g}{\partial x}} dx \underbrace{\boxed{-\frac{x}{1+15xz^4}}}_{\frac{\partial g}{\partial y}} dy \ \Rightarrow\ \nabla g(1,0) = \left(\frac{-3}{16}, \frac{-1}{16}\right)$$

Derivada direccional: $\left(-\frac{3}{16}, \frac{-1}{16}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{-9}{80}+\frac{4}{80} = \frac{-5}{80} = \boxed{-\frac{1}{16}}$

(d) Aproximem $g(x,y)$ pel pla tangent:

$$g(x,y) \simeq \frac{\partial g}{\partial x}(1,0)\cdot(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)\cdot(y-0) + g(1,0) = -\frac{3}{16}(x-1) - \frac{1}{16}y + 1$$

$$g(1.5, 0.5) \simeq -\frac{3}{16}\cdot 0.5 - \frac{1}{16}\,0.5 + 1 = \frac{-3}{32} - \frac{1}{32} + 1 = \frac{-4}{32}+1 = \frac{-1}{8}+1 = \underline{\underline{0.875}}$$