Departament de Matemàtica Aplicada II
Escola Tècnica Superior d'Enginyeries
Industrial i Aeronàutica de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Càlcul II-GRETI
Curs 2013–2014
Quadrimestre de Primavera
8 d'abril de 2014
Examen parcial

Resolució

1. (2 punts) Considerem la funció

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2.$$

(a) Estudieu i identifiqueu les seves superfícies de nivell.

(b) Determineu el punt (o punts) sobre la superfície de nivell 6, $f(x,y,z) = 6$, on la recta normal és paral·lela a la recta que uneix els punts $(3,-1,0)$ i $(5,3,-6)$.

(a) Per estudiar les superfícies de nivell escrivim:

$$k = x^2 - y^2 + 2z^2,\ k \in \mathbb{R}.$$

- Si $k = 0$ obtenim $y^2 = x^2 + 2z^2$, és a dir, un con amb l'eix de simetria en OY.
- Si $k < 0$, de $k = x^2 - y^2 + 2z^2$, deduïm que tenim un hiperboloide de dos fulls.
- Si $k > 0$, de $k = x^2 - y^2 + 2z^2$, deduïm que tenim un hiperboloide d'un full.

(d) Tenim $x^2 - y^2 + 2z^2 = 6$ i considerem $g(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 - 6 = 0$. Volem que la recta normal a la superfície sigui paral·lela a la recta que uneix els dos punts donats, és a dir, paral·lela al vector $(1,2,-3)$. Sabem que la recta normal en un punt té la direcció del gradient a la superfície en el punt, per tant, cal que

$$\Delta g(x,y,z)//(1,2,-3) \iff (2x,-2y,4z) = \lambda(1,2,-3).$$

D'altra banda, i donat que el punt (x,y,z) ha de pertànyer a la superfície, hem de resoldre un sistema de 4 equacions amb 4 incògnites:

$$\begin{cases} 2x & = \lambda \\ -2y & = 2\lambda \\ 4z & = -3\lambda \\ x^2 - y^2 + 2z^2 & = 6 \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim els punts:

$$P_1 = (2,-4,-3) \quad \text{i} \quad P_2 = (-2,4,3).$$

Enunciado y solución del problema 2

2. (3 punts) Considerem les superfícies

$$S_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{i} \quad S_2 : x + z = 1$$

(a) Doneu una parametrització de la trajectòria d'una partícula que està en el punt $P = (0, 1, 1)$ sobre la superfície S_1 i recorre la corba intersecció $S_1 \cap S_2$.

Solución: Sólo debemos preocuparnos de parametrizar las dos primeras componentes de manera que la proyección sobre el plano $z = 0$ recorra la circunferencia unidad, pues la tercera debe ser $z = 1 - x$. Podemos usar la parametrización habitual, $x = \cos t$, $y = \sin t$ (y, por tanto, $z = 1 - \cos t$), pero si hay que empezar en el punto P, el primer valor del parámetro debe ser $t = \pi/2$ y, por consiguiente, el último, $t = \pi/2 + 2\pi$. Quedaría así:

$$r(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t) \qquad \text{con} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

Si queremos que el punto P se corresponda con el valor 0 del parámetro, podríamos usar como tal el ángulo formado por el radio de la circunferencia proyección y el semieje positivo de ordenadas. Por ejemplo, tomando ese ángulo en sentido "horario" (negativo), resultaría

$$s(\theta) = (\sin\theta, \cos\theta, 1 - \sin\theta) \qquad \text{con} \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Y si lo tomamos en sentido "antihorario" (positivo),

$$\sigma(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 1 + \sin\varphi) \qquad \text{con} \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(b) Justifiqueu l'existència d'un punt (o punts) de la corba intersecció el més allunyat possible de l'origen.

Solución: La función "distancia al origen", $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, es continua (en todo $\mathbf{R}^3$) y la curva es un compacto (cerrado y acotado), luego esa función alcanza el máximo sobre la curva, por el Teorema de Weierstrass.

(c) Trobeu, si existeix, el punt (o punts) anteriors.

Solución: Usando cualquier parametrización de la curva, podemos describir la distancia de sus puntos al origen en función del parámetro, es decir, como una función continua en un intervalo cerrado. Por ejemplo, $d(t) = \|r(t)\|$ para $t \in [\pi/2, 5\pi/2]$. Para hallar los extremos absolutos, es mejor usar su cuadrado, evitando así raíces cuadradas. Calculemos, pues, el máximo de

$$D(t) = 2 - 2\cos t + \cos^2 t \qquad \text{en} \qquad \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

En primer lugar, como $D'(t) = 2\sin t\,(1 - \cos t)$, los puntos críticos de D en $(\pi/2, 5\pi/2)$ son $t = \pi$ y $t = 2\pi$. Resulta que, en esos puntos, $D(\pi) = 5$ y $D(2\pi) = 1$, mientras que en los extremos del intervalo, $D(\pi/2) = D(5\pi/2) = 2$. Luego el punto más alejado del origen es $r(\pi) = (-1, 0, 2)$, siendo su distancia al origen $d(\pi) = \sqrt{5}$.

Este apartado se puede resolver de otras maneras. Probablemente, la manera más fácil de equivocarse, olvidarse de alguna solución y/o confundirse en los cálculos, es decir, de complicarse la vida, es utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, que va así:

La función a maximizar es $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y las restricciones vienen dadas por las funciones $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ y $g_2(x, y, z) = x + z - 1$. Así, las condiciones que deben cumplir los puntos de extremo de f sobre $S_1 \cap S_2$,

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \lambda_2 \nabla g_2(P), \qquad g_1(P) = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(P) = 0$$

se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{1}$$
$$2y = 2\lambda_1 y \tag{2}$$
$$2z = \lambda_2 \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{4}$$
$$x + z = 1 \tag{5}$$

La ecuación (2) sólo se cumple para $y = 0$ o $\lambda_1 = 1$. En este último caso, la ecuación (1) nos da que $\lambda_2 = 0$ y entonces, por (3), $z = 0$, con lo cual, por (5), $x = 1$ y, por (4), $y = 0$. Es decir, en este caso el sistema sólo nos da un posible punto de extremo de f: $P_1 = (1, 0, 0)$.
En el caso $y = 0$, de (4) se obtiene que $x = \pm 1$. Si $x = 1$, entonces $z = 0$, por (5), y tenemos el mismo punto que antes. Si, en cambio, $x = -1$, resulta que $z = 2$ y tenemos un nuevo candidato a punto de extremo de f: $P_2 = (-1, 0, 2)$. Como $f(P_1) = 1$ y $f(P_2) = 5$, el punto de máximo de f sobre $S_1 \cap S_2$ es P_2, o sea, que P_2 es el punto de la curva más alejado de origen, como antes.

Departament de Matemàtica Aplicada II
Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

3. (2 punts) Considerem els camps vectorials

$$F(x,y) = (x^2+y^2, x-y) \quad \text{i} \quad G(u,v) = (u^3, u+v).$$

Calculeu $D(G\circ F)(0,-1)$.

$D(G\circ F)(0,-1) = DG(F(0,-1))\cdot DF(0,-1)$ on DG i DF indiquen les matrius jacobianes

Tenim: $F(0,-1) = (1,1)$

$JF(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $JF(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$JG(u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $JG(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Finalment,

$D(G\circ F)(0,-1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}$

4. (3 punts) Considerem la funció:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

(a) Determineu el polinomi de Taylor de grau 2, en el punt $(0,0)$.

(b) Trobeu els extrems relatius de $f(x,y)$.

(c) Determineu els extrems absoluts de $f(x,y)$ en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

(a) $P_{2,(0,0)}(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\, H(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$; $\nabla f(0,0) = (0,0)$; $f(0,0) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$; $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Finalment,

$$P_{2,(0,0)}(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-3y, -3x)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-6xy) = \underline{-3xy}$$

(b) Extrems relatius de $f(x,y)$.

Punts crítics $\rightarrow \nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^3 - 3yx = 0 \\ 3y^3 - 3xy = 0 \end{cases} \iff x^3 - y^3 = 0 \iff y = x$

- Substituïm a la 1ª equació:

$3x^2 - 3x = 0 \iff 3x(x-1) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow P_1 = (0,0) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \rightarrow P_2 = (1,1) \end{cases}$

- Vegem ara la naturalesa dels punts crítics trobant la matriu hessiana.

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$; $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ~~per~~ com que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ el criteri no decideix

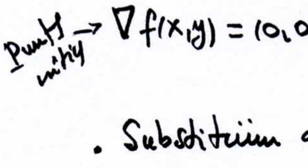
$H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ ja que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0$ i $|H(1,1)| > 0$ en P_2 hi ha un mínim relatiu

- Pel que fa a $P_1 = (0,0)$ estudiem directament f.

$f(0,0) = 0$ però $f(x,x) = 2x^3 - 3x^2 = \underbrace{x^2}_{+}(2x-3)$ i $2x - 3$ $\begin{cases} \oplus \text{ si } x > 3/2 \\ \ominus \text{ si } x < \frac{3}{2} \end{cases}$, per tant,

en $(0,0)$ hi ha un punt de sella.

(c) Extrems absoluts de f en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.



- Observem que existeixen ja que f és contínua i el recinte un compacte (t.W.)
- Trobarem els extrems absoluts ~~entre~~ els punts crítics de ①, ②, ③, ④ i (5) i els punts dels vèrtexs,

$\boxed{5}$ Interior del recinte.

$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff P_1 = (0,0)$ i $P_2 = (1,1)$

$\boxed{1}$ $\left.\begin{matrix} y = 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{matrix}\right\}$ $f(x,0) = x^3$, $f'(x,0) = 3x^2 = 0 \iff x = 0 \rightarrow P(0,0)$ ja contemplat // $P_3 = (-2,0)$, $P_4 = (2,0)$

$\boxed{2}$ $\left.\begin{matrix} x = 2 \\ 0 < y < 2 \end{matrix}\right\}$ $f(2,y) = y^3 - 6y + 8$. $f'(2,y) = 3y^2 - 6 = 0 \iff y = \pm\sqrt{2} \rightarrow P_5 = (2, \sqrt{2})$

$\boxed{3}$ $\left.\begin{matrix} y = 2 \\ -2 < x \leq 2 \end{matrix}\right\}$ $f(x,2) = x^3 - 6x + 8$, $f'(2,x) = 3x^2 - 6 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$ $\begin{cases} P_6 = (-\sqrt{2}, 2) \\ P_7 = (\sqrt{2}, 2) \end{cases}$, $P_8 = (2,2)$, $P_9 = (-2,2)$

$\boxed{4}$ $\left.\begin{matrix} x = -2 \\ 0 < y < 2 \end{matrix}\right\}$ $f(-2,y) = y^3 + 6y - 8$, $f'(2,y) = 3y^2 + 6 \neq 0, \forall y$

$f(0,0) = 0$, $f(1,1) = -1$, $\boxed{f(-2,0) = -8}$, $f(2,0) = 8$

$f(2,\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$, $\boxed{f(-\sqrt{2},2) = 8 + 4\sqrt{2}}$, $f(\sqrt{2},2) = 8-$

$f(2,2) = 4$, $f(-2,2) = 12$

Avaluem f en els 9 punts obtinguts i

Màxim abs. $\rightarrow 8 + 4\sqrt{2}$. Mínim abs. $\rightarrow -8$.