Departament de Matemàtica Aplicada II
Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Càlcul II
Curs 2011–2012
Quadrimestre de Primavera
16 d'abril de 2012
Examen parcial- Model A

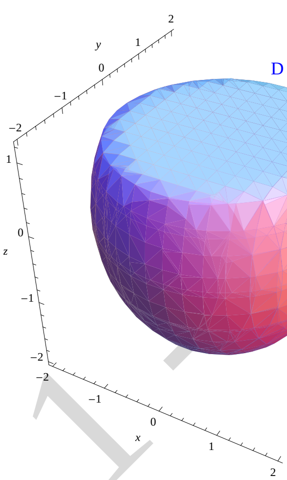
1. Considerem la funció $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+x+y+z$ i el conjunt

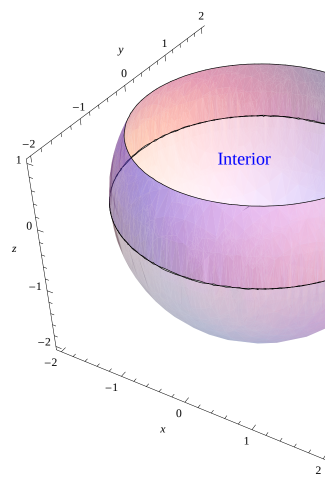
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4,\, z \leq 1\right\}$$

(a) Estudieu els possibles extrems relatius de la funció f a l'interior de D.
(b) Té f extrems absoluts en D? En cas que existeixin, trobeu-los.

Solució

(a) Observem que D és l'esfera de centre $(0,0,0)$ i radi 2 tallada pel pla $z=1$.





Busquem els punts crítics:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x+1, 2y+1, 2z+1) = (0,0,0) \Longrightarrow x=y=z=-\frac{1}{2}$$

Així, considerem $P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ja que pertany a l'interior de D.
Vegem si f té extrem relatiu en el punt P_1. La matriu hessiana´és:

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

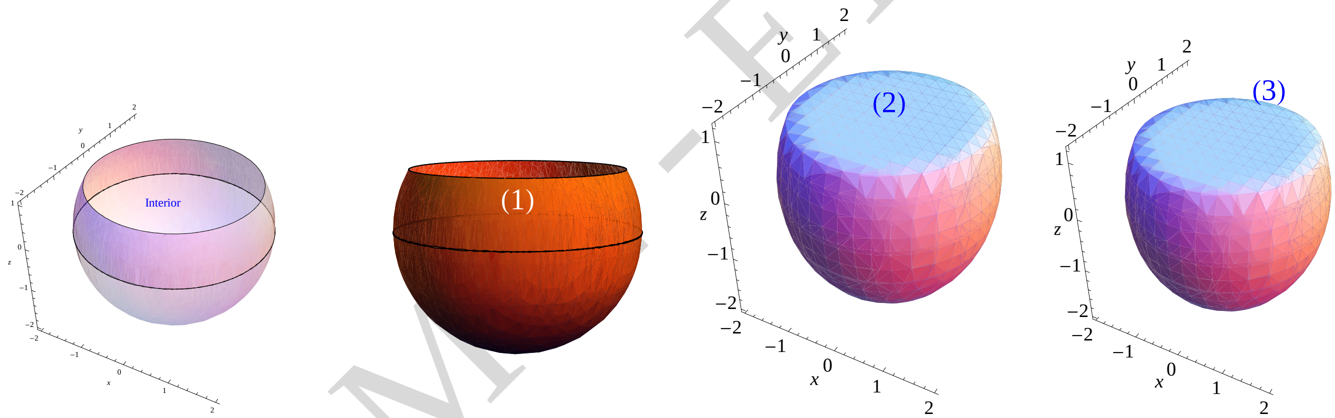
com que la hessiana és constant i

$$|2| > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

sabem que en tot punt crític f té un mínim relatiu. En particular, f té un mínim relatiu en P_1.

(b) Notem que f és contínua i D és un conjunt tancat(conté la frontera) i fitat(podem trobar una bola de radi finit que el contingui), per tant, compacte. Podem aplicar el teorema de *Weierstrass* que ens assegura l'existència d'un màxim i un mínim absoluts. Els buscarem entre els punts crítics de

- l'interior,
- la regió (1),
- la regió (2),
- la circumferència (3).



- Interior de D. Per l'apartat (a) tenim $P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

- Regió (1). Tenim $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+x+y+z$ amb $\left.\begin{array}{rl} x^2+y^2+z^2 & = 4 \\ z < & 1 \end{array}\right\}$

Per trobar les punts crítics aplicarem el mètode dels multiplicadors de *Lagrange* a les funcions f i $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$ amb $z<1$. Així,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) & = & 0 \\ z & < & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (2x+1, 2y+1, 2z+1) & = & \lambda(2x,2y,2z) \\ g(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right.$$

d'on deduïm que si $x \neq y \neq z \neq 0$ (de fet, no podem tenir $x=y=z=0$ ja que no satisfà la condició) llavors,

$$\lambda = \frac{2x+1}{2x} = \frac{2y+1}{2y} = \frac{2z+1}{2z} \Longrightarrow x=y=z$$

Si ara substituïm $x=y=z$ a la condició $g(x,y,z)=0$ deduïm que $x=y=z=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i, per tant, obtenim el punt

$$P_2 = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

- Regió (2). En aquest cas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & x^2+y^2+z^2+x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 & < & 4 \\ z & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x^2+y^2+x+y+2 \\ x^2+y^2 & < & 3 \end{array}\right.$$

Busquem els punts crítics

$$\nabla f(x,y,z)=0 \Longrightarrow (2x+1,2y+1)=(0,0) \Longrightarrow x=-\frac{1}{2}=y, z=1$$

Per tant, obtenim el punt

$$P_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

- Circumferència (3). Ara les condicions són:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & x^2+y^2+z^2+x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 & = & 4 \\ z & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x^2+y^2+x+y+2 \\ x^2+y^2 & = & 3 \end{array}\right.$$

Si parametritzem la circumferència podem determinar els punts crítics considerant una funció d'una variable:

$$x=\sqrt{3}\sin t, y=\sqrt{3}\cos t, \quad t\in[0,2\pi] \Longrightarrow f(t)=5+\sqrt{3}\sin t+\sqrt{3}\cos t, \quad t\in[0,2\pi]$$

Per tant,

$$f'(t)=0 \Longrightarrow -\sin t+\cos t=0 \Longrightarrow t=\frac{\pi}{4} \text{ ó } t=\frac{5\pi}{4}$$

obtenim els punts

$$P_4=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2},1\right), \quad P_5=\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$$

Observem que també haguéssim pogut aplicar el mètode dels multiplicadors de *Lagrange* a les funcions $f(x,y)=x^2+y^2+x+y+2$ i $h(x,y)=x^2+y^2-3$ per trobar els punts crítics:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y) & = & \lambda h(x,y) \\ x^2+y^2 & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \cdots\cdots \Longrightarrow x=y.$$

Substituint a la condició $x^2+y^2=3$ obtenim els punts.

Avaluem f en els punts obtinguts:

$$\begin{aligned}
f(P_1) &= f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) &&= -\frac{3}{4}\\
f(P_2) &= f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) &&= 4-2\sqrt{3}\\
f(P_3) &= f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right) &&= \frac{3}{2}\\
f(P_4) &= f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2},1\right) &&= 5-\sqrt{6}\\
f(P_5) &= f\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},1\right) &&= 5+\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Finalment, el màxim absolut és $5+\sqrt{6}$ i s'assoleix en el punt $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$, mentre que el mínim absolut és $-\frac{3}{4}$ i s'assoleix en el punt $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

2. Trobeu els valors de $a \in \mathbb{R}$ pels quals el pla $x+y+z=a$ és tangent a la superfície

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}=1$$

Especifiqueu-ne també els punts de tangència.

Solució

Observem que $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}=1$ és un el·lipsoide amb centre $(0,0,0)$ i semieixos $a=\sqrt{2}$, $b=2$ i $c=\sqrt{6}$, per tant, trobarem dos plans tangents. Per determinar-los utilitzarem el fet que en el punt de tangència, (x_0,y_0,z_0), se satisfà:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla \text{el·lipsoide}|_{(x_0,y_0,z_0)} & = & \lambda \nabla \text{pla}|_{(x_0,y_0,z_0)} \\ x_0+y_0+z_0 & = & a \\ \frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{4}+\frac{z_0^2}{6} & = & 1 \end{array}\right.$$

Així,

$$\left(\frac{2x_0}{2},\frac{2y_0}{4},\frac{2z_0}{6}\right)=\lambda(1,1,1)\Longrightarrow x_0=\frac{z_0}{3}, y_0=\frac{2z_0}{3}, z_0=z_0$$

Utilitzem ara el fet que (x_0,y_0,z_0) pertany a l'el·lipsoide

$$\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{4}+\frac{z_0^2}{6}=1\Longrightarrow z_0=\sqrt{3}$$

i com que (x_0,y_0,z_0) també pertany al pla,

$$x_0+y_0+z_0=a\Longrightarrow a=\pm 2\sqrt{3}$$

Així, el pla $x+y+z=a$ és tangent a l'el·lipsoide si $a=\pm 2\sqrt{3}$. Els punts de tangència són:

$$\begin{array}{lcllcl} \text{Si } a & = & 2\sqrt{3} & \text{llavors } P & = & \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right) \\ \text{Si } a & = & -2\sqrt{3} & \text{llavors } P & = & \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right). \end{array}$$

3. Donades les superfícies

$$S_1: z=x^2+y^2 \quad \text{i} \quad S_2: x^2+y^2-8x+7=0$$

(a) Identifiqueu-les i feu-ne un esbós de la seva gràfica.

(b) Parametritzeu la corba $\gamma=S_1\cap S_2$.

(c) Calculeu la curvatura de γ a cada punt.

(d) Determineu l'angle d'intersecció entre S_1 i S_2 en el punt $P=(4,3,25)$.

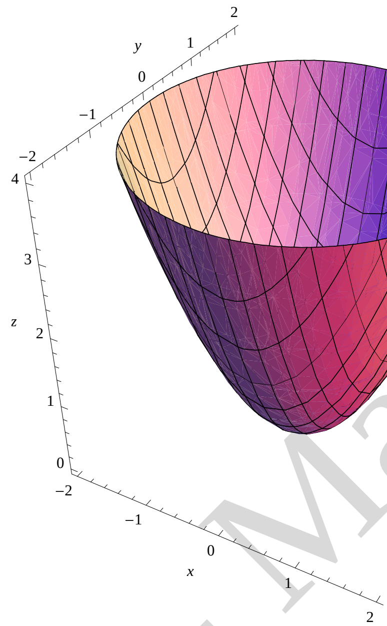
Departament de Matemàtica Aplicada II
Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

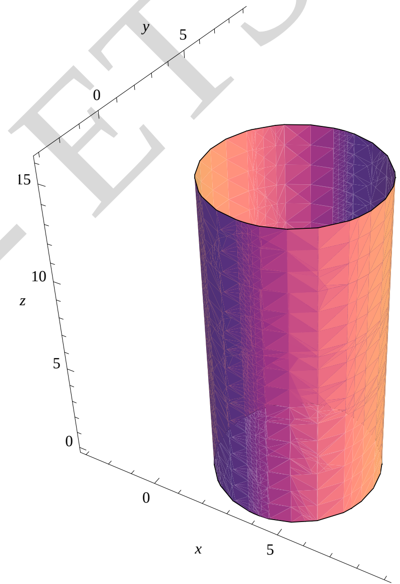
Càlcul II
Curs 2011–2012
Quadrimestre de Primavera
16 d'abril de 2012
Examen parcial- Model A

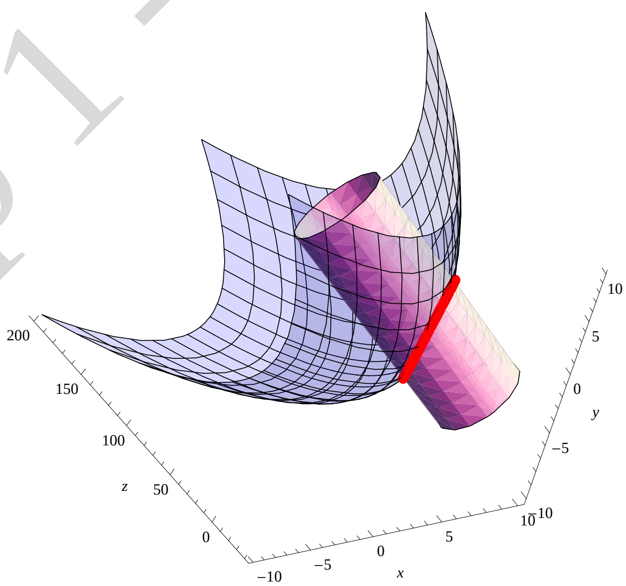
Solució

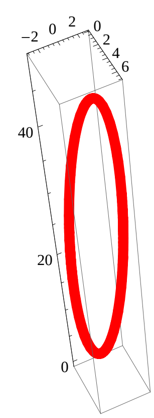
(a) S_1 és un paraboloide circular, mentre que S_2 és un cilindre circular, com es comprova completant quadrats:

$$x^2+y^2-8x+7=0 \Longleftrightarrow (x-4)^2+y^2=9$$









(b) Per parametritzar la corba intersecció n'hi ha prou en parametritzar la circumferència que genera el cilindre i assignar-li la z:

$$(x-4)^2+y^2=9 \Longrightarrow \begin{cases} x(t) &= 4+3\cos t \\ y(t) &= 3\sin t \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi]$$

per tant,

$$r(t)=\begin{cases} x(t) &= 4+3\cos t \\ y(t) &= 3\sin t \\ z(t) &= (4+3\cos t)^2+9\sin^2 t = 25+24\cos t \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi]$$

per tant,

$$\|r'(t)\times r''(t)\| = \|(-72,0,9\| = 9\sqrt{65}, \quad \|r'(t) = 3\sqrt{1+64\sin^2 t}\|$$

Finalment,

$$\kappa(t) = \frac{3\sqrt{65}}{\sqrt{1+64\sin^2 t}}, \quad \text{per a cada } t$$

(d) Observem que l'angle d'intersecció entre S_1 i S_2 en el punt $P=(4,3,25)$ és el mateix que l'angle entre $\nabla S_1(4,3,25)$ i $\nabla S_2(4,3,25)$:

$$\cos\alpha = \frac{\nabla S_1(4,3,25)\cdot\nabla S_2(4,3,25)}{\|\nabla S_1(4,3,25)\|\nabla S_2(4,3,25)\|} = \frac{6}{\sqrt{101}} \Longrightarrow \alpha \simeq 53'34^\circ.$$