Departament de Matemàtica Aplicada II
Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Càlcul II-GRETI
Curs 2014–2015
Quadrimestre de Primavera
16 de març de 2015
Corbes-Funcions **A**

1. Considereu la corba, C, de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per

$$\mathbf{r}(t) = \left(2+\sin t+\sqrt{3}\cos t, 4+\sin t-\sqrt{3}\cos t, 3+2\sin t\right), \quad t \in [0,2\pi].$$

(a) Calculeu la curvatura de C.

(b) És C una corba plana? Per què?

(c) És C una circumferència? Per què?

(d) Si C és una circumferència, trobeu-ne el centre i el radi.

Solució

(a) **Curvatura**. Sabem que

$$\kappa(t) = \frac{||r'(t)\times r''(t)||}{||r'(t)||^3}.$$

Derivem $r(t)$

$$r'(t) = (\cos t-\sqrt{3}\sin t, \cos t+\sqrt{3}\sin t, 2\cos t),$$
$$r''(t) = (-\sin t-\sqrt{3}\cos t, -\sin t+\sqrt{3}\cos t, -2\sin t),$$

i, simplificant, obtenim:

$$||r'(t)|| = \sqrt{6}, \quad r'(t)\times r''(t) = 2\sqrt{3}(-1,-1,1), \quad ||r'(t)\times r''(t)|| = 6.$$

Així,

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(b) **És C una corba plana?** Podem pensar-ho de vàries maneres, totes elles equivalents.

- És plana ja que les seves coordenades satisfan la relació $x+y-z=3$, és a dir, la corba està en aquest pla.
- Podem arribar a la mateixa conclusió comprovant que el vector binormal és constant i, per tant, el pla osculador no varia. Tenim:
$$\mathbf{B} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,-1,1)$$
així, $\mathbf{B}'=0$, és a dir, $\tau=0$.
- També podem comprovar que la torsió, en cada punt, és zero ja que els vectors $r'(t)$ i $r'''(t)$ són paral·lels:
$$\tau(t) = \frac{det(r(t), r'(t), r''(t))}{||r'(t)\times r''(t)||^2} = 0.$$

(c) **És C una circumferència?** És una circumferència ja que la corba és plana i la curvatura és constant.

(d) **Centre i radi.** El radi és $R = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{6}$. Podem trobar el centre a partir de l'expressió:

$$C = r(t) + R \cdot \mathbf{N}(t). \tag{1}$$

En el nostre cas,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sin t - \sqrt{3}\cos t, -\sin t + \sqrt{3}\cos t, -2\sin t).$$

Substituint $r(t)$ i $\mathbf{N}(t)$ a l'expressió(1) anterior obtenim

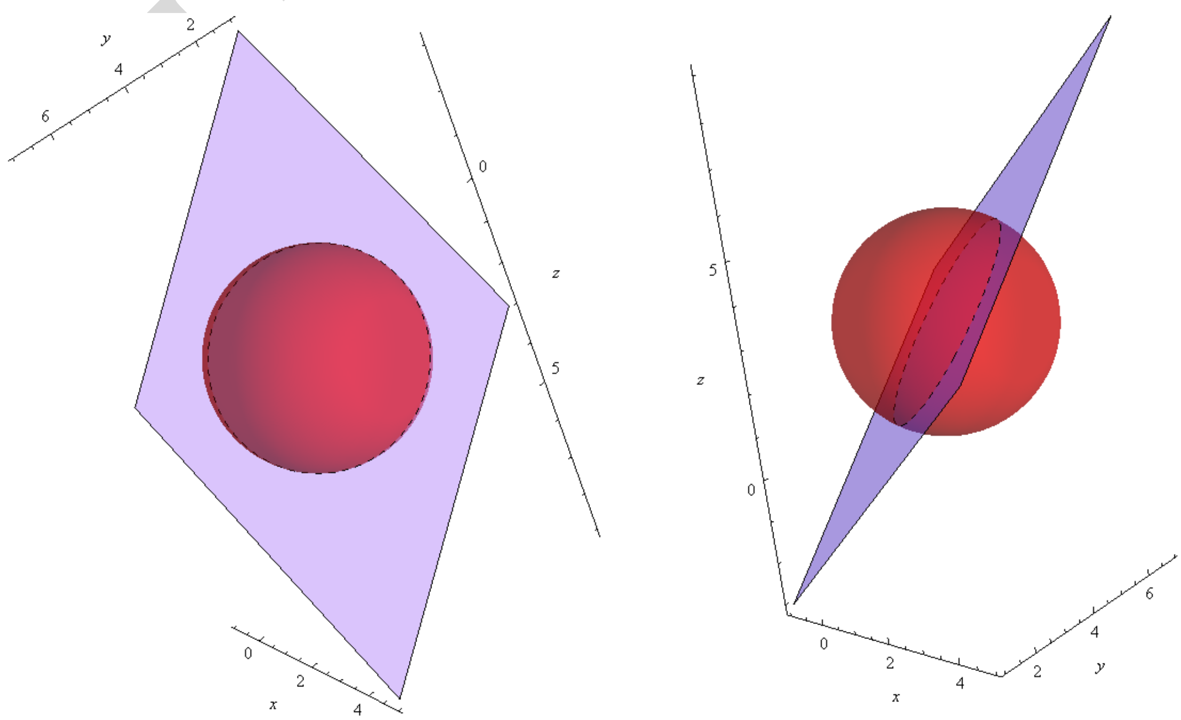
$$C = (2, 4, 3).$$

De fet, podem abreujar el càlcul. Donat que l'expressió (1) és certa per a tot valor de t, en particular, la podem considerar per una t concreta. Per exemple, $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$...

També podríem haver trobat el centre (i el radi) observant que les coordenades de la corba satisfan la igualtat

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 6$$

Així, la circumferència s'obté d'intersectar l'esfera d'equació $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 6$ amb el pla $x + y - z = 3$, com podem veure a les gràfiques següents.



2. Considereu la funció

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x}{x^2-y^2}}$$

(a) Determineu i dibuixeu el domini de la funció. Feu-ne un estudi topològic (obert, frontera, tancat, fitat i compacte).

(b) Classifiqueu i dibuixeu les corbes de nivell.

Solució

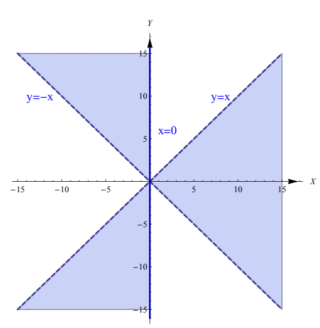
(a) **Domini.** Dom $f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tals que } \dfrac{x}{x^2-y^2}\geq 0 \text{ i } x^2\neq y^2\right\}$. És a dir,

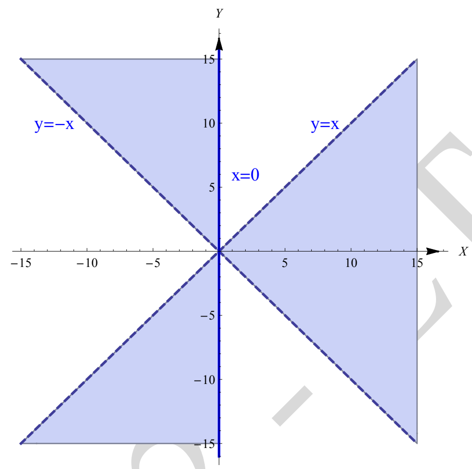
$$\frac{x}{x^2-y^2}\geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \geq 0 \\ \text{i} & \\ x^2-y^2 & >0 \\ \text{o bé} & \\ x & \leq 0 \\ \text{i} & \\ x^2-y^2 & <0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ (1) \\ \\ \\ \\ (2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$(1)\quad \begin{cases} x & \geq 0 \\ \text{i} & \\ x^2-y^2 & >0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \geq 0 \\ \text{i} & \\ (x+y)(x-y) & >0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \geq 0 \\ \text{i} & \\ y & > -x \\ \text{i} & \\ y & < x \end{cases} \text{ o bé } \begin{cases} x & \leq 0 \\ \text{i} & \\ y & < -x \\ \text{i} & \\ y & > x \text{(no possible)} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x & \leq 0 \\ \text{i} & \\ x^2-y^2 & <0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \leq 0 \\ \text{i} & \\ (x+y)(x-y) & <0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \leq 0 \\ \text{i} & \\ y & < -x \\ \text{i} & \\ y & < x \end{cases} \text{ o bé } \begin{cases} x & \leq 0 \\ \text{i} & \\ y & > -x \\ \text{i} & \\ y & > x \end{cases}$$

Gràficament:





Estudi topològic.

- El domini no és obert, ja que no tots els seus punts són interiors, per exemple, els punts de la recta $x=0$ excepte el $(0,0)$) no són interiors, tot i pertànyer al domini.
- No és tancat tancat perquè no conté la frontera que està formada per les rectes $y=-x, y=x$ i $x=0$.
- No és fitat perquè no podem trobar un disc de radi finit que el contingui.
- No és compacte perquè no és tancat ni fitat.

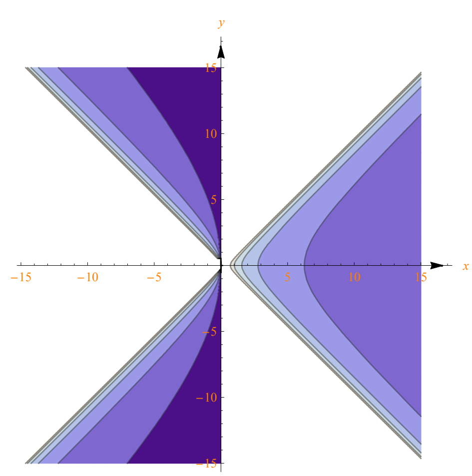
(e) **Corbes de nivell**. Considerem $f(x,y)=k$ i fem un estudi segons els diferents valors de k.

$$k=\sqrt{\frac{x}{x^2-y^2}} \Longleftrightarrow k^2x^2-k^2y^2=x \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{si } k = 0, \text{llavors } x=0 \text{ és a dir, } \textbf{la recta de les ordenades} \\ \text{si } k \neq 0, \text{llavors } \left(x-\frac{1}{2k^2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4k^4} \end{cases}$$

Així, pel cas $k\neq 0$ tenim

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2k^2}\right)^2}{\frac{1}{4k^4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4k^4}}=1$$

és a dir, hipèrboles equilàteres ($a=b$) de centre $\left(\frac{1}{2k^2},0\right)$ i semieix real $a=\frac{1}{2k^2}$. A mida que k augmenta la a disminueix. En la gràfica següent podem veure les corbes de nivell per a diferents valors de k.



Esbós de la gràfica de f en tres dimensions: