Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Matemàtica Aplicada II
ETSEIAT

Càlcul II - GRETI
Curs 2010–2011
Quadrimestre de Primavera

4 d'abril de 2011

Examen Parcial: resolució

1. Considereu les superfícies S_1 i S_2 definides per les equacions $z = x^2 + y^2$ i $3x + 4z = 1$, respectivament.

(a) Identifiqueu S_1 i S_2.

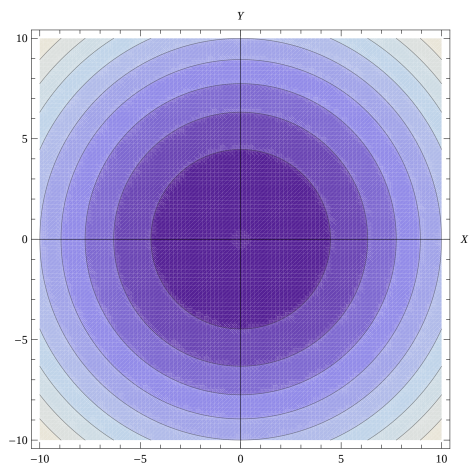
(b) Sigui C la corba intersecció de S_1 amb S_2. Determineu els punts d'aquesta corba més propers i més allunyats de l'origen de coordenades, si existeixen.

Resolució

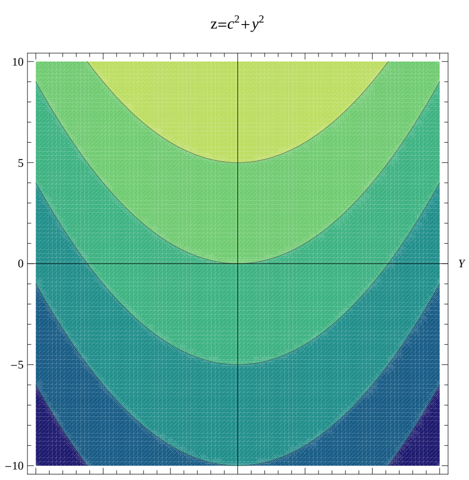
(a) Les corbes de nivell de $z = c$ són del tipus

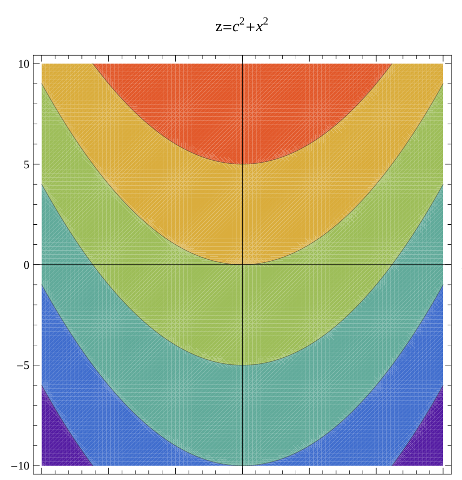
$$c = x^2 + y^2$$

és a dir, per a cada $c \geq 0$, tenim circumferències de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{c}$. Gràficament:

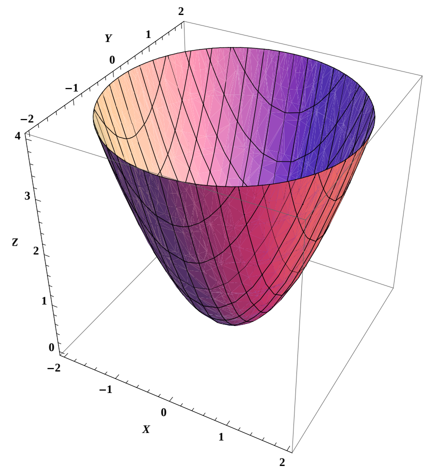


mentre que les corbes de nivell de $y = c$ o $x = c$ són paràboles del tipus $z = x^2 + c^2$ i $z = c^2 + y^2$, respectivament.





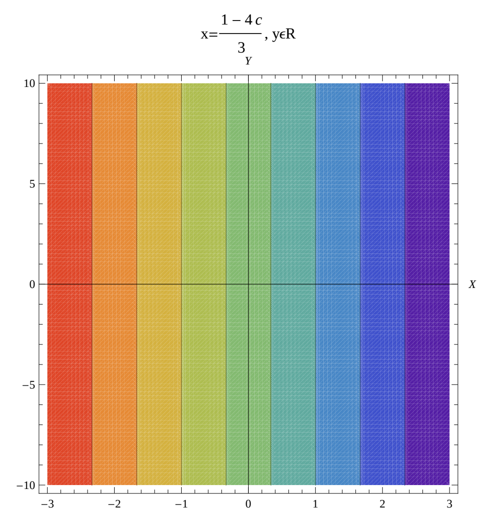
Així, S_1 és un paraboloide (de revolució) circular:



(b) Les corbes de nivell de $3x + 4z = 1$ són del tipus

$$3x + 4c = 1$$

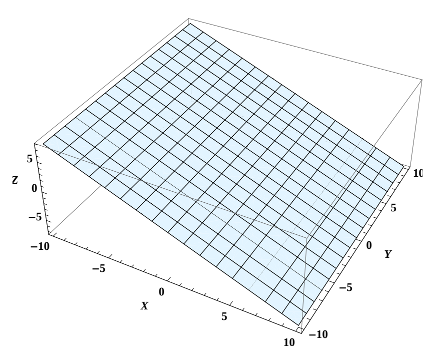
és a dir, $x = \dfrac{1-4c}{3}$, amb $y \in \mathbb{R}$, i per a cada $c \in \mathbb{R}$ tenim una recta en el pla XY.



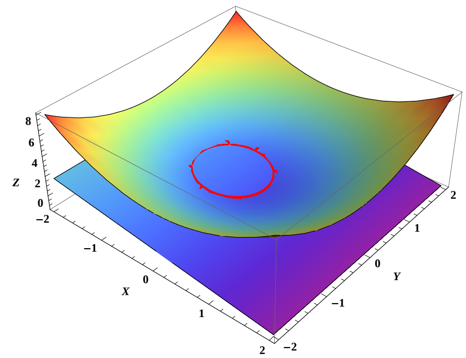
D'altra banda, de

$$3c + 4z = 1$$

també, per a cada $y \in \mathbb{R}$, obtenim una recta, però ara en el pla YZ. Així, $3x + 4z = 1$ és un pla de vector associat $(3, 0, 4)$:



(c) Si fem un esbós de les superfícies obtenim:



La projecció en el pla XY de la corba, C, intersecció de S_1 amb S_2, és la circumferència de centre $(-\frac{3}{8},0)$ i radi $\frac{5}{8}$:

$$\left\{\begin{array}{rl} z = & x^2+y^2 \\ 1 = & 3x+4z \end{array}\right. \Longrightarrow x^2+y^2 = \frac{1-3x}{4} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \left(x+\frac{3}{8}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{64}$$

Hem de determinar (si és que existeixen) el punt més proper i el més allunyat de la corba C a l'origen, és a dir, trobar el màxim i mínim absoluts de la funció

$$d\left[(x,y,z),(0,0,0)\right] = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

amb la restricció de $(x,y,z) \in C$. Fixem-nos que la funció distància és contínua i que la corba C és una circumferència, per tant un compacte. En aquest cas, el teorema de *Weierstrass* ens garanteix l'existència d'un màxim i un mínim absoluts.

D'altra banda, atès que la funció $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ és estrictament monòtona, els valors que la maximitzin o minimitzin seran els mateixos que els que maximitzin o minimitzin la funció $f(x,y,z,) = x^2+y^2+z^2$. Per comoditat, treballarem amb aquesta darrera.

Podem pensar-ho de dues maneres:

(1) Parametritzant la corba.

(2) Aplicant el mètode dels multiplicadors de *Lagrange*.

(1) **Parametritzem la corba**:

$$\left\{\begin{array}{rl} z = & x^2+y^2 \\ 1 = & 3x+4z \end{array}\right.$$

amb

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = z+z^2 \tag{1}$$

Considerem

$$\begin{aligned} x+\tfrac{3}{8} &= \tfrac{5}{8}\cos t \\ y &= \tfrac{5}{8}\sin t \\ z &= \frac{1-3x}{4} = \tfrac{17}{32} - \tfrac{15}{32}\cos t, \quad t \in [0,2\pi] \end{aligned}$$

és a dir,

$$r(t) = \left(-\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\cos t, \frac{5}{8}\sin t, \frac{17}{32} - \frac{15}{32}\cos t\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Així, a partir de (1) obtenim la funció d'una variable

$$f\big(r(t)\big) = \frac{1}{32}(17 - 15\cos t) + \frac{1}{32^2}(17 - 15\cos t)^2, \quad t \in [0, 2\pi]$$

contínua i definida en un interval tancat, per tant, aplicant el teorema de *Weierstrass* trobarem el màxim i el mínim entre els punts on $f' = 0$, o en els extrems de l'interval.

$$f'\big(r(t)\big) = 0 \Longrightarrow \cos t = \frac{33}{15} \text{ (no possible!), o bé }, \sin t = 0 \Longrightarrow t = 0, t = \pi.$$

Així, tenim dos punts:

$$P_1 = r(0) = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}\right), \quad P_2 = r(\pi) = (-1, 0, 1).$$

Avaluem d en aquests punts:

$$d\left[\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}\right), (0,0,0)\right] = \frac{\sqrt{17}}{16} < d[(-1,0,1),(0,0,0)] = \sqrt{2}$$

Finalment, P_1 és el punt més proper a l'origen i P_2 el més allunyat.

(2) **Aplicant el mètode dels multiplicadors de *Lagrange***. En aquest cas tenim:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & x^2 + y^2 + z^2 \\ g_1(x,y,z) & = & x^2 + y^2 - z \\ g_2(x,y,z) & = & 3x + 4z - 1 \end{array}\right\}$$

amb

$$\left.\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_2(x,y,z) \\ g_1(x,y,z) & = & 0 \\ g_2(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right\}$$

És a dir,

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x & = & 2\lambda x + 3\mu \\ 2y & = & 2\lambda y \\ 2z & = & -\lambda + 4\mu \\ x^2 + y^2 - z & = & 0 \\ 3x + 4z - 1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

De la segona equació obtenim $\lambda = 1$ o $y = 0$. La primera opció no és compatible amb les altres condicions. De la segona opció obtenim els punts $P_1 = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}\right)$ i $P_2 = (-1, 0, 1)$.

2. Considereu l'hèlix parametritzada per $r(t) = (\cos t\,, \sin t\,, at)$ amb $a > 0$.

(a) Per a quin valor del paràmetre a el vector tangent a l'hèlix forma un angle de 60° amb el pla XY?

(b) Suposeu que l'hèlix de l'enunciat és un camí que voreja un cilindre de radi 1 i altura 16. Per a quin valor del paràmetre a s'arriba *exactament* en quatre voltes des de la base fins a la tapa del cilindre? Quina seria la longitud d'aquest camí?

(c) Per l'hèlix que s'obté quan $a = 4$ doneu una parametrització amb celeritat 5.

(d) Doneu una parametrització de la corba plana que formen els punts intersecció de les rectes tangents a l'hèlix amb el pla $z = 0$. (Feu servir de nou l'hèlix $r(t) = (\cos t\,, \sin t\,, at)$ amb $a > 0$.)

Resolució

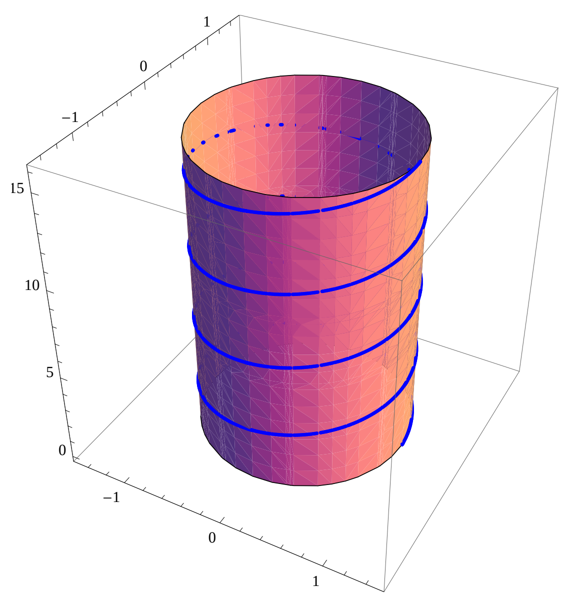
(a) Hem de determinar a de manera que $\sphericalangle\big(r'(t), (z=0)\big) = 60^\circ$. El vector associat al pla $z = 0$ és $(0,0,1)$. És a dir,

$$\sphericalangle\big(r'(t), (z=0)\big) = 60^\circ \Longrightarrow \sphericalangle\big(r'(t), (0,0,1)\big) = 30^\circ$$

Llavors

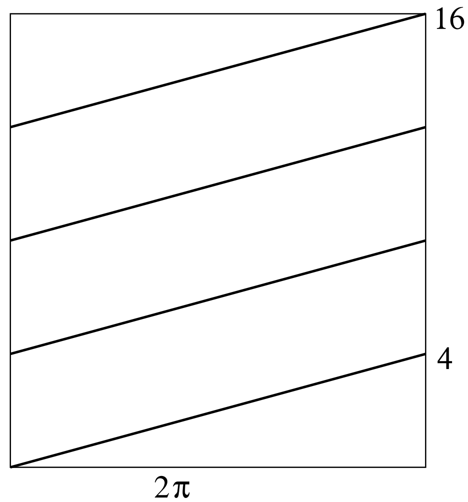
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \Longleftrightarrow a = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow a = \sqrt{3} \text{ (atès que } a > 0).$$

(b) Observem que quan $t = 0$, $r(0) = (1,0,0)$ i per $t = 2\pi$ s'ha completat una volta i està al punt $(1,0,2\pi a)$. Per tant, si s'han de completar 4 voltes, tindrem $t = 8\pi$ amb $8\pi a = 16$, és a dir, $a = \dfrac{2}{\pi}$.



La longitud del camí la podem calcular de dues maneres diferents:

- Directament, tenint el compte el cilindre desenvolupat i pensant la longitud com 4 cops la longitud de la diagonal d'un triangle rectangle de costats 2π i 4, respectivament:



$$l = 4\sqrt{16+4\pi^2} = 8\sqrt{4+\pi^2} \approx 29'79.$$

- Tenint en compte que la longitud d'una corba ve donada per

$$l = \int_b^a ||r'(t)||\,dt$$

En aquest cas, de $r'(t) = (-\sin t, cost, a) = (-\sin t, cost, \frac{2}{\pi})$ obtenim

$$l = \int_b^a ||r'(t)||\,dt == \int_0^{8\pi} \sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}\,dt = 8\sqrt{4+\pi^2} \approx 29'79.$$

(c) Partim ara de $r(t) = (\cos t, \sin t, 4t)$. Si volem canviar la celeritat amb que es recorre la corba haurem de *canviar* t, és a dir, determinarem k de manera que

$$r(t) = (\cos kt, \sin kt, 4kt) \ \text{ satisfaci } \ ||r'(t)|| = 5$$

Així, imposant $||r'(t)|| = 5$, obtenim $k = \dfrac{5}{\sqrt{17}}$ i, per tant,

$$r(t) = \left(\cos\frac{5}{\sqrt{17}}t, \sin\frac{5}{\sqrt{17}}t, \frac{20}{\sqrt{17}}t\right).$$

(d) Les rectes tangents a l'hèlix vénen donades per

$$(x,y,z) = (\cos t, \sin t, at) + \alpha(-\sin t, \cos t, a)$$

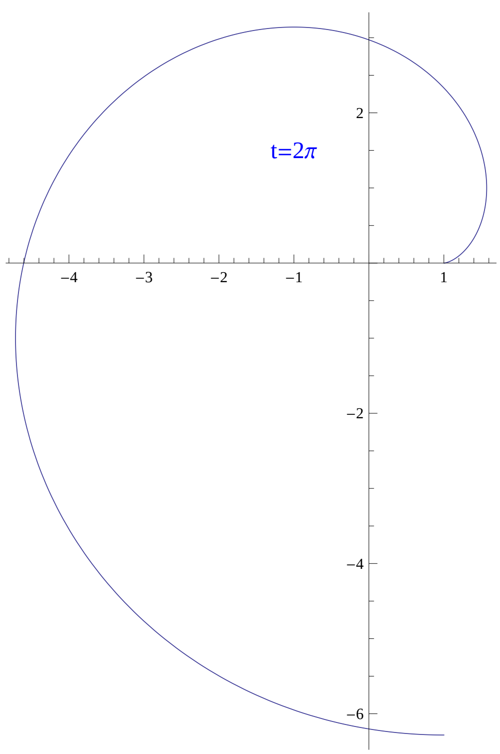
si aïllem el paràmetre α i en fem la intersecció amb el pla $z = 0$,

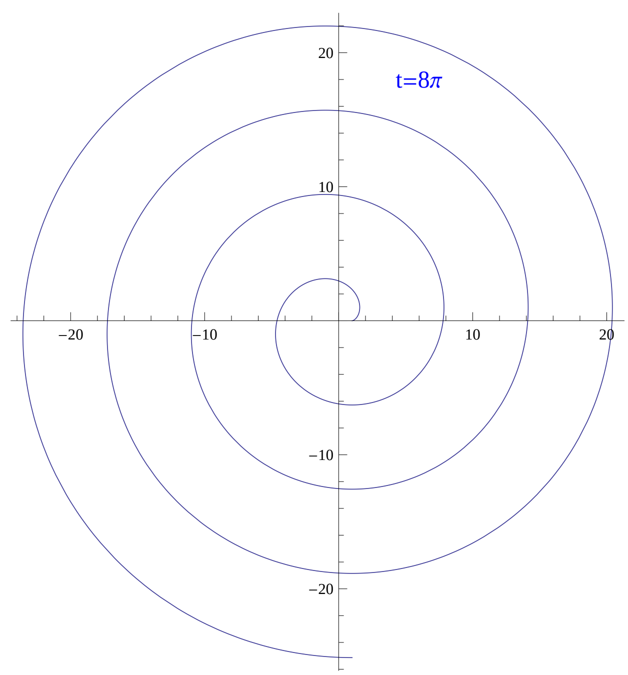
$$\begin{cases} \dfrac{x-\cos t}{-\sin t} = \dfrac{y-\sin t}{\cos t} = \dfrac{z-at}{a} = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

obtenim $\alpha = t$. Per tant, els punts on la tangent intersecta el pla $z = 0$ són de la forma

$$u(t) = (t\sin t + \cos t, -t\cos t + \sin t, 0).$$

Gràficament la corba plana té la forma d'espiral:





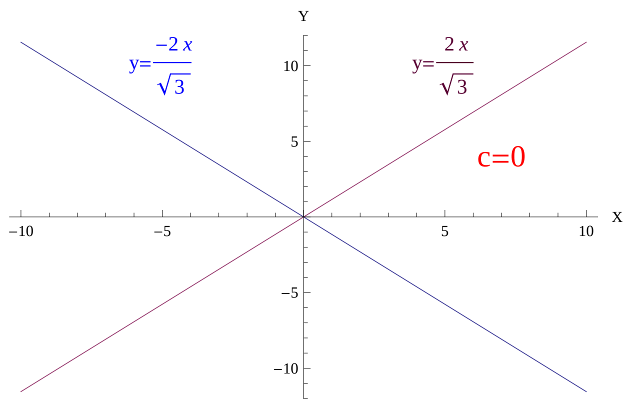
3. (a) Classifiqueu i dibuixeu les corbes de nivell de la funció $f(x,y)=\sqrt{3y^2-4x^2}$.

(b) Sigui $z=f(u,v)$ amb $u=3x^2+e^{2y}$ i $v=e^{3xy}-y^2$. Sabent que $\frac{\partial z}{\partial u}(4,1)=-1$ i $\frac{\partial z}{\partial v}(4,1)=2$, calculeu $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$.

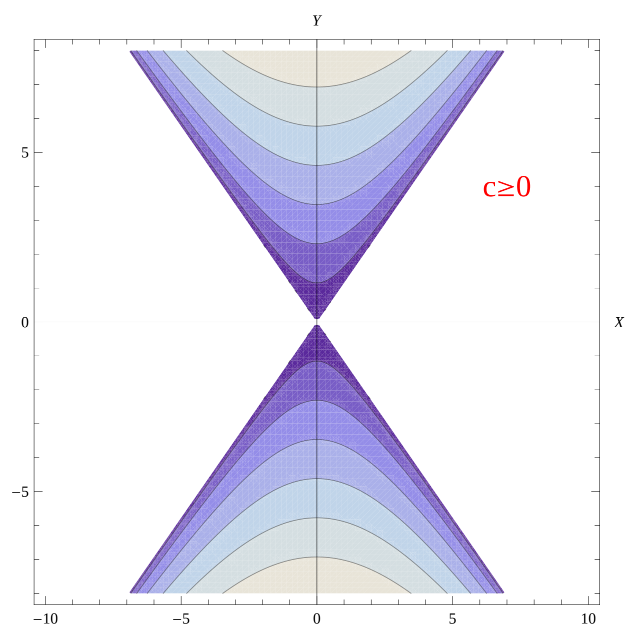
Resolució

(a) De $f(x,y)=\sqrt{3y^2-4x^2}$ escrivim $c=\sqrt{3y^2-4x^2}$ d'on deduïm:

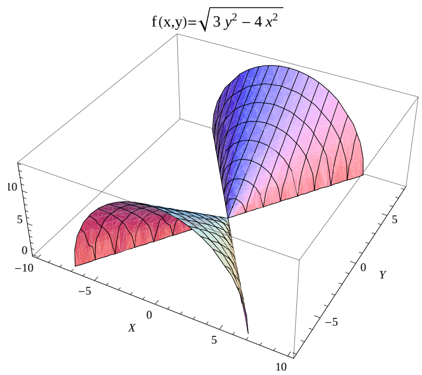
- Cal que $c\geq 0$.
- $c=0 \Longrightarrow 3y^2-4x^2=0 \Longrightarrow y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}x$ tenim, per tant, dues rectes



- $c>0 \Longrightarrow c^2=3y^2-4x^2 \Longrightarrow \frac{y^2}{\frac{c^2}{3}}-\frac{x^2}{\frac{c^2}{4}}=1$ obtenim hipèrboles d'eix principal l'eix d'ordenades



De fet, la gràfica de $f(x,y)$ és la meitat d'un con:



(b) Podem determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,0)$ i $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ mitjançant dues estratègies diferents.

- Observem que si $(x,y)=(1,0)$ aleshores $(u,v)=(4,1)$. Les derivades parcials són:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 6x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= 2e^{2y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 3ye^{3xy}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 3xe^{3xy}-2y\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0)=-1\cdot 6+2\cdot 0=-6\\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0)=-1\cdot 2+2\cdot 3=4.\end{aligned}$$

- Si

$$\begin{aligned}(x,y) &\xmapsto{G} (u,v) \xmapsto{f} f(u,v)\\ (1,0) &\longmapsto (4,1)\end{aligned}$$

llavors tenim la funció composta $D(f\circ G)(x,y)$ amb

$$DG(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & 2e^{2y}\\ 3ye^{3xy} & 3xe^{3xy}-2y\end{pmatrix}$$

Aplicant la *regla de la cadena* tenim:

$$Df\big(G(x,y)\big)\cdot DG(x,y)_{|(1,0)}=Df(4,1)\cdot DG(1,0)=(-1,2)\begin{pmatrix}6 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=(-6,4)$$

i, per tant,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)=-6 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,0)=4.$$

4. Considereu l'el·lipsoide $x^2+5y^2+5z^2=25$.

(a) Trobeu un pla paral·lel al pla $y+2z=1$ que sigui tangent a l'el·lipsoide.

(b) Una esfera de radi 2 continguda dins de l'el·lipsoide i amb centre a l'eix de les x es desplaça per la part positiva d'aquest eix fins que queda encaixada a l'el·lipsoide. En aquesta posició, determineu la distància de l'esfera al vèrtex de l'el·lipsoide (el punt $(5,0,0)$).

Resolució

(a) El pla que busquem ha de ser paral·lel al pla $y+2z=1$ i tangent a l'el·lipsoide, per tant, en el punt de tangència $P=(x_0,y_0,z_0)$, s'ha de satisfer que el vector gradient a l'el·lipsoide sigui paral·lel al vector associat del pla donat, $(0,1,2)$. Així, si $F(x,y,z)=x^2+5y^2+5z^2=25$ s'ha de satisfer

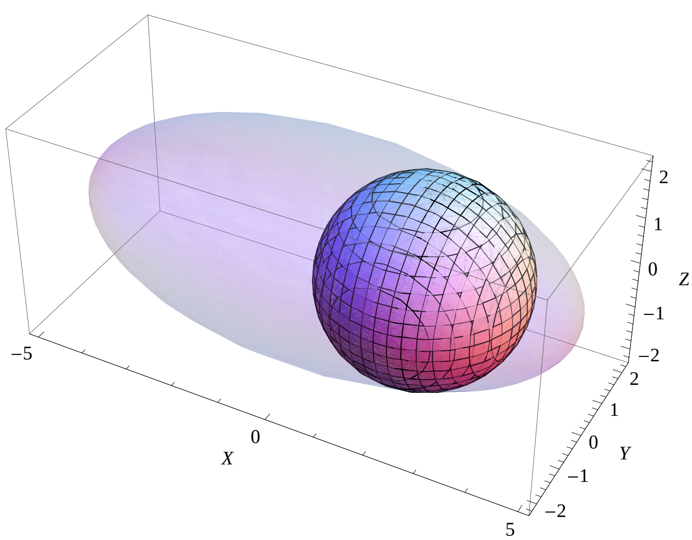
$$\begin{cases} \nabla F(x_0,y_0,z_0) &= \lambda(0,1,2) \\ x_0^2+5y_0^2+5z_0^2 &= 25 \end{cases}$$

Resolent el sistema anterior obtenim $\lambda=\pm 10$ i, degut a la simetria de l'el·lipsoide, dos punts $P_1=(0,1,2)$ i $P_2=(0,-1,-2)$. Finalment,

- Pla que passa per P_1: $10y+20z=D \Longrightarrow 10\cdot 1+20\cdot 2=D \Longrightarrow y+2z=5$.
- Pla que passa per P_2: $10y+20z=D \Longrightarrow 10\cdot(-1)+20\cdot(-2)=D \Longrightarrow y+2z=-5$.

(b) Observem que en el punt de tangència P se satisfà

$$\nabla esf_{|_P} \parallel \nabla ell_{|_P} \tag{2}$$



Per tant, determinarem el valor de a imposant la condició (2).

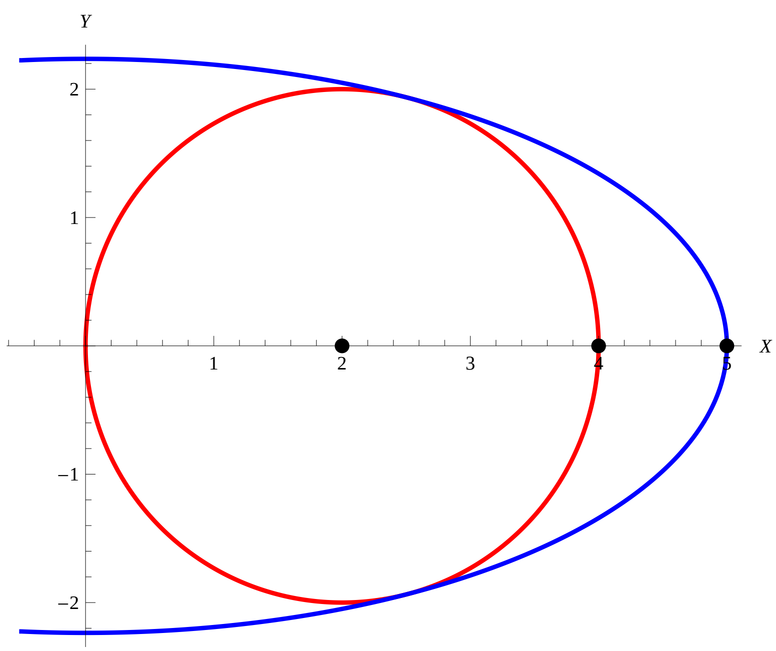
Si escrivim $P = (x_0, y_0, z_0)$, $F(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 25$ i $G(x,y,z) = (x-a)^2 + y^2 + z^2 - 4$. Tenim:

$$\nabla F(x,y,z)_{|P} \parallel \nabla G(x,y,z)_{|P} \Longleftrightarrow (2x_0, 10y_0, 10z_0) = \lambda(2(x_0 - a), 2y_0, 2z_0)$$

Considerem, per tant, el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_0 & = & 2\lambda(x_0 - a) \\ 10y_0 & = & 2\lambda y_0 \\ 10z_0 & = & 2\lambda z_0 \\ x_0^2 + 5y_0^2 + 5z_0^2 & = & 25 \\ (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2 & = & 4 \end{array}\right\}$$

Resolent-lo obtenim $a = \pm 2$. És a dir, $a = 2$. Així, doncs, l'equació de l'esfera continguda dins l'el·lipsoide és $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$. Observant la seva projecció al pla XY



veiem que la distància de l'esfera al vèrtex de l'el·lipsoide serà

$$d[(4,0,0),(5,0,0)] = 1.$$