Càlcul II-GRETI
Curs 2014–2015
Quadrimestre de Tardor

29 d'octubre de 2014
Parcial-Model A

1. Una hèlix generalitzada és una corba de l'espai tal que el seu vector tangent forma un angle constant amb un vector fix $\mathbf{v}$ (que assenyala la direcció del seu eix). Considerem la corba

$$\mathbf{r}(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right), \quad t \geq 0.$$

(a) Calculeu la curvatura i la torsió de la corba $\mathbf{r}(t)$ en cada punt.

(b) Comproveu que la corba $\mathbf{r}(t)$ és una hèlix generalitzada trobant un vector $\mathbf{v}$ apropiat. Determineu l'angle que forma el vector tangent amb $\mathbf{v}$.

Solució

(a) Hem de calcular els següents vectors i normes:

$$\mathbf{r}'(t) = \left(3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2\right) = 3\left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = 9\left(\left(1 - t^2\right)^2 + 4t^2 + \left(1 + t^2\right)^2\right) = 9\left(2 + 4t^2 + 2t^4\right) = 18\left(1 + t^2\right)^2,$$
$$\mathbf{r}''(t) = (-6t, 6, 6t) = 6(-t, 1, t),$$
$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = 18\left(t^2 - 1, -2t, t^2 + 1\right) \quad \text{i}$$
$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2 = 18^2\left(\left(t^2 - 1\right)^2 + 4t^2 + \left(t^2 + 1\right)^2\right) = 18^2\left(2t^4 + 4t^2 + 2\right) = 18^2\, 2\left(1 + t^2\right)^2,$$

amb els quals ja tenim

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}\,18\left(1 + t^2\right)}{3\sqrt{2}\,18\left(1 + t^2\right)^3} = \frac{1}{3\left(1 + t^2\right)^2}.$$

Si calculem també $\mathbf{r}'''(t) = 6(-1, 0, 1)$, obtenim la torsió així:

$$\tau(t) = \frac{\left(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\right) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2} = \frac{18 \cdot 6 \cdot 2}{18^2\, 2\left(1 + t^2\right)^2} = \frac{1}{3\left(1 + t^2\right)^2}.$$

(b) Com el vector tangent unitari

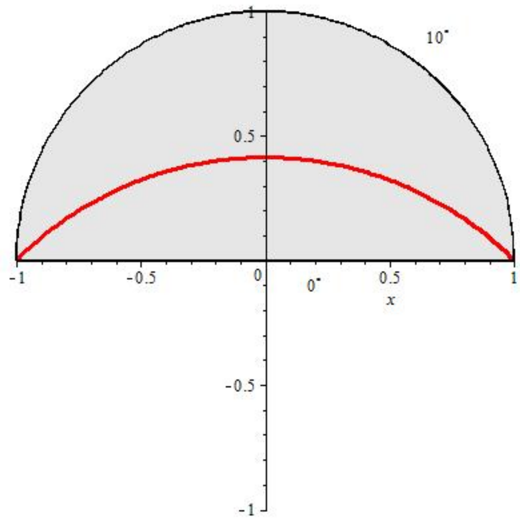
$$\mathbf{T}(t) = \frac{3}{3\sqrt{2}\left(1 + t^2\right)}\left(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\right) = \left(\frac{1 - t^2}{\sqrt{2}\left(1 + t^2\right)}, \frac{\sqrt{2}\,t}{1 + t^2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

té la tercera component constant, és fàcil trobar un vector unitari $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{v}$ sigui constant: $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Llavors, si α és l'angle que formen $\mathbf{T}$ i $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{v} = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

i $\alpha = \pi/4$.

2. Suposem que tenim una placa metàl·lica semicircular com la de la figura.



La temperatura en la vora inferior es manté constant i igual a $0°C$. En la vora superior es manté també constant i igual a $10°C$. La distribució de temperatura en els punts interiors ve donada per la funció

$$T(x,y) = \frac{20}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2y}{1-x^2-y^2}.$$

(a) Dibuixeu, aproximadament, sobre la figura donada, la corba de nivell $k = 5°C$.

(b) Comproveu que les corbes de nivell de $T(x,y)$ són arcs de circumferències que passen pels punts $(-1,0)$ i $(1,0)$ i que tenen el centre a la part negativa de l'eix de les y.

Solució

(a) La corba de nivell $k = 5°C$ ve donada per

$$5 = \frac{20}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2y}{1-x^2-y^2} \qquad \text{és a dir} \qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{2y}{1-x^2-y^2}.$$

Aplicant la funció tangent als dos membres de l'equació, tenim que

$$1 = \frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

o sigui, $x^2 + y^2 + 2y = 1$ i, completant quadrats, $x^2 + (y+1)^2 = 2$. Així doncs, aquesta corba de nivell és l'arc de la circumferència de centre en $(0,-1)$ i radi $\sqrt{2}$ que està dins de la placa. Està dibuixat en vermell a la figura.

(b) Com que $x^2+y^2<1$ i $y>0$, resulta que $\dfrac{2y}{1-x^2-y^2}>0$ i, per tant,

$$0<\operatorname{arc\,tg}\frac{2y}{1-x^2-y^2}<\frac{\pi}{2}.$$

Llavors les corbes de nivell

$$k=\frac{20}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

només tenen sentit quan $0<k<10$.

Sigui $K=\tan\dfrac{k\pi}{20}$. Així, com abans,

$$K=\frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

o sigui, $x^2+y^2+\dfrac{2}{K}y=1$ i $x^2+\left(y+\dfrac{1}{K}\right)^2=1+\dfrac{1}{K^2}$. En aquesta equació veiem clarament que les corbes de nivell són arcs de circumferències amb centres en $\left(0,-\dfrac{1}{K}\right)$ i radis $\sqrt{1+\dfrac{1}{K^2}}$, que passen pels punts $(-1,0)$ i $(1,0)$.

3. Considerem la funció

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + axy, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Estudieu els possibles extrems relatius de $f(x,y)$ segons els diferents valors del paràmetre a.

(b) Sigui ara $f(x,y)$ amb $a = -3$, és a dir, considerem,

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Si en té, trobeu els extrems absoluts de $f(x,y)$ en el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$.

Solució

(a) Estudi dels extrems relatius. Primer busquem els **punts crítics** de f a partir de $\nabla f(x,y) = (0,0)$:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + ay &= 0 \\ 3y^2 + ax &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \Longrightarrow x = y = 0 \\ y &= x \Longrightarrow x = y = -\frac{a}{3}. \end{cases}$$

Així, tenim dos punts crítics per analitzar:

$$P_1 = (0,0) \text{ (quan } a = 0), \quad P_2 = \left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right) \text{ (quan } a \neq 0).$$

Estudiem ara els punts crítics. Busquem la matriu hessiana:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & a \\ a & 6y \end{pmatrix} \Longrightarrow |H(x,y)| = 36xy - a^2.$$

Així,

- Si $a = 0$, $P_1 = (0,0)$, aleshores $|H(0,0)| = 0$ i, per tant, el criteri de Sylvester no decideix. Estudiem directament la funció:

$$f(0,0) = 0, \; f(0+h, 0+k) = h^3 + k^3 \quad \text{que pot prendre valors positius o negatius}$$

Per exemple, $f(h,h) = 2h^3 > 0$ si $h > 0$ mentre que $f(h,h) = 2h^3 < 0$ si $h < 0$. Per tant, f té un punt de sella en P_1.

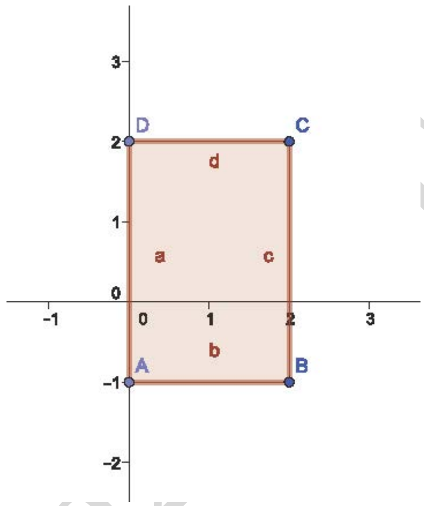
- Si $a \neq 0$, $P_2 = \left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$, aleshores

$$\left|H\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)\right| = 3a^2 > 0, \quad \text{per a tot } a \neq 0.$$

Finalment,

$$\begin{cases} \text{Si } a > 0 & P_2 \text{ és un màxim relatiu} \\ \text{Si } a < 0 & P_2 \text{ és un mínim relatiu.} \end{cases}$$

(b) Extrems absoluts de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ en el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$.



- **Existència**. Donat que f és una funció polinòmica, en particular, és contínua i D és un conjunt tancat (conté la seva frontera) i fitat, el teorema de Weierstrass afirma que existeixen el màxim i el mínim absoluts de f en D.

- **Determinació**. Els trobarem entre els punts crítics a l'interior de D i a la frontera de D.

Per l'apartat anterior tenim el punt crític a l'interior, $P_1 = (1,1)$. Estudiem ara la frontera de D.

$$(a)\begin{cases} x = 0 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow f(0,y) = y^3,\, f'(0,y) = 3y^2 = 0 \Longrightarrow y = 0 \hookrightarrow P_2 = (0,0).$$

$$(b)\begin{cases} y = -1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x,-1) = x^3 + 3x - 1,\, f'(x,1) = 3x^2 + 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{no existeix cap punt crític.}$$

$$(c)\begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow f(2,y) = y^3 - 6y + 8,\, f'(2,y) = 3y^2 - 6 = 0 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{2} \hookrightarrow P_3 = (2,\sqrt{2}).$$

$$(d)\begin{cases} y = 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x,2) = x^3 - 6x + 8,\, f'(x,2) = 3x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \hookrightarrow P_4 = (\sqrt{2},2).$$

Considerem també els vèrtexs del rectangle, és a dir, els punts:

$$P_5 = (0,-1), P_6 = (2,-1), P_7 = (2,2) \text{ i } P_8 = (0,2).$$

Finalment, avaluem f en tots els punts i deduïm que el mínim absolut és -1 i s'assoleix en els punts P_1 i P_5), mentre que el màxim absolut és 13 i s'assoleix en P_6.

4. Considerem la funció

$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2.$$

(a) Trobeu la derivada de la funció f en el punt $P(1,1)$ en la direcció que és perpendicular a la corba de nivell que passa per aquest punt.

(b) Trobeu la derivada de la funció f en el punt $P(1,1)$ en la direcció $\mathbf{v}$ que forma un angle α amb la direcció positiva de l'eix OX.

(c) Amb les condicions de l'apartat (b), per a quins valors de α aquesta derivada assoleix el seu valor màxim? I mínim? I zero? Justifiqueu la resposta.

Solució

(a) La corba de nivell que passa per $(1,1)$ és

$$f(1,1) = 1-1-1 = -1 \Longrightarrow xy - x^2 - y^2 = -1.$$

La direcció que és perpendicular a la corba de nivell -1 és la del gradient de f, per tant, ja que $\nabla f(x,y) = (y-2x, x-2y)$, considerem

$$v = \frac{\nabla f(1,1)}{||\nabla f(1,1)||} = \frac{(-1,-1)}{\sqrt{2}}.$$

Finalment,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot v = (-1,-1)\cdot\frac{(-1,-1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(b) Un vector unitari que forma un angle α amb la direcció positiva de l'eix OX té la forma

$$v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

per tant,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot v = (-1,-1)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha) = -\cos\alpha - \sin\alpha.$$

(c) Considerem $g(\alpha) = -\cos\alpha - \sin\alpha$. Observem que

- $g(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha = -\sin\alpha \Longleftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- $g'(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- $g''(\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha \hookrightarrow g''(\frac{\pi}{4}) > 0, g''(\frac{5\pi}{4}) < 0.$

Finalment, per a $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ la derivada direccional g assoleix el seu mínim, mentre que per a $\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ la derivada direccional g assoleix el seu màxim.