Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de
Matemàtica Aplicada II
ETSEIAT

Càlcul II - GRETI
Curs 2012–2013
Quadrimestre de Tardor
21 de novembre de 2012

Examen Parcial

1. Un fil de longitud $2\pi a$ està enrotllat en una circumferència de radi a. Un dels extrems del fil, A, està fixat a la circumferència. Al desenrotllar el fil, mantenint-lo tibant, l'altre extrem del fil, P, descriu una corba que s'anomena evolvent (o involuta) de la circumferència. Vegeu la figura 1.

(a) Trobeu les equacions paramètriques de l'evolvent, fent servir com a paràmetre l'angle $t = \widehat{AOT}$, on T és el primer punt de contacte del fil amb la circumferència i O el centre d'aquesta (l'origen de coordenades).

(b) Calculeu el radi de curvatura de la corba definida per

$$r(t) = \big(a(\cos t + t\sin t)\,,\, a(\sin t - t\cos t)\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(c) Determineu els radis de curvatura màxim i mínim per a la corba de l'apartat anterior.

(d) Doneu una parametrització del lloc geomètric que descriuen els centres de curvatura de la corba de l'apartat (b) (és a dir, doneu per a cada punt de la corba les coordenades del seu centre de curvatura).

2. Considereu la funció $f(x,y) = (1+x^2)(y^2-2)$.

(a) Trobeu l'equació del pla tangent a la gràfica de $f(x,y)$ en el punt corresponent a $(x,y) = (0,2)$.

(b) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 de $f(x,y)$ en el punt $(0,2)$.

(c) Comproveu que la funció $g(x,y) = f(x,y) - 4y + 6$ té un mínim relatiu en $(0,2)$.

3. Considereu l'equació $2x^2 + y^2 = 3$.

(a) A $\mathbb{R}^2$, aquesta equació defineix una corba. Quina? Trobeu un punt de la corba anterior on la recta normal corresponent tingui pendent 1.

(b) A $\mathbb{R}^3$, aquesta equació defineix una superfície. Quina? Escriviu l'equació implícita del pla tangent a aquesta superfície en el punt $(1,1,2)$.

4. Un pentàgon està format per un triangle isòsceles adossat per la seva base a un dels costats d'un rectangle (vegeu la figura 2). Sabent que el perímetre del pentàgon és 10, trobeu les dimensions que donen l'àrea màxima. (*Indicació:* en algun moment pot ser convenient expressar les solucions en funció de l'altura del triangle.)

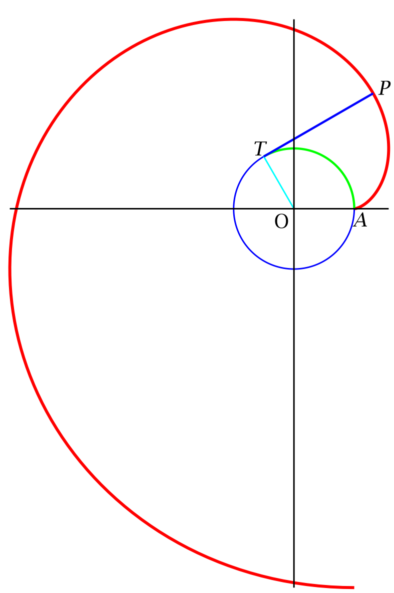


Figura 1: Evolvent de la circumferència

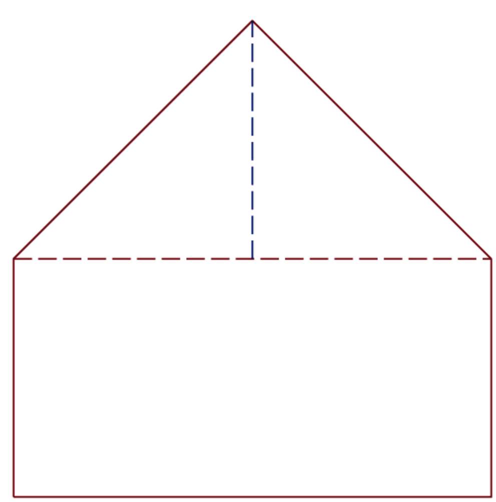
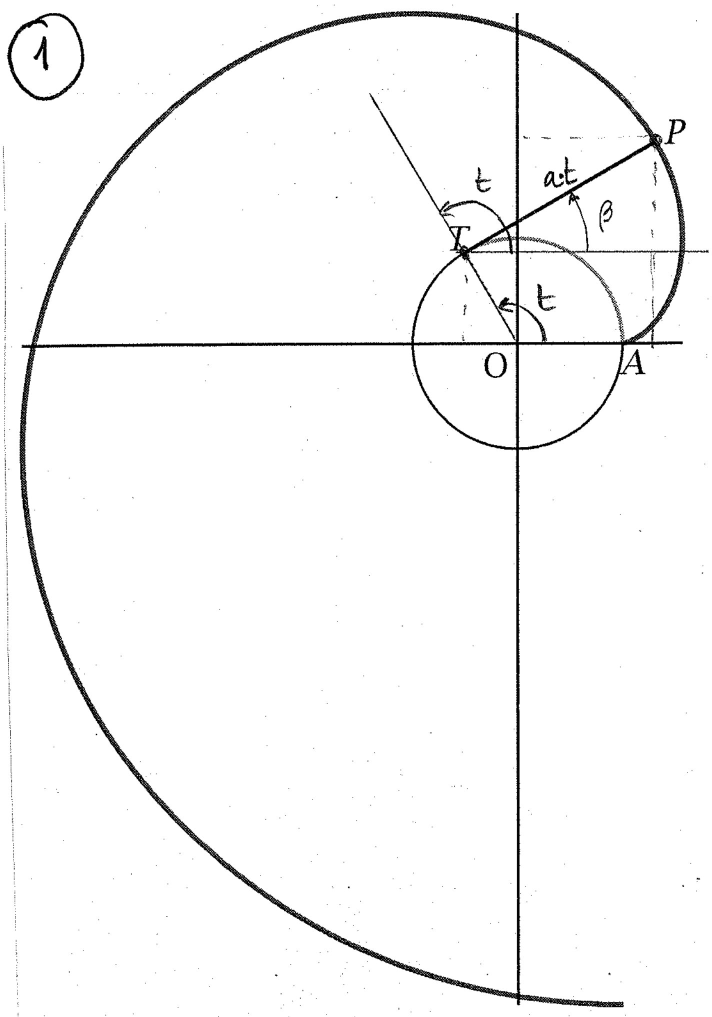


Figura 2: Pentàgon

RESOLUCIÓ EXAMEN PARCIAL CÀLCUL II - 21/11/2012
GRETI

1



(a)
$$\begin{cases} x = a\cos t + a\cdot t\cdot \cos\beta \\ y = a\sin t + a\cdot t\cdot \sin\beta \end{cases}$$

Clarament $\beta = t - \frac{\pi}{2}$.

. $\cos(t-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-t) = \sin t$

. $\sin(t-\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}-t) = -\cos t$

Per tant:

$$\begin{cases} x = a\cos t + at\sin t \\ y = a\sin t - at\cos t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

(b) $r(t) = \left(a(\cos t + t\sin t),\ a(\sin t - t\cos t)\right) \quad t\in[0,2\pi]$.

$r'(t) = a\,(t\cos t,\ t\sin t)$

$r''(t) = a\,(\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t)$

$$k(t) = \frac{\|r'(t)\times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{a^2t^2}{a^3t^3} = \frac{1}{at}.$$

Per tant $\boxed{\rho(t) = at}$

(c) Com que el radi de curvatura ve donat per una funció lineal, el mínim s'aconsegueix quan $t=0$ i el màxim quan $t=2\pi$: $\boxed{\rho_{min} = 0}$ $\boxed{\rho_{màx} = 2\pi a}$

(d) $N(t) = (-\sin t, \cos t)$

(observem que $r'(t) = at \cdot (\cos t, \sin t)$ i, per tant, $T(t) = (\cos t, \sin t)$.)

$e(t) = r(t) + \rho(t) \cdot N(t) =$

$= (a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t)) + a \cdot t \cdot (-\sin t, \cos t) =$

$= \underbrace{(a\cos t, a\sin t)}_{\text{circumferència.}}, \quad t \in [0, 2\pi]$

2. $f(x,y) = (1+x^2)(y^2-2)$

(a) Pla tangent en $(0,2)$

$f(0,2) = 1 \cdot 2 = 2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(y^2-2) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1+x^2) \cdot 2y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 4$

$z = 2 + 0 \cdot (x-0) + 4(y-2) \Rightarrow \boxed{4y - z - 6 = 0}$

(b) $p_2(x,y)$?

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(y^2-2) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2) = 4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xy \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2(1+x^2) \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2) = 2$

$p_2(x,y) = 2 + 0(x-0) + 4(y-2) + \frac{1}{2}\left[4(x-0)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (x-0)(y-2) + 2(y-2)^2\right]$

$\boxed{p_2(x,y) = \dots = -2 + 2x^2 + y^2}$

(c) $g(x,y) = (1+x^2)(y^2-2) - 4y + 6$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x(y^2-2)$ claramente, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,2) = 0$ i

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = (1+x^2)\cdot 2y - 4$ $\frac{\partial g}{\partial y}(0,2) = 0.$

Per tant, $(0,2)$ és un punt crític de $g(x,y)$.

$Hg(0,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \det > 0 \\ 4 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ mínim relatiu en $(0,2)\Big]$.

(3) (a) $2x^2+y^2 = 3 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{3} = 1$

El·lipse de semieixos $\sqrt{\frac{3}{2}}$ i $\sqrt{3}$.

El vector director de la recta normal és el gradient de la funció $F(x,y) = 2x^2+y^2$:

$\nabla F = (4x, 2y)$.

En un punt on el pendent hagi de ser 1, s'ha de complir $\frac{2y}{4x} = 1 \Rightarrow y = 2x$.

Substituint a (1): $2x^2+4x^2 = 3$ $6x^2 = 3$ $x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hi ha dos punts: $P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ i $P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

(b) $2x^2+y^2=3$. Cilindre el·líptic.

Considerem $G(x,y,z) = 2x^2+y^2$ $\nabla G(x_0,y_0,z_0)$ serà el vector associat al pla tangent:

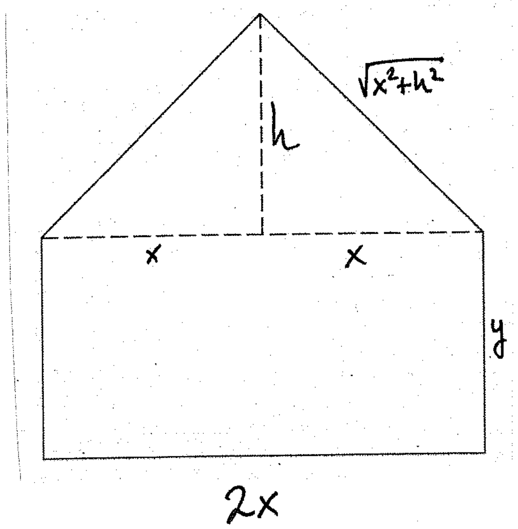
$\nabla G(x_0,y_0,z_0) = (4x_0, 2y_0, 0)$. Al punt $(1,1,2)$ serà

$\nabla G(1,1,2) = (4,2,0) \Rightarrow$ Pla tangent:

$4(x-1) + 2(y-1) + 0\cdot(z-2) = 0 \Rightarrow 4x+2y = 6$

$\boxed{2x+y=3}$

4



$$10 = 2\sqrt{x^2+h^2} + 2x + 2y$$

ó, equivalentment:

$$x+y+\sqrt{x^2+h^2} = 5$$

Relació entre les variables.

Àrea: $A(x,y,h) = 2xy + hx$.

És un problema d'extrems condicionats: Lagrange.

$$L = 2xy + hx - \lambda\left(x+y+\sqrt{x^2+h^2}-5\right)$$

(1) $L_x = 2y + h - \lambda\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\right) = 0$

(2) $L_y = 2x - \lambda = 0$ $\longrightarrow$ $\lambda = 2x$

(3) $L_h = x - \lambda\cdot\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = 0$

(4) $x+y+\sqrt{x^2+h^2} = 5$

i substituïm a (3):

$$x - \frac{2xh}{\sqrt{x^2+h^2}} = 0 \Rightarrow x\cdot\left(1-\frac{2h}{\sqrt{\ \ }}\right) = 0$$

Ha de ser $x=0$ (impossible al nostre problema) o $\boxed{2h = \sqrt{x^2+h^2}}$.

Elevant al quadrat: $4h^2 = x^2+h^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{3}\,h}$

$\boxed{\lambda = 2\sqrt{3}\,h}$

Anem a (4):

$$\sqrt{3}h + y + 2h = 5 \rightarrow y = 5-(2+\sqrt{3})h$$

Substituint tot a (1):

$$2\cdot(5-(2+\sqrt{3})h) + h - 2\sqrt{3}h\left(1+\frac{\sqrt{3}\cancel{h}}{2\cancel{h}}\right) = 0$$

$$10 - 2(2+\sqrt{3})h + h - 2\sqrt{3}h - 3h = 0$$

$$10 - 4h - 2\sqrt{3}h + h - 2\sqrt{3}h - 3h = 0 \Rightarrow 6h + 4\sqrt{3}h = 10 \qquad h = \frac{10}{4\sqrt{3}+6}$$

$$\boxed{h = \frac{5}{2\sqrt{3}+3}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}} \Rightarrow \boxed{y = 5 - \frac{5}{\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{x = 10 - 5\sqrt{3}}$$