Departament de Matemàtica Aplicada II
Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Càlcul II
Curs 2012–2013
Quadrimestre de Primavera
18 d'abril de 2013
Examen parcial- Model B

Resolució

---

1. Considerem la funció $g(x,y) = 3xy - 36x - 9y$ i el conjunt de $\mathbb{R}^2$, $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x^2 + 36,\ y \geq 11\right\}$.

(a) Dibuixeu el conjunt A i feu-ne un estudi topològic.

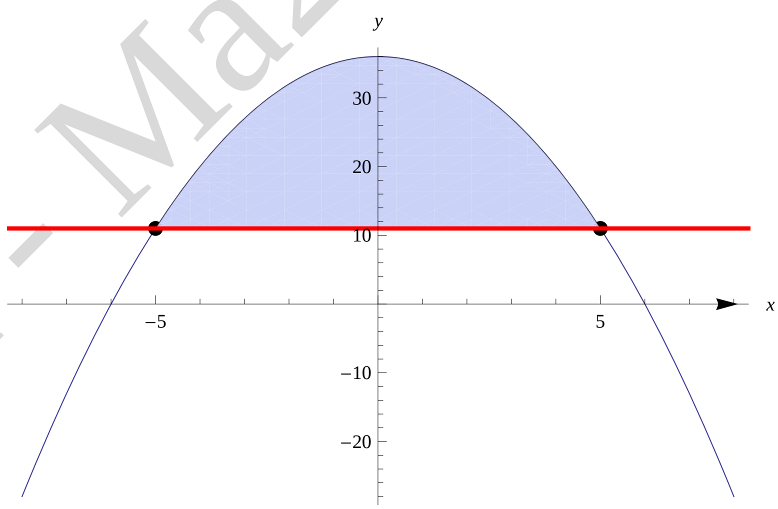
(b) Trobeu els extrems relatius de $g(x,y)$ en l'interior de A.

(c) Justifiqueu l'existència de màxim i mínim absoluts de la funció $g(x,y)$ en A.

(d) Determineu els valors màxim i mínim absoluts de $g(x,y)$ en A.

Solució

(a) **Estudi topològic.** El conjunt A és la regió plana compresa entre la paràbola $y = -x^2 + 36$ i la recta $y = 11$:



La frontera és el conjunt

$$\mathcal{F}r(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x \in [-5,5], \left\{y = -x^2 + 36\right\} \cup \left\{y = 11\right\}\right\}$$

Per tant,

- El conjunt A és tancat perquè conté la seva frontera.
- És fitat perquè podem incloure'l en un disc de radi finit.
- És compacte, per ser tancat i fitat.
- És convex perquè donats dos punts qualssevol del conjunt, el segment que els uneix també pertany al conjunt.
- Per ser convex també és connex.

(b) **Extrems relatius de $g(x,y)$ en l'interior de A.** Donat que g és una funció polinòmica (per tant, de classe $\mathcal{C}^\infty$) busquem els punts crítics (possibles extrems), a l'interior de A, en els punts on el gradient de la funció és zero:

$$\operatorname{grad} g = (3y-36, 3x-9) = (0,0) \Longrightarrow x = 3, y = 12$$

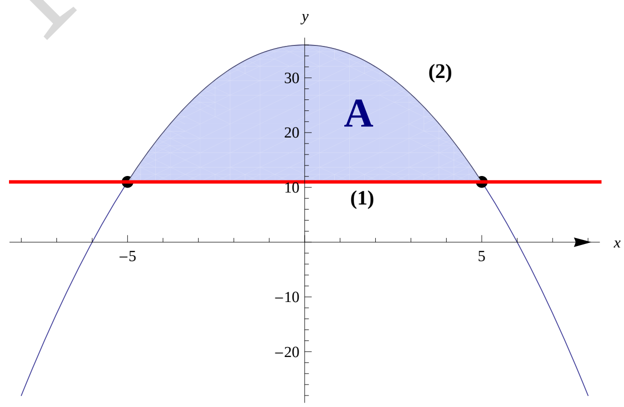
Observem que el punt $P(3,12)$ pertany al conjunt A: $12 \leq -(3)^2 + 36$ i $12 \geq 11$. Per esbrinar si és màxim, mínim relatiu o punt de sella estudiem la matriu hessiana al punt:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H(x,y)| = -9 < 0$$

El determinant de la matriu hessiana, el hessià, és constant, no depèn del punt (x,y), per tant, en qualsevol punt crític tenim un punt de sella. Així, en el punt $P(3,12)$ hi ha un punt de sella.

(c) **Existència de màxim i mínim absoluts de la funció $g(x,y)$ en A.** La funció g és contínua (funció polinòmica) i el conjunt A on la considerem és un compacte, per tant, el teorema de Weierstrass ens garanteix l'existència de màxim i mínim absoluts de g en A.

(d) **Valors màxim i mínim absoluts de $g(x,y)$ en A.** El màxim i mínim absoluts els podem trobar a l'interior de A ($\overset{\circ}{A}$) o a la frontera de A.



- **Interior de A.** Ja tenim el punt $P_1(3,12)$.
- **Frontera de A.**

  Frontera (1). Parametritzem el segment.

$$\left.\begin{array}{l} y = 11 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow g(x,11) = -33x - 99 \Longrightarrow g'(x,11) = -3$$

En aquest cas no existeixen candidats pels valors de $-5 < x < 5$. Si que tenim en compte els extrems de l'interval, és a dir, els punts $P_2(-5,11)$ i $P_3(5,11)$.

Frontera (2). Parametritzem la corba.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2+36 \\ -5 \le x \le 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow g(x,-x^2+36) = -3x^3+9x^2+72x-324 \Longrightarrow g'(x,-x^2+36) = -9x^2+18x+72$$

$$g'(x,-x^2+36) = -9x^2+18x+72 = 0 \Longleftrightarrow -x^2+2x+8 = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \quad \text{i} \quad x = 4.$$

Així, obtenim els punts $P_4(-2,32)$ i $P_5(4,20)$.

Avaluem la funció g en els punts:

$$\begin{aligned} g(3,12) &= -108 \\ g(-5,11) &= -84 \\ g(5,11) &= -114 \\ g(-2,32) &= -408 \\ g(4,20) &= -84 \end{aligned}$$

Finalment, el màxim absolut és -84 i s'assoleix en els punts P_2 i P_5. El mínim absolut és -408 i s'assoleix en el punt P_4.

2. Considerem la corba del pla donada per

$$r(t) = \left(\frac{bt^2}{1+t^2}, \frac{bt}{1+t^2} \right) \qquad \text{amb} \quad b > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Trobeu la seva longitud per a $t \in [0,1]$.

(b) La recta tangent a la corba en el punt corresponent a $t = 2$, juntament amb els eixos de coordenades, determina un triangle rectangle al primer quadrant. Trobeu-ne l'àrea.

(c) Escriviu l'equació de la corba en coordenades cartesianes i identifiqueu-la.

Solució

(a) Longitud per a $t \in [0,1]$. Sabem que

$$l = \int_0^1 ||r'(t)||\,dt$$

Derivant $r(t)$ obtenim:

$$r'(t) = \left(\frac{2bt(1+t^2) - bt^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2}, \frac{b(1+t^2) - bt \cdot 2t}{(1+t^2)^2} \right) = \frac{b}{(1+t^2)^2}\,(2t, 1-t^2)$$

Per tant,

$$||r'(t)|| = \frac{b}{(1+t^2)^2}\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = \frac{b(t^2+1)}{(1+t^2)^2} = \frac{b}{1+t^2}, \qquad b > 0$$

Finalment,

$$l = \int_0^1 ||r'(t)||\,dt = b\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \Big[\operatorname{arctg} t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}b.$$

(b) Recta tangent a la corba en el punt corresponent a $t = 2$.

Tenim el punt $r(2) = \left(\frac{4b}{5}, \frac{2b}{5}\right)$ i el vector director $r'(2) = \frac{b}{25}(4,-3)$. per comoditat en els càlculs escollim com a vector director de la recta $(4,-3)$. Així, l'equació de la recta tangent ve donada per

$$y - \frac{2b}{5} = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{4b}{5}\right) \Longleftrightarrow 3x + 4y - 4b = 0$$

Intersecció de la recta tangent amb els eixos coordenats. Busquem ara la intersecció de la recta tangent amb els eixos coordenats per poder calcular l'àrea del triangle que determina amb els eixos. Així, amb l'eix $OX, y = 0 \Longrightarrow x = \frac{4}{3}b$, mentre que amb l'eix $OY, x = 0, \Longrightarrow y = b$. Finalment, l'àrea del triangle és

$$A = \frac{\frac{4}{3}b \cdot b}{2} = \frac{2}{3}b^2 \quad \text{unitats d'àrea.}$$

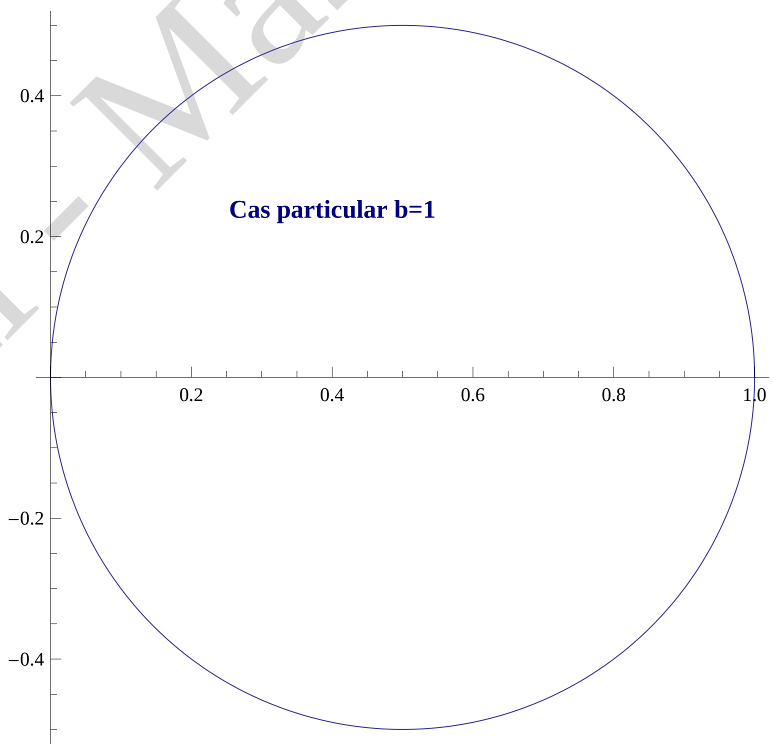
(c) Equació en coordenades cartesianes. Observem que $x = ty$, és a dir, $t = \frac{x}{y}$. Per obtenir l'equació en coordenades cartesianes ens cal eliminar la t. per exemple, si substituïm t a $y = \dfrac{bt}{1+t^2}$ obtenim:

$$y = \frac{bt}{1+t^2} \Longrightarrow y = \frac{b\frac{x}{y}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} = \frac{bxy}{x^2+y^2} \Longleftrightarrow y\left[\frac{bx}{x^2+y^2} - 1\right] = 0$$

d'on deduïm que, o bé la $y = 0$ amb el que obtenim el punt $(0,0)$, o bé,

$$\frac{bx}{x^2+y^2} = 1 \Longrightarrow bx = x^2+y^2 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$$

Tenim, doncs, una circumferència de centre $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ i radi $\frac{b}{2}$.



3. (a) Considerem les superfícies

$$x^2+4y^2+z^2=9 \qquad \text{i} \qquad x^2+y^2-z=0.$$

(1) Determineu les equacions paramètriques de la recta tangent a la corba intersecció de les superfícies anteriors en el punt $(1,-1,2)$.

(2) Trobeu un pla tangent a la superfície $x^2+4y^2+z^2=9$ que sigui paral·lel al pla $x-y+3z=5$.

(b) Siguin x, y i z la longitud, amplada i altura, respectivament, d'una caixa. Suposeu que la caixa està augmentant de mida de tal manera que quan $x=2$ metres, $y=4$ metres i $z=3$ metres, la longitud augmenta a un ritme de 3 metres per segon, l'amplada a 5 metres per segon i l'altura a 4 metres per segon. A quin ritme augmenta la longitud de la diagonal de la caixa?

Solució

(a) Posem $G(x,y,z)=x^2+y^2-z$ i $F(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-9$.

(1) El vector director a la recta tangent a la corba estarà contingut en els plans tangents de les dues superfícies; per tant, serà perpendicular als dos vectors normals. Calculant, tenim que $\nabla F(1,-1,2)=(2,-8,4)$, $\nabla G(1,-1,2)=(2,-2-1)$ i

$$(1,-4,2)\times(2,-2-1)=(8,5,6).$$

La recta buscada és, doncs, $r(t)=(1,-1,2)+t(8,5,6)$.

(2) El vector normal a la superfície en el punt (x,y,z) ens el dóna $\nabla F(x,y,z)=(2x,8y,2z)$. Volem que aquest vector sigui paral·lel al vector normal del pla, que és el $(1,-1,3)$. Per tant, ha d'existir algun $\lambda\neq 0$ tal que $(2x,8y,2z)=\lambda(1,-1,3)$. Resolent el sistema veiem que les solucions són els punts (x,y,z) de la forma $(4t,-t,12t)$ per a algun t.Però no per a tots els valors de t el punt $(4t,-t,12t)$ és de la superfície. Només ho són aquells per als quals $F(4t,-t,12t)=0$. És a dir, per a aquells valors de t tals que

$$(4t)^2+4(-t)^2+(12t)^2=9.$$

Això ens dóna que $t=\pm\frac{3}{2\sqrt{41}}$ i, per tant, els punts buscats són

$$P_1=\left(\frac{6}{\sqrt{41}},\frac{-3}{2\sqrt{41}},\frac{18}{\sqrt{41}}\right);\; P_2=\left(\frac{-6}{\sqrt{41}},\frac{3}{\sqrt{41}},\frac{-18}{\sqrt{41}}\right).$$

(b) Les dimensions de la caixa no són constants, de manera que $x = x(t), y = y(t)$ i $z(t)$ són funcions del temps t. Si anomenem t_0 l'instant de temps a què es refereix el problema, tenim que

$$x(t_0) = 2,\ y(t_0) = 4,\ z(t_0) = 3;$$

$$x'(t_0) = 3,\ y'(t_0) = 5,\ z'(t_0) = 4.$$

Sigui $d(t)$ la longitud de la caixa, que també depèn del temps. El que ens demanen calcular és $d'(t_0)$. Tenim que

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)},$$

que es pot escriure com la composició de dues funcions:

$$d(t) = (D \circ r)(t)$$

on

$$D(x,y,x) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \ r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Per la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} d'(t_0) =& (D \circ r)'(t_0) = \nabla D(r(t_0)) \cdot r'(t_0) \\ =& \frac{1}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0) + z^2(t_0)}} (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \cdot \big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big) \\ =& \frac{1}{\sqrt{29}} (2,4,3) \cdot (3,5,4) = \frac{38}{\sqrt{29}} m^3/s. \end{aligned}$$