Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de
Matemàtica Aplicada II
ETSEIAT

Càlcul II – GRETI
Curs 2013–2014
Quadrimestre de Tardor
5 de novembre de 2013

Parcial (A)

Cognoms: **Nom:**   **Grup:**

5. Escriviu l'equació implícita del pla tangent a la superfície $xyz = 4$ en el punt $(2,1,2)$.

6. Trobeu el polinomi de Taylor de grau dos de la funció $f(x,y) = e^{x^2}\cos y$ en el punt $(0,\pi)$.

7. Determineu els punts crítics de la funció $f(x,y) = e^{x^2}\cos y$.

8. Digueu si la funció anterior té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt de sella en $(0,3\pi)$. Justifiqueu la resposta al costat del requadre.

9. Determineu els extrems absoluts de la funció $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3x$ sobre el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

Màxim: en

Mínim: en

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de
Matemàtica Aplicada II
ETSEIAT

Càlcul II – GRETI
Curs 2013–2014
Quadrimestre de Tardor
5 de novembre de 2013

Parcial (A)

Cognoms: | **Nom:** | **Grup:**

1. Calculeu la curvatura de la corba definida per $r(t) = (e^t \cos t\,, t^2)$ per $t = 0$.

2. Dibuixeu les corbes de nivell de la funció $f(x,y) = 3x - y^2$. Classifiqueu-les.

3. Dibuixeu el conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \text{ i } y - x < 0\}$ i estudieu-lo topològicament.

4. Calculeu la derivada direccional de la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$ en el punt $a = (1,-1)$ segons la direcció del vector $v = (2,2)$.

MODEL A

(1) $r'(t) = \left(e^t(\cos t - \sin t), 2t \right)$

$r''(t) = \left(e^t \cdot -2\sin t, 2 \right) = \left(-2e^t \sin t, 2 \right)$

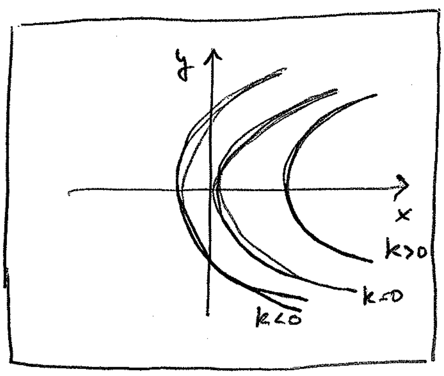
$$k(t) = \frac{\| r'(t) \times r''(t) \|}{\| r'(t) \|^3}$$

$r'(0) = (1, 0)$, $r''(0) = (0, 2)$ $> r'(0) \times r''(0) = (0, 0, 2)$

$$\boxed{k(0) = \frac{2}{1^3} = 2}$$

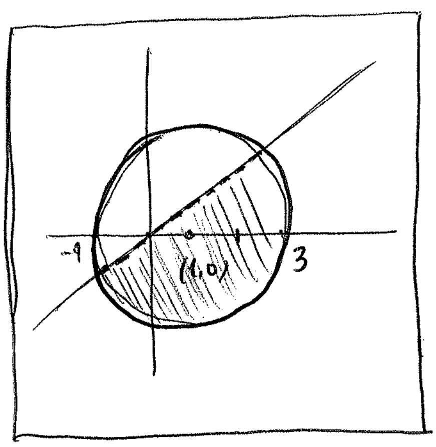
(2) $f(x,y) = 3x - y^2$.

$3x - y^2 = k \Rightarrow x = \frac{y^2+k}{3}$ paràboles



(3) $(x-1)^2 + y^2 = 4 \rightarrow$ circumf. centrada en $(1,0)$ i radi 2.

$y - x = 0 \rightarrow$ recta: bisectriu del primer i tercer quadrants.



- No obert
- No tancat
- No compacte
- Fitat

(Connex i convex.)

(4) $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x \cdot (x^2+y^2) - (x^2+y) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - (x^2+y) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

$\nabla f(1,-1) = (1, 1/2)$ $\quad u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(a) = (1, 1/2) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{2}}}$

(5) Considerem $g(x,y,z) = xyz$.

El vector associat al pla tangent és $\nabla g(2,1,2)$:

$$\nabla g(x,y,z) = (yz, xz, xy) \Rightarrow \nabla g(2,1,2) = (2,4,2)$$

$$2x + 4y + 2z = D \Rightarrow 2\cdot 2 + 4\cdot 1 + 2\cdot 2 = D \Rightarrow D = 12$$

$$2x + 4y + 2z = 12 \qquad \boxed{x + 2y + z = 6}$$

(6) $f(0,\pi) = -1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\, e^{x^2} \cdot \cos y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x^2} \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(2e^{x^2} + 4x\, e^{x^2}\right) \cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pi) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x\, e^{x^2} \sin y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\pi) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^{x^2} \cdot \cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pi) = 1$$

$$p_2(x,y) = -1 + \frac{1}{2}\left[-2 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x \cdot (y-\pi) + 1 \cdot (y-\pi)^2\right] =$$

$$\boxed{p_2(x,y) = -1 - x^2 + \frac{1}{2}(y-\pi)^2}$$

(7)

$$\left.\begin{array}{l} 2x\, e^{x^2} \cos y = 0 \\ -e^{x^2} \cdot \sin y = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \sin y = 0 \longrightarrow y = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \longrightarrow \cos(k\pi) = \pm 1$$

Ha de ser $x = 0$.

P.C: $\boxed{(0, k\pi)}$ amb $k \in \mathbb{Z}$

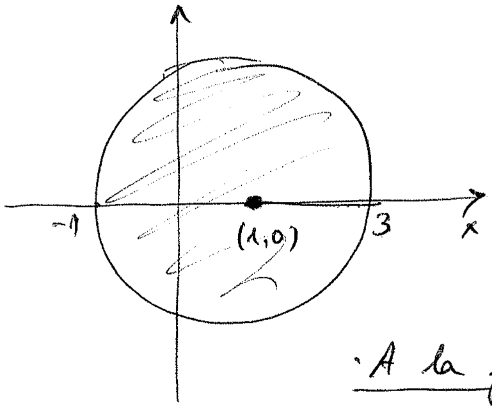
(8)

$$Hf(0,3\pi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det < 0 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Un punt de sella}}$

9. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$

D és el disc de centre $(1,0)$ i radi 2.



· A l'interior:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 = (3/2, 0)$$

· A la frontera:

La parametritzem: $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$f(t) = (1 + 2\cos t)^2 + \frac{1}{2} \cdot 4\sin^2 t - 3(1 + 2\cos t) =$$

$$= 1 + 4\cos t + 4\cos^2 t + 2\sin^2 t - 3 - 6\cos t =$$

$$= -2 - 2\cos t + 4\cos^2 t + 2(1 - \cos^2 t) = -2\cos t + 2\cos^2 t.$$

$$f'(t) = 2\sin t - 4\cos t \cdot \sin t = 0 \Rightarrow 2\sin t\,(1 - 2\cos t) = 0$$

$\sin t = 0$ ó $\cos t = 1/2$

$\downarrow$ $\downarrow$

$t = 0, \pi$ $\quad t = \pi/3$ ó $5\pi/3$

$P_2 = (3, 0)$

$P_3 = (-1, 0)$

$P_4 = (2, \sqrt{3})$

$P_5 = (2, -\sqrt{3})$

$f(P_1) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$

$f(P_2) = 0$

$f(P_3) = 4$

$f(P_4) = -1/2$

$f(P_5) = -1/2$

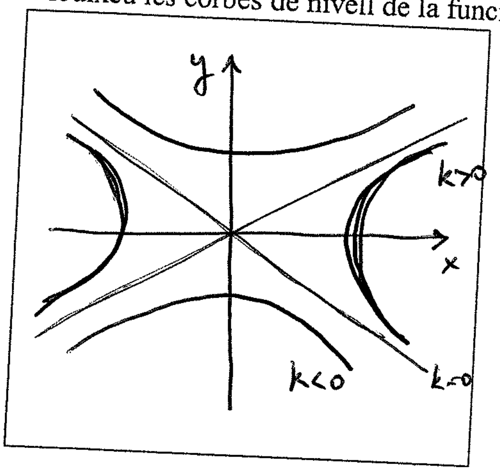
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Màxim } 4 \text{ en } (-1, 0). \\ \text{Mínim } -\frac{9}{4} \text{ en } (3/2, 0) \end{array}}$$

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de
Matemàtica Aplicada II
ETSEIAT

Càlcul II – GRETI
Curs 2013–2014
Quadrimestre de Tardor
5 de novembre de 2013
Parcial (B)

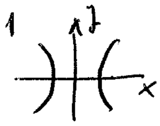
Cognoms: ____ **Nom:** ____ **Grup:** ____

1. Dibuixeu les corbes de nivell de la funció $f(x,y) = x^2 - 3y^2$. Classifiqueu-les.

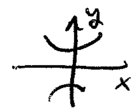


• $k=0 \Rightarrow x^2-3y^2=0 \quad (x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)=0$
dues rectes

• $k>0 \quad x^2-3y^2=k \Rightarrow \dfrac{x^2}{k} - \dfrac{y^2}{\frac{k}{3}} = 1$
hipèrboles



• $k<0 \quad x^2-3y^2=k \Longrightarrow$ hipèrboles



2. Calculeu la curvatura de la corba definida per $r(t) = (t^2, e^t \sin t)$ per $t = 0$.

$r'(t) = (2t, e^t(\cos t + \sin t))$

$r''(t) = (2, 2e^t \cos t)$

$$\boxed{k(0) = \frac{2}{1^3} = 2}$$

$r'(0) = (0, 1)$

$r''(0) = (2, 2)$

$r'(0) \times r''(0) = (0, 0, -2)$

3. Calculeu la derivada direccional de la funció $f(x,y) = \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}$ en el punt $a = (1,-1)$ segons la direcció del vector $v = (2,2)$.

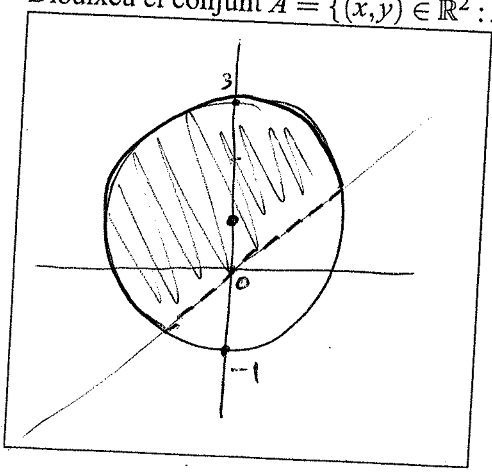
$\nabla f(1,-1) = (-1/2, 0)$

$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\boxed{-\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}.}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(-1,1) \cdot u$

4. Dibuixeu el conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \text{ i } y - x > 0\}$ i estudieu-lo topològicament.



• No obert
• No tancat
• No compacte
• Fitat
• Connex i convex.

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de
Matemàtica Aplicada II
ETSEIAT

Càlcul II – GRETI
Curs 2013–2014
Quadrimestre de Tardor
5 de novembre de 2013
Parcial (B)

Cognoms: | **Nom:** | **Grup:**

5. Escriviu l'equació implícita del pla tangent a la superfície $xyz = 6$ en el punt $(1,2,3)$.

$6x+3y+2z=D \quad 6\cdot1+3\cdot2+2\cdot3=D$

$\boxed{6x+3y+2z=18}$

$g(x,y,z)=xyz$

$\nabla g(x,y,z)=(yz,xz,xy)$

$\nabla g(1,2,3)=(6,3,2)$

6. Trobeu el polinomi de Taylor de grau dos de la funció $f(x,y) = e^{y^2}\cos x$ en el punt $(\pi,0)$.

$f(\pi,0)=-1$

$\frac{\partial f}{\partial x}=-e^{y^2}\cdot\sin x$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\,e^{y^2}\cdot\cos x$

$p_2(x,y)=-1+\frac{1}{2}(x-\pi)^2-y^2.$

7. Determineu els punts crítics de la funció $f(x,y) = e^{y^2}\cos x$.

$(k\pi,0)$

8. Digueu si la funció anterior té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt de sella en $(3\pi,0)$. Justifiqueu la resposta al costat del requadre.

Punt de sella.

La matriu hessiana és

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ det < 0

9. Determineu els extrems absoluts de la funció $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 3y$ sobre el conjunt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$.

Màxim: 4 en $(0,-1)$

Mínim: $-9/4$ en $(0,3/2)$