Erschienen
in einer Heidelberger
Reihe: Studium Generale
Jahr: 1990-94?

Versprachlichung naturwissenschaftlicher Erkenntnis

Günter Hotz
Fachbereich Informatik
Universität des Saarlandes

Einleitung

Sprache erscheint in gedruckter Form als lineare Abfolge von Zeichen eines Alphabetes. Aus den Zeichen werden Wörter gebildet, aus den Wörtern Sätze, aus denen sich schließlich sprachliche Mitteilungen aufbauen. Die Struktur der Sätze aus den Wörtern und die Form der Wörter selbst genügen den Anforderungen einer Grammatik. Das ist eine wesentliche Voraussetzung für die Verständlichkeit von Sprache. Die Aufeinanderfolge von Sätzen ist nicht formal geregelt, aber sie ist auch nicht frei, wenn eine verständliche Mitteilung entstehen soll. So ist Sprache nicht nur eine Menge von durch Satzzeichen gegliederten Buchstabenfolgen, sondern sie enthält als wesentliches Element auch die Konstruktion; verständliche Mitteilungen bedürfen einer Struktur. Sprache ermöglicht die Formulierung von Erkenntnis und, da sich in ihr alle Vermittlung von Erkenntnis vollzieht, begrenzt sie durch ihre Möglichkeiten auch den Umfang aller objektiven Erkenntnis, d.h. solcher Erkenntnis, die über das einzelne Individuum hinaus Verbindlichkeit besitzt. So ist Entwicklung und Pflege der Sprache eine der grundlegenden Voraussetzungen für Erkenntnis und insbesondere für jegliche naturwissenschaftliche Erkenntnis, die ihrem Wesen nach objektive Erkenntnis bedeutet. In den Naturwissenschaften werden im Rahmen der natürlichen Sprachen Kunstsprachen geschaffen, die es erlauben, die Natur präziser zu beschreiben, als dies die natürliche Sprache erlaubt. Das Ziel dieser Beschreibungen ist *Verständnis* und

Vorhersagbarkeit der beobachtbaren Phänomene. Wir wollen uns hier mit der Frage der Entwicklung und den Formen von solchen Sprachen auseinandersetzen und diskutieren, in wie weit *Verstehbarkeit* und *Vorhersagbarkeit* von Naturabläufen miteinandergekoppelt sind. Kann es auftreten, daß Sprachentwicklungen zwar zu einer größeren Einsicht in die Natur von Phänomenen führen, aber für eine effiziente Vorhersage von Phänomen weniger geeignet sind oder gar dafür überflüssige Elemente enthalten? Gibt es Sprachelemente, die zum Verständnis wesentlich sind, die aber in der Natur keine beobachtbare Entsprechung haben und die in den Berechnungen von Vorhersagen explizit niemals vorkommen?
Wir betrachten zunächst Mathematik als Sprache zur Vermittlung naturwissenschaftlicher Erkenntnis. Danach wenden wir uns formalen Sprachen und Programmiersprachen zu, wie sie in der Informatik entwickelt und diskutiert werden. Wir betrachten den hierarchischen Aspekt in der Naturbeschreibung und das damit verbundene qualitative Argumentieren. Schließlich kehren wir zu den oben aufgeworfenen Fragen zurück.

Mathematik als Sprache

Hilbert [3] stellt seinem Buch *Grundlagen der Geometrie* als Motto das folgende Zitat aus Kants *Kritik der reinen Vernunft* voraus:

> *So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.*

Er sagt in der sehr kurzen Einleitung zu diesem Buch:

> *Die bezeichnete Aufgabe* - nämlich die Untersuchung von Axiomensystemen der Geometrie - *läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.*

Der reale Raum ist für alle naturwissenschaftliche Erkenntnis grundlegend. Daher bietet die Geometrie als Gebiet, zu dem wir alle einen einfachen Zugang besitzen, ein hervorragend geeignetes Beispiel zum Studium unserer Fragen.
Die Axiome der Geometrie legen fest, welche Sätze in der Geometrie Gültigkeit haben. Wir betrachten als Beispiele einige Axiome der euklidischen Geometrie der Ebene.

- Sind P und Q Punkte, dann gibt es eine Gerade g auf der P und Q liegen.
- Liegen die Punkte P und Q auf g_1 und auf g_2 und ist P ungleich Q, dann ist g_1 gleich g_2.

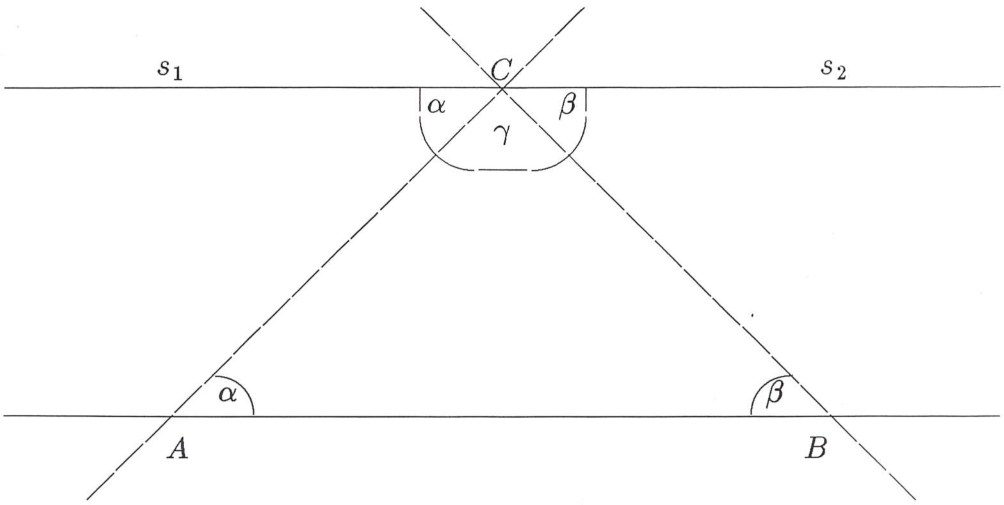
In den Axiomen wird nirgends gesagt, was *Punkte* und was *Geraden* sind. Es wird vorausgesetzt, daß man von der Gleichheit der so bezeichneten Objekte sprechen kann und dies in der üblichen Weise tun darf. Im übrigen drückt sich der geometrische Gehalt dieser Wörter per Definition vollständig in den Axiomen aus.
Wir verwenden die Axiome, um Konstruktionen zu vollziehen, die wir in unserer natürlichen Sprache eindeutig beschreiben können. Die Theoreme der euklidischen Geometrie sprechen Beziehungen zwischen den konstruierten Objekten aus. Wir können die euklid'sche Geometrie so als Sprache ansehen, in der der Gebrauch der Wörter *Punkt, Gerade, Strecke, liegen auf, schneiden, liegt zwischen* durch die Axiome genau festgelegt wird. Erlaubte Sätze der Sprache sind genau die Theoreme, die sich mittels der Regeln der Logik aus den Axiomen ableiten lassen.
Die Sprache der euklidischen Geometrie ist auf diese Weise eingebettet in die natürliche Sprache, die weitere durch die Axiome der Geometrie nicht festgelegte Begriffe der Mathematik wie z.B. den Mengenbegriff und die Namensgebung verwendet. Dies haben wir etwa in dem folgenden Beispiel, in dem der Kreis um A mit dem Radius r definiert und mit dem Namen K bezeichnet wird. *Sei K die Menge der Punkte, die von dem Punkt A den Abstand r haben.* So erscheint Geometrie hier als Sprache und, indem wir die Geometrie zur Beschreibung von Erscheinungen im realen Raum verwenden, als Modell physikalischer Phänomene.
Zur Veranschaulichung betrachten wir zwei Beispiele. Einer der ersten Sätze, die man im Geometrieunterricht lernt, lautet wie folgt:

- *Die Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt* 180^o.

  Dieser Satz besagt, daß die beiden folgenden Konstruktionen stets das gleiche Ergebnis erzielen.

  Die erste Konstruktion: Man trägt die drei Winkel α, β, γ eines beliebig gegebenen Dreieckes z.B. in C aneinander an (Figur 1).

  Die zweite Konstruktion: Man ziehe durch C die Parallele g zur Geraden durch die Punkte A und B.



Figur 1

Die Aussage des Satzes: Die Schenkel s_1 und s_2 liegen in g.

- Die drei Höhen h_1, h_2, h_3 eines jeden Dreieckes schneiden sich in einem Punkt.

  Die erste Konstruktion: Wir schneiden h_1 mit h_2 und erhalten den Schnittpunkt D_1.

  Die zweite Konstruktion: Wir schneiden h_1 mit h_3 und erhalten den Schnittpunkt D_2.

  Die Aussage des Satzes: Es ist $D_1 = D_2$.

Man kann jeden Satz der euklidischen Geometrie in dieses Schema bringen: *Man beschreibt geometrische Konstruktionen, die sich gegebener Operationen bedienen, und stellt fest, daß verschiedene Konstruktionen zu dem gleichen Resultat führen.* Man kann jeden Satz der euklid'schen Geometrie zwar so interpretieren, und die Konstruktionen, die in den Aussagen der Sätze verwendet werden, sind auch eindeutig in ihrem Resultat, nicht aber als Folge von nacheinander zu vollziehenden Operationen. So stellt der Satz über die Winkelsumme im Dreieck fest, daß diese Summe gleich 180^o ist, aber sagt nichts darüber aus, durch welche Konstruktionen man das verifizieren soll. So wird in dem Satz implizit davon Gebrauch gemacht, daß $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$ und $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ ist. In unserem zweiten Beispiel hätte man auch den Schnittpunkt D_3 von h_2 und h_3 verwenden können. So stellen die Sätze der Theorie zwar Beziehungen zwischen

den erlaubten Konstruktionen einer Theorie her, abstrahieren aber weitgehend von Details der Konstruktionen.
Wenn wir uns die Konstruktionen der euklidischen Geometrie auch stets durch Bilder veranschaulichen oder eine geometrische Vorstellung durch die Namensgebung vor unserem Geiste beschwören, so ist dies jedoch nicht notwendig. Man kann eine formale Sprache definieren, in der sich genau alle Sätze der Theorie formulieren lassen, und man kann endlich viele Regeln angeben, die es erlauben, aus den Axiomen jeden Satz der Theorie abzuleiten. Hierzu brauchen wir keinen Bezug zu dem realen Raum und auch die Anleihen bei der natürlichen Sprache verschwinden dabei weitgehend.
Der Bezug zum realen Raum kommt herein, indem wir eine *Interpretation* der formalen Objekte, der *Punkte* und *Geraden* im realen Raum angeben. Aus unserem ersten Beispiel wird eine physikalische Aussage, wenn wir uns ein Dreieck aus Eisenblech hernehmen, diesem die drei Ecken abschneiden, sie zusammenfügen wie in Figur 1 und dann behaupten, daß sich die drei Ecken zu einer geraden Kante ergänzen. Diese Interpretation des Satzes hat man über Jahrtausende hinweg als selbstverständlich angesehen. Umstritten war nur, ob man zu dem Beweis des Satzes das Parallelenaxiom benötigte oder nicht. Erst im neunzehnten Jahrhundert hat sich die entscheidende Wandlung in dieser Auffassung vollzogen.
Gauß, Bolyai und Lobatschewsky erkannten, daß Geometrien ohne Parallelenaxiom möglich sind und daß sie sich von der euklidischen Geometrie unterscheiden. Eine wesentlich tiefer gehende Analyse erfährt der Raum durch Riemann. Er spricht auch in völliger Klarheit unsere heutige Haltung aus, indem er sein Interesse nicht nur auf spezielle Objekte des Raumes, sondern auf den Raum selbst richtet. Als grundlegend sieht er folgende Eigenschaften:

- *Der Raum ist kontinuierlich*

- *Der Raum ist unbegrenzt.*

Die Unbegrenztheit des Raumes hat für ihn nichts mit der Frage nach der Endlichkeit des Raumes zu tun. Letzteres hat mit dem *Messen* zu tun, ersteres mit der *Topologie* des Raumes, wie wir die sich damit befassende Theorie heute bezeichnen. Das eigentliche Interesse Riemanns galt der *Metrisierbarkeit* der Räume. Die axiomatische Fassung der mit den beiden genannten Eigenschaften des Raumes verknüpften Vorstellungen durch Haussdorff hat zur Begründung der Topologie der Punktmengen geführt. Auch dies ist eine Sprache, deren Entwicklung von der Anschauung angeregt wurde und die es erlaubt, den realen Raum in neuer Weise exakt zu diskutieren. Das Verhältnis von mathematischer Theorie und Physik findet sich in Riemanns Habilitationsvortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrundeliegen* [7] in völliger Klarheit ausgedrückt:

> *Die Entscheidung dieser Fragen* - nämlich der Struktur des physikalischen Raumes - *kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch Erfahrung bewährten Auffassung ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich nicht aus ihr erklären lassen ... umarbeitet; solche Untersuchungen, welche wie die hier geführten, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt ... nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.*

Riemann stellt in seinem Vortrag der Physik eine neue Sprache zur Verfügung und wirft damit eine Frage auf, zu der Einstein mit der Schaffung der Relativitätstheorie genau 50 Jahre später seinen berühmten Beitrag geleistet hat.
Es geht in der Mathematik nicht um die *Wahrheit* einer Theorie, sondern um *Widerspruchsfreiheit* und *Vollständigkeit*. Diese Auffassung Hilberts ist heute allgemein akzeptiert. Zur Orientierung in der Welt ist es wenig hilfreich, wenn eine Theorie eine Aussage A gibt und ihr Gegenteil *A gilt nicht* zuläßt. Deshalb sollten Wissenschaftssprachen die Forderung der *Widerspruchsfreiheit* erfüllen. *Vollständigkeit* besagt, daß diese Sprache den gesamten Umfang der Interessen abdeckt. Ob es auch Sprachen dieser Art für vorgegebene Interessensbereiche gibt, das ist eine andere Frage.
In den Naturwissenschaften geht es um die Frage, ob erarbeitete abstrakte Modelle gültig sind. Zwischen verschiedenen zutreffenden Modellen entscheidet die *Einfachheit* des Modells [4]. Hier treten also anstelle der *Wahrheit* die *Gültigkeit* und *Einfachheit* als Kriterium einer Theorie. Auch hierüber herrscht weitgehend Einvernehmen. Was aber ist *Einfachheit*? Auf diese Frage hat es im Rahmen der klassischen Mathematik und Physik bisher keine Antwort gegeben. Poincaré sagt: **Eine** Theorie erweist sich erfahrungsgemäß stets

aufgrund ihrer Einfachheit als allen anderen überlegen [6]. Heisenberg läßt Einstein in einer fiktiven Diskussion sagen, er stimme der Rolle der Einfachheit als Kriterium für die Akzeptanz einer Theorie zwar zu, könne aber nicht sagen, was genau man darunter verstehen solle [2]. Der in der Informatik entwickelte Begriff der algorithmischen *Komplexität* von Problemen mag vielleicht in Verbindung mit einer stärkeren Formalisierung der Begriffe *Sprache* und *Semantik* zur Klärung beizutragen.
Dies leitet über zu Konzepten und Sprachen, die vorwiegend in der Informatik entwickelt wurden. Bevor wir dieses Thema jedoch aufgreifen, wollen wir an zwei weiteren Beispielen erläutern, daß auch die Naturgesetze der Physik als Interpretation die Feststellung der Gleichheit verschiedener Konstruktionen zulassen.
Führen wir Beschleunigungsexperimente zur Bestimmung der Masse eines Körpers durch, dann werden diese Experimente die gleiche Zahl als Maß ergeben unabhängig davon, an welcher Stelle der Erde und zu welchem Zeitpunkt und bei welchem Wetter diese Experimente vorgenommen wurden. Wir werden auch das gleiche Resultat erzielen, wenn wir die Masse nicht durch Beschleunigungsexperimente sondern z.B. durch Stoßexperimente bestimmen. Der Satz, daß die *Ruhemasse* eines Körpers eine dem Körper fest zukommende Eigenschaft ist, die Auskunft darüber gibt, wie sich der Körper in verschiedenen Situationen verhält, hat also auch den oben mehrfach hervorgehobenen Charakter, die Gleichheit der Resultate von verschiedenen Konstruktionen oder Experimenten auszusprechen.
Die feststellbare Gleichheit von Resultaten aus Experimenten unabhängig von Ort und Zeit ihrer Ausführung, gibt uns auch die Legitimation, die Resultate von Experimenten oder Naturereignissen vorherzusagen.
Betrachten wir nun als zweites Beispiel das Verhalten eines Tragflügels in einer Luftstömung. Kennen wir die Form des Tragflügels, die Form der Strömung und die Lage des Tragflügels relativ zu der Strömung, die Dichte der Luft und einige weitere Parameter, dann sind wir aufgrund bekannter physikalischer Gesetze in der Lage, unter Verwendung von Rechenmaschinen den Auftrieb vorherzusagen, den der Tragflügel erfährt. Das ist wiederum die Feststellung der Gleichheit des Resultates verschiedener Experimente, z.B. eines Experimentes mit einem elektronischen Gerät, nämlich der Rechenmaschine, die die Vorhersage berechnet und des eigentlichen Experimentes mit dem

Tragflügel.
Wieder müssen wir hinzufügen, daß die Experimente nur in so fern eindeutig beschrieben werden, als es zur Erzielung des Resultates als notwendig erscheint. Im zweiten Beispiel müssen wir aber noch einen weiteren Umstand bemerken, der uns später wichtig ist. Das Naturgesetz, aus dem wir das Verhalten des umströmten Flügels ableiten, ist lokaler Natur. Das heißt folgendes: Das Naturgesetz beschreibt das Verhalten des strömenden Mediums und sein Verhältnis zum Flügel nur in kleinen Raumbereichen, ja darüber hinaus eigentlich auch nicht das Verhalten in kleinen Raum-Zeit-Bereichen, sondern nur das Verhalten im Grenzfall von sich immer mehr verkleinernden und sich schließlich auf einen Punkt zusammenziehenden Raum-Zeit-Bereichen. Hier geht das Naturgesetz weit über das unmittelbar Beobachtbare hinaus. Gerechtfertigt wird das Gesetz durch Experimente, die zeigen, daß die sich aufgrund des Gesetzes in speziellen Situationen ergebenden Vorhersagen mit dem Verhalten der Natur approximativ übereinstimmen.
Wir halten folgendes fest:

> *Die Mathematik entwickelt in sich konsistente Sprachen zur Beschreibung naturwissenschaftlicher Phänomene. Die Sätze der Sprachen können als Aussagen über die Gleichheit verschiedener Konstruktionen oder doch gewisser Resultate dieser Konstruktionen gedeutet werden Der Bezug auf die Konstruktionen i.a. aber nur implizit vorhanden,* ist *was die Aussagen verständlicher macht. Die Sprache der Mathematik bedient sich idealer Elemente wie Punkte, Geraden usw., die nur durch eine Idealisierung beobachtbarer Phänomene gewonnen werden können. Dies wird ganz besonders dort deutlich, wo Grenzübergänge explizit vollzogen werden.*

Programmiersprachen und Programme

Um aufgrund von Naturgesetzen in bestimmten Situationen quantitative Vorhersagen machen zu können, benötigt man Computer. Liegen diese Naturgesetze z.B. in der Form von Differentialgleichungen vor, dann ist es ein weiter Weg von der exakten Beschreibung der Situation, in der die Frage gestellt wird, bis zu einer Vorhersage, die das

fragliche Verhalten innerhalb von gegebenen Toleranzen richtig beschreibt. Zwischen dem Naturgesetz, der Beschreibung der speziellen Situation und der Vorhersage steht, wenn man so will, die gesamte numerische Mathematik. Häufig ist es sogar so, daß den Programmen Verfahren zugrundeliegen, deren Konvergenz auf dem Rechner fraglich ist, oder es werden Verfahren verwendet, die in einigen oder in vielen Beispielen gute Vorhersagen geliefert haben, deren Konvergenz im mathematischen Sinne aber offen ist. So kann man sich fragen, ob es nicht einen Umweg darstellt, zunächst ein Naturgesetz im mathematischen Sinne zu formulieren, wenn dies schließlich doch in ein Programm umgesetzt werden muß, um praktisch verwendet werden zu können und wenn man eventuell in konkreten Falle nicht einmal weiß, ob das Programm eine numerische Approximation der exakten Lösung berechnet. Wir wollen diese Alternative an einem Beispiel erläutern.
Hier interessieren wir uns für die Bewegung der Planeten unserer Sonne. Genauer, wir möchten die Bahnen der Planeten vor dem Fixsternhimmel beschreiben, so daß wir ihre Stellung für künftige Zeiten vorhersagen können. Dies möchten wir zumindest für eine überschaubare Zukunft mit guter Präzision erreichen. Dazu beobachten wir die Planetenbewegungen täglich und geben die beobachteten Koordinaten in einen Rechner ein. Die Meßpunkte approximieren wir durch quadratische Kurven. Dies tun wir stückweise mit einer vorgegebenen Genauigkeit und sorgen dafür, daß sich die Bogenstücke gut miteinander verkleben lassen. Wenn wir das über einige hundert Jahre hin tun, dann erhalten wir eine sehr gut zutreffende Beschreibung der Projektion der Planetenbahnen auf das Himmelsgewölbe. Von Zeit zu Zeit wird man kleinere Korrekturen anbringen, um zu verhindern, daß die Beschreibung und die reale Welt auseinandertriften. Das hier beschriebene Verfahren ist nicht elegant. Es ist sogar schwerfällig. Wir können es uns ja aufgrund unseres Kenntnisstandes auch leichter machen. Es gibt Programme, die das eben beschriebene Problem, die Stellung der Planeten am Himmel vorherzusagen, trefflich lösen. Lassen sie uns also diese Programme hernehmen und die Keppler'schen Gesetze vergessen. Gehen wir noch ein Stück weiter. Lassen sie uns ein Programm entwickeln, das für jedes vorgegebene n-Körperproblem im Rahmen der Newton'schen Mechanik die Bewegungen der n Körper für alle Zeiten mit vorgegebener Genauigkeit berechnen kann, wenn es für einen bestimmten Zeitpunkt die Koor-

dinaten, die Massen und die Geschwindigkeiten aller n Körper kennt. Haben wir dieses Programm, das auch n als variablen Parameter aufnimmt, dann können wir auch die Newton'sche Himmelsmechanik vergessen.
Nun, der Gedanke erscheint absurd. Warum aber ist er es? Wenn wir nur an der Vorhersage von Ereignissen interessiert sind, dann genügt uns doch ein solches Programm. Und ist es denn wirklich absurd? Können wir das, was wir hier so rasch verwerfen wollen, nicht aus dem Munde zahlreicher Physiker nur in einem etwas anderen Zusammenhang vernehmen! Um das zu erkennen, müssen wir an die Stelle von *Programm* nur *neuronales Netz* sagen und anstelle der *Himmelsmechanik* irgendein Problem aus der *Robotik* setzen. Das *Lernen* eines neuronalen Netzes ist aber nichts weiter als ein spezielles numerisches Verfahren, um unter Verwendung spezieller Basisfunktionen - charakteristische Funktionen von n-dimensionalen Halbräumen - vorgegebene Beispiele - Stützstellen - zu approximieren. Diese Verfahren erweisen sich in speziellen Fällen als hervorragend geeignet. Warum stört uns dieser Versuch der Naturbeschreibung aber z.B. im Zusammenhang mit der Himmelsmechanik? Die Antwort liegt uns sofort auf der Zunge: Die Newton'sche Mechanik vermittelt nicht nur eine Vorhersage, sondern auch Verständnis. Was aber ist Verständnis, fragen wir zurück, und auf diese Frage fällt uns die Antwort schwerer.
Vielleicht war nur das oben von mir geschilderte Programm zur Vorhersage der Planetenkonstellationen ungeschickt. Vielleicht gibt es andere Programme, die durchaus Plausibilität besitzen und die zumindest nicht auf die mathematische Sprache der Differentialgleichung abheben müssen.
Die in der Zeit vor Keppler angewendeten Methoden unser Problem zu lösen, sind Konstruktionen der Geometrie, die man als nichtdeterministische Programme für Maschinen auffassen könnte. Bevor wir zu dieser Frage eine Meinung äußern, müssen wir uns etwas mit dem Wesen von Programmen vertraut machen.
In höheren Programmiersprachen vereinbart man Namen als Informationsträger. Z.B. sagt man

x, y, z	bezeichnen ganze Zahlen(**integer**),
u, v	Gleitkommazahlen (**real**),
w, w_1, w_2	Wörter (**string**).

Man hat Operationen der Form

$$x \leftarrow y + z,$$

d.h. dem Namen x weise die Summe der beiden durch y und z bezeichneten Zahlen zu.

$$w \leftarrow w_1 \cdot w_2.$$

Dem Namen w weise man die Verkettung der mit w_1 und w_2 bezeichneten Wörter zu; usw. Folgen solcher Zuweisungen bilden Programme. Wir betrachten als Beispiel

$$\begin{aligned} x &\leftarrow y + z; \\ y &\leftarrow y + x; \end{aligned}$$

Führt man die Operationen in dieser Reihenfolge aus, dann erhält man eine Operation, die man auch durch

$$\begin{aligned} x &\leftarrow y + z; \\ y &\leftarrow y + (y + z); \end{aligned}$$

bezeichnen könnte. Wir sind gewöhnt, mit der Regel

$$y + (y + z) = (y + y) + z$$

zu rechnen, die aber bei dem Gebrauch von **real**-Zahlen nicht immer zutrifft. Wir sehen, daß wir bei der Umformung numerischer Programme vorsichtig sein müssen, da die meisten aus der Algebra gewohnten Identitäten des Rechnens nicht gelten. Dies gilt i.a. nicht einmal für den **integer**-Bereich. Man betrachte dazu als Beispiel eine Maschine, die nur Zahlen im Bereich von -100 bis $+100$ verarbeitet. Bilden wir

$$100 + (100 - 100),$$

dann erhalten wir als Resultat 100. Bilden wir dagegen

$$(100 + 100) - 100,$$

dann gibt die Maschine *Bereichsüberschreitung* aus. Wir sehen hier schön, wie die Einführung beliebig vieler Zahlen, d.h. des *Unendlichen*, das Rechnen einfacher macht. Man kann mit Grauert sagen: *Dieses Prinzip der logischen Einfachheit hat die ganze Mathematik gezeugt und, wenn wir ehrlich sind, gibt es das Unendliche nur seinetwegen* [1], [8]. Das in den Maschinen nicht vorhandene Unendliche ist eine der Ursachen, daß Programme schwerer zu verstehen sind als mathematische Ausdrücke. Die anderen Ursachen sind mit den oben erwähnten Beispielen verwandt. Programme beschreiben aus den genannten Gründen und da Maschinen sich im Erraten einer Bedeutung sehr schwer tun, die zu vollziehenden Berechnungen sehr genau. Daher enthalten Programme Sprachelemente, die nichts mit dem eigentlichen Problem zu tun haben, das von dem Programm bearbeitet wird, sondern die nur dazu dienen, die Mitteilung des Programmes für die Maschine unmißverständlich zu machen. Aus diesem Grund ist die Syntax der Programmiersprachen sehr genau definiert und selbst kleine Abweichungen davon führen zu Rückfragen der Maschine. Darin, daß Programme sehr schwer lesbar sind und daß damit ihre Korrektheit nur sehr schwer einsehbar ist, stimmen alle überein. Beispiele kann man dafür leicht finden.Ich sollte aber erwähnen, daß in der Informatik aus den genannten Gründen große Anstrengungen unternommen werden, Programmiersprachen zu entwickeln, die verständlichere Programme erlauben, ohne daß dadurch die Rechenzeit zur Auswertung der Programme allzu hoch getrieben wird. Eines der Hauptprobleme der theoretischen Informatik gehört hier her, nämlich die Frage, ob sich Probleme der Größe n, die sich durch nichtdeterministische Verfahren - d.h. Raten ist erlaubt - in einer Zeit $c \cdot n^k$ lösen lassen, auch deterministisch in einer Zeit $d \cdot n^l$ lösen lassen; hierin sind c, d, k, l natürliche Zahlen. Ein Beispiel soll erläutern, in welchem Sinne das *Raten* zu verstehen ist. Man hat eine Gleichung, etwa

$$5 \cdot x^{11} - 1 \cdot x^{10} - 6 \cdot x^9 + 4 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 + 7 \cdot x - 7 = 0$$

und sucht eine Nullstelle dieser Gleichung. Wenn wir nun durch Raten $x = 1$ wählen, dann brauchen wir nur überall in der Gleichung $x = 1$ zu setzen und den erhaltenen Ausdruck auszuwerten, um festzustellen, daß wir gut geraten haben. Es stellt sich die Frage, ob man alles, was man in diesem Sinne unter Einsatz von Raten schnell, auch ohne Raten in nicht zu langer Zeit lösen kann.

Indem wir Programme dieser Art zulassen würden, müßten wir sogar über Verfahren verfügen, jedes solches Programm automatisch in ein deterministisches Programm zu übersetzen, das das gleiche Problem effizient löst. Die erzielten Einsichten auf diesem Gebiet benötigten zu ihrem Beweis große Erfindungsgabe und kühne Konstruktionen, aber noch haben wir keine irgendwie befriedigende Antwort auf die eben umschriebene Frage gefunden.

Qualitatives und hierarchisches Argumentieren

Häufig enthalten Modelle zur Beschreibung der Natur mehr Details als für einen bestimmten Fragenkreis interessant sind. Unter qualitativem Argumentieren wollen wir ein Schließen verstehen, das durch die Vernachlässigung solcher Details zu wesentlich einfacheren Theorien für diesen Fragenkreis gelangt. Wir betrachten hierzu einige Beispiele:

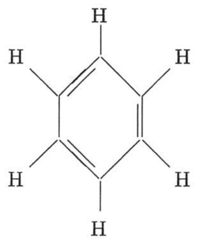
Wir wissen alle, daß an sich die kontinuierlich erscheinenden stofflichen Zustände, wie Flüssigkeiten und Gase in Wirklichkeit wie alle Körper eine körnige Struktur besitzen. Unter hinreichender Vergrößerung würden sie als wimmelnde Heerscharen von Individuen erscheinen. Selbst Tröpfchen enthalten noch eine ungeheure Anzahl von Molekülen. Wenn wir uns für das Strömungsverhalten von Gasen oder Flüssigkeiten in unserem normalen Erlebnisraum interessieren, können wir von der Körnigkeit der Substanz völlig abstrahieren. Hydro- und Aerodynamik gehen von einem kontinuierlichen Stoffmodell aus und haben damit ihre so eindrucksvollen Erfolge erzielt. Ebenso kann die Elektronik an vielen Stellen völlig vergessen, daß auch der Strom eine körnige Struktur besitzt. In jedem der Fälle besitzen wir fundierte mathematische Theorien als Modelle. Die Modelle abstrahieren in ähnlicher Weise von den Individuen, die diese Substanzen tragen, wie dies die Statistik der Lebens- und Krankenversicherungen von den einzelnen Personen tut.

Die Chemie hingegen kümmert sich um die Moleküle und die Atome, zerschneidet erstere und baut aus letzteren Farben oder Arzneien, Duftstoffe oder Fasern usw. zusammen. Hierbei verwendet sie Modelle für Atome und Moleküle, in die die Eigenschaften, die für das makroskopisches Verhalten von Gasen, Flüssigkeiten oder Festkörpern wesentlich sind, kaum eingehen. Die einfachsten Modelle stützen sich auf das *periodische System* der Atome. Moleküle werden in ihm durch die uns allen bekannten graphischen Darstellungen (Figur 2) beschrieben. Verbindet man diese Formeln noch durch Pfeile, so erhält man Diagramme

$$HC \equiv CH + HOH \rightarrow CH_3 - CHO,$$

die Reaktionsabläufe beschreiben. Verfeinert man diese Diagramme noch ein wenig durch Ladungsangaben und Energiebilanzen, dann hat man bereits die Grundlagen gesamten Schulchemie parat.

H–O–H



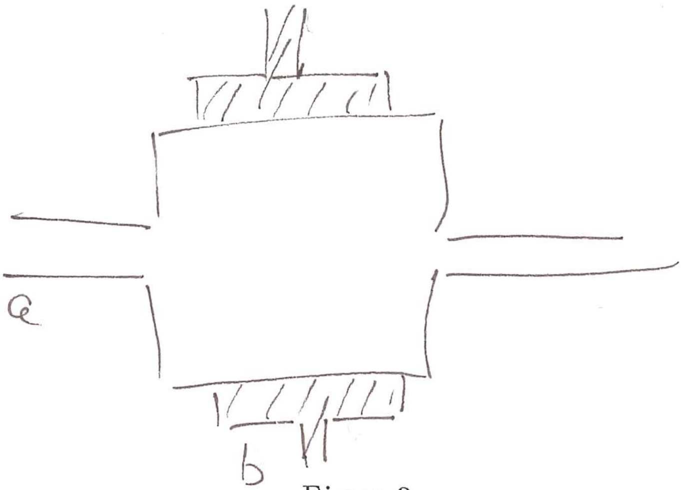
Figur 2

Atome sind durch chemische Mittel nicht teilbar. Allerdings lassen sie sich durch den Beschuß mit energiereichen Partikeln zertrümmern. Heute müssen wir aufgrund solcher Experimente die Atome selbst wieder als höchst komplizierte Gebilde ansehen, deren Beschreibung wiederum den Einsatz der Analysis erfordert. Der Chemiker macht bei der Verfeinerung seiner Theorien bei diesen Modellen wichtige Anleihen, kann aber mit seinen einfachen Modellen viele für seine Interessen wichtigen Qualitäten der Atome hinreichend gut einfangen. So erscheinen die jeweils in gewissen Bereichen exakten Theorien vom Standpunkt der in anderen Bereichen gültigen Theorien als Vereinfachungen. Einen ähnlichen Übergang, wie den von der Elementarteilchenphysik zur Chemie, haben wir von der Chemie zu biologischen Systemen, von Einzellern zu Vielzellern und schließlich von diesen zu den höheren Lebewesen.
Was wir beobachten, ist folgendes:

> *Wir entwickeln in den Naturwissenschaften eine Hierarchie von Sichten auf die Natur. Überall da, wo eine neue Qualität sichtbar wird, siedelt sich eine neue wissenschaftliche Disziplin an. Das Kriterium dabei ist, daß die sichtbar werdenden Qualitäten von einer wissenschaftlichen Terminologie eingefangen werden können.*

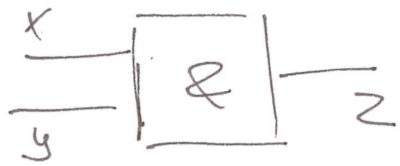
Die Übergänge in den Hierarchien finden i.a. nicht in eine Theorie eingebettet statt. Die Chemie war längst eine große Wissenschaft, bevor man von der Möglichkeit ihrer Einordnung in die Atomphysik wußte.
Ein Beispiel, das die hierarchische Sichtweise und die Bildung einer Theorie aufgrund spezieller, durch Konstruktionen zu gewährleistenden Qualitäten sehr klar zeigt, ist die Schaltkreistheorie, auf der die Be-

herrschung des Entwurfes elektronischer Rechenmaschinen beruht. Wir wollen dies im folgenden erläutern.
Die Basis von Schaltkreisen bilden Halbleiter, deren physikalische Theorie nicht einfach ist. Man kann sich aber leicht eine Vorstellung davon verschaffen, auf welchem Effekt die Funktion von Schaltkreisen beruht.



Figur 3

Man betrachte zwei sich kreuzende von einander isolierte Leiterbahnen *a* und *b*, die dort, wo sie sich kreuzen, verbreitert sind (Figur 3). Der Widerstand, den der Leiter *b* dem Strom entgegensetzt, hängt von der Anzahl der frei in ihm beweglichen Elektronen ab. Liegt der Leiter *a* dicht über dem Leiter *b*, so kann eine Aufladung von *a* Elektronen aus dem schraffierten Bereich von *b* verdrängen und dadurch den Widerstand von *b* steuern. Das kann man so tun, daß in gewissen Spannungsbereichen der Leiter *b* praktisch gesperrt oder auch vollständig geöffnet wird. Diesen Effekt kann man dazu benutzen, ein *Gatter* zu realisieren, wie es die Figur 4 symbolisch beschreibt:



Figur 4

Die Buchstaben x, y und z stehen für Spannungen in einem Intervall von, sagen wir, 5 bis 10 Volt. Auf die genaue Höhe kommt es nicht an, so daß wir nur zwischen *hoher* und *niedriger* Spannung unterscheiden. Wir vollenden die symbolische Beschreibung unseres Schaltkreises, indem wir angeben, wie die Spannungen x, y, z zusammenhängen. Wenn wir für *hoch* "1" und für *niedrig* "0" schreiben, drückt sich dieser Zusammenhang in der folgenden Tabelle aus.

x	y	z
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Wir sagen, daß sich z durch die Operation & aus x und y ergibt und schreiben entsprechend

$$z = x \;\&\; y.$$

Wir erkennen sofort die Rechenregeln

$$\begin{array}{ll} x \;\&\; y = y \;\&\; x, & (x \;\&\; y) \;\&\; w = x \;\&\; (y \;\&\; w) \\ 1 \;\&\; x = x, & 0 \;\&x = 0. \end{array}$$

Auf ähnliche Weise führt man die Operationen $\vee$ und $-$ ein, die durch die beiden folgenden Tabellen definiert werden.

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

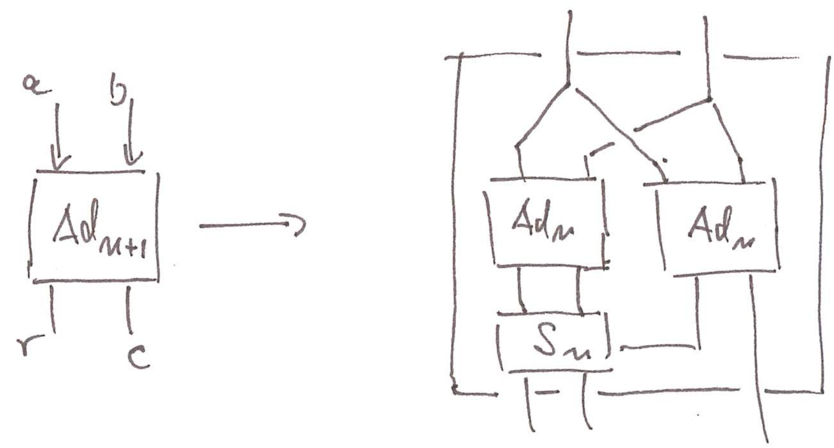
x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Man sieht, daß $\vee$ ähnliche Rechenregeln erfüllt wie & und daß weitere Rechenregeln gelten. Beispiele hierfür sind:

$$\begin{array}{rcl} (x \;\&\; y) \vee (x \;\&\; w) & = & x \;\&\; (y \vee w) \\ (x \vee y) \;\&\; (x \vee w) & = & x \vee (y \;\&\; w) \\ \overline{\overline{x}} & = & x \end{array}$$

So erhält man eine einfache Algebra, die das qualitative Verhalten von an sich sehr komplexen physikalischen Gebilden beschreibt. Diese Beschreibung gilt nicht zu jedem beliebigen Zeitpunkt, sondern nur

dann, wenn die Eingabesignale x und y mindestens während eines gewissen Zeitintervalles der Dauer δ konstant gehalten werden. Der Funktionswert $x\&y$ stellt sich am Ausgang mit einer gewissen Zeitverzögerung ϵ ein. Wenn man also gewisse physikalische Konfigurationen, deren Bau hier nur sehr skizzenhaft angedeutet wurde, unter Beachtung gewisser zeitlicher Bedingungen betreibt, kann man die elektrischen Vorgänge in guter Annäherung im Rahmen der oben beschriebenen *booleschen* Algebra erfassen. Indem man solche elementaren Schaltkreise in bestimmter Weise zusammensetzt, kann man elektrische Konfigurationen angeben, die z.B. Zahlen im Dualsystem addieren oder miteinander multiplizieren. Das zeigt die Möglichkeit qualitatives Argumentieren durch einfache mathematische Modelle exakt zu erfassen.
Um auch die Idee einer speziellen, exakten Fassung des Hierarchiebegriffs zu vermitteln, skizzieren wir den Aufbau eines Addierwerkes. Wir wollen zwei 2^n-stellige Dualzahlen addieren. Für $n = 5$ erhalten wir 32-stellige Dualzahlen, d.h. die Zahlengröße, die in Rechenmaschinen heute sehr verbreitet ist. Ein Addierwerk, das diese Aufgabe lösen kann, bezeichnen wir mit Ad_n. Nun können wir *rekursiv* definieren, wie das Addierwerk aufgebaut werden soll. Dies geschieht durch die folgende Figur 4. (a, b bezeichnet die 2^{n+1}-stelligen Summanden, von Ad_{n+1}, c die letzten 2^{n+1} Stellen der Summe und r den Übertrag.



Figur 5

Wir spalten - wie Figur 5 zeigt - die Leitungen für die 2^{n+1} -stelligen Dualzahlen in zwei Bündel von je 2^n-stelligen Leitungen auf. Die führenden 2^n Stellen addieren wir in dem linken Ad_n, die hinteren 2^n

Stellen in dem rechten Ad_n. Der Übertrag, den der rechte Ad_n erzeugt, wird anschließend durch einen Schaltkreis S_n auf das Resultat des linken Ad_n aufaddiert. Damit haben wir den Entwurf des Ad_{n+1} auf den Entwurf des Ad_n zurückgeführt. Für S_n gibt man dann eine entsprechende rekursive Definition an, wie wir das für Ad_n getan haben. Indem wir nun dieses Schema mit stets um 1 erniedrigten Index n wiederholt in sich einsetzen, verfeinern wir diese symbolische Beschreibung des Addieres fortlaufend. Dies tun wir solange bis wir auf Ad_o stoßen. Indem wir nun noch für Ad_o und für S_o einen Schaltkreis für angeben, haben wir Ad_{n+1} vollständig definiert.
Damit haben wir eine hierarchische Beschreibung eines Addierwerkes einfachster Bauweise angegeben. Wir erkennen hier "Hierarchie" als eine Abbildung, die symbolische Beschreibungen unter Erhaltung bereits vorhandener Strukturen schrittweise bis hinab zur Beschreibung realer physikalischer Strukturen verfeinert. Dies ist die Weise Rechenmaschinen zu bauen. Die Entwicklung dieser Maschinen ist ohne hierarchische Vorgehensweise nicht möglich. Die Entstehung der *Theorie der Schaltkreise* aus einem physikalischen Konstruktionsproblem ist in ihrer Einfachheit ein Musterbeispiel dafür, wie durch die Entwicklung einer formalen Sprache in Verbindung mit gewissen Normierungen in den Konstruktionen ein gewisser Teilbereich der Natur exakt beherrschbar wird.
Es gibt im Rahmen der *künstliche Intelligenz* Versuche, diesen Vorgang des qualitativen Argumentierens bis hin zu seiner exakten sprachlichen Fassung in eine umfassende Theorie einzubetten [5].

Sprache und Algorithmus

Wir haben oben die Frage aufgeworfen, warum man nicht anstelle der mathematischen Methoden, z.B. der Beschreibung von physikalischen Vorgängen durch Differentialgleichungen, Programme hernimmt, die in Abhängigkeit von vorgegebenen Parametern das Verhalten physikalischer Systeme vorherzusagen vermögen.
Hierauf kann man zunächst antworten, daß es kein Programm gibt, das für jede Anfangssituation und jede Differentialgleichung das zu leisten vermag. Man kann sogar zeigen, daß es für gewisse Fragestellungen solche Programme auch garnicht geben kann. Ein Beispiel hierfür ist die Frage , ob eine Rechenmaschine, bei irgendeiner Speicherbelegung gestartet, irgendwann einmal anhält. Dies ist

zunächst nur ein bekannter Satz über Turingmaschinen. Sieht man diese Maschinen als realistisches Modell für unsere Rechenmaschinen an, dann folgt unsere Behauptung aus der bekannten Nichtentscheidbarkeit des Halteproblemes. Sieht man die Computer als endliche Automaten an, dann stelle man dieses Problem für den größten realisierbaren Verbund von Maschinen. Auch hier beobachtet man, daß die Maschine i.a. nicht feststellen kann, ob ihre Berechnung periodisch wird, da wir zu dieser Feststellung einen Teil des Speichens für eben diesen Zweck sehr speziell verwenden müßten.
Wir können also davon ausgehen, daß es bereits das universelle Programm zur Lösung gewisser Fragen, die wir allein im Rahmen einer *speziellen* physikalischen Theorie, die den Bau universeller Computer ermöglicht, zu stellen vermögen, nicht gibt.
Wie steht es nun mit der Verständlichkeit von Programmen? Programmiersprachen sind spezielle Sprachen. Wir haben gehört, daß die Einfachheit neben der Korrektheit das entscheidende Kennzeichen für die Gültigkeit einer Theorie ist. Kann man erwarten, daß die Programmlänge, die bekanntlich zur Fassung des Begriffs der zufälligen Folge hervorragend geeignet ist, auch als Kriterium für die Einfachheit von Naturgesetzen herangezogen werden kann? Da es, wie oben festgestellt wurde, keine universellen Programme gibt, kann diese Frage nur für eingeschränkte Bereiche sinnvoll sein. Vergleicht man die Beschreibung von Vorgängen, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen erfassen lassen, und nimmt man die *Größe* dieser Differentialgleichungen als Maß für die Einfachheit des Gesetzes, dann sieht man, daß die Größe des kürzesten Programmes zur Approximation der Lösungen des Anfangswertproblemes eine vergleichbare Größe besitzt und damit ein zutreffendes Maß ist [4].
Im allgemeinen kann man aber über vieles sprechen und vieles verstehen, das sich durch Programme nicht erfassen läßt. Wir wollen das präzisieren.
Es sei T ein Alphabet, also z.B.

$$T = \{a|b|\dots|z|A|B|\dots|Z|?|!|.|,|\dots\}$$

und T^* die Menge aller möglichen Zeichenfolgen über diesem Alphabet. Ist L irgendeine Teilmenge von T^*, dann sagen wir, daß L durch eine Maschine *aufzählbar* ist, wenn wir ein Programm für einen Computer schreiben können, so daß der Computer mit diesem Programm versehen, in irgendeiner Reihenfolge alle Wörter von L ausdruckt.

Die Länge $C(L)$ eines solchen kürzesten Programmes, bezeichnen wir als *Programmkomplexität* von L. Nun zeigt man in den Grundvorlesungen der Informatik, daß es Sprachen L gibt mit $C(L) < \infty$, aber $C(T^* - L) = \infty$. Das soll folgendes heißen: Setzen wir L' gleich der Menge aller Wörter von T^*, die nicht in L vorkommen, dann gibt es kein Programm für irgendeinen Computer, der L' in irgendeiner Reihenfolge aufzählt. Wenn wir L *verstehen*, dann *verstehen* wir in gewissem Sinn auch L', aber wir können L' kein endliches Maß in der Programmkomplexität zuordnen. Man kann diese Betrachtungen verfeinern, indem man die Mengen L_n betrachtet, die alle Wörter von L mit einer Länge kleiner oder gleich der natürlichen Zahl n enthalten. Nun betrachtet man Programme, die L_n aufzählen. Unter diesen wählt man eine Folge p_n von Programmen aus, die jeweils von minimaler Länge unter den Programmen für L_n sind. Dann interessiert man sich dafür, wie die Länge von p_n wächst. So erhält man eine verfeinerte Theorie, die es erlaubt, auch Mengen L mit $C(L) = \infty$ eine Programmkomplexität zuzuordnen. Die Weiterverfolgung der Theorie führt zu verschiedenen Fassungen des Begriffes der Zufälligkeit, aber es ist noch unklar, was er in unserem Zusammenhang wirklich leistet. Wir wollen aber noch einen Satz der Theorie der endlichen Automaten erläutern, in dem ebenfalls die Kraft der Negation in Sprachen sehr deutlich zum Ausdruck kommt.

Wir betrachten eine spezielle Klasse R formaler Sprachen über T. In R liegt jede Menge L der Form $L = \{\alpha\}$, wobei α irgendein Zeichen aus T ist. Liegen die Sprachen L_1 und L_2 in R, dann liegt definitionsgemäß auch die Sprache $L_1 \cup L_2$ in R; hierin ist $L_1 \cup L_2$ die Sprache, die genau die Wörter enthält, die zumindest in einer der beiden Sprachen L_1 oder L_2 vorkommen. Bilden wir alle möglichen Komposita von je einem Wort aus L_1 mit nachfolgend einem Wort aus L_2, dann erhalten wir eine Menge, die wir mit $L_1 \cdot L_2$ bezeichnen. Mit L_1 und L_2 soll auch die Menge $L_1 \cdot L_2$ in R liegen. Schließlich definieren wir noch eine dritte Operation: Mit L^* bezeichen wir die Menge aller Komposita, die man mittels Wörtern aus L überhaupt bilden kann. Mit L liege auch L^* in R.

R ist also die Menge von Sprachen, die sich aus den genannten einelementigen Mengen durch Anwendungen der drei eben definierten Operationen erzeugen läßt. Z.B. beschreibt

$$\{a\} \cdot T^* \cdot \{b\} \cdot \{b\} \cdot T^*(\{c\} \cup \{d\})$$

die Menge aller Wörter aus T^*, die mit a beginnen, mit einem c oder

einem d enden und die in ihrem Inneren zwei benachbarte b enthalten. R heißt die Menge der *regulären Sprachen* über T. Ist L aus R und hat der kleinste Ausdruck, der L definiert in unseren eben erklärten Operationen die Länge r, dann schreiben wir $r(L)$ zur Bezeichnung dieser Zahl.
Nun kann man folgendes zeigen: Es gibt zu gegebenem L eine Rechenmaschine mit $r(L)$ binären Speicherelementen , die unmittelbar nach dem Lesen eines Wortes w feststellen kann, ob w in L liegt.
Und nun kommt der Satz, weswegen wir hier überhaupt über reguläre Mengen sprechen. Dieser Satz verwendet die Tatsache, daß mit L auch $(T^* - L)$ in R liegt, und er besagt folgendes:
Verwenden wir zur Definition von regulären Sprachen nicht nur die drei oben genannten Operationen, sondern auch die Negation, d.h. die Bildung von $(T^* - L)$, und kommt die Negation in dem L definierenden Ausdruck q mal ineinander geschachtelt vor, dann gibt es Fälle, in denen man zum Bau der oben erwähnten Maschine

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{r}}}}}}\right\} q \text{ mal}$$

binäre Speicherelemente benötigt. Um eine Vorstellung von der Größe der Maschine zu erhalten, betrachten wir den Fall $r = 20$ und $q = 3$. In diesem Falle würden wir also eine Maschine mit rund 10 hoch 1000000 binären Speicherzellen benötigen.
Allgemein kann man sagen, daß man mit verhältnismäßig geringem Mehraufwand die Aussagekraft von Sprachen gewaltig steigern kann, so daß man i.a. eine starke Divergenz zwischen Programmkomplexität und Sprachkomplexität feststellen wird. Geht man davon aus, daß wesentlich größere Beschreibungen i.a. auch schwerer zu verstehen sind, dann kann man schließen, daß die Beschreibung der Natur durch Programme zwar die Forderung der Vorhersagbarkeit von Naturabläufen erfüllen mag, aber wohl an Verständlichkeit und damit auch in der Erkenntnisvermittlung hinter anderen Sprachen zurückbleiben wird.

anbinden an die leeren erste Zeilen

Sprache und Verstehen

Man soll Bewegungen nicht überflüssigerweise vervielfachen, sagt Keppler im Zusammenhang mit seinem Studium der Planetenbewegungen. Ins allgemeinere gewendet besagt dieser Grundsatz, daß Theorien keine überflüssigen Elemente enthalten sollten. Man ist geneigt sofort zuzustimmen, gerät aber in Schwierigkeiten, wenn man diesen Satz etwas zu präzisieren versucht: Was sind nämlich überflüssige Elemente einer Theorie? Nimmt man Theorien wörtlich, so enthält jede Theorie Elemente, denen kein beobachtbares Phänomen der von der Theorie zu erfassenden Welt entspricht. Wir können keine unendlichen Mengen wahrnehmen. So erweist sich die Menge der natürlichen Zahlen als eine Idealisierung, von der wir bereits oben festgestellt haben, daß sie ihre Wurzel im Ziel einer Vereinfachung der Theorie besitzt. Ebenso steht es mit den reellen Zahlen. Auch auf der Basis der natürlichen Zahlen ist es noch ein weiter Weg bis zur Definition des Intervalles $[0,1]$ der reellen Zahlen. Fast alle dieser reellen Zahlen sind nicht berechenbar und nur die berechenbaren reellen Zahlen können wir endlich repräsentieren. Wir können zwar symbolisch mit beliebigen reellen Zahlen rechnen, dabei aber nichts von deren Individualität verwenden, außer, daß sie vielleicht relativ zu anderen symbolisch repräsentierten reellen Zahlen berechenbar sind. Warum enthält unsere Sprache zur Beschreibung der Natur also reelle Zahlen? Wir haben niemals eine Gerade gesehen. Auch Punkte und Ebenen treffen wir in der physikalischen Welt nicht an. Sind alle diese Konstruktionen *idealer* Elemente, die wir in Theorien einbringen, nicht überflüssige Hypothesen?
Welche Konstruktionen unserer Sprachen korrespondieren zu beobachtbaren Phänomenen, oder ist es so, daß die idealen Elemente die *wirklichen* Elemente sind, wir die *Wirklichkeit*, aber nur *unscharf* wahrnehmen? Letzteres gilt mit Sicherheit, während die idealen Elemente wohl nur als sprachliche Konstruktionen existieren, zur Bezeichnung von Grenzfällen, die sich durch die Idealisierung von *unscharfen* Beobachtungen ergeben.
Man erkennt dies schon als Wurzel der reellen Zahlen, indem man von der Feststellung ausgeht, daß jede Strecke teilbar ist. Diese Feststellung ist als Aussage über gezeichnete Strecken nicht richtig. Aber es wäre lästig, immer irgendwelche Voraussetzung über die Qualität des Griffels hinzufügen zu müssen. Gezeichnete Strecken schneiden sich auch nicht in einem Punkt. Um das festzustellen, braucht man sich einen Schnittpunkt nur einmal unter einem Vergrößerungsglas

anzuschauen. Aber so ist es ja nicht nur mit den Elementen der Mathematik. Wir sind nicht in der Lage, das gleiche Zeichen oder das gleiche Wort zweimal in exakt gleicher Weise zu wiederholen, und die durch Wörter bezeichneten physikalischen Objekte, die Dinge, haben alle ein zweifaches Wesen: Eine Konstruktion ist das eine und etwas, für das diese Konstruktion in unserem Umgang i.a. eine verläßliche Vorstellung liefert, ist das andere Wesen, das Ding an sich. Die Sprache schafft ein Gewebe aus Wörtern und ihren Beziehungen untereinander, das wir über die Welt breiten, um allen Ereignissen ein Platz in diesem Gewebe zuzuweisen. Dieses Gewebe unterliegt dauernden Änderungen in der Zeit, Nur die von der Mathematik gewobenen Teile haben, sieht man von den außerhalb der Theorie stehenden, die Mathematik allerdings erst mit Leben füllenden Interpretationen ab, eine *ewige* Dauer.
Die Wurzel der sprachlichen Konstruktionen ist das Bedürfnis, sich in der Welt zu orientieren. Dazu benötigen wir *einfache* Modelle. Zur Erzielung solcher Einfachheit konstruieren wir Elemente, die nur durch Grenzprozesse erreichbar sind. In diesem Sinne kann man die *Unschärfe* der Beobachtung und die Konstruktion *idealer* oder *transzendenter* Elemente als zwei sich gegenseitig stützende Vorgänge ansehen. Da wir alle Naturerkenntnisse in Sprache fassen, können wir auch nur erkennen, was in unserer Sprache faßbar ist. Ein Beispiel, das ich bereits an anderer Stelle verwendet habe, soll dies erläutern: Das sprachliche Gewebe, das wir in dem folgenden Gedankenexperiment über die Natur breiten, ist die bekannte Konstruktion Descartes. Wir ordnen jedem Punkt unseres Raumes drei Zahlen zu, nämlich seine Koordinaten bezüglich dreier paarweise aufeinander senkrecht stehender Geraden. Wir wollen nur mit begrenzter Genauigkeit beobachten. Dies geschieht, indem wir alle Zahlen auf ganze Zahlen runden. Dies tun wir so, wie man das gewöhnlich tut. Zahlen, die genau in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegen runden wir auf die kleinere der beiden benachbarten ganzen Zahlen. Unser Gewebe zur Beschreibung der Welt enthält also nur die ganzzahligen Gitterpunkte. Alle physikalischen Messungen werden durch unsere Rundung auf einen Gitterpunkt abgebildet. Nun gehen wir weit hinaus in leeren Raum, so daß uns keine anderen Kräfte stören. Dabei bringen wir einen Beutel von Kugellagerkugeln mit, um mit diesen wie folgt zu experimentieren: Wir setzen alle Kugeln auf einen Gitterpunkt und geben den Kugeln einen Stoß. Die Kugeln

bewegen sich nun nach den Gesetzen der Gravitation. Wir haben eine Uhr dabei und registrieren jede Minute rundend, auf welchem Gitterpunkt sich jede Kugel befindet. Wir wollen annehmen, daß wir diese Zuordnung zu den Gitterpunkten mit einem physikalischen Meßinstrument vollziehen. Dies wird uns stets möglich sein, wenn die Kugeln sich nicht in der Mitte zwischen zwei ganzzahligen Koordinaten befinden. Wir müssen dazu die Schärfe unserer Beobachtung nur hinreichend erhöhen. Befindet sich eine Kugel aber genau in einer solchen Mitte, dann kommen wir zu keiner Entscheidung, denn wir werden unsere Beobachtungsschärfe zwar fortlaufend erhöhen, aber wir können dabei nur feststellen, daß sich im Rahmen der bereits erreichten Präzision die Kugel genau in der Mitte zwischen zwei Gitterpunkten aufhält. Damit sind wir gezwungen, das Verfahren unendlich lange fortzusetzen, ohne zu einer Entscheidung gelangen zu können. Dies heißt aber, daß wir bei dieser Wahl unserer Sprache die physikalischen Vorgänge nicht beschreiben können. Dies liegt hier offensichtlich nicht in der Natur der Phänomene, sondern allein an der vorgenommenen Versprachlichung der Ereignisse.
Verfügung wir über die reellen Zahlen, kommen wir nicht in die oben geschilderten Schwierigkeiten. Wir erhalten so ein einfaches Modell der physikalischen Vorgänge. Wir dürfen dabei allerdings nicht vergessen, daß die reellen Zahlen uns im Anwendungsfall nicht zur Verfügung stehen, und daß das für sich allein, obwohl das Modell prinzipiell zutreffen mag, die Möglichkeiten einer Vorhersage von Ereignissen bereits empfindlich einschränken mag.

Zusammenfassung:
Wir beobachten, daß sich die Versprachlichung naturwissenschaftlicher Erkenntnis der Konstruktion idealer Elemente bedient, die über das unmittelbar Beobachtbare hinausgehen. Diese Konstruktionen sind gerechtfertigt durch die dadurch erzielte Einfachheit der Theorie. Dabei mag Einfachheit im Verstehen und die Leichtigkeit in der Anwendbarkeit der Theorie für eine Vorhersage divergieren. Wir haben weiter beobachtet, daß die Beschreibung der Naturvorgänge durch eine hierarchische Sichtweise stark geprägt ist. In Abhängigkeit von den interessierenden Qualitäten werden in sich logisch geschlossene Sprachen entwickelt, die den Umgang mit diesen Qualitäten verstehbar werden lassen. Wenn man den Begriff der Einfachheit von Naturgesetzen formal fassen will, darf man vermutlich nicht bei der

Programmkomplexität von Chaitin-Kolmogoroff stehen bleiben, sondern muß wohl auch eine Beschreibungskomplexität von Sprachen mit heranziehen, denn Programme enthalten detaillierte Konstruktionen, während die Verständlickkeit sprachlicher Mitteilungen auch darauf beruht, daß von solchen Konstruktionen nach Möglichkeit abstrahiert wird.

Literatur

[1] Grauert, H.: *Physics and Hopostasis*. Manuscript (1988).

[2] Heisenberg, W.: *Der Teil und das Ganze* dtv-Taschenbuch.

[3] Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie*. Teubner-Verlag, Leipzig.

[4] Hotz, G.: *Komplexität als Kriterium in der Theorienbildung*. Abh. der Akad. der Wiss~~enschaft~~ und der Literatur. Mainz 1988.

[5] Hotz, G.: *Was ist künstliche Intelligenz?* Abh. der Akad der Wiss. und der Lit. Mainz 1990.

[6] Poincaré, H.: *Wert der Wissenschaft*. Teubner-Verlag. Leipzig 1906.

[7] Riemann, B.: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrundeliegen*. (1854) Werke.

[8] Weyl, H.: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* Leibniz Verlag München (1928).