Max Müller
24.4.67

Sonderdruck
aus der Zeitschrift

Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik

Band 1, Heft 4, 1965

G. Kotz

Eine Algebraisierung des Syntheseproblems von Schaltkreisen II.

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

V/12/6

EIK 1 (1965) Seite 209–231

Eine Algebraisierung des Syntheseproblems von Schaltkreisen II[1])

Von GÜNTER HOTZ[2])

3. Definition der freien Kategorie mit direktem Produkt als Faktorkategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$

3.1. Einführung der Projektion und der Diagonalisierung

In den Abschnitten 1 und 2 haben wir die in der Einleitung geschilderte technische Aufgabe in ein algebraisches Problem verwandelt. Nun wollen wir unsere Theorie weiter dem technischen Sachverhalt anpassen.

Beim Zusammenschalten von Automaten wird man in der Regel einen Ausgang eines Automaten auf mehr als einen Eingang des folgenden Automaten schalten wollen und andererseits nicht jeden Ausgang des vorhergehenden Automaten für jeden nachfolgenden Automaten benötigen. Dementsprechend nehmen wir in unser Alphabet $\mathfrak{A}$ Zeichen auf, die Verzweigungen eines Drahtes repräsentieren und solche, die eine Auswahl der angebotenen Eingänge herstellen. In der Sprache der zugehörigen Abbildungen heißt das, daß wir in das Basissystem stets Abbildungen von dem Typ $f\colon S \to S^n$ mit $f(s) = [s, \ldots, s]$, d. h. Diagonalisierungen, aufnehmen und die Projektion von S^n auf eine oder mehrere Komponenten. Wir kommen mit einem endlichen Basissystem aus, wenn wir zu der Abbildung $u\colon S \to S^0$ und der Diagonalisierung $S \to S^2$ noch eine weitere Abbildung $v\colon S^2 \to S^2$ mit $v(s_1, s_2) = [s_2, s_1]$ für $[s_1, s_2] \in S^2$ hinzunehmen; d. h., mit diesen drei Basisfunktionen können wir jede Projektion und Diagonalisierung in $\mathfrak{C}$ erzeugen.

Die Hinzunahme der Abbildung v kann man noch weiter motivieren: In der modernen Schaltungstechnik geht man mehr und mehr zu gedruckten Schaltungen über, für die Permutationen von Anschlüssen, die zu Überkreuzungen der Leitungen führen würden, zu vermeiden sind; bei der Realisierung einer Schaltung als ebenes Netz kommt eine Überkreuzung gerade in der Verwendung von v zum Ausdruck.

Sei $\mathfrak{A}' = \{U, V, D\}$ und $Z(U) = 0$, $Q(U) = Q(D) = 1$, $Z(D) = Q(V) = Z(V) = 2$. In Zukunft betrachten wir stets Alphabete $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$; U übernimmt die Rolle der Abbildung $S \to S^0$, D die Rolle der Diagonalisierung und V die der Funktion v.

---

[1]) Habilitationsschrift, Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1965. Referenten: Prof. Dr. J. DÖRR, Prof. Dr. D. PUPPE (beide Saarbrücken), Prof. Dr. F. L. BAUER (München) – Der erste Teil dieser Arbeit, der die Abschnitte 1 und 2 sowie das Literaturverzeichnis umfaßt, findet sich im Heft 3 (1965) der vorliegenden Zeitschrift.

[2]) Institut für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes, Saarbrücken (Direktor: Prof. Dr. J. DÖRR).

Wir definieren

$$U_1^2 = E \times U, \quad U_2^2 = U \times E$$

und setzen

$$\mathfrak{R}_0 = \{U_1^2 \circ D \equiv E, \quad U_2^2 \circ D \equiv E, \quad U_1^2 \circ V \equiv U_2^2, \quad U_2^2 \circ V \equiv U_1^2\}.$$

Satz 10. *Ist $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, dann gilt für jeden Funktor $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ mit $Q(\varphi(E)) = S$:*

$$\varphi(U) = u: S \to S^0,$$

$$\varphi(U_i^2) = \textit{Projektion von } S^2 \textit{ auf die i-te Komponente.}$$

Ist φ mit $\mathfrak{R}_0$ verträglich, dann ist $\varphi(D)$ die Diagonalisierung $S \to S^2$ und $\varphi(V) = v$.

Beweis. 1. Da φ ein Funktor ist, folgt aus $E \times E_0 = E$ und $Q(\varphi(E)) = S$, daß $Q(\varphi(E_0)) = S^0$ ist. Also ist $Q(\varphi(U)) = S$ und $Z(\varphi(U)) = S^0$. Da es nur eine einzige Abbildung von S in S^0 gibt, folgt damit die Behauptung.

2. Da φ ein Funktor ist, gilt

$$\varphi(U_1^2) = \varphi(E \times U) = \varphi(E) \times \varphi(U).$$

Sei $[s_1, s_2] \in S^2$ und $\square$ das Element von S^0, dann haben wir

$$\varphi(U_1^2)(s_1, s_2) = [\varphi(E)(s_1), \varphi(U)(s_2)] = [s_1, \square] = s_1.$$

3. Die Behauptung über U_2^2 beweist man analog.

4. $\varphi(D)$ ist eine Abbildung von S in S^2. Sei $s \in S$ und $[s_1, s_2] = \varphi(D)(s)$. Da φ mit $\mathfrak{R}_0$ verträglich ist, folgt

$$\varphi(U_1^2) \circ \varphi(D) = \varphi(E)$$

und also

$$\varphi(U_1^2)(s_1, s_2) = s,$$

woraus sich $s_1 = s$ ergibt. Analog erhält man $s_2 = s$ und damit $\varphi(D)(s) = [s, s]$ für $s \in S$.

5. Durch die gleichen Schlüsse wie eben folgt

$$\varphi(U_1^2) \circ \varphi(V) = \varphi(U_2^2).$$

Setzen wir $[s_1', s_2'] = \varphi(V)(s_1, s_2)$, dann folgt

$$\varphi(U_1^2)(s_1', s_2') = \varphi(U_2^2)(s_1, s_2).$$

Also ist $s_1' = s_2$. Analog ergibt sich $s_2' = s_1$. Also gilt

$$\varphi(V)(s_1, s_2) = [s_2, s_1]$$

für $[s_1, s_2] \in S^2$.

Wir nennen in Zukunft einen Funktor $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ *normal*, wenn $Q(\varphi(E)) = S$ und φ mit $\mathfrak{R}_0$ verträglich ist.

Wir zeigen nun, daß sich in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ jede Projektion und Diagonalisierung von $\mathfrak{C}$ bezüglich jedes normalen Funktors $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ darstellen läßt und daß die Darstellung jeder dieser Abbildungen von der speziellen Wahl des normalen Funktors unabhängig ist.

Wir definieren zunächst die *Vertauschung* des ersten Faktors von S^n mit den $n-1$ folgenden Faktoren, deren Reihenfolge untereinander nicht geändert wird. Wir setzen

$$V_{1,1} = V$$

und definieren induktiv $V_{1,n}$ für $n \geqq 2$ durch

$$V_{1,n} = (E \times V_{1,n-1}) \circ (V \times E_{n-1}).$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man leicht

$$\varphi(V_{1,n})(s_1, \ldots, s_n) = [s_2, \ldots, s_n, s_1]$$

für $[s_1, \ldots, s_n] \in S^n$ (Abb. 14).

Hiermit können wir die Diagonalisierung verallgemeinern auf den Fall

$$f: S^n \to (S^n)^2.$$

Dazu definieren wir

$$D_1 = D,$$

$$D_n = (E \times V_{1,n} \times E_{n-1}) \circ (D \times E_{2n-2}) \circ (E \times D_{n-1})$$

für $n > 1$ (s. Abb. 15).

Man findet: Für jeden normalen Funktor φ gilt $\varphi(D_n)(s) = [s, s]$ für $s \in S^n$.

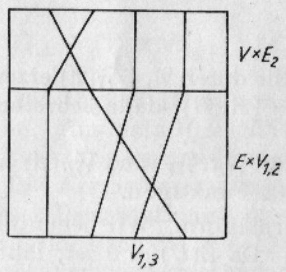

Abb. 14

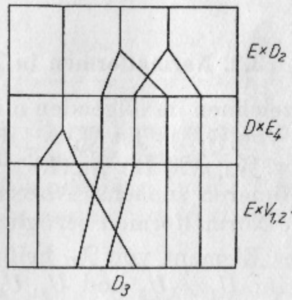

Abb. 15

Wir verallgemeinern weiter, indem wir setzen:

$$D_n^1 = D_n,$$

$$D_n^k = (D_n^{k-1} \times E_n) \circ D_n \text{ für } k > 1$$

(Abb. 16). Man erkennt hierin die Verallgemeinerung der Diagonalisierung zu der Form $S^n \to (S^n)^k$.

Durch die gleichen Schlüsse, wie im Beweis zu Satz 10 zeigt man, daß

$$U_i^n = U^{i-1} \times E \times U^{n-i}$$

für $1 \leqq i \leqq n$ bezüglich jedes normalen Funktors die Projektion von S^n auf den i-ten Faktor definiert, wenn $U^0 = E_0$ gesetzt wird. Durch

$$\overline{U}_i^n = E_i \times U^{n-i} \quad \text{bzw.} \quad U_i^{*n} = U^i \times E_{n-i}$$

wird die Projektion auf die ersten i bzw. letzten $n - i$ Faktoren von S^n definiert.

Wir fassen zusammen:

Satz 11. *Sei $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ und φ ein normaler Funktor. Hieraus folgt:*

$\varphi(V_{1,n})$ *vertauscht die erste mit den folgenden n Komponenten von $s \in S^{n+1}$,*

$\varphi(D_n^k)$ *ist die Diagonalisierung $S^n \to (S^n)^k$,*

$\varphi(U_i^n)$ *ist die Projektion von S^n auf die i-te Komponente.*

Für mit $\mathfrak{R}_0$ verträgliche Funktoren φ ist die Funktion der Elemente aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}')$ eindeutig bestimmt. Es gibt aber Elemente in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}')$, die zwar durch jeden normalen Funktor auf jeweils gleiche Elemente abgebildet werden, ohne daß diese Elemente kongruent nach $\mathfrak{R}_0$ sind. Wir werden später $\mathfrak{R}_0$ zu einem Relationensystem $\mathfrak{R}$ vergrößern mit dem jeder normale Funktor φ verträglich ist, und für das gilt:

$$\varphi(F) = \varphi(G) \Rightarrow F \equiv G(\mathfrak{R})$$

für $F, G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$.

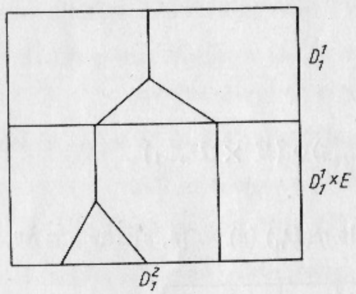

Abb. 16

3.2. Normalformen in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{A})$ die durch $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ erzeugte Unterkategorie von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Ist $\mathfrak{A}_1 = \{A\}$ bzw. $= \{A, B\}$, dann schreiben wir auch $\mathfrak{F}_A(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathfrak{F}_{A,B}(\mathfrak{A})$ für $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{A})$.

Wir definieren zunächst *Normalformen* für $\mathfrak{F}_D$, $\mathfrak{F}_V$ und $\mathfrak{F}_U(\mathfrak{A})$ und vergleichen diese Normalformen bezüglich normalen Funktoren.

1. Jedes Element von $\mathfrak{F}_U$ heißt eine Normalform. Wir behaupten $\varphi(U_1) \neq \varphi(U_2)$ für $U_1 \neq U_2$ und U_1, U_2 aus $\mathfrak{F}_U$. Da $Z(U) = 0$ ist, läßt sich jedes Element in $\mathfrak{F}_U$ auf die Form

$$E_{i_1} \times U^{i_2} \times E_{i_3} \times \cdots \times U^{i_k} \times E_{i_{k+1}}$$

bringen. Wir schreiben U_1 und U_2 in dieser Form. Da beide verschieden sind, gibt es eine erste Stelle, in denen sich beide Ausdrücke unterscheiden; dies sei der j-te Eingang. Nach Voraussetzung enthält S mindestens zwei Elemente $s_1 \neq s_2$. Wir wählen nun ein Element $s \in S^n$, $n = Q(U_1)$, dessen Komponenten alle gleich s_1 sind, außer der j-ten, die gleich s_2 ist. Ist $Q(U_2) \neq Q(U_1)$, dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Im anderen Fall betrachten wir $\varphi(U_1)(s)$ und $\varphi(U_2)(s)$. Aus Satz 11 folgt, daß einer der beiden Funktionswerte die Komponente s_2 enthält und der andere nicht, womit die Behauptung bewiesen ist.

2. $D' \in \mathfrak{F}_D$ heißt eine Normalform, wenn D' eine Einheit ist, oder wenn es Diagonalisierungen $D_1^{k_i}$ gibt mit

$$D' = E_{i_1} \times D_1^{k_1} \times E_{i_2} \times D_1^{k_2} \times \ldots \times D_1^{k_j} \times E_{i_{j+1}};$$

die rechte Seite des Ausdruckes nennen wir eine Normaldarstellung von D'.

Sei $n = Q(D')$ und $s_1, \ldots, s_n \in S$. Dann ist $\varphi(D')(s_1, \ldots, s_n)$ erklärt und $\varphi(D')$ *ersetzt* die $(i_1 + 1)$-te Komponente s_{i_1+1} durch k_1 gleiche Komponenten, die $(i_1 + i_2 + 2)$-te Komponente durch $[s_{i_1+i_2+2}, \ldots, s_{i_1+i_2+2}]$ (k_2-mal) usw.

Sind D' und D'' zwei Normalformen aus $\mathfrak{F}_D$ mit verschiedenen Normaldarstellungen, dann gilt für jeden normalen Funktor φ: $\varphi(D') \neq \varphi(D'')$. Zum Beweis kann man annehmen $Q(D') = Q(D'')$, $Z(D') = Z(D'')$. Die betreffenden Normaldarstellungen von D' bzw. D'' müssen sich, da sie verschieden sind, zumindest für einen Eingang unterscheiden. Das kann nur dann sein, wenn die eine Normaldarstellung an diesem Eingang eine Einheit, die andere aber eine Diagonalisierung $D_1^{k_1}$ (an dieser Stelle) hat, oder wenn beide zwar eine Diagonalisierung an dieser Stelle besitzen, aber mit verschiedenem oberen Index. Wählen wir nun ein Element $s \in S^n$, das an dieser Stelle die Komponente s_2, an allen anderen Stellen die Komponente s_1 besitzt, dann enthält $\varphi(D')(s)$ und $\varphi(D'')(s)$ die Komponente s_2 in verschiedener Vielfachheit, woraus die Behauptung folgt.

3. $V' \in \mathfrak{F}_V$ heißt eine Normalform, wenn V' eine Einheit ist oder sich in der folgenden Weise induktiv definieren läßt:

$$V' = E_l \times V_{i,1} \times E_j$$

oder

$$V' = (E_1 \times V'') \circ (V_{i,1} \times E_{n-i-1}),$$

worin V'' eine Normalform ist, $n = Q(V')$ und

$$V_{i,1} = (V \times E_{i-1}) \circ (E_1 \times V \times E_{i-2}) \circ \ldots \circ (E_{i-1} \times V)$$

für $i > 1$. Die in der Definition benutzten Darstellungen heißen Normaldarstellungen. Aus Satz 10 ergibt sich, daß die Elemente $F \in \mathfrak{F}_V$ bei jedem normalen Funktor Permutationen der Komponenten von S^n $(n = Q(F))$ definieren. Die Normaldarstellungen geben ein bestimmtes Verfahren zur Herstellung dieser Permutationen an: $V_{i,1}$ vertauscht der Reihe nach die $(i + 1)$-te Komponente mit allen vorhergehenden bis sie auf die erste Stelle gekommen ist. Die Normaldarstellungen erzeugen die Permutationen, indem sie zunächst die erste Komponente herstellen, dann die zweite usw., von links nach rechts fortschreitend; dabei werden die durchzuführenden Vertauschungen durch die $V_{i,1}$ beschrieben, also stets auf kürzestem Weg ausgeführt. Es ist klar, daß auch hier für jeden normalen Funktor φ und verschiedene Normalformen V' und V'' gilt: $\varphi(V') \neq \varphi(V'')$. (Zur Veranschaulichung siehe Abb. 17, dort wird eine Normaldarstellung beschrieben: Es werden zunächst alle notwendigen Kreuzungen des am ersten Ausgang endenden „Fadens" durchgeführt, dann die noch übrigen Kreuzungen des zweiten Fadens, usw.)

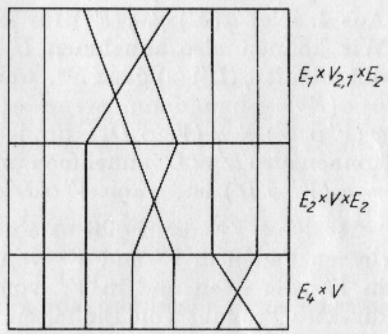

Abb. 17

4. Sei $U', U'' \in \mathfrak{F}_U$ und $F, F' \in \mathfrak{F}_{D,V}$ und $Q(F) = Z(U')$, $Q(F') = Z(U'')$.

Behauptung. Ist $U \neq U''$, dann gilt für jeden normalen Funktor φ:

$$\varphi\,(F \circ U') \neq \varphi\,(F' \circ U'').$$

Beweis. Wir können wieder annehmen $Q(U') = Q(U'') = n$. Nach 1. gibt es mindestens eine Komponente, die $\varphi(U')$ beseitigt, nicht aber $\varphi(U'')$. Wählen wir einen Punkt s in S^n, wie unter 1., dann kommt in genau einem Punkt $\varphi\,(F \circ U')\,(s)$ oder $\varphi\,(F' \circ U'')\,(s)$ s_2 als Komponente vor, da durch F bzw. F' eine Komponente höchstens vervielfacht oder permutiert wird.

5. Seien $D', D'' \in \mathfrak{F}_D$ Normalformen und $F, F' \in \mathfrak{F}_V$, $Q(F) = Z(D')$ und $Q(F') = Z(D'')$. Ist $D' \neq D''$, dann ist für jeden normalen Funktor φ wieder $\varphi\,(F \circ D') \neq \varphi\,(F' \circ D'')$.

Der Beweis läuft analog wie bei den vorhergehenden Punkten.

6. Wir wollen die Normalformen für $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ unter Benutzung der schon definierten Normalformen einführen. Naheliegend wäre der Versuch, $F \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ eine Normalform zu nennen, wenn es Normalformen V', D' und U' gibt, so daß gilt: $F = V' \circ D' \circ U'$. Bei dieser Definition würde aber der angestrebte Satz, daß verschiedene Normalformen bei jedem normalen Funktor zu verschiedenen Funktionen führen, falsch werden; denn V und D sind Normalformen und damit wäre auch $V \circ D$ eine Normalform. Es ist aber $\varphi\,(V \circ D) = \varphi(D)$, wie man leicht nachprüft. Durch eine Zusatzbedingung erhalten wir eine Normalform mit der gewünschten Eigenschaft.

$F \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}$ heißt eine Normalform, wenn es Normalformen $V' \in \mathfrak{F}_V$, $D' \in \mathfrak{F}_D$ und $U' \in \mathfrak{F}_U$ gibt mit $F = V' \circ D' \circ U'$, so daß V' keine „Fäden" von $D' \circ U'$ verdrillt, die von dem gleichen Eingang von $D' \circ U'$ herkommen.

Hilfssatz 14. *Sind $F', F^+ \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ Normalformen und ist $F^+ \neq F'$, dann gilt für jeden normalen Funktor $\varphi(F^+) \neq \varphi(F')$.*

Beweis. Seien F' und F^+ Normalformen, dann gibt es Normalformen U', D', V' und U^+, D^+, V^+ mit $F' = V' \circ D' \circ U'$ und $F^+ = V^+ \circ D^+ \circ U^+$. Aus 4. folgt $\varphi(F') \neq \varphi(F^+)$ für jeden normalen Funktor φ, wenn $U' \neq U^+$ ist. Wir können also annehmen $U' = U^+$. Ist $Q(U') = n$ und $Z(U') = m$, dann durchläuft $\varphi(U')\,(s)$ ganz S^m, wenn s die Menge S^n durchläuft; also ist $\varphi(F') = \varphi(F^+)$ genau dann, wenn $\varphi(V' \circ D') = \varphi(V^+ \circ D^+)$ gilt. Nach 5. ist aber $\varphi\,(V' \circ D') \neq \varphi\,(V^+ \circ D^+)$ für jeden normalen Funktor, wenn $D' \neq D^+$. Wir können also $D' = D^+$ annehmen und haben noch zu überlegen, wann $\varphi\,(V' \circ D') = \varphi\,(V^+ \circ D')$ ist, wenn $V' \circ D'$ und $V^+ \circ D'$ Normalformen sind.

Ist $V' \neq V^+$, dann gibt es einen ersten Ausgang B_l bzw. B_l' in V' bzw. V^+, dessen Faden in V' und V^+ von verschiedenen Eingängen kommt, sagen wir in V' vom i-ten und in V^+ vom k-ten Eingang. D' ist nach Definition ein direktes Produkt von Einheiten und Diagonalisierungen vom Typ D_1^j.

Liegt der i-te Eingang von V' an einem anderen direkten Faktor von D' als der k-te Eingang, dann ist nach früherem $\varphi\,(V' \circ D') \neq \varphi\,(V^+ \circ D')$ für alle normalen Funktoren φ. Es bleibt der Fall zu untersuchen, daß der i-te und der k-te Ausgang von D' Ausgänge eines direkten Faktors D_1^j sind. Wir können $i < k$ annehmen. In V' sei A_i der Eingang des Fadens, der in B_l endet. In

V^+ muß dieser Faden in einem B_m' mit $m > l$ enden, da nach Annahme V und V^+ in den Fäden, die in den q-ten Ausgängen ($q < l$) enden, übereinstimmen. Wir haben also in V^+ die Situation, wie sie durch Abb. 18 veranschaulicht wird. Wir wenden nun den Jordanschen Kurvensatz auf einen Repräsentanten von V^+ an. Der vom i-ten Eingang zum m-ten Ausgang laufende Faden w zerlegt das Innere des Rahmens in zwei getrennte Gebiete. Der vom k-ten Eingang zum l-ten Ausgang führende Faden w' verbindet Punkte P und P' im inneren des Rahmens, die durch w getrennt werden. Also schneidet w' den Weg w, da w', abgesehen von den Endpunkten, im Inneren des Rahmens verläuft. Der Schnittpunkt von w und w' entspricht aber gerade einem V in V^+. Also V^+ verdrillt Fäden, die von dem gleichen Eingang von $V^+ \circ D'$ herkommen, was nach der Definition der Normalformen ausgeschlossen ist. Also sind zwei Normalformen entweder gleich, oder sie werden durch jeden normalen Funktor auf verschiedene Funktionen abgebildet.

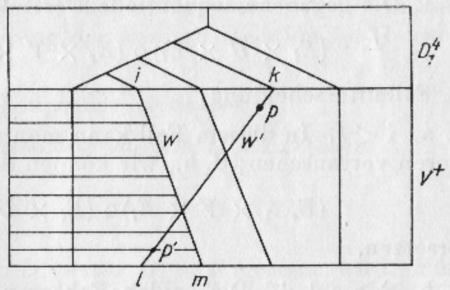

Abb. 18

3.3. Ein in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ für Projektion und Diagonalisierung vollständiges Relationensystem

Wir geben nun eine Erweiterung des Relationensystemes $\mathfrak{R}_0$ an, mit dem wir jedes Element von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ in eine Normalform überführen können. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}' = \{ & U_1^2 \circ D \equiv E, \quad U_1^2 \circ V \equiv U_2^2, \quad V \circ V \equiv E_2, \quad V \circ D \equiv D\,, \\
& (V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E) \equiv (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V)\,, \\
& (E \times D) \circ V \equiv (V \times E) \circ (E \times V) \circ (D \times E)\,, \\
& (D \times E) \circ D \equiv (E \times D) \circ D \}\,.
\end{aligned}$$

Die beiden Relationen von $\mathfrak{R}_0$, die nicht in $\mathfrak{R}'$ vorkommen, lassen sich aus den beiden vorkommenden Relationen und $V \circ V \equiv E_2$ und $V \circ D \equiv D$ ableiten. Man erkennt leicht

Hilfssatz 15. *Jeder normale Funktor φ: $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ ist mit $\mathfrak{R}'$ verträglich. Ist also $F \equiv G(\mathfrak{R}')$, dann ist für jeden normalen Funktor $\varphi(F) = \varphi(G)$.*

$\mathfrak{R}'$ ist aber auch eine echte Erweiterung von $\mathfrak{R}_0$, da, wie leicht zu sehen ist, $V \circ V \equiv E_2$ nicht aus $\mathfrak{R}_0$ abgeleitet werden kann.

Wir zeigen zunächst den

Hilfssatz 16. *Zu $F \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ existieren $U' \in \mathfrak{F}_U$, $V' \in \mathfrak{F}_V$ und $D' \in \mathfrak{F}_D$ mit $F \equiv G(\mathfrak{R}')$, worin $G = V' \circ D' \circ U'$ ist.*

Beweis. Wir denken uns F in sequentieller Darstellung gegeben. Wir zeigen, daß wir durch Anwendung von $\mathfrak{R}'$ die gegebene Darstellung so abändern können, daß schließlich die von dem Satz behauptete Darstellung erzielt wird.

1. Die gegebene sequentielle Darstellung von F enthält das Produkt

$$(E_i \times U \times E_l) \circ (E_s \times V \times E_t)\,.$$

Fallunterscheidung:

a. $i < s$. In diesem Fall kann man schon in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ die Reihenfolge der Faktoren vertauschen; d. h., wir können das oben stehende Produkt durch

$$(E_{s-1} \times V \times E_t) \circ (E_i \times U \times E_l)$$

ersetzen.

b. $i > s + 1$. Die beiden Faktoren können in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ durch

$$(E_s \times V \times E_{t-1}) \circ (E_i \times U \times E_l)$$

ersetzt werden.

c. $i = s$. Durch Abspalten der gemeinsamen Einheiten erhalten wir aus dem gegebenen Produkt $(U \times E) \circ V$, was wir nach $\mathfrak{R}'$ durch $(E \times U)$ ersetzen dürfen.

d. $i = s + 1$. Durch Abspalten der gemeinsamen E-Faktoren erhalten wir $(E \times U) \circ V$, was nach $\mathfrak{R}'$ durch $U \times E$ ersetzt werden darf.

Damit haben wir gezeigt, daß ein sequentieller Faktor, der ein U enthält, stets vor einen solchen Faktor mit einem V gezogen werden kann, bzw., daß der V-Faktor beseitigt werden kann durch Anwendung von $\mathfrak{R}'$.

2. Die sequentielle Darstellung enthalte

$$(E_i \times U \times E_l) \circ (E_s \times D \times E_t)\,.$$

Fallunterscheidung:

a. $i < s$ oder $i > s + 1$. Analog wie unter 1a zeigt man, daß sich die Reihenfolge der Faktoren vertauschen läßt.

b. $i = s$. Durch Abspalten der gemeinsamen Einheiten erhält man $(U \times E) \circ$ $\circ\, D$, was sich nach $\mathfrak{R}'$ durch E ersetzen läßt.

c. $i = s + 1$. Durch Abspalten der gemeinsamen Einheiten ergibt sich $(E \times U) \circ D$, was nach $\mathfrak{R}'$ durch E ersetzt werden darf.

3. Die betrachtete sequentielle Darstellung enthalte

$$(E_i \times D \times E_l) \circ (E^s \times V \times E_t)\,.$$

Fallunterscheidung:

a. $i < s$ oder $i > s + 1$. Analog 1a.

b. $i = s$. Dieser Fall läßt sich mittels der Relation

$$(D \times E) \circ V \equiv (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times D)$$

erledigen, die sich aus der in $\mathfrak{R}'$ vorkommenden Relation

$$(E \times D) \circ V \equiv (V \times E) \circ (E \times V) \circ (D \times E)$$

und $V \circ V \equiv E_2$ ableiten läßt.

c. $i = s + 1$. In diesem Fall läßt sich die Reihenfolge von D und V in der sequentiellen Darstellung durch Anwendung der zweiten Relation in 3b vertauschen.

Aus 1., 2., 3. folgt nun leicht die Behauptung des Satzes

Hilfssatz 17. *Zu $D' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ existiert eine Normalform $D^+ \equiv D'(\mathfrak{R}')$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$(D_1^k \times E_l) \circ D_1^l = D_1^{k+l}\,.$$

Nach Definition ist $D_1^l = (D_1^{l-1} \times E) \circ D$, wenn $D_1^0 = E$ gesetzt wird. Für $l = 1$ gilt die Behauptung auf Grund der Definition. Sei nun $l > 1$. Dann ist

$$(D_1^k \times E_l) \circ D_1^l = (D_1^k \times E_{l-1} \times E) \circ (D_1^{l-1} \times E) \circ D =$$
$$= ((D_1^k \times E_{l-1}) \circ D_1^{l-1} \times E) \circ D = (D_1^{k+l-1} \times E) \circ D = D_1^{k+l}\,,$$

wenn die Behauptung für $l - 1$ als Induktionsannahme vorausgesetzt wird.

Nun zum Beweis des Hilfssatzes: Man erkennt, daß sich jedes Element D' von $\mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ in ein direktes Produkt von der Form

$$D' = (E_{i_1} \times F_1 \times E_{i_2} \times F_2 \times \ldots \times F_{i_j} \times E_{i_{j+1}})$$

aufspalten läßt, worin F_i vom Typ $F_i' \circ D$ ist mit $F_i' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$. (Das folgt daraus, daß $Q(D) = 1$ und D einzige Erzeugende von $\mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ ist.)

Sei für jedes F_i eine sequentielle Darstellung gegeben und $l(F_i)$ die Anzahl der Faktoren der Darstellung; $l(D') = \max l(F_i)$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach l. Für $l = 1$ ist D' eine Normalform, und damit ist die Induktion verankert.

Sei die Behauptung für $t - 1 \geqq 1$ bewiesen. Wie schon gezeigt, ist

$$F_i = F_i' \circ D$$

mit $F_i' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$. Es ist $Q(F_i') = 2$. Also läßt sich unsere sequentielle Darstellung von F_i auch schreiben:

$$F_i = (F_{i1} \times F_{i2}) \circ D; \quad F_{i1}, F_{i2} \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A}); \quad Q(F_{i1}) = Q(F_{i2}) = 1\,.$$

Nun ist $l(F_{i1}) < l(D')$ und $l(F_{i2}) < l(D')$. Also gibt es nach der Induktionsannahme k_{i1} und k_{i2} mit

$$F_{i1} \equiv D^{k_{i1}}(\mathfrak{R}'); \quad F_{i2} \equiv D_1^{k_{i2}}(\mathfrak{R}')\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} F_i &\equiv (D_1^{k_{i1}} \times D_1^{k_{i2}}) \circ D(\mathfrak{R}') \\ &= (D_1^{k_{i1}} \times E_{k_{i2}+1}) \circ (E \times D_1^{k_{i2}}) \circ D \\ &= (D_1^{k_{i1}} \times E_{k_{i2}+1}) \circ (E \times D_1^{k_{i2}-1} \times E) \circ (E \times D) \circ D \\ &\equiv (D_1^{k_{i1}} \times E_{k_{i2}+1}) \circ (E \times D_1^{k_{i2}-1} \times E) \circ (D \times E) \circ D \\ &= (D_1^{k_{i1}} \times E_{k_{i2}+1}) \circ ((E \times D_1^{k_{i2}-1}) \circ D \times E) \circ D\,. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme ist

$$(E \times D_1^{k_{i2}-1}) \circ D = D^{k_{i1}}\,.$$

Nun folgt aus dem zu Beginn bewiesenen weiter

$$F_i = (D_1^{k_{i1}+k_{i2}} \times E) \circ D = D^{k_{i1}+k_{i2}+1}\,,$$

q. e. d.

Hilfssatz 18. *Sei $F \in \mathfrak{F}_{V,D}(\mathfrak{A})$, dann gibt es eine Normalform $F' = V' \circ D'$ mit $V' \in \mathfrak{F}_V(\mathfrak{A})$ und $D' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ mit $F \equiv F'(\mathfrak{R}')$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$(E_l \times V \times E_j) \circ D_1^k \equiv D_1^k(\mathfrak{R}') \quad \text{für} \quad l + 2 + j = k + 1\,. \qquad (*)$$

Es ist nach der im Beweis zu Hilfssatz 18 gezeigten Identität:

$$(E_l \times V \times E_j) \circ D_1^k = (E_l \times V \times E_j) \circ (D_1^{l+1} \times E_j) \circ D_1^j = \\ = ((E_l \times V) \circ D_1^{l+1} \times E_j) \circ D_1^j\,.$$

Nun ist auf Grund der gleichen Identität:

$$(E_l \times V) \circ D_1^{l+1} = (E_l \times V) \circ (D_1^{l-1} \times E_2) \circ D_1^2 = \\ = (D_1^{l-1} \times V) \circ D_1^2 = (D_1^{l-1} \times V) \circ (D \times E) \circ D\,,$$

und wegen $(E \times D) \circ D \equiv (D \times E) \circ D(\mathfrak{R}')$ gilt weiter:

$$\equiv (D_1^{l-1} \times V) \circ (E \times D) \circ D = (D_1^{l-1} \times V \circ D) \circ D \equiv \\ \equiv (D_1^{l-1} \times D) \circ D = (D_1^{l-1} \times E) \circ (E \times D) \circ D \equiv D_1^{l+1}\,.$$

Setzen wir das Ergebnis oben ein, so erhalten wir (*).

Aus den Hilfssätzen 16 und 17 folgt, daß es eine Normalform $D' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ gibt und ein $V^+ \in \mathfrak{F}_V(\mathfrak{A})$ mit $F \equiv V^+ \circ D'(\mathfrak{R}')$.

Wir haben zu zeigen, daß sich mittels der Relationen $\mathfrak{R}'$ erstens V^+ auf eine Normalform bringen läßt und zweitens, daß diese so gewählt werden kann, daß keine „Fäden" des zu $V^+ \circ D'$ gehörigen Netzes überkreuzt werden, die beide von demselben Eingang $V^+ \circ D'$ kommen: d. h., Fäden, die von einem direkten Faktor D_1^k von D' herstammen, sollen nicht verdrillt werden. Wir zeigen zuerst, daß wir in V^+ mittels $\mathfrak{R}'$ alle Faktoren V entfernen können, deren Eingangsfäden an dem gleichen Faktor D_1^k hängen.

Folgt ein solches V unmittelbar auf ein D_1^k, dann können wir unser Ziel durch Anwendung von (*) erreichen.

Folgt ein solches V nicht unmittelbar auf D_1^k, dann haben wir zwei Fälle zu untersuchen: die beiden Eingangsfäden von V rühren von benachbarten Ausgängen von D_1^k her, oder dies ist nicht der Fall.

Im ersten Fall können wir mittels $(V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E) \equiv (E \times V) \circ \circ (V \times E) \circ (E \times V)$ das betrachtete V „unter den anderen Kreuzungen hindurch schieben", womit wir auf den schon erledigten Fall zurückkommen.

Im zweiten Fall schließen wir mittels des Jordanschen Kurvensatzes auf vorhergehende Kreuzungen von Linien, die von D_1^k herrühren. (Siehe Abb. 19; die herausgegriffene Überkreuzung ist durch * markiert.) Nun gibt es unter diesen Überkreuzungen eine, die an D_1^k am „nächsten" liegt. Diese Eingangsfäden müssen aber von benachbarten Ausgängen von D_1^k herrühren. Also

kann ich nach vorigem dieses V beseitigen. Man erkennt, daß das Verfahren dann abbricht, wenn kein V mehr existiert, das zwei Fäden aus dem gleichen D_1^k aufnimmt.

Damit haben wir gezeigt, daß es zu F eine Normalform D' gibt und ein V'' mit $F \equiv V'' \circ D'(\mathfrak{R}')$, wobei V'' keine Fäden von D' permutiert, die an dem gleichen Eingang von D' hängen. Wir haben noch zu zeigen, daß man V'' in eine Normalform V' bringen kann, ohne daß die eben beschriebene Eigenschaft von V'' verloren geht. Letzteres ergibt sich daraus, daß wir zur Herstellung der Normalform von den Relationen aus $\mathfrak{R}'$ nur $V^2 \equiv E$ und $(V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E) \equiv \equiv (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V)$ verwenden, die die obige Eigenschaft nicht verändern. Die erste der beiden Relationen besagt, daß wir geradzahlige Verdrillungen von zwei Fäden beseitigen und ungeradzahlige durch eine einzige ersetzen dürfen. Die zweite Relation erlaubt uns, Fäden über Kreuzungspunkte hinwegzuschieben.

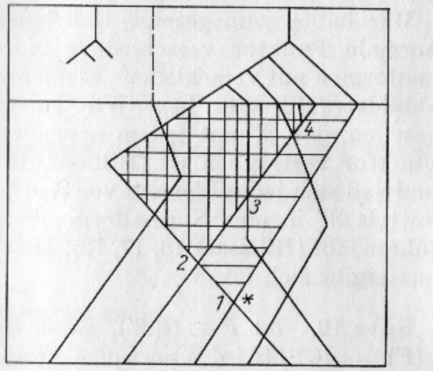

Abb. 19

Konstruktion der Normalform. Wir bezeichnen den „Faden" von V'', der in dem ersten Endpunkt von V'' endet, mit w.

Ist $Q(V'') = 1$, dann ist $V'' = E$ und V'' also Normalform. Wir machen vollständige Induktion nach $n = Q(V'')$. Zunächst zeigen wir, daß sich V'' durch die beiden genannten Relationen auf die Form

$$(E \times V^+) \circ (V_{k,1} \times E_{n-k-1})$$

bringen läßt. Da $Q(V^+) = n - 1$ ist, können wir dann auf V^+ die Induktionsannahme anwenden und erhalten die Behauptung.

Sei H eine sequentielle Darstellung von V''. Wir ersetzen jeden Faktor $(E_i \times V \times E_{n-i-2})$ von H, dessen l-ter Eingang auf dem Faden w liegt, durch

$$\begin{aligned}
&(V_{1,l-1} \times E_{n-l}) \circ (E_i \times V \times E_{n-i-2}) \circ (V_{l-1,1} \times E_{n-l}) && \text{für } l \leqq i\,,\\
&(V_{1,l} \times E_{n-l-1}) \circ (V_{l-1,1} \times E_{n-l}) && \text{für } l = i+1\,,\\
&(V_{1,l-2} \times E_{n-l+1}) \circ (V_{l-1,1} \times E_{n-l}) && \text{für } l = i+2\,,\\
&(V_{1,l-1} \times E_{n-l}) \circ (E_{i+1} \times V \times E_{n-i-3}) \circ (V_{l-1,1} \times E_{n-l}) && \text{für } l \geqq i+2
\end{aligned}$$

(siehe Abb. 20).

In jedem der vier Fälle wird $E_i \times V \times E_{n-i-2}$ durch Ausdrücke ersetzt, die zu dem Faktor kongruent modulo den beiden Relationen sind. In den drei ersten Fällen genügt schon $V^2 \equiv E_2$ allein, im vierten Fall braucht man auch $(V \times E) \equiv (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V)$, was aus beiden Relationen folgt. Man erhält so eine zu V'' modulo $\mathfrak{R}'$ kongruente Darstellung, worin sich benachbarte „Einschiebungen" mittels $V^2 \equiv E_2$ gerade wegkürzen lassen, da w den vorhergehenden Faktor im l-ten Ausgang verläßt, wenn er den folgenden im l-ten Eingang betritt.

Es bleibt damit nur der oberste Faktor der Ersetzung des obersten Faktors von H und der unterste Faktor der Ersetzung des untersten Faktors von H stehen. Auf Grund der Voraussetzung über den Faden w ergibt sich aber, daß dieser Faktor eine Einheit ist, so daß V'' die gewünschte Form angenommen hat.

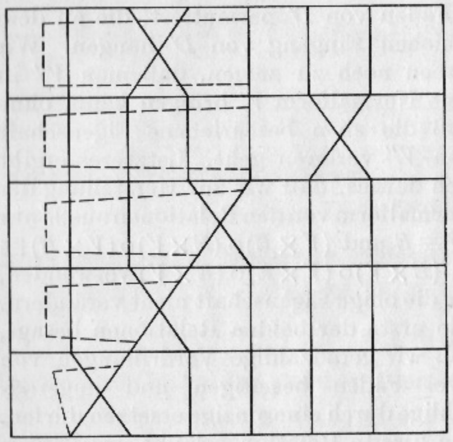

Abb. 20

Wir haben nun gezeigt, daß jeder normale Funktor verschiedene Normalformen auf verschiedene Elemente abbildet (Hilfssatz 14). Wir haben gesehen, daß $\mathfrak{R}'$ mit jedem normalen Funktor verträglich ist (Hilfssatz 15) und daß sich jedes Element von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathfrak{R}'$ in eine Normalform überführen läßt (Hilfssatz 16, 17, 18). Hieraus ergibt sich

Satz 12. *Ist $F \equiv G(\mathfrak{R}')$, dann ist $\varphi(F) = \varphi(G)$ für jeden normalen Funktor φ. Ist $F \not\equiv G(\mathfrak{R}')$, dann ist $\varphi(F) \neq \varphi(G)$ für jeden normalen Funktor φ.*

Aus dem Beweis zu Hilfssatz 18 ergibt sich leicht ein

Korollar zu Hilfssatz 18. Sei $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{V,D}$, $Q(F_1) = Q(F_2)$ und $Z(F_1) = Z(F_2)$. Wird der i-te Eingang von F_1 genau dann mit dem j-ten Ausgang durch einen „Faden" von F_1 verbunden, wenn dies für F_2 gilt, dann ist $F_1 \equiv F_2(\mathfrak{R}')$.

Bemerkung. In diesem Zusammenhang ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{F}(V)/\mathfrak{R}^+$ mit

$$\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{F}(V) \cap \mathfrak{R}' = \{V \circ V \equiv E_2,\ (V \times E)(E \times V)(V \times E) \equiv \equiv (E \times V)(V \times E)(E \times V)\}$$

die Kategorie der Permutationen endlicher Mengen liefert. $\mathfrak{F}(V, D)/\mathfrak{R}^{++}$ mit $\mathfrak{R}^{++} = \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{F}(V, D)$ steht in engem Zusammenhang mit der Kategorie $\mathfrak{C}^+$ der Abbildungen der Abschnitte der natürlichen Zahlen in sich. Vertauscht man in der Definition von D die Bedeutung von $Q(D)$ und $Z(D)$ und ändert man die Relationen von $\mathfrak{R}^{++}$ durch Vertauschung von Faktoren entsprechend ab, dann wird $\mathfrak{F}(V, D)/\mathfrak{R}^{++}$ isomorph zu $\mathfrak{C}^+$.

3.4. Das vollständige Relationensystem für die freie Kategorie mit direktem Produkt

Wir nehmen zu den Relationen $\mathfrak{R}'$ weitere Relationen $\mathfrak{R}''$ hinzu und beweisen für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''$ den in der Einleitung angekündigten Satz.

Für $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ machen wir allerdings die folgende Einschränkung:

Es sei $Z(F) = 1$ für $F \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$.

Definition.

$$\mathfrak{R}'' = \{U \circ F \equiv U^n,\quad D \circ F \equiv (F \times F) \circ D_n^2,\quad V \circ (E \times F) \equiv \equiv (F \times E) \circ V_{1,n} \mid F \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}',\quad n = Q(F)\}.$$

Dabei haben wir

$$U^0 = E_0,\quad D_0^2 = E_0,\quad V_{1,0} = E_1$$

gesetzt.

Man erkennt ohne weiteres:

Hilfssatz 19. *Ist $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $F \equiv G(\mathfrak{R}'')$, dann gilt für jeden normalen Funktor φ die Gleichung $\varphi(F) = \varphi(G)$.*

Aus $\mathfrak{R}''$ folgt

$$V \circ (V \circ (E \times F)) \equiv V \circ ((F \times E) \circ V_{1,n})\ (\mathfrak{R}'').$$

Benutzen wir $V \circ V \equiv E_2(\mathfrak{R}')$, dann erhalten wir

$$E \times E \equiv (V \circ (F \times E)) \circ V_{1,n}\ (\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}'')$$

und weiter

$$(E \times F) \circ V_{n,1} \equiv V \circ (F \times E) \circ V_{1,n} \circ V_{n,1} \equiv V \circ (F \times E)\ (\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}'').$$

Also gilt auch

$$V \circ (F \times E) \equiv (E \times F) \circ V_{n,1}\ (\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''). \qquad (+)$$

Da man direkte Produkte stets in die Form

$$F \times G = (F \times E) \circ (E_n \times G)$$

mit $Q(F) = n$ bringen kann, sind in $\mathfrak{R}''$ zusammen mit $(+)$ alle Kombinationsmöglichkeiten enthalten, in denen ein Element aus $\mathfrak{A}'$ links von einem Element aus $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ steht. Man kann also $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''$ so umformen, daß jedes Element aus $\mathfrak{A}'$ rechts von jedem Element aus $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ steht. Es gilt also

Hilfssatz 20. *Zu jedem $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ existiert ein $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'}$ und ein $H \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}$ mit $F \equiv G \circ H\ (\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}'')$.*

Aus Interesse an rekursiven Funktionen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, beweisen wir den angekündigten Satz in einer etwas schärferen Form. Wir nehmen außer $\{U, V, D\}$ noch weitere ausgezeichnete Elemente C und T in $\mathfrak{A}$ auf mit $Q(T) = Z(T) = Z(C) = 1$ und $Q(C) = 0$ und definieren wie folgt: Ein normaler Funktor φ: $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ heißt *T-normal*, wenn $\varphi(C)$, $\varphi(T \circ C)$, $\varphi({}^2T \circ C), \ldots$ ganz S durchläuft. Wir setzen

$$S^* = \{{}^nT \circ C \mid n = 0, 1, \ldots\}$$

mit

$${}^nT = T \circ T \circ \cdots \circ T\ (n\text{-mal}).$$

Hilfssatz 21. *Sei $C, T \in \mathfrak{A}$ und $L, M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$, $Q(L) = Q(M) = n$ und $Z(L) = Z(M) = m$.*

(1) *Ist $C' \in S^{*n}$, dann existiert ein $C'' \in S^{*m}$ mit $C'' \equiv L \circ C'(\mathfrak{R})$.*

(2) *Wenn für jedes $C' \in S^{*n}$ $L \circ C' \equiv M \circ C'(\mathfrak{R})$ gilt, dann folgt $L = M$.*

Beweis. Der Beweis für (1) ergibt sich wie der Beweis zu Hilfssatz 20 daraus, daß sich die Elemente von $\mathfrak{A}'$ mittels $\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''$ sämtlich nach rechts bringen lassen; da $Q(C) = 0$ ist, heißt das aber, daß sie vollständig eliminiert werden.

Zu (2): Aus Hilfssatz 20 folgt für jeden normalen Funktor φ, daß $\varphi(L) \circ \varphi(C') = \varphi(M) \circ \varphi(C')$ ist. Wählen wir φ T-normal, dann gilt $\varphi(L) = \varphi(M)$, woraus nach Satz 12 die Behauptung folgt.

Hilfssatz 22. *Sei $C, T \in \mathfrak{A}$ und $Q(F) \neq 0$ für $F \in \mathfrak{A}$, $F \neq C$. Ist $H_1, H_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}''}$ und gilt für jeden T-normalen Funktor φ $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$, dann ist $H_1 = H_2$.* $(\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}' \cup \{C\}$, $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'' = \{A_1, \ldots, A_{k-1}, T\})$.

Beweis. Zum Beweis konstruieren wir zu H_1 und H_2 einen T-normalen Funktor φ mit $\varphi(H_1) \neq \varphi(H_2)$ für $H_1 \neq H_2$.

Sei $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_m\}$ freies Erzeugendensystem einer Halbgruppe Ω und $S = \{w \in \Omega \mid w \neq 1\}$. Wir setzen $m = 2n + k + 1$, wo n vorerst eine beliebige natürliche Zahl sei.

Ist $Q(A_i) = j_i$, dann ordnen wir A_i eine Abbildung f_i: $S^{j_i} \to S$ zu, indem wir setzen:

$$f_i(w_1, \ldots, w_{j_i}) = \sigma_{n+i}\, \sigma_{n+k}\, w_1 \ldots w_{j_i}\, \sigma_{n+k+1},$$

worin $w_1, \ldots, w_{j_i} \in S$ und die rechte Seite ein Produkt in Ω ist. Weiter definieren wir eine Abbildung t: $S \to S$ durch

$$t(\sigma_i) = \sigma_{i+1} \qquad \text{für } 0 \leqq i < 2n + k + 1,\ t(\sigma_{2n+k+1}) = \sigma_0\, \sigma_0;$$

$$t(w) = \begin{cases} w'\, t(\sigma_i) & \text{für } w = w'\sigma_i \text{ und } i < 2n + k + 1, \\ t(w')\, \sigma_0 & \text{für } w = w'\, \sigma_{2n+k+1} \text{ und } w' \neq 1. \end{cases}$$

Die Abbildung t zählt ganz S auf.

Wir definieren nun

$$\varphi(A_i) = f_i \text{ für } i = 1, \ldots, k-1;$$
$$\varphi(T) = t;$$
$$\varphi(C) = \sigma_0;$$
$$\varphi(U) = \text{Abbildung } u\colon S \to S^0;$$
$$\varphi(V) = \text{Vertauschung der Faktoren in } S^2;$$
$$\varphi(D) = \text{Diagonalisierung } S \to S^2.$$

Wie wir früher sahen, läßt sich φ eindeutig zu einem Funktor $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ fortsetzen; φ ist mit $\mathfrak{R}$ verträglich, und es ist $\varphi(S^*) = S$ auf Grund der Definition von t, so daß also φ T-normal ist.

Wir wollen zeigen, daß

$$\varphi(H_1) = \varphi(H_2) \Longleftrightarrow H_1 = H_2,$$

wenn nur n geeignet gewählt wird (in Abhängigkeit von H_1 und H_2).

Sei

$$\mathfrak{B}_n = \{w \in \Omega \mid \text{zu } w \text{ existiert ein } H \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}''}(\mathfrak{A}) \text{ mit } \varphi(H)\varphi \circ (C^l) = w$$

und $l = Q(H)$; es gibt keine Zerlegung von H der Form $F_1 \circ (E_s \times {}^pT \times E_r) \circ \circ F_2$ mit $p > n\}$.

Man erkennt:

(1) $\sigma_i \in \mathfrak{B}_n$ für $i = 0, \ldots, n$;

(2) $w_1, \ldots, w_{j_i} \in \mathfrak{B}_n$, $j_i = Q(A_i) \Rightarrow$
$$\Rightarrow \sigma_{n+i}\, \sigma_{n+k}\, w_1 \ldots w_{j_i}\, \sigma_{n+k+1} \in \mathfrak{B}_n \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k-1;$$

(3) $w_n \in \mathfrak{B}_n$, $w = w' \cdot \sigma_{n+k+i} \Rightarrow w' \cdot \sigma_{n+k+i+1} \in \mathfrak{B}_n$ für $i = 1, \ldots, n$.

Man sieht weiter, daß $\mathfrak{B}_n$ durch (1), (2) und (3) sogar vollständig charakterisiert wird.

Ist $w = \varphi(H \circ C^l)$ und gibt es keine Zerlegung von H der Form $F_1 \circ (E_s \times {}^pT \times E_r) \circ F_2$ mit $p > n$, dann ist H durch w eindeutig bestimmt.

Dies wird plausibel, wenn man sich σ_{n+k} überall durch die Klammer „(“ und σ_{n+k+i} durch die Klammer „)“ ersetzt denkt.

Beispiel. $H = A_i \circ (A_j \times A_l) \circ (T \circ T \times T \times E)$ mit $Q(A_i) = Q(A_j) = 2$, $Q(A_l) = 1$.

Man findet:

$$(H \circ C^3) = \sigma_{n+i}\,\sigma_{n+k}\,\sigma_{n+j}\,\sigma_{n+k}\,\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_{n+k+1}\,\sigma_{n+l}\,\sigma_{n+k}\sigma_0\,\sigma_{n+k+1}\,\sigma_{n+k+1}.$$

Mit Klammern geschrieben ergibt dies:

$$\sigma_{n+i}\,(\sigma_{n+j}\,(\sigma_2\,\sigma_1)\,\sigma_{n+l}(\sigma_0)).$$

Hätten wir anstelle von H das Element $T \circ H$ betrachtet, dann hätten wir anstelle des letzten Faktors σ_{n+k+1} den Faktor σ_{n+k+2} erhalten. Um eindeutig auf H zurückschließen zu können, haben wir gerade so viele Klammern vom Typ „)“ eingeführt, wie in H maximal Elemente T *hintereinander* vorkommen können.

Zum Beweis definieren wir die Funktion a: $S \to \mathsf{N} \cup \{0\}$ durch

$$a(w) = (\text{Häufigkeit von } \sigma_{n+k} \text{ in } w) - \sum_{i=1}^{n+1} (\text{Häufigkeit von } \sigma_{n+k+i} \text{ in } w).$$

Ist $w = v \cdot v'$ und $v \neq 1$, dann nennen wir v *Abschnitt* von w und schreiben $v < w$. Man erkennt über die Charakterisierung von $\mathfrak{B}_n$ durch (1), (2), (3):

$$a(v) > 0 \text{ für } v \neq w \text{ und } w \in \mathfrak{B}_n,$$
$$a(v) = 0 \text{ für } v = w \in \mathfrak{B}_n.$$

Folgerung. Sei $w_1, \ldots, w_j \in \mathfrak{B}_n$ und $w = w_1 \ldots w_j$; dann ist $a(v) = 0$ und $v < w$ äquivalent mit: $v = w_1$ oder $v = w_1 \cdot w_2$ oder $\ldots$ oder $v = w$.

Hieraus folgt weiter: Ist $w^+ \in \mathfrak{B}_n$ und ist $w^+ = \sigma_{n+i}\, \sigma_{n+k}\, w\, \sigma_{n+k+1}$, dann gibt es genau eine Zerlegung $w = w_1 \ldots w_j$, so daß $w_l \in \mathfrak{B}_n$ für $l = 1, \ldots, j$. Auf Grund der Struktur von $\mathfrak{B}_n$ folgt weiter $j = Q(A_i)$.

Wir definieren nun die Abbildung α: $\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})$, indem wir setzen:

(a) $\alpha(\sigma_0) = E$;

(b) $\alpha(\sigma_i) = ({}^iT)$ für $i = 1, \ldots, n$;

(c) $\alpha(w) = A_i \circ (\alpha(w_1) \times \cdots \times \alpha(w_j))$

für $w = \sigma_i\, \sigma_{n+k}\, w'\, \sigma_{n+k+1}$ und $w' = w_1 \ldots w_j$ $(w_1, \ldots, w_j \in \mathfrak{B}_n)$;

(d) $\alpha(w) = T \circ \alpha(w'\, \sigma_{n+k+i})$ für $w = w'\, \sigma_{n+k+i+1}$, $i > 0$.

Aus der oben gegebenen Charakterisierung von $\mathfrak{B}_n$ folgt, daß α auf ganz $\mathfrak{B}_n$ definiert ist; es könnte nur sein, daß die Definition unter (c) nicht eindeutig ist. Dies wäre der Fall, wenn es für w' mehrere Zerlegungen $w' = w_1 \ldots w_j$ gäbe, so daß $w_1, \ldots, w_j \in \mathfrak{B}_n$ ist. Dies ist aber ausgeschlossen, wie wir gezeigt haben.

α ist gerade so konstruiert, daß $\alpha\,(\varphi\,(H \circ C^l)) = H$ ist für $H \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}''}$, $l = Q(H)$, wenn die sequentiellen Darstellungen von H die Erzeugende T höchstens n-mal *hintereinander* enthalten. Ist nun für jedes normale φ die Relation $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$ erfüllt, und kommt T in H_1 und H_2 höchstens n-mal *hintereinander* vor, dann konstruieren wir für dieses n unser φ und α und erhalten

$$H_1 = \alpha\,(\varphi\,(H_1 \circ C^l) = \alpha\,(\varphi\,(H_2 \circ C^j)) = H_2\,,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Korollar zu Hilfssatz 22. Sei $H_1, H_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}''}$ und $Q(H_1) = l$, $Q(H_2) = j$ und $\varphi\,(H_1 \circ C^l) = \varphi\,(H_2 \circ C^j)$ für jeden T-normalen Funktor; dann ist $H_1 = H_2$.

Der Beweis hierfür ist im Beweis zu Hilfssatz 22 vollständig enthalten.

Hilfssatz 23. *Sei $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, $Q(A) > 0$ für $A \in \mathfrak{A}$ und $A \neq C$ und gelte für jeden T-normalen Funktor $\varphi(F) = \varphi(G)$; dann ist $F \equiv G(\mathfrak{R})$, wo $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''$ gesetzt ist.*

Beweis. Aus Hilfssatz 20 folgt, daß es $H_1, H_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})$ und $K_1, K_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})$ gibt, so daß gilt

$$F \equiv H_1 \circ K_1(\mathfrak{R}), \quad G \equiv H_2 \circ K_2(\mathfrak{R})\,.$$

Nach Hilfssatz 19 und Satz 12 ist $\varphi(F) = \varphi\,(H_1 \circ K_1)$ und $\varphi(G) = \varphi\,(H_2 \circ K_2)$, wo φ irgendein normaler Funktor ist. Also gilt $\varphi(H_1) \circ \varphi(K_1) = \varphi(H_2) \circ \varphi(K_2)$.

Es ist $Q(K_1) = Q(K_2)$. Sei $n = Q(K_1)$; dann bilden wir $H_i \circ K_i \circ C^n$ und haben

$$\varphi(H_1) \circ \varphi(K_1 \circ C^n) = \varphi(H_2) \circ \varphi(K_2 \circ C^n)\,.$$

Nach Hilfssatz 21 gibt es ein C^l bzw. ein C^j mit

$$C^l \equiv K_1 \circ C^n(\mathfrak{R}) \text{ bzw. } C^j \equiv K_2 \circ C^n(\mathfrak{R})\,.$$

Es gilt also für jedes normale φ

$$\varphi\,(H_1 \circ C^l) = \varphi\,(H_2 \circ C^j)\,.$$

Wir wenden das Korollar zu Hilfssatz 22 an und erhalten $H_1 = H_2$ und daraus $l = j$. Wir setzen $H = H_1 = H_2$.

Wir zeigen nun $K_1 \equiv K_2(\mathfrak{R})$. Sei

$$C^+ = (T \times {}^2T \times \cdots \times {}^nT) \circ C^n\,.$$

Aus Hilfssatz 21 folgt: Es existieren $C_1', \ldots, C_{j+1}', C_1^+, \ldots, C_{m+1}^+$, so daß gilt:

$$K_1 \circ C^+ = C_1' \times C^{m_1} \times C_2' \times \ldots \times C_{j+1}' = T_1 \circ C^p\,,$$
$$K_2 \circ C^+ = C_1^+ \times C^{n_1} \times C_2^+ \times \ldots \times C_{m+1}^+ = T_2 \circ C^q$$

mit $T_1, T_2 \in \mathfrak{F}_T$.

Für jeden normalen Funktor φ gilt $\varphi\,(H \circ K_1 \circ C^+) = \varphi\,(H \circ K_2 \circ C^+)$ oder $\varphi\,(H \circ T_1 \circ C^p) = \varphi\,(H \circ T_2 \circ C^q)$. Hieraus folgt nach dem Korollar zu Hilfssatz 22

$$H \circ T_1 = H \circ T_2$$

und nach Satz 7 (1) weiter $T_1 = T_2$.

Es ist

$$T_1 = (T_1' \times E^{m_1} \times T_2' \times \ldots \times T_{j+1}')\,,$$

worin $T_1' \times T_2' \times \ldots \times T_{j+1}'$ ein Produkt von Faktoren $T, {}^2T, \ldots, {}^nT$ ist, in dem Faktoren ${}^iT$ mehrfach vorkommen aber auch völlig fehlen können.

Sei $Z(T_1) = r$ und $J = \{i_1, \ldots, i_e\}$ die Menge der Nummern der Ausgänge von T_1 und damit auch von K_1 und K_2, an denen ein Faktor ${}^iT$ endet. Ist $i_k \in J$ und endet an dem Ausgang i_k von T_1 der Faktor ${}^lT$, dann ordnen wir i_k die Zahl $l = \alpha(i_k)$ zu. Wir erhalten so eine Abbildung $\alpha\colon\ J \to N$,

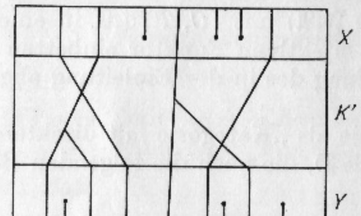

Abb. 21

$N = \{1, \ldots, n\}$, die angibt, welcher Ausgang mit welchem Eingang durch einen „Faden" in K_1 und K_2 verbunden ist. Wir können durch Anwendung unserer Relationen K_1 und K_2 auf die Form

$$K_1 \equiv Y_1 \circ K_1' \circ X_1(\mathfrak{R})\,,$$
$$K_2 \equiv Y_2 \circ K_2' \circ X_2(\mathfrak{R})$$

bringen, worin $X_1, X_2 \in \mathfrak{F}_U$, $K_1', K_2' \in \mathfrak{F}_{D,V}$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{F}_C$ ist (s. Abb. 21.) Wegen $T_1 = T_2$ folgt $j = m$ und $n_i = m_i$ für $i = 1, \ldots, j+1$, so daß gilt

$$Y_1 = E^{r_1} \times E^{m_1} \times \ldots \times E^{r_{j+1}} = Y_2$$

mit $r_i = Z(T_i')$.

Da in T_1 und T_2 genau die gleichen Faktoren ${}^iT$ vorkommen, ist auch $X_1 = X_2$.

Aus $X_1 = X_2$ und $Y_1 = Y_2$ und der Abbildung α läßt sich nun eine Abbildung α': $N_1 \to N_2$ mit $N_1 = \{1, \ldots, Z(K_1')\}$, $N_2 = \{1, \ldots, Q(K_1')\}$ gewinnen, die für K_1' und K_2' angibt, welcher Ausgang mit welchem Eingang verbunden ist. Aus dem Korollar zu Hilfssatz 18 folgt damit $K_1' = K_2'$. Also $K_1 \equiv K_2$, q. e. d.

Satz 13. *Ist $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}' \cup \{C, T\} \subset \mathfrak{A}$ und $Z(A) = 1$ für $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$, dann ist $\varphi(F) = \varphi(G)$ für jeden T-normalen Funktor genau dann, wenn $F \equiv G(\mathfrak{R})$.*

Beweis. Enthält $\mathfrak{A}$ außer C kein Element A mit $Q(A) = 0$, dann folgt die Behauptung des Satzes direkt aus Hilfssatz 23, 20 und 15.

Sei nun $\mathfrak{A}_0 = \{C_i \mid i = 1, \ldots\}$ die Menge der Elemente A mit $A \neq C$ und $Q(A) = 0$. Wir ordnen jedem Element $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ein Element $\psi_k(F) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ zu, indem wir in einer sequentiellen Darstellung von F jedes vorkommende C_i durch ${}^{k\cdot i}T \circ C$ ersetzen, worin keine natürliche Zahl größer als die Häufigkeit des Elementes T in den vorgegebenen Elementen F und G aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ist. Man erkennt, daß $\psi_k(F)$ unabhängig von der Auswahl der speziellen Darstellung von F ist. Weiter sieht man

$$F \equiv G(\mathfrak{R}) \Longleftrightarrow \psi_k(F) \equiv \psi_k(G)\ (\mathfrak{R})\,.$$

Sei nun $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $F \not\equiv G(\mathfrak{R})$ und $F' = \psi_k(F)$, $G' = \psi_k(G)$, dann ist $F', G' \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ und $F' \not\equiv G'(\mathfrak{R})$. Nach obiger Bemerkung können wir Satz 13 aber auf $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ schon anwenden. Also existiert ein T-normaler Funktor $\varphi\colon \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}_0} \to \mathfrak{C}$ mit $\varphi(F') \neq \varphi(G')$. Wir können φ auf ganz $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ fortsetzen, indem wir definieren: $\varphi(C_i) = \varphi({}^{k\cdot i}T \circ C)$. Man erkennt: φ ist wieder T-normal, und es ist $\varphi(H) = \varphi(\psi_k(H))$ für $H \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, also $\varphi(F) \neq \varphi(G)$, was zu zeigen war.

Der Satz gilt natürlich auch, wenn wir „T-normal" durch „normal" ersetzen. In dieser Formulierung können wir auch die Voraussetzung $\{C, T\} \subset \mathfrak{A}$ fallen lassen, da sich jede Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $\{C, T\} \not\subset \mathfrak{A}$ in eine Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ mit $\{C, T\} \in \mathfrak{A}^+$ durch einen bijektiven Funktor einbetten läßt. Also stellt Satz 13 wirklich eine Verschärfung des in der Einleitung abgekündigten Satzes dar.

Es ist üblich, nicht die X-Kategorie als „Kategorie mit direktem Produkt" zu bezeichnen, sondern eine Kategorie $\mathfrak{D}$, die noch die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) Jeder Einheit $e \in \mathfrak{D}$ ist ein Element $d_e \in \mathfrak{D}$ zugeordnet und jedem Paar von Einheiten $e_1, e_2 \in \mathfrak{D}$ ein Paar $p_1, p_2 \in \mathfrak{D}$ mit $Q(e \times e) = Z(d_e)$, $Q(d_e) = Q(e)$, $Q(p_1) = Q(p_2) = Z(e_1 \times e_2)$ und $Z(p_1) = Q(e_1)$, $Z(p_2) = Q(e_2)$.

(b) Ist $f, g \in \mathfrak{D}$ und $Q(f) = Q(g) = e$, $Z(f) = e_1$ und $Z(g) = e_2$, dann gibt es genau ein Element $h \in \mathfrak{D}$ mit

$$f = p_1 \circ h,\ \ g = p_2 \circ h\,,$$

wobei die Bezeichnungen von (a) gelten.

(c) Unter den Voraussetzungen von (a) und (a) gilt weiter

$$h = (f \times g) \circ d_e\,.$$

Eine X-Kategorie, die (a), (b) und (c) erfüllt, wird auch kurz als *D-Kategorie* bezeichnet.

Korollar 1 zu Satz 13. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ und $Z(A) = 1$ für $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ ist eine D-Kategorie.

Beweis. Sei $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, $Q(F) = Q(G) = m$, $Z(F) = n$ und $Z(G) = k$. Aus den Relationen $\mathfrak{R}$ folgt für $H = (F \times G) \circ D_m^1$, daß

$$\overline{U}_n^{k+n} \circ H \equiv F(\mathfrak{R}),\quad U_n^{*n+k} \circ H \equiv G(\mathfrak{R}) \qquad (+)$$

erfüllt ist.

Sei $\varphi\colon \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}_S$ ein normaler Funktor, $f = \varphi(F)$, $g = \varphi(G)$ und $h = \varphi(H)$. Nach Satz 11 sind $p_1 = \varphi(\overline{U}_n^{n+k})$ und $p_2 = \varphi(U_k^{*n+k})$ ein Paar zusammengehöriger Projektionen in der D-Kategorie $\mathfrak{C}_S$. Ist $H' \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ein weiteres Element, das $(+)$ erfüllt, und ist $h' = \varphi(H')$, dann gilt in $\mathfrak{C}_S$

$$f = p_1 \circ h,\ \ g = p_2 \circ h,\ \ f = p_1 \circ h',\ \ g = p_2 \circ h',$$

woraus nach (b) $h = h'$ folgt. Da dies für jeden normalen Funktor φ gilt, ergibt sich nach Satz 13 $H \equiv H'(\mathfrak{R})$. Also ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ mit D als Diagonalisierung und E, U als zu E, E_0 gehörigem Paar von Projektionen eine D-Kategorie.

Korollar 2 zu Satz 13. Sei $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, $Z(A) = 1$ für $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$, aber $\mathfrak{A}$ sonst beliebig. Dann gilt: $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ repräsentiert ein freies Erzeugendensystem der D-Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{B}$ ein Erzeugendensystem der D-Kategorie $\mathfrak{D}$ und $\varphi_1\colon (\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}') \to \mathfrak{B}$ eine Abbildung, die die Voraussetzung erfüllt, die jeder Funktor erfüllen muß, nämlich: Ist e Links-Einheit von $\varphi_1(A)$ und ist $Q(A') = n$, dann ist $Q(\varphi(A')) = Q(e^n)$ für $A' \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$.

Wir behaupten, daß sich dann φ_1 zu einem Funktor von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{D}$ fortsetzen läßt, der mit $\mathfrak{R}$ verträglich ist. Dazu genügt es nach früherem zu zeigen, daß sich φ_1 zunächst zu einer Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ fortsetzen läßt, so daß gilt:

$\varphi(U) = p_0$, wo p_0 die zu $e = e \times e^0$ gehörige Projektion auf die zweite Komponente ist.

$\varphi(D) = d_e$, wo d_e die zu e gehörige Diagonalisierung ist.

$\varphi(V) = v$ mit $Q(v) = Z(v) = Q(e^2)$ und $(e \times p_0) = (p_0 \times e) \circ v$ und $(p_0 \times e) = (e \times p_0) \circ v$.

Man erkennt, daß

$$v = (p_2 \times p_1) \circ d_{e \times e}$$

die gewünschte Eigenschaft hat, wenn $d_{e\times e}$ die zu $e \times e$ gehörige Diagonalisierung ist und p_i die zu $e \times e$ und e gehörige Projektion auf die i-Komponente.

Da p_1, p_2 und $d_{e\times e}$ in $\mathfrak{D}$ liegen, liegt auch v in $\mathfrak{D}$, so daß also $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{D}$ eine bijektive Abbildung ist, die sich zu einem Funktor $\varphi'\colon \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}$ fortsetzen läßt. φ' ist verträglich mit den Relationen aus $\mathfrak{R}$. Also gibt es einen Funktor $\varphi^+\colon \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R} \to \mathfrak{D}$, der die durch $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ repräsentierten Elemente auf $\mathfrak{B}$ abbildet. Da $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ eine D-Kategorie ist, folgt, daß φ eine Abbildung *auf* ist, womit das Korollar bewiesen ist.

4. Bemerkungen

Bemerkung 1. Zum Beweis von Satz 12 genügte es, sich auf Mengen S mit nur zwei Elementen zu beschränken. Im Beweis zu Satz 13 haben wir aber für S eine abzählbar unendliche Menge verwandt. Der Satz 13 wird falsch, wenn wir nur endliche Mengen mit einer bestimmten Anzahl von Elementen zulassen.

Bemerkung 2. Die Definition der allgemein-rekursiven Funktion ist im Rahmen der hier entwickelten Theorie sehr einfach [3]:

Sei $C, T \in \mathfrak{A}$, $S^+ = \{{}^nT \circ C \mid n = 0, 1, \ldots\}$ und $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, $Q(F) = m$, $Z(F) = n$ und $\mathfrak{R}$ ein Relationensystem zu $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Sei weiter $S = \mathsf{N} \cup \{0\}$ und $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}_S$ ein Funktor mit $f = \varphi(F)$. Wir sagen, daß f durch $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{R}$ und φ rekursiv definiert wird, wenn φ mit $\mathfrak{R}$ verträglich ist und es zu jedem $C_x^+ \in S^{+m}$ genau ein $C_y^+ \in S^{+n}$ gibt mit $F \circ C_x^+ \equiv C_y^+(\mathfrak{R})$. Eine Funktion $f \in \mathfrak{C}_S$ heißt allgemein-rekursiv, wenn es ein Alphabet $\mathfrak{A}$, ein Element $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, ein Relationensystem $\mathfrak{R}$ und einen Funktor $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{R}$ gibt, so daß F, $\mathfrak{R}$, φ die Funktion f rekursiv definieren.

Bemerkung 3. Man kann sich mit geringer Mühe von der in der Einleitung gemachten Einschränkung befreien, daß Ausgangssignale und Eingangssignale für jeden Baustein von der gleichen Art sind:

Seien $S_1, \ldots, S_k$ die verschiedenen Signalmengen, die für einen Eingang oder Ausgang der Bausteine $A \in \mathfrak{A}$ vorgeschrieben werden. Dann ordnen wir der Menge S_i die Erzeugende s_i $(i = 1, \ldots, k)$ einer freien Halbgruppe $\Omega(s_1, \ldots, s_k)$ zu.

Wir definieren $Q: \mathfrak{A} \to \Omega$, indem wir festsetzen: $Q(A) = s_{i_1} \ldots s_{i_n}$, wenn A n Eingänge hat und für den k-ten Eingang die Signalmenge S_{i_k} vorgeschrieben ist. Analog wird $Z: \mathfrak{A} \to \Omega$ definiert.

Nun erklären wir die Belegung f der Netze ähnlich wie früher: Eine Belegung $f: \mathfrak{M}_N \to \mathfrak{A}$ der inneren Punkte des Netzes N heißt erlaubt, wenn P und $f(P)$ die gleiche Anzahl von Eingängen bzw. Ausgängen haben und wenn für jede Strecke s mit P als Anfangspunkt und Q als Endpunkt gilt, daß dem s entsprechenden Eingang von $f(Q)$ und dem s entsprechenden Ausgang von $f(P)$ die gleiche Erzeugende von Ω zugeordnet ist.

Im Unterschied zu früherem führen wir zusätzlich eine Belegung der Randpunkte der Netze ein; dies geschieht durch die Abbildung

$$g: \{Q_1, \ldots, Q_n, Z_1, \ldots, Z_m\} \to \{s_1, \ldots, s_k\},$$

worin $Q_1, \ldots, Q_n$ die Anfangspunkte und $Z_1, \ldots, Z_m$ die Endpunkte des Netzes N mit der Belegung f sein mögen.

g heißt mit (N, f) *verträglich*, wenn folgendes gilt:

(1) Ist Q_i Anfangspunkt einer Strecke s des Netzes mit dem inneren Punkt P als Endpunkt und entspricht der Strecke s ein Eingang von $f(P)$, für den S_j die vorgeschriebene Signalmenge ist, dann muß gelten $g(Q_i) = s_j$ (entsprechend für z_i).

(2) Ist Q_i Anfangspunkt der Strecke s, deren Endpunkt der Ausgangspunkt Z_l des Netzes N ist, dann muß gelten: $g(Q_i) = g(Z_l)$.

Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}, Q, Z)$ der Tripel $[N, f, g]$, wo N ein Netz ist, f eine zulässige Belegung der inneren Punkte von N und g eine für (N, f) zulässige Belegung für die Randpunkte von N. Wir definieren in naheliegender Weise $F \circ G$ für F, G falls $Z(G) = Q(F)$ und erkennen: $Q(F \circ G) = Q(G)$, $Z(F \circ G) = Z(F)$. Wir definieren $F \times G$ für $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und erkennen: $Q(F \times G) = Q(F) \cdot Q(G)$, $Z(F \times G) = Z(F) \cdot Z(G)$, wobei rechts das Produkt in $\Omega\ (s_1, \ldots, s_k)$ gemeint ist. Man erkennt, daß man wieder eine X-Kategorie erhält, deren Einheiten die Elemente (E_k, g) sind.

Es mag zunächst vom technischen Standpunkt her als rein mathematischer Kniff erscheinen, verschiedene Einheiten mit der gleichen Anzahl von Eingängen einzuführen, nämlich nur um wieder eine Kategorie zu erhalten. Aber es kann auch physikalisch sinnvoll sein, diese Unterscheidung zu treffen, wenn man Leitungen mit verschiedenen Taktfrequenzen betreibt, so daß für diese unterschiedliche maximale Kapazitäten zugelassen werden.

Die hier betrachtete Kategorie ist von besonderem Interesse im Zusammenhang mit Fragen der Programmierung, wie sie in der Einleitung kurz angeschnitten werden; denn die Anschließbarkeit eines Programms an ein anderes ist nicht nur von der Anzahl der Ausgänge bzw. Eingänge der beiden Programme abhängig, sondern zumindest noch von der Art der über die Eingänge bzw. Ausgänge zu übernehmenden Parameter: ganze Zahlen, Gleitkommazahlen, Booleesche Variabeln usw.

Bemerkung 4. Man erhält die Kategorie $\mathfrak{N}_3$ der räumlichen Netze in folgender Weise:

Sei $\mathfrak{A} = \{V, V'\} \cup \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}' = \{A_m^n \mid m, n = 0, 1, \ldots\}$ mit $Q(V) = Q(V') = Z(V) = Z(V') = 2$ und $Q(A_m^n) = n$, $Z(A_m^n) = m$. Wir setzen

$$\begin{aligned} R_3 = \mathfrak{R}_{\mathfrak{z}} &\cup \{(A_m^n \times E) \circ V_{1,n} \equiv V_{1,m}(E \times A_m^n) \mid n, m = 0, 1, \ldots\} \cup \\ &\cup \{V_{m,1}(A_m^n \times E) \equiv (E \times A_m^n) \circ V_{n,1} \mid n, m = 0, 1, \ldots\} \cup \\ &\cup \{(E_k \times V \times E_j) \circ A_{k+j+2}^n \equiv A_{k+j+2}^n \mid n, k, j = 0, 1, \ldots\} \cup \\ &\cup \{A_m^{l+i+2} \circ (E_l \times V \times E_j) \equiv A_m^{l+i+2} \mid l, i, m = 0, 1, \ldots\}. \end{aligned}$$

Die Kategorie $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/R_3$ ist die Kategorie der räumlichen Netze. $\mathfrak{R}_{\mathfrak{z}}$ sind die Relationen der Zöpfe; die beiden folgenden Mengen beschreiben die Deformation eines Fadens über einen Knotenpunkt; die letzten beiden Relationensysteme erlauben, die von einem ausgehenden bzw. in einem Punkt endenden Strecken beliebig zu verdrillen. Der Knotenpunkt wird dadurch von einem ebenen Punkt zu einem Punkt des Raumes.

Man sieht leicht, daß die Lösung des Wortproblems für $\mathfrak{N}_3$ auf das engste mit dem Knotenproblem verwandt ist.

Kurzfassung

In Teil I wurde die Theorie der X-Kategorie entwickelt, die es ermöglicht, die bei der Synthese von Schaltkreisen aus Bausteinen auftretenden Probleme in eine algebraische Form zu bringen. Das Bausteinsystem wurde repräsentiert durch das Erzeugendensystem $\mathfrak{A}$ einer freien X-Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Die Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ repräsentieren je eine Zusammenschaltung von einem Schaltkreis aus den Bausteinen, und jeder Schaltkreis, der sich aus den Bausteinen zusammensetzen läßt, wird durch ein Element von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ dargestellt.

In Teil II passen wir die Theorie noch mehr an die technischen Gegebenheiten an: Sei $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und A' bzw. B' der durch A bzw. B bezeichnete Schaltkreis. $A \circ B$ ist genau dann erklärt, wenn die Anzahl der Ausgänge von B' gleich der Anzahl der Eingänge von A' ist. $A \circ B$ bezeichnet den Schaltkreis, der entsteht, wenn man den i-ten Ausgang von B' auf den i-ten Eingang von A' schaltet. Technisch ist es natürlich möglich, den i-ten Ausgang von B' auf den i_k-ten Eingang von A' zu schalten, wo $i \to i_k$ eine Permutation ist. Weiter besteht technisch die Möglichkeit, einen Ausgang auf zwei verschiedene Eingänge zu schalten oder einen Ausgang gar nicht zu benutzen. Diesen technischen Selbstverständlichkeiten tragen

wir Rechnung, indem wir in $\mathfrak{A}$ drei Elemente V, D, U aufnehmen, deren Funktion so festgelegt wird, daß V die Überkreuzung zweier Drähte und D die Verzweigung zweier Drähte in zwei Zweige repräsentiert; U hat einen Eingang und keinen Ausgang.

Nun stellt sich folgendes Problem. Seien $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und sei $\{V, D, U\} \subset \mathfrak{A}$ und die Funktionen von U, V, D in der oben skizzierten Weise festgelegt, während die Funktionen von $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ völlig frei sind: Man finde ein System von Relationen $\mathfrak{R}$, das es erlaubt, A genau dann in B überzuführen, wenn A und B bei jeder Belegung von $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ durch Funktionen die gleiche Funktion definieren.

Die Aufgabe wird in dieser Arbeit für den Sonderfall gelöst, daß die Elemente von $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ nur einen Ausgang besitzen. Bildet man in der durch $\mathfrak{A}$ erzeugten X-Kategorie Restklassen nach $\mathfrak{R}$, dann erhält man eine freie D-Kategorie (Kategorie mit direktem Produkt).

Dieses Ergebnis ist auch im Zusammenhang mit dem Problem der automatischen Vereinfachung von Programmen von Interesse.

Abstract

In part I the theory of X-categories was developped, which enabled us to give the problems arising in connection with the synthesis of switching circuits an algebraical form. The system of primitiv building blocks was represented by the generator system $\mathfrak{A}$ of a free X-category $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Each of the elements of $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ represents the synthesis of a circuit from the primitiv building blocks and each synthesis of a circuit has a correspondence in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$.

In part II we adapt the theory more to the technical reality. Let be $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ and A' resp. B' the circuit designated by A resp. B. $A \circ B$ is defined, if the number of the outputs of B' is equal the number of inputs of A'. $A \circ B$ represents the circuit which arises from A' and B' by switching the output number i of B' on the input number i of A. The circuits can be switched in other ways too: On can the i-th output of B' switch on the i_k-th input of B', where $i \to i_k$ is a permutation. Beyond it, it is possible to connect one output of B' with two or more inputs of a circuit A' or not to use one output. We take account of this technical self-evidence and take three elements V, D, U into $\mathfrak{A}$ and fix their functions such that V represents the crossing of two wires and D the branching of a wire in two branchies. U represents an element, which has one input but no output.

Now the following problem arises. Let be $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. One find a system of relations $\mathfrak{R}$ that allows to transform A into B if and only if A and B realize the same function for each coordination of functions to the elements of $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$.

This problem is solved in this paper for the special case, that the elements of $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ have only one output. Forming equivalence classes respective $\mathfrak{R}$ one gets the quotient category, which is a free D-category (category with direct product).

This result is of interest for the automatic modifying of programs in computers too.

Резюме

В первой части работы была изложена теория X-категории, которая даёт возможность перевести в алгебраическую форму проблемы, возникающие при синтезе переключающих схем из элементарных блоков. Система этих элементарных блоков представлялась системой образующих $\mathfrak{A}$ свободной X-категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Каждый элемент из $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ представляет переключающую схему из элементарных блоков и каждая переключающая схема, которая может быть построена из элементарных блоков, представляется элементом из $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$.

Во второй части мы приближаем теорию ещё больше к техническим условиям: Пусть $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ и A' и B' соответствующие A и B переключающие схемы. $A \circ B$ определено тогда и только тогда, когда число выходов в B' равно числу входов в A'. $A \circ B$ обозначает переключающую схему, которая получается, если соединить i-тый выход из B' с i-тым входом в A'. Технически возможно также соединение i-того выхода из B' с i_k-тым входом в A', где $i \to i_k$ есть перестановка. Возможно соединение одного выхода с двумя разными входами, а также можно не использовать одного выхода. Учитывая эти возможности мы включаем в $\mathfrak{A}$ три элемента V, D, U, где V обозначает пересечение двух проволок, D — разветвление двух проволок на две ветви, U — имеет вход, но не имеет выхода.

Возникает следующая проблема: Пусть $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, пусть $\{V, D, U\} \subset \mathfrak{A}$; и пусть определяет функции элементов U, V, D таким же образом как выше было указано, но функции элементов $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ могут быть совершенно произвольны. Нужно найти систему соотношений $\mathfrak{R}$, которая даёт возможность перевести A в B тогда и только тогда, когда A и B реализуют одинаковые функции при каждом выборе функций элементов из $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$.

Эта задача решается в предложенной работе для частного случая, когда элементы из $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ имеют только по одному выходу. Если образовать классы вычетов по $\mathfrak{R}$ в X-категории, порождённой $\mathfrak{A}$, то получается свободная D-категория (категория с прямым произведением).

Этот результат имеет интерес и в связи с проблемой автоматического упрощения программ.

(Eingegangen am 9. 3. 1965)

Anschrift des Verfassers:

Dr. G. Hotz
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität des Saarlandes
66 Saarbrücken 15