Continuidad, Límites Infinitos y Asíntotas Verticales

R. M.

Universidad Autónoma de Santo Domingo
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

October 2, 2025

Definición de Continuidad en un Punto

Definición

Se dice que una función f es **continua** *en un número c si y solo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

Definición de Continuidad en un Punto

Definición

Se dice que una función f es **continua** *en un número c si y solo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

1. $f(c)$ *está definido. (El punto existe en el dominio de la función).*

Definición de Continuidad en un Punto

Definición

Se dice que una función f es **continua** *en un número c si y solo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

1. $f(c)$ *está definido. (El punto existe en el dominio de la función).*
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ *existe. (El límite de la función cuando x se aproxima a c existe).*

Definición de Continuidad en un Punto

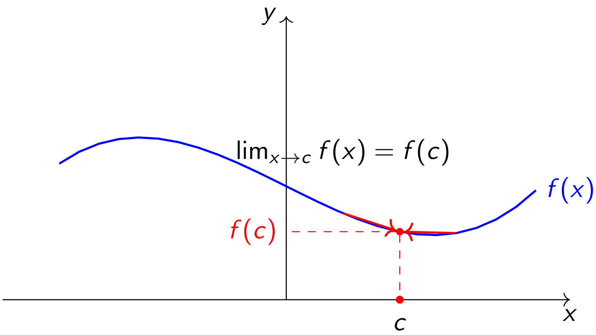
Definición

Se dice que una función f es **continua** *en un número c si y solo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

1. $f(c)$ *está definido. (El punto existe en el dominio de la función).*
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ *existe. (El límite de la función cuando x se aproxima a c existe).*
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. *(El valor del límite coincide con el valor de la función en el punto).*

Intuitivamente, una función es continua si su gráfica puede ser dibujada sin levantar el lápiz del papel.

Definición de Continuidad en un Punto II



Definición de Continuidad en un Punto III

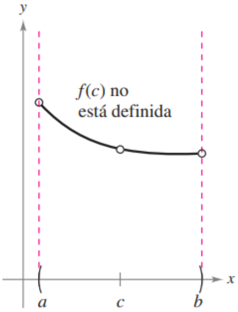


Figure 1: Función Continua.Libro Larson 9na. Edición

Clasificación de Discontinuidades

Si una función f es discontinua en c, la discontinuidad es de uno de los siguientes tipos:

Discontinuidad Removible (o Evitable)

Ocurre si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, pero $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ (o $f(c)$ no está definida). La gráfica presenta un "agujero".

Clasificación de Discontinuidades

Si una función f es discontinua en c, la discontinuidad es de uno de los siguientes tipos:

Discontinuidad Removible (o Evitable)

Ocurre si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, pero $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ (o $f(c)$ no está definida). La gráfica presenta un "agujero".

Discontinuidad No Removible (o Esencial)

- **De Salto:** Ocurre si los límites laterales $\lim_{x \to c^-} f(x)$ y $\lim_{x \to c^+} f(x)$ existen, pero no son iguales.
- **Infinita:** Ocurre si $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$. Está asociada a asíntotas verticales.

Análisis de Continuidad: Ejemplos

Ejemplo

Analizar la continuidad de $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Análisis de Continuidad: Ejemplos

Ejemplo

Analizar la continuidad de $f(x) = x^2 - 2x + 3$. *Esta es una función polinómica. Su dominio es* $\mathbb{R}$. *Para cualquier* $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to c} f(x) = c^2 - 2c + 3 = f(c)$. *Por tanto,* $f(x)$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$.

Análisis de Continuidad: Ejemplos

Ejemplo

Analizar la continuidad de $f(x) = x^2 - 2x + 3$*. Esta es una función polinómica. Su dominio es* $\mathbb{R}$*. Para cualquier* $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to c} f(x) = c^2 - 2c + 3 = f(c)$*. Por tanto,* $f(x)$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$*.*

Ejemplo

Analizar la continuidad de $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$*.*

Análisis de Continuidad: Ejemplos

Ejemplo

Analizar la continuidad de $f(x) = x^2 - 2x + 3$. *Esta es una función polinómica. Su dominio es* $\mathbb{R}$. *Para cualquier* $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to c} f(x) = c^2 - 2c + 3 = f(c)$. *Por tanto,* $f(x)$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Analizar la continuidad de $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. *El dominio es* $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. *La función es discontinua en* $x = 2$. *Calculando el límite:* $\lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$. *Como el límite existe, la discontinuidad en* $x = 2$ *es* **removible**.

Análisis de Continuidad: Ejemplos

Ejemplo

Analizar la continuidad de $f(x) = x^2 - 2x + 3$. *Esta es una función polinómica. Su dominio es* $\mathbb{R}$. *Para cualquier* $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to c} f(x) = c^2 - 2c + 3 = f(c)$. *Por tanto,* $f(x)$ *es continua en todo* $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Analizar la continuidad de $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. *El dominio es* $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. *La función es discontinua en* $x = 2$. *Calculando el límite:* $\lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$. *Como el límite existe, la discontinuidad en* $x = 2$ *es* **removible**.

Análisis de Continuidad: Ejemplos II

Ejemplo

Analizar la continuidad de $h(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \leq 0 \\ -x^2+1 & si\ x > 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$.

Análisis de Continuidad: Ejemplos II

Ejemplo

Analizar la continuidad de $h(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \leq 0 \\ -x^2+1 & si\ x > 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$. $h(0) = 0 + 1 = 1$. *Límites laterales:* $\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1$. $\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x^2+1) = 1$. *Como* $\lim_{x \to 0} h(x) = 1 = h(0)$, *la función es continua en* $x = 0$.

Límites Laterales y Continuidad

Definición (Límite Lateral)

Escribimos $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ *para denotar el* **límite por la izquierda** *de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c*, considerando solo valores de* $x < c$*. Análogamente,* $\lim_{x \to c^+} f(x) = M$ *es el* **límite por la derecha** *(*$x > c$*).*

El límite $\lim_{x \to c} f(x)$ existe si y solo si ambos límites laterales existen y son iguales, i.e., $L = M$.

Límites Laterales y Continuidad II

Ejemplo

Considere $f(x) = \frac{|x|}{x}$. *Analizar* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Límites Laterales y Continuidad II

Ejemplo

Considere $f(x) = \frac{|x|}{x}$. *Analizar* $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & si\ x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

- *Límite por la derecha:* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$
- *Límite por la izquierda:* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$

Como los límites laterales son distintos, $\lim_{x \to 0} f(x)$ *no existe. La función presenta una discontinuidad de salto en* $x = 0$.

Continuidad en un Intervalo

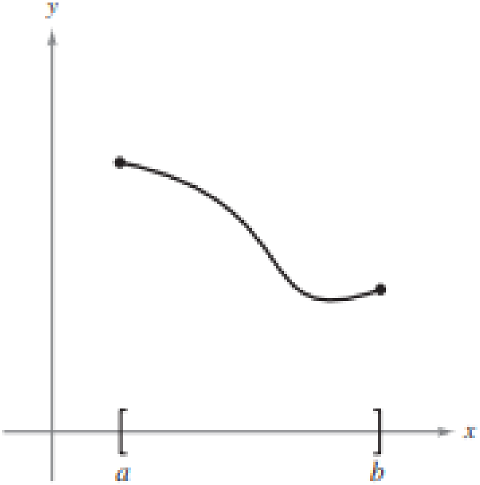
Definición

1. *Una función f es continua en un* **intervalo abierto** (a, b) *si es continua en cada número* $c \in (a, b)$.
2. *Una función f es continua en un* **intervalo cerrado** $[a, b]$ *si es continua en* (a, b) *y, además:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Esto se conoce como continuidad por la derecha en a y continuidad por la izquierda en b.

Gráfico de Continuidad en un Intervalo Cerrado



Continuidad Intervalo cerrado. Ron Larson 9na. Edición

Propiedades de la Continuidad

Propiedades

Si f y g son funciones continuas en c y k es una constante, entonces las siguientes funciones también son continuas en c:

1. *Suma/Diferencia:* $f \pm g$
2. *Producto por un escalar:* $k \cdot f$
3. *Producto:* $f \cdot g$
4. *Cociente:* f/g, *si* $g(c) \neq 0$

Propiedades de la Continuidad II

Teorema

- *Toda función polinómica es continua en* $\mathbb{R}$.
- *Toda función racional* $f(x) = P(x)/Q(x)$ *es continua en su dominio, i.e., para todo* x *tal que* $Q(x) \neq 0$.
- *Si* g *es continua en* c *y* f *es continua en* $g(c)$, *entonces la función compuesta* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *es continua en* c.

Determinación de un Límite Infinito: Aproximación Numérica

Ejemplo

Investigar el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ *cuando* x *se aproxima a 1.*

Determinación de un Límite Infinito: Aproximación Numérica

Ejemplo

Investigar el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ *cuando* x *se aproxima a 1.*

Construimos una tabla de valores para x aproximándose a 1 por la izquierda y por la derecha:

$x \to 1^-$	$f(x)$
0.9	100
0.99	10,000
0.999	1,000,000

$x \to 1^+$	$f(x)$
1.1	100
1.01	10,000
1.001	1,000,000

Observamos que a medida que x se acerca a 1 por cualquier lado, $f(x)$ crece sin cota.

Formalmente, escribimos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Recordemos que el límite no existe, pero la función tiende a infinito. El límite debe ser un nú mero real.

Análisis del Límite de $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Determinemos la tendencia de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ cuando $x \to 1$. Es necesario analizar los límites laterales.

Análisis del Límite de $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Determinemos la tendencia de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ cuando $x \to 1$. Es necesario analizar los límites laterales.

Límite por la derecha ($x \to 1^+$):

- Si x se aproxima a 1 con valores mayores que 1 ($x > 1$), entonces el denominador $x - 1$ es un número positivo muy pequeño.
- El cociente $\frac{1}{x-1}$ es un número positivo muy grande.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Análisis del Límite de $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Determinemos la tendencia de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ cuando $x \to 1$. Es necesario analizar los límites laterales.

Límite por la derecha $(x \to 1^+)$:

- Si x se aproxima a 1 con valores mayores que 1 $(x > 1)$, entonces el denominador $x - 1$ es un número positivo muy pequeño.
- El cociente $\frac{1}{x-1}$ es un número positivo muy grande.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Límite por la izquierda $(x \to 1^-)$:

- Si x se aproxima a 1 con valores menores que 1 $(x < 1)$, entonces el denominador $x - 1$ es un número negativo muy pequeño.
- El cociente $\frac{1}{x-1}$ es un número negativo muy grande en magnitud.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Dado que los límites laterales divergen, $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ no existe.

Definición de Límites Infinitos

Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente en c).
La expresión $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ significa que para todo número positivo M, existe un $\delta > 0$ tal que

$$si\ 0 < |x - c| < \delta \ entonces\ f(x) > M$$

Definición de Límites Infinitos

Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente en c).

La expresión $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ significa que para todo número positivo M, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta \textit{ entonces } f(x) > M$$

Análogamente, $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ significa que para todo número negativo N, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\textit{si } 0 < |x - c| < \delta \textit{ entonces } f(x) < N$$

Estas definiciones se adaptan para los límites laterales ($x \to c^+$ y $x \to c^-$).

Ejemplos de Límites Infinitos

Ejemplo

Calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2}$. *Cuando* $x \to 2^-$, *el numerador* $x+1 \to 3$. *El denominador* $x-2$ *tiende a 0 a través de valores negativos.*

$$\frac{\textit{aprox. } 3}{\textit{negativo pequeño}} \to -\infty$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$.

Ejemplos de Límites Infinitos

Ejemplo

Calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2}$. *Cuando* $x \to 2^-$, *el numerador* $x+1 \to 3$. *El denominador* $x-2$ *tiende a 0 a través de valores negativos.*

$$\frac{aprox.\ 3}{negativo\ pequeño} \to -\infty$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$.

Ejemplo

Calcular $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x}{(x+3)^2}$. *Cuando* $x \to -3$, *el numerador* $2x \to -6$. *El denominador* $(x+3)^2$ *tiende a 0 a través de valores positivos (por el cuadrado).*

$$\frac{aprox.\ -6}{positivo\ pequeño} \to -\infty$$

Ejemplos de Límites Infinitos

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2}$. *Cuando* $x \to 2^-$, *el numerador* $x+1 \to 3$. *El denominador* $x-2$ *tiende a 0 a través de valores negativos.*

$$\frac{\text{aprox. } 3}{\text{negativo pequeño}} \to -\infty$$

Por tanto, $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$.

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to -3} \frac{2x}{(x+3)^2}$. *Cuando* $x \to -3$, *el numerador* $2x \to -6$. *El denominador* $(x+3)^2$ *tiende a 0 a través de valores positivos (por el cuadrado).*

$$\frac{\text{aprox. } -6}{\text{positivo pequeño}} \to -\infty$$

Definición de Asíntota Vertical

Definición

La recta $x = c$ *es una* **asíntota vertical** *de la gráfica de una función* $y = f(x)$ *si al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

Definición de Asíntota Vertical

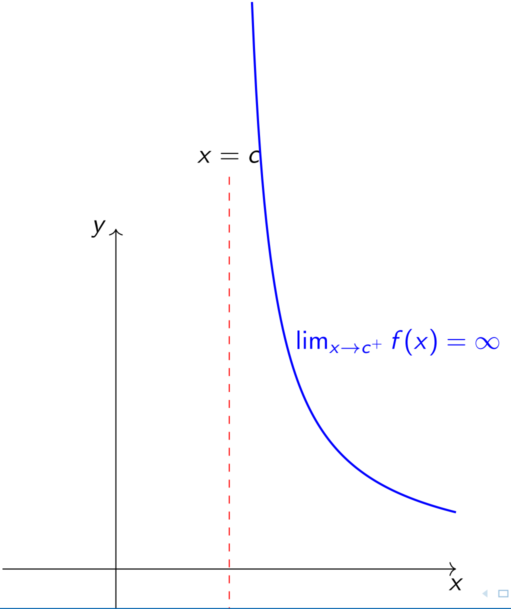
Definición

La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** *de la gráfica de una función $y = f(x)$ si al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

Definición de Asíntota Vertical II



Teorema: Localización de Asíntotas Verticales

Teorema

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en el intervalo, entonces la gráfica de la función está dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

Precaución

Si $N(c) = 0$ y $D(c) = 0$, el factor $(x - c)$ es común. El límite puede existir, resultando en una discontinuidad removible en lugar de una asíntota vertical. Es imperativo simplificar la fracción primero.

Ejemplos: Búsqueda de Asíntotas Verticales

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Ejemplos: Búsqueda de Asíntotas Verticales

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$*. El denominador es*

$D(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$*. Los ceros son* $x = 1$ *y* $x = -1$*. El numerador* $N(x) = x^2 + 1$ *nunca es cero para* $x \in \mathbb{R}$*, por lo que no hay factores comunes.* **Asíntotas verticales***:* $x = 1$ *y* $x = -1$*.*

Ejemplos: Búsqueda de Asíntotas Verticales

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. *El denominador es*

$D(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. *Los ceros son* $x = 1$ *y* $x = -1$. *El numerador* $N(x) = x^2 + 1$ *nunca es cero para* $x \in \mathbb{R}$, *por lo que no hay factores comunes.* **Asíntotas verticales**: $x = 1$ *y* $x = -1$.

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

Ejemplos: Búsqueda de Asíntotas Verticales

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$*. El denominador es*

$D(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$*. Los ceros son* $x = 1$ *y* $x = -1$*. El numerador* $N(x) = x^2 + 1$ *nunca es cero para* $x \in \mathbb{R}$*, por lo que no hay factores comunes.* **Asíntotas verticales**: $x = 1$ *y* $x = -1$.

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$*. El denominador se anula en* $x = 3$*. Sin*

embargo, $N(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$*. Simplificando:* $g(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$*, para* $x \neq 3$*. La gráfica es una recta con un agujero en* $(3, 6)$*.* **No tiene asíntotas verticales**.

Ejemplos: Búsqueda de Asíntotas Verticales II

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $h(x) = \frac{x}{\sin(x)}$.

Ejemplos: Búsqueda de Asíntotas Verticales II

Ejemplo

Hallar las asíntotas verticales de $h(x) = \frac{x}{\sin(x)}$. *El denominador* $\sin(x) = 0$ *cuando* $x = n\pi$ *para* $n \in \mathbb{Z}$. *Para* $x = 0$, *el numerador también es 0.* $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$, *por lo que hay una discontinuidad removible. Para* $x = n\pi$ *con* $n \neq 0$, *el numerador es* $n\pi \neq 0$. **Asíntotas verticales**: $x = n\pi$, *para todo entero* $n \neq 0$.

Bibliografía

[1] Stewart, J. *Cálculo de una variable*. Cengage Learning, 8va Edición.

[2] Larson, R. *Cálculo*. McGraw-Hill, 9na Edición.

[3] Thomas, G. *Cálculo de una variable*. Person, 13ra Edición.