

Funciones Trascendentes Parte I

Cálculo I

MATUASD
Escuela de Matemáticas
Universidad Autónoma de Santo Domingo
UASD

2025

Contenido

- 1 Funciones Trigonométricas Inversas
- 2 Identidades y Razones Trigonométricas
- 3 Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas
- 4 Integrales que resultan en F. T. Inversas
- 5 Funciones Hiperbólicas
- 6 Funciones Hiperbólicas Inversas

- ① Funciones Trigonométricas Inversas
- ② Identidades y Razones Trigonométricas
- ③ Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas
- ④ Integrales que resultan en F. T. Inversas
- ⑤ Funciones Hiperbólicas
- ⑥ Funciones Hiperbólicas Inversas

Definiciones y Gráficas (I)

Función Arcoseno ($y = \arcsin x = \text{sen}^{-1}x$)

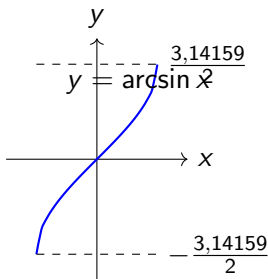
Es la inversa de $f(x) = \sin x$ restringida al dominio $[-\pi/2, \pi/2]$.

Definiciones y Gráficas (I)

Función Arcoseno ($y = \arcsin x = \text{sen}^{-1}x$)

Es la inversa de $f(x) = \sin x$ restringida al dominio $[-\pi/2, \pi/2]$.

- Dominio: $[-1, 1]$
- Rango: $[-\pi/2, \pi/2]$



Definiciones y Gráficas (II)

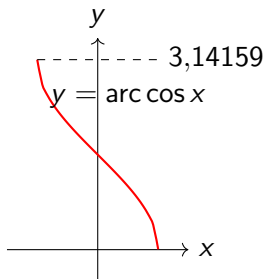
Función Arcocoseno ($y = \arccos x = \cos^{-1}x$)

Definiciones y Gráficas (II)

Función Arcocoseno ($y = \arccos x = \cos^{-1}x$)

Es la inversa de $f(x) = \cos x$ restringida al dominio $[0, \pi]$.

- Dominio: $[-1, 1]$
- Rango: $[0, \pi]$



Definiciones y Gráficas (III)

Función Arcotangente ($y = \arctan x = \tan^{-1}x$)

Definiciones y Gráficas (III)

Función Arcotangente ($y = \arctan x = \tan^{-1}x$)

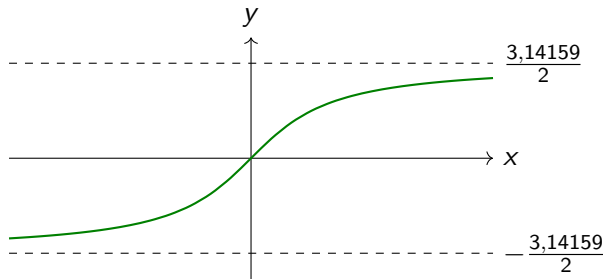
Es la inversa de $f(x) = \tan x$ restringida al dominio $(-\pi/2, \pi/2)$.

Definiciones y Gráficas (III)

Función Arcotangente ($y = \arctan x = \tan^{-1}x$)

Es la inversa de $f(x) = \tan x$ restringida al dominio $(-\pi/2, \pi/2)$.

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(-\pi/2, \pi/2)$



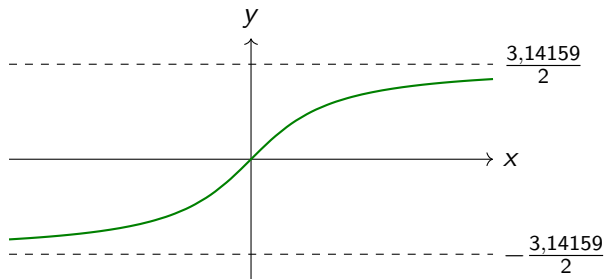
Función Arcocosecante ($y = \csc^{-1}x$)

Definiciones y Gráficas (III)

Función Arcotangente ($y = \arctan x = \tan^{-1}x$)

Es la inversa de $f(x) = \tan x$ restringida al dominio $(-\pi/2, \pi/2)$.

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(-\pi/2, \pi/2)$



Función Arcocosecante ($y = \csc^{-1}x$)

Otras Funciones Inversas

Arcosecante ($y = \operatorname{arcsec} x$)

- Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
- Rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

Arcocotangente ($y = \operatorname{arccot} x$)

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \pi)$

- 1 Funciones Trigonométricas Inversas
- 2 Identidades y Razones Trigonométricas
- 3 Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas
- 4 Integrales que resultan en F. T. Inversas
- 5 Funciones Hiperbólicas
- 6 Funciones Hiperbólicas Inversas

Identities Pitagóricas

A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

Identidades Pitagóricas

A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Identidades Pitagóricas

A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

Identidades Pitagóricas

A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
- $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

Identidades Pitagóricas

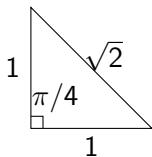
A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
- $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

Estas identidades son cruciales para la demostración de derivadas e integrales de funciones trigonométricas y sus inversas.

Razones Trigonómicas para Ángulos Notables

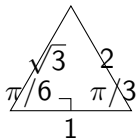
Para $\pi/4$ (45°): Triángulo isósceles.



$$\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para $\pi/6$ (30°) y $\pi/3$ (60°): Triángulo equilátero.



$$\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}, \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- ① Funciones Trigonómicas Inversas
- ② Identidades y Razones Trigonómicas
- ③ Derivadas de Funciones Trigonómicas Inversas**
- ④ Integrales que resultan en F. T. Inversas
- ⑤ Funciones Hiperbólicas
- ⑥ Funciones Hiperbólicas Inversas

Fórmulas y Demostración

Theorem (Derivada de $\arcsin x$)

Si $f(x) = \arcsin x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Fórmulas y Demostración

Demostración.

Sea $y = \arcsin x$. Por definición, $\sin y = x$ para $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Derivando implícitamente respecto a x :

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(x) \implies \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

Fórmulas y Demostración

Demostración.

Sea $y = \arcsin x$. Por definición, $\sin y = x$ para $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Derivando implícitamente respecto a x :

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(x) \implies \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Usando la identidad $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, tenemos $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$. Como $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos y \geq 0$, por lo que tomamos la raíz positiva.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



Fórmulas de Derivadas

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(x)) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec}(x)) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc}(x)) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

Ejemplos de Derivación

- 1 Hallar la derivada de $f(x) = \arctan(e^{2x})$.

Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de $f(x) = \arctan(e^{2x})$.

Solution

Aplicando la regla de la cadena, sea $u = e^{2x}$.

Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de $f(x) = \arctan(e^{2x})$.

Solution

Aplicando la regla de la cadena, sea $u = e^{2x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de $f(x) = \arctan(e^{2x})$.

Solution

Aplicando la regla de la cadena, sea $u = e^{2x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

- ② Derivar $g(x) = x^3 \arcsin(x)$.

Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de $f(x) = \arctan(e^{2x})$.

Solution

Aplicando la regla de la cadena, sea $u = e^{2x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

- ② Derivar $g(x) = x^3 \arcsin(x)$.

Solution

Aplicando la regla del producto:

$$g'(x) = (3x^2) \arcsin(x) + x^3 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 3x^2 \arcsin(x) + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejemplos de DerivaciónII

Calcular la derivada de $h(x) = \arccos(\sqrt{x})$.

Solution

$$h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

- 1 Funciones Trigonómicas Inversas
- 2 Identidades y Razones Trigonómicas
- 3 Derivadas de Funciones Trigonómicas Inversas
- 4 Integrales que resultan en F. T. Inversas**
- 5 Funciones Hiperbólicas
- 6 Funciones Hiperbólicas Inversas

Fórmulas Fundamentales de Integración

A partir de las reglas de derivación, se obtienen las siguientes integrales indefinidas:

- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$
- $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C$

Ejemplos de Integración

① Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

Solution

Aquí, $a = 5$, $u = x$. La integral es directa:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

② Evaluar $\int \frac{dx}{7+x^2}$.

Solution

Tenemos $a^2 = 7 \implies a = \sqrt{7}$ y $u = x$.

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

- 1 Funciones Trigonómicas Inversas
- 2 Identidades y Razones Trigonómicas
- 3 Derivadas de Funciones Trigonómicas Inversas
- 4 Integrales que resultan en F. T. Inversas
- 5 Funciones Hiperbólicas**
- 6 Funciones Hiperbólicas Inversas

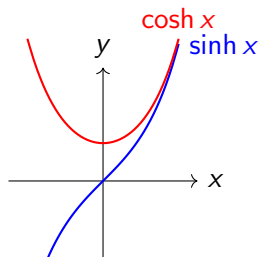
Definiciones y Gráficas

Se definen en términos de la función exponencial:

Seno y Coseno Hiperbólico

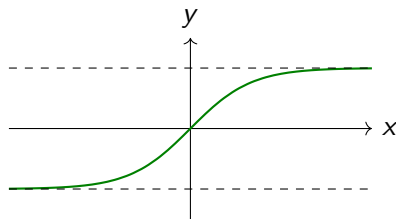
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Tangente Hiperbólica

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$



Identidades y Derivadas

Identidad Hiperbólica Fundamental

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

A diferencia de la identidad pitagórica, esta involucra una resta.

Derivadas de Funciones Hiperbólicas

- $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
- $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$ (Nótese la ausencia de signo negativo)
- $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

Ejemplos de Derivación Hiperbólica

$$\textcircled{1} f(x) = \cosh(x^2 + 1) \implies f'(x) = \sinh(x^2 + 1) \cdot 2x$$

$$\textcircled{2} g(x) = \ln(\sinh x) \implies g'(x) = \frac{1}{\sinh x} \cdot \cosh x = \coth x$$

$$\textcircled{3} h(x) = \tanh(\sqrt{x}) \implies h'(x) = \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\textcircled{4} k(x) = x \sinh x - \cosh x \implies k'(x) = (1 \cdot \sinh x + x \cosh x) - \sinh x = x \cosh x$$

- ① Funciones Trigonómicas Inversas
- ② Identidades y Razones Trigonómicas
- ③ Derivadas de Funciones Trigonómicas Inversas
- ④ Integrales que resultan en F. T. Inversas
- ⑤ Funciones Hiperbólicas
- ⑥ Funciones Hiperbólicas Inversas

Equivalencias Logarítmicas

Las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos naturales. c

- $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$
- $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

Demostración para $\operatorname{arsinh} x$

Si $y = \operatorname{arsinh} x$, entonces $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Multiplicando por $2e^y$ se obtiene $2xe^y = e^{2y} - 1$, lo cual es una ecuación cuadrática en e^y : $(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$.

Equivalencias Logarítmicas

Las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos naturales. c

- $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$
- $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$

Demostración para $\operatorname{arsinh} x$

Si $y = \operatorname{arsinh} x$, entonces $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Multiplicando por $2e^y$ se obtiene $2xe^y = e^{2y} - 1$, lo cual es una ecuación cuadrática en e^y : $(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$. La solución para e^y es $e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Como $e^y > 0$, se elige la raíz positiva: $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

Equivalencias Logarítmicas

Las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos naturales. c

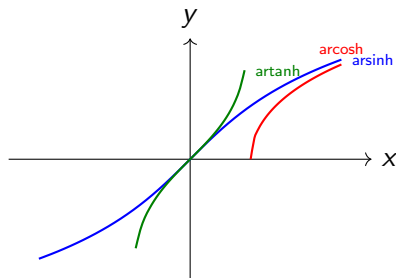
- $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$
- $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$

Demostración para $\operatorname{arsinh} x$

Si $y = \operatorname{arsinh} x$, entonces $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Multiplicando por $2e^y$ se obtiene $2xe^y = e^{2y} - 1$, lo cual es una ecuación cuadrática en e^y : $(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$. La solución para e^y es $e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Como $e^y > 0$, se elige la raíz positiva: $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Aplicando logaritmo natural: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Derivadas y Gráficas de F. H. Inversas

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{artanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$



Ejemplos de Derivación F. H. Inversas

① $f(x) = \operatorname{arsinh}(5x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(5x)^2 + 1}} \cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{25x^2 + 1}}$$

② $g(x) = \operatorname{arcosh}(\sec x)$, para $\tan x > 0$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}} \cdot (\sec x \tan x) = \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\tan^2 x}} = \sec x$$

③ $h(x) = \operatorname{artanh}(\cos x)$

$$h'(x) = \frac{1}{1 - \cos^2 x} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{\sin^2 x} = -\csc x$$

④ $k(x) = x \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{1 + x^2}$

$$k'(x) = \left(\operatorname{arsinh}(x) + x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arsinh}(x)$$

Integrales que resultan en F. H. Inversas

Las fórmulas de derivación nos llevan a las siguientes integrales:

- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{arsinh} \left(\frac{u}{a} \right) + C = \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \operatorname{arcosh} \left(\frac{u}{a} \right) + C = \ln \left(u + \sqrt{u^2 - a^2} \right) + C$
- $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{artanh} \left(\frac{u}{a} \right) + C$

Estas fórmulas son particularmente útiles en la integración por sustitución trigonométrica y en la resolución de ecuaciones diferenciales.