Funciones Trascendentes Parte I

Cálculo I

MATUASD
Escuela de Matemáticas
Universidad Autónoma de Santo Domingo
UASD

2025

Funciones Elementales y su Clasificación

Las funciones elementales son aquellas que se pueden obtener a partir de un número finito de operaciones aritméticas ($+$, -, *, $/$) y composiciones de funciones constantes, la función identidad, funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas, hiperbólicas y sus inversas.

Clasificación

- **Funciones Algebraicas:** Son aquellas que pueden formarse usando operaciones algebraicas. Se clasifican en:
  - Polinómicas
  - Racionales
  - Irracionales
- **Funciones Trascendentes:** Son aquellas que no son algebraicas. Entre ellas se encuentran:
  - Exponenciales
  - Logarítmicas
  - Trigonométricas
  - Trigonométricas inversas
  - Hiperbólicas y sus inversas

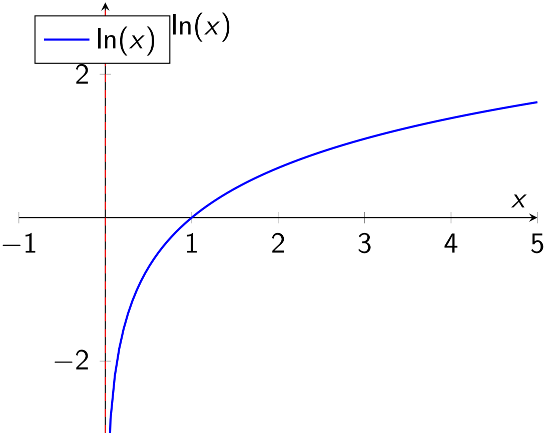
Definition (Logaritmo Natural)

Se define la función logaritmo natural, denotada por $\ln(x)$, como:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

El dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$.

2) Definición Formal de Logaritmo Natural y su Gráfica II



Derivada

La derivada de la función logaritmo natural es:

$$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$$

Demostración.

Aplicando la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo a la definición de $\ln(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{1}{t}dt\right] = \frac{1}{x}$$

Dado que la función $f(t) = 1/t$ es continua para $t > 0$. $\square$

Regla de la Cadena para el Logaritmo Natural

Si $y = \ln(u)$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable tal que $u > 0$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$.

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$.
2. *Sea* $g(x) = \ln(\sin(x))$. *Entonces* $g'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \cot(x)$. *[6]*

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \ln(x^2+1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$.
2. *Sea* $g(x) = \ln(\sin(x))$. *Entonces* $g'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \cot(x)$. *[6]*
3. *Sea* $h(x) = x\ln(x)$. *Aplicando la regla del producto,* $h'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$.
2. *Sea* $g(x) = \ln(\sin(x))$. *Entonces* $g'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \cot(x)$. *[6]*
3. *Sea* $h(x) = x \ln(x)$. *Aplicando la regla del producto,* $h'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

Propiedades Fundamentales

Si x e y son números positivos y n es un número racional, entonces

- $\ln(1) = 0$

Propiedades Fundamentales

Si x e y son números positivos y n es un número racional, entonces

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Propiedades Fundamentales

Si x e y son números positivos y n es un número racional, entonces

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Propiedades Fundamentales

Si x e y son números positivos y n es un número racional, entonces

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Propiedades Fundamentales

Si x e y son números positivos y n es un número racional, entonces

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$

La derivación logarítmica es una técnica que simplifica la derivación de funciones complejas, especialmente aquellas que involucran productos, cocientes y potencias. [12, 18, 26]

Ejemplo

1. *Sea* $y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$. *Tomando logaritmo natural en ambos lados:*

La derivación logarítmica es una técnica que simplifica la derivación de funciones complejas, especialmente aquellas que involucran productos, cocientes y potencias. [12, 18, 26]

Ejemplo

1. *Sea* $y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$. *Tomando logaritmo natural en ambos lados:* $\ln(y) = 2\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. *Derivando implícitamente:* $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}$.

La derivación logarítmica es una técnica que simplifica la derivación de funciones complejas, especialmente aquellas que involucran productos, cocientes y potencias. [12, 18, 26]

Ejemplo

1. *Sea* $y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$. *Tomando logaritmo natural en ambos lados:* $\ln(y) = 2\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. *Derivando implícitamente:* $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}$. *Despejando* y'*:* $y' = y\left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}\right)$.

8) Fórmula de Integral

Integral

La fórmula general de integración que resulta en la función logaritmo natural es:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Nota

El valor absoluto se utiliza para asegurar que el argumento del logaritmo sea siempre positivo.

Ejemplo

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. *Sea* $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$.

Ejemplo

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. *Sea* $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(x^2 + 1) + C$.

Ejemplo

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. *Sea* $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(x^2 + 1) + C$.
2. $\int \frac{1}{2x-1}dx$. *Sea* $u = 2x - 1$, $du = 2dx$.

Ejemplo

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. *Sea* $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(x^2 + 1) + C$.
2. $\int \frac{1}{2x-1}dx$. *Sea* $u = 2x - 1$, $du = 2dx$. $\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x - 1| + C$.

Ejemplo

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. *Sea* $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$.
2. $\int \frac{1}{2x-1}dx$. *Sea* $u = 2x - 1$, $du = 2dx$. $\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$.
3. $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$. *Sea* $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$.

Ejemplo

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. *Sea* $u = x^2+1$, $du = 2xdx$. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$.
2. $\int \frac{1}{2x-1}dx$. *Sea* $u = 2x-1$, $du = 2dx$. $\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$.
3. $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$. *Sea* $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$.
   $-\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C$.

Ejemplo

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. *Sea* $u = x^2+1$, $du = 2xdx$. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$.
2. $\int \frac{1}{2x-1}dx$. *Sea* $u = 2x-1$, $du = 2dx$. $\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$.
3. $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$. *Sea* $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$.
   $-\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C$.
4. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}dx = \int \left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)dx$

Ejemplo

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. *Sea* $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$. $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln(x^2+1) + C$.
2. $\int \frac{1}{2x-1}dx$. *Sea* $u = 2x - 1$, $du = 2dx$. $\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$.
3. $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$. *Sea* $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$.
   $-\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C$.
4. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}dx = \int \left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int 1dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

Definición (Función)

Una función f es una correspondencia entre dos conjuntos, el dominio y el codominio, de modo que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio.

Definición (Función)

Una función f es una correspondencia entre dos conjuntos, el dominio y el codominio, de modo que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio.

Definición (Función Inversa)

Suponga que f es una función inyectiva en un dominio D y con rango R. La función inversa $^{-1}$ se define como $^{-1}(b) = asi\ (a) = b$. El dominio de f -1 es R y su rango es D.

Theorem (Derivada de una Función Inversa)

Sea f una función diferenciable con una inversa $g = f^{-1}$. Si $f'(g(x)) \neq 0$, entonces g es diferenciable y su derivada es:

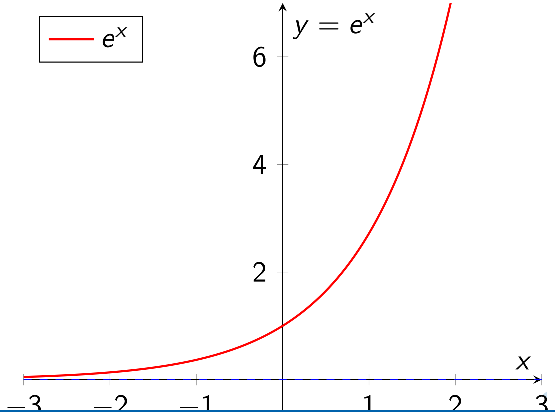
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Definición (Función Exponencial Natural)

La función exponencial natural, denotada por e^x *o* $\exp(x)$, *es la inversa de la función logaritmo natural. Es decir,* $y = e^x$ *si y solo si* $x = \ln(y)$. *El dominio es* $(-\infty, \infty)$ *y el rango es* $(0, \infty)$.

Definición (Función Exponencial Natural)

La función exponencial natural, denotada por e^x *o* $\exp(x)$, *es la inversa de la función logaritmo natural. Es decir,* $y = e^x$ *si y solo si* $x = \ln(y)$. *El dominio es* $(-\infty, \infty)$ *y el rango es* $(0, \infty)$.



Theorem

La derivada de la función exponencial natural es ella misma: [11]

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Demostración.

Sea $y = e^x$. Entonces $\ln(y) = x$. Derivando implícitamente con respecto a x:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

13) Derivada de la Función Exponencial Compuesta

Theorem (Regla de la Cadena para la Función Exponencial)

Si $y = e^u$ *y* $u = g(x)$ *es una función diferenciable, entonces: [9]*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

14) Ejemplos de Derivadas de Funciones Exponenciales

Example

1. Sea $f(x) = e^{x^3}$.

Example

1. Sea $f(x) = e^{x^3}$. Entonces $f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$.

Example

1. Sea $f(x) = e^{x^3}$. Entonces $f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$.
2. Sea $g(x) = e^{\tan(x)}$.

Example

1. Sea $f(x) = e^{x^3}$. Entonces $f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$.
2. Sea $g(x) = e^{\tan(x)}$.Entonces $g'(x) = e^{\tan(x)} \cdot \sec^2(x)$.

14) Ejemplos de Derivadas de Funciones Exponenciales

Example

1. Sea $f(x) = e^{x^3}$. Entonces $f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$.
2. Sea $g(x) = e^{\tan(x)}$.Entonces $g'(x) = e^{\tan(x)} \cdot \sec^2(x)$.
3. Sea $h(x) = \sin(e^x)$.

Example

1. Sea $f(x) = e^{x^3}$. Entonces $f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$.
2. Sea $g(x) = e^{\tan(x)}$.Entonces $g'(x) = e^{\tan(x)} \cdot \sec^2(x)$.
3. Sea $h(x) = \sin(e^x)$. Entonces $h'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x = e^x \cos(e^x)$.

Propiedades Fundamentales

Si a y b son números positivos y x e y son números reales, entonces: [21]

- $e^x e^y = e^{x+y}$
- $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplo

1. $\int e^{3x+1} dx.$

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplo

1. $\int e^{3x+1} dx$. *Sea* $u = 3x + 1$, $du = 3dx$. $\frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C$.

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplo

1. $\int e^{3x+1} dx$. *Sea* $u = 3x + 1$, $du = 3dx$. $\frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C$.
2. $\int 5xe^{-x^2} dx$.

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplo

1. $\int e^{3x+1} dx$. *Sea* $u = 3x + 1$, $du = 3dx$. $\frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C$.
2. $\int 5xe^{-x^2} dx$. *Sea* $u = -x^2$, $du = -2xdx$.

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplo

1. $\int e^{3x+1} dx$. *Sea* $u = 3x + 1$, $du = 3dx$. $\frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C$.
2. $\int 5xe^{-x^2} dx$. *Sea* $u = -x^2$, $du = -2xdx$. $-\frac{5}{2} \int e^u du = -\frac{5}{2} e^u + C = -\frac{5}{2} e^{-x^2} + C$.

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplo

1. $\int e^{3x+1} dx$. Sea $u = 3x + 1$, $du = 3dx$. $\frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C$.
2. $\int 5xe^{-x^2} dx$. Sea $u = -x^2$, $du = -2xdx$. $-\frac{5}{2} \int e^u du = -\frac{5}{2} e^u + C = -\frac{5}{2} e^{-x^2} + C$.
3. $\int e^x \cos(e^x) dx$.

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplo

1. $\int e^{3x+1} dx$. *Sea* $u = 3x + 1$, $du = 3dx$. $\frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$.
2. $\int 5xe^{-x^2} dx$. *Sea* $u = -x^2$, $du = -2xdx$. $-\frac{5}{2}\int e^u du = -\frac{5}{2}e^u + C = -\frac{5}{2}e^{-x^2} + C$.
3. $\int e^x \cos(e^x) dx$. *Sea* $u = e^x$, $du = e^x dx$.

Integral exponencial

La fórmula de integración para la función exponencial natural es:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ejemplo

1. $\int e^{3x+1} dx$. Sea $u = 3x + 1$, $du = 3dx$. $\frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C$.
2. $\int 5xe^{-x^2} dx$. Sea $u = -x^2$, $du = -2xdx$. $-\frac{5}{2} \int e^u du = -\frac{5}{2} e^u + C = -\frac{5}{2} e^{-x^2} + C$.
3. $\int e^x \cos(e^x) dx$. Sea $u = e^x$, $du = e^x dx$. $\int \cos(u) du = \sin(u) + C = \sin(e^x) + C$.

Definition (Función Exponencial General)

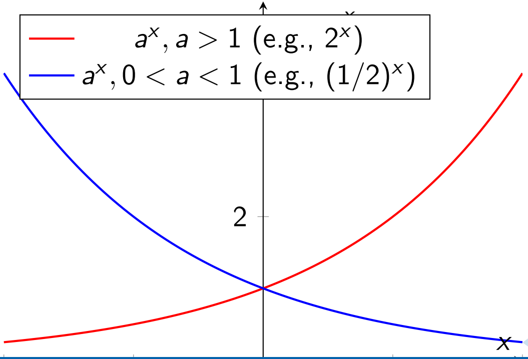
Si a es un número positivo $(a \neq 1)$ y x es cualquier número real, la función exponencial general de base a se define como:

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

Definition (Función Exponencial General)

Si a es un número positivo $(a \neq 1)$ y x es cualquier número real, la función exponencial general de base a se define como:

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$



18) Derivada de la Función Exponencial $y = a^x$

Derivada

La derivada de la función exponencial general de base a es:

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln(a)$$

18) Derivada de la Función Exponencial $y = a^x$

Derivada

La derivada de la función exponencial general de base a es:

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln(a)$$

Demostración.

Utilizando la definición $a^x = e^{x\ln(a)}$ y la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}[a^x] = \frac{d}{dx}[e^{x\ln(a)}] = e^{x\ln(a)} \cdot \frac{d}{dx}[x\ln(a)] = e^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$$

$\square$

Derivada de a^u

Si $y = a^u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln(a) \frac{du}{dx}$$

Example

1. Sea $f(x) = 2^{\sin(x)}$.

Derivada de a^u

Si $y = a^u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln(a) \frac{du}{dx}$$

Example

1. Sea $f(x) = 2^{\sin(x)}$. Entonces $f'(x) = 2^{\sin(x)} \ln(2) \cos(x)$.
2. Sea $g(x) = 10^{x^2}$.

Derivada de a^u

Si $y = a^u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln(a)\frac{du}{dx}$$

Example

1. Sea $f(x) = 2^{\sin(x)}$. Entonces $f'(x) = 2^{\sin(x)} \ln(2)\cos(x)$.
2. Sea $g(x) = 10^{x^2}$. Entonces $g'(x) = 10^{x^2} \ln(10) \cdot 2x = 2x \ln(10)10^{x^2}$.
3. Sea $h(x) = (x^2 + 1)^{\pi}$.

Derivada de a^u

Si $y = a^u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln(a) \frac{du}{dx}$$

Example

1. Sea $f(x) = 2^{\sin(x)}$. Entonces $f'(x) = 2^{\sin(x)} \ln(2) \cos(x)$.
2. Sea $g(x) = 10^{x^2}$. Entonces $g'(x) = 10^{x^2} \ln(10) \cdot 2x = 2x \ln(10) 10^{x^2}$.
3. Sea $h(x) = (x^2 + 1)^{\pi}$. $h'(x) = \pi(x^2 + 1)^{\pi - 1} \cdot 2x$.

Integral de a^u

La fórmula de integración para la función exponencial general es:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

Example

1. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C.$

Integral de a^u

La fórmula de integración para la función exponencial general es:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

Example

1. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C.$
2. $\int x3^{x^2} dx.$

Integral de a^u

La fórmula de integración para la función exponencial general es:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

Example

1. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C.$
2. $\int x3^{x^2} dx.$ Sea $u = x^2,\ du = 2xdx.$

Integral de a^u

La fórmula de integración para la función exponencial general es:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

Example

1. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C.$
2. $\int x 3^{x^2} dx$. Sea $u = x^2$, $du = 2x dx$. $\frac{1}{2}\int 3^u du = \frac{1}{2}\frac{3^u}{\ln(3)} + C = \frac{3^{x^2}}{2\ln(3)} + C.$

21) Definición de Función Logaritmo General de Base a y su Gráfica I

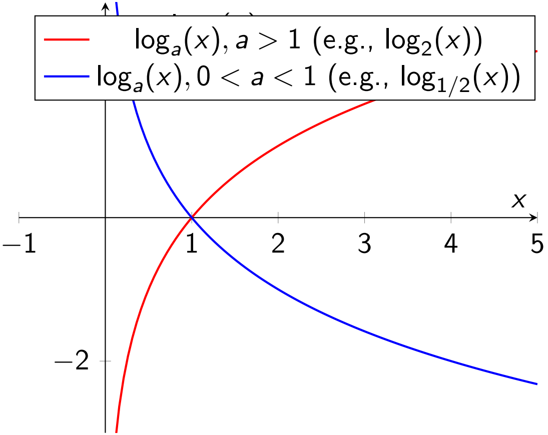
Definición (Función Logaritmo General)

Si a es un número positivo ($a \neq 1$) y x es un número positivo, la función logaritmo general de base a, denotada por $\log_a(x)$, es la inversa de la función exponencial de base a.

$$y = \log_a(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x$$

Se puede expresar en términos del logaritmo natural mediante la fórmula del cambio de base:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$


$\log_a(x), a > 1$ (e.g., $\log_2(x)$)
$\log_a(x), 0 < a < 1$ (e.g., $\log_{1/2}(x)$)
x
-1
1
2
3
4
5
-2

22) Derivada de $y = \log_a x$ y Demostración

Derivada

La derivada de la función logaritmo general de base a es:

$$\frac{d}{dx}[\log_a(x)] = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Demostración.

Utilizando la fórmula del cambio de base:

$$\frac{d}{dx}[\log_a(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right] = \frac{1}{\ln(a)}\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$$

$\square$

Derivada

Si $y = \log_a u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u \ln(a)} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \log_3(x^2 + 1)$.

Derivada

Si $y = \log_a u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\ln(a)}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \log_3(x^2+1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln(3)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(3)}$.

Derivada

Si $y = \log_a u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\ln(a)}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \log_3(x^2+1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln(3)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(3)}$.
2. *Sea* $g(x) = \log_5(\sqrt{x})$.

Derivada

Si $y = \log_a u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\ln(a)}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \log_3(x^2+1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln(3)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(3)}$.
2. *Sea* $g(x) = \log_5(\sqrt{x})$. $g(x) = \frac{1}{2}\log_5(x)$. $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\ln(5)} =$

Derivada

Si $y = \log_a u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\ln(a)}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \log_3(x^2+1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln(3)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(3)}$.
2. *Sea* $g(x) = \log_5(\sqrt{x})$. $g(x) = \frac{1}{2}\log_5(x)$. $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\ln(5)} = \frac{1}{2x\ln(5)}$.
3. *Sea* $h(x) = \log_{10}(\cos(x))$.

Derivada

Si $y = \log_a u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\ln(a)}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \log_3(x^2+1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln(3)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(3)}$.
2. *Sea* $g(x) = \log_5(\sqrt{x})$. $g(x) = \frac{1}{2}\log_5(x)$. $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\ln(5)} = \frac{1}{2x\ln(5)}$.
3. *Sea* $h(x) = \log_{10}(\cos(x))$. *Entonces* $h'(x) =$

Derivada

Si $y = \log_a u$ y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\ln(a)}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo

1. *Sea* $f(x) = \log_3(x^2+1)$. *Entonces* $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln(3)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln(3)}$.
2. *Sea* $g(x) = \log_5(\sqrt{x})$. $g(x) = \frac{1}{2}\log_5(x)$. $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\ln(5)} = \frac{1}{2x\ln(5)}$.
3. *Sea* $h(x) = \log_{10}(\cos(x))$. *Entonces* $h'(x) = \frac{1}{\cos(x)\ln(10)} \cdot (-\sin(x)) = -\frac{\tan(x)}{\ln(10)}$.

Ejemplo de Diferenciación Logarítmica

Ejemplo

Sea $y = x^x$. *Tomando logaritmo natural en ambos lados:* $\ln(y) = x\ln(x)$. *Derivando implícitamente:* $\frac{y'}{y} = \ln(x) + 1$. *Despejando* y'*:* $y' = y(\ln(x) + 1) = x^x(\ln(x) + 1)$.