Problemas de Optimización y Método de Newton

Cálculo I

MATUASD
Escuela de Matemáticas
Universidad Autónoma de Santo Domingo
UASD

2025

Contenido

Introducción a Problemas de Optimización

Definición

Un **problema de optimización** consiste en encontrar el valor máximo o mínimo de una función en un dominio dado.

Sabemos que:

Teorema (Valor Extremo)

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a, b]$; es decir, existen $x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}} \in [a, b]$ tales que

$$f(x_{\text{mín}}) \leq f(x) \leq f(x_{\text{máx}}) \quad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

Puntos críticos: Son valores c en el dominio de f donde:

- $f'(c) = 0$, o
- $f'(c)$ no existe

Metodología para Problemas de Optimización

1. **Identificar** las cantidades dadas y la cantidad a optimizar.
2. **Escribir** una ecuación primaria para la cantidad a optimizar.
3. **Reducir** la ecuación primaria a una variable usando ecuaciones secundarias.
4. **Determinar** el dominio factible de la función.
5. **Calcular** la derivada y encontrar los puntos críticos.
6. **Evaluar** la función en los puntos críticos y en los extremos del dominio.
7. **Verificar** usando el criterio de la primera o segunda derivada.

1. Problemas de Optimización
   - Ejemplos de Optimización
2. Método de Newton-Raphson
3. Conclusiones

Ejemplo 1: Área Máxima de un Rectángulo

Problema: Un granjero tiene 200 metros de cerca para encerrar un terreno rectangular adyacente a un río. No se necesita cerca a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que maximizan el área?

Solución:

- Sea x el ancho y y el largo del rectángulo.
- Ecuación primaria: $A = xy$
- Restricción: $2x + y = 200 \Rightarrow y = 200 - 2x$
- Sustituyendo: $A(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$
- Dominio: $0 \leq x \leq 100$

Ejemplo 1: Solución (continuación)

$$A(x) = 200x - 2x^2$$
$$A'(x) = 200 - 4x$$

Igualando a cero: $200 - 4x = 0 \Rightarrow x = 50$ metros

Verificación con la segunda derivada:

$$A''(x) = -4 < 0$$

Por lo tanto, $x = 50$ es un máximo.

Respuesta

Dimensiones óptimas: $x = 50$ m, $y = 200 - 2(50) = 100$ m
Área máxima: $A_{\max} = 5000$ m^2

Ejemplo 2: Minimización de Costos

Problema: Una caja rectangular con base cuadrada y abierta (sin tapa) se construirá con 108 cm^2 de material. Encontrar las dimensiones que maximizan el volumen.

Solución:

- Sea x la longitud de la base cuadrada y h la altura.
- Ecuación primaria: $V = x^2 h$
- Restricción (área superficial): $x^2 + 4xh = 108$
- Despejando: $h = \frac{108-x^2}{4x}$
- Sustituyendo: $V(x) = x^2 \cdot \frac{108-x^2}{4x} = \frac{x(108-x^2)}{4} = \frac{108x-x^3}{4}$
- Dominio: $0 < x < \sqrt{108}$

Ejemplo 2: Solución (continuación)

$$V(x) = \frac{108x - x^3}{4}$$
$$V'(x) = \frac{108 - 3x^2}{4}$$

Igualando a cero: $108 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ cm

Calculando h: $h = \frac{108-36}{24} = 3$ cm

Verificación: $V''(x) = \frac{-6x}{4} = \frac{-3x}{2}$, entonces $V''(6) = -9 < 0$ (máximo)

Respuesta

Dimensiones óptimas: base 6×6 cm, altura $h = 3$ cm
Volumen máximo: $V_{\text{max}} = 108$ cm^3

Ejemplo 3: Problema Químico - Concentración Óptima

Problema: En una reacción química[1] la velocidad de reacción v (en mol/L·s) está dada por:

$$v(T) = kT^2 e^{-E_a/(RT)}$$

donde $k = 0{,}001$, $E_a = 50000$ J/mol, $R = 8{,}314$ J/(mol·K) y T es la temperatura en Kelvin ($273 \leq T \leq 473$). Encontrar la temperatura que maximiza la velocidad.

$$\frac{d}{dx} e^{u(x)} = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Solución: Para simplificar, sea $A = \frac{E_a}{R} \approx 6013{,}7$

$$v(T) = 0{,}001\, T^2 e^{-A/T}$$

[1]Más adelante veremos la teoría asociada a la derivada de la función exponencial

Ejemplo 3: Solución (continuación)

Calculando la derivada usando la regla del producto:

$$\begin{aligned} v'(T) &= 0{,}001\left[2Te^{-A/T} + T^2e^{-A/T}\cdot\frac{A}{T^2}\right] \\ &= 0{,}001e^{-A/T}\left[2T + A\right] \\ &= 0{,}001e^{-A/T}\,T\left[2 + \frac{A}{T}\right] \end{aligned}$$

Igualando a cero: $2T + A = 0$ no tiene solución positiva, así que factorizamos mejor:

$$v'(T) = 0{,}001e^{-A/T}(2T - A) = 0$$

Como $e^{-A/T} \neq 0$, entonces: $2T - A = 0 \Rightarrow T = \frac{A}{2} \approx 3006{,}8$ K
Este valor está fuera del dominio $[273, 473]$.

Ejemplo 3: Solución (continuación)

Evaluamos en los extremos del intervalo:

$$v(273) \approx 0{,}001(273)^2 e^{-6013{,}7/273} \approx 0$$
$$v(473) \approx 0{,}001(473)^2 e^{-6013{,}7/473} \approx 0{,}0000185$$

Respuesta

La velocidad máxima en el rango permitido ocurre a $T = 473$ K (aproximadamente 200C). Esto ilustra un principio importante en cinética química: a mayor temperatura, mayor velocidad de reacción dentro del rango operativo seguro.

Ejemplo 4: Distancia Mínima

Problema: Encontrar el punto de la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(0, 3)$.

Solución:

- Sea (x, x^2) un punto en la parábola.
- Distancia al punto $(0, 3)$: $D = \sqrt{x^2 + (x^2 - 3)^2}$
- Para simplificar, minimizamos D^2:

$$f(x) = x^2 + (x^2 - 3)^2 = x^2 + x^4 - 6x^2 + 9 = x^4 - 5x^2 + 9$$

Derivando:

$$f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$$

Ejemplo 4: Solución (continuación)

Puntos críticos: $f'(x) = 0$

$$2x(2x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Evaluando $f(x)$:

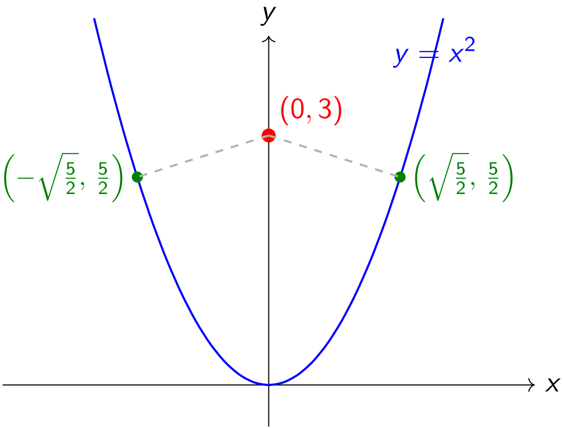
$$f(0) = 9$$
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 9 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 9 = \frac{11}{4}$$

Como $\frac{11}{4} < 9$, el mínimo ocurre en $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Respuesta

Los puntos más cercanos son $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$, a una distancia de $\sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1{,}66$ unidades.

Ejemplo 4: Representación Gráfica



Interpretación: La distancia mínima se alcanza en los puntos marcados en verde sobre la parábola, a igual distancia a la izquierda y derecha del eje y.

Método de Newton-Raphson

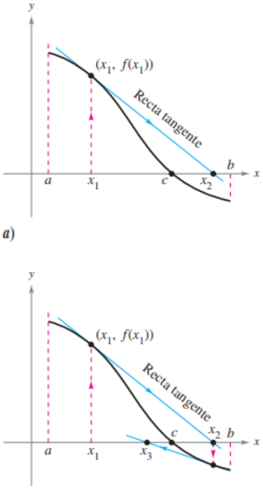
Objetivo

Encontrar aproximaciones numéricas de las raíces (ceros) de una función $f(x)$, es decir, valores de x tales que $f(x) = 0$.

Idea del Método

Dado un valor inicial x_0 cercano a la raíz, aproximamos $f(x)$ por su recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ y encontramos donde esta recta corta al eje x. Este nuevo punto x_1 será una mejor aproximación.

Método de Newton-Raphson: Visualización



b)
La intersección con el eje x de la recta tangente se aproxima a cero de f

Método de Newton-Raphson: Fórmula Iterativa

Fórmula iterativa:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ hasta alcanzar la precisión deseada.

Convergencia y Consideraciones

Ventajas:

- Convergencia cuadrática (muy rápida) cerca de la raíz
- Pocas iteraciones necesarias para alta precisión

Precauciones:

- Requiere que $f'(x_n) \neq 0$
- La elección de x_0 es crucial
- Puede diverger o ciclar si x_0 está mal elegido
- No funciona bien si $f'(x)$ es muy pequeña cerca de la raíz

Criterio de parada: Detenemos cuando $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ o $|f(x_n)| < \varepsilon$ para una tolerancia ε pequeña.

1. Problemas de Optimización
2. Método de Newton-Raphson
   - Ejemplos del Método de Newton
3. Conclusiones

Ejemplo 1: Raíz cuadrada de 2

Problema: Aproximar $\sqrt{2}$ usando el método de Newton.

Solución: Buscamos la raíz de $f(x) = x^2 - 2$

$$f'(x) = 2x$$

Fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

Usando $x_0 = 1$:

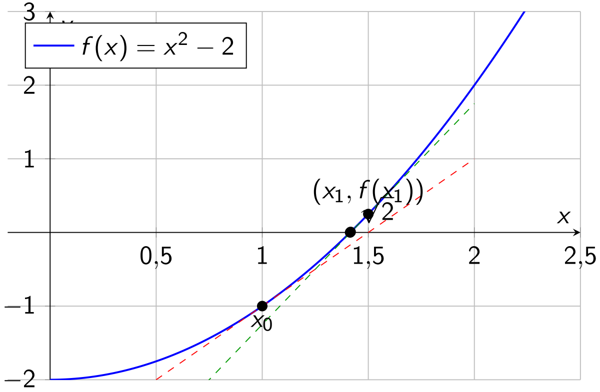
$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{(1{,}5)^2 + 2}{2(1{,}5)} = \frac{4{,}25}{3} \approx 1{,}41667$$

$$x_3 \approx 1{,}41421$$

El valor exacto es $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356\ldots$

Ejemplo 1: Visualización



Ejemplo 2: Raíz de un polinomio

Problema: Encontrar una raíz de $f(x) = x^3 - x - 1$ con $x_0 = 1{,}5$.

Solución:

$$f(x) = x^3 - x - 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 1$$

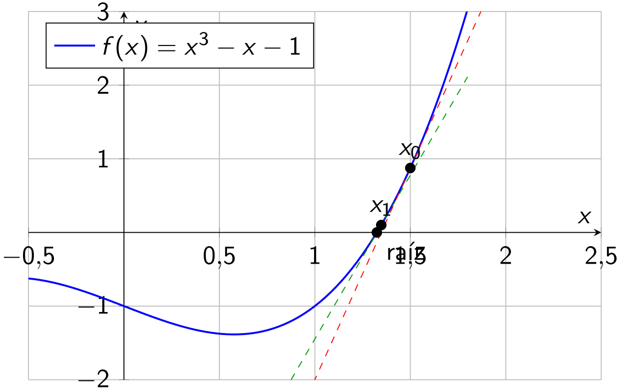
Fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.5	0.875
1	1.34783	0.10068
2	1.32520	0.00206
3	1.32472	0.00001
4	1.32472	≈ 0

La raíz es aproximadamente $x \approx 1{,}32472$.

Ejemplo 2: Visualización



Ejemplo 3: Intersección de funciones

Problema: Encontrar donde se intersectan $y = \cos(x)$ y $y = x$, es decir, resolver $\cos(x) - x = 0$.

Solución:

$$f(x) = \cos(x) - x, \quad f'(x) = -\sin(x) - 1$$

Fórmula iterativa:

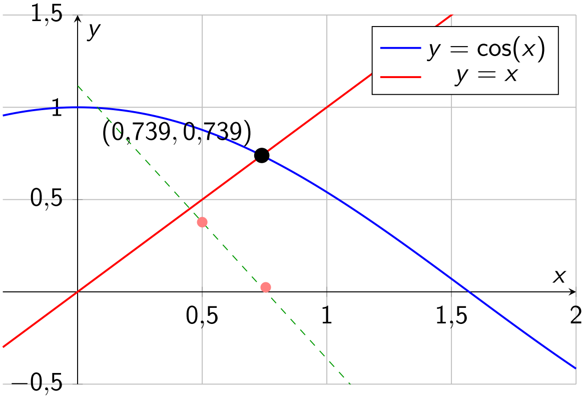
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$$

Usando $x_0 = 0{,}5$:

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.5	0.37758
1	0.75487	0.02447
2	0.73918	0.00009
3	0.73908	≈ 0

La solución es aproximadamente $x \approx 0{,}73908$ radianes.

Ejemplo 3: Visualización



1. Problemas de Optimización
2. Método de Newton-Raphson
3. Conclusiones

Conclusiones

- Los **problemas de optimización** son fundamentales en el cálculo y tienen aplicaciones en física, química, economía e ingeniería.
- La metodología sistemática (identificar, formular, derivar, evaluar) es esencial para resolver estos problemas correctamente.
- El **método de Newton-Raphson** es una herramienta poderosa para encontrar raíces de ecuaciones no lineales con alta precisión.
- La convergencia rápida del método lo hace ideal para aplicaciones computacionales, aunque requiere cuidado en la elección del punto inicial.
- Ambos temas demuestran la utilidad práctica del cálculo diferencial en la resolución de problemas del mundo real.

Referencias

- Larson, R. & Edwards, B. (2009). *Cálculo* (9a ed.). McGraw-Hill.
  - Capítulo 3: Aplicaciones de la derivada
  - Sección 3.7: Problemas de optimización
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable*. Cengage Learning.
- Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Una variable*. Pearson.

Gracias por su atención

¿Preguntas?