Integración Parte I

Cálculo I

MATUASD
Escuela de Matemáticas
Universidad Autónoma de Santo Domingo
UASD

2025

Contenido

Definición de Antiderivada o Primitiva

Definición (Antiderivada o Primitiva)

Una función F es una **antiderivada** (o **primitiva**) de f en un intervalo I si

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x en I.

Observación: Si F es una antiderivada de f, entonces $F(x) + C$ también es una antiderivada de f, donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo Ilustrativo de Antiderivada

Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = 2x$. Encontremos sus antiderivadas.

Solución:

Buscamos una función $F(x)$ tal que $F'(x) = 2x$.

Observamos que si $F(x) = x^2$, entonces:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Por lo tanto, $F(x) = x^2$ es una antiderivada de $f(x) = 2x$.

Además, $F(x) = x^2 + C$ también es antiderivada de $f(x) = 2x$ para cualquier constante $C \in \mathbb{R}$.

Teorema de Representación de Antiderivadas

Teorema (Representación de Antiderivadas)

Sea F una antiderivada de f en un intervalo I. Entonces, G es una antiderivada de f en el intervalo I si y solo si G es de la forma

$$G(x) = F(x) + C$$

para alguna constante C.

En otras palabras: Dos antiderivadas cualesquiera de una función dada difieren únicamente en una constante.

Demostración del Teorema de Representación de Antiderivadas

Demostración.

Sea F una antiderivada de f en I, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Supongamos que G es otra antiderivada de f en I, entonces $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Consideremos la función $H(x) = G(x) - F(x)$. Calculemos su derivada:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Como $H'(x) = 0$ para todo $x \in I$, por el Teorema del Valor Medio, $H(x)$ es constante en I.

Por lo tanto, existe una constante C tal que:

$$H(x) = C \quad \Rightarrow \quad G(x) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad G(x) = F(x) + C$$

$\square$

Diferencia entre Integral Definida e Indefinida

Integral Indefinida

La **integral indefinida** de $f(x)$ se denota por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde $F'(x) = f(x)$ y C es una constante arbitraria. Representa la familia de todas las antiderivadas de f.

Integral Definida

La **integral definida** de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se denota por:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Representa un número real que corresponde al área neta bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$.

Reglas Básicas de Integración

Teorema (Reglas Básicas de Integración)

Sean f y g funciones integrables, y sea k una constante:

1. **Regla de la constante:** $\displaystyle\int k\,dx = kx + C$
2. **Regla de la potencia:** $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. **Múltiplo constante:** $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
4. **Suma y resta:** $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Reglas Básicas de Integración (continuación)

Teorema (Fórmulas Adicionales de Integración)

5. $\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
6. $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
7. $\displaystyle\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$
8. $\displaystyle\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + C$

Ejemplo 1: Integral Indefinida

Ejemplo

Calcular $\int (3x^2 + 5x - 7)\, dx$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\int (3x^2 + 5x - 7)\, dx &= \int 3x^2\, dx + \int 5x\, dx - \int 7\, dx \\
&= 3 \int x^2\, dx + 5 \int x\, dx - 7 \int 1\, dx \\
&= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 7x + C \\
&= x^3 + \frac{5x^2}{2} - 7x + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2: Integral Indefinida

Ejemplo

Calcular $\int \left(4\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)\, dx$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\int \left(4\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)\, dx &= \int \left(4x^{1/2} + 3x^{-2}\right)\, dx \\
&= 4\int x^{1/2}\, dx + 3\int x^{-2}\, dx \\
&= 4 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C \\
&= \frac{8x^{3/2}}{3} - \frac{3}{x} + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3: Integral Indefinida

Ejemplo

Calcular $\int (\sin(x) + 2\cos(x))\, dx$

Solución:

$$\begin{aligned} \int (\sin(x) + 2\cos(x))\, dx &= \int \sin(x)\, dx + 2\int \cos(x)\, dx \\ &= -\cos(x) + 2\sin(x) + C \end{aligned}$$

Verificación:

$$\frac{d}{dx}[-\cos(x) + 2\sin(x) + C] = \sin(x) + 2\cos(x) \quad \checkmark$$

Ejemplo 4: Integral Indefinida

Ejemplo

Calcular $\int \left(4x^3 - 2x^2 + 5x^{1/2} - 6x + 8x^5 - 3x^{3/2}\right)\, dx$

Solución:

Integramos término a término:

$$\int \left(4x^3 - 2x^2 + 5x^{1/2} - 6x + 8x^5 - 3x^{3/2}\right)\, dx$$

$$= 4\int x^3\, dx - 2\int x^2\, dx + 5\int x^{1/2} dx - 6\int x\, dx + 8\int x^5 dx - 3\int x^{3/2} dx$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 8 \cdot \frac{x^6}{6} - 3 \cdot \frac{x^{5/2}}{5/2} + C$$

$$= x^4 - \frac{2x^3}{3} + \frac{10x^{3/2}}{3} - 3x^2 + \frac{4x^6}{3} - \frac{6x^{5/2}}{5} + C$$

Aproximación del Área usando Rectángulos

Ejemplo

Aproximar el área bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ usando 4 rectángulos inscritos y circunscritos.

Solución:
Dividimos el intervalo $[0, 2]$ en 4 subintervalos iguales: $\Delta x = \frac{2-0}{4} = 0{,}5$
Los puntos de partición son: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1{,}5$, $x_4 = 2$

Suma inferior (rectángulos inscritos): Como f es creciente, usamos el extremo izquierdo:

$$S_n = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x = 0{,}5[f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5)]$$
$$= 0{,}5[0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25] = 0{,}5(3{,}5) = 1{,}75$$

Aproximación del Área usando Rectángulos (continuación)

Suma superior (rectángulos circunscritos):
Como f es creciente, usamos el extremo derecho:

$$S_n = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x = 0{,}5[f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2)]$$
$$= 0{,}5[0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4] = 0{,}5(7{,}5) = 3{,}75$$

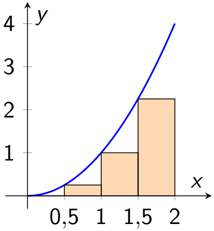
Conclusión:
El área exacta bajo la curva se encuentra entre los valores:

$$1{,}75 \leq \text{Área} \leq 3{,}75$$

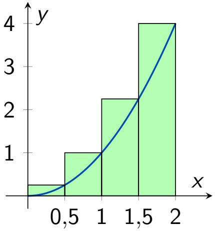
Nota: El valor exacto es $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$

Gráfica de la Aproximación

Rectángulos Inscritos



Rectángulos Circunscritos



Definición del Área de una Región en el Plano

Definición (Área de una Región en el Plano)

Sea f una función continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$. El **área de la región** acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ se denota por:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

donde:

- c_i es un punto en el i-ésimo subintervalo
- $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ es el ancho de cada subintervalo
- n es el número de subdivisiones

Definición de Norma de la Partición

Definición (Partición de un Intervalo)

Una **partición** P del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definición (Norma de una Partición)

La **norma** (o **malla**) de la partición P, denotada por $\|P\|$, es la longitud del subintervalo más grande:

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición de Suma de Riemann

Definición (Suma de Riemann)

Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea P una partición de $[a, b]$:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, elegimos un punto arbitrario $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. La **suma de Riemann** de f para la partición P es:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Nota: Dependiendo de la elección de los puntos c_i, obtenemos diferentes tipos de sumas de Riemann (izquierda, derecha, punto medio).

Definición de Integral Definida

Definición (Integral Definida)

Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si existe el límite:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

y este límite es el mismo para todas las elecciones de c_i en cada subintervalo, entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se llama la **integral definida** de f de a a b, denotada por:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Notación:

- a es el **límite inferior de integración**
- b es el **límite superior de integración**
- $f(x)$ es el **integrando**

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b$$

entonces:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

para todo x en el intervalo abierto (a, b).

Interpretación: Este teorema establece que la derivada de una integral definida con límite superior variable es el integrando evaluado en ese límite superior.

Demostración del Primer Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 1)

Demostración.

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Por la definición de derivada:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Calculemos $F(x+h) - F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

□

Demostración del Primer Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 2)

Demostración (continuación).

Por lo tanto:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Para completar la demostración, usaremos el Teorema del Valor Medio para Integrales. $\square$

Demostración del Primer Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 2)

Demostración (continuación).

Como f es continua en $[x, x+h]$, por el Teorema del Valor Medio para Integrales, existe un punto c en $(x, x+h)$ tal que:

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \cdot h$$

Sustituyendo:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} f(c)$$

Cuando $h \to 0$, tenemos que $c \to x$ (ya que $x < c < x+h$). Como f es continua:

$$F'(x) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

Por lo tanto, $F'(x) = f(x)$. □

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, es decir, $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Notación: Frecuentemente se escribe:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Interpretación: Este teorema proporciona un método práctico para evaluar integrales definidas sin necesidad de calcular límites de sumas de Riemann.

Demostración del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 1)

Demostración.

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ donde:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Como $F'(x) = f(x)$, por el Teorema del Valor Medio aplicado a F en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe un punto $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. □

Demostración del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 2)

Demostración (continuación).

Sumando sobre todos los subintervalos:

$$\sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

El lado izquierdo es una suma telescópica:

$$\begin{aligned}&[F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})]\\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Tomando el límite cuando $\|P\| \to 0$:

Ejemplo 1: Integral Definida

Ejemplo

Evaluar $\int_1^3 (2x+1)\,dx$

Solución:
Primero encontramos una antiderivada de $f(x) = 2x + 1$:

$$F(x) = x^2 + x$$

Aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (2x+1)\,dx &= \left[x^2 + x\right]_1^3 \\
&= [3^2 + 3] - [1^2 + 1] \\
&= [9 + 3] - [1 + 1] \\
&= 12 - 2 = 10
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Integral Definida

Ejemplo

Evaluar $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx$

Solución:

Una antiderivada de $f(x) = \sin(x)$ es $F(x) = -\cos(x)$.

Aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx &= [-\cos(x)]_0^{\pi/2} \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - [-\cos(0)] \\
&= -(0) + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Integral Definida

Ejemplo

Evaluar $\int_2^5 (x^2 + 2x)\,dx$

Solución:
Una antiderivada de $f(x) = x^2 + 2x$ es $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$.
Aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned}
\int_2^5 (x^2 + 2x)\,dx &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_2^5 \\
&= \left[\frac{125}{3} + 25\right] - \left[\frac{8}{3} + 4\right] \\
&= \left(\frac{125}{3} + \frac{75}{3}\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{12}{3}\right) \\
&= \frac{200}{3} - \frac{20}{3} = \frac{180}{3} = 60
\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Integral Definida

Ejemplo

Evaluar $\displaystyle\int_{-1}^{2} (3x^2 - 4x + 2)\, dx$

Solución:

Una antiderivada de $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ es $F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (3x^2 - 4x + 2)\, dx &= \left[x^3 - 2x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} \\ &= [8 - 8 + 4] - [(-1) - 2 + (-2)] \\ &= 4 - (-5) \\ &= 9\end{aligned}$$

Teorema de Integración por Sustitución

Teorema (Integración por Sustitución)

Sea $u = g(x)$ una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, y sea f una función continua en I. Entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(g(x)) + C$$

Forma práctica: Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, y:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Para integrales definidas:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Ejemplo 1: Integración por Sustitución (Parte 1)

Ejemplo

Calcular $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Solución:

Hacemos la sustitución: $u = x^2 + 1$

Entonces: $du = 2x\,dx$

Ejemplo 1: Integración por Sustitución (Parte 2)

Ejemplo

Continuación:

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,du \\
&= \int u^{1/2}\,du \\
&= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\
&= \frac{2u^{3/2}}{3} + C \\
&= \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Integración por Sustitución (Parte 1)

Ejemplo

Calcular $\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$

Solución:

Hacemos la sustitución: $u = x^2 + 3$

Entonces: $du = 2x\,dx$, lo que implica $x\,dx = \frac{1}{2}du$

Ejemplo 2: Integración por Sustitución (Parte 2)

Ejemplo

Continuación:

Sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx &= \int \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+C \\
&= -\frac{1}{2u}+C = -\frac{1}{2(x^2+3)}+C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3: Integración por Sustitución

Ejemplo

Calcular $\int \sin(3x)\,dx$

Solución:
Hacemos la sustitución: $u = 3x$
Entonces: $du = 3\,dx$, lo que implica $dx = \frac{1}{3}du$
Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\,dx &= \int \sin(u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\ &= \frac{1}{3}\int \sin(u)\,du \\ &= \frac{1}{3}(-\cos(u)) + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x) + C\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Integración por Sustitución (Integral Definida) – Parte 1

Ejemplo

Calcular $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

Solución:

Hacemos la sustitución: $u = x^2 + 1$, entonces $du = 2x\,dx$, es decir, $x\,dx = \frac{1}{2}du$

Cambiamos los límites de integración:

- Cuando $x = 0$: $u = 0^2 + 1 = 1$
- Cuando $x = 1$: $u = 1^2 + 1 = 2$

Ejemplo 4: Integración por Sustitución (Integral Definida) – Parte 2

Ejemplo

Continuación:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx &= \int_1^2 u^3 \cdot \frac{1}{2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{8}[u^4]_1^2 \\
&= \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

¡Gracias!

Preguntas y Comentarios