Aplicaciones de la Derivada — Parte I

Cálculo I
R.M

Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias
UASD

18 de octubre de 2025

Tabla de Contenidos

1. Extremos
2. Puntos Críticos
3. Rolle y Teo. Valor Medio
4. Monotonía y CPD
5. Concavidad e Inflexión
6. Límites al Infinito y Asíntotas
7. Análisis de Graficas

1 Extremos

2 Puntos Críticos

3 Rolle y Teo. Valor Medio

4 Monotonía y CPD

5 Concavidad e Inflexión

6 Límites al Infinito y Asíntotas

7 Análisis de Graficas

Definición de Extremos

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Decimos que* f *tiene un* **máximo absoluto** *en* $c \in D$ *si* $f(c) \geq f(x)$ *para todo* $x \in D$. *Análogamente,* f *tiene un* **mínimo absoluto** *en* c *si* $f(c) \leq f(x)$ *para todo* $x \in D$.

Definición de Extremos

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene un **máximo absoluto** *en $c \in D$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D$. Análogamente, f tiene un* **mínimo absoluto** *en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D$.*

Definición

Sea I un intervalo y $c \in I$. Diremos que f tiene un **máximo relativo** *(o local) en c si existe un intervalo abierto $\mathcal{U}$ de c tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathcal{U} \cap I$. De forma análoga se define el* **mínimo relativo***.*

Ejemplo Gráfico de Máximo y Mínimo

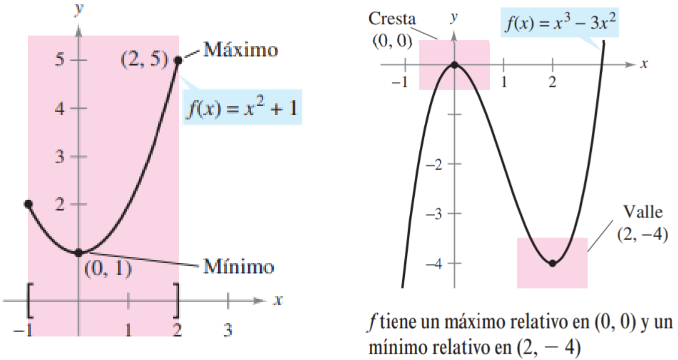


Figura 1: Libro Larson 9na. Edición

Teorema del Valor Extremo (TVE)

Teorema (Valor Extremo)

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a, b]$; es decir, existen $x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}} \in [a, b]$ tales que

$$f(x_{\text{mín}}) \leq f(x) \leq f(x_{\text{máx}}) \quad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

1 Extremos

2 Puntos Críticos

3 Rolle y Teo. Valor Medio

4 Monotonía y CPD

5 Concavidad e Inflexión

6 Límites al Infinito y Asíntotas

7 Análisis de Graficas

Definición de Punto Crítico

Definición

Sea f definida en un intervalo abierto que contiene c. El número c es un **punto crítico** *de f si $f'(c) = 0$ o si f' no existe en c.*

Ejemplo

Para $f(x) = x^{2/3}$, se tiene $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, que no existe en $x = 0$. Luego, 0 es punto crítico.

Ilustración Gráfica de Punto Crítico

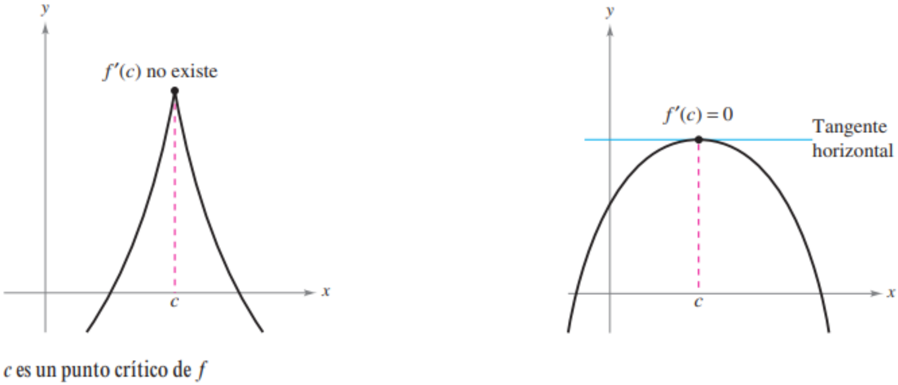


Figura 2: Libro Larson 9na. Edición

Fermat: Extremos Relativos y Puntos Críticos

Teorema (Fermat: Los extremos relativos ocurren sólo en números o puntos críticos)

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

Fermat: Extremos Relativos y Puntos Críticos

Teorema (Fermat: Los extremos relativos ocurren sólo en números o puntos críticos)

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

Demostración

Caso 1: Si f no es derivable en $x = c$, entonces, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema es válido.

Fermat: Extremos Relativos y Puntos Críticos

Teorema (Fermat: Los extremos relativos ocurren sólo en números o puntos críticos)

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

Demostración

Caso 1: Si f no es derivable en $x = c$, entonces, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema es válido.

Caso 2: Suponga que f tiene un máximo relativo en c. Para $h > 0$ suficientemente pequeño, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$; para $h < 0$ suficientemente pequeño, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$. Si el límite existe, ambas cotas fuerzan $f'(c) = 0$. El caso de mínimo es análogo. $\square$

Fermat: Extremos Relativos y Puntos Críticos

Teorema (Fermat: Los extremos relativos ocurren sólo en números o puntos críticos)

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

Demostración

Caso 1: Si f no es derivable en $x = c$, entonces, por definición, c es un punto crítico de f y el teorema es válido.

Caso 2: Suponga que f tiene un máximo relativo en c. Para $h > 0$ suficientemente pequeño, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$; para $h < 0$ suficientemente pequeño, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$. Si el límite existe, ambas cotas fuerzan $f'(c) = 0$. El caso de mínimo es análogo. □

Ejemplo

$f(x) = x^3 - 3x$ tiene puntos críticos en $x = \pm 1$. Se verifica que $x = -1$ es máximo relativo y $x = 1$ mínimo relativo.

1 Extremos

2 Puntos Críticos

3 Rolle y Teo. Valor Medio

4 Monotonía y CPD

5 Concavidad e Inflexión

6 Límites al Infinito y Asíntotas

7 Análisis de Graficas

Teorema de Rolle

Teorema (Rolle)

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Teorema (Rolle)

Si f *es continua en* $[a, b]$, *derivable en* (a, b) *y* $f(a) = f(b)$, *entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demostración

Caso 1: Si $f(x) = d$ para todo x en $[a, b]$, f es constante en el intervalo y, por tanto, $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b).

Teorema de Rolle

Teorema (Rolle)

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración

Caso 1: Si $f(x) = d$ para todo x en $[a, b]$, f es constante en el intervalo y, por tanto, $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b).

Caso 2: Suponer que $f(x) > d$ para algún x en (a, b). Por el teorema del valor extremo, se sabe que f tiene un máximo en algún punto c en el intervalo. Además, como $f(c) > d$, este máximo no puede estar en los puntos terminales. De tal modo, f tiene un máximo en el intervalo *abierto* (a, b). Esto implica que $f(c)$ es un máximo *relativo* y, por el teorema de Fermat, c es un número crítico de f. Por último, como f es derivable en c, es posible concluir que $f'(c) = 0$.

Teorema de Rolle (continuación)

Demostración

Caso 3: Si $f(x) < d$ para algún x en (a, b), se puede utilizar un argumento similar al del caso 2, pero implicando el mínimo en vez del máximo.

Ejemplo

$f(x) = \cos x$ en $[0, 2\pi]$: $f(0) = f(2\pi) = 1$. Existe c con $f'(c) = -\sin c = 0$, por ejemplo $c = \pi$.

Teorema de Rolle (continuación)

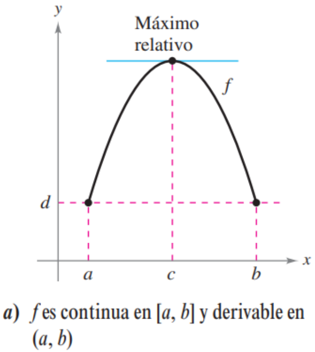


Figura 3: Cálculo Larson 9na. Edición

Teorema del Valor Medio (TVM)

Teorema (Valor Medio)

Si f *es continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b), *entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Teorema del Valor Medio (TVM)

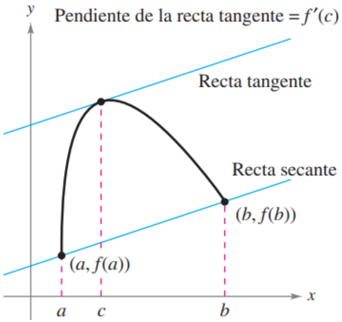


Figura 4: Cálculo Larson 9na. Edición

Demostración del Teorema del Valor Medio

Demostración

Considérese $g(x) = f(x) - \ell(x)$, donde ℓ es la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Entonces $g(a) = g(b) = 0$ y, por Rolle, existe c con $g'(c) = 0$, es decir, $f'(c) = \ell'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

1. Extremos
2. Puntos Críticos
3. Rolle y Teo. Valor Medio
4. Monotonía y CPD
5. Concavidad e Inflexión
6. Límites al Infinito y Asíntotas
7. Análisis de Graficas

Funciones Crecientes y Decrecientes

Definición (Función Creciente)

f *es* **creciente** *en* I *si para cualesquiera* $x_1 < x_2$ *en* I *se cumple* $f(x_1) \leq f(x_2)$. *Es* **estrictamente creciente** *si* $f(x_1) < f(x_2)$.

Funciones Crecientes y Decrecientes

Definición (Función Creciente)

f *es* **creciente** *en* I *si para cualesquiera* $x_1 < x_2$ *en* I *se cumple* $f(x_1) \leq f(x_2)$. *Es* **estrictamente creciente** *si* $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición (Función Decreciente)

f *es* **Decreciente** *en* I *si para cualesquiera* $x_1 < x_2$ *en* I *se cumple* $f(x_1) \geq f(x_2)$. *Es* **estrictamente decreciente** *si* $f(x_1) > f(x_2)$.

Criterio de Monotonía (con derivadas)

Teorema

Sea f derivable en un intervalo I.

- *Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I.*
- *Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.*

Criterio de Monotonía (con derivadas)

Teorema

Sea f derivable en un intervalo I.

- *Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I.*
- *Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I.*

Demostración

Sean $x_1 < x_2$ en I. Por el TVM, existe $c \in (x_1, x_2)$ con $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Si $f'(x) \geq 0$ en I, en particular $f'(c) \geq 0$, de donde $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. El caso decreciente es análogo. $\square$

Ilustración Gráfica de Crecimiento y Decrecimiento

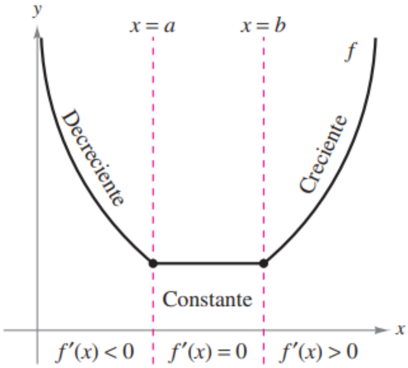


Figura 5: Libro Larson 9na. Edición

Criterio de la Primera Derivada

Teorema

Sea c un punto crítico de f (es decir, $f'(c) = 0$), y sea f derivable en un intervalo abierto que contiene a c salvo quizá en c. Entonces:

- *Si f' cambia de signo de positivo a negativo al pasar por c, entonces f tiene un máximo relativo en c.*

Criterio de la Primera Derivada

Teorema

Sea c un punto crítico de f (es decir, $f'(c) = 0$), y sea f derivable en un intervalo abierto que contiene a c salvo quizá en c. Entonces:

- *Si f' cambia de signo de positivo a negativo al pasar por c, entonces f tiene un máximo relativo en c.*
- *Si f' cambia de signo de negativo a positivo al pasar por c, entonces f tiene un mínimo relativo en c.*

Criterio de la Primera Derivada

Teorema

Sea c un punto crítico de f (es decir, $f'(c) = 0$), y sea f derivable en un intervalo abierto que contiene a c salvo quizá en c. Entonces:

- *Si f' cambia de signo de positivo a negativo al pasar por c, entonces f tiene un máximo relativo en c.*
- *Si f' cambia de signo de negativo a positivo al pasar por c, entonces f tiene un mínimo relativo en c.*
- *Si f' no cambia de signo al pasar por c, entonces f no tiene extremo relativo en c.*

Demostración del Criterio de la Primera Derivada

Demostración

Supongamos que $f'(c) = 0$.

- Si f' pasa de positivo a negativo en c, entonces para $x < c$, $f'(x) > 0$ (la función crece) y para $x > c$, $f'(x) < 0$ (la función decrece). Así, f alcanza un máximo relativo en c.

Demostración del Criterio de la Primera Derivada

Demostración

Supongamos que $f'(c) = 0$.

- Si f' pasa de positivo a negativo en c, entonces para $x < c$, $f'(x) > 0$ (la función crece) y para $x > c$, $f'(x) < 0$ (la función decrece). Así, f alcanza un máximo relativo en c.
- Si f' pasa de negativo a positivo, entonces f decrece antes de c y crece después, por lo que f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración del Criterio de la Primera Derivada

Demostración

Supongamos que $f'(c) = 0$.

- Si f' pasa de positivo a negativo en c, entonces para $x < c$, $f'(x) > 0$ (la función crece) y para $x > c$, $f'(x) < 0$ (la función decrece). Así, f alcanza un máximo relativo en c.
- Si f' pasa de negativo a positivo, entonces f decrece antes de c y crece después, por lo que f tiene un mínimo relativo en c.
- Si f' no cambia de signo, f es monótona antes y después de c, por lo que no hay extremo relativo.

$\square$

Criterio de la Primera Derivada (continuación)

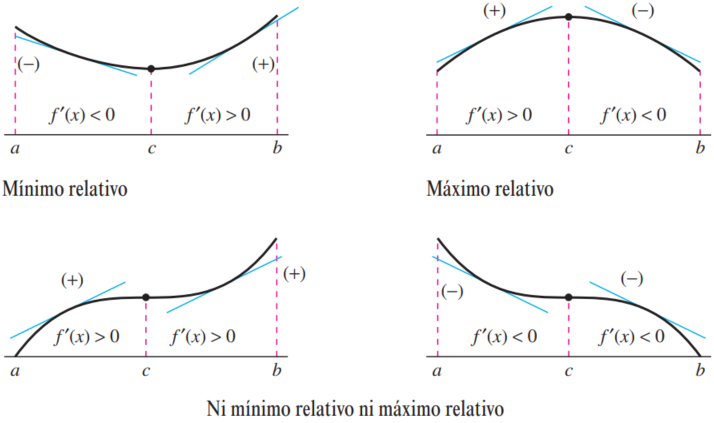


Figura 6: Cálculo Larson 9na. Edición

1 Extremos

2 Puntos Críticos

3 Rolle y Teo. Valor Medio

4 Monotonía y CPD

5 Concavidad e Inflexión

6 Límites al Infinito y Asíntotas

7 Análisis de Graficas

Definición de Concavidad

Definición

Sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I si f' es creciente en el intervalo y cóncava hacia abajo en I si f' es decreciente en el intervalo.

Ilustración Gráfica de Concavidad

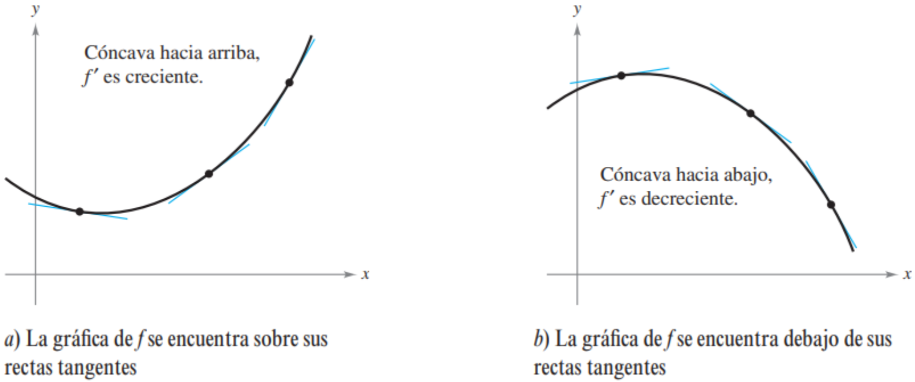


Figura 7: Libro Larson 9na. Edición

Criterio de Concavidad

Teorema

Si f es dos veces derivable en I: $f''(x) > 0$ en I implica concavidad hacia arriba; $f''(x) < 0$ en I implica concavidad hacia abajo.

Demostración

Por el TVM aplicado a f' en subintervalos, si $f'' > 0$, entonces f' es creciente y, en consecuencia, las pendientes de las tangentes aumentan: la gráfica queda por encima de sus tangentes. El caso $f'' < 0$ es análogo. $\square$

Punto de Inflexión

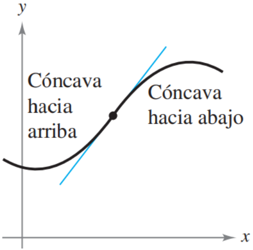
Definición

Sea f una función continua en un intervalo abierto I y sea $c \in I$. Decimos que el punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** *de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o viceversa, al pasar por c.*

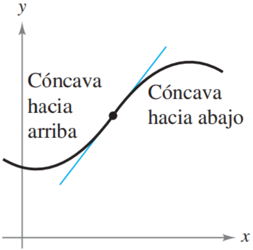
Teorema

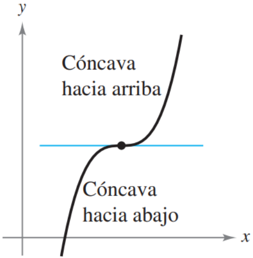
Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.

Punto de Inflexión (continuación)

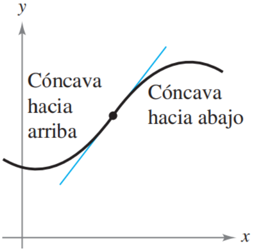


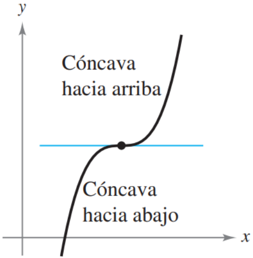
Punto de Inflexión (continuación)

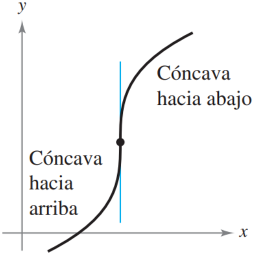




Punto de Inflexión (continuación)







Punto de Inflexión (continuación)

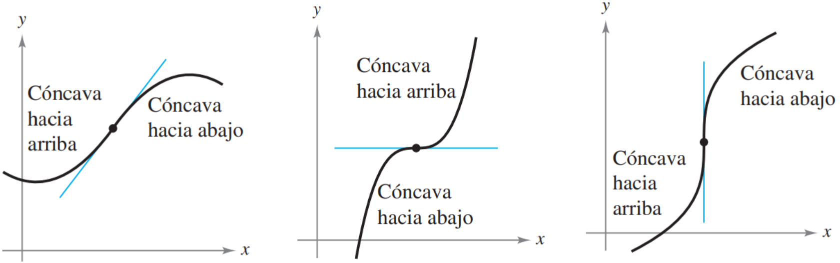


Figura 8: Cálculo Larson 9na. Edición

Criterio de la Segunda Derivada

Teorema (Criterio de la Segunda Derivada)

Sea c un punto crítico de f con $f''(c)$ existente.

- *Si $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo relativo en c.*

Criterio de la Segunda Derivada

Teorema (Criterio de la Segunda Derivada)

Sea c un punto crítico de f con $f''(c)$ existente.

- *Si $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo relativo en c.*
- *Si $f''(c) < 0$, f tiene un máximo relativo en c.*

Criterio de la Segunda Derivada

Teorema (Criterio de la Segunda Derivada)

Sea c un punto crítico de f con $f''(c)$ existente.

- *Si $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo relativo en c.*
- *Si $f''(c) < 0$, f tiene un máximo relativo en c.*
- *Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizá tenga un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada.*

1. Extremos
2. Puntos Críticos
3. Rolle y Teo. Valor Medio
4. Monotonía y CPD
5. Concavidad e Inflexión
6. Límites al Infinito y Asíntotas
7. Análisis de Graficas

Tabla Numérica: Comportamiento hacia el Infinito

Consideremos $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+2}$. Se tiene $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$.

x	$f(x)$
10	$\frac{301}{102} \approx 2{,}951$
100	$\frac{30001}{10002} \approx 2{,}999$
-10	$\frac{301}{102} \approx 2{,}951$
-100	$\frac{30001}{10002} \approx 2{,}999$

Límites al Infinito: Definición

Definición

Sea L un número real.

1. *El enunciado* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ *significa que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $M > 0$ *tal que*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \textit{siempre que } x > M.$$

Límites al Infinito: Definición

Definición

Sea L un número real.

1. *El enunciado* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ *significa que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $M > 0$ *tal que*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \textit{siempre que } x > M.$$

2. *El enunciado* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ *significa que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N < 0$ *tal que*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \textit{siempre que } x < N.$$

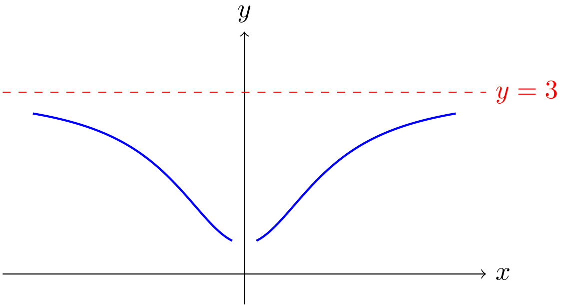
Asíntota Horizontal

Definición

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** *de la gráfica de f si*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Asíntota Horizontal: Ilustración



Teorema de Límites al Infinito

Teorema

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r se define cuando $x < 0$, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Cálculo de Límites al Infinito: Ejemplo 1

Ejemplo

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 2x}{x^3 + 1}$$

Antes de aplicar el método, notamos que al sustituir $x \to \infty$, tanto el numerador $5x^3 - 2x$ como el denominador $x^3 + 1$ tienden a infinito. Es decir, la expresión tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Cálculo de Límites al Infinito: Ejemplo 1

Ejemplo

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 2x}{x^3 + 1}$$

Antes de aplicar el método, notamos que al sustituir $x \to \infty$, tanto el numerador $5x^3 - 2x$ como el denominador $x^3 + 1$ tienden a infinito. Es decir, la expresión tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Desarrollo: Dividimos numerador y denominador entre x^3:

$$\frac{5x^3 - 2x}{x^3 + 1} = \frac{5 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}}$$

Cuando $x \to \infty$, $\frac{2}{x^2} \to 0$ y $\frac{1}{x^3} \to 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{5 - 0}{1 + 0} = 5$$

Cálculo de Límites al Infinito: Ejemplo 2

Ejemplo

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 7}{-x^2 + 3}$$

Antes de aplicar el método, note que al sustituir $x \to -\infty$, el numerador $2x^2 + 7$ y el denominador $-x^2 + 3$ tienden a infinito ($2x^2$ y $-x^2$ son dominantes y de grado mayor que las constantes), así que la expresión resulta en la forma indeterminada $\frac{\infty}{-\infty}$.

Cálculo de Límites al Infinito: Ejemplo 2

Ejemplo

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+7}{-x^2+3}$$

Antes de aplicar el método, note que al sustituir $x \to -\infty$, el numerador $2x^2+7$ y el denominador $-x^2+3$ tienden a infinito ($2x^2$ y $-x^2$ son dominantes y de grado mayor que las constantes), así que la expresión resulta en la forma indeterminada $\frac{\infty}{-\infty}$. **Desarrollo:** Dividimos numerador y denominador entre x^2:

$$\frac{2x^2+7}{-x^2+3} = \frac{2+\frac{7}{x^2}}{-1+\frac{3}{x^2}}$$

Cuando $x \to -\infty$, $\frac{7}{x^2} \to 0$ y $\frac{3}{x^2} \to 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{7}{x^2}}{-1+\frac{3}{x^2}} = \frac{2}{-1} = -2$$

Cálculo de Límites al Infinito: Ejemplo 3

Ejemplo

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+1}{x^2+3}$$

Antes de aplicar el método, observamos que al sustituir $x \to \infty$, el numerador $4x+1$ tiende a infinito y el denominador x^2+3 también tiende a infinito, por lo tanto la expresión tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. **Desarrollo:** Dividimos numerador y denominador entre x^2:

$$\frac{4x+1}{x^2+3} = \frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}$$

Cuando $x \to \infty$, $\frac{4}{x} \to 0$ y $\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{3}{x^2} \to 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

Límites Infinitos y Asíntotas Oblicuas

Definición

Decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *si para todo* $M > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $0 < |x - a| < \delta$ *implica* $|f(x)| > M$.

Definición

Una **asíntota oblicua** *es una recta* $y = mx + b$ *tal que* $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$ *(o al menos para* $x \to -\infty$*). En funciones racionales propias, si* $\deg$ *numerador* $= \deg$ *denominador + 1, entonces existe y se obtiene por división sintética.*

1. Extremos
2. Puntos Críticos
3. Rolle y Teo. Valor Medio
4. Monotonía y CPD
5. Concavidad e Inflexión
6. Límites al Infinito y Asíntotas
7. Análisis de Graficas

Análisis: Dominio e intersecciones de $f(x) = \dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$

1. Dominio:

El denominador se anula en $x^2 - 4 = 0$, es decir, en $x = 2$ y $x = -2$.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

2. Intersecciones con los ejes:

- **Intersecciones con el eje x:** Se resuelve $f(x) = 0$:

$$2(x^2 - 9) = 0 \implies x^2 - 9 = 0 \implies x^2 = 9 \implies x = 3, x = -3$$

Por lo tanto, interseca al eje x en $x = -3$ y $x = 3$.

- **Intersección con el eje y:**

$f(0) = \dfrac{2(0^2-9)}{0^2-4} = \dfrac{2(-9)}{-4} = \dfrac{-18}{-4} = \dfrac{9}{2}$.

Interseca al eje y en $(0,\ 9/2)$.

Asíntotas de $f(x) = \dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$

3. Asíntotas:

- **Asíntotas verticales:** Denominador nulo y numerador no nulo:

$$x^2 - 4 = 0 \implies x = -2,\, x = 2$$

Asíntotas verticales: $x = -2,\, x = 2$

- **Asíntotas horizontales:**
Calculamos el límite cuando $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x^2-9)}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{18}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = 2$$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Comportamiento final y derivada de $f(x)$

4. Primera Derivada:

$$f(x) = \frac{2(x^2-9)}{x^2-4}$$

Derivada por cociente:

$$f'(x) = \frac{2\cdot 2x(x^2-4) - 2(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x(x^2-4) - 4x(x^2-9)}{(x^2-4)^2}$$

Expandimos:

$$4x(x^2-4)-4x(x^2-9) = 4xx^2-16x-(4xx^2-36x) = [4x^3-16x]-[4x^3-36x] = (4x^3-16x)-4x^3+36x = 20$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f'(x) = \frac{20x}{(x^2-4)^2}}$$

Puntos críticos y segunda derivada

5. Puntos críticos:
Resolvemos $f'(x) = 0$:

$$\frac{20x}{(x^2-4)^2} = 0 \implies x = 0$$

0 está en el dominio $(0 \neq \pm 2)$.
Punto crítico: $x = 0$ (calculamos $f(0) = 9/2$).

Segunda derivada de $f(x)$

6. Segunda Derivada:

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2-4)^2}$$

Aplicando la regla del cociente:

$$f''(x) = \frac{20(x^2-4)^2 - 20x \cdot 2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4}$$

Primero, $[g(x)]' = 2(x^2-4)2x = 4x(x^2-4)$
Luego,

$$f''(x) = \frac{20(x^2-4)^2 - 40x[2x(x^2-4)]}{(x^2-4)^4} = \frac{20(x^2-4)^2 - 80x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

Simplificación de $f''(x)$

Factorizamos $x^2 - 4$:

$$f''(x) = \frac{20(x^2-4)[x^2-4-4x^2]}{(x^2-4)^4} = \frac{20(x^2-4)[-3x^2-4]}{(x^2-4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{20(x^2-4)(-3x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

Podemos cancelar un factor $x^2 - 4$ en el numerador y en el denominador (siempre que $x \neq \pm 2$), lo que reduce la expresión a:

$$f''(x) = \frac{20(-3x^2-4)}{(x^2-4)^3}$$

Puntos de inflexión de f(x)

7. Puntos de inflexión (posibles):

Para hallar los posibles puntos de inflexión, igualamos la segunda derivada obtenida anteriormente a cero:

$$f''(x) = \frac{20(-3x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^3} = 0$$

El numerador se anula cuando $-3x^2 - 4 = 0$:

$$-3x^2 - 4 = 0 \implies x^2 = -\frac{4}{3}$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, ya que x^2 no puede ser negativo. Note que también el denominador se anula en $x = \pm 2$, pero esos puntos no pertenecen al dominio de la función.

Por lo tanto, no hay puntos de inflexión reales para esta función.

Conclusión: No hay puntos de inflexión reales.

Crecimiento y decrecimiento de $f(x)$

8. Intervalos de prueba (crecimiento/decrecimiento): Consideramos los siguientes intervalos de prueba según el dominio de la función y las asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 2$:

$$(-\infty, -2), \qquad (-2, 0), \qquad (0, 2), \qquad (2, \infty)$$

En cada intervalo analizaremos el signo de $f'(x)$ y $f''(x)$.

Tabla

Intervalo	**f'(x)**	**f''(x)**	**Característica de la gráfica**
$-\infty < x < -2$	$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = -2$	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-2 < x < 0$	$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	0	Mínimo relativo
$0 < x < 2$	$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < \infty$	$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo

Cuadro 1: Signos de f'(x) y f''(x) y características de la gráfica de f(x).

Gráfica de $f(x)$

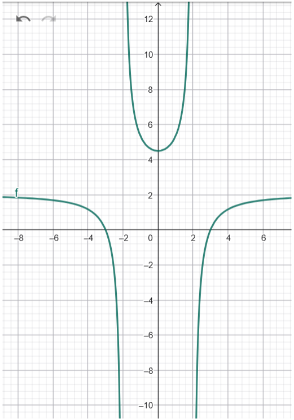


Figura 9: Gráfica de $f(x)$

Bibliografía

Ron Larson, *Cálculo de una Variable*, secciones sobre aplicaciones de la derivada: extremos, TVE, Rolle, TVM, pruebas con derivadas, concavidad e inflexión, y comportamiento asintótico.