Unidad III. Ecuaciones e Inecuaciones

R. M.

Matemáticas, UASD

2025

Tabla de Contenido

¿Qué es una Ecuación?

Definición

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, denominadas miembros, en las que aparecen constantes y variables (incógnitas).

$$\underbrace{3x - 5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{x + 3}_{\text{Segundo miembro}}$$

¿Qué es una Ecuación?

Definición

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, denominadas miembros, en las que aparecen constantes y variables (incógnitas).

$$\underbrace{3x-5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{x+3}_{\text{Segundo miembro}}$$

Tipos Principales

- **Ecuación de primer grado (Lineal):** La incógnita tiene exponente 1. Ej: $2x+1=5$.
- **Ecuación de segundo grado (Cuadrática):** La incógnita tiene exponente 2. Ej: $x^2-3x+2=0$.
- Existen ecuaciones de grado superior, con radicales, logarítmicas, exponenciales, etc.

Ecuación cont.

¿En qué consiste resolver una ecuación?

Consiste en encontrar el valor (o los valores) de la incógnita que hacen que la igualdad sea verdadera. A este conjunto de valores se le llama **conjunto solución**.

Solución de Ecuaciones Lineales

Ejemplo 1

$$\begin{aligned} 4x - 7 &= 13 \\ 4x &= 13 + 7 \\ 4x &= 20 \\ x &= \frac{20}{4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\begin{aligned} 5(y-1) &= 3(y+3) \\ 5y - 5 &= 3y + 9 \\ 5y - 3y &= 9 + 5 \\ 2y &= 14 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} + 1 &= \frac{z}{3} + 2 \\ \frac{z}{2} - \frac{z}{3} &= 2 - 1 \\ \frac{3z - 2z}{6} &= 1 \\ \frac{z}{6} &= 1 \\ z &= 6 \end{aligned}$$

Problema 1: Edades

Ana tiene el triple de la edad de su hijo. En 10 años, la edad de Ana será el doble de la de su hijo. ¿Qué edad tienen ahora?

Problema 1: Edades

Ana tiene el triple de la edad de su hijo. En 10 años, la edad de Ana será el doble de la de su hijo. ¿Qué edad tienen ahora?
Sea x la edad actual del hijo. Edad de Ana: $3x$.
Ecuación: $3x + 10 = 2(x + 10) \implies 3x + 10 = 2x + 20 \implies x = 10$
Solución: El hijo tiene 10 años y Ana tiene 30 años.

Aplicaciones de Ecuaciones Lineales

Problema 1: Edades

Ana tiene el triple de la edad de su hijo. En 10 años, la edad de Ana será el doble de la de su hijo. ¿Qué edad tienen ahora?

Sea x la edad actual del hijo. Edad de Ana: $3x$.

Ecuación: $3x + 10 = 2(x + 10) \implies 3x + 10 = 2x + 20 \implies x = 10$

Solución: El hijo tiene 10 años y Ana tiene 30 años.

Problema 2: Geometría

El largo de un rectángulo es 5 cm más que su ancho. Si su perímetro es de 50 cm, ¿cuáles son sus dimensiones?

Aplicaciones de Ecuaciones Lineales

Problema 1: Edades

Ana tiene el triple de la edad de su hijo. En 10 años, la edad de Ana será el doble de la de su hijo. ¿Qué edad tienen ahora?

Sea x la edad actual del hijo. Edad de Ana: $3x$.

Ecuación: $3x + 10 = 2(x + 10) \implies 3x + 10 = 2x + 20 \implies x = 10$

Solución: El hijo tiene 10 años y Ana tiene 30 años.

Problema 2: Geometría

El largo de un rectángulo es 5 cm más que su ancho. Si su perímetro es de 50 cm, ¿cuáles son sus dimensiones?

Sea w el ancho. Largo: $w + 5$. Perímetro: $2w + 2(w + 5) = 50$.

Ecuación: $2w + 2w + 10 = 50 \implies 4w = 40 \implies w = 10$

Solución: Ancho 10 cm, Largo 15 cm.

Problema 3: Costos

Un boleto de cine cuesta \$5 para niños y \$8 para adultos. Si se vendieron 100 boletos en total y se recaudaron \$710, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

Aplicaciones de Ecuaciones Lineales II

Problema 3: Costos

Un boleto de cine cuesta \$5 para niños y \$8 para adultos. Si se vendieron 100 boletos en total y se recaudaron \$710, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

Sea n el número de niños. Adultos: $100 - n$.

Ecuación: $5n + 8(100 - n) = 710 \implies 5n + 800 - 8n = 710 \implies -3n = -90 \implies n = 30$

Solución: 30 boletos de niño y 70 de adulto.

Recuerde que $|X| = a$ implica que $X = a$ o $X = -a$ (para $a \geq 0$).

Ejemplo 1: $|2x - 3| = 7$

Se plantean dos casos:

1. $2x - 3 = 7 \implies 2x = 10 \implies x = 5$
2. $2x - 3 = -7 \implies 2x = -4 \implies x = -2$

Conjunto Solución: $S = \{-2, 5\}$

Ejemplo 2: $|5 - \frac{x}{2}| = 1$

Se plantean dos casos:

1. $5 - \frac{x}{2} = 1 \implies 4 = \frac{x}{2} \implies x = 8$
2. $5 - \frac{x}{2} = -1 \implies 6 = \frac{x}{2} \implies x = 12$

Conjunto Solución: $S = \{8, 12\}$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales con varias incógnitas que se deben satisfacer simultáneamente.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales con varias incógnitas que se deben satisfacer simultáneamente.

Clasificación según su Solución

- **Consistente:** Tiene al menos una solución.
  - **Determinado:** Tiene una única solución.
  - **Indeterminado:** Tiene infinitas soluciones.
- **Inconsistente:** No tiene solución.

Definición

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales con varias incógnitas que se deben satisfacer simultáneamente.

Clasificación según su Solución

- **Consistente:** Tiene al menos una solución.
  - **Determinado:** Tiene una única solución.
  - **Indeterminado:** Tiene infinitas soluciones.
- **Inconsistente:** No tiene solución.

Sistema 2x2

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Su forma general es:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ por tres métodos.

1. Reducción

Multiplicamos la 1ra ecuación por 2:

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 14 \\ 3x - 2y = 0 \\ \hline 7x \qquad = 14 \\ x = 2 \end{array}$$

Sustituyendo:
$2(2) + y = 7 \implies y = 3.$
Sol: $(x, y) = (2, 3)$

Métodos de Solución para Sistemas 2x2

Resolveremos el sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ por tres métodos.

1. Reducción

Multiplicamos la 1ra ecuación por 2:

$$\begin{array}{rl} 4x + 2y &= 14 \\ 3x - 2y &= 0 \\ \hline 7x \quad\quad &= 14 \\ x &= 2 \end{array}$$

Sustituyendo:
$2(2) + y = 7 \implies y = 3.$
Sol: $(x, y) = (2, 3)$

2. Sustitución

Despejamos y de la 1ra:
$y = 7 - 2x.$
Sustituimos en la 2da:

$$\begin{aligned} 3x - 2(7 - 2x) &= 0 \\ 3x - 14 + 4x &= 0 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Luego: $y = 7 - 2(2) = 3.$
Sol: $(x, y) = (2, 3)$

Métodos de Solución para Sistemas 2x2

Resolveremos el sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ por tres métodos.

1. Reducción

Multiplicamos la 1ra ecuación por 2:

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 14 \\ 3x - 2y = 0 \\ \hline 7x \qquad = 14 \\ x = 2 \end{array}$$

Sustituyendo:
$2(2) + y = 7 \implies y = 3.$
Sol: $(x, y) = (2, 3)$

2. Sustitución

Despejamos y de la 1ra:
$y = 7 - 2x.$
Sustituimos en la 2da:

$$\begin{aligned} 3x - 2(7 - 2x) &= 0 \\ 3x - 14 + 4x &= 0 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Luego: $y = 7 - 2(2) = 3.$
Sol: $(x, y) = (2, 3)$

3. Igualación

Despejamos y de ambas:

$$y = 7 - 2x \quad \text{y} \quad y = \frac{3x}{2}$$

Igualamos:

$$\begin{aligned} 7 - 2x &= \frac{3x}{2} \\ 14 - 4x &= 3x \\ 14 &= 7x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Luego: $y = 7 - 2(2) = 3.$

Problema 1: Inversión

Una persona invierte un total de \$10,000 en dos cuentas. Una paga 5 % de interés anual y la otra 8 %. Si el interés total ganado en un año fue de \$680, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

Problema 1: Inversión

Una persona invierte un total de \$10,000 en dos cuentas. Una paga 5 % de interés anual y la otra 8 %. Si el interés total ganado en un año fue de \$680, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

x: monto al 5 %, y: monto al 8 %. Sistema: $\begin{cases} x + y = 10000 \\ 0{,}05x + 0{,}08y = 680 \end{cases}$

Solución: Invirtió \$4000 al 5 % y \$6000 al 8 %.

Problema 1: Inversión

Una persona invierte un total de \$10,000 en dos cuentas. Una paga 5 % de interés anual y la otra 8 %. Si el interés total ganado en un año fue de \$680, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

x: monto al 5 %, y: monto al 8 %. Sistema: $\begin{cases} x + y = 10000 \\ 0{,}05x + 0{,}08y = 680 \end{cases}$

Solución: Invirtió \$4000 al 5 % y \$6000 al 8 %.

Problema 2: Números

La suma de dos números es 55. Si el doble del primero supera en 10 al segundo, ¿cuáles son los números?

Aplicaciones de Sistemas de Ecuaciones 2x2

Problema 1: Inversión

Una persona invierte un total de \$10,000 en dos cuentas. Una paga 5 % de interés anual y la otra 8 %. Si el interés total ganado en un año fue de \$680, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

x: monto al 5 %, y: monto al 8 %. Sistema: $\begin{cases} x + y = 10000 \\ 0{,}05x + 0{,}08y = 680 \end{cases}$

Solución: Invirtió \$4000 al 5 % y \$6000 al 8 %.

Problema 2: Números

La suma de dos números es 55. Si el doble del primero supera en 10 al segundo, ¿cuáles son los números?

Sistema: $\begin{cases} x + y = 55 \\ 2x = y + 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 55 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

Solución: Los números son 21.67 y 33.33 (aproximadamente, o 65/3 y 100/3).

Ecuaciones de Segundo Grado

Definición

Una ecuación de segundo grado o cuadrática es una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0$$

Sus soluciones se llaman **raíces** de la ecuación.

Ecuaciones de Segundo Grado

Definición

Una ecuación de segundo grado o cuadrática es una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0$$

Sus soluciones se llaman **raíces** de la ecuación.

El Discriminante (Δ)

El discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, determina la naturaleza de las raíces sin resolver la ecuación.

- Si $\Delta > 0$: Dos raíces reales y distintas.
- Si $\Delta = 0$: Una raíz real de multiplicidad dos.
- Si $\Delta < 0$: Dos raíces complejas conjugadas.

Ecuaciones de Segundo Grado II

Métodos de Solución

1. **Factorización:** Si es posible, es el método más rápido.
2. **Fórmula General (o Cuadrática):** Funciona para todas las ecuaciones cuadráticas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solución por Factorización

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$(x-3)(x-2) = 0$$
$$\implies x-3=0 \text{ o } x-2=0$$
$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

Solución: $S = \{2, 3\}$

Solución por Factorización

2. $2x^2 - 8x = 0$

$$2x(x-4) = 0$$
$$\implies 2x=0 \text{ o } x-4=0$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

Solución: $S = \{0, 4\}$

Solución por Factorización y Fórmula General II

Solución por Fórmula General

1. $x^2 + 3x - 10 = 0$ $(a = 1, b = 3, c = -10)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-10}{2} = -5$$

Solución: $S = \{-5, 2\}$

Solución por Fórmula General

1. $x^2 + 3x - 10 = 0$ $(a = 1, b = 3, c = -10)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-10}{2} = -5$$

Solución: $S = \{-5, 2\}$

2. $x^2 - 4x + 1 = 0$

$(a = 1, b = -4, c = 1)$

Solución de Inecuaciones Lineales

Definición

Una desigualdad es un enunciado que relaciona dos cantidades o expresiones usando simbolos de $<, >, \leq, \geq$.

Una **inecuación lineal** es una desigualdad que involucra una expresión lineal. El objetivo es encontrar el conjunto de todos los números que la satisfacen.

Regla de Oro

Si se multiplica o divide ambos miembros de la inecuación por un número **negativo**, el sentido de la desigualdad se **invierte**.

Solución de Inecuaciones Lineales II

Ejemplos 1 y 2

1. $3x - 5 < 10$

$$3x < 15 \implies x < 5$$

Solución: $(-\infty, 5)$

2. $2 - 3x \geq 8$

$$-3x \geq 6 \implies x \leq \frac{6}{-3} \implies x \leq -2$$

Solución: $(-\infty, -2]$

Ejemplos 3 y 4

3. $5x + 1 \geq 2x - 8$

$$5x - 2x \geq -8 - 1 \implies 3x \geq -9 \implies x \geq -3$$

Solución: $[-3, \infty)$

4. $-1 < 2x - 5 \leq 3$

$$4 < 2x \leq 8 \implies 2 < x \leq 4$$

Solución: $(2, 4]$