

Integrales Impropias

Cálculo II

MATUASD

Escuela de Matemáticas
UASD

3 de noviembre de 2025

Contenido

- 1 Introducción a las Integrales Impropias
- 2 Tipos de Integrales Impropias
- 3 Integrales Impropias con Límites Infinitos
- 4 Ejemplos: Integrales con Límites Infinitos
- 5 Integrales Impropias con Integrandos Discontinuos
- 6 Ejemplos: Integrales con Integrandos Discontinuos
- 7 Aplicaciones de las Integrales Impropias

1

Motivación

Problema

La integral definida de Riemann $\int_a^b f(x) dx$ requiere:

- 1 Intervalo de integración $[a, b]$ finito
- 2 Función f acotada en $[a, b]$

¿Qué ocurre si alguna de estas condiciones falla?

- ¿Tiene sentido calcular $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$?
- ¿Podemos integrar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$?

Respuesta: Las *integrales impropias* extienden el concepto de integral definida a estos casos mediante límites.

- 1 Introducción a las Integrales Impropias
- 2 Tipos de Integrales Impropias
- 3 Integrales Impropias con Límites Infinitos
- 4 Ejemplos: Integrales con Límites Infinitos
- 5 Integrales Impropias con Integrandos Discontinuos
- 6 Ejemplos: Integrales con Integrandos Discontinuos
- 7 Aplicaciones de las Integrales Impropias

Clasificación de Integrales Impropias

Definición (Tipos de Integrales Impropias)

Las integrales impropias se clasifican en dos tipos principales:

1 Tipo I: Integrales con límites de integración infinitos

- $\int_a^{\infty} f(x) dx$
- $\int_{-\infty}^b f(x) dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

2 Tipo II: Integrales con integrandos discontinuos (infinitos)

- Discontinuidad en el extremo derecho: $\int_a^b f(x) dx$ con $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$
- Discontinuidad en el extremo izquierdo: $\int_a^b f(x) dx$ con $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

- ① Introducción a las Integrales Impropias
- ② Tipos de Integrales Impropias
- ③ Integrales Impropias con Límites Infinitos
- ④ Ejemplos: Integrales con Límites Infinitos
- ⑤ Integrales Impropias con Integrandos Discontinuos
- ⑥ Ejemplos: Integrales con Integrandos Discontinuos
- ⑦ Aplicaciones de las Integrales Impropias

Definición: Límite Superior Infinito

Definición (Integral Impropia - Tipo I (a))

Sea f continua en $[a, \infty)$. La integral impropia de f sobre $[a, \infty)$ se define como:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx \quad (1)$$

Si el límite existe y es finito, decimos que la integral **converge**. Si el límite no existe o es infinito, decimos que la integral **diverge**.

Definición: Límite Inferior Infinito

Definición (Integral Impropia - Tipo I (b))

Sea f continua en $(-\infty, b]$. La integral impropia de f sobre $(-\infty, b]$ se define como:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx \quad (2)$$

Si el límite existe y es finito, la integral converge; en caso contrario, diverge.

Definición: Ambos Límites Infinitos

Definición (Integral Impropia - Tipo I (c))

Sea f continua en $(-\infty, \infty)$. La integral impropia sobre toda la recta real se define como:

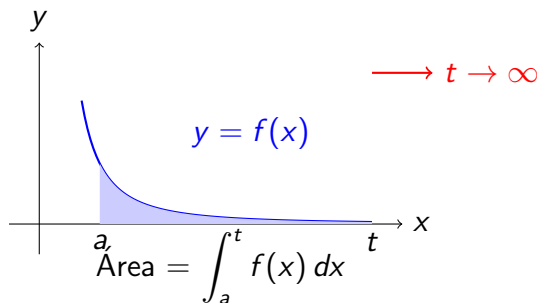
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad (3)$$

para cualquier número real c . La integral converge si y solo si **ambas integrales** del lado derecho convergen.

Observación

La convergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ no depende de la elección de c .

Interpretación Geométrica



La integral impropia $\int_a^\infty f(x) dx$ representa el área bajo la curva cuando el límite superior tiende a infinito.

- ① Introducción a las Integrales Impropias
- ② Tipos de Integrales Impropias
- ③ Integrales Impropias con Límites Infinitos
- ④ Ejemplos: Integrales con Límites Infinitos
- ⑤ Integrales Impropias con Integrandos Discontinuos
- ⑥ Ejemplos: Integrales con Integrandos Discontinuos
- ⑦ Aplicaciones de las Integrales Impropias

Ejemplo 1: Integral que Converge

Ejemplo

Determinar si converge $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ y, en caso afirmativo, calcular su valor.

Solución: Aplicamos la definición:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-2} dx\end{aligned}$$

Ejemplo 1: Integral que Converge (cont.)

Continuando el cálculo:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} - (-1) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 \text{ (Converge)}}$$

Ejemplo 2: Integral que Diverge

Ejemplo

Determinar si converge $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

Solución: Aplicamos la definición:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln 1)\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Integral que Diverge (cont.)

Continuando el cálculo:

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty \text{ (Diverge)}$$

Observación

Aunque $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, la integral diverge. El área bajo la curva es infinita.

Ejemplo 3: Integral sobre Toda la Recta Real I

Ejemplo

Determinar si converge $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$.

Solución: Dividimos la integral en $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

Primera integral:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{x}{1+x^2} dx$$

Ejemplo 3: Integral sobre Toda la Recta Real II

Usando $u = 1 + x^2$, $du = 2x \, dx$:

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{x}{1+x^2} \, dx &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_s^0 \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{2} \ln(1+s^2) \right) \\ &= 0 - \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln(1+s^2) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Integral sobre Toda la Recta Real III

Como $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx$ diverge, concluimos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \text{ diverge}$$

Observación

No es necesario evaluar $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ porque ya sabemos que la integral completa diverge.

Teorema Importante: Integral p

Teorema (Integral p en el Infinito)

Para $p > 0$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{converge} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

Demostración: Para $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (t^{1-p} - 1)$$

- Si $p > 1$: $1 - p < 0$, entonces $t^{1-p} \rightarrow 0$, la integral converge a $\frac{1}{p-1}$
- Si $p < 1$: $1 - p > 0$, entonces $t^{1-p} \rightarrow \infty$, la integral diverge
- Si $p = 1$: Ya vimos que diverge (Ejemplo 2)

- ① Introducción a las Integrales Impropias
- ② Tipos de Integrales Impropias
- ③ Integrales Impropias con Límites Infinitos
- ④ Ejemplos: Integrales con Límites Infinitos
- ⑤ Integrales Impropias con Integrandos Discontinuos**
- ⑥ Ejemplos: Integrales con Integrandos Discontinuos
- ⑦ Aplicaciones de las Integrales Impropias

Definición: Discontinuidad en el Extremo Superior

Definición (Integral Impropia - Tipo II (a))

Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en b (con $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$), entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx \quad (5)$$

Si el límite existe y es finito, la integral converge; en caso contrario, diverge.

Definición: Discontinuidad en el Extremo Inferior

Definición (Integral Impropia - Tipo II (b))

Si f es continua en $(a, b]$ y discontinua en a (con $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$), entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx \quad (6)$$

Si el límite existe y es finito, la integral converge; en caso contrario, diverge.

Definición: Discontinuidad Interior

Definición (Integral Impropia - Tipo II (c))

Si f es continua en $[a, b]$ excepto en un punto $c \in (a, b)$ donde f tiene una discontinuidad infinita, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (7)$$

La integral converge si y solo si **ambas integrales** del lado derecho convergen.

Observación

Cada una de las integrales del lado derecho debe evaluarse como integral impropia según las definiciones previas.

- ① Introducción a las Integrales Impropias
- ② Tipos de Integrales Impropias
- ③ Integrales Impropias con Límites Infinitos
- ④ Ejemplos: Integrales con Límites Infinitos
- ⑤ Integrales Impropias con Integrandos Discontinuos
- ⑥ Ejemplos: Integrales con Integrandos Discontinuos**
- ⑦ Aplicaciones de las Integrales Impropias

Ejemplo 4: Discontinuidad en el Extremo Inferior

Ejemplo

Evaluar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Análisis: La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en $(0, 1]$ pero $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

Solución: Aplicamos la definición:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^{-1/2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{t})\end{aligned}$$

Ejemplo 5: Discontinuidad en el Extremo Superior

Ejemplo

Evaluar $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$.

Análisis: La función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$.

Solución:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln |x|]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln t) \\ &= 0 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t \\ &= 0 - (-\infty) = \infty\end{aligned}$$

Comparación: Integrales p en el Origen

Teorema (Integral p en el Origen)

Para $p > 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{converge} & \text{si } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

Observación

Comparando con el teorema para integrales en el infinito:

- En $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$: converge si $p > 1$, diverge si $p \leq 1$
- En $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$: converge si $p < 1$, diverge si $p \geq 1$

Los criterios son **opuestos**.

Ejemplo 6: Discontinuidad Interior I

Ejemplo

Evaluar $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Análisis: La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0 \in (-1, 1)$.

Solución: Dividimos la integral en $c = 0$:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Ejemplo 6: Discontinuidad Interior II

Primera integral:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x^2} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^t \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{-1} \right) \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{t} - 1 \right)\end{aligned}$$

Como $t \rightarrow 0^-$, entonces $\frac{1}{t} \rightarrow -\infty$, por lo que $-\frac{1}{t} \rightarrow +\infty$.

Por lo tanto, $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$ diverge.

Ejemplo 6: Discontinuidad Interior III

Como una de las integrales diverge, concluimos que:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \text{ diverge}$$

Observación

Es un error común evaluar incorrectamente esta integral como:

$$\left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2 \quad (\text{INCORRECTO})$$

Esto ignora la discontinuidad en $x = 0$.

Ejemplo 7: Integral con Tangente I

Ejemplo

Evaluar $\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx$.

Análisis: La función $f(x) = \tan x$ tiene una discontinuidad infinita en $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \int_0^t \tan x \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \int_0^t \frac{\sen x}{\cos x} \, dx \end{aligned}$$

Ejemplo 7: Integral con Tangente II

Usando la sustitución $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} [-\ln |\cos x|]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} (-\ln |\cos t| - (-\ln |\cos 0|)) \\ &= \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} (-\ln(\cos t) + \ln 1) \\ &= - \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \ln(\cos t) \end{aligned}$$

Ejemplo 7: Integral con Tangente III

Como $\cos t \rightarrow 0^+$ cuando $t \rightarrow (\pi/2)^-$, entonces $\ln(\cos t) \rightarrow -\infty$.

Por lo tanto:

$$- \lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \ln(\cos t) = -(-\infty) = \infty$$

$$\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx = \infty \text{ (Diverge)}$$

- ① Introducción a las Integrales Impropias
- ② Tipos de Integrales Impropias
- ③ Integrales Impropias con Límites Infinitos
- ④ Ejemplos: Integrales con Límites Infinitos
- ⑤ Integrales Impropias con Integrandos Discontinuos
- ⑥ Ejemplos: Integrales con Integrandos Discontinuos
- ⑦ Aplicaciones de las Integrales Impropias

Aplicación 1: Distribución Normal en Estadística I

Aplicación (Función de Densidad Normal Estándar)

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución normal estándar** tiene función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (9)$$

Propiedad fundamental: Para que f sea una función de densidad de probabilidad válida, debe cumplirse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (10)$$

Es decir:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1} \quad (11)$$

Aplicación 1: Distribución Normal en Estadística II

Esta es una integral impropia de Tipo I que converge a 1. Su convergencia garantiza que:

- El área total bajo la curva de campana de Gauss es 1
- Las probabilidades están bien definidas
- Se pueden calcular probabilidades en cualquier intervalo

Cálculo de probabilidades:

La probabilidad de que una variable aleatoria $Z \sim N(0, 1)$ tome valores en un intervalo $[a, b]$ es:

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \quad (12)$$

Para intervalos semi-infinitos, se utilizan integrales impropias. Por ejemplo:

$$P(Z \geq 2) = \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \approx 0,0228 \quad (13)$$

Aplicación 1: Distribución Normal en Estadística III

Esta integral impropia converge y nos da la probabilidad de valores extremos.

Importancia práctica:

- Control de calidad: probabilidad de defectos
- Finanzas: modelos de riesgo
- Ingeniería: análisis de tolerancias
- Medicina: rangos normales de parámetros biológicos

Aplicación 2: Transformada de Laplace en Ingeniería I

Aplicación (Transformada de Laplace)

La **transformada de Laplace** es una herramienta fundamental en ingeniería para resolver ecuaciones diferenciales. Se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (14)$$

donde s es un parámetro complejo (usualmente real positivo).

Esta es una integral impropia de Tipo I. La transformada existe si la integral converge.

Ejemplo concreto: Transformada de una función exponencial

Aplicación 2: Transformada de Laplace en Ingeniería II

Calcular $\mathcal{L}\{e^{at}\}$ donde a es una constante:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{(a-s)t} dt\end{aligned}$$

Aplicación 2: Transformada de Laplace en Ingeniería III

Para $s > a$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)T} - 1}{a-s} \\ &= \frac{0 - 1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \quad (\text{converge para } s > a) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a} \quad (15)$$

Aplicaciones en ingeniería:

① Circuitos eléctricos: Análisis de sistemas RLC

Aplicación 2: Transformada de Laplace en Ingeniería IV

- Resolver ecuaciones diferenciales de circuitos
- Respuesta transitoria y en estado estacionario

2 **Sistemas de control:** Función de transferencia

- Diseño de controladores PID
- Análisis de estabilidad

3 **Procesamiento de señales:** Filtros y sistemas lineales

- Análisis en el dominio de frecuencia
- Convolución de señales

4 **Mecánica:** Vibraciones y sistemas masa-resorte-amortiguador

- Respuesta a fuerzas externas
- Análisis modal

Ventaja clave: La transformada de Laplace convierte ecuaciones diferenciales (difíciles) en ecuaciones algebraicas (más fáciles), usando integrales impropias.

Criterios de Convergencia

Teorema (Criterio de Comparación)

Sean f y g funciones continuas con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$.

- ① Si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.
- ② Si $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} g(x) dx$ diverge.

Observación

Este criterio es útil cuando no podemos calcular directamente una integral impropia, pero podemos compararla con una integral conocida.

Resumen de Integrales Impropias

Conceptos Clave

- Las integrales impropias extienden la integral definida mediante límites
- **Tipo I:** Límites de integración infinitos
- **Tipo II:** Integrandos con discontinuidades infinitas
- Una integral impropia puede **converger** (valor finito) o **diverger**
- Las integrales p tienen comportamientos opuestos en el origen y en el infinito

Aplicaciones Importantes

- Estadística: distribuciones de probabilidad
- Ingeniería: transformadas de Laplace
- Física: energía potencial, campos gravitacionales
- Economía: valor presente de flujos perpetuos

Bibliografía

- [1] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel R. Hass, *Cálculo - Una Variable*, Pearson Education, 13^a edición, 2014.
- [2] James Stewart, *Cálculo de una variable*, Cengage Learning, 8^a edición.
- [3] Tom M. Apostol, *Calculus, Vol. 1*, Wiley, 2^a edición.
- [4] Ron Larson, Bruce Edwards, *Cálculo*, McGraw-Hill, 9^a edición.
- [5] Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, Pearson Education, 9^a edición.