Unidad 2: La Derivada y sus Reglas

R.M

Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias
UASD

20 de septiembre de 2025

Tabla de Contenidos

1. Definición de la Derivada de una Función

Definición

La **derivada** *de una función f es otra función, denotada por f' (léase "f prima"), cuyo valor en cualquier número x del dominio de f está dado por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que este límite exista.

1. Definición de la Derivada de una Función

Definición

*La **derivada** de una función f es otra función, denotada por f' (léase "f prima"), cuyo valor en cualquier número x del dominio de f está dado por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que este límite exista.

Interpretaciones Fundamentales de la Derivada

La derivada $f'(x)$ representa:

1. **Geométricamente:** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.

1. Definición de la Derivada de una Función

Definición

La **derivada** *de una función f es otra función, denotada por f' (léase "f prima"), cuyo valor en cualquier número x del dominio de f está dado por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que este límite exista.

Interpretaciones Fundamentales de la Derivada

La derivada $f'(x)$ representa:

1. **Geométricamente:** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.
2. **Físicamente:** La razón o tasa de cambio instantánea de la función $f(x)$ con respecto a la variable x.

1. Definición de la Derivada de una Función

Definición

La ***derivada*** *de una función f es otra función, denotada por f' (léase "f prima"), cuyo valor en cualquier número x del dominio de f está dado por:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que este límite exista.

Interpretaciones Fundamentales de la Derivada

La derivada $f'(x)$ representa:

1. **Geométricamente:** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.
2. **Físicamente:** La razón o tasa de cambio instantánea de la función $f(x)$ con respecto a la variable x.

Otras notaciones: $\frac{dy}{dx}$, y', $D_x[f(x)]$.

2. Cálculo de Derivadas por Definición

Ejemplo

Derivada de una función cuadrática Calcular la derivada de $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

2. Cálculo de Derivadas por Definición

Ejemplo

Derivada de una función cuadrática Calcular la derivada de $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x)+5) - (x^2 - 4x + 5)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x + 5 - x^2 + 4x - 5}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 4\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 4) = 2x - 4
\end{aligned}
$$

2. Cálculo de Derivadas por Definición (cont.)

Ejemplo

Derivada de una función radical Calcular la derivada de $g(x) = \sqrt{x+2}$.

2. Cálculo de Derivadas por Definición (cont.)

Ejemplo

Derivada de una función radical Calcular la derivada de $g(x) = \sqrt{x+2}$.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x+2) - (x+2)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2})} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}
\end{aligned}
$$

3. Recta Tangente en un Punto

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3$ en el punto donde $x = 1$.

3. Recta Tangente en un Punto

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3$ en el punto donde $x = 1$.

Paso 1: Hallar la pendiente $m = f'(1)$ por definición.

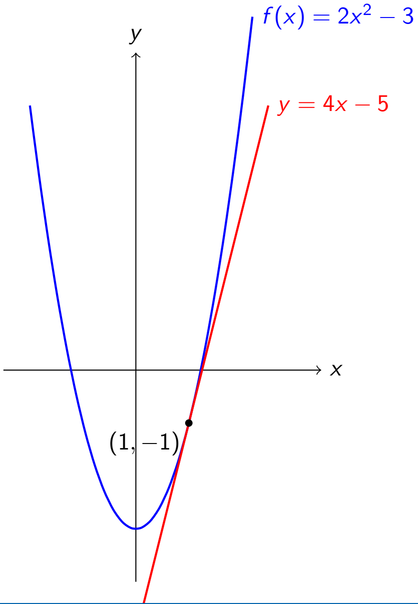
$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2(1+\Delta x)^2 - 3) - (2(1)^2 - 3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2) - 3 - (-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 + 4\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4 + 2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + 2\Delta x) = 4. \quad \Longrightarrow \quad m_{tan} = 4.
\end{aligned}
$$

Paso 2: Hallar el punto de tangencia. El punto es $(1, f(1))$. Como $f(1) = 2(1)^2 - 3 = -1$, el punto es $(1, -1)$.

Paso 3: Usar la forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$$
y - (-1) = 4(x - 1) \implies y + 1 = 4x - 4 \implies y = 4x - 5
$$

Gráfica de la Función y su Tangente



4. Derivabilidad Implica Continuidad

Teorema

Si una función f es derivable en un punto $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

Por hipótesis, f es derivable en c, lo que significa que el siguiente límite existe:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Demostración. Nuestro objetivo es demostrar que f es continua en c, es decir, que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Esto es equivalente a demostrar que $\lim_{x \to c}[f(x) - f(c)] = 0$. Consideremos la expresión $f(x) - f(c)$ para $x \neq c$. Podemos escribirla como:

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right) \cdot (x - c)$$

Aplicando el límite cuando $x \to c$ y usando la propiedad del límite de un producto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c}[f(x) - f(c)] &= \lim_{x \to c}\left[\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right) \cdot (x - c)\right] \\ &= \left(\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right) \cdot \left(\lim_{x \to c}(x - c)\right) \\ &= f'(c) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Dado que $\lim_{x \to c}[f(x) - f(c)] = 0$, se concluye que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, que es la definición de continuidad en c. Q.E.D.

Importante

El recíproco no es cierto. Una función puede ser continua en un punto sin ser derivable en él (e.g., $f(x) = |x|$ en $x = 0$).

1. El Concepto de Derivada
2. Relación entre Derivabilidad y Continuidad
3. **Reglas Básicas de Derivación**

5a. Regla de la Constante

a) Regla de la Constante: $\frac{d}{dx}[c] = 0$

Demostración

Sea $f(x) = c$. Entonces $f(x + \Delta x) = c$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Ejemplo

Si $f(x) = 15$, entonces $f'(x) = 0$.

5b. Regla de la Potencia

b) Regla de la Potencia: $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Q}$

Demostración

(Para $n \in \mathbb{Z}^+$ usando el binomio de Newton)

$$\frac{d}{dx}[x^n] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^n) - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1})}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

Ejemplo

Si $f(x) = x^5$,

5b. Regla de la Potencia

b) Regla de la Potencia: $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Q}$

Demostración

(Para $n \in \mathbb{Z}^+$ usando el binomio de Newton)

$$\frac{d}{dx}[x^n] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^n) - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1})}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

Ejemplo

Si $f(x) = x^5$, entonces $f'(x) = 5x^4$.

Ejemplo: Derivada de Potencia con Exponente Racional

Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Calculemos su derivada usando la regla de la potencia:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^{1/2}] = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por lo tanto, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5c. Regla del Múltiplo Constante

c) Regla del Múltiplo Constante: $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$

Demostración

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[7x^3] =$

5c. Regla del Múltiplo Constante

c) Regla del Múltiplo Constante: $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$

Demostración

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[7x^3] = 7 \cdot \frac{d}{dx}[x^3] = 7(3x^2) = 21x^2.$

5d. Regla de la Suma/Diferencia

d) Regla de la Suma/Diferencia: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

Demostración

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)] - [f(x) \pm g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] = f'(x) \pm g'(x)$$

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[x^4 - 6x^2] = 4x^3 - 12x.$

5e. Derivada del Seno

Límites especiales

Recordemos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0.$

e) Derivada del Seno: $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$

Demostración

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sin x \left(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right) + \cos x \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) \right] = \sin x \cdot (-0) + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[5 \sin x] = 5 \cos x.$

5f. Derivada del Coseno

f) Derivada del Coseno: $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$

Demostración

(Análoga, usando $\cos(x + \Delta x) = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right) - \sin x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) = -\sin x$$

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[x^2 + \cos x] = 2x - \sin x.$

5g. Regla del Producto

g) Regla del Producto: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

Demostración

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

Se suma y resta el término $f(x+\Delta x)g(x)$ en el numerador:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Como f es derivable, es continua, y $\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$. El límite resulta:

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

5g. Regla del Producto: Ejemplos

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[x^3 \cos x] =$

5g. Regla del Producto: Ejemplos

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[x^3 \cos x] = x^3(-\sin x) + \cos x(3x^2) = -x^3 \sin x + 3x^2 \cos x.$

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[(x^2+1)\sin x] =$

5g. Regla del Producto: Ejemplos

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[x^3 \cos x] = x^3(-\sin x) + \cos x(3x^2) = -x^3 \sin x + 3x^2 \cos x.$

Ejemplo

$\frac{d}{dx}[(x^2+1)\sin x] = (x^2+1)(\cos x) + (\sin x)(2x).$

5h. Regla del Cociente

h) Regla del Cociente: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Demostración

Análoga a la del producto, sumando y restando el término $f(x)g(x)$ y simplificando.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)g(x)}$$

Se suma y resta $f(x)g(x)$ en el numerador y se agrupa:

$$\frac{1}{g(x)g(x)}\left[g(x)\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f(x)\lim\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

Esto conduce directamente al resultado.

5h. Regla del Cociente: Ejemplos

Ejemplo

$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x-1}{x^2+1}\right]$

5h. Regla del Cociente: Ejemplos

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x-1}{x^2+1}\right] = \frac{(x^2+1)(2)-(2x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}.$$

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}[\tan x] =$$

5h. Regla del Cociente: Ejemplos

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x-1}{x^2+1}\right] = \frac{(x^2+1)(2)-(2x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}.$$

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\cos x(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

5i. Resumen de Reglas de Derivación

Función	**Derivada**
c	0
x^n	nx^{n-1}
$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
Funciones Trigonométricas	
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$