Guía Estudio Integrales Múltiples Parte I

MATUASD

Cálculo II
Escuela de Matemática,
Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD)

2025

Contenido

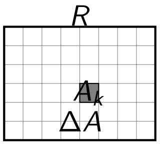
Definición de Integral Doble

Definición

Sea $f(x,y)$ *continua en* $R = [a,b] \times [c,d]$. *La integral doble es:*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k.$$

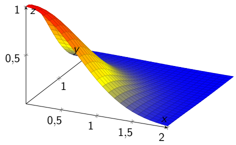
sin perder de vista que $||P|| \to 0$, *cuando* $A_k \to 0$ *y* $n \to \infty$



Volumen bajo una Superficie

Si $f(x, y) \geq 0$ en R, entonces:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \text{Volumen del sólido bajo } z = f(x, y).$$



Volumen II

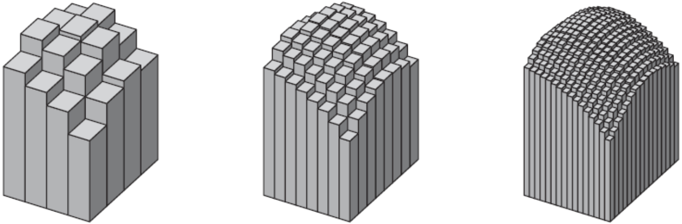
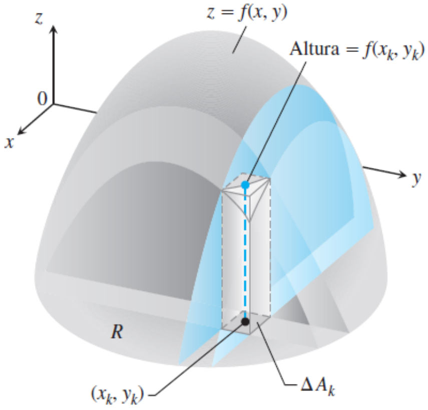

(a) $n = 16$ (b) $n = 64$ (c) $n = 256$

Figura 1: Cálculo Thomas 12ma Edición.

Volumen III



$$\text{Volumen} = \lim \sum f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R f(x, y)\,dA$$

Figura 2: Cálculo Thomas 12ma Edición.

Teorema de Fubini (Rectangular)

Teorema

Si $f(x,y)$ *es continua en* $R = [a,b] \times [c,d]$, *entonces:*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ejemplo 1

Evalúa $\iint_R (x+y)\,dA,\ R=[0,1]\times[0,1].$

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dy\,dx.$$

- Integral interna: $\int_0^1 (x+y)\,dy = x+\frac{1}{2}.$
- Integral externa: $\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 1.$

Resultado: $\iint_R (x+y)\,dA = 1.$

Ejemplo 2: Región Rectangular (I)

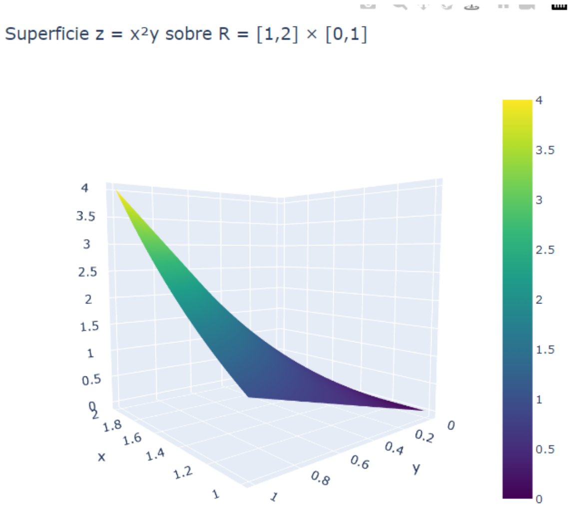
Evalúa $\iint_R x^2y\,dA,\ R = [1,2]\times[0,1]$.

$$\int_1^2 \int_0^1 x^2y\,dy\,dx.$$

- Integral interna: $\int_0^1 x^2y\,dy = x^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{x^2}{2}$.
- Integral externa: $\int_1^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{6}$.

Resultado: $\iint_R x^2y\,dA = \frac{7}{6}$.

Ejemplo 2: Región Rectangular (II)



Ejemplo 3: Región Rectangular (I)

Calcule: $\displaystyle\iint_R (100 - 6x^2y)\,dA$
donde $R : 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1$

Primero integramos con respecto a x:

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^2 (100 - 6x^2y)\,dx\right] dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[100x - 2x^3y\right]_{x=0}^{x=2} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left[100(2) - 2(2)^3y - (100(0) - 2(0)^3y)\right] dy \\
&= \int_{-1}^{1} (200 - 16y)\,dy
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3: Región Rectangular (II)

Continuamos integrando con respecto a y:

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} (200 - 16y)\, dy \\
&= \left[200y - 8y^2\right]_{-1}^{1} \\
&= (200(1) - 8(1)^2) - (200(-1) - 8(-1)^2) \\
&= (200 - 8) - (-200 - 8) \\
&= 192 - (-208) = 192 + 208 = 400
\end{aligned}
$$

Resultado: $\iint_R (100 - 6x^2y)\, dA = 400$

Ejemplo 3: Region Rectangular II

Al invertir el orden de integración obtenemos la misma respuesta:

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{-1}^1 (100 - 6x^2 y)\, dy\, dx &= \int_0^2 \left[100y - \frac{6x^2y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1} dx \\
&= \int_0^2 \left[100y - 3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1} dx \\
&= \int_0^2 \left((100(1) - 3x^2(1)^2) - (100(-1) - 3x^2(-1)^2)\right) dx \\
&= \int_0^2 \left((100 - 3x^2) - (-100 - 3x^2)\right) dx \\
&= \int_0^2 (100 - 3x^2 + 100 + 3x^2)\, dx \\
&= \int_0^2 200\, dx \\
&= [200x]_0^2 \\
&= 200(2) - 200(0) = 400.
\end{aligned}
$$

1. Integrales Dobles en Regiones Rectangulares
2. **Integrales Dobles en Regiones No Rectangulares**
3. Coordenadas Polares
4. Integrales Triples

Definición Integrales Dobles en Regiones No Rectangulares

Definición

Sea R una región en el plano xy, $f(x,y)$ continua. La integral doble es:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k.$$

sin perder de vista que $||P|| \to 0$, cuando $A_k \to 0$ y $n \to \infty$

Teorema de Fubini

Teorema (y-simple o verticalmente simple)

Si $R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, *entonces:*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Teorema (x-simple u horizontalmente simple)

Si $R = \{(x,y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, *entonces:*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Propiedades de Integrales Dobles

- Linealidad: $\iint_R [af + bg]\, dA = a \iint_R f\, dA + b \iint_R g\, dA.$
- Aditividad: $\iint_{R_1 \cup R_2} f\, dA = \iint_{R_1} f\, dA + \iint_{R_2} f\, dA.$
- Monotonía: Si $f \leq g$, entonces $\iint_R f\, dA \leq \iint_R g\, dA.$

Ejemplo 1

Evalúa $\displaystyle\iint_R xy\,dA$, R: triángulo $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

$$R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} xy\,dy\,dx.$$

- Integral interna: $\int_0^{1-x} xy\,dy = \frac{x(1-x)^2}{2}$.
- Integral externa: $\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{24}$.

Resultado: $\iint_R xy\,dA = \frac{1}{24}$.

Ejemplo 2: Región No Rectangular (Planteo)

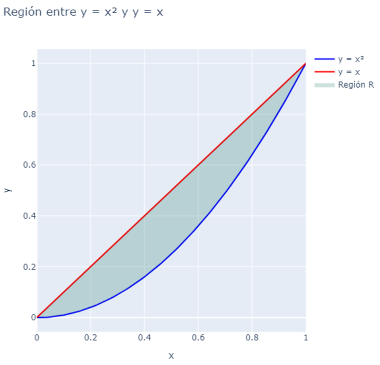
Evalúa $\displaystyle\iint_R 1\, dA$, donde R es la región entre las curvas $y = x^2$ y $y = x$.

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}.$$

Ejemplo 2: Región No Rectangular (Planteo)

La integral se plantea como:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1 \, dy \, dx.$$



Ejemplo 2: Resolución

- Integral interna: $\int_{x^2}^{x} 1\, dy = x - x^2$.
- Integral externa: $\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6}$.

Resultado: Área de $R = \frac{1}{6}$.

Ejemplo Cambio de Orden Integración

Evalúa $\displaystyle\iint_R x\,dA$, $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$.

- Original: $\int_0^1 \int_y^1 x\,dx\,dy$.
- Invertido: $\int_0^1 \int_0^x x\,dy\,dx = \frac{1}{3}$.

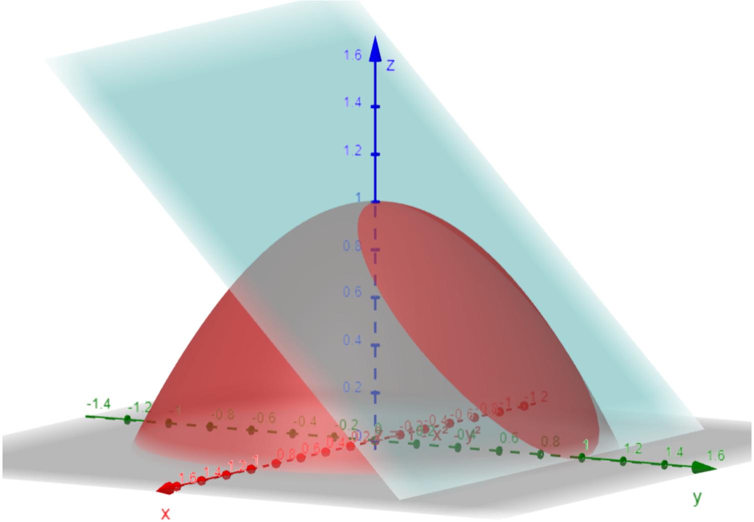
Resultado: $\iint_R x\,dA = \frac{1}{3}$.

Volumen encerrado por dos superficies I

Ejemplo. Hallar el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad \text{e inferiormente por el plano} \quad z = 1 - y.$$

Volumen encerrado por dos superficies II



Volumen encerrado por dos superficies III

Solución. Igualando los valores z, se determina que la intersección de las dos superficies se produce en el cilindro circular recto dado por

$$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - y^2.$$

Como el volumen de R es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloide y el volumen bajo el plano, se tiene:

$$\text{Volumen} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dy$$

Volumen encerrado por dos superficies IV

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 (y - y^2)^{3/2}\, dy$$

$$= \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)\int_0^1 \left[1 - (2y-1)^2\right]^{3/2}\, dy$$

Haciendo el cambio $2y - 1 = \sin\theta \Rightarrow dy = \frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta$, los límites cambian de $y = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$, y $y = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Entonces:

$$= \frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta$$

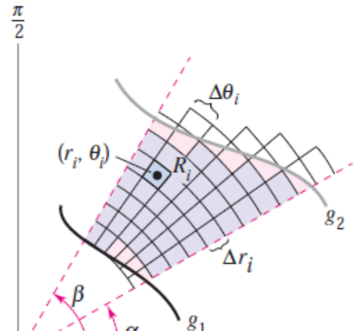
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{32}$$

Cambio a Coordenadas Polares

Teorema

Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, donde $0 \le (\beta - \alpha) \le 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$



Ejemplo 1

Evalúa $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, R: disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\, dr\, d\theta.$$

- Integral interna: $\int_0^1 r^3\, dr = \frac{1}{4}$.
- Integral externa: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{2}$.

Resultado: $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 2: Coordenadas Polares

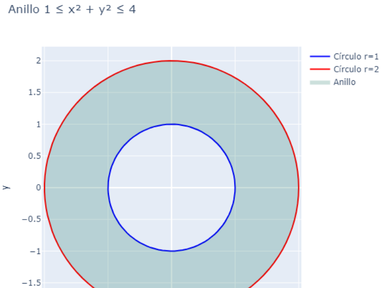
Evalúa $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA$, R: anillo $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

$$R = \{(r,\theta) : 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 e^{r^2} \cdot r\,dr\,d\theta.$$

- Integral interna: $\int_1^2 e^{r^2} \cdot r\,dr = \frac{1}{2}(e^4 - e)$.
- Integral externa: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(e^4 - e)\,d\theta = \pi(e^4 - e)$.

Resultado: $\pi(e^4 - e)$.



Definición y Aplicaciones

Definición

Sea $f(x,y,z)$ continua en $E \subset \mathbb{R}^3$. La integral triple es:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k.$$

Aplicaciones: Volúmenes, masas, centros de masa.

Ejemplo 1: Integral Triple

Evalúa $\iiint_E z\,dV$, E: $z = 0$, $z = 4 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{4-r^2} z \cdot r\,dz\,dr\,d\theta.$$

- Integral interna: $\int_0^{4-r^2} z\,dz = \frac{(4-r^2)^2}{2}$.
- Integral media: $\int_0^1 \frac{(4-r^2)^2}{2} \cdot r\,dr = \frac{37}{12}$.
- Integral externa: $\int_0^{2\pi} \frac{37}{12}\,d\theta = \frac{37\pi}{6}$.

Resultado: $\frac{37\pi}{6}$.

Ejemplo 2

Volumen del tetraedro: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

$$\iiint_E 1\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz\, dy\, dx.$$

- Integral interna: $\int_0^{1-x-y} 1\, dz = 1 - x - y$.
- Integral media: $\int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy = \frac{(1-x)^2}{2}$.
- Integral externa: $\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\, dx = \frac{1}{6}$.

Resultado: $\iiint_E 1\, dV = \frac{1}{6}$.