Coordenadas Polares

Cálculo II

MATUASD

Escuela de Matematicas
UASD

2025

Contenido

Definición de Coordenadas Polares

Definición

Un sistema de **coordenadas polares** *en el plano consiste en un punto fijo O llamado polo (u origen) y un rayo inicial que parte de O llamado eje polar.*

Representación de un Punto

Cada punto P en el plano se representa mediante un par ordenado (r, θ) donde:

- r es la **coordenada radial**: la distancia dirigida desde el polo O hasta P.
- θ es la **coordenada angular**: el ángulo dirigido (medido en sentido antihorario desde el eje polar) hasta el rayo $\overrightarrow{OP}$.

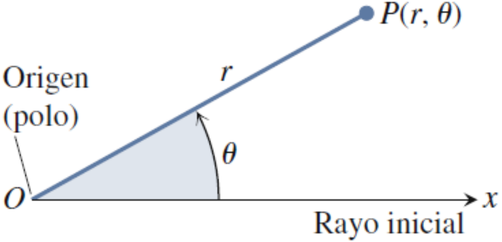


Figura 1: Coordenadas Polares. Cálculo Thomas. 13ª Edición.

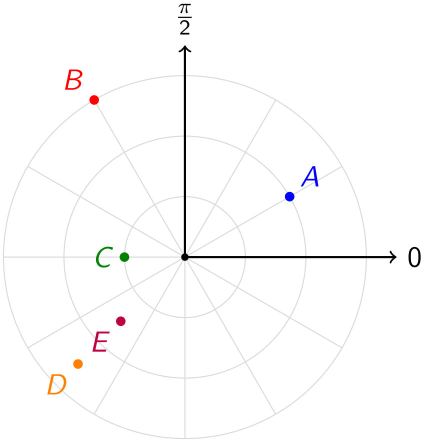
Convenciones

- Si $r > 0$, el punto (r, θ) se encuentra a distancia r del polo en la dirección del ángulo θ.
- Si $r < 0$, el punto (r, θ) se encuentra a distancia $|r|$ del polo en la dirección opuesta al ángulo θ (es decir, en la dirección $\theta + \pi$).
- Si $r = 0$, el punto es el polo independientemente del valor de θ.
- Las coordenadas polares no son únicas: $(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

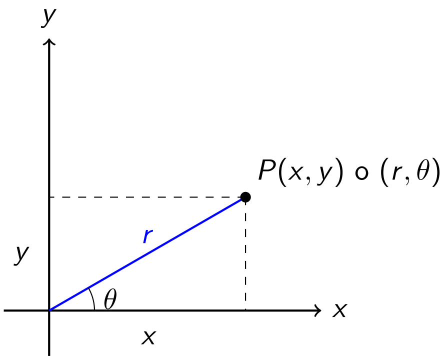
Ejemplo: Ubicación de 5 Coordenadas Polares

Ubiquemos los siguientes puntos en el plano polar:

1. $A = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$
2. $B = \left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$
3. $C = (1, \pi)$
4. $D = \left(2{,}5, \frac{5\pi}{4}\right)$
5. $E = \left(-1{,}5, \frac{\pi}{4}\right)$



Relación entre Coordenadas Polares y Cartesianas



De Polares a Cartesianas

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

De Cartesianas a Polares

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Ejemplo 1: Coordenada Polar a Cartesiana

Ejemplo

Convertir el punto polar $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ a coordenadas cartesianas.

Solución:

Utilizamos las fórmulas de conversión:

$$x = r\cos\theta = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r\sin\theta = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el punto en coordenadas cartesianas es:

$$\boxed{(x, y) = (-2, 2\sqrt{3})}$$

Ejemplo 2: Coordenada Cartesiana a Polar (I)

Ejemplo

Convertir el punto cartesiano $(3,3)$ a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Solución:

Calculamos r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Calculamos θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{3} = 1$$

Como el punto $(3,3)$ está en el primer cuadrante:

$$\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{(r,\theta) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)}$$

Ejemplo 3: Coordenada Cartesiana a Polar (II)

Ejemplo

Convertir el punto cartesiano $(-1, \sqrt{3})$ a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Solución:

Calculamos r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Calculamos θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

Como el punto $(-1, \sqrt{3})$ está en el segundo cuadrante y $\tan\theta = -\sqrt{3}$:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{(r, \theta) = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Ejemplo 4: Ecuación Polar a Cartesiana (I)

Ejemplo

Convertir la ecuación polar $r = 4\sin\theta$ a coordenadas cartesianas.

Solución:

Multiplicamos ambos lados por r:

$$r^2 = 4r\sin\theta$$

Sustituimos $r^2 = x^2 + y^2$ y $r\sin\theta = y$:

$$x^2 + y^2 = 4y$$

Reordenamos:

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

Completamos el cuadrado en y:

$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4$$

$$\boxed{x^2 + (y-2)^2 = 4}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en (0, 2) y radio 2

Ejemplo 5: Ecuación Polar a Cartesiana (II)

Ejemplo

Convertir la ecuación polar $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$ a coordenadas cartesianas.

Solución:
Multiplicamos ambos lados por el denominador:

$$r(1 - \cos\theta) = 2$$

$$r - r\cos\theta = 2$$

Sustituimos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $r\cos\theta = x$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 2$$

Ejemplo 5: Ecuación Polar a Cartesiana (II) (continuación)

Solución (continuación):
Elevamos al cuadrado:

$$x^2 + y^2 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$y^2 = 4x + 4$$

$$\boxed{y^2 = 4(x+1)}$$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice en $(-1, 0)$ y eje horizontal.

Ejemplo 6: Ecuación Cartesiana a Polar (I)

Ejemplo

Convertir la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 9$ a coordenadas polares.

Solución:

Sustituimos $x^2 + y^2 = r^2$:

$$r^2 = 9$$

Por lo tanto:

$$\boxed{r = 3}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en el polo y radio 3.

Ejemplo 7: Ecuación Cartesiana a Polar (II)

Ejemplo

Convertir la ecuación cartesiana $y = x$ a coordenadas polares.

Solución:

Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$:

$$r\sin\theta = r\cos\theta$$

Para $r \neq 0$, dividimos entre r:

$$\sin\theta = \cos\theta$$

$$\tan\theta = 1$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4} \text{ o } \theta = \frac{5\pi}{4}}$$

Estas son las ecuaciones de dos rayos que parten del origen formando la recta $y = x$.

Nota: También podemos escribir simplemente $\boxed{\tan\theta = 1}$.

Ecuación polar	Equivalente cartesiano
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

Pruebas de Simetría en Coordenadas Polares (I)

Para una curva dada por $r = f(\theta)$:

Simetría respecto al eje polar (eje x)

Si la ecuación no cambia cuando reemplazamos θ por $-\theta$, es decir:

$$f(-\theta) = f(\theta)$$

O, equivalentemente, si la ecuación no cambia al reemplazar r por $-r$ y θ por $\pi - \theta$, es decir:

$$(-r, \pi - \theta)$$

entonces la curva es simétrica respecto al eje polar.

Pruebas de Simetría en Coordenadas Polares (II)

Simetría respecto al eje $\theta = \frac{\pi}{2}$ (eje y)

Si la ecuación no cambia cuando reemplazamos θ por $\pi - \theta$, es decir:

$$f(\pi - \theta) = f(\theta)$$

O, equivalentemente, si la ecuación no cambia al reemplazar r por $-r$ y θ por $-\theta$, es decir:

$$(r, \theta)$$

entonces la curva es simétrica respecto al eje $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Pruebas de Simetría (continuación)

Simetría respecto al polo (origen)

Si la ecuación no cambia cuando reemplazamos r por $-r$ y θ por θ, o cuando reemplazamos θ por $\theta + \pi$:

$$f(\theta + \pi) = f(\theta) \quad \text{o} \quad f(\theta) = -f(\theta)$$

entonces la curva es simétrica respecto al polo.

Nota Importante

Si una ecuacion polar no cumple con una prueba de simetría, debe usar la otra prueba.

Fórmula de la Pendiente en Coordenadas Polares

Teorema

Sea $r = f(\theta)$ una curva polar diferenciable. La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (r, θ) está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}$$

Deducción:

Partimos de las ecuaciones paramétricas:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

Deducción de la Fórmula de la Pendiente

Calculamos las derivadas:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(r\cos\theta) = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(r\sin\theta) = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}$$

Observaciones:

- La recta tangente es horizontal cuando $\frac{dy}{d\theta} = 0$ (y $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$).
- La recta tangente es vertical cuando $\frac{dx}{d\theta} = 0$ (y $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$).

Área en Coordenadas Polares

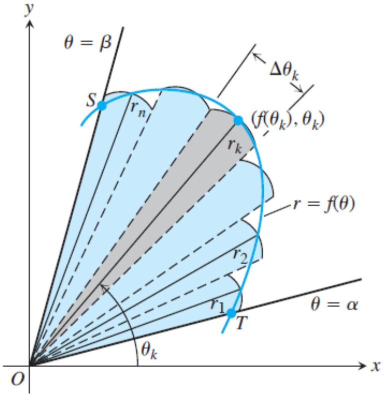


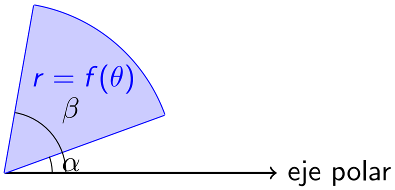
Figura 2: Área en Coordenadas Polares. Cálculo Thomas. 13ª Edición.

Área en Coordenadas Polares

Teorema

El área de la región acotada por la curva polar $r = f(\theta)$ *y los rayos* $\theta = \alpha$ *y* $\theta = \beta$ *(con* $\alpha < \beta$*) está dada por:*

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

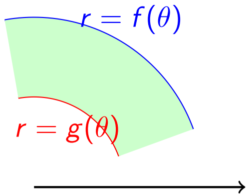


Área entre Dos Curvas Polares

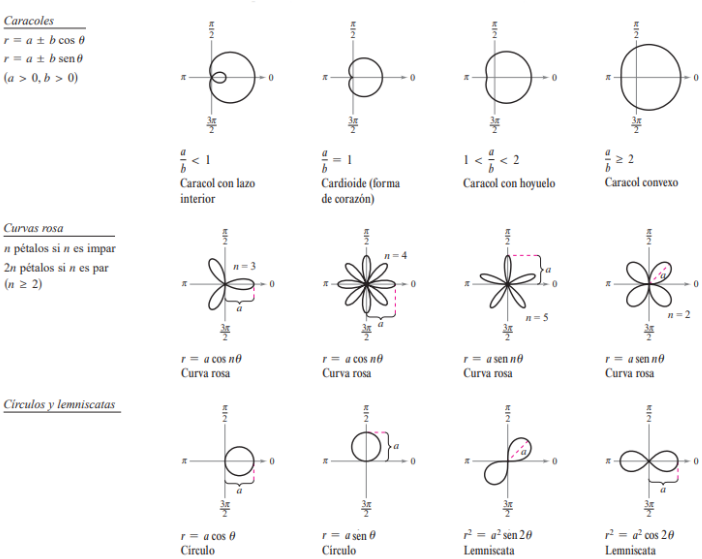
Teorema

El área de la región entre las curvas polares $r = f(\theta)$ (exterior) y $r = g(\theta)$ (interior) desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ está dada por:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\, d\theta$$



Gráficas de Curvas Polares



Cardioide: $r = 1 + \cos\theta$

Tabla de valores:

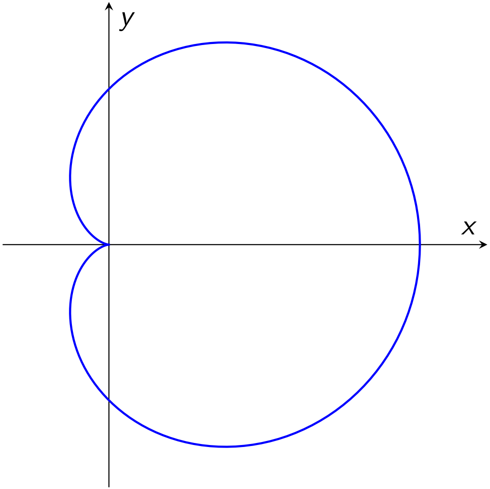
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2	1,87	1,5	1	0,5	0,13	0

Prueba de simetría:

- **Eje polar:** $r(-\theta) = 1 + \cos(-\theta) = 1 + \cos\theta = r(\theta)$ ✓
- La curva es simétrica respecto al eje polar.

Por simetría, solo necesitamos graficar para $\theta \in [0, \pi]$ y reflejar.

Gráfica del Cardioide



Área del Cardioide

Calculamos el área encerrada por $r = 1 + \cos\theta$:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2\, d\theta$$

Expandimos:

$$(1 + \cos\theta)^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$$

Usando $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

$$= 1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} = \frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}$$

Área del Cardioide (continuación)

Integramos:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{3(2\pi)}{2} + 0 + 0 - 0 - 0 - 0\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot 3\pi = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el área del cardioide es:

$$\boxed{A = \frac{3\pi}{2} \text{ unidades cuadradas}}$$

Rosa de Tres Pétalos: $r = \sin(3\theta)$

Tabla de valores (un pétalo: $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$):

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
r	0	$0{,}71$	1	$0{,}71$	0

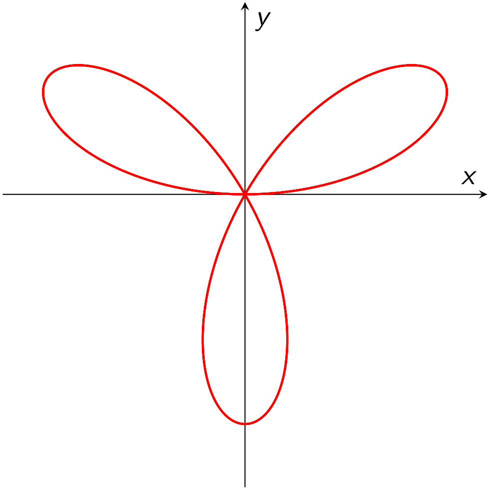
Prueba de simetría:

- **Eje $\theta = \frac{\pi}{2}$:**

$$r(\pi - \theta) = \sin(3(\pi - \theta)) = \sin(3\pi - 3\theta) = -\sin(-3\theta) = \sin(3\theta)$$

La curva es simétrica respecto al eje y.

Gráfica de la Rosa de Tres Pétalos



Área de un Pétalo de la Rosa

Un pétalo se forma cuando θ va de 0 a $\frac{\pi}{3}$. Calculamos:

$$A_{\text{pétalo}} = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2(3\theta) \, d\theta$$

Usando $\sin^2(3\theta) = \frac{1-\cos(6\theta)}{2}$:

$$\begin{aligned} A_{\text{pétalo}} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos(6\theta)}{2} \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} (1-\cos(6\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{\sin(6\theta)}{6} \right]_0^{\pi/3} \end{aligned}$$

Área de un Pétalo (continuación)

Evaluamos:

$$A_{\text{pétalo}} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sin(2\pi)}{6} - 0 + 0\right]$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$$

Por lo tanto, el área de un pétalo de la rosa es:

$$\boxed{A_{\text{pétalo}} = \frac{\pi}{12} \text{ unidades cuadradas}}$$

El área total de la rosa de tres pétalos sería:

$$A_{\text{total}} = 3\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \text{ unidades cuadradas}$$

Área entre Dos Curvas Polares

Ejemplo

Encontrar el área de la región que se encuentra dentro del círculo $r = 3\cos\theta$ y fuera del cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

Paso 1: Encontrar los puntos de intersección.
Igualamos las ecuaciones:

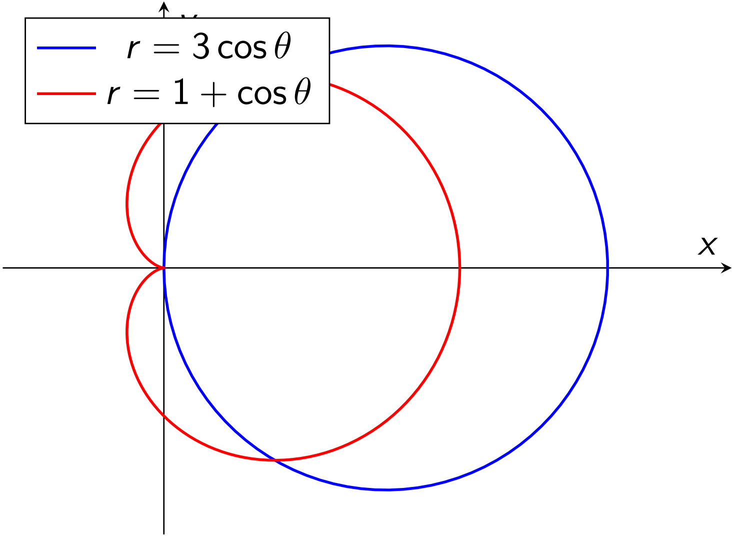
$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta$$

$$2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto: $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

Gráfica del Área entre las Curvas



La región sombreada (conceptualmente) es la que buscamos.

Cálculo del Área entre las Curvas

Por simetría respecto al eje polar, calculamos el área superior y la multiplicamos por 2:

$$A = 2\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\left[(3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left[9\cos^2\theta - (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left[8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\right] d\theta$$

Usando $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

$$= \int_0^{\pi/3} [4(1+\cos(2\theta)) - 2\cos\theta - 1]\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} [3 + 4\cos(2\theta) - 2\cos\theta]\, d\theta$$

Cálculo del Área (continuación)

Integramos:

$$
\begin{aligned}
A &= \left[3\theta + 2\sin(2\theta) - 2\sin\theta\right]_0^{\pi/3} \\
&= 3\cdot\frac{\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 0 \\
&= \pi + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el área de la región es:

$$\boxed{A = \pi \text{ unidades cuadradas}}$$

Secciones Cónicas en Coordenadas Polares

Teorema

Una cónica con foco en el polo y excentricidad e tiene ecuación polar de la forma:

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \quad o \quad r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$$

donde d es la distancia del foco a la directriz.

Clasificación según la Excentricidad

- Si $e = 0$: **Circunferencia**
- Si $0 < e < 1$: **Elipse**
- Si $e = 1$: **Parábola**
- Si $e > 1$: **Hipérbola**

Forma General de las Cónicas

Las cuatro formas posibles son:

1. $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ — Directriz vertical a la derecha del polo
2. $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ — Directriz vertical a la izquierda del polo
3. $r = \dfrac{ed}{1 + e\sin\theta}$ — Directriz horizontal arriba del polo
4. $r = \dfrac{ed}{1 - e\sin\theta}$ — Directriz horizontal abajo del polo

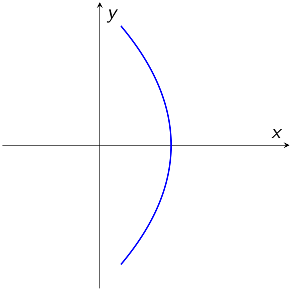
La elección del signo y la función trigonométrica determina la orientación de la cónica.

Ejemplo: Parábola

Ejemplo

La ecuación $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$ representa una parábola.

- Excentricidad: $e = 1$ (parábola)
- Directriz vertical a la derecha del foco (polo)
- Parámetro: $ed = 4$, entonces $d = 4$



Ejemplo: Elipse

Ejemplo

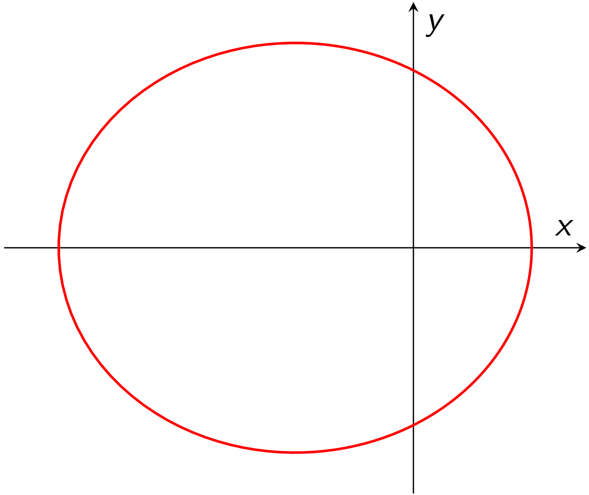
La ecuación $r = \dfrac{3}{2+\cos\theta}$ representa una elipse.

Reescribimos dividiendo numerador y denominador entre 2:

$$r = \frac{3/2}{1 + (1/2)\cos\theta}$$

- Excentricidad: $e = \frac{1}{2} < 1$ (elipse)
- Directriz vertical a la derecha del foco
- Parámetro: $ed = \frac{3}{2}$, entonces $d = 3$

Gráfica de la Elipse



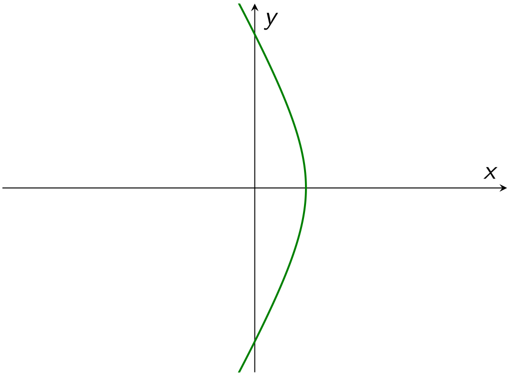
Ejemplo: Hipérbola

Ejemplo

La ecuación $r = \dfrac{6}{1 + 2\cos\theta}$ representa una hipérbola.

- Excentricidad: $e = 2 > 1$ (hipérbola)
- Directriz vertical a la derecha del foco
- Parámetro: $ed = 6$, entonces $d = 3$
- La hipérbola tiene una rama para θ donde $1 + 2\cos\theta > 0$
- Es decir, para $\cos\theta > -\frac{1}{2}$: $\theta \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

Gráfica de la Hipérbola



Resumen de Coordenadas Polares

En esta presentación hemos estudiado:

- Definición y representación de coordenadas polares
- Conversión entre sistemas de coordenadas
- Pruebas de simetría para curvas polares
- Cálculo de pendientes y áreas en coordenadas polares
- Gráficas de curvas polares clásicas (cardioide, rosas)
- Áreas entre curvas polares
- Secciones cónicas en coordenadas polares

Las coordenadas polares son una herramienta fundamental para el estudio de curvas con simetría radial y para la resolución de problemas en física e ingeniería.

Bibliografía

[1] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, *Cálculo de Thomas*, Pearson, 13ª Edición, 2018.

[2] James Stewart, *Cálculo de una variable*, Cengage Learning, 8ª Edición, 2016.

[3] Louis Leithold, *El Cálculo con Geometría Analítica*, Harla, 7ª Edición, 1997.

[4] Ron Larson, Bruce Edwards, *Cálculo*, McGraw-Hill, 10ª Edición, 2014.

[5] Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis, *Cálculo*, Wiley, 10ª Edición, 2013.

[6] Dennis G. Zill, Warren S. Wright, *Ecuaciones Diferenciales*, Cengage Learning, 9ª Edición, 2017.