

Anualidades parte I

Matemática Financiera

MAT 143 Sec 01

MATUASD

Matemática,
F. C.
UASD

2025

Contenido

- ① Variables Financieras
- ② Definición de Anualidad
- ③ Clasificación de Anualidades
- ④ Anualidad Vencida, Simple, Cierta e Inmediata
- ⑤ Ejemplos Prácticos

① Variables Financieras

② Definición de Anualidad

③ Clasificación de Anualidades

④ Anualidad Vencida, Simple, Cierta e Inmediata

⑤ Ejemplos Prácticos

Variables

- M : Monto acumulado o valor futuro
- C : Capital o valor presente o A de Anualidad
- j : Tasa nominal
- i : Tasa por periodo de capitalización
- m : Frecuencia de conversión o capitalización
- t : Tiempo en años
- n : Número total de periodos de capitalización
- R : Renta o pagos

① Variables Financieras

② Definición de Anualidad

③ Clasificación de Anualidades

④ Anualidad Vencida, Simple, Cierta e Inmediata

⑤ Ejemplos Prácticos

Definición de Anualidad

Concepto

Una **anualidad** es un conjunto de pagos iguales realizados en períodos o intervalos iguales.

- Ejemplos comunes:
 - Pagos de préstamos
 - Depósitos para ahorro
 - Pagos de alquiler
 - Fondos de pensiones
 - Primas de seguros
- Los pagos pueden ser mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc.

① Variables Financieras

② Definición de Anualidad

③ Clasificación de Anualidades

④ Anualidad Vencida, Simple, Cierta e Inmediata

⑤ Ejemplos Prácticos

Clasificación de Anualidades

1. Por su pago:

- **Anualidades vencidas u ordinarias:** Los pagos se realizan al final de cada periodo.
- **Anualidades anticipadas:** Los pagos se efectúan al principio de cada periodo.

2. Por su duración:

- **Anualidades ciertas:** Tienen plazo fijo y definido.
- **Anualidades contingentes:** Su duración depende de un suceso aleatorio (como la vida de una persona).

Clasificación de Anualidades (cont.)

3. Por su inicio:

- **Anualidades inmediatas:** Inician en el momento actual o poco después.
- **Anualidades diferidas:** Comienzan después de un periodo específico.

4. Por Intereses:

- **Anualidades simples:** El periodo de pago coincide con el periodo de capitalización.
- **Anualidades generales:** Los periodos de pago y capitalización son diferentes.

① Variables Financieras

② Definición de Anualidad

③ Clasificación de Anualidades

④ Anualidad Vencida, Simple, Cierta e Inmediata

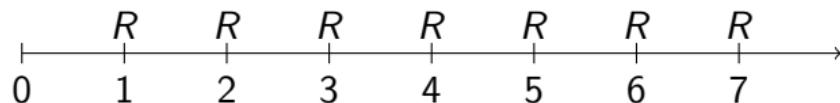
⑤ Ejemplos Prácticos

Anualidad Vencida, Simple, Cierta e Inmediata

Características

- **Vencida:** Pagos al final de cada periodo
- **Simple:** Periodo de pago = periodo de capitalización
- **Cierta:** Plazo definido
- **Inmediata:** Inicia de inmediato.

Ejemplo en un diagrama de Tiempo y Valor:



Deducción del Monto Acumulado de una Anualidad Vencida, Simple, Cierta e Inmediata

Consideremos una anualidad con una renta R durante n periodos con tasa i por periodo.
Sabemos que $i = \frac{j}{m}$

$$\text{1er pago: } R(1 + i)^{n-1}$$

$$\text{2do pago: } R(1 + i)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\text{Penúltimo pago: } R(1 + i)^1$$

$$\text{Último pago: } R(1 + i)^0 = R$$

El monto total acumulado M será la suma de todos estos valores:

Deducción del Monto (continuación)

$$\begin{aligned}M &= R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + \dots + R(1 + i) + R \\M &= R[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1}]\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $(1 + i)$:

$$M(1 + i) = R[(1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^n]$$

Restando las ecuaciones:

$$\begin{aligned}M(1 + i) - M &= R[(1 + i)^n - 1] \\Mi &= R[(1 + i)^n - 1]\end{aligned}$$

Fórmula del Monto Acumulado

Monto de una anualidad vencida

$$M = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Donde:

- M = Monto acumulado o valor futuro
- R = Pago periódico o renta
- i = Tasa de interés por periodo
- n = Número total de periodos

A la expresión $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ se le denomina factor de acumulación de la anualidad y se representa como $(s_{n|i})$.

Fórmula del Valor Presente

El valor presente C o A de una anualidad es el valor actual de todos los pagos futuros.

Valor presente de una anualidad vencida

$$A = C = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Esta fórmula también puede expresarse como:

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n} = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

A la expresión $\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$ se le denomina factor de valor actual y se representa como $(a_{n|i})$.

Fórmula para el Tiempo

A partir de la fórmula del monto acumulado, podemos despejar n :

$$M = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$M \cdot i = R[(1 + i)^n - 1]$$

$$(1 + i)^n = \frac{M \cdot i}{R} + 1$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{M \cdot i}{R} + 1\right)}{\ln(1 + i)}$$

y como $n = mt$ el tiempo en años es $t = \frac{n}{m}$

Fórmula para la Renta

De la fórmula del monto acumulado:

$$M = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Despejamos para encontrar R :

$$R = \frac{M \cdot i}{(1 + i)^n - 1}$$

De la fórmula del valor presente:

$$C = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Despejamos para encontrar R :

$$R = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

① Variables Financieras

② Definición de Anualidad

③ Clasificación de Anualidades

④ Anualidad Vencida, Simple, Cierta e Inmediata

⑤ Ejemplos Prácticos

Ejemplo 1: Determinación de la Renta

Problema

Una persona desea acumular \$50,000 en 5 años mediante depósitos semestrales. Si la tasa de interés es del 8 % capitalizable semestralmente, ¿cuál debe ser el valor de cada depósito?

Datos

- $M = \$50,000$ (monto a acumular)
- $j = 8\%$ (tasa nominal anual)
- $m = 2$ (frecuencia de capitalización: semestral)
- $t = 5$ años
- $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{2} = 4\%$ (tasa por periodo)
- $n = m \times t = 2 \times 5 = 10$ periodos

Ejemplo 1: Solución

Utilizamos la fórmula para calcular la renta:

$$R = \frac{M \cdot i}{(1 + i)^n - 1}$$

$$R = \frac{50,000 \times 0,04}{(1 + 0,04)^{10} - 1} = \frac{2,000}{1,4802 - 1} = \frac{2,000}{0,4802} = \$4,164,93$$

Respuesta

La persona debe realizar depósitos semestrales de \$4,164.93 durante 5 años para acumular \$50,000.

Ejemplo 2: Determinación del Monto Acumulado

Problema

Una persona deposita \$3,000 al final de cada trimestre en una cuenta que paga el 12 % de interés capitalizable trimestralmente. ¿Cuánto habrá acumulado después de 3 años?

Datos

- $R = \$3,000$ (depósito trimestral)
- $j = 12\%$ (tasa nominal anual)
- $m = 4$ (frecuencia de capitalización: trimestral)
- $t = 3$ años
- $i = \frac{j}{m} = \frac{12\%}{4} = 3\%$ (tasa por periodo)
- $n = m \times t = 4 \times 3 = 12$ periodos

Ejemplo 2: Solución

Utilizamos la fórmula del monto acumulado:

$$M = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$M = 3,000 \times \frac{(1 + 0,03)^{12} - 1}{0,03} = 3,000 \times \frac{1,4258 - 1}{0,03} = 3,000 \times 14,19 = \$42,570$$

Respuesta

Después de 3 años, la persona habrá acumulado \$42,570 en su cuenta.

Ejemplo 3: Determinación de una Renta y Tabla de Amortización

Problema

Una persona solicita un préstamo de \$10,000 a una tasa del 9 % anual capitalizable mensualmente. El préstamo debe pagarse en 6 meses. ¿Cuál es el valor de las cuotas mensuales y cómo sería la tabla de amortización?

Datos

- $C = \$10,000$ (capital prestado)
- $j = 9\%$ (tasa nominal anual)
- $m = 12$ (frecuencia de capitalización: mensual)
- $t = 0,5$ años (6 meses)
- $i = \frac{j}{m} = \frac{9\%}{12} = 0,75\%$ (tasa por periodo)
- $n = m \times t = 12 \times 0,5 = 6$ periodos

Ejemplo 3: Solución

Utilizamos la fórmula para calcular la renta a partir del valor presente:

$$R = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$R = \frac{10,000 \times 0,0075}{1 - (1 + 0,0075)^{-6}} \approx \frac{75}{0,043856} \approx \$1,710,69$$

Respuesta

La persona debe realizar 6 pagos mensuales de \$1,710.69 (ajustando la última cuota a \$1,710.67 por redondeo) para amortizar el préstamo de \$10,000.

Ejemplo 3: Tabla de Amortización

Periodo	Cuota	Interés	Amortización	Saldo
0				\$10,000.00
1	\$1,710.69	\$75.00	\$1,635.69	\$8,364.31
2	\$1,710.69	\$62.73	\$1,647.96	\$6,716.35
3	\$1,710.69	\$50.37	\$1,660.32	\$5,056.03
4	\$1,710.69	\$37.92	\$1,672.77	\$3,383.26
5	\$1,710.69	\$25.37	\$1,685.32	\$1,697.94
6	\$1,710.67	\$12.73	\$1,697.94	\$0.00
Total	\$10,264.12	\$264.12	\$10,000.00	

Cálculos: En cada periodo, el interés es el saldo anterior multiplicado por la tasa periódica (0.75 %). La amortización es la cuota menos el interés, y el nuevo saldo es el saldo anterior menos la amortización. La última cuota se ajusta por centavos para cerrar el saldo en \$0.00.

Ejemplo 4: Determinación del Tiempo

Problema

Una persona desea acumular \$25,000 realizando depósitos trimestrales de \$1,200 en una cuenta que paga una tasa de interés del 8 % capitalizable trimestralmente. ¿Cuánto tiempo necesitará para lograr su objetivo?

Datos

- $M = \$25,000$ (monto a acumular)
- $R = \$1,200$ (depósito trimestral)
- $j = 8\%$ (tasa nominal anual)
- $m = 4$ (frecuencia de capitalización: trimestral)
- $i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = 2\%$ (tasa por periodo)

Ejemplo 4: Solución

Utilizamos la fórmula para calcular el tiempo:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{M \cdot i}{R} + 1\right)}{\ln(1 + i)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{25,000 \times 0,02}{1,200} + 1\right)}{\ln(1 + 0,02)} = \frac{\ln(1,417)}{\ln(1,02)} = \frac{0,3485}{0,0198} = 17,6$$

Como necesitamos un número entero de periodos, redondeamos hacia arriba: $n = 18$ períodos.

Respuesta

La persona necesitará 18 trimestres (4.5 años) para acumular \$25,000.

Resumen de Fórmulas de Anualidades Vencidas

- **Monto acumulado:** $M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
- **Valor presente:** $C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$
- **Renta (a partir de M):** $R = \frac{M \cdot i}{(1+i)^n - 1}$
- **Renta (a partir de C):** $R = \frac{C \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$
- **Tiempo:** $n = \frac{\ln\left(\frac{M \cdot i}{R} + 1\right)}{\ln(1+i)}$

Referencias

- Ayres, F. (2015). *Matemáticas Financieras*. McGraw-Hill.
- García, J. (2018). *Matemáticas Financieras con Aplicaciones*. Pearson.
- Villalobos, J. L. (2017). *Matemáticas Financieras*. 5^a Ed. Pearson.
- Díaz Mata, A. (2019). *Matemáticas Financieras*. 6^a Ed. McGraw-Hill.