# Series Primera Parte I

## Sucesiones y Series Infinitas

MATUASD

Escuela de Matematicas
UASD

2025

# Contenido

## Definición de Sucesión

### Definición

*Una* **sucesión** *es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ (o un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$). Los valores de la función se llaman* **términos de la sucesión**.

En otras palabras, una sucesión es una lista ordenada de números:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

donde cada número natural $n$ está asociado con un término $a_n$.

## Notación de Sucesión

Una sucesión se denota de varias formas:

- $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- $(a_n)$ o $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
- $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Donde:

- $a_n$ es el **término n-ésimo** o **término general**
- $n$ es el **índice**
- A veces el índice comienza en $n = 0$ o cualquier otro entero

# Fórmula Explícita de una Sucesión

## Definición

*Una* **fórmula explícita** *(o forma cerrada) de una sucesión es una expresión que permite calcular directamente el término $a_n$ en función del índice $n$.*

**Ejemplos:**

1. $a_n = 2n + 1$ genera la sucesión: $3, 5, 7, 9, 11, \dots$
2. $a_n = \frac{1}{n}$ genera la sucesión: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
3. $a_n = (-1)^n$ genera la sucesión: $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$
4. $a_n = \frac{n}{n+1}$ genera la sucesión: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

## Fórmula Recursiva de una Sucesión

### Definición

*Una* **fórmula recursiva** *(o definición recursiva) define cada término de la sucesión en función de uno o más términos anteriores, junto con uno o más términos iniciales.*

**Ejemplos:**

1. $a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$
   Genera: $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$
2. Sucesión de Fibonacci: $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$
   Genera: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$
3. $a_1 = 2,\ a_n = 2a_{n-1}$ para $n \geq 2$
   Genera: $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

## Sucesión Aritmética

### Definición

*Una* **sucesión aritmética** *es una sucesión en la cual la diferencia entre términos consecutivos es constante. Esta diferencia constante se llama* **diferencia común**, *denotada por* $d$.

*Fórmula explícita:* $a_n = a_1 + (n-1)d$

*Fórmula recursiva:* $a_n = a_{n-1} + d$, *con* $a_1$ *dado.*

## Ejemplos de Sucesiones Aritméticas

### Ejemplo

*Sucesión con* $a_1 = 5$ *y* $d = 3$*:*

$$a_n = 5 + (n-1)(3) = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

*Los primeros términos son:* $5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots$

### Ejemplo

*Sucesión con* $a_1 = 20$ *y* $d = -4$*:*

$$a_n = 20 + (n-1)(-4) = 20 - 4n + 4 = 24 - 4n$$

*Los primeros términos son:* $20, 16, 12, 8, 4, 0, -4, -8, \ldots$

## Sucesión Geométrica

### Definición

*Una* **sucesión geométrica** *es una sucesión en la cual el cociente entre términos consecutivos es constante. Este cociente constante se llama* **razón común**, *denotada por* $r$.
*Fórmula explícita:* $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
*Fórmula recursiva:* $a_n = r \cdot a_{n-1}$, *con* $a_1$ *dado.*

# Ejemplos de Sucesiones Geométricas

## Ejemplo

*Sucesión con* $a_1 = 3$ *y* $r = 2$*:*

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

*Los primeros términos son:* $3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots$

## Ejemplo

*Sucesión con* $a_1 = 8$ *y* $r = \frac{1}{2}$*:*

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

*Los primeros términos son:* $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

# Teorema de Convergencia de Sucesión Geométrica

## Teorema

*Sea $\{r^n\}$ una sucesión geométrica con razón $r$. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & si\ |r| < 1 \\ 1 & si\ r = 1 \\ diverge & si\ r \leq -1\ o\ r > 1 \end{cases}$$

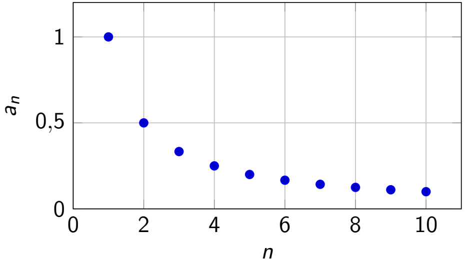
*Para una sucesión geométrica general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & si\ |r| < 1 \\ a_1 & si\ r = 1 \\ diverge & en\ otro\ caso \end{cases}$$

## Ejemplo 1 con Gráfica

### Ejemplo

*Considere la sucesión* $a_n = \frac{1}{n}$ *para* $n \geq 1$.

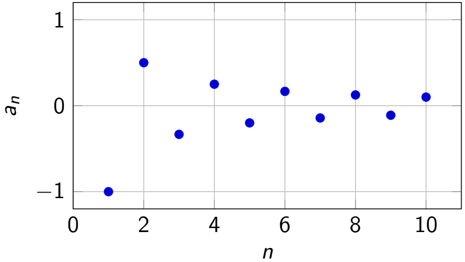



Los términos se acercan a 0: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \to 0$

## Ejemplo 2 con Gráfica

### Ejemplo

*Considere la sucesión* $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ *para* $n \geq 1$.

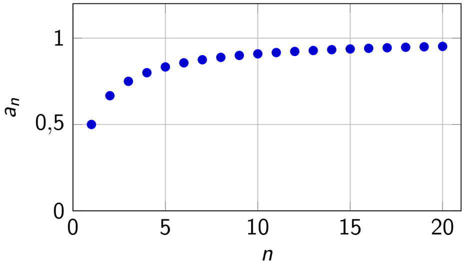



Sucesión alternante que converge a 0: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \to 0$

## Ejemplo 3 con Gráfica

### Ejemplo

*Considere la sucesión* $a_n = \frac{n}{n+1}$ *para* $n \geq 1$.




Sucesión creciente que converge a 1: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \to 1$

# Definición de Convergencia de una Sucesión

## Definición

*Una sucesión* $\{a_n\}$ **converge** *a un número* $L$ *si para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un número natural* $N$ *tal que para todo* $n > N$*:*

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

*En este caso escribimos:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

*y decimos que* $L$ *es el* **límite** *de la sucesión.*
*Si la sucesión no converge a ningún número, decimos que* **diverge**.

# Ejemplo 1: Demostración de Convergencia (Definición)

## Ejemplo

*Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *usando la definición.*

**Demostración:** Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Debemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Observemos que:

$$\left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Por el principio de Arquímedes, podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon}$.
Entonces, si $n > N$, tenemos $n > \frac{1}{\varepsilon}$, lo que implica $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. $\square$

## Ejemplo 2: Demostración de Convergencia (Definición)

### Ejemplo

*Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$ *usando la definición.*

**Demostración:** Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Necesitamos encontrar $N$ tal que si $n > N$:

$$\left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| < \varepsilon$$

Simplificamos:

$$\left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2(n+3)}{n+3}\right| = \left|\frac{2n+1-2n-6}{n+3}\right| = \left|\frac{-5}{n+3}\right| = \frac{5}{n+3}$$

Queremos $\frac{5}{n+3} < \varepsilon$, es decir, $n+3 > \frac{5}{\varepsilon}$, lo que equivale a $n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$.
Elegimos $N = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} - 3 \right\rceil$. Entonces para $n > N$, se cumple la desigualdad. □

# Ejemplo 3: Demostración de Convergencia (Definición)

## Ejemplo

*Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{n^2+1} = 3$ *usando la definición.*

**Demostración:** Sea $\varepsilon > 0$. Calculamos:

$$\left|\frac{3n^2-5}{n^2+1} - 3\right| = \left|\frac{3n^2-5-3(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\frac{3n^2-5-3n^2-3}{n^2+1}\right|$$

$$= \left|\frac{-8}{n^2+1}\right| = \frac{8}{n^2+1}$$

Como $n^2+1 > n^2$, tenemos:

$$\frac{8}{n^2+1} < \frac{8}{n^2}$$

Queremos $\frac{8}{n^2} < \varepsilon$, es decir, $n^2 > \frac{8}{\varepsilon}$, lo que da $n > \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}}$.

Elegimos $N = \left\lceil \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}} \right\rceil$. Entonces para $n > N$ se cumple la desigualdad. $\square$

## Ejemplo 4: Demostración de Convergencia (Definición)

### Ejemplo

*Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ *usando la definición.*

**Demostración:** Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Debemos encontrar $N$ tal que si $n > N$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Observamos que:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{n} = \frac{1}{n}$$

ya que $|(-1)^n| = 1$ para todo $n$.
Queremos $\frac{1}{n} < \varepsilon$, es decir, $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
Elegimos $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. Entonces para $n > N$ se tiene $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. □

## Propiedades de Sucesiones Convergentes I

### Teorema

*Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *sucesiones convergentes con* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. *Entonces:*

1. **Regla de la Suma:**
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$$
2. **Regla de la Diferencia:**
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$$
3. **Múltiplo por una Constante:** *Para cualquier constante* $c \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot A$$

# Propiedades de Sucesiones Convergentes II

## Teorema (Continuación)

4. **Regla del Producto:**

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

5. **Regla del Cociente:** *Si* $B \neq 0$ *y* $b_n \neq 0$ *para todo* $n$*:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

Estas propiedades permiten calcular límites de sucesiones complejas a partir de sucesiones más simples.

## Teorema del Sandwich para Sucesiones

**Teorema (Teorema del Sandwich o del Emparedado)**

*Sean* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *y* $\{c_n\}$ *sucesiones tales que:*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

*para todo* $n$ *mayor que algún* $N_0 \in \mathbb{N}$.
*Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, *entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

**Interpretación:** Si una sucesión está atrapada entre otras dos que convergen al mismo límite, entonces la sucesión del medio también converge a ese límite.

## Teorema de L'Hôpital para Sucesiones

### Teorema

*Supongamos que f y g son funciones diferenciables tales que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

*Si* $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ *(finito o infinito), entonces:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

*Para sucesiones: Si* $a_n = f(n)$ *y* $b_n = g(n)$*, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

# Ejemplo 1: Cálculo de Límites

## Ejemplo

*Calcular* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n-1}{2n^2+7}$

**Solución:** Dividimos numerador y denominador por $n^2$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n-1}{2n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{7}{n^2}}$$

Usando las propiedades de límites y que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$:

$$= \frac{3+0-0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

# Ejemplo 2: Cálculo de Límites

## Ejemplo

*Calcular* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n+1}$

**Solución:** Dividimos numerador y denominador por $n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2(1+\frac{3}{n})}}{n(2+\frac{1}{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{n(2+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{2+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}}{2+0} = \frac{1}{2}$$

# Ejemplo 3: Cálculo de Límites (L'Hôpital)

## Ejemplo

*Calcular* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$

**Solución:** Esto es una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Consideramos $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x$ para $x \geq 1$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

## Ejemplo 4: Cálculo de Límites (Sandwich)

### Ejemplo

*Calcular* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

**Solución:** Sabemos que $-1 \leq \sin n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Dividiendo por $n > 0$:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Como $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, por el Teorema del Sandwich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

# Ejemplo 5: Cálculo de Límites

## Ejemplo

*Calcular* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

**Solución:** Este es un límite fundamental conocido. Se puede demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

donde $e \approx 2{,}71828\ldots$ es el número de Euler.

Más generalmente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

para cualquier constante $k$.

# Definición de Sucesión Monótona

## Definición

*Una sucesión* $\{a_n\}$ *es:*

- **Creciente** *si* $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
- **Estrictamente creciente** *si* $a_n < a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
- **Decreciente** *si* $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
- **Estrictamente decreciente** *si* $a_n > a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$

*Una sucesión se llama* **monótona** *si es creciente o decreciente.*

## Definición de Ínfimo y Supremo

### Definición

*Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.*

- *Un número $M$ es una* **cota superior** *de $S$ si $x \leq M$ para todo $x \in S$. En este caso, $S$ está* **acotado superiormente**.
- *El* **supremo** *de $S$, denotado $\sup S$, es la menor de las cotas superiores de $S$ (si existe).*
- *Un número $m$ es una* **cota inferior** *de $S$ si $m \leq x$ para todo $x \in S$. En este caso, $S$ está* **acotado inferiormente**.
- *El* **ínfimo** *de $S$, denotado $\inf S$, es la mayor de las cotas inferiores de $S$ (si existe).*

*Un conjunto está* **acotado** *si está acotado superior e inferiormente.*

## Teorema de la Sucesión Monótona

**Teorema (Teorema de Convergencia Monótona)**

*Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*
*Más específicamente:*

1. *Si* $\{a_n\}$ *es creciente y acotada superiormente, entonces* $\{a_n\}$ *converge a* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. *Si* $\{a_n\}$ *es decreciente y acotada inferiormente, entonces* $\{a_n\}$ *converge a* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

**Nota:** Este teorema es fundamental y se basa en el axioma de completitud de los números reales.

# Ejemplo: Sucesión Monótona y Acotada (I)

## Ejemplo

*Sea la sucesión definida por* $b_1 = 1$ *y*

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 1$$

*para todo* $n \geq 1$.
*Demostrar que la sucesión* $\{b_n\}$ *converge y hallar su límite.*

**Solución:**

- Analizaremos primero la **monotonía** de la sucesión.

## Ejemplo: Sucesión Monótona y Acotada (II)

**Monotonía:** Probaremos por inducción que la sucesión es creciente ($b_{n+1} \geq b_n$).

- Para $n = 1$: $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 1{,}5 > 1 = b_1$.
- Supongamos que $b_n \geq b_{n-1}$.
- Entonces,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + 1 \geq \frac{1}{2} b_{n-1} + 1 = b_n,$$

si y solo si $b_n \geq b_{n-1}$. Por inducción, la sucesión es creciente.

**Acotación superior:** Probaremos por inducción que $b_n < 2$ para todo $n$.

- $b_1 = 1 < 2$.
- Supongamos $b_n < 2$. Entonces,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + 1 < \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

Por inducción, $b_{n+1} < 2$ para todo $n$.

# Definición de n-ésima Suma Parcial

## Definición

*Dada una sucesión* $\{a_n\}$, *la* **n-ésima suma parcial**, *denotada* $S_n$, *es la suma de los primeros* $n$ *términos de la sucesión:*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

**Ejemplos:**

- Si $a_n = n$, entonces $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Si $a_n = \frac{1}{2^n}$, entonces $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

# Definición de Sucesión de Sumas Parciales

## Definición

*Dada una sucesión* $\{a_n\}$, *la* **sucesión de sumas parciales** *es la sucesión* $\{S_n\}$ *donde:*

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es una nueva sucesión derivada de $\{a_n\}$.

## Definición de Serie Infinita

### Definición

*Dada una sucesión $\{a_n\}$, una* **serie infinita** *(o simplemente* **serie***) es la suma formal de todos los términos de la sucesión:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

*Los números $a_n$ se llaman* **términos de la serie***.*

**Observación:** Una serie es una expresión que sugiere una suma infinita. Para darle significado riguroso, estudiamos su convergencia a través de la sucesión de sumas parciales.

# Ejemplos de Series Infinitas I

## Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

*Esta es la* **serie armónica***.*

## Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

*Esta es la* **serie p** *con* $p = 2$.

# Ejemplos de Series Infinitas II

## Ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

*Esta es una* **serie geométrica** *con razón* $r = \frac{1}{2}$.

# Definición de Convergencia de una Serie

## Definición

*Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie infinita con sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}$ *donde:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

*La serie* **converge** *a la suma* $S$ *si la sucesión de sumas parciales converge a* $S$*:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

*En este caso escribimos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

*Si el límite no existe o es infinito, la serie* **diverge***.*

## Serie Geométrica

### Definición

*Una* **serie geométrica** *es una serie de la forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

*donde* $a \neq 0$ *es el primer término y* $r$ *es la razón común.*

# Criterio de Convergencia de Serie Geométrica

## Teorema

*Una serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ *converge si y solo si* $|r| < 1$.

- *Si* $|r| < 1$, *su suma es:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

- *Si* $|r| \geq 1$, *la serie diverge.*

## Demostración del Criterio de Serie Geométrica

**Demostración:**

Consideremos la suma parcial de los primeros $n$ términos:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

Multiplicando ambos lados por $r$:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

Restando:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

Por lo tanto:

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

Si $r \neq 1$, se deduce:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

**Análisis del límite**:

- Si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$:

# Ejemplo 1: Serie Geométrica

## Ejemplo

*Determinar si la serie converge:* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

**Solución:** Esta es una serie geométrica con $a = 3$ y $r = \frac{1}{2}$.
Como $|r| = \frac{1}{2} < 1$, la serie converge.
Su suma es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

## Ejemplo 2: Serie Geométrica

### Ejemplo

*Determinar si la serie converge:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$

**Solución:** Reescribimos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
Esta es una serie geométrica que comienza en $n = 1$ con $a = \frac{5}{3}$ y $r = \frac{1}{3}$.
Como $|r| = \frac{1}{3} < 1$, converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{5/3}{1 - 1/3} = \frac{5/3}{2/3} = \frac{5}{2}$$

Alternativamente: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} - 5 = \frac{5}{1-1/3} - 5 = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$

# Ejemplo 3: Serie Geométrica Divergente

## Ejemplo

*Determinar si la serie converge:* $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 3^n$

**Solución:** Esta es una serie geométrica con $a = 2$ y $r = 3$.
Como $|r| = 3 > 1$, la serie **diverge**.
Los términos crecen sin límite: $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$
Por lo tanto, las sumas parciales también crecen sin límite:

$$S_n = 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} \to \infty \text{ cuando } n \to \infty$$

# Criterio del n-ésimo Término de la Divergencia

**Teorema (Criterio del n-ésimo Término o Test de Divergencia)**

*Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

**Contrapositivo (más útil):** *Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (o no existe), entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

**Advertencia:** El recíproco NO es cierto. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie puede converger o diverger. Por ejemplo, la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge aunque $\lim \frac{1}{n} = 0$.

## Demostración del Criterio del n-ésimo Término

**Demostración:** Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a $S$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es la n-ésima suma parcial.
Observemos que $a_n = S_n - S_{n-1}$ para $n \geq 2$.
Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$$

Como ambas sucesiones $\{S_n\}$ y $\{S_{n-1}\}$ convergen a $S$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Por lo tanto, si la serie converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

## Ejemplo 1: Criterio del n-ésimo Término

### Ejemplo

*Determinar si la serie converge:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

**Solución:** Calculamos el límite del término general:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$, por el criterio del n-ésimo término, la serie **diverge**.

## Ejemplo 2: Criterio del n-ésimo Término

### Ejemplo

*Determinar si la serie converge:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2-3}$

**Solución:** Calculamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}} = \frac{2+0}{1-0} = 2 \neq 0$$

Como el límite del término general es $2 \neq 0$, la serie **diverge** por el criterio del n-ésimo término.

## Ejemplo 3: Criterio del n-ésimo Término

### Ejemplo

*Determinar si la serie converge:* $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$

**Solución:** Observemos que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

Este límite no existe, ya que la sucesión alterna entre $-1$ y $1$:

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe (en particular, no es 0), la serie **diverge** por el criterio del n-ésimo término.

# Definición de Serie Telescópica

## Definición

*Una* **serie telescópica** *es una serie cuyos términos pueden escribirse como una diferencia:*

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

*de modo que la serie toma la forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$$

*Las sumas parciales se simplifican (se "colapsan"):*

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

## Suma de Series Telescópicas

Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = L$ existe, entonces la serie converge a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - L$$

**Interpretación:** En una serie telescópica, la mayoría de los términos intermedios en las sumas parciales se cancelan, dejando únicamente los términos inicial y final, lo que permite calcular fácilmente la suma de la serie cuando el límite existe.

# Ejemplo 1: Serie Telescópica (I)

## Ejemplo

*Determinar si la serie converge y hallar su suma:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

**Solución:**
Usamos fracciones parciales para escribir el término general:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Entonces la serie se puede expresar como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

## Ejemplo 1: Serie Telescópica (II)

**Continuación de la Solución:**
Calculamos la suma parcial $S_n$:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Observando el çolapso" telescópico, obtenemos:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

# Ejemplo 2: Serie Telescópica

## Ejemplo

*Determinar si la serie converge y hallar su suma:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

**Solución:** Usamos fracciones parciales:

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

La suma parcial es:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2n+1}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1$$

## Conclusión

En esta presentación hemos cubierto:

- Sucesiones: Definiciones, tipos y convergencia
- Teoremas fundamentales de sucesiones
- Series infinitas: Definición y convergencia
- Series geométricas
- Criterios de convergencia y divergencia
- Series telescópicas

# Bibliografía


- George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, *Cálculo de Thomas*, 13ª edición. Pearson, 2015.
- James Stewart, *Cálculo de una variable*, 8ª edición, Cengage, 2016.
- Tom M. Apostol, *Calculus, Volumen 1*, 2ª edición. Wiley, 1967.