

Cálculo I: Unidad 0. Parte 1

El Plano Cartesiano y La Línea Recta

R. M.

UASD

2025



1 Sistema de Coordenadas Cartesianas en \mathbb{R}^2

2 La Línea Recta

El Plano Cartesiano I

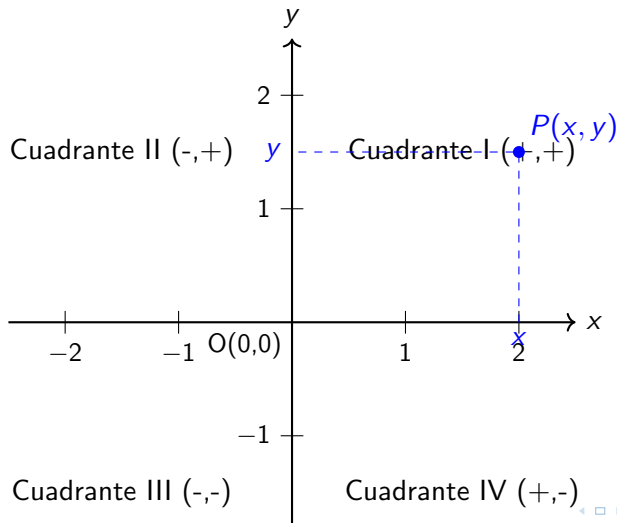
Definición

El **plano cartesiano** es un sistema de referencia conformado por dos rectas numéricas perpendiculares, denominadas **ejes coordenados**, que se intersecan en un punto llamado **origen**.

- El eje horizontal se denomina **eje de las abscisas** o **eje x**.
- El eje vertical se denomina **eje de las ordenadas** o **eje y**.

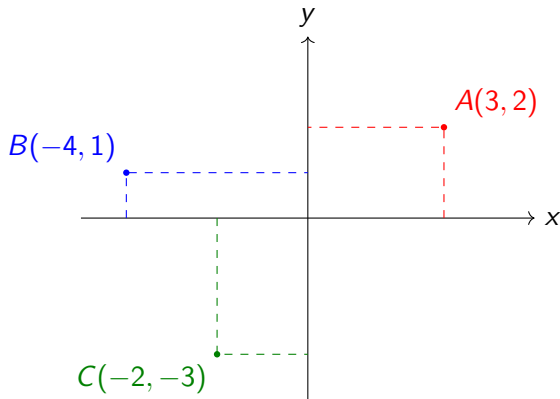
A cada punto P en el plano le corresponde un par ordenado de números reales (x, y) , denominado **coordenadas** del punto.

El Plano Cartesiano II



Ejemplos: Ubicación de Coordenadas

Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano: $A(3, 2)$, $B(-4, 1)$, $C(-2, -3)$.



Distancia entre Dos Puntos

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano. La **distancia** entre P_1 y P_2 , denotada por $d(P_1, P_2)$, se define como la longitud del segmento de recta que los une. Se calcula mediante la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancia entre Dos Puntos

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano. La **distancia** entre P_1 y P_2 , denotada por $d(P_1, P_2)$, se define como la longitud del segmento de recta que los une. Se calcula mediante la fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Propiedades

Sea d una función de distancia en \mathbb{R}^2 . Para cualesquiera puntos $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$, se cumplen:

- 1 No negatividad: $d(P_1, P_2) \geq 0$.
- 2 Identidad de los indiscernibles: $d(P_1, P_2) = 0 \iff P_1 = P_2$.

Ejemplos: Cálculo de Distancia

Ejemplo

Hallar la distancia entre $A(2, 3)$ y $B(5, 7)$.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Ejemplos: Cálculo de Distancia

Ejemplo

Hallar la distancia entre $A(2, 3)$ y $B(5, 7)$.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar la distancia entre $C(-1, 4)$ y $D(3, -2)$.

$$\begin{aligned} d(C, D) &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

Punto Medio

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los puntos extremos de un segmento de recta. Las coordenadas del **punto medio** M del segmento son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Punto Medio

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los puntos extremos de un segmento de recta. Las coordenadas del **punto medio** M del segmento son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplo

Hallar el punto medio del segmento con extremos $A(2, 5)$ y $B(8, 1)$.

$$M_{AB} = \left(\frac{2 + 8}{2}, \frac{5 + 1}{2} \right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{6}{2} \right) = (5, 3)$$

- ## 2 La Línea Recta

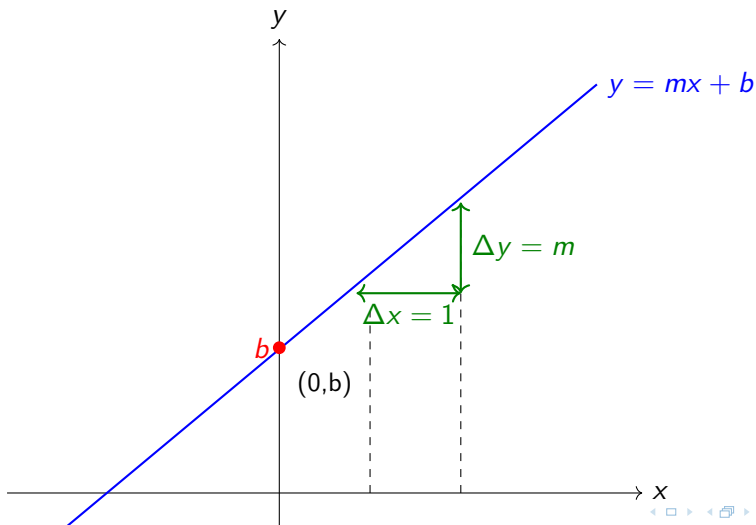
La Línea Recta I

Una recta en el plano cartesiano es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen una ecuación lineal de la forma $Ax + By + C = 0$.

Una forma común de representar una recta es la ecuación **pendiente-intersección**:
 $y = mx + b$.

- m : Es la **pendiente** de la recta, que mide su inclinación.
- b : Es la **ordenada en el origen** o **intersección con el eje y**, el punto donde la recta corta al eje vertical, i.e., el punto $(0, b)$.

La Línea Recta II



La Pendiente de una Recta I

Definición

La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es la razón del cambio en la ordenada (Δy) al cambio en la abscisa (Δx):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{con } x_1 \neq x_2$$

Tipos de Pendientes:

- $m > 0$: Recta creciente (ascendente).
- $m < 0$: Recta decreciente (descendente).
- $m = 0$: Recta horizontal.
- m no definida: Recta vertical.

La Pendiente de una Recta II

Ejemplo

$$\textcircled{1} P_1(1, 2), P_2(3, 6) \implies m = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2 > 0$$

$$\textcircled{2} P_1(-1, 4), P_2(2, -2) \implies m = \frac{-2-4}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2 < 0$$

$$\textcircled{3} P_1(2, 3), P_2(5, 3) \implies m = \frac{3-3}{5-2} = \frac{0}{3} = 0$$

Ecuaciones de la Recta

Ecuación Punto-Pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuaciones de la Recta

Ecuación Punto-Pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación Pendiente-Intersección

La ecuación de la recta con pendiente m y ordenada en el origen b es:

$$y = mx + b$$

Ecuaciones de la Recta

Ecuación Punto-Pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación Pendiente-Intersección

La ecuación de la recta con pendiente m y ordenada en el origen b es:

$$y = mx + b$$

Ecuación General

Toda ecuación de una recta se puede expresar en la forma general:

Ejemplos: Hallar la Ecuación de la Recta I

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta con pendiente $m = -3$ que pasa por el punto $P(1, -2)$. Graficarla.

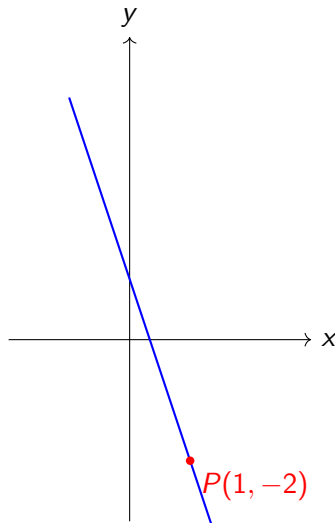
Usando la forma punto-pendiente:

$$y - (-2) = -3(x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$y = -3x + 1$$

Ejemplos: Hallar la Ecuación de la Recta II



Ejemplos: Hallar la Ecuación de la Recta (cont.) I

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 5)$ y $B(4, -1)$.

1. Calculamos la pendiente:

$$m = \frac{-1 - 5}{4 - (-2)} = \frac{-6}{6} = -1$$

2. Usamos la forma punto-pendiente con el punto A :

$$y - 5 = -1(x - (-2))$$

$$y - 5 = -x - 2$$

$$y = -x + 3$$

Ejemplos: Hallar la Ecuación de la Recta (cont.) II

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $C\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $D\left(2, -\frac{3}{4}\right)$.

1. Calculamos la pendiente:

$$m = \frac{-\frac{3}{4} - 1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{7}{4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6}$$

2. Usamos la forma punto-pendiente con el punto C :

$$y - 1 = -\frac{7}{6} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

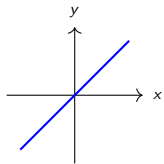
$$y - 1 = -\frac{7}{6}x + \frac{7}{12}$$

$$y = -\frac{7}{6}x + \frac{19}{12}$$

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

$$m > 0$$



La

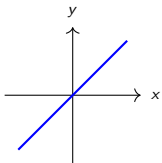
recta es **creciente**.

A medida que x
aumenta, y también
aumenta.

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

$$m > 0$$



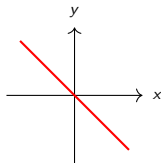
La

recta es **creciente**.

A medida que x aumenta, y también aumenta.

Pendiente Negativa

$$m < 0$$



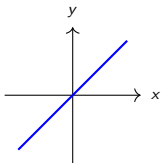
La

recta es **decreciente**. A medida que x aumenta, y disminuye.

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

$$m > 0$$



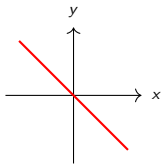
La

recta es **creciente**.

A medida que x aumenta, y también aumenta.

Pendiente Negativa

$$m < 0$$

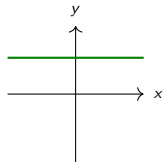


La

recta es **decreciente**. A medida que x aumenta, y disminuye.

Pendiente Cero

$$m = 0$$



La

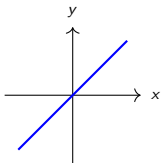
recta es **horizontal**.

El valor de y es constante para todo x .

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

$$m > 0$$



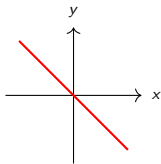
La

recta es **creciente**.

A medida que x aumenta, y también aumenta.

Pendiente Negativa

$$m < 0$$

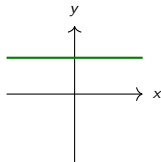


La

recta es **decreciente**. A medida que x aumenta, y disminuye.

Pendiente Cero

$$m = 0$$

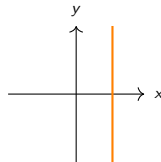


La

recta es **horizontal**.

El valor de y es constante para todo x .

Pendiente Indefinida



La

recta es **vertical**.

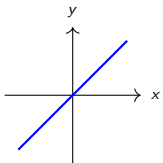
Corresponde a un $\Delta x = 0$, lo que resulta en una división por cero. Su ecuación es de la

forma $x = k$, donde

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

$$m > 0$$



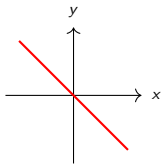
La

recta es **creciente**.

A medida que x aumenta, y también aumenta.

Pendiente Negativa

$$m < 0$$

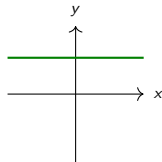


La

recta es **decreciente**. A medida que x aumenta, y disminuye.

Pendiente Cero

$$m = 0$$

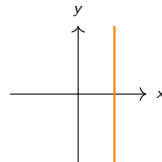


La

recta es **horizontal**.

El valor de y es constante para todo x .

Pendiente Indefinida



La

recta es **vertical**. Corresponde a un $\Delta x = 0$, lo que resulta en una división por cero. Su ecuación es de la forma $x = k$, donde

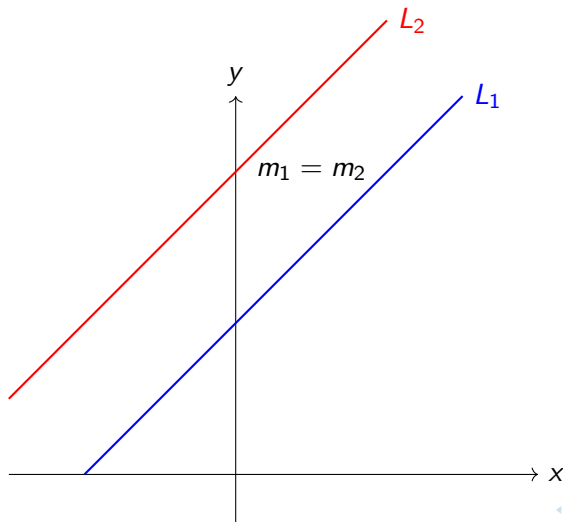
Rectas Paralelas I

Definición

*Dos rectas no verticales L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, son **paralelas** si y solo si sus pendientes son iguales.*

$$L_1 \parallel L_2 \iff m_1 = m_2$$

Rectas Paralelas II



Ejemplos de Rectas Paralelas

Ejemplo

Las rectas $y = 2x + 5$ y $y = 2x - 3$ son paralelas, pues $m_1 = m_2 = 2$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3, 2)$ y es paralela a $y = -4x + 1$. La pendiente debe ser $m = -4$.

$$y - 2 = -4(x - 3)$$

$$y - 2 = -4x + 12$$

$$y = -4x + 14$$

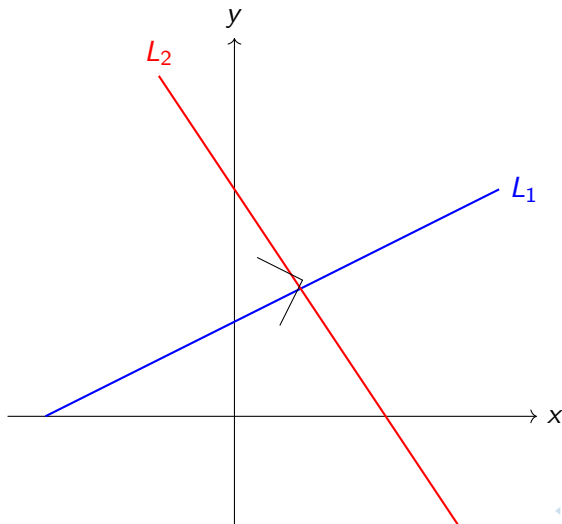
Rectas Perpendiculares I

Definición

*Dos rectas no verticales L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, son **perpendiculares** si y solo si el producto de sus pendientes es -1 .*

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \left(\text{o } m_2 = -\frac{1}{m_1} \right)$$

Rectas Perpendiculares II



Ejemplos Rectas Perpendiculares

Ejemplo

Las rectas $y = \frac{1}{3}x + 2$ y $y = -3x - 1$

Ejemplos Rectas Perpendiculares

Ejemplo

Las rectas $y = \frac{1}{3}x + 2$ y $y = -3x - 1$ son perpendiculares, ya que
$$m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1.$$

Ejemplos Rectas Perpendiculares

Ejemplo

Las rectas $y = \frac{1}{3}x + 2$ y $y = -3x - 1$ son perpendiculares, ya que $m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 1)$ y es perpendicular a $y = 2x - 3$. La pendiente de la recta dada es $m_1 = 2$. La pendiente de la recta perpendicular será $m_2 = -\frac{1}{2}$.

Ejemplos Rectas Perpendiculares

Ejemplo

Las rectas $y = \frac{1}{3}x + 2$ y $y = -3x - 1$ son perpendiculares, ya que $m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 1)$ y es perpendicular a $y = 2x - 3$. La pendiente de la recta dada es $m_1 = 2$. La pendiente de la recta perpendicular será $m_2 = -\frac{1}{2}$.

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - (-4))$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x - 2; \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

Ejercicios

Asignados en el aula.