

# Interés Compuesto Parte I

## Matemática Financiera

### MAT 143 Sec 01

Robert Muñoz

Escuela de Matemática,  
Facultad Ciencias  
UASD

2025

El **interés compuesto** consiste en que los intereses generados al final de cada período se agregan al capital para producir nuevos intereses en los siguientes períodos. Es decir, los intereses se reinvierten.

- **Periodo de capitalización:** Es la unidad de tiempo al final de la cual los intereses generados se agregan al capital.

- **Periodo de capitalización:** Es la unidad de tiempo al final de la cual los intereses generados se agregan al capital.
- **Frecuencia de conversión ( $m$ ):** Número de veces que ocurre la capitalización en un año.  
Por ejemplo:
  - $m = 1$ : capitalización anual.
  - $m = 2$ : capitalización semestral.
  - $m = 4$ : capitalización trimestral.
  - $m = 12$ : capitalización mensual.

- **Periodo de capitalización:** Es la unidad de tiempo al final de la cual los intereses generados se agregan al capital.
- **Frecuencia de conversión ( $m$ ):** Número de veces que ocurre la capitalización en un año.  
Por ejemplo:
  - $m = 1$ : capitalización anual.
  - $m = 2$ : capitalización semestral.
  - $m = 4$ : capitalización trimestral.
  - $m = 12$ : capitalización mensual.
- **Tasa nominal ( $j$ ):** Es la tasa anunciada en términos anuales, pero que no considera la capitalización en sí. Se relaciona con la tasa por período con la fórmula:  $i = \frac{j}{m}$ .

- **Periodo de capitalización:** Es la unidad de tiempo al final de la cual los intereses generados se agregan al capital.
- **Frecuencia de conversión ( $m$ ):** Número de veces que ocurre la capitalización en un año.  
Por ejemplo:
  - $m = 1$ : capitalización anual.
  - $m = 2$ : capitalización semestral.
  - $m = 4$ : capitalización trimestral.
  - $m = 12$ : capitalización mensual.
- **Tasa nominal ( $j$ ):** Es la tasa anunciada en términos anuales, pero que no considera la capitalización en sí. Se relaciona con la tasa por período con la fórmula:  $i = \frac{j}{m}$ .
- **Tasa por período ( $i$ ):** Es la tasa que se aplica en cada periodo de capitalización. Por ejemplo, si  $j = 12\%$  anual y  $m = 12$ , entonces  $i = \frac{0,12}{12} = 0,01 = 1\%$  mensual.

## Deducción de la Fórmula del Monto Compuesto

Supongamos que tenemos:

- $C$ : capital inicial.
- $m$ : frecuencia de capitalización.
- $t$ : tiempo en años.
- $i = \frac{j}{m}$ : tasa de interés por período de capitalización.

El número total de períodos de capitalización en  $t$  años es  $n = m \times t$ .

Al final de cada período, el capital se multiplica por  $(1 + i)$ . Entonces, el monto después de  $n$  períodos es:

$$M = C(1 + i)^n.$$

*Deducir la formula en el curso.*

$$M = C(1 + i)^{mt}$$

- $M$ : Monto compuesto.
- $C$ : Capital inicial.
- $i$ : Tasa de interés por período de capitalización ( $i = \frac{j}{m}$ ).
- $m$ : Frecuencia de capitalización.
- $t$ : Tiempo en años.

**Para hallar el capital  $C$ :**

$$C = \frac{M}{(1 + i)^{mt}}$$

**Para hallar la tasa nominal  $j$ :**

$$j = \left( \sqrt[m]{\frac{M}{C}} - 1 \right) m$$

**Para hallar el tiempo  $t$ :**

$$t = \frac{\ln \left( \frac{M}{C} \right)}{m \ln(1 + i)}$$

## Ejemplo 1: Comparar Monto Simple vs Compuesto

**Enunciado:** Suponga que invertimos  $C = \$5,000$  al 10 % anual durante 3 años.

- **Interés Simple:**  $M_{simple} = 5000(1 + 0,10 \times 3) = 5000 \times 1,30 = 6500.$
- **Interés Compuesto (capitalización anual):**

$$M_{compuesto} = 5000(1 + 0,10)^3 = 5000 \times 1,10^3 \approx 6655.$$

**Resultado:** Con interés compuesto, el monto es mayor, pues los intereses se reinvierten.

## Ejemplo 2: Hallar el Capital

**Enunciado:** Se desea obtener un monto de \$20,000 en 4 años, a una tasa nominal de  $j = 12\%$  con capitalización trimestral ( $m = 4$ ). Encuentre el capital inicial necesario.

### Cálculo:

- $i = \frac{j}{m} = \frac{0,12}{4} = 0,03$  por trimestre.
- $n = mt = 4 \times 4 = 16$  trimestres.
- $C = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{20000}{(1+0,03)^{16}}.$

### Resultado:

$$C = \frac{20000}{(1,03)^{16}} = 12463,33$$

## Ejemplo 3: Hallar la Tasa Nominal $j$

**Enunciado:** Un capital de \$5,000 se invierte durante 2 años, con capitalización semestral ( $m = 2$ ), y al final se obtiene un monto de \$6,000. Hallar la tasa nominal anual  $j$ .

### Cálculo:

- $n = mt = 2 \times 2 = 4$  períodos.
- $\frac{M}{C} = \frac{6000}{5000} = 1,2$ .
- 

$$j = \sqrt[m]{\frac{M}{C}} - 1$$

$$(1 + i)^4 = 1,2 \Rightarrow (1 + i) = (1,2)^{1/4} \approx 1,0460 \Rightarrow i \approx 0,0460.$$

- $j = m \times i = 0,0932 = 9,32\%$ .

## Ejemplo 4: Hallar el Tiempo $t$ (Parte 1)

**Enunciado:** ¿Cuánto tiempo tomará para que un capital de \$8,000 se convierta en \$12,000 si se invierte a una tasa nominal anual de  $j = 10\%$  con capitalización semestral ( $m = 2$ )?

**Cálculo:**

- $i = \frac{j}{m} = \frac{0,10}{2} = 0,05$  por semestre.
- $\frac{M}{C} = \frac{12,000}{8,000} = 1,5$
- Usamos la fórmula del monto compuesto:

$$M = C(1 + i)^n$$

- Despejamos  $n$ :

$$(1 + i)^n = \frac{M}{C} \implies n = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1 + i)}$$

## Ejemplo 4: Hallar el Tiempo $t$ (Parte 2)

### Cálculo (continuación):

- Sustituimos los valores:

$$n = \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)} \approx \frac{0,4055}{0,04879} \approx 8,31$$

- Como la capitalización es semestral ( $m = 2$ ), el tiempo en años es:

$$t = \frac{n}{m} = \frac{8,31}{2} \approx 4,16 \text{ años}$$

**Resultado:** Se requieren aproximadamente 4,16 años para que el capital crezca de \$8,000 a \$12,000 bajo las condiciones dadas.

## Ejemplo 5: Hallar el Monto Compuesto

**Enunciado:** ¿Cuál será el monto acumulado al invertir  $C = \$10,000$  durante 5 años a una tasa nominal anual de  $j = 8\%$  con capitalización trimestral ( $m = 4$ )?

### Cálculo:

- $i = \frac{j}{m} = \frac{0,08}{4} = 0,02$  por trimestre.
- $n = mt = 4 \times 5 = 20$  trimestres.
- Usamos la fórmula del monto compuesto:

$$M = C(1 + i)^n$$

- Sustituimos los valores:

$$M = 10,000 \times (1 + 0,02)^{20}$$

- Calculamos:

$$(1,02)^{20} \approx 1,4859$$

$$M = 10,000 \times 1,4859 = 14,859$$

Cuando se realiza una operación financiera, se pacta una tasa de interés anual que rige durante el lapso que dure la operación, que se denomina **tasa nominal de interés**. Sin embargo, si el interés se capitaliza en forma semestral, trimestral o mensual, la cantidad efectivamente pagada o ganada es mayor que si se compone en forma anual. Cuando esto sucede, se puede determinar una **tasa efectiva anual**. Dos tasas de interés anuales con diferentes períodos de capitalización serán **equivalentes** si al cabo de un año producen el mismo interés compuesto.

$$j_1 = m_1 \left( \left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{m_2/m_1} - 1 \right)$$

*Deducir la formula en el curso.*

## Ejemplo de Tasas Equivalentes

Suponga que desea encontrar la tasa nominal trimestral  $j_1$  equivalente a una tasa nominal mensual  $j_2 = 12\%$ , donde  $m_2 = 12$  (mensual) y  $m_1 = 4$  (trimestral).

- Usamos la fórmula:

$$j_1 = m_1 \left( \left( 1 + \frac{j_2}{m_2} \right)^{m_2/m_1} - 1 \right)$$

- Sustituyendo valores:

$$j_1 = 4 \left( \left( 1 + \frac{0,12}{12} \right)^{12/4} - 1 \right)$$

$$(1 + 0,01)^3 = (1,01)^3 \approx 1,030301$$

$$j_1 = 4 \times (1,030301 - 1) = 4 \times 0,030301 = 0,1212 = 12,12\%$$

**Resultado:** Una tasa nominal mensual de 12% es equivalente a una tasa nominal trimestral de aproximadamente 12.12%.

## Ejemplo de Tasas Equivalentes 2

Encuentre la tasa nominal anual convertible semestralmente  $j_1$  equivalente a una tasa nominal anual  $j_2 = 18\%$  con  $m_2 = 1$  (equivalente a una tasa efectiva anual), y  $m_1 = 2$  (semestral).

- Usamos la fórmula:

$$j_1 = m_1 \left( \left( 1 + \frac{j_2}{m_2} \right)^{m_2/m_1} - 1 \right)$$

- Sustituyendo valores:

$$j_1 = 2 \left( \left( 1 + \frac{0,18}{1} \right)^{1/2} - 1 \right)$$

$$(1 + 0,18)^{1/2} = (1,18)^{0,5} \approx 1,086278$$

$$j_1 = 2 \times (1,086278 - 1) = 2 \times 0,086278 = 0,172556 \approx 17,26\%$$

**Resultado:** Una tasa efectiva anual del 18% (o  $j_2$  con  $m_2 = 1$ ) es equivalente a una tasa nominal anual convertible semestralmente de aproximadamente 17.26%.

## Ejemplo de Tasas Equivalentes 3

Determine la tasa nominal anual convertible mensualmente  $j_1$  equivalente a una tasa nominal anual  $j_2 = 8\%$ , con  $m_2 = 4$  (convertible trimestralmente) y  $m_1 = 12$  (mensual).

- Aplicamos la fórmula:

$$j_1 = m_1 \left( \left( 1 + \frac{j_2}{m_2} \right)^{m_2/m_1} - 1 \right)$$

- Sustituyendo valores:

$$j_1 = 12 \left( \left( 1 + \frac{0,08}{4} \right)^{4/12} - 1 \right)$$

$$(1 + 0,02)^{1/3} = (1,02)^{0,3333} \approx 1,006623$$

$$j_1 = 12 \times (1,006623 - 1) = 12 \times 0,006623 = 0,07948 \approx 7,95\%$$

**Resultado:** Una tasa nominal anual del 8% convertible trimestralmente es equivalente a una tasa nominal anual convertible mensualmente de aproximadamente 7.95%.

Del libro de Matemáticas Financieras de Alfredo Diaz Mata, realizar los siguientes ejercicios:  
**Asignados en el curso.**

- Alfredo Diaz Mata, *Matemáticas Financieras*, Editorial Limusa, México, última edición.
- Frank Ayres, Jr. y Robert E. Moyer, *Matemáticas Financieras - Colección Schaum*, McGraw-Hill, última edición.
- Richard A. Brealey, Stewart C. Myers, *Principios de Finanzas Corporativas*, McGraw-Hill, última edición.