Series de Potencias, Taylor y Maclaurin

Cálculo II

MATUASD

Escuela de Matemáticas
UASD

2025

Contenido

Definición de Serie de Potencias

Definición

Una **serie de potencias** *centrada en $x = a$ es una serie de la forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

donde:

- *x es una variable*
- *a es el centro de la serie*
- *$\{c_n\}$ es una sucesión de coeficientes*

Nota: Cuando $a = 0$, la serie se reduce a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

Ejemplos de Series de Potencias

Ejemplo (Serie Geométrica)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Esta serie converge a $\frac{1}{1-x}$ *para* $|x| < 1$.

Ejemplo (Serie Exponencial)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Esta serie converge a e^x *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de Series de Potencias (continuación)

Ejemplo (Serie Centrada en $x = 2$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1} = 1 + \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(x-2)^3}{4} + \cdots$$

Esta es una serie de potencias centrada en $a = 2$.

Teorema de Convergencia de Series de Potencias

Teorema

Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:

1. *La serie converge solamente cuando $x = a$.*
2. *La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.*
3. *Existe un número $R > 0$ tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.*

El número R se llama **radio de convergencia** de la serie.

- En el caso (1): $R = 0$
- En el caso (2): $R = \infty$
- En el caso (3): R es un número positivo finito

Intervalo y Radio de Convergencia

Definición

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias.
Radio de Convergencia (R): *Es el número no negativo (o ∞) tal que la serie converge para $|x-a| < R$ y diverge para $|x-a| > R$.*
Intervalo de Convergencia: *Es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie converge.*

Métodos para hallar R:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{R} \quad \text{(Criterio del cociente)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \quad \text{(Criterio de la raíz)}$$

Ejemplo 1: Radio e Intervalo de Convergencia

Ejemplo

Hallar el radio e intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Solución: Aplicamos el criterio del cociente con $c_n = \frac{1}{n!}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Por lo tanto, $R = \infty$ y la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
Intervalo de convergencia: $(-\infty, \infty)$

Ejemplo 2: Radio e Intervalo de Convergencia

Ejemplo

Hallar el radio e intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Solución: Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

La serie converge cuando $|x| < 1$, por lo tanto $R = 1$.

Verificación en los extremos:

- $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica, diverge)
- $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (serie alternante, converge)

Intervalo de convergencia: $[-1, 1)$

Ejemplo 3: Radio e Intervalo de Convergencia

Ejemplo

Hallar el radio e intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$.

Solución: Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}/2^{n+1}}{(x-3)^n/2^n} \right| = \left| \frac{x-3}{2} \right|$$

La serie converge cuando $\left|\frac{x-3}{2}\right| < 1$, es decir, $|x-3| < 2$.
Por lo tanto, $R = 2$ y la serie converge en el intervalo $(1, 5)$.

Verificación en los extremos:

- $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ (diverge)
- $x = 5$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ (diverge)

Intervalo de convergencia: $(1, 5)$

Ejemplo 4: Radio e Intervalo de Convergencia

Ejemplo

Hallar el radio e intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n \cdot 3^n}$.

Solución: Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}/[(n+1)\cdot 3^{n+1}]}{(x+1)^n/(n\cdot 3^n)} \right| = |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{|x+1|}{3}$$

La serie converge cuando $\frac{|x+1|}{3} < 1$, es decir, $|x+1| < 3$. Por lo tanto, $R = 3$.

Verificación en los extremos:

- $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (converge)
- $x = -4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (diverge)

Intervalo de convergencia: $(-4, 2]$

Teorema de Multiplicación de Series de Potencias

Teorema

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *convergen absolutamente para* $|x| < R$*, entonces su producto es:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

y la serie producto converge absolutamente para $|x| < R$.

Este es el **producto de Cauchy** de dos series.

Teorema de Diferenciación Término a Término

Teorema

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *tiene radio de convergencia* $R > 0$, *entonces* f *es diferenciable en* $(a-R, a+R)$ *y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

La serie derivada tiene el mismo radio de convergencia R.

Observaciones:

- Podemos derivar término a término una serie de potencias dentro de su intervalo de convergencia.
- Este proceso puede repetirse indefinidamente.
- $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}$

Teorema de Integración Término a Término

Teorema

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *tiene radio de convergencia* $R > 0$, *entonces* f *es integrable en* $(a-R, a+R)$ *y*

$$\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

donde C *es una constante de integración. La serie integrada tiene el mismo radio de convergencia* R.

Observación: Para integrales definidas:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Definición de Serie de Taylor

Definición

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto que contiene a a. La **serie de Taylor** *de f centrada en $x = a$ es:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Definición

Cuando $a = 0$, la serie de Taylor se llama **serie de Maclaurin***:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Definición de Polinomio de Taylor

Definición

El **polinomio de Taylor de orden** n *(o* **polinomio de Taylor de grado** n*) de* f *centrado en* $x = a$ *es:*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

El polinomio de Taylor $P_n(x)$ es la suma parcial n-ésima de la serie de Taylor de f.

Propiedades:

- $P_n(a) = f(a)$
- $P_n'(a) = f'(a)$
- $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo 1: Serie de Maclaurin de e^x

Ejemplo

Hallar la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$.

Solución: Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & \qquad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1 \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x & f^{(n)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Maclaurin es:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2: Serie de Maclaurin de $\sin x$

Ejemplo

Hallar la serie de Maclaurin de $f(x) = \sin x$.

Solución: Calculamos las derivadas:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

El patrón se repite cada 4 derivadas. Por lo tanto:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3: Serie de Maclaurin de $\cos x$

Ejemplo

Hallar la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos x$.

Solución: Calculamos las derivadas:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

El patrón se repite cada 4 derivadas. Por lo tanto:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4: Serie de Taylor de $\ln x$ centrada en $x = 1$

Ejemplo

Hallar la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ centrada en $x = 1$.

Solución: Calculamos las derivadas:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(1) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & f'''(1) &= 2 \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4: Serie de Taylor de $\ln x$ centrada en $x = 1$ (cont.)

Por lo tanto:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

para $x \in (0, 2]$.

Teorema de Taylor

Teorema (Teorema de Taylor)

Sea f una función tal que $f^{(n+1)}(t)$ existe para todo t en un intervalo abierto I que contiene a a. Para cada $x \in I$, existe un número c entre a y x tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Aquí, $R_n(x)$ es el **residuo** o **término de error**.

Definición del Residuo de Orden n

Definición

El **residuo de orden** *n (o* **error de orden** *n) de la aproximación de $f(x)$ por su polinomio de Taylor de orden n es:*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f centrado en $x = a$.

Formas del residuo:

1. **Forma de Lagrange:** $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
2. **Forma de Cauchy:** $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a)$

donde c está entre a y x.

Teorema de Estimación del Residuo

Teorema (Estimación del Residuo)

Si existe una constante M tal que $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ para todo t entre a y x, entonces:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Consecuencia importante:
La serie de Taylor de f converge a $f(x)$ para todo x en el intervalo de convergencia si y solo si:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Serie Binomial

Definición

La **serie binomial** *es la serie de Maclaurin de la función* $f(x) = (1+x)^m$*, donde* m *es cualquier número real:*

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

donde

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

es el **coeficiente binomial generalizado***.*

Radio de convergencia:

- Si m es un entero no negativo, la serie es finita y converge para todo x.
- Si m no es un entero no negativo, la serie converge para $|x| < 1$.

Demostración de la Serie Binomial (Parte 1)

Demostración: Sea $f(x) = (1+x)^m$. Calculamos las derivadas sucesivas:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^m & f(0) &= 1\\
f'(x) &= m(1+x)^{m-1} & f'(0) &= m\\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0) &= m(m-1)\\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & f'''(0) &= m(m-1)(m-2)
\end{aligned}
$$

En general:

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

Demostración de la Serie Binomial (Parte 2)

Por lo tanto, los coeficientes de la serie de Maclaurin son:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} = \binom{m}{n}$$

Luego, la serie de Maclaurin de $(1+x)^m$ es:

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

Para determinar el radio de convergencia, aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{m-n}{n+1}\right| = 1$$

Por lo tanto, $R = 1$ (cuando m no es un entero no negativo), y la serie converge para $|x| < 1$.
$\square$

Aplicación 1: Aproximación de $\int e^{-x^2}\,dx$

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ *usando el polinomio de Taylor de grado 4.*

Solución: Partimos de la serie de Maclaurin de e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Sustituyendo x por $-x^2$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

Usando los primeros 3 términos (hasta x^4):

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$

Aplicación 1: Aproximación de $\int e^{-x^2}\,dx$ (continuación)

Integrando:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{30 - 10 + 3}{30} = \frac{23}{30} \approx 0{,}7667$$

Valor exacto: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}7468$
Error: $|0{,}7667 - 0{,}7468| \approx 0{,}0199$

Aplicación 2: Aproximación de $\int \sin(x^2)\,dx$

Ejemplo

Aproximar $\int_0^{0,5} \sin(x^2)\,dx$ *usando el polinomio de Taylor de grado 5.*

Solución: Partimos de la serie de Maclaurin de $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Sustituyendo x por x^2:

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots$$

Usando los primeros 2 términos:

$$\sin(x^2) \approx x^2 - \frac{x^6}{6}$$

Aplicación 2: Aproximación de $\int \sin(x^2)\,dx$ (continuación)

Integrando:

$$\int_0^{0,5} \sin(x^2)\,dx \approx \int_0^{0,5} \left(x^2 - \frac{x^6}{6}\right)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42}\right]_0^{0,5}$$

$$= \frac{(0,5)^3}{3} - \frac{(0,5)^7}{42}$$

$$= \frac{0,125}{3} - \frac{0,0078125}{42} \approx 0,041667 - 0,000186 \approx 0,041481$$

Nota: $\sin(x^2)$ no tiene antiderivada elemental, por lo que la aproximación por series es esencial.

Aplicación 3: Aproximación de $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ *usando el polinomio de Taylor de grado 5.*

Solución: Partimos de la serie de Maclaurin de $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Dividiendo por x:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Usando los primeros 3 términos:

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$$

Aplicación 3: Aproximación de $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ (continuación)

Integrando:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx$$
$$= \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right]_0^1$$
$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}$$
$$= \frac{600 - 33{,}33 + 1}{600} \approx 0{,}9461$$

Valor exacto: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 0{,}9461$ (utilizando más términos o métodos numéricos)
Nota: La función $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ es una función especial sin antiderivada elemental.

Aplicación 4: Aproximación de $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ *usando la serie binomial.*

Solución: Usamos la serie binomial con $m = -\frac{1}{2}$ y x reemplazado por x^4:

$$(1+x^4)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x^4 + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}x^8 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 - \cdots$$

Usando los primeros 2 términos:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \approx 1 - \frac{1}{2}x^4$$

Aplicación 4: Aproximación de $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ (continuación)

Integrando:

$$\int_0^{0{,}5} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx \approx \int_0^{0{,}5} \left(1 - \frac{1}{2}x^4\right)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^5}{10}\right]_0^{0{,}5}$$

$$= 0{,}5 - \frac{(0{,}5)^5}{10}$$

$$= 0{,}5 - \frac{0{,}03125}{10} = 0{,}5 - 0{,}003125 = 0{,}496875$$

Esta aproximación es muy buena para valores pequeños de x, ya que el término x^4 es muy pequeño en el intervalo $[0, 0{,}5]$.

Resumen de Series de Potencias y Taylor

Conceptos clave:

- Las series de potencias son herramientas fundamentales en el análisis matemático.
- El radio de convergencia determina dónde converge una serie de potencias.
- Podemos diferenciar e integrar series de potencias término a término.
- Las series de Taylor representan funciones como series de potencias.
- El teorema de Taylor y la estimación del residuo permiten controlar el error de aproximación.

Aplicaciones importantes:

- Aproximación de funciones transcendentes.
- Cálculo de integrales de funciones no elementales.
- Resolución de ecuaciones diferenciales.
- Análisis numérico y computacional.

Series de Taylor Importantes

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para todo } x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para todo } x$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{para } |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \text{para } x \in (-1, 1]$$