

# Funciones Trascendentes Parte I

## Cálculo I

MATUASD  
Escuela de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Santo Domingo  
UASD

2025

# Contenido

- ① Funciones Trigonométricas Inversas
- ② Identidades y Razones Trigonométricas
- ③ Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas
- ④ Integrales que resultan en F. T. Inversas
- ⑤ Funciones Hiperbólicas
- ⑥ Funciones Hiperbólicas Inversas

## 1 Funciones Trigonométricas Inversas

## 2 Identidades y Razones Trigonométricas

## 3 Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

## 4 Integrales que resultan en F. T. Inversas

## 5 Funciones Hiperbólicas

## 6 Funciones Hiperbólicas Inversas

## Definiciones y Gráficas (I)

### Función Arcoseno ( $y = \arcsin x = \operatorname{sen}^{-1} x$ )

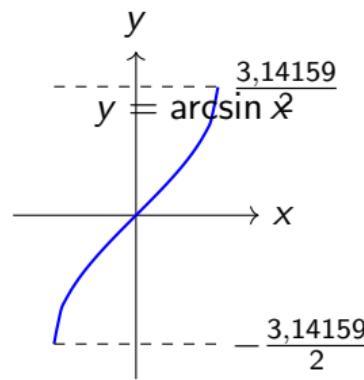
Es la inversa de  $f(x) = \sin x$  restringida al dominio  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

## Definiciones y Gráficas (I)

### Función Arcoseno ( $y = \arcsin x = \operatorname{sen}^{-1} x$ )

Es la inversa de  $f(x) = \sin x$  restringida al dominio  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

- Dominio:  $[-1, 1]$
- Rango:  $[-\pi/2, \pi/2]$



## Definiciones y Gráficas (II)

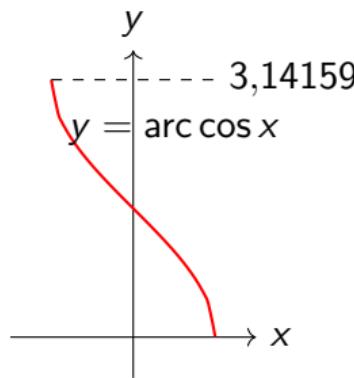
Función Arcocoseno ( $y = \arccos x = \cos^{-1}x$ )

## Definiciones y Gráficas (II)

### Función Arcocoseno ( $y = \arccos x = \cos^{-1}x$ )

Es la inversa de  $f(x) = \cos x$  restringida al dominio  $[0, \pi]$ .

- Dominio:  $[-1, 1]$
- Rango:  $[0, \pi]$



## Definiciones y Gráficas (III)

### Función Arcotangente ( $y = \arctan x = \tan^{-1}x$ )

## Definiciones y Gráficas (III)

### Función Arcotangente ( $y = \arctan x = \tan^{-1}x$ )

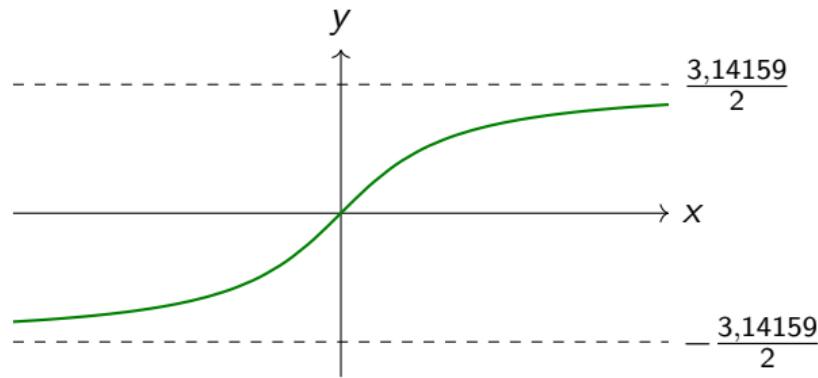
Es la inversa de  $f(x) = \tan x$  restringida al dominio  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

## Definiciones y Gráficas (III)

### Función Arcotangente ( $y = \arctan x = \tan^{-1}x$ )

Es la inversa de  $f(x) = \tan x$  restringida al dominio  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

- Dominio:  $(-\infty, \infty)$
- Rango:  $(-\pi/2, \pi/2)$



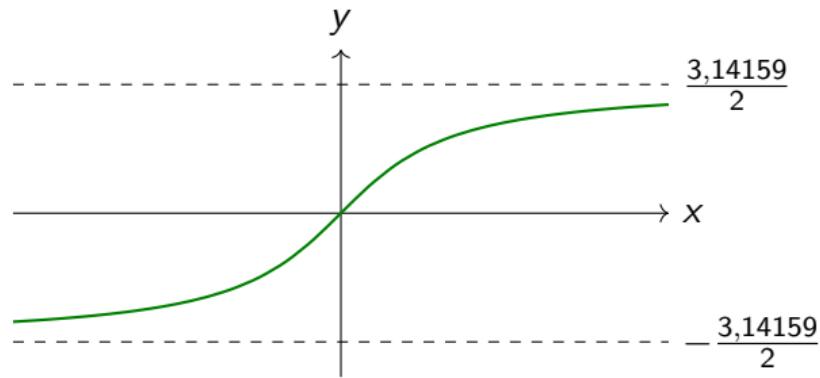
### Función Arcocosecante ( $y = \csc^{-1}x$ )

## Definiciones y Gráficas (III)

### Función Arcotangente ( $y = \arctan x = \tan^{-1}x$ )

Es la inversa de  $f(x) = \tan x$  restringida al dominio  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

- Dominio:  $(-\infty, \infty)$
- Rango:  $(-\pi/2, \pi/2)$



### Función Arcocosecante ( $y = \csc^{-1}x$ )

## Otras Funciones Inversas

### Arcosecante ( $y = \text{arcsec } x$ )

- Dominio:  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
- Rango:  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

### Arcocotangente ( $y = \text{arccot } x$ )

- Dominio:  $(-\infty, \infty)$
- Rango:  $(0, \pi)$

## 1 Funciones Trigonométricas Inversas

## 2 Identidades y Razones Trigonométricas

## 3 Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

## 4 Integrales que resultan en F. T. Inversas

## 5 Funciones Hiperbólicas

## 6 Funciones Hiperbólicas Inversas

## Identidades Pitagóricas

A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

## Identidades Pitagóricas

A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

## Identidades Pitagóricas

A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

## Identidades Pitagóricas

A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
- $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

## Identidades Pitagóricas

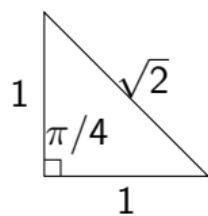
A partir del círculo unitario y el Teorema de Pitágoras, se establecen las siguientes identidades fundamentales:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
- $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

Estas identidades son cruciales para la demostración de derivadas e integrales de funciones trigonométricas y sus inversas.

# Razones Trigonométricas para Ángulos Notables

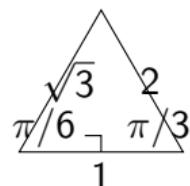
Para  $\pi/4$  (45º): Triángulo isósceles.



$$\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para  $\pi/6$  (30º) y  $\pi/3$  (60º): Triángulo equilátero.



$$\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}, \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- ① Funciones Trigonométricas Inversas
- ② Identidades y Razones Trigonométricas
- ③ Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas
- ④ Integrales que resultan en F. T. Inversas
- ⑤ Funciones Hiperbólicas
- ⑥ Funciones Hiperbólicas Inversas

## Fórmulas y Demostración

### Theorem (Derivada de $\arcsin x$ )

Si  $f(x) = \arcsin x$ , entonces  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

# Fórmulas y Demostración

## Demostración.

Sea  $y = \arcsin x$ . Por definición,  $\sin y = x$  para  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Derivando implícitamente respecto a  $x$ :

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(x) \implies \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

## Fórmulas y Demostración

### Demostración.

Sea  $y = \arcsin x$ . Por definición,  $\sin y = x$  para  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Derivando implícitamente respecto a  $x$ :

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(x) \implies \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Usando la identidad  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ , tenemos  $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ . Como  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\cos y \geq 0$ , por lo que tomamos la raíz positiva.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



## Fórmulas de Derivadas

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arccot}(x)) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arcsec}(x)) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arccsc}(x)) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

## Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de  $f(x) = \arctan(e^{2x})$ .

## Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de  $f(x) = \arctan(e^{2x})$ .

### Solution

Aplicando la regla de la cadena, sea  $u = e^{2x}$ .

## Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de  $f(x) = \arctan(e^{2x})$ .

### Solution

Aplicando la regla de la cadena, sea  $u = e^{2x}$ .

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

## Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de  $f(x) = \arctan(e^{2x})$ .

### Solution

Aplicando la regla de la cadena, sea  $u = e^{2x}$ .

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

- ② Derivar  $g(x) = x^3 \arcsin(x)$ .

## Ejemplos de Derivación

- ① Hallar la derivada de  $f(x) = \arctan(e^{2x})$ .

### Solution

Aplicando la regla de la cadena, sea  $u = e^{2x}$ .

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

- ② Derivar  $g(x) = x^3 \arcsin(x)$ .

### Solution

Aplicando la regla del producto:

$$g'(x) = (3x^2) \arcsin(x) + x^3 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = 3x^2 \arcsin(x) + \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

## Ejemplos de DerivaciónII

Calcular la derivada de  $h(x) = \arccos(\sqrt{x})$ .

Solution

$$h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

- ① Funciones Trigonométricas Inversas
- ② Identidades y Razones Trigonométricas
- ③ Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas
- ④ Integrales que resultan en F. T. Inversas
- ⑤ Funciones Hiperbólicas
- ⑥ Funciones Hiperbólicas Inversas

## Fórmulas Fundamentales de Integración

A partir de las reglas de derivación, se obtienen las siguientes integrales indefinidas:

- $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$
- $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{arcsec}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C$

## Ejemplos de Integración

- ① Calcular  $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$ .

### Solution

Aquí,  $a = 5$ ,  $u = x$ . La integral es directa:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

- ② Evaluar  $\int \frac{dx}{7 + x^2}$ .

### Solution

Tenemos  $a^2 = 7 \implies a = \sqrt{7}$  y  $u = x$ .

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

## 1 Funciones Trigonométricas Inversas

## 2 Identidades y Razones Trigonométricas

## 3 Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

## 4 Integrales que resultan en F. T. Inversas

## 5 Funciones Hiperbólicas

## 6 Funciones Hiperbólicas Inversas

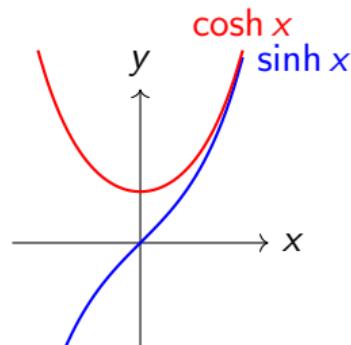
## Definiciones y Gráficas

Se definen en términos de la función exponencial:

### Seno y Coseno Hiperbólico

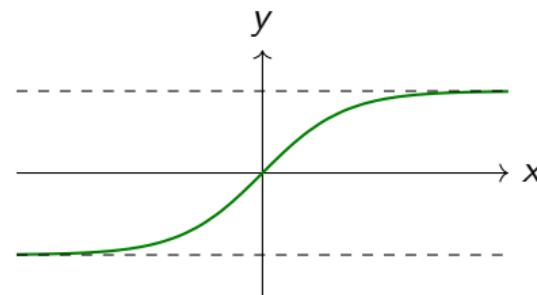
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



### Tangente Hiperbólica

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$



## Identidades y Derivadas

### Identidad Hiperbólica Fundamental

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

A diferencia de la identidad pitagórica, esta involucra una resta.

### Derivadas de Funciones Hiperbólicas

- $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
- $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$  ( Nótese la ausencia de signo negativo)
- $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

# Ejemplos de Derivación Hiperbólica

- ①  $f(x) = \cosh(x^2 + 1) \implies f'(x) = \sinh(x^2 + 1) \cdot 2x$
- ②  $g(x) = \ln(\sinh x) \implies g'(x) = \frac{1}{\sinh x} \cdot \cosh x = \coth x$
- ③  $h(x) = \tanh(\sqrt{x}) \implies h'(x) = \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- ④  $k(x) = x \sinh x - \cosh x \implies k'(x) = (1 \cdot \sinh x + x \cosh x) - \sinh x = x \cosh x$

## ① Funciones Trigonométricas Inversas

## ② Identidades y Razones Trigonométricas

## ③ Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas

## ④ Integrales que resultan en F. T. Inversas

## ⑤ Funciones Hiperbólicas

## ⑥ Funciones Hiperbólicas Inversas

## Equivalencias Logarítmicas

Las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos naturales. c

- $\text{arsinh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\text{arcosh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$
- $\text{artanh } x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

### Demostración para $\text{arsinh } x$

Si  $y = \text{arsinh } x$ , entonces  $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ . Multiplicando por  $2e^y$  se obtiene  $2xe^y = e^{2y} - 1$ , lo cual es una ecuación cuadrática en  $e^y$ :  $(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$ .

## Equivalencias Logarítmicas

Las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos naturales. c

- $\text{arsinh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\text{arcosh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$
- $\text{artanh } x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

### Demostración para $\text{arsinh } x$

Si  $y = \text{arsinh } x$ , entonces  $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ . Multiplicando por  $2e^y$  se obtiene  $2xe^y = e^{2y} - 1$ , lo cual es una ecuación cuadrática en  $e^y$ :  $(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$ . La solución para  $e^y$  es  $e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$ . Como  $e^y > 0$ , se elige la raíz positiva:  $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ .

## Equivalencias Logarítmicas

Las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos naturales. c

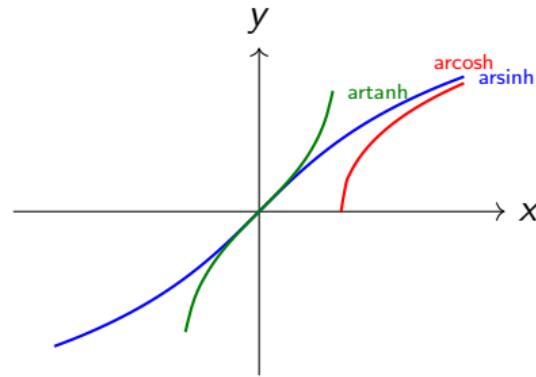
- $\text{arsinh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\text{arcosh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$
- $\text{artanh } x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

### Demostración para $\text{arsinh } x$

Si  $y = \text{arsinh } x$ , entonces  $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ . Multiplicando por  $2e^y$  se obtiene  $2xe^y = e^{2y} - 1$ , lo cual es una ecuación cuadrática en  $e^y$ :  $(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$ . La solución para  $e^y$  es  $e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$ . Como  $e^y > 0$ , se elige la raíz positiva:  $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ . Aplicando logaritmo natural:  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

## Derivadas y Gráficas de F. H. Inversas

- $\frac{d}{dx}(\text{arsinh } x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arcosh } x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{artanh } x) = \frac{1}{1-x^2}$



## Ejemplos de Derivación F. H. Inversas

①  $f(x) = \text{arsinh}(5x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(5x)^2 + 1}} \cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{25x^2 + 1}}$$

②  $g(x) = \text{arcosh}(\sec x)$ , para  $\tan x > 0$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}} \cdot (\sec x \tan x) = \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\tan^2 x}} = \sec x$$

③  $h(x) = \text{artanh}(\cos x)$

$$h'(x) = \frac{1}{1 - \cos^2 x} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{\sin^2 x} = -\csc x$$

④  $k(x) = x \text{arsinh}(x) - \sqrt{1 + x^2}$

$$k'(x) = \left( \text{arsinh}(x) + x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \text{arsinh}(x)$$

## Integrales que resultan en F. H. Inversas

Las fórmulas de derivación nos llevan a las siguientes integrales:

- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{arsinh} \left( \frac{u}{a} \right) + C = \ln \left( u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \operatorname{arcosh} \left( \frac{u}{a} \right) + C = \ln \left( u + \sqrt{u^2 - a^2} \right) + C$
- $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{artanh} \left( \frac{u}{a} \right) + C$

Estas fórmulas son particularmente útiles en la integración por sustitución trigonométrica y en la resolución de ecuaciones diferenciales.