Unidad II. Expresiones Algebraicas Parte I

R. M.

Matemáticas, UASD

2025

Tabla de Contenido

1. Conceptos Básicos
2. Polinomios
3. Operaciones con Expresiones Algebraicas
4. Factorización de Polinomios

Definiciones Fundamentales

Constante

Es una letra o símbolo que representa un elemnto específico de un conjunto.
Ejemplos: $5, -10, \pi, \frac{1}{2}$

Definiciones Fundamentales

Constante

Es una letra o símbolo que representa un elemnto específico de un conjunto.
Ejemplos: $5, -10, \pi, \frac{1}{2}$

Variable

Es una letra o símbolo que representa un elemnto cualquiera de un conjunto.
Ejemplos: x, y, a, t

Definiciones Fundamentales

Constante

Es una letra o símbolo que representa un elemnto específico de un conjunto.
Ejemplos: $5, -10, \pi, \frac{1}{2}$

Variable

Es una letra o símbolo que representa un elemnto cualquiera de un conjunto.
Ejemplos: x, y, a, t

Expresión Algebraica

Es una combinación de constantes, variables y operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

Partes y Términos de una Expresión Algebraica

Partes de un Término

Analicemos el término $-7x^4$:

$$\underbrace{-7}_{\text{Coeficiente}} \quad \underbrace{x}_{\text{Variable}} \quad \underbrace{4}_{\text{Exponente}}$$

Un **término** es una parte de una expresión algebraica separada por signos de suma (+) o resta (-).

Ejemplos de Expresiones y sus Términos

1. $5x^2 - 3x + 2$. Términos: $5x^2$, $-3x$, 2.

Partes y Términos de una Expresión Algebraica

Partes de un Término

Analicemos el término $-7x^4$:

$$\underbrace{-7}_{\text{Coeficiente}} \quad \underbrace{x}_{\text{Variable}} \quad \underbrace{4}_{\text{Exponente}}$$

Un **término** es una parte de una expresión algebraica separada por signos de suma (+) o resta (-).

Ejemplos de Expresiones y sus Términos

1. $5x^2 - 3x + 2$. Términos: $5x^2$, $-3x$, 2.
2. $4ab + \frac{c}{3}$. Términos: $4ab$, $\frac{c}{3}$.

Partes y Términos de una Expresión Algebraica

Partes de un Término

Analicemos el término $-7x^4$:

$$\underbrace{-7}_{\text{Coeficiente}} \quad \underbrace{x}_{\text{Variable}} \quad \underbrace{4}_{\text{Exponente}}$$

Un **término** es una parte de una expresión algebraica separada por signos de suma (+) o resta (-).

Ejemplos de Expresiones y sus Términos

1. $5x^2 - 3x + 2$. Términos: $5x^2$, $-3x$, 2.
2. $4ab + \frac{c}{3}$. Términos: $4ab$, $\frac{c}{3}$.
3. $2\sqrt{y} - z^3$. Términos: $2\sqrt{y}$, $-z^3$.

1. Conceptos Básicos
2. Polinomios
3. Operaciones con Expresiones Algebraicas
4. Factorización de Polinomios

¿Qué es un Polinomio? I

Definición

Un *polinomio* en la variable x con coeficientes en $\mathbb{R}$ es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k,$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_k \in \mathbb{R}$ para todo k, y $a_n \neq 0$ (si $n \geq 1$). El número n se llama el *grado* del polinomio, y a_n su *coeficiente principal*.

Tipos según el número de términos

- **Monomio:** Un término. Ejemplo: $5x^3$
- **Binomio:** Dos términos. Ejemplo: $3x^2 - 9$
- **Trinomio:** Tres términos. Ejemplo: $2x^2 + 5x - 1$

¿Qué es un Polinomio? II

Ejemplo General

El polinomio $P(x) = 4x^5 - 7x^3 + 2x - 8$ es de **grado 5**.

Suma y Resta

Términos Semejantes

Dos o más términos son semejantes si tienen la **misma parte variable** (mismas letras elevadas a los mismos exponentes).

- $3x^2$ y $-5x^2$ **son** semejantes.
- $4xy^3$ y xy^3 **son** semejantes.
- $2x^3$ y $2x^2$ **no son** semejantes.

Suma y Resta

Términos Semejantes

Dos o más términos son semejantes si tienen la **misma parte variable** (mismas letras elevadas a los mismos exponentes).

- $3x^2$ y $-5x^2$ **son** semejantes.
- $4xy^3$ y xy^3 **son** semejantes.
- $2x^3$ y $2x^2$ **no son** semejantes.

Procedimiento para Sumar y Restar

Solo se pueden sumar o restar los coeficientes de los términos que son semejantes. La parte variable permanece igual.

Ejemplos: Suma y Resta

1. Sumar $(3x^2 + 5x - 2) + (4x^2 - 8x + 7)$

$$
\begin{aligned}
&= 3x^2 + 5x - 2 + 4x^2 - 8x + 7 \\
&= (3x^2 + 4x^2) + (5x - 8x) + (-2 + 7) \\
&= 7x^2 - 3x + 5
\end{aligned}
$$

Ejemplos: Suma y Resta

1. Sumar $(3x^2 + 5x - 2) + (4x^2 - 8x + 7)$

$$\begin{aligned} &= 3x^2 + 5x - 2 + 4x^2 - 8x + 7 \\ &= (3x^2 + 4x^2) + (5x - 8x) + (-2 + 7) \\ &= 7x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

2. Restar $(7a - 3b) - (2a + 5b)$

$$\begin{aligned} &= 7a - 3b - 2a - 5b \\ &= (7a - 2a) + (-3b - 5b) \\ &= 5a - 8b \end{aligned}$$

Ejemplos: Suma y Resta

1. Sumar $(3x^2 + 5x - 2) + (4x^2 - 8x + 7)$

$$\begin{aligned} &= 3x^2 + 5x - 2 + 4x^2 - 8x + 7 \\ &= (3x^2 + 4x^2) + (5x - 8x) + (-2 + 7) \\ &= 7x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

2. Restar $(7a - 3b) - (2a + 5b)$

$$\begin{aligned} &= 7a - 3b - 2a - 5b \\ &= (7a - 2a) + (-3b - 5b) \\ &= 5a - 8b \end{aligned}$$

3. $(x^3 + y^2) + (3x^3 - 4y^2) = 4x^3 - 3y^2$

Ejemplos: Suma y Resta

1. Sumar $(3x^2 + 5x - 2) + (4x^2 - 8x + 7)$

$$
\begin{aligned}
&= 3x^2 + 5x - 2 + 4x^2 - 8x + 7 \\
&= (3x^2 + 4x^2) + (5x - 8x) + (-2 + 7) \\
&= 7x^2 - 3x + 5
\end{aligned}
$$

2. Restar $(7a - 3b) - (2a + 5b)$

$$
\begin{aligned}
&= 7a - 3b - 2a - 5b \\
&= (7a - 2a) + (-3b - 5b) \\
&= 5a - 8b
\end{aligned}
$$

3. $(x^3 + y^2) + (3x^3 - 4y^2) = 4x^3 - 3y^2$
4. $(5m^2n - 8) - (2m^2n - 1) = 5m^2n - 8 - 2m^2n + 1 = 3m^2n - 7$

Multiplicación de Polinomios

Procedimiento

Se aplica la **propiedad distributiva**: se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. Luego, se suman los términos semejantes.

Multiplicación de Polinomios

Procedimiento

Se aplica la **propiedad distributiva**: se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. Luego, se suman los términos semejantes.

Ejemplo 1: Binomio por Binomio

$(2x+3)(x-5)$

$$\begin{aligned} &= 2x(x) + 2x(-5) + 3(x) + 3(-5) \\ &= 2x^2 - 10x + 3x - 15 \\ &= 2x^2 - 7x - 15 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Binomio por Trinomio

$(x+2)(x^2-3x+4)$

$$\begin{aligned} &= x(x^2-3x+4) + 2(x^2-3x+4) \\ &= x^3 - 3x^2 + 4x + 2x^2 - 6x + 8 \\ &= x^3 + (-3x^2 + 2x^2) + (4x - 6x) + 8 \\ &= x^3 - x^2 - 2x + 8 \end{aligned}$$

Productos Notables (Fórmulas Clave)

Son multiplicaciones especiales cuyo resultado se puede escribir directamente siguiendo una fórmula.

- **Binomio al cuadrado:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- **Suma por diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- **Binomio al cubo:** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Ejemplos

1. $(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

Productos Notables (Fórmulas Clave)

Son multiplicaciones especiales cuyo resultado se puede escribir directamente siguiendo una fórmula.

- **Binomio al cuadrado:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- **Suma por diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- **Binomio al cubo:** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Ejemplos

1. $(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
2. $(2y - 3)^2 = (2y)^2 - 2(2y)(3) + 3^2 = 4y^2 - 12y + 9$

Productos Notables (Fórmulas Clave)

Son multiplicaciones especiales cuyo resultado se puede escribir directamente siguiendo una fórmula.

- **Binomio al cuadrado:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- **Suma por diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- **Binomio al cubo:** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Ejemplos

1. $(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
2. $(2y - 3)^2 = (2y)^2 - 2(2y)(3) + 3^2 = 4y^2 - 12y + 9$
3. $(3a + 4)(3a - 4) = (3a)^2 - 4^2 = 9a^2 - 16$

Productos Notables (Fórmulas Clave)

Son multiplicaciones especiales cuyo resultado se puede escribir directamente siguiendo una fórmula.

- **Binomio al cuadrado:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- **Suma por diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- **Binomio al cubo:** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

Ejemplos

1. $(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
2. $(2y - 3)^2 = (2y)^2 - 2(2y)(3) + 3^2 = 4y^2 - 12y + 9$
3. $(3a + 4)(3a - 4) = (3a)^2 - 4^2 = 9a^2 - 16$
4. $(z + 1)^3 = z^3 + 3(z^2)(1) + 3(z)(1^2) + 1^3 = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$

División de Polinomios

Algoritmo de la División

Al dividir un polinomio $P(x)$ (**dividendo**) por otro $G(x)$ (**divisor**), se obtienen un **cociente** $Q(x)$ y un **residuo** $R(x)$.

$$\frac{P(x)}{G(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{G(x)} \quad \text{o} \quad P(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Ejemplo

Al dividir $\underbrace{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}_{\text{Dividendo } P(x)}$ por $\underbrace{x - 2}_{\text{Divisor } G(x)}$:

- **Cociente** $Q(x) = 2x^2 + x + 6$
- **Residuo** $R(x) = 7$

Se cumple que: $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = (x - 2)(2x^2 + x + 6) + 7$

¿Qué es Factorizar? y Casos Comunes

Definición

Factorizar un polinomio es expresarlo como un producto de otros polinomios más simples, llamados sus **factores**. Es el proceso inverso a la multiplicación.

¿Qué es Factorizar? y Casos Comunes

Definición

Factorizar un polinomio es expresarlo como un producto de otros polinomios más simples, llamados sus **factores**. Es el proceso inverso a la multiplicación.

Principales Casos de Factorización

1. Factor Común
2. Agrupación de Términos
3. Diferencia de Cuadrados
4. Diferencia de Cubos
5. Suma de Cubos
6. Trinomio Cuadrado Perfecto
7. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
8. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Caso 1: Factor Común I

Consiste en encontrar el máximo común divisor (MCD) de todos los términos del polinomio.

Ejemplo 1

$6x^3 + 9x^2$

- MCD de 6 y 9 es **3**.
- MCD de x^3 y x^2 es x^2.
- Factor común: $3x^2$.

$$6x^3 + 9x^2 = 3x^2(2x + 3)$$

Caso 1: Factor Común II

Ejemplo 2

$10a^2b - 15ab^2 + 5ab$

- Factor común numérico: 5.
- Factor común literal: ab.
- Factor común: $5ab$.

$$10a^2b - 15ab^2 + 5ab = 5ab(2a - 3b + 1)$$

Caso 2: Factorización por Agrupación

Se agrupan términos que tengan un factor común para luego aplicar el caso 1.

Ejemplo 1

$ax + bx + ay + by$

$$
\begin{aligned}
&= (ax + bx) + (ay + by) && \text{Agrupar} \\
&= x(a + b) + y(a + b) && \text{Factor común en cada grupo} \\
&= (a + b)(x + y) && \text{Factor común (a+b)}
\end{aligned}
$$

Caso 2: Factorización por Agrupación

Se agrupan términos que tengan un factor común para luego aplicar el caso 1.

Ejemplo 1

$ax + bx + ay + by$

$$\begin{aligned}
&= (ax + bx) + (ay + by) && \text{Agrupar} \\
&= x(a + b) + y(a + b) && \text{Factor común en cada grupo} \\
&= (a + b)(x + y) && \text{Factor común (a+b)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

$2m^2 - 2mn + m - n$

$$\begin{aligned}
&= (2m^2 + m) - (2mn + n) && \text{Agrupar (cuidado con el signo)} \\
&= m(2m + 1) - n(2m + 1) && \text{Factor común} \\
&= (2m + 1)(m - n) && \text{Factor común (2m+1)}
\end{aligned}$$

Caso 3 y 4: Suma y Diferencia de Potencias

Diferencia de Cuadrados

Fórmula: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

1. $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$

Caso 3 y 4: Suma y Diferencia de Potencias

Diferencia de Cuadrados

Fórmula: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

1. $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x+7)(x-7)$
2. $9y^2 - 16 = (3y)^2 - 4^2 = (3y+4)(3y-4)$

Caso 3 y 4: Suma y Diferencia de Potencias

Diferencia de Cuadrados

Fórmula: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

1. $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x+7)(x-7)$
2. $9y^2 - 16 = (3y)^2 - 4^2 = (3y+4)(3y-4)$

Suma de Cubos

Fórmula: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

1. $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

Caso 3 y 4: Suma y Diferencia de Potencias

Diferencia de Cuadrados

Fórmula: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

1. $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x+7)(x-7)$
2. $9y^2 - 16 = (3y)^2 - 4^2 = (3y+4)(3y-4)$

Diferencia de Cubos

Fórmula: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

1. $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y-4)(y^2 + 4y + 16)$

Suma de Cubos

Fórmula: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

1. $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$
2. $27m^3 + 1 = (3m)^3 + 1^3 =$
   $(3m+1)(9m^2 - 3m + 1)$

Caso 3 y 4: Suma y Diferencia de Potencias

Diferencia de Cuadrados

Fórmula: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

1. $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x+7)(x-7)$
2. $9y^2 - 16 = (3y)^2 - 4^2 = (3y+4)(3y-4)$

Diferencia de Cubos

Fórmula: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

1. $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y-4)(y^2+4y+16)$
2. $8z^3 - 125 = (2z)^3 - 5^3 =$ $(2z-5)(4z^2+10z+25)$

Suma de Cubos

Fórmula: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

1. $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2-2x+4)$
2. $27m^3 + 1 = (3m)^3 + 1^3 =$ $(3m+1)(9m^2-3m+1)$

Caso 5: Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)

Forma: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.
Se verifica que el término del medio sea $2ab$.

Ejemplo 1

$x^2 + 6x + 9$

- Raíz del primero: $\sqrt{x^2} = x$
- Raíz del tercero: $\sqrt{9} = 3$
- Verificación: $2(x)(3) = 6x$. **Coincide.**

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

Caso 5: Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)

Forma: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.
Se verifica que el término del medio sea $2ab$.

Ejemplo 1

$x^2 + 6x + 9$

- Raíz del primero: $\sqrt{x^2} = x$
- Raíz del tercero: $\sqrt{9} = 3$
- Verificación: $2(x)(3) = 6x$. **Coincide.**

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Ejemplo 2

$4y^2 - 20y + 25$

- Raíces: $\sqrt{4y^2} = 2y$, $\sqrt{25} = 5$
- Verificación: $2(2y)(5) = 20y$. **Coincide.**

Caso 6: Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Se buscan dos números que multiplicados den c y sumados (o restados) den b.

Ejemplo 1

$x^2 + 7x + 12$

- Buscamos dos números: $\_\_ \times \_\_ = 12$ y $\_\_ + \_\_ = 7$.
- Los números son **4** y **3**.

$$x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$$

Caso 6: Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Se buscan dos números que multiplicados den c y sumados (o restados) den b.

Ejemplo 1

$x^2 + 7x + 12$

- Buscamos dos números: $\_\_ \times \_\_ = 12$ y $\_\_ + \_\_ = 7$.
- Los números son **4** y **3**.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

Ejemplo 2

$y^2 - 2y - 15$

- Buscamos dos números: $\_\_ \times \_\_ = -15$ y $\_\_ + \_\_ = -2$.
- Los números son **-5** y **3**.

$$y^2 - 2y - 15 = (y - 5)(y + 3)$$

Caso 7: Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ I

Método de .ªspa simple.º reescribiendo el término central.

Ejemplo 1: $2x^2 + 7x + 3$

Multiplicamos y dividimos por $a = 2$:

$$\frac{(2x)^2 + 7(2x) + 6}{2} = \frac{(\overbrace{2x+6}^{\text{Factor común } 2})(2x+1)}{2}$$
$$= \frac{2(x+3)(2x+1)}{2}$$
$$= (x+3)(2x+1)$$

Caso 7: Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ II

Ejemplo 2: $6m^2 - 7m - 3$

Multiplicamos y dividimos por $a = 6$:

$$\frac{(6m)^2 - 7(6m) - 18}{6} = \frac{\overbrace{(6m - 9)}^{\text{Factor } 3}\overbrace{(6m + 2)}^{\text{Factor } 2}}{6}$$

$$= \frac{3(2m - 3) \cdot 2(3m + 1)}{6}$$

$$= (2m - 3)(3m + 1)$$