Series Parte II

Criterios de Convergencia

MATUASD

Escuela de Matemáticas
UASD

2025

Contenido

Criterio de la Integral

Teorema (Criterio de la Integral)

Sea f una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$, y sea $a_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ convergen o divergen simultáneamente.

Más específicamente:

- *Si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
- *Si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Justificación Geométrica del Criterio de la Integral

Idea Intuitiva:

Cuando f es positiva y decreciente en $[1, \infty)$:

- La suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ representa el área de rectángulos de base 1 y altura $f(n)$.
- La integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$.
- Dado que f es decreciente, los rectángulos inscritos y circunscritos aproximan la integral.

Se puede demostrar que:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Por lo tanto, ambas expresiones tienen el mismo comportamiento de convergencia.

Ejemplo 1: Criterio de la Integral (Serie Armónica)

Ejemplo

Usar el criterio de la integral para determinar si la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge.

Solución:
Consideremos $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$. Esta función es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$.
Evaluamos la integral impropia:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} [\ln x]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty$$

Como la integral diverge, por el criterio de la integral, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **diverge**.

Definición de Series p

Definición

*Una **serie p** es una serie de la forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

donde p es una constante real.

Teorema (Criterio de Series p)

La serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.

- *Si $p > 1$, la serie converge.*
- *Si $p \leq 1$, la serie diverge.*

Demostración del Criterio de Series p

Demostración:
Consideremos $f(x) = \frac{1}{x^p}$ para $x \geq 1$, que es continua, positiva y decreciente cuando $p > 0$.
Aplicamos el criterio de la integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\, dx$$

Caso 1: Si $p \neq 1$:

$$\int_1^t x^{-p}\, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

- Si $p > 1$, entonces $1 - p < 0$, así que $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$ y la integral converge a $\frac{1}{p-1}$.
- Si $p < 1$, entonces $1 - p > 0$, así que $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$ y la integral diverge.

Caso 2: Si $p = 1$, ya vimos que $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \infty$ (diverge).

Ejemplo 1: Series p

Ejemplo

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge o diverge.*

Solución:

Esta es una serie p con $p = 2$.

Como $p = 2 > 1$, por el criterio de series p, la serie **converge**.

Nota: De hecho, Euler demostró que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Esta es conocida como la solución al problema de Basilea.

Ejemplo 2: Series p

Ejemplo

Determinar si las siguientes series convergen o divergen:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

Solución:

(1) Reescribimos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

Esta es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$, por lo tanto **diverge**.

(2) Esta es una serie p con $p = 3 > 1$, por lo tanto **converge**.

Criterio de Comparación Directa

Teorema (Criterio de Comparación Directa)

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series con términos no negativos tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n mayor que algún N_0.

1. *Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.*
2. *Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ también diverge.*

Interpretación:

- Una serie con términos menores que los de una serie convergente también converge.
- Una serie con términos mayores que los de una serie divergente también diverge.

Ejemplo: Criterio de Comparación Directa

Ejemplo

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ *converge o diverge.*

Solución:

Observemos que para todo $n \geq 1$:

$$2^n + n > 2^n$$

Por lo tanto:

$$0 < \frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n}$$

Ahora, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica con razón $r = \frac{1}{2} < 1$, por lo que converge.
Por el criterio de comparación directa, como $\frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$ y $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ **converge**.

Criterio de Comparación por Límite

Teorema (Criterio de Comparación por Límite)

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series con términos positivos. Si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

donde L es un número finito y positivo ($0 < L < \infty$), entonces ambas series convergen o ambas divergen.

Casos especiales:

- *Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.*
- *Si $L = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.*

Ejemplo 1: Criterio de Comparación por Límite

Ejemplo

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n}{n^4+5}$ *converge o diverge.*

Solución:

Para n grande, el término general se comporta como $\frac{3n^2}{n^4} = \frac{3}{n^2}$.

Comparamos con $b_n = \frac{1}{n^2}$, que es una serie p convergente con $p = 2 > 1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+2n}{n^4+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+2n^3}{n^4+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n^4}} = \frac{3}{1} = 3$$

Como $L = 3 > 0$ es finito y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, por el criterio de comparación por límite, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n}{n^4+5}$ **converge**.

Ejemplo 2: Criterio de Comparación por Límite

Ejemplo

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-1}$ converge o diverge.

Solución:

Para n grande, el término general se comporta como $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$.
Comparamos con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, que es una serie p con $p = \frac{3}{2} > 1$, por lo que converge.
Calculamos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $L = 1 > 0$ es finito y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, por el criterio de comparación por límite, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-1}$ **converge**.

Definición de Serie Alternante

Definición

Una **serie alternante** *es una serie cuyos términos alternan en signo. Tiene la forma general:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \cdots$$

o equivalentemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + \cdots$$

donde $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ (serie armónica alternante)
- $\sum^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$

Criterio de Leibniz para Series Alternantes

Teorema (Criterio de Series Alternantes de Leibniz)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ *una serie alternante tal que:*

1. $b_n > 0$ *para todo* n
2. $b_{n+1} \leq b_n$ *para todo* n *(la sucesión* $\{b_n\}$ *es decreciente)*
3. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ *converge.*

Observación: Este criterio solo se aplica a series alternantes y proporciona un método directo para verificar convergencia sin necesidad de calcular la suma.

Convergencia Absoluta y Condicional

Definición

Sea $\sum a_n$ una serie. Decimos que:

- *La serie $\sum a_n$* **converge absolutamente** *si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ converge.*
- *La serie $\sum a_n$* **converge condicionalmente** *si $\sum a_n$ converge, pero $\sum |a_n|$ diverge.*

Ejemplo:

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge condicionalmente, ya que converge (por el criterio de Leibniz), pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica) diverge.

Teorema de Convergencia Absoluta

Teorema

Si una serie $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces converge.
Es decir, si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

Demostración (idea):
Sea $\sum |a_n|$ convergente. Consideremos las series:

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\} \quad \text{y} \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$$

Entonces $a_n = a_n^+ - a_n^-$ y $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.
Como $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ y $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$, por comparación, ambas series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ convergen.
Por lo tanto, $\sum a_n = \sum(a_n^+ - a_n^-)$ converge. $\square$

Nota: El recíproco NO es cierto: una serie puede converger sin converger absolutamente (convergencia condicional).

Criterio del Cociente

Teorema (Criterio del Cociente o de D'Alembert)

Sea $\sum a_n$ una serie con términos no nulos. Sea:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Entonces:

1. *Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto converge).*
2. *Si $L > 1$ (o $L = \infty$), la serie $\sum a_n$ diverge.*
3. *Si $L = 1$, el criterio no es concluyente (la serie puede converger o diverger).*

Nota: Este criterio es especialmente útil para series que involucran factoriales o exponenciales.

Ejemplo 1: Criterio del Cociente

Ejemplo

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge o diverge.

Solución:

Sea $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Calculamos:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

Calculamos el límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368 < 1$$

Como $L < 1$, por el criterio del cociente, la serie **converge absolutamente**.

Ejemplo 2: Criterio del Cociente

Ejemplo

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ *converge o diverge.*

Solución:
Sea $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Calculamos:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{2 \cdot n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2}{n+1}$$

Calculamos el límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Como $L = 0 < 1$, por el criterio del cociente, la serie **converge absolutamente**.

Nota: De hecho, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.

Criterio de la Raíz

Teorema (Criterio de la Raíz o de Cauchy)

Sea $\sum a_n$ *una serie. Sea:*

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

Entonces:

1. *Si* $L < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *converge absolutamente (y por lo tanto converge).*
2. *Si* $L > 1$ *(o* $L = \infty$*), la serie* $\sum a_n$ *diverge.*
3. *Si* $L = 1$, *el criterio no es concluyente (la serie puede converger o diverger).*

Nota: Este criterio es especialmente útil para series donde el término general involucra potencias n-ésimas.

Ejemplo 1: Criterio de la Raíz

Ejemplo

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ *converge o diverge.*

Solución:
Sea $a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$. Calculamos:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n} = \frac{2n+3}{3n+2}$$

Calculamos el límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1$$

Como $L = \frac{2}{3} < 1$, por el criterio de la raíz, la serie **converge absolutamente**.

Ejemplo 2: Criterio de la Raíz

Ejemplo

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ *converge o diverge (para* $n \geq 2$*).*

Solución:

Sea $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$. Calculamos:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n}$$

Calculamos el límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

Como $L = 0 < 1$, por el criterio de la raíz, la serie **converge absolutamente**.

Observación: Aunque el logaritmo crece lentamente, cuando se eleva a la potencia n, el crecimiento es suficientemente rápido para garantizar la convergencia.

Resumen de Criterios de Convergencia

Criterio	**Cuándo Usar**
Criterio de la Integral	Series donde $a_n = f(n)$ y f es continua, positiva y decreciente
Series p	Series de la forma $\sum \frac{1}{n^p}$
Comparación Directa	Cuando se puede comparar directamente con una serie conocida
Comparación por Límite	Cuando el comportamiento asintótico es claro
Series Alternantes (Leibniz)	Series con términos alternantes
Criterio del Cociente	Series con factoriales o exponenciales
Criterio de la Raíz	Series con potencias n-ésimas

Estrategia para Analizar Series

Procedimiento sugerido:

1. **Verificar el término general:** Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie diverge (criterio del n-ésimo término).
2. **Identificar el tipo:** ¿Es geométrica? ¿Es una serie p? ¿Es telescópica?
3. **Para series con términos positivos:**
   - Intentar criterio de la integral o comparación si es posible
   - Si hay factoriales o exponenciales, usar criterio del cociente
   - Si hay potencias n-ésimas, usar criterio de la raíz
4. **Para series alternantes:**
   - Usar criterio de Leibniz para convergencia
   - Verificar convergencia absoluta con $\sum |a_n|$

Conclusión

En esta presentación hemos cubierto:

- Criterio de la Integral
- Criterio de Series p
- Criterios de Comparación (Directa y por Límite)
- Series Alternantes
- Convergencia Absoluta y Condicional
- Criterio del Cociente
- Criterio de la Raíz

Estos criterios proporcionan herramientas poderosas para determinar la convergencia de series infinitas.

Bibliografía

- George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, *Cálculo de Thomas*, 13ª edición. Pearson, 2015.
- James Stewart, *Cálculo de una variable*, 8ª edición, Cengage, 2016.
- Tom M. Apostol, *Calculus, Volumen 1*, 2ª edición. Wiley, 1967.