Interés Compuesto Parte I

Matemática Financiera
MAT 143 Sec 01

Robert Muñoz

Escuela de Matemática,
Facultad Ciencias
UASD

2025

Definición de Interés Compuesto

El **interés compuesto** consiste en que los intereses generados al final de cada período se agregan al capital para producir nuevos intereses en los siguientes períodos. Es decir, los intereses se reinvierten.

Conceptos Clave

- **Periodo de capitalización**: Es la unidad de tiempo al final de la cual los intereses generados se agregan al capital.

Conceptos Clave

- **Periodo de capitalización**: Es la unidad de tiempo al final de la cual los intereses generados se agregan al capital.
- **Frecuencia de conversión (m)**: Número de veces que ocurre la capitalización en un año. Por ejemplo:
  - $m = 1$: capitalización anual.
  - $m = 2$: capitalización semestral.
  - $m = 4$: capitalización trimestral.
  - $m = 12$: capitalización mensual.

Conceptos Clave

- **Periodo de capitalización**: Es la unidad de tiempo al final de la cual los intereses generados se agregan al capital.
- **Frecuencia de conversión (m)**: Número de veces que ocurre la capitalización en un año. Por ejemplo:
  - m = 1: capitalización anual.
  - m = 2: capitalización semestral.
  - m = 4: capitalización trimestral.
  - m = 12: capitalización mensual.
- **Tasa nominal (j)**: Es la tasa anunciada en términos anuales, pero que no considera la capitalización en sí. Se relaciona con la tasa por período con la fórmula: $i = \frac{j}{m}$.

Conceptos Clave

- **Periodo de capitalización**: Es la unidad de tiempo al final de la cual los intereses generados se agregan al capital.
- **Frecuencia de conversión (m)**: Número de veces que ocurre la capitalización en un año. Por ejemplo:
  - m = 1: capitalización anual.
  - m = 2: capitalización semestral.
  - m = 4: capitalización trimestral.
  - m = 12: capitalización mensual.
- **Tasa nominal (j)**: Es la tasa anunciada en términos anuales, pero que no considera la capitalización en sí. Se relaciona con la tasa por período con la fórmula: $i = \frac{j}{m}$.
- **Tasa por período (i)**: Es la tasa que se aplica en cada periodo de capitalización. Por ejemplo, si $j = 12\,\%$ anual y $m = 12$, entonces $i = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01 = 1\,\%$ mensual.

Deducción de la Fórmula del Monto Compuesto

Supongamos que tenemos:

- C: capital inicial.
- m: frecuencia de capitalización.
- t: tiempo en años.
- $i = \frac{j}{m}$: tasa de interés por período de capitalización.

El número total de periodos de capitalización en t años es $n = m \times t$.
Al final de cada período, el capital se multiplica por $(1 + i)$. Entonces, el monto después de n períodos es:

$$M = C(1 + i)^n.$$

Deducir la formula en el curso.

Fórmula del Monto Compuesto

$$M = C(1+i)^{mt}$$

- M: Monto compuesto.
- C: Capital inicial.
- i: Tasa de interés por período de capitalización $\left(i = \frac{j}{m}\right)$.
- m: Frecuencia de capitalización.
- t: Tiempo en años.

Para hallar el capital C:

$$C = \frac{M}{(1+i)^{mt}}$$

Para hallar la tasa nominal j:

$$j = \left(\sqrt[mt]{\frac{M}{C}} - 1\right)m$$

Para hallar el tiempo t:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{m\ln(1+i)}$$

Ejemplo 1: Comparar Monto Simple vs Compuesto

Enunciado: Suponga que invertimos $C = \$5{,}000$ al $10\,\%$ anual durante 3 años.

- **Interés Simple:** $M_{simple} = 5000(1 + 0{,}10 \times 3) = 5000 \times 1{,}30 = 6500.$
- **Interés Compuesto (capitalización anual):**

$$M_{compuesto} = 5000(1 + 0{,}10)^3 = 5000 \times 1{,}10^3 \approx 6655.$$

Resultado: Con interés compuesto, el monto es mayor, pues los intereses se reinvierten.

Ejemplo 2: Hallar el Capital

Enunciado: Se desea obtener un monto de $\$20{,}000$ en 4 años, a una tasa nominal de $j = 12\,\%$ con capitalización trimestral $(m = 4)$. Encuentre el capital inicial necesario.

Cálculo:

- $i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03$ por trimestre.
- $n = mt = 4 \times 4 = 16$ trimestres.
- $C = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{20000}{(1+0{,}03)^{16}}$.

Resultado:

$$C = \frac{20000}{(1{,}03)^{16}} = 12463{,}33$$

Ejemplo 3: Hallar la Tasa Nominal j

Enunciado: Un capital de $\$5{,}000$ se invierte durante 2 años, con capitalización semestral $(m = 2)$, y al final se obtiene un monto de $\$6{,}000$. Hallar la tasa nominal anual j.

Cálculo:

- $n = mt = 2 \times 2 = 4$ períodos.
- $\frac{M}{C} = \frac{6000}{5000} = 1{,}2$.
- $$j = \sqrt[mt]{\frac{M}{C}} - 1$$
  $(1+i)^4 = 1{,}2 \Rightarrow (1+i) = (1{,}2)^{1/4} \approx 1{,}0460 \Rightarrow i \approx 0{,}0460.$
- $j = m \times i = 0{,}0932 = 9{,}32\,\%$.

Ejemplo 4: Hallar el Tiempo t (Parte 1)

Enunciado: ¿Cuánto tiempo tomará para que un capital de $\$8{,}000$ se convierta en $\$12{,}000$ si se invierte a una tasa nominal anual de $j = 10\,\%$ con capitalización semestral $(m = 2)$?

Cálculo:

- $i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05$ por semestre.
- $\frac{M}{C} = \frac{12{,}000}{8{,}000} = 1{,}5$
- Usamos la fórmula del monto compuesto:

$$M = C(1+i)^n$$

- Despejamos n:

$$(1+i)^n = \frac{M}{C} \implies n = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}$$

Ejemplo 4: Hallar el Tiempo t (Parte 2)

Cálculo (continuación):

- Sustituimos los valores:

$$n = \frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}05)} \approx \frac{0{,}4055}{0{,}04879} \approx 8{,}31$$

- Como la capitalización es semestral ($m = 2$), el tiempo en años es:

$$t = \frac{n}{m} = \frac{8{,}31}{2} \approx 4{,}16 \text{ años}$$

Resultado: Se requieren aproximadamente $4{,}16$ años para que el capital crezca de $\$8{,}000$ a $\$12{,}000$ bajo las condiciones dadas.

Ejemplo 5: Hallar el Monto Compuesto

Enunciado: ¿Cuál será el monto acumulado al invertir $C = \$10{,}000$ durante 5 años a una tasa nominal anual de $j = 8\,\%$ con capitalización trimestral $(m = 4)$?

Cálculo:

- $i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02$ por trimestre.
- $n = mt = 4 \times 5 = 20$ trimestres.
- Usamos la fórmula del monto compuesto:

$$M = C(1+i)^n$$

- Sustituimos los valores:

$$M = 10{,}000 \times (1 + 0{,}02)^{20}$$

- Calculamos:

$$(1{,}02)^{20} \approx 1{,}4859$$

$$M = 10{,}000 \times 1{,}4859 = 14{,}859$$

Cuando se realiza una operación financiera, se pacta una tasa de interés anual que rige durante el lapso que dure la operación, que se denomina **tasa nominal de interés**.
Sin embargo, si el interés se capitaliza en forma semestral, trimestral o mensual, la cantidad efectivamente pagada o ganada es mayor que si se compone en forma anual. Cuando esto sucede, se puede determinar una **tasa efectiva anual**. Dos tasas de interés anuales con diferentes periodos de capitalización serán **equivalentes** si al cabo de un año producen el mismo interés compuesto.

$$j_1 = m_1((1 + \frac{j_2}{m_2})^{m_2/m_1} - 1)$$

Deducir la formula en el curso.

Ejemplo de Tasas Equivalentes

Suponga que desea encontrar la tasa nominal trimestral j_1 equivalente a una tasa nominal mensual $j_2 = 12\,\%$ $m_2 = 1$ y $m_1 = 4$

- se puede sustituir directamente en:

$$j_1 = m_1((1 + \frac{j_2}{m_2})^{m_2/m_1} - 1)$$

- $j_1 = 12{,}04\,\%$.

Resultado: Una tasa nominal mensual de 12 % es equivalente a una tasa nominal trimestral de aproximadamente 12.04 %.

Ejemplo de Tasas Equivalentes 2

Encuentre la tasa nominal semestral j_1 equivalente a una tasa nominal anual $j_2 = 18\,\%$, donde $m_2 = 1$ (anual) (tasa efectiva) y $m_1 = 2$ (semestral).

- Usamos la fórmula:

$$j_1 = m_1\left(\left(1+\frac{j_2}{m_2}\right)^{m_2/m_1} - 1\right)$$

- Sustituyendo valores:

$$j_1 = 2\left((1+\frac{0{,}18}{1})^{1/2} - 1\right)$$

$$(1+0{,}18)^{1/2} = (1{,}18)^{0{,}5} \approx 1{,}0862$$

$$j_1 = 2\times(1{,}0862-1) = 2\times 0{,}0862 = 0{,}1724 = 17{,}24\,\%$$

Resultado: Una tasa nominal anual de 18 % es equivalente a una tasa nominal semestral de aproximadamente 17.24 %.

Ejemplo de Tasas Equivalentes 3

Determine la tasa nominal mensual j_1 equivalente a una tasa nominal trimestral $j_2 = 8\,\%$, donde $m_2 = 4$ (trimestral) y $m_1 = 12$ (mensual).

- Aplicamos la fórmula:

$$j_1 = m_1 \left(\left(1 + \frac{j_2}{m_2} \right)^{m_2/m_1} - 1 \right)$$

- Sustituyendo valores:

$$j_1 = 12 \left((1 + \frac{0{,}08}{4})^{4/12} - 1 \right)$$

$$(1 + 0{,}02)^{1/3} = (1{,}02)^{0{,}3333} \approx 1{,}0066$$

$$j_1 = 12 \times (1{,}0066 - 1) = 12 \times 0{,}0066 = 0{,}0792 = 7{,}92\,\%$$

Resultado: Una tasa nominal trimestral de 8 % es equivalente a una tasa nominal mensual de aproximadamente 7.92 %.

Práctica

Del libro de Matemáticas Financieras de Alfredo Diaz Mata, realizar los siguientes ejercicios:

Asignados en el curso.

Bibliografía

- Alfredo Diaz Mata, *Matemáticas Financieras*, Editorial Limusa, México, última edición.
- Frank Ayres, Jr. y Robert E. Moyer, *Matemáticas Financieras - Colección Schaum*, McGraw-Hill, última edición.
- Richard A. Brealey, Stewart C. Myers, *Principios de Finanzas Corporativas*, McGraw-Hill, última edición.