Unidad 1: Límites y sus Propiedades Parte I

R.M

Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias
UASD

6 de septiembre de 2025

Tabla de Contenidos

¿Qué es el Cálculo?

Definición Conceptual

El **Cálculo** es rama de la matemática que estudia el cambio y movimiento. Se fundamenta en dos problemas centrales:

¿Qué es el Cálculo?

Definición Conceptual

El **Cálculo** es rama de la matemática que estudia el cambio y movimiento. Se fundamenta en dos problemas centrales:

1. **Cálculo Diferencial:** Concierne al problema de encontrar la *razón instantánea de cambio*. Geométricamente, esto equivale a hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto específico.

¿Qué es el Cálculo?

Definición Conceptual

El **Cálculo** es rama de la matemática que estudia el cambio y movimiento. Se fundamenta en dos problemas centrales:

1. **Cálculo Diferencial:** Concierne al problema de encontrar la *razón instantánea de cambio*. Geométricamente, esto equivale a hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto específico.
2. **Cálculo Integral:** Concierne al problema de encontrar el *área bajo una curva*. Esto se relaciona con la acumulación de cantidades.

La Noción Central

Ambos problemas se resuelven mediante el concepto fundamental del **límite**.

Idea Intuitiva de Límite

Descripción

Sea una función $f(x)$. El concepto de límite se ocupa del comportamiento de los valores de $f(x)$ cuando la variable independiente x se aproxima a un número c, sin importar el valor de la función en el propio punto c.

Idea Intuitiva de Límite

Descripción

Sea una función $f(x)$. El concepto de límite se ocupa del comportamiento de los valores de $f(x)$ cuando la variable independiente x se aproxima a un número c, sin importar el valor de la función en el propio punto c.

Escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

y lo leemos como .$^{\text{el}}$ límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L".

Idea Intuitiva de Límite

Descripción

Sea una función $f(x)$. El concepto de límite se ocupa del comportamiento de los valores de $f(x)$ cuando la variable independiente x se aproxima a un número c, sin importar el valor de la función en el propio punto c.

Escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

y lo leemos como .[el] límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L".

Idea ituitiva

Significa que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén *arbitrariamente cerca* de L tomando valores de x *suficientemente cerca* de c, pero no iguales a c.

Formas Indeterminadas

Definición

Una **forma indeterminada** *es una expresión algebraica que surge en el cálculo de un límite cuyo resultado no puede ser conocido a priori. La evaluación directa de la función en el punto conduce a una operación matemáticamente no definida.*

Las formas indeterminadas más comunes son:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

La presencia de una forma indeterminada es una señal para investigar el límite con mayor profundidad, utilizando técnicas algebraicas o de otro tipo. No significa que el límite no exista.

Análisis de una Función: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Consideremos el límite $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

- La sustitución directa de $x = 1$ produce la forma indeterminada $\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$.
- Esto nos indica que la función no está definida en $x = 1$. Sin embargo, el límite puede existir.

Análisis de una Función: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Consideremos el límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

- La sustitución directa de $x = 1$ produce la forma indeterminada $\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$.
- Esto nos indica que la función no está definida en $x = 1$. Sin embargo, el límite puede existir.

Construyamos una tabla de valores para x aproximándose a 1:

Análisis de una Función: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Consideremos el límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

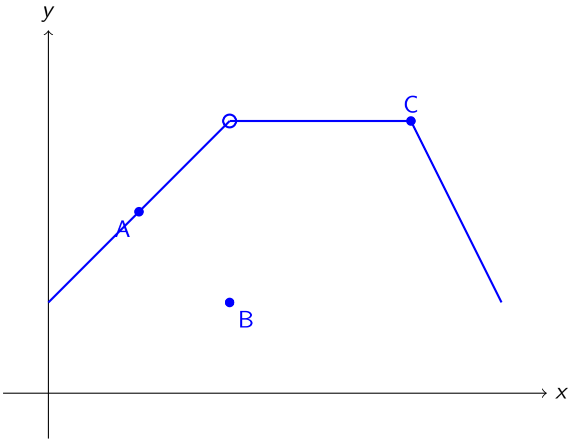
- La sustitución directa de $x = 1$ produce la forma indeterminada $\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$.
- Esto nos indica que la función no está definida en $x = 1$. Sin embargo, el límite puede existir.

Construyamos una tabla de valores para x aproximándose a 1:

$x \to 1^-$		$x \to 1^+$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	1.001	2.001

Conclusión Intuitiva: A medida que x se acerca a 1, $f(x)$ se acerca a 2. Por tanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

Análisis Gráfico de Límites



Análisis Gráfico de Límites II

- **Función definida:** En $x = 1$ (punto A), $f(1) = 2$. En $x = 2$ (punto B), $f(2) = 1$.

Análisis Gráfico de Límites II

- **Función definida:** En $x = 1$ (punto A), $f(1) = 2$. En $x = 2$ (punto B), $f(2) = 1$.
- **Límite existe, función no definida en el límite:** En $x = 2$, $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$, pero $f(2) = 1$.

Definición Formal de Límite ($\varepsilon - \delta$) I

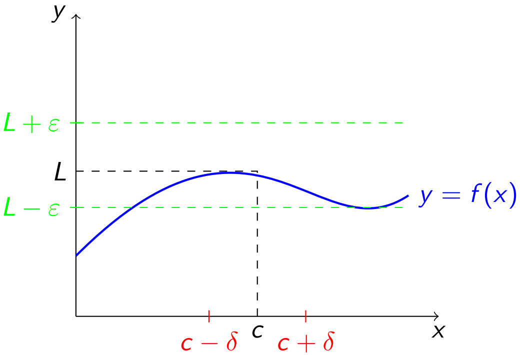
Definición

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente en c) y sea L un número real. La afirmación

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición Formal de Límite ($\varepsilon - \delta$) II



Límites por Definición: Ejemplos

Ejemplo 1: Demostrar que $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$

Límites por Definición: Ejemplos

Ejemplo 1: Demostrar que $\lim_{x \to 2}(3x - 1) = 5$

Análisis preliminar: Buscamos $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado.

Límites por Definición: Ejemplos

Ejemplo 1: Demostrar que $\lim\limits_{x \to 2}(3x - 1) = 5$

Análisis preliminar: Buscamos $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Queremos $|f(x) - L| < \varepsilon \implies |(3x - 1) - 5| < \varepsilon$.

Límites por Definición: Ejemplos

Ejemplo 1: Demostrar que $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$

Análisis preliminar: Buscamos $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Queremos $|f(x) - L| < \varepsilon \implies |(3x - 1) - 5| < \varepsilon$.

$$|3x - 6| < \varepsilon \implies |3(x - 2)| < \varepsilon \implies 3|x - 2| < \varepsilon \implies |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Límites por Definición: Ejemplos

Ejemplo 1: Demostrar que $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$

Análisis preliminar: Buscamos $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Queremos $|f(x)-L| < \varepsilon \implies |(3x-1)-5| < \varepsilon$.

$$|3x-6| < \varepsilon \implies |3(x-2)| < \varepsilon \implies 3|x-2| < \varepsilon \implies |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Demostración formal: Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Multiplicando por 3, obtenemos $3|x-2| < \varepsilon$, lo que implica $|3x-6| < \varepsilon$. Finalmente, $|(3x-1)-5| < \varepsilon$. Q.E.D.

Límites por Definición: Ejemplos

Ejemplo 1: Demostrar que $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$

Análisis preliminar: Buscamos $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Queremos $|f(x)-L| < \varepsilon \implies |(3x-1)-5| < \varepsilon$.

$$|3x-6| < \varepsilon \implies |3(x-2)| < \varepsilon \implies 3|x-2| < \varepsilon \implies |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Demostración formal: Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Multiplicando por 3, obtenemos $3|x-2| < \varepsilon$, lo que implica $|3x-6| < \varepsilon$. Finalmente, $|(3x-1)-5| < \varepsilon$. Q.E.D.

Ver más ejemplos en el libro...

Propiedades de los Límites

Teorema

Sean $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *y sean* f, g *funciones tales que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c} g(x) = K$.

1. **Múltiplo escalar:** $\lim_{x \to c} [b \cdot f(x)] = b \cdot L$

Propiedades de los Límites

Teorema

Sean $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^{+}$, *y sean* f, g *funciones tales que* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to c} g(x) = K$.

1. **Múltiplo escalar:** $\lim_{x\to c} [b \cdot f(x)] = b \cdot L$
2. **Suma o diferencia:** $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

Propiedades de los Límites

Teorema

Sean $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^{+}$, *y sean* f, g *funciones tales que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c} g(x) = K$.

1. **Múltiplo escalar:** $\lim_{x \to c} [b \cdot f(x)] = b \cdot L$
2. **Suma o diferencia:** $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. **Producto:** $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K$

Propiedades de los Límites

Teorema

Sean $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *y sean* f, g *funciones tales que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c} g(x) = K$.

1. **Múltiplo escalar:** $\lim_{x \to c} [b \cdot f(x)] = b \cdot L$
2. **Suma o diferencia:** $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. **Producto:** $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K$
4. **Cociente:** $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, *siempre que* $K \neq 0$.

Propiedades de los Límites

Teorema

Sean $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *y sean* f, g *funciones tales que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c} g(x) = K$.

1. **Múltiplo escalar:** $\lim_{x \to c} [b \cdot f(x)] = b \cdot L$
2. **Suma o diferencia:** $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. **Producto:** $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K$
4. **Cociente:** $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, *siempre que* $K \neq 0$.
5. **Potencia:** $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

Propiedades de los Límites

Teorema

Sean $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *y sean* f, g *funciones tales que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c} g(x) = K$.

1. **Múltiplo escalar:** $\lim_{x \to c} [b \cdot f(x)] = b \cdot L$
2. **Suma o diferencia:** $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. **Producto:** $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K$
4. **Cociente:** $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, *siempre que* $K \neq 0$.
5. **Potencia:** $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

Propiedades de los Límites

Teorema

Sean $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *y sean* f, g *funciones tales que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c} g(x) = K$.

1. **Múltiplo escalar:** $\lim_{x \to c} [b \cdot f(x)] = b \cdot L$
2. **Suma o diferencia:** $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. **Producto:** $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K$
4. **Cociente:** $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, *siempre que* $K \neq 0$.
5. **Potencia:** $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

Estas propiedades son la base para el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales por sustitución directa.

Límites por Sustitución Directa

Si f es una función polinómica o racional y c está en el dominio de f, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 1) =$$

Límites por Sustitución Directa

Si f es una función polinómica o racional y c está en el dominio de f, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 2}(3x^2 - 5x + 1) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

Límites por Sustitución Directa

Si f es una función polinómica o racional y c está en el dominio de f, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 1) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x}{x + 3} =$$

Límites por Sustitución Directa

Si f es una función polinómica o racional y c está en el dominio de f, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 1) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2 + 2x}{x + 3} = \frac{(-1)^2 + 2(-1)}{-1 + 3} = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Límites por Sustitución Directa

Si f es una función polinómica o racional y c está en el dominio de f, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 1) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2 + 2x}{x+3} = \frac{(-1)^2 + 2(-1)}{-1+3} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to \pi}\cos(x) =$$

Límites por Sustitución Directa

Si f es una función polinómica o racional y c está en el dominio de f, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 1) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x}{x + 3} = \frac{(-1)^2 + 2(-1)}{-1 + 3} = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to \pi} \cos(x) = \cos(\pi) = -1$$

Funciones que Coinciden Salvo en un Punto

Teorema

Sea $c \in \mathbb{R}$ *y sea* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \neq c$ *en un intervalo abierto que contiene a* c*. Si el límite de* $g(x)$ *cuando* $x \to c$ *existe, entonces el límite de* $f(x)$ *también existe y*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$$

Este teorema justifica formalmente la técnica de "cancelar" factores en el numerador y denominador después de factorizar o racionalizar.

Límites por Factorización

Ejemplo 1

Retomando nuestro primer ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

Límites por Factorización

Ejemplo 1

Retomando nuestro primer ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

Límites por Factorización

Ejemplo 1

Retomando nuestro primer ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

Límites por Factorización II

Ejemplo 2

$$\lim_{h \to 0} \frac{(h+2)^2 - 4}{h} = \frac{0}{0}$$

Límites por Factorización II

Ejemplo 2

$$\lim_{h\to 0}\frac{(h+2)^2-4}{h}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(h+2)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h+4-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+4)=4$$

Límites por Factorización III

Ejemplo 3

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x \to -3} (x - 2) = -3 - 2 = -5$$

Límites por Racionalización

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{0}{0}$$

Límites por Racionalización

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

Límites por Racionalización

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$

Límites por Racionalización

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Límites por Racionalización II

Ejemplo 2

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

Límites por Racionalización II

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{4-x} = \lim_{x\to 4} \frac{-(4-x)(2+\sqrt{x})}{4-x} = \lim_{x\to 4} -(2+\sqrt{x}) = -(2+2) = -4$$

Teorema del Encaje (o del Sándwich) I

Teorema

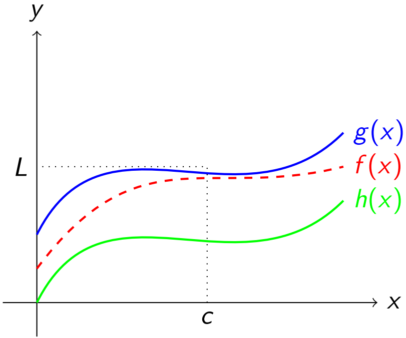
Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *para todo* x *en un intervalo abierto que contiene a* c*, excepto posiblemente en* c*, y si*

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Teorema del Encaje (o del Sándwich) II



Límites Trigonométricos Especiales

Teoremas Fundamentales

Los siguientes dos límites son fundamentales para el cálculo de derivadas de funciones trigonométricas.

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Límites Trigonométricos Especiales

Teoremas Fundamentales

Los siguientes dos límites son fundamentales para el cálculo de derivadas de funciones trigonométricas.

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Nota: Para estos límites, la variable x debe estar medida en radianes.

Ejemplos de Límites Trigonométricos

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} =$$

Ejemplos de Límites Trigonométricos

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cos(x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\right)=(1)(1)=1$$

Ejemplos de Límites Trigonométricos

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)}\right) = (1)(1) = 1$$

Ejemplo 2

Sea $u = 4x$. Si $x \to 0$, entonces $u \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x} =$$

Ejemplos de Límites Trigonométricos

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \right) \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) = (1)(1) = 1$$

Ejemplo 2

Sea $u = 4x$. Si $x \to 0$, entonces $u \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x \to 0} 4 \cdot \frac{\sin(4x)}{4x} = 4 \left(\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} \right) = 4(1) = 4$$

Ejemplos de Límites Trigonométricos II

Ejemplo 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} =$$

Ejemplos de Límites Trigonométricos II

Ejemplo 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sin(x)\right) = (1)(0) = 0$$

Ejemplos de Límites Trigonométricos II

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \sin(x)\right) = (1)(0) = 0$$

Ejemplo 4

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(\theta)\tan(\theta)}{\theta} =$$

Ejemplos de Límites Trigonométricos II

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \sin(x)\right) = (1)(0) = 0$$

Ejemplo 4

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(\theta)\tan(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(\theta)}{\theta}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$