Unidad I. Los Números Reales Parte I

R. M.

Matemáticas
Facultade de Ciencias
UASD

2025

Tabla de Contenido

Operación Interna

Definición

Una **operación interna** en un conjunto A es una regla que asigna a cada par de elementos a, b de A, un único elemento c que también pertenece a A.

$$* : A \times A \to A$$

$$a * b = c \in A$$

Los Números Naturales ($\mathbb{N}$)

Definición

Son los números que usamos para contar elementos de un conjunto.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Los Números Naturales ($\mathbb{N}$)

Definición

Son los números que usamos para contar elementos de un conjunto.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- **Símbolo:** $\mathbb{N}$
- **Ejemplos:** $1, 7, 25, 1000$
- **Operaciones Internas:**

Los Números Naturales ($\mathbb{N}$)

Definición

Son los números que usamos para contar elementos de un conjunto.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- **Símbolo:** $\mathbb{N}$
- **Ejemplos:** $1, 7, 25, 1000$
- **Operaciones Internas:**
  - **Adición (+):** La suma de dos naturales es siempre un natural. $(3 + 5 = 8)$
  - **Multiplicación (×):** El producto de dos naturales es siempre un natural. $(4 \times 6 = 24)$

Los Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Definición

Incluyen a los números naturales, sus opuestos negativos y el cero.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Los Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Definición

Incluyen a los números naturales, sus opuestos negativos y el cero.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

- **Símbolo:** $\mathbb{Z}$
- **Ejemplos:** $-10, -2, 0, 5, 42$
- **Operaciones Internas:**
  - **Adición (+):** $(-5) + 8 = 3$
  - **Sustracción (-):** $4 - 9 = -5$
  - **Multiplicación ($\times$):** $(-3) \times 7 = -21$

Los Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

Definición

Son todos los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, $\frac{a}{b}$, donde b es distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ \ q \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Los Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

Definición

Son todos los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, $\frac{a}{b}$, donde b es distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ \ q \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

- **Símbolo:** $\mathbb{Q}$
- **Ejemplos:** $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 5, -0{,}25$
- **Expresión:** Se expresan como decimales finitos o periódicos.
- **Operaciones Internas:** Adición, sustracción, multiplicación y división (excepto por cero).

Operaciones con Fracciones

Suma: Se busca un denominador común.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{5 + 6}{15} = \frac{11}{15}$$

Operaciones con Fracciones

Suma: Se busca un denominador común.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{5 + 6}{15} = \frac{11}{15}$$

Resta: Similar a la suma.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{6 - 4}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Operaciones con Fracciones

Suma: Se busca un denominador común.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\cdot 5+3\cdot 2}{3\cdot 5}=\frac{5+6}{15}=\frac{11}{15}$$

Resta: Similar a la suma.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 2-4\cdot 1}{4\cdot 2}=\frac{6-4}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Si tenemos denominador común:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$$

Operaciones con Fracciones II

Multiplicación: Se multiplican numeradores y denominadores.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Operaciones con Fracciones II

Multiplicación: Se multiplican numeradores y denominadores.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

División: Se multiplica por el inverso del divisor.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Los Números Irracionales ($\mathbb{I}$)

Definición

Son números que no pueden ser expresados como una fracción $\frac{a}{b}$. Su expresión decimal es infinita y no periódica.

- **Símbolo:** $\mathbb{I}$ o $\mathbb{Q}'$
- **Ejemplos:**
  - $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356...$
  - $\pi \approx 3{,}14159265...$
  - El número de Euler $e \approx 2{,}71828...$

Los Números Reales ($\mathbb{R}$)

Definición

El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$).

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Los Números Reales ($\mathbb{R}$)

Definición

El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$).

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- **Símbolo:** $\mathbb{R}$
- **Ejemplos:** $-27, \frac{3}{5}, 0, \sqrt{3}, \pi$

Propiedades de los Números Reales I

Para la suma $(+)$ y la multiplicación $(\cdot)$, los números reales cumplen $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. **Cerradura o Clausura:** Suma: $a + b \in \mathbb{R}$
   Multiplicación: $a \cdot b \in \mathbb{R}$
2. **Conmutativa:** suma: $a + b = b + a$
   Multiplicación: $a \cdot b = b \cdot a$
3. **Asociativa:**
   suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$
   Multiplicación: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Propiedades de los Números Reales II

4. **Elemento Neutro:**
   - Suma (0): $a + 0 = a$
   - Multiplicación (1): $a \cdot 1 = a$
5. **Elemento Inverso:**
   - Inverso Aditivo u Opuesto (-a): $a + (-a) = 0$
   - Inverso Multiplicativo o Reciproco (a^{-1}): $a \cdot a^{-1} = 1$ (para $a \neq 0$)
6. **Distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Nota: En $\mathbb{R}$ con multiplicación, 0 es elemento absorbente.

La Recta Real

Definición

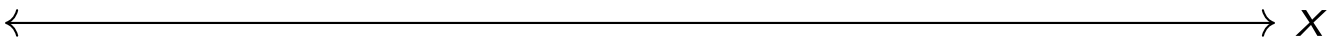
La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

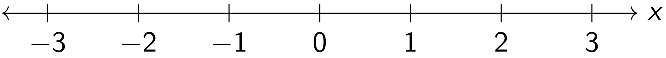


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

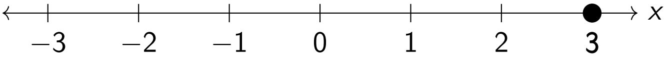


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

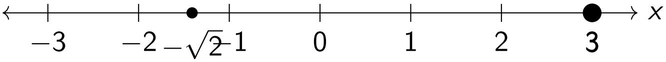


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

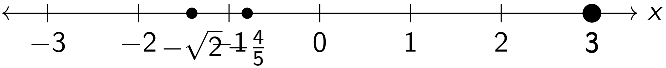


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

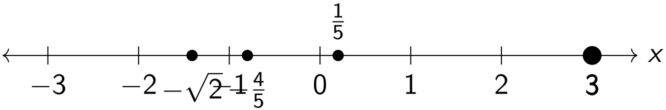


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

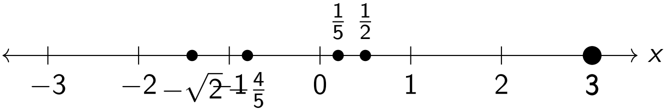


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

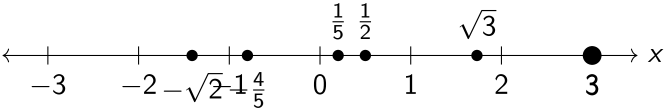


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

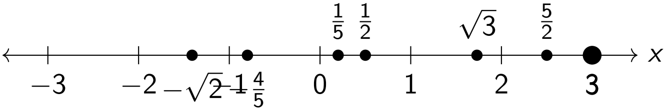


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$

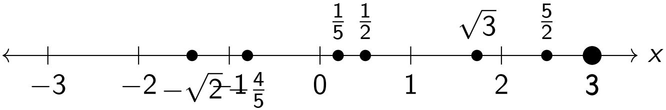


La Recta Real

Definición

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Cada punto en la recta corresponde a un único número real, llamado su **coordenada**.

Ubique las siguientes coordenadas: $3, -\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{5}{2}$



Valor Absoluto I

Definición

El valor absoluto de un número real a, denotado como $|a|$, es su distancia al cero en la recta numérica.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Valor Absoluto II

Propiedades

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad Triangular)

Valor Absoluto III

Ejemplos

- $|5| = 5$
- $|-7{,}2| = -(-7{,}2) = 7{,}2$

Distancia y Punto Medio

Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}$

La distancia entre dos números reales a y b se define como:

$$d(a, b) = |b - a|$$

Distancia y Punto Medio

Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}$

La distancia entre dos números reales a y b se define como:

$$d(a, b) = |b - a|$$

Propiedades:

- $d(a, b) \geq 0$ (No negatividad)
- $d(a, b) = d(b, a)$ (Simetría)
- $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (Desigualdad Triangular)

Distancia y Punto Medio

Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}$

La distancia entre dos números reales a y b se define como:

$$d(a,b) = |b-a|$$

Propiedades:

- $d(a,b) \geq 0$ (No negatividad)
- $d(a,b) = d(b,a)$ (Simetría)
- $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ (Desigualdad Triangular)

Punto Medio

El punto medio M del segmento que une a y b es: $p_m(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$

Ejemplos: Distancia y Punto Medio

Puntos: $a = -3$ y $b = \frac{5}{2}$

Distancia:

Ejemplos: Distancia y Punto Medio

Puntos: $a = -3$ y $b = \frac{5}{2}$

Distancia:

$$d(-3, \frac{5}{2}) = \left|\frac{5}{2} - (-3)\right| = \left|\frac{5}{2} + 3\right| = \left|\frac{5+6}{2}\right| = \left|\frac{11}{2}\right| = \frac{11}{2}$$

Punto Medio:

Ejemplos: Distancia y Punto Medio

Puntos: $a = -3$ y $b = \frac{5}{2}$

Distancia:

$$d(-3, \frac{5}{2}) = \left|\frac{5}{2} - (-3)\right| = \left|\frac{5}{2} + 3\right| = \left|\frac{5+6}{2}\right| = \left|\frac{11}{2}\right| = \frac{11}{2}$$

Punto Medio:

$$M = \frac{-3 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{-6+5}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

Ejemplos: Distancia y Punto Medio II

Puntos: $a = -\frac{9}{2}$ y $b = \frac{4}{5}$

Distancia:

Ejemplos: Distancia y Punto Medio II

Puntos: $a = -\frac{9}{2}$ y $b = \frac{4}{5}$

Distancia:

$$d(-\frac{9}{2}, \frac{4}{5}) = \left|\frac{4}{5} - (-\frac{9}{2})\right| = \left|\frac{4}{5} + \frac{9}{2}\right| = \left|\frac{8+45}{10}\right| = \left|\frac{53}{10}\right| = \frac{53}{10}$$

Punto Medio:

Ejemplos: Distancia y Punto Medio II

Puntos: $a = -\frac{9}{2}$ y $b = \frac{4}{5}$

Distancia:

$$d(-\frac{9}{2}, \frac{4}{5}) = \left|\frac{4}{5} - (-\frac{9}{2})\right| = \left|\frac{4}{5} + \frac{9}{2}\right| = \left|\frac{8+45}{10}\right| = \left|\frac{53}{10}\right| = \frac{53}{10}$$

Punto Medio:

$$M = \frac{-\frac{9}{2} + \frac{4}{5}}{2} = \frac{\frac{-45+8}{10}}{2} = \frac{-\frac{37}{10}}{2} = -\frac{37}{20}$$

Ley de Tricotomía

Definición

Para cualesquiera dos números reales a y b, una y solo una de las siguientes relaciones es verdadera:

- $a < b$ (a es menor que b)
- $a = b$ (a es igual a b)
- $a > b$ (a es mayor que b)

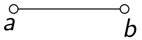
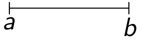
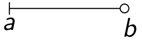
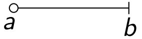
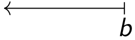
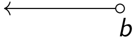
Esta ley establece que el conjunto de los números reales es un **conjunto ordenado**.

Intervalos: Definición I

Definición

Un **intervalo** una definicion superficial y acorde al curso, es un subconjunto de los números reales que heradan la relación de orden.

Intervalos: Definición II

Nombre	**Notación**	**Descripción**	**Gráfica**
Abierto	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Semiabierto	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Semiabierto	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Rayo Cerrado	$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Rayo Abierto	(a, ∞)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
Rayo Cerrado	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
Rayo Abierto	$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Ejemplo de Intervalo Mixto

Escriba la desigualdad, grafíque, halle longitud y punto medio del siguiente intervalo:

Intervalo $[-1, 4)$

Ejemplo de Intervalo Mixto

Escriba la desigualdad, grafíque, halle longitud y punto medio del siguiente intervalo:

Intervalo $[-1, 4)$

- **Notación de Intervalo:**

Ejemplo de Intervalo Mixto

Escriba la desigualdad, grafíque, halle longitud y punto medio del siguiente intervalo:

Intervalo $[-1, 4)$

- **Notación de Intervalo:**$[-1, 4)$
- **Descripción (Desigualdad):**

Ejemplo de Intervalo Mixto

Escriba la desigualdad, grafíque, halle longitud y punto medio del siguiente intervalo:

Intervalo $[-1, 4)$

- **Notación de Intervalo:** $[-1, 4)$
- **Descripción (Desigualdad):** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\}$

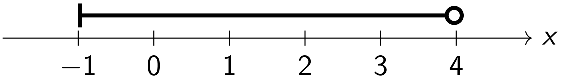
- **Gráfica:**

Ejemplo de Intervalo Mixto

Escriba la desigualdad, grafíque, halle longitud y punto medio del siguiente intervalo:

Intervalo $[-1, 4)$

- **Notación de Intervalo:** $[-1, 4)$
- **Descripción (Desigualdad):** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\}$
- **Gráfica:**



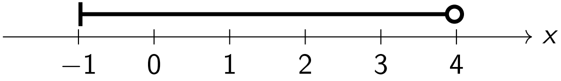
- **Longitud:**

Ejemplo de Intervalo Mixto

Escriba la desigualdad, grafíque, halle longitud y punto medio del siguiente intervalo:

Intervalo $[-1, 4)$

- **Notación de Intervalo:** $[-1, 4)$
- **Descripción (Desigualdad):** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\}$
- **Gráfica:**



- **Longitud:** La longitud es la distancia entre los extremos.

$$d(a, b) = L = |4 - (-1)| = 5$$

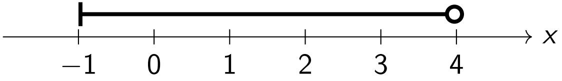
- **Punto Medio:**

Ejemplo de Intervalo Mixto

Escriba la desigualdad, grafíque, halle longitud y punto medio del siguiente intervalo:

Intervalo $[-1, 4)$

- **Notación de Intervalo:** $[-1, 4)$
- **Descripción (Desigualdad):** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\}$
- **Gráfica:**



- **Longitud:** La longitud es la distancia entre los extremos.

$$d(a, b) = L = |4 - (-1)| = 5$$

- **Punto Medio:**

$$M = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$