Técnicas de Integración

Cálculo II

R.M

Escuela de Matematicas
UASD

30 de septiembre de 2025

Contenido

Integración por Partes - Teorema

Teorema (Integración por Partes)

Sean u y v funciones con derivadas continuas en un intervalo $[a, b]$. Entonces:

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du} \tag{1}$$

o equivalentemente, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$:

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx \tag{2}$$

Demostración del Teorema

Demostración

Partimos de la regla del producto para la derivación:

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \tag{3}$$

Integrando ambos miembros respecto a x:

$$\int \frac{d}{dx}[u(x)v(x)]\, dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx \tag{4}$$

$$u(x)v(x) = \int v(x)u'(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx \tag{5}$$

Despejando $\int u(x)v'(x)\, dx$:

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx \tag{6}$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int xe^x \, dx$

Solución: Elegimos:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

Aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned}\int xe^x \, dx &= xe^x - \int e^x \, dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= \boxed{e^x(x-1) + C}\end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$

Solución: Elegimos:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\, dx$$
$$dv = x^2\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}$$

Aplicando integración por partes:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 3: $\int e^x \cos x \, dx$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$

Solución: Primera aplicación:

$$u = e^x, \quad du = e^x \, dx, \quad dv = \cos x \, dx, \quad v = \operatorname{sen} x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \tag{7}$$

Segunda aplicación en $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$:

$$u = e^x, \quad du = e^x \, dx, \quad dv = \operatorname{sen} x \, dx, \quad v = -\cos x$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \tag{8}$$

Ejemplo 3: Continuación

Sustituyendo (8) en (7):

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx\right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx\end{aligned}$$

Despejando:

$$\begin{aligned}2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) \\ \int e^x \cos x \, dx &= \boxed{\frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C}\end{aligned}$$

Ejemplo 4: $\int \arctan x \, dx$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \arctan x \, dx$

Solución: Elegimos:

$$\begin{aligned} u &= \arctan x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv &= \, dx \quad \Rightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\ &= \boxed{x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C} \end{aligned}$$

Método Tabular para Integración por Partes

Definición (Método Tabular)

El método tabular es una técnica sistemática para aplicar integración por partes repetidamente. Es especialmente útil cuando:

- Una función es un polinomio de grado n
- La otra función es e^{ax}, $\operatorname{sen}(bx)$ o $\cos(bx)$
- Las derivadas del polinomio eventualmente se anulan

Procedimiento:

1. Crear dos columnas: derivadas de u e integrales de dv
2. Alternar signos $(+, -, +, -, \ldots)$
3. Multiplicar diagonalmente y sumar

Ejemplo Tabular 1: $\int x^3 e^{2x}\, dx$

Signo	u y derivadas	v e integrales
$+$	x^3	e^{2x}
$-$	$3x^2$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$+$	$6x$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
$-$	6	$\frac{1}{8}e^{2x}$
$+$	0	$\frac{1}{16}e^{2x}$

Resultado:

$$\int x^3 e^{2x}\, dx = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3x^2 e^{2x}}{4} + \frac{6xe^{2x}}{8} - \frac{6e^{2x}}{16} + C$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{e^{2x}}{16}(8x^3 - 12x^2 + 12x - 6) + C}$$

Ejemplo Tabular 2: $\int x^2 \cos(3x)\,dx$

Signo	u y derivadas	v e integrales
$+$	x^2	$\cos(3x)$
$-$	$2x$	$\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$
$+$	2	$-\frac{1}{9}\cos(3x)$
$-$	0	$-\frac{1}{27}\operatorname{sen}(3x)$

Resultado:

$$\int x^2 \cos(3x)\,dx = \frac{x^2 \operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{2x\cos(3x)}{9} - \frac{2\operatorname{sen}(3x)}{27} + C$$

Factorizando:

$$\boxed{\frac{1}{27}(9x^2 \operatorname{sen}(3x) + 6x\cos(3x) - 2\operatorname{sen}(3x)) +}$$

Definición

Las integrales trigonométricas se clasifican según la forma del integrando:

Tipos principales:

1. **Potencias de seno y coseno:** $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$
2. **Potencias de tangente y secante:** $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$
3. **Productos de senos y cosenos:** $\int \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) \, dx$

Identidades fundamentales:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
- $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

Estrategias para $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

Proposición

Para integrar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$:

1. **Si m es impar:** Reservar un $\operatorname{sen} x \, dx = -d(\cos x)$
   - Convertir $\operatorname{sen}^{m-1} x = (\operatorname{sen}^2 x)^{(m-1)/2} = (1 - \cos^2 x)^{(m-1)/2}$
   - Sustituir $u = \cos x$
2. **Si n es impar:** Reservar un $\cos x \, dx = d(\operatorname{sen} x)$
   - Convertir $\cos^{n-1} x = (\cos^2 x)^{(n-1)/2} = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^{(n-1)/2}$
   - Sustituir $u = \operatorname{sen} x$
3. **Si ambos son pares:** Usar identidades de ángulo doble
   - $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

Ejemplo: Seno con Potencia Impar

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x\, dx\end{aligned}$$

Sea $u = \cos x$, entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$:

$$\begin{aligned}\int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x\, dx &= -\int (1 - u^2)\, du \\ &= -\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + C \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

Ejemplo: Producto de Potencias de Seno y Coseno (I)

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$

Solución: Como $n = 3$ es impar, reservamos $\cos x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cdot \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx \end{aligned}$$

Ejemplo: Producto de Potencias de Seno y Coseno (II)

Sea $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x \, dx$:

$$\begin{aligned}
\int u^2(1 - u^2)\, du &= \int (u^2 - u^4)\, du \\
&= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\
&= \boxed{\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C}
\end{aligned}$$

Ejemplo: Producto de Potencias de Seno y Coseno (Ambos Pares) I

Ejemplo

Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

Solución: Usamos las identidades de ángulo doble:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Ejemplo: Producto de Potencias de Seno y Coseno (Ambos Pares) II

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) \, dx \\
&= \int \frac{(1-\cos(2x))(1+\cos(2x))}{4} \, dx \\
&= \int \frac{1-\cos^2(2x)}{4} \, dx \\
&= \frac{1}{4} \int \left(1-\cos^2(2x)\right) \, dx
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Producto de Potencias de Seno y Coseno (Ambos Pares) III

Ahora, usamos la identidad $\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{2-1-\cos(4x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos(4x))\, dx \\
&= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right) + C \\
&= \boxed{\frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + C}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \tan^3 x \sec x \, dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec x \, dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan x \sec x \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x \, dx\end{aligned}$$

Ejemplo: $\int \tan^3 x \sec x \, dx$ (II)

Sea $u = \sec x$, entonces $du = \sec x \tan x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int (u^2 - 1)\, du &= \frac{u^3}{3} - u + C \\ &= \boxed{\frac{\sec^3 x}{3} - \sec x + C} \end{aligned}$$

Ejemplo: $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$ (Parte 1)

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

Solución: Como la potencia de secante es par, reservamos $\sec^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \cdot \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x(1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx\end{aligned}$$

Ejemplo: $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$ (Parte 2)

Sea $u = \tan x$, entonces $du = \sec^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int u^2(1+u^2)\,du &= \int (u^2+u^4)\,du \\ &= \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C \\ &= \boxed{\frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C} \end{aligned}$$

Ejemplos de Integración I

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\cos(3x)\,dx$

Solución: Usamos la identidad del producto:

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$

Ejemplos de Integración II

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(2x)\cos(3x)\,dx &= \int \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(2x+3x)+\operatorname{sen}(2x-3x)]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(5x)+\operatorname{sen}(-x)]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(-x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)\right) - \frac{1}{2}\cos(-x) + C \\
&= -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos(x) + C
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \operatorname{sen}(2x)\cos(3x)\,dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos(x) + C}$$

Ejemplo: $\int \cos(4x)\cos(2x)\,dx$ I

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \cos(4x)\cos(2x)\,dx$

Solución: Usamos la identidad del producto:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

Ejemplo: $\int \cos(4x)\cos(2x)\,dx$ II

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int \cos(4x)\cos(2x)\,dx &= \int \frac{1}{2}[\cos(4x+2x)+\cos(4x-2x)]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int [\cos(6x)+\cos(2x)]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cos(6x)\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\operatorname{sen}(6x)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right) + C \\
&= \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\int \cos(4x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C}
$$

Sustitución Trigonométrica - Teoría

Teorema (Sustitución Trigonométrica)

Para integrales que contienen expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$, se utilizan las siguientes sustituciones:

Expresión	**Sustitución**	**Identidad**	**Restricción**
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$	$1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$

Ejemplo 1: $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Solución: Como $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{3^2-x^2}$, usamos $x = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$:

- $dx = 3\cos\theta\, d\theta$
- $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = 3\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,\theta} = 3\cos\theta$

Ejemplo 1: (continuación)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta}\\ &= \int d\theta = \theta + C\\ &= \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C}$$

Ejemplo 2: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$ (Parte 1)

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

Solución: Para $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2+2^2}$, usamos $x = 2\tan\theta$:

- $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$
- $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4\tan^2\theta + 4} = 2\sqrt{\tan^2\theta + 1} = 2\sec\theta$

Continuación:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx &= \int \frac{4\tan^2\theta \cdot 2\sec^2\theta\,d\theta}{2\sec\theta} \\
&= 4\int \tan^2\theta\sec\theta\,d\theta \\
&= 4\int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\,d\theta \\
&= 4\int (\sec^3\theta - \sec\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Continuación

Para resolver $\int \sec^3\theta\, d\theta$ y $\int \sec\theta\, d\theta$:

$$\int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|) + C$$

Retornando a la variable x:

- $\tan\theta = \frac{x}{2}$
- $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

Resultado final:

$$\boxed{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} - 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right| + C}$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

Solución: Para $\sqrt{x^2-1}$, usamos $x = \sec\theta$ (con $x > 1$):

- $dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$
- $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx &= \int \frac{\tan\theta \cdot \sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sec\theta} \\
&= \int \tan^2\theta\,d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta \\
&= \tan\theta - \theta + C \\
&= \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec}(x) + C
\end{aligned}$$

Integración por Fracciones Parciales - Teoría

Definición

Una **función racional** es una función de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x y $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 - x}$$

Teorema (Descomposición en Fracciones Parciales)

Toda función racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede descomponerse en una suma de fracciones más simples según la factorización de $Q(x)$.

Casos según los factores de $Q(x)$

Casos:

1. **Factores lineales simples** $(a_1x + b_1), \ldots, (a_nx + b_n)$**:**

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

2. **Factor lineal repetido** $(ax + b)^n$**:**

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

3. **Factor cuadrático irreducible** $(ax^2 + bx + c)$**:**

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

4. **Factor cuadrático irreducible repetido** $(ax^2 + bx + c)^n$**:**

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Procedimiento General

Observación (Algoritmo de Descomposición)

1. **Verificar que la fracción sea propia:** Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, realizar división de polinomios primero.
2. **Factorizar completamente el denominador** $Q(x)$
3. **Escribir la forma general** de la descomposición según los tipos de factores
4. **Determinar las constantes** mediante:
   - Método de coeficientes indeterminados
   - Método de valores específicos
   - Método de límites (Heaviside)
5. **Integrar** cada fracción parcial

Ejemplo 1: Factores Lineales Simples

Integrar:

$$\int \frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

Descomposición:

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

Multiplicando ambos lados por $(x+1)(x+2)$:

$$3x+5 = A(x+2) + B(x+1)$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=5 \end{cases} \implies A=2,\ B=1$$

Integrando:

$$\int \frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx = 2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$$

Ejemplo 2: Factor Lineal Repetido

Integrar:

$$\int \frac{4x+1}{(x-1)^2}\,dx$$

Descomposición:

$$\frac{4x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Multiplicando por $(x-1)^2$:

$$4x+1 = A(x-1) + B$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} A = 4 \\ -B + A(-1) = 1 \implies -A + B = 1 \implies B = 1 + A = 5 \end{cases}$$

Integrando:

$$\int \frac{4x+1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{4}{x-1}\,dx + \int \frac{5}{(x-1)^2}\,dx = 4\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$$

Ejemplo 3: Factor Lineal y Cuadrático Irreducible I

Integrar:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$$

Descomposición:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Multiplicamos ambos lados por $(x-1)(x^2+4)$:

$$2x+3 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1)$$

Expandimos el lado derecho:

$$A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + 4A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$= (A+B)x^2 + (C-B)x + (4A-C)$$

Ejemplo 3: Factor Lineal y Cuadrático Irreducible II

Igualamos coeficientes:

$$\begin{cases} x^2: & 0 = A + B \\ x^1: & 2 = C - B \\ x^0: & 3 = 4A - C \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$A + B = 0 \implies B = -A$$

$$2 = C - B = C + A \implies C = 2 - A$$

$$3 = 4A - C \implies 3 = 4A - (2 - A) \implies 3 = 4A - 2 + A \implies 3 = 5A - 2 \implies 5A = 5 \implies$$

$$B = -A = -1$$

$$C = 2 - A = 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+4}$$

Ejemplo 3: Factor Lineal y Cuadrático Irreducible III

Integrando:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-x+1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Para $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$, usamos $u = x^2+4$, $du = 2x\,dx$:

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|x^2+4|$$

Para $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$:

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ejemplo 3: Factor Lineal y Cuadrático Irreducible IV

Por lo tanto, la integral es:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Ejemplo 4: Factor Cuadrático Irreducible Repetido I

Integrar:

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

Descomposición:

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2+1} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $(x^2+1)^2$:

$$3x^2 + 2x + 1 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)$$

Expandimos:

$$= Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Cx + D$$

Agrupando términos:

$$= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

Ejemplo 4: Factor Cuadrático Irreducible Repetido II

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} x^3: & 0 = A \implies A = 0 \\ x^2: & 3 = B \implies B = 3 \\ x^1: & 2 = A + C \implies C = 2 \\ x^0: & 1 = B + D \implies D = 1 - B = -2 \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{x^2+1} + \frac{2x-2}{(x^2+1)^2}$$

Integrando:

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}\, dx = 3\int \frac{1}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

Ejemplo 4: Factor Cuadrático Irreducible Repetido III

$$= 3\arctan(x) + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Para $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$, usamos $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{-2}du = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}$$

Para $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

Respuesta final:

$$3\arctan(x) - \frac{1}{x^2+1} - \left[\frac{x}{x^2+1+\arctan(x)}\right] = 2\arctan(x) - \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} + C$$

Integración de Funciones Racionales de Seno y Coseno: Teoría I

Definición

Una **función racional de seno y coseno** es una función de la forma

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{P(\operatorname{sen} x, \cos x)}{Q(\operatorname{sen} x, \cos x)}$$

donde P y Q son polinomios en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Estrategia general: Para integrar $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, se puede usar la sustitución

- $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (sustitución de Weierstrass o fórmula universal).

Deducción de las fórmulas:
Recordemos las identidades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

donde $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
Demostración:

Integración de Funciones Racionales de Seno y Coseno: Teoría III

Sea $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Usando las fórmulas de ángulo doble:

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Pero

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x = 2 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Para dx:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies x = 2\arctan t \implies dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Conclusión: Toda función racional en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se transforma en una función racional en t, que puede integrarse por fracciones parciales.

Ejemplo 1: $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$ usando la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solución:

Usamos las fórmulas:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Entonces,

$$1 + \operatorname{sen} x = 1 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(1+t^2)+2t}{1+t^2} = \frac{(1+t)^2}{1+t^2}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{(1+t)^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{(1+t)^2}dt$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} dx$ usando la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solución:

Usamos:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2+2t} dt \\
&= \int \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} dt
\end{aligned}$$

Ahora, factorizamos el denominador:

$$(1+t^2)(1+t)^2 = (1+t)^2(1+t^2)$$

Ejemplo 2: $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} dx$ III

Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{1-t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

Pero para propósitos de este ejemplo, podemos observar que

$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} dx = \int \frac{d(\operatorname{sen} x)}{1+\operatorname{sen} x} = \ln|1+\operatorname{sen} x| + C$$

o, usando la sustitución, se puede llegar a la misma respuesta.
Respuesta:

$$\boxed{\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} dx = \ln|1+\operatorname{sen} x| + C}$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ usando la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solución:

Recordemos las identidades de la sustitución de Weierstrass:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

donde $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Ejemplo 3: $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ (Parte 2)

Sustituimos en el denominador:

$$\begin{aligned}
1+\operatorname{sen} x+\cos x &= 1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2} \\
&= \frac{(1+t^2)+2t+1-t^2}{1+t^2} \\
&= \frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2} \\
&= \frac{1+2t+1}{1+t^2} \\
&= \frac{2+2t}{1+t^2} \\
&= \frac{2(1+t)}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{1+\ldots} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2(1+t)\ldots}$$

Ejemplo 3: $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ (Parte 3)

La integral es inmediata:

$$\int \frac{1}{1+t} dt = \ln|1+t| + C$$

Regresando a la variable x:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x} = \ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C}$$

Bibliografía

- James Stewart, *Cálculo de una variable*, Cengage Learning, 8ª edición.
- Ron Larson, Bruce Edwards, *Cálculo*, McGraw-Hill, 9ª edición.
- Tom M. Apostol, *Calculus, Vol. 1*, Wiley, 2ª edición.
- Michael Spivak, *Calculus*, Publish or Perish, 4ª edición.
- Dennis G. Zill, Warren S. Wright, *Cálculo con geometría analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, 4ª edición.