Preparación para el Cálculo. Funciones y Gráficas Parte II

Cálculo I

UASD

September 15, 2025

Tabla de Contenidos

1. Función Real de una Variable Real

Definición

Una **función real de una variable real** f es una regla que asocia a cada número real x de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, un único número real $y \in \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$y = f(x)$$

1. Función Real de una Variable Real

Definición

Una **función real de una variable real** f es una regla que asocia a cada número real x de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, un único número real $y \in \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$y = f(x)$$

- x se denomina la **variable independiente**.
- y se denomina la **variable dependiente**, puesto que su valor depende de la elección de x.

2. Dominio y Rango

Definición

- El **Dominio** de f, denotado $\mathrm{Dom}(f)$, es el conjunto de todos los valores de x para los cuales $f(x)$ está definida.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

2. Dominio y Rango

Definición

- El **Dominio** de f, denotado $\mathrm{Dom}(f)$, es el conjunto de todos los valores de x para los cuales $f(x)$ está definida.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

- El **Rango** (o Imagen) de f, denotado $\mathrm{Ran}(f)$, es el conjunto de todos los valores que toma la función.

$$\mathrm{Ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

3. Ejemplos de Evaluación de una Función

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Evaluar $f(-2)$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^2 - 5(-2) + 2 \\ &= 3(4) + 10 + 2 = 24 \end{aligned}$$

3. Ejemplos de Evaluación de una Función

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$. Evaluar $f(-2)$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^2 - 5(-2) + 2 \\ &= 3(4) + 10 + 2 = 24 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Dada la función $g(t) = \sqrt{t^2 + 7}$. Evaluar $g(3)$.

$$g(3) = \sqrt{3^2 + 7} = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4$$

3. Ejemplos de Evaluación de una Función II

Ejemplo 3

Para la función $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Evaluar $h(0)$.

$$h(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

4. Ejemplos de Dominio y Rango (I)

Ejemplo 1: Función Polinómica

Sea $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

4. Ejemplos de Dominio y Rango (I)

Ejemplo 1: Función Polinómica

Sea $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

- **Dominio:** Las funciones polinómicas están definidas para todo número real.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

4. Ejemplos de Dominio y Rango (I)

Ejemplo 1: Función Polinómica

Sea $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

- **Dominio:** Las funciones polinómicas están definidas para todo número real.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

- **Rango:** Una función cúbica de esta forma recorre todos los valores reales.

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

4. Ejemplos de Dominio y Rango (I)

Ejemplo 2: Función Racional

Sea $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

4. Ejemplos de Dominio y Rango (I)

Ejemplo 2: Función Racional

Sea $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

- **Dominio:** El denominador no puede ser cero, i.e., $x - 3 \neq 0 \implies x \neq 3$.

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

4. Ejemplos de Dominio y Rango (II)

Ejemplo 2: Rango de la Función Racional

Para hallar el rango de $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, despejamos x en términos de y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-3} \\ y(x-3) &= 2x+1 \\ yx - 3y &= 2x+1 \\ yx - 2x &= 3y+1 \\ x(y-2) &= 3y+1 \implies x = \frac{3y+1}{y-2} \end{aligned}$$

4. Ejemplos de Dominio y Rango (II)

El denominador no puede ser cero, por tanto $y \neq 2$.

$$\text{Ran}(g) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

4. Ejemplos de Dominio y Rango (II)

El denominador no puede ser cero, por tanto $y \neq 2$.

$$\text{Ran}(g) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

Ejemplo 3: Función con Radical

Sea $h(x) = \sqrt{x - 4}$.

4. Ejemplos de Dominio y Rango (II)

El denominador no puede ser cero, por tanto $y \neq 2$.

$$\text{Ran}(g) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

Ejemplo 3: Función con Radical

Sea $h(x) = \sqrt{x-4}$.

- **Dominio:** El radicando debe ser no negativo: $x - 4 \geq 0 \implies x \geq 4$. [16]

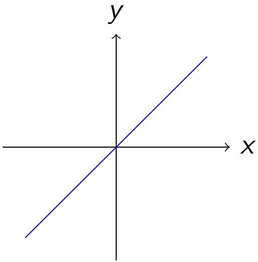
$$\text{Dom}(h) = [4, \infty)$$

- **Rango:** La raíz cuadrada principal es siempre no negativa.

$$\text{Ran}(h) = [0, \infty)$$

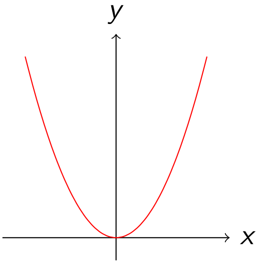
5. Gráficas de Funciones Conocidas (Lineal y Cuadrática)

Función Identidad



$f(x) = x$

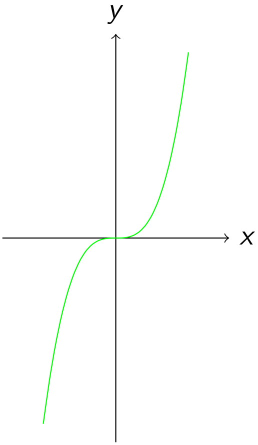
Función Cuadrática



$f(x) = x^2$

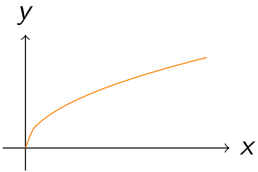
5. Gráficas de Funciones Conocidas (Cúbica y Raíz)

Función Cúbica



$$f(x) = x^3$$

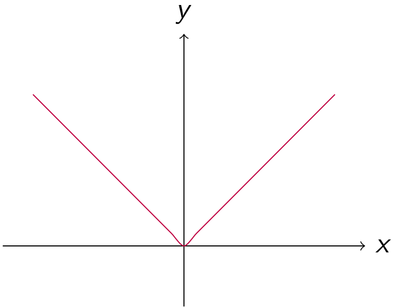
Función Raíz Cuadrada



$$f(x) = \sqrt{x}$$

5. Gráficas de Funciones Conocidas (Valor Absoluto)

Función Valor Absoluto

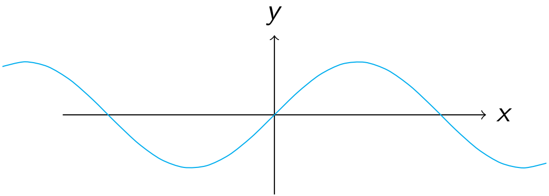


$$f(x) = |x|$$

5. Gráficas de Funciones Conocidas (Trigonométricas)

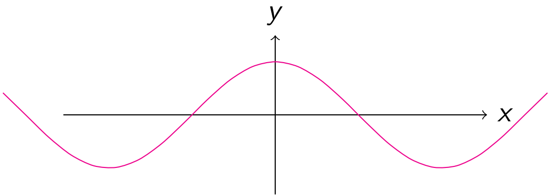
Función Seno

$f(x) = \sin(x)$



Función Coseno

$f(x) = \cos(x)$



6. Función Compuesta

Definición

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta**, denotada por $g \circ f$, se define como:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de todos los $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que $f(x) \in \mathrm{Dom}(g)$.

7. Ejemplos de Función Compuesta

Ejemplo 1

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$. Hallar $(g \circ f)(x)$.

7. Ejemplos de Función Compuesta

Ejemplo 1

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$. Hallar $(g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2$$

7. Ejemplos de Función Compuesta

Ejemplo 1

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$. Hallar $(g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2$$

Ejemplo 2

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x - 2$. Hallar $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

7. Ejemplos de Función Compuesta

Ejemplo 1

Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$. Hallar $(g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2$$

Ejemplo 2

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x - 2$. Hallar $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = \sqrt{x - 2}$$

Dominio: Se requiere $x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2$. Así, $\mathrm{Dom}(f \circ g) = [2, \infty)$.

7. Ejemplos de Función Compuesta

Ejemplo 3

Sean $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Hallar $(g \circ f)(x)$.

7. Ejemplos de Función Compuesta

Ejemplo 3

Sean $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Hallar $(g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$$

8. Función Par y Función Impar

Definición de Función Par

Una función f es **par** si para todo x en su dominio, $-x$ también está en el dominio y además:

$$f(-x) = f(x)$$

8. Función Par y Función Impar

Definición de Función Par

Una función f es **par** si para todo x en su dominio, $-x$ también está en el dominio y además:

$$f(-x) = f(x)$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al **eje y**.

8. Función Par y Función Impar

Definición de Función Par

Una función f es **par** si para todo x en su dominio, $-x$ también está en el dominio y además:

$$f(-x) = f(x)$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al **eje y**.

Definición de Función Impar

Una función f es **impar** si para todo x en su dominio, $-x$ también está en el dominio y además:

$$f(-x) = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al **origen**.

9. Ejemplos de Funciones Pares

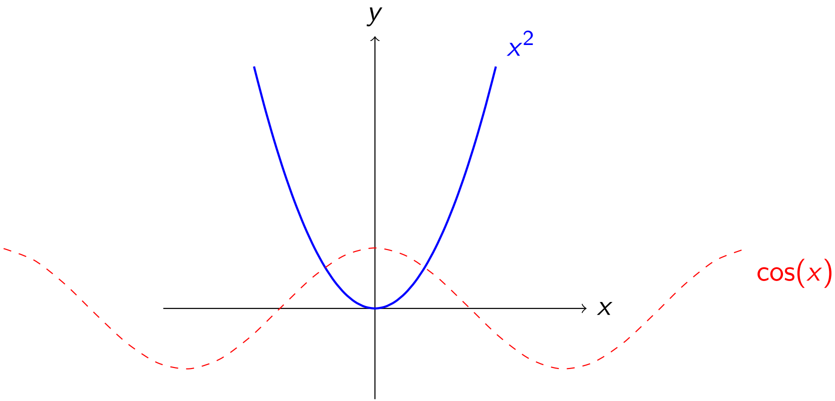
Ejemplo 1: $f(x) = x^2$

Verificación: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Ejemplo 2: $g(x) = \cos(x)$

Verificación: $g(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = g(x)$.

9. Ejemplos de Funciones Pares



9. Ejemplos de Funciones Impares

Ejemplo 1: $h(x) = x^3$

Verificación: $h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$.

Ejemplo 2: $k(x) = \sin(x)$

Verificación: $k(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -k(x)$.

9. Ejemplos de Funciones Impares