Expresiones Algebraicas II: Expresiones Racionales y Números Complejos

R. M.

Matemáticas, UASD

2025

Tabla de Contenido

1. Expresiones Racionales

2. Los Números Complejos

1. Expresiones Racionales

2. Los Números Complejos

Tipos de Expresiones Fraccionarias

Expresión Fraccionaria

Es el cociente de dos expresiones algebraicas.

- Ejemplo 1: $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2-3}$
- Ejemplo 2: $\frac{2y^3-5y}{y+\sqrt[3]{y}}$

Tipos de Expresiones Fraccionarias

Expresión Fraccionaria

Es el cociente de dos expresiones algebraicas.

- Ejemplo 1: $\frac{\sqrt{x}+1}{x^2-3}$
- Ejemplo 2: $\frac{2y^3-5y}{y+\sqrt[3]{y}}$

Expresión Racional

Es un tipo especial de expresión fraccionaria donde tanto el numerador como el denominador son **polinomios**.

- Ejemplo 1: $\frac{3x^2-5x+2}{x-4}$
- Ejemplo 2: $\frac{a^3-a^2}{7a+a^2+3}$

Tipos de Expresiones Fraccionarias II

Expresión Compuesta (o Fracción Compleja)

Es una fracción cuyo numerador o denominador (o ambos) contiene una o más fracciones.

- Ejemplo 1: $\frac{\frac{1}{x}+2}{x-3}$ Ejemplo 2: $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$

Simplificación de Expresiones Racionales

El objetivo es **factorizar** el numerador y el denominador para **cancelar** los factores comunes.

Ejemplo 1

Simplificar $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-9}{x^2+5x+6} &= \frac{(x-3)(x+3)}{(x+2)(x+3)} && \text{Factorizar} \\ &= \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x+2)\cancel{(x+3)}} && \text{Cancelar factor común} \\ &= \frac{x-3}{x+2}, \quad \text{si } x \neq -2 \end{aligned}$$

Simplificación de Expresiones Racionales II

Ejemplo 2

Simplificar $\frac{2y^2-8}{4y+8}$

$$\frac{2y^2-8}{4y+8} = \frac{2(y^2-4)}{4(y+2)} = \frac{2(y-2)(y+2)}{4(y+2)}$$

Factorizar

$$= \frac{\cancel{2}(y-2)\cancel{(y+2)}}{\cancel{4}_2\cancel{(y+2)}}$$

Cancelar

$$= \frac{y-2}{2}$$

MCD y mcm de Expresiones Algebraicas

Máximo Común Divisor (MCD)

Es el producto de los **factores comunes** con su **menor** exponente.

Ejemplo

Hallar el MCD de $6x^2(x+1)$ y $9x(x+1)^3$.

- Factores numéricos: $MCD(6,9) = 3$
- Factores literales: $MCD(x^2, x) = x$, $MCD((x+1),(x+1)^3) = (x+1)$
- Resultado: $MCD = 3x(x+1)$

MCD y mcm de Expresiones Algebraicas

Máximo Común Divisor (MCD)

Es el producto de los **factores comunes** con su **menor** exponente.

Ejemplo

Hallar el MCD de $6x^2(x+1)$ y $9x(x+1)^3$.

- Factores numéricos: $MCD(6,9)=3$
- Factores literales: $MCD(x^2,x)=x$, $MCD((x+1),(x+1)^3)=(x+1)$
- Resultado: $MCD = 3x(x+1)$

Mínimo Común Múltiplo (mcm)

Es el producto de los factores **comunes y no comunes** con su **mayor** exponente.

Ejemplo

Hallar el mcm de x^2-4 y x^2-x-6.

- $x^2-4=(x-2)(x+2)$
- $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$
- Factores: $(x-2)$, $(x+2)$, $(x-3)$
- Resultado: $mcm = (x-2)(x+2)(x-3)$

Suma y Resta de Expresiones Racionales

El procedimiento es encontrar el **mcm** de los denominadores (denominador común), y luego sumar o restar los numeradores.
En muchos casos:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}$$

Ejemplo 1: Suma

$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} \qquad mcm = (x-1)(x+2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Suma y Resta de Expresiones Racionales II

Ejemplo 2: Resta

$$\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{(x-2)(x+1)}\quad mcm=(x-2)(x+2)(x+1)$$

$$=\frac{x(x+1)-1(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+x-x-2}{(x-2)(x+2)(x+1)}=\frac{x^2-2}{(x-2)(x+2)(x+1)}$$

Multiplicación y División de Expresiones Racionales

Multiplicación

Se factoriza todo, se multiplican numeradores con numeradores y denominadores con denominadores, y se simplifica.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Ejemplo: $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x+1}$

$$= \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+2}} \cdot \frac{\cancel{(x+2)}^2}{\cancel{x+1}}$$

$$= (x-1)(x+2)$$

División

Se invierte la segunda fracción (el divisor) y se procede como en la multiplicación.

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$$

Ejemplo: $\frac{y-3}{y^2-16} \div \frac{y^2-9}{y+4}$

$$= \frac{y-3}{(y-4)(y+4)} \cdot \frac{y+4}{(y-3)(y+3)}$$

$$= \frac{\cancel{y-3}}{(y-4)\cancel{(y+4)}} \cdot \frac{\cancel{y+4}}{\cancel{(y-3)}(y+3)}$$

1. Expresiones Racionales
2. Los Números Complejos

Definición de Número Complejo

Unidad Imaginaria, i

Es el número que satisface la ecuación $x^2 = -1$. Se define como:

$$i = \sqrt{-1}$$

Definición de Número Complejo

Unidad Imaginaria, i

Es el número que satisface la ecuación $x^2 = -1$. Se define como:

$$i = \sqrt{-1}$$

Número Complejo, z

Es un número de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales.

- $a = \mathrm{Re}(z)$ es la **parte real**.
- $b = \mathrm{Im}(z)$ es la **parte imaginaria**.

Definición de Número Complejo

Unidad Imaginaria, i

Es el número que satisface la ecuación $x^2 = -1$. Se define como:

$$i = \sqrt{-1}$$

Número Complejo, z

Es un número de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales.

- $a = \text{Re}(z)$ es la **parte real**.
- $b = \text{Im}(z)$ es la **parte imaginaria**.

Tipos Especiales

- Si $b = 0$, $z = a$ es un **real puro**.

Opuesto, Conjugado y Gráfica

Para un número complejo $z = a + bi$:

Opuesto y conjugado de z

El opuesto:

$$-z = -a - bi$$

El conjugado:

$$\bar{z} = a - bi$$

Opuesto, Conjugado y Gráfica II

Para un número complejo $z = a + bi$:

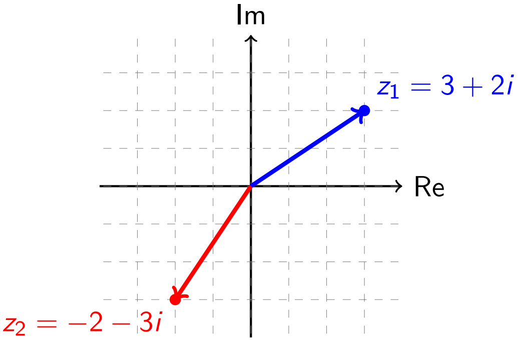
Potencias de i El patrón se repite cada 4 potencias:

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

Ejemplos:

1. $i^{25} = i^{4 \cdot 6+1} = (i^4)^6 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$
2. $i^{78} = i^{4 \cdot 19+2} = i^2 = -1$
3. $i^{2023} = i^{4 \cdot 505+3} = i^3 = -i$

Plano Complejo (Plano de Argand)



Operaciones con Números Complejos I

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$.

Suma

Se suman las partes reales y las partes imaginarias por separado.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

1. $(3 + 2i) + (5 - 4i) =$
   $(3 + 5) + (2 - 4)i = 8 - 2i$
2. $(-1 + i) + (6 + 3i) =$
   $(-1 + 6) + (1 + 3)i = 5 + 4i$

Resta

Se restan las partes reales y las partes imaginarias por separado.

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

1. $(7 - 5i) - (4 + 2i) =$
   $(7 - 4) + (-5 - 2)i = 3 - 7i$
2. $(2i) - (5 - i) =$
   $(0 - 5) + (2 - (-1))i = -5 + 3i$

Operaciones con Números Complejos II

Multiplicación

Se usa la propiedad distributiva (como al multiplicar binomios) y se recuerda que $i^2 = -1$.

1. $(3+2i)(4-i) = 3(4) + 3(-i) + 2i(4) + 2i(-i)$

$$
\begin{aligned}
&= 12 - 3i + 8i - 2i^2 \\
&= 12 + 5i - 2(-1) \\
&= 12 + 5i + 2 = 14 + 5i
\end{aligned}
$$

2. $(1-3i)(1+3i)$ (¡Suma por diferencia! $z \cdot \bar{z}$)

$$
\begin{aligned}
&= 1^2 - (3i)^2 = 1 - 9i^2 \\
&= 1 - 9(-1) = 1 + 9 = 10
\end{aligned}
$$

Operaciones con Números Complejos III I

Operaciones con Números Complejos III II

División

Se multiplica el numerador y el denominador por el **conjugado del denominador**.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

$\frac{2+5i}{3-4i} = \frac{2+5i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(3)+2(4i)+5i(3)+5i(4i)}{3^2+4^2} \\
&= \frac{6+8i+15i+20i^2}{9+16} = \frac{6+23i-20}{25} \\
&= \frac{-14+23i}{25} = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i
\end{aligned}$$

Operaciones con Números Complejos IV

División

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{2^2+1^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$