Fundamentos Matematicos

Matematica Financiera
MAT 143 Sec 01

R.M

Escuela de Matemática,
Facultad de Ciencias,
UASD

2025

Tabla de Contenido

1. Exponentes
2. Radicación
3. Logaritmos
4. Resolución de Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

1 Exponentes

2 Radicación

3 Logaritmos

4 Resolución de Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Definición de Exponente

Definición

Sea a un número real y n un entero positivo. Definimos:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}.$$

Para $n = 0$, se define $a^0 = 1$ (para $a \neq 0$).

Propiedades de los Exponentes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Propiedades de los Exponentes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (con $a \neq 0$).

Propiedades de los Exponentes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (con $a \neq 0$).
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Propiedades de los Exponentes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (con $a \neq 0$).
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$

Propiedades de los Exponentes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (con $a \neq 0$).
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Propiedades de los Exponentes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (con $a \neq 0$).
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Propiedades de los Exponentes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (con $a \neq 0$).
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
7. $a^0 = 1$ (con $a \neq 0$).

Propiedades de los Exponentes

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (con $a \neq 0$).
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
7. $a^0 = 1$ (con $a \neq 0$).

Ejemplos Numéricos

Ejemplos Numéricos:

$$2^3 \cdot 2^4 =$$

Ejemplos Numéricos

Ejemplos Numéricos:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128.$$

$$\frac{3^5}{3^2} =$$

Ejemplos Numéricos

Ejemplos Numéricos:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128.$$

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27.$$

$$(5^2)^3 =$$

Ejemplos Numéricos

Ejemplos Numéricos:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128.$$

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27.$$

$$(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3} = 5^6 = 15625.$$

Ejemplos con Variables

Ejemplos con Variables:

$$x^m \cdot x^n =$$

Ejemplos con Variables

Ejemplos con Variables:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

$$\frac{y^3}{y^7} =$$

Ejemplos con Variables

Ejemplos con Variables:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

$$\frac{y^3}{y^7} = y^{-4} = \frac{1}{y^4}.$$

$$(z^2)^m = z^{2m}.$$

1 Exponentes

2 Radicación

3 Logaritmos

4 Resolución de Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Definición de Radicación

Definición

La *raíz n-ésima* de un número a (con $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) se denota:

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{y se define como el número } x \text{ tal que } x^n = a.$$

- $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.
- $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{1/n} = a^{m/n}$.

Propiedades de la Radicación

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$

Propiedades de la Radicación

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (con $b \neq 0$).

Propiedades de la Radicación

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (con $b \neq 0$).
3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Propiedades de la Radicación

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (con $b \neq 0$).
3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$.

Propiedades de la Radicación

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (con $b \neq 0$).
3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$.
5. $\sqrt[n]{a^n} =$

Propiedades de la Radicación

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (con $b \neq 0$).
3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = a^{\frac{1}{mn}}.$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ |a|, & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$

Ejemplos Numéricos y con Variables (Radicación)

Ejemplos Numéricos:

$$\sqrt{16} = 4,$$

Ejemplos Numéricos y con Variables (Radicación)

Ejemplos Numéricos:

$$\sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$\sqrt[4]{81} =$$

Ejemplos Numéricos y con Variables (Radicación)

Ejemplos Numéricos:

$$\sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad (\text{porque } 3^4 = 81).$$

$$\sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{49} = 7.$$

Ejemplos con Variables:

$$\sqrt[n]{x^3} = x^{3/n}.$$

$$\sqrt[m]{y^n} = y^{n/m}.\text{Exponente racional}$$

1 Exponentes

2 Radicación

3 Logaritmos

4 Resolución de Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Definición de Logaritmo

Definición

Dados un número real positivo $a \neq 1$ y un número real positivo b, se define

$$\log_a(b) = x \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = b.$$

Es decir, $\log_a(b)$ es el exponente al que hay que elevar a para obtener b.

Propiedades de los Logaritmos

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
3. $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$.
4. $\log_a(1) = 0$.
5. $\log_a(a) = 1$.

Ejemplos de Logaritmos

Ejemplos Numéricos:

$$\log_2(8) =$$

Ejemplos de Logaritmos

Ejemplos Numéricos:

$$\log_2(8) = 3 \quad (\text{porque } 2^3 = 8).$$

$$\log_{10}(1000) =$$

Ejemplos de Logaritmos

Ejemplos Numéricos:

$$\log_2(8) = 3 \quad (\text{porque } 2^3 = 8).$$

$$\log_{10}(1000) = 3, \quad \log_{10}(100) =$$

Ejemplos de Logaritmos

Ejemplos Numéricos:

$$\log_2(8) = 3 \quad (\text{porque } 2^3 = 8).$$

$$\log_{10}(1000) = 3, \quad \log_{10}(100) = 2.$$

$$\log_3(81) =$$

Ejemplos de Logaritmos

Ejemplos Numéricos:

$$\log_2(8) = 3 \quad (\text{porque } 2^3 = 8).$$

$$\log_{10}(1000) = 3, \quad \log_{10}(100) = 2.$$

$$\log_3(81) = 4 \quad (\text{porque } 3^4 = 81).$$

Ejemplos con Variables:

$$\log_a(x^3) = 3\log_a(x).$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

1. Exponentes
2. Radicación
3. Logaritmos
4. Resolución de Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Ecuaciones Exponenciales - Ejemplo 1

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$2^{x+1} = 16.$$

Ecuaciones Exponenciales - Ejemplo 1

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$2^{x+1} = 16.$$

Solución:

$$2^{x+1} = 16 = 2^4.$$

Entonces, si $2^{x+1} = 2^4$, se igualan los exponentes:

$$x + 1 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 3.$$

Ecuaciones Exponenciales - Ejemplo 2

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$3^{2x} = 81.$$

Solución:

$$81 = 3^4 \quad \Longrightarrow \quad 3^{2x} = 3^4.$$

Igualamos exponentes:

$$2x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Ecuaciones Logarítmicas - Ejemplo 1

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\log_2(x) = 3.$$

Ecuaciones Logarítmicas - Ejemplo 1

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\log_2(x) = 3.$$

Solución:

$$\log_2(x) = 3 \iff x = 2^3 = 8.$$

Ecuaciones Logarítmicas - Ejemplo 2

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\log_3(x+1) = 2.$$

Ecuaciones Logarítmicas - Ejemplo 2

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\log_3(x+1) = 2.$$

Solución:

$$\log_3(x+1) = 2 \iff x+1 = 3^2 = 9.$$

$$x+1 = 9 \implies x = 8.$$

Ecuaciones Logarítmicas con Suma de Logaritmos

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\log_{10}(x) + \log_{10}(x-3) = 2.$$

Ecuaciones Logarítmicas con Suma de Logaritmos

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$\log_{10}(x) + \log_{10}(x-3) = 2.$$

Solución:

$$\log_{10}(x) + \log_{10}(x-3) = \log_{10}\big(x(x-3)\big) = 2.$$

Entonces,

$$\log_{10}\big(x(x-3)\big) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x-3) = 10^2 = 100.$$

$$x^2 - 3x - 100 = 0.$$

Ecuaciones Logarítmicas con Suma de Logaritmos II

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 3x - 100 = 0.$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 400}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{409}}{2}.$$

Dado que $\log_{10}(x)$ y $\log_{10}(x-3)$ requieren $x > 0$ y $x - 3 > 0$, esto implica $x > 3$. Por ende:

$$x = \frac{3 + \sqrt{409}}{2} \quad \text{(solución válida)}.$$

La solución $\frac{3-\sqrt{409}}{2}$ es menor que 3 y no cumple $x - 3 > 0$, por lo que se descarta.