Unidad IV. Función Real Parte I

MATUASD

Matemáticas, UASD

2025

El Plano Cartesiano I

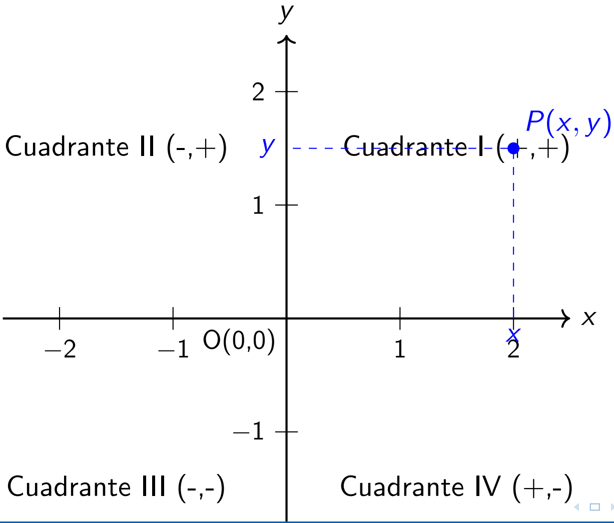
Definición

El **plano cartesiano** *es un sistema de referencia conformado por dos rectas numéricas perpendiculares, denominadas* **ejes coordenados**, *que se intersecan en un punto llamado* **origen**.

- *El eje horizontal se denomina* **eje de las abscisas** *o* **eje x**.
- *El eje vertical se denomina* **eje de las ordenadas** *o* **eje y**.

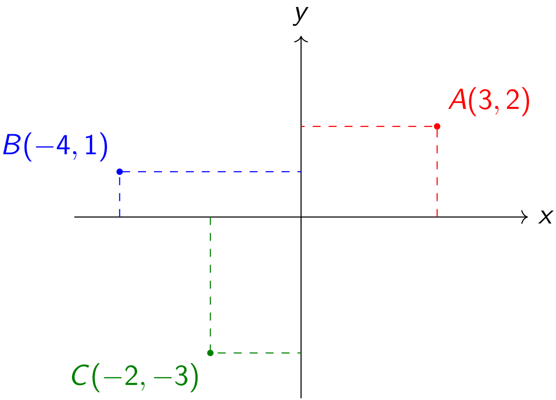
A cada punto P en el plano le corresponde un par ordenado de números reales (x, y), denominado **coordenadas** *del punto.*

El Plano Cartesiano II



Ejemplos: Ubicación de Coordenadas

Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano: $A(3, 2)$, $B(-4, 1)$, $C(-2, -3)$.



Distancia entre Dos Puntos

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *dos puntos en el plano cartesiano. La* **distancia** *entre* P_1 *y* P_2*, denotada por* $d(P_1, P_2)$*, se define como la longitud del segmento de recta que los une. Se calcula mediante la fórmula:*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distancia entre Dos Puntos

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano. La **distancia** *entre P_1 y P_2, denotada por $d(P_1, P_2)$, se define como la longitud del segmento de recta que los une. Se calcula mediante la fórmula:*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Propiedades

Sea d una función de distancia en $\mathbb{R}^2$. Para cualesquiera puntos $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$, se cumplen:

1. *No negatividad:* $d(P_1, P_2) \geq 0$.
2. *Identidad de los indiscernibles:* $d(P_1, P_2) = 0 \iff P_1 = P_2$.

Ejemplos: Cálculo de Distancia

Ejemplo

Hallar la distancia entre $A(2,3)$ *y* $B(5,7)$.

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2} \\
&= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5
\end{aligned}
$$

Ejemplos: Cálculo de Distancia

Ejemplo

Hallar la distancia entre $A(2,3)$ *y* $B(5,7)$.

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar la distancia entre $C(-1,4)$ *y* $D(3,-2)$.

$$\begin{aligned} d(C,D) &= \sqrt{(3-(-1))^2+(-2-4)^2} \\ &= \sqrt{4^2+(-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

Punto Medio

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los puntos extremos de un segmento de recta. Las coordenadas del **punto medio** *M del segmento son:*

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Punto Medio

Definición

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los puntos extremos de un segmento de recta. Las coordenadas del **punto medio** *M del segmento son:*

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplo

Hallar el punto medio del segmento con extremos $A(2, 5)$ y $B(8, 1)$.

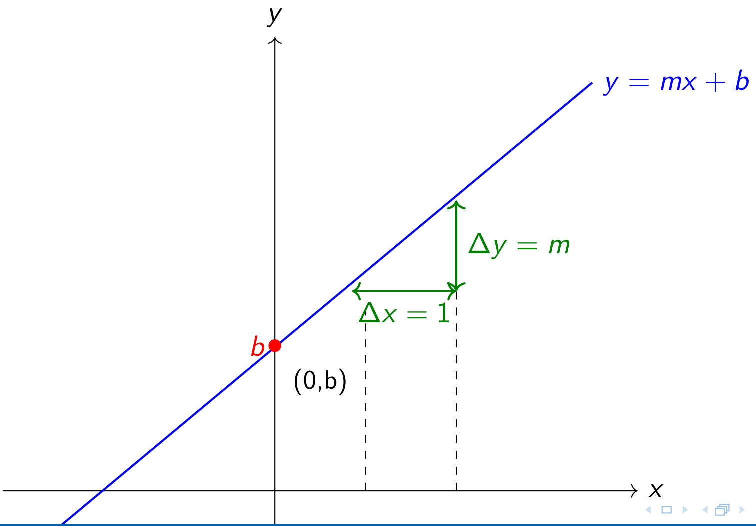
$$M_{AB} = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{5+1}{2} \right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{6}{2} \right) = (5, 3)$$

La Línea Recta I

Una recta en el plano cartesiano es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen una ecuación lineal de la forma $Ax + By + C = 0$.
Una forma común de representar una recta es la ecuación **pendiente-intersección**: $y = mx + b$.

- m: Es la **pendiente** de la recta, que mide su inclinación.
- b: Es la **ordenada en el origen** o **intersección con el eje y**, el punto donde la recta corta al eje vertical, i.e., el punto $(0, b)$.

La Línea Recta II



La Pendiente de una Recta I

Definición

La **pendiente** *m de una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es la razón del cambio en la ordenada (Δy) al cambio en la abscisa (Δx):*

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad con\ x_1 \neq x_2$$

Tipos de Pendientes:

- $m > 0$: Recta creciente (ascendente).
- $m < 0$: Recta decreciente (descendente).
- $m = 0$: Recta horizontal.
- m no definida: Recta vertical.

La Pendiente de una Recta II

Ejemplo

1. $P_1(1,2), P_2(3,6) \implies m = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2 > 0$
2. $P_1(-1,4), P_2(2,-2) \implies m = \frac{-2-4}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2 < 0$
3. $P_1(2,3), P_2(5,3) \implies m = \frac{3-3}{5-2} = \frac{0}{3} = 0$

Ecuaciones de la Recta

Ecuación Punto-Pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuaciones de la Recta

Ecuación Punto-Pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación Pendiente-Intersección

La ecuación de la recta con pendiente m y ordenada en el origen b es:

$$y = mx + b$$

Ecuaciones de la Recta

Ecuación Punto-Pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación Pendiente-Intersección

La ecuación de la recta con pendiente m y ordenada en el origen b es:

$$y = mx + b$$

Ecuación General

Toda ecuación de una recta se puede expresar en la forma general:

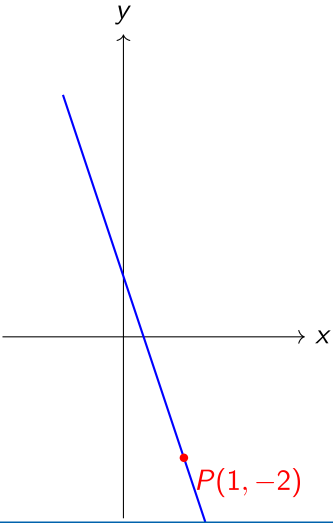
Ejemplos: Hallar la Ecuación de la Recta I

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta con pendiente $m = -3$ *que pasa por el punto* $P(1, -2)$. *Graficarla.*
Usando la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - (-2) &= -3(x - 1) \\ y + 2 &= -3x + 3 \\ y &= -3x + 1 \end{aligned}$$

Ejemplos: Hallar la Ecuación de la Recta II



Ejemplos: Hallar la Ecuación de la Recta (cont.) I

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,5)$ y $B(4,-1)$.

1. *Calculamos la pendiente:*

$$m = \frac{-1-5}{4-(-2)} = \frac{-6}{6} = -1$$

2. *Usamos la forma punto-pendiente con el punto A:*

$$\begin{aligned} y-5 &= -1(x-(-2)) \\ y-5 &= -x-2 \\ y &= -x+3 \end{aligned}$$

Ejemplos: Hallar la Ecuación de la Recta (cont.) II

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $C\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $D\left(2, -\frac{3}{4}\right)$.

1. *Calculamos la pendiente:*

$$m = \frac{-\frac{3}{4} - 1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{7}{4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6}$$

2. *Usamos la forma punto-pendiente con el punto C:*

$$y - 1 = -\frac{7}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

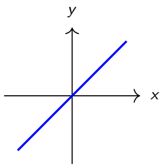
$$y - 1 = -\frac{7}{6}x + \frac{7}{12}$$

$$y = -\frac{7}{6}x + \frac{19}{12}$$

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

$$m > 0$$

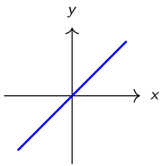


La recta es **creciente**. A medida que x aumenta, y también aumenta.

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

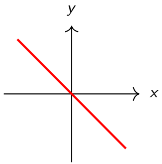
$m > 0$



La recta es **creciente**. A medida que x aumenta, y también aumenta.

Pendiente Negativa

$m < 0$

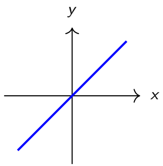


La recta es **decreciente**. A medida que x aumenta, y disminuye.

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

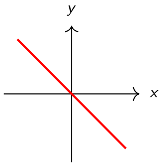
$m > 0$



La recta es **creciente**. A medida que x aumenta, y también aumenta.

Pendiente Negativa

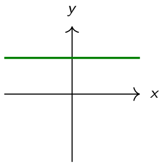
$m < 0$



La recta es **decreciente**. A medida que x aumenta, y disminuye.

Pendiente Cero

$m = 0$

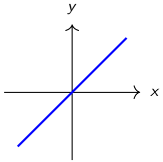


La recta es **horizontal**. El valor de y es constante para todo x.

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

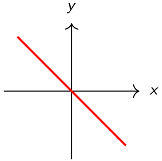
$m > 0$



La recta es **creciente**. A medida que x aumenta, y también aumenta.

Pendiente Negativa

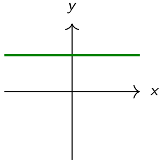
$m < 0$



La recta es **decreciente**. A medida que x aumenta, y disminuye.

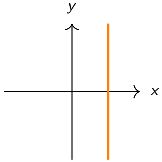
Pendiente Cero

$m = 0$



La recta es **horizontal**. El valor de y es constante para todo x.

Pendiente Indefinida

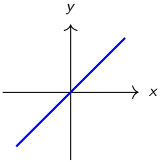


La recta es **vertical**. Corresponde a un $\Delta x = 0$, lo que resulta en una división por cero. Su ecuación es de la forma $x = k$, donde

Tipos de Rectas según su Pendiente

Pendiente Positiva

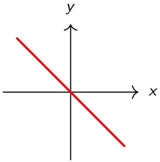
$m > 0$



La recta es **creciente**. A medida que x aumenta, y también aumenta.

Pendiente Negativa

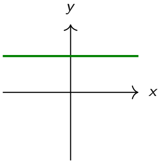
$m < 0$



La recta es **decreciente**. A medida que x aumenta, y disminuye.

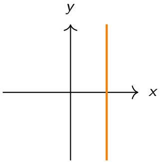
Pendiente Cero

$m = 0$



La recta es **horizontal**. El valor de y es constante para todo x.

Pendiente Indefinida



La recta es **vertical**. Corresponde a un $\Delta x = 0$, lo que resulta en una división por cero. Su ecuación es de la forma $x = k$, donde

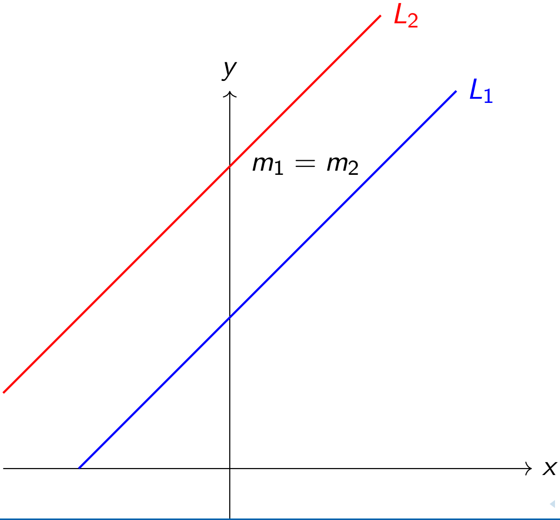
Rectas Paralelas I

Definición

Dos rectas no verticales L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, son **paralelas** *si y solo si sus pendientes son iguales.*

$$L_1 \parallel L_2 \iff m_1 = m_2$$

Rectas Paralelas II



Ejemplos de Rectas Paralelas

Ejemplo

Las rectas $y = 2x + 5$ *y* $y = 2x - 3$ *son paralelas, pues* $m_1 = m_2 = 2$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3, 2)$ *y es paralela a* $y = -4x + 1$. *La pendiente debe ser* $m = -4$.

$$\begin{aligned} y - 2 &= -4(x - 3) \\ y - 2 &= -4x + 12 \\ y &= -4x + 14 \end{aligned}$$

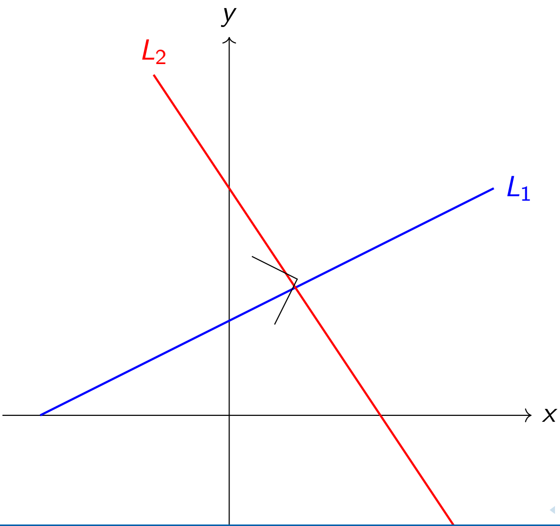
Rectas Perpendiculares I

Definición

Dos rectas no verticales L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, son **perpendiculares** *si y solo si el producto de sus pendientes es -1.*

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1 \quad (o\ m_2 = -\frac{1}{m_1})$$

Rectas Perpendiculares II



Ejemplos Rectas Perpendiculares

Ejemplo

Las rectas $y = \frac{1}{3}x + 2$ *y* $y = -3x - 1$

Ejemplos Rectas Perpendiculares

Ejemplo

Las rectas $y = \frac{1}{3}x + 2$ *y* $y = -3x - 1$ *son perpendiculares, ya que* $m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$.

Ejemplos Rectas Perpendiculares

Ejemplo

Las rectas $y = \frac{1}{3}x + 2$ *y* $y = -3x - 1$ *son perpendiculares, ya que* $m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 1)$ *y es perpendicular a* $y = 2x - 3$. *La pendiente de la recta dada es* $m_1 = 2$. *La pendiente de la recta perpendicular será* $m_2 = -\frac{1}{2}$.

Ejemplos Rectas Perpendiculares

Ejemplo

Las rectas $y = \frac{1}{3}x + 2$ *y* $y = -3x - 1$ *son perpendiculares, ya que* $m_1 \cdot m_2 = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-4, 1)$ *y es perpendicular a* $y = 2x - 3$. *La pendiente de la recta dada es* $m_1 = 2$. *La pendiente de la recta perpendicular será* $m_2 = -\frac{1}{2}$.

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - (-4))$$
$$y - 1 = -\frac{1}{2}x - 2; \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

Ejercicios

Asignados en el aula.