# Guía Estudio Funciones Varias Variables I

MATUASD

Cálculo II
Escuela de Matemática,
Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD)

2025

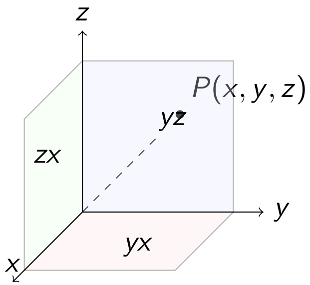
# Contenido

# Geometría en el Espacio

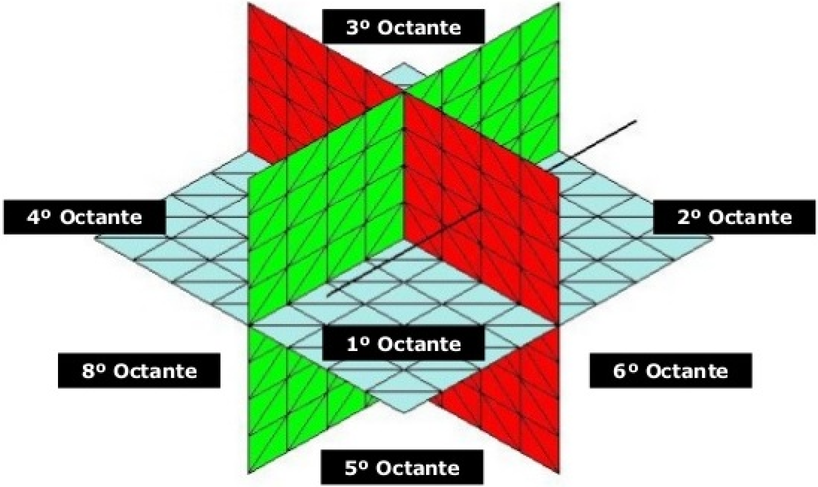
- El espacio tridimensional ($\mathbb{R}^3$) puede representarse mediante distintos sistemas de coordenadas.
- Sistemas principales:
  - Coordenadas rectangulares (cartesianas)
  - Coordenadas cilíndricas
  - Coordenadas esféricas
- El espacio $\mathbb{R}^3$ se divide en:
  - 8 octantes
  - 3 planos coordenados ($xy$, $xz$, $yz$) o, ($z = 0$, $y = 0$, $x = 0$)

# Coordenadas Rectangulares en el Espacio

- Sistema de referencia con tres ejes mutuamente perpendiculares: $x$, $y$ y $z$.
- Un punto $P$ en el espacio se representa como una terna ordenada $(x, y, z)$.
- Los planos coordenados dividen el espacio en 8 octantes.



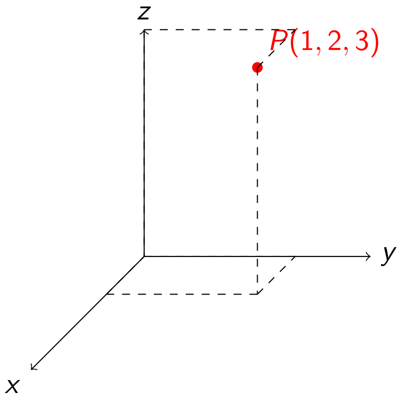
# Los Octantes del Espacio



## Ubicación de un Punto en el Espacio

Ejemplo: Punto $P(1, 2, 3)$

- Abscisa: $x = 1$
- Ordenada: $y = 2$
- Cota: $z = 3$



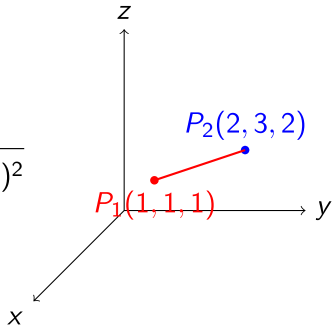
# Fórmula de la Distancia en el Espacio

Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos en $\mathbb{R}^3$, la distancia entre ellos es:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Propiedades de la métrica:

- $d(P_1, P_2) \geq 0$ (no negatividad)
- $d(P_1, P_2) = 0 \iff P_1 = P_2$ (identidad)
- $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ (simetría)
- $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ (desigualdad triangular)




Ejemplo:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (2-1)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

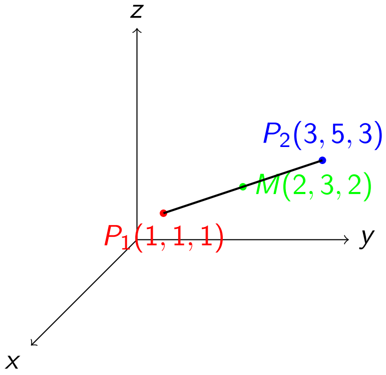
# Fórmula de Punto Medio

Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos en el espacio, el punto medio $M$ del segmento que los une es:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Ejemplo: Para $P_1(1,1,1)$ y $P_2(3,5,7)$, el punto medio es:

$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = M(2,3,4)$$



## Superficies en el Espacio

- Una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ representa una superficie en $\mathbb{R}^3$.
- Tipos comunes de superficies:
  - Planos
  - Esferas
  - Elipsoides
  - Paraboloides
  - Hiperboloides
  - Cilindros
  - Conos
- Superficies cuadráticas: ecuaciones de segundo grado en $x$, $y$ y $z$.

# Ecuación de un Plano

Un plano en el espacio se representa mediante la ecuación:

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $(a, b, c)$ es un vector normal al plano.

Ejemplo: $2x + 3y - z + 4 = 0$

El vector normal es $\vec{n} = (2, 3, -1)$

Si conocemos un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano, la ecuación también puede escribirse como:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

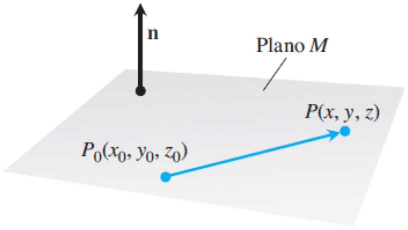



**Figura 1:** La ecuación estándar de un plano en el espacio está definida en términos de un vector normal al plano: un punto $P$ está en el plano que contiene a $P_0$ y es normal a $n$ si y sólo si $n \cdot \vec{PP_0} = 0$.

## Superficies Cuádricas

La ecuación de una superficie cuádrica en el espacio es una ecuación de segundo grado en tres variables. La forma general de la ecuación es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Hay seis tipos básicos de superficies cuádricas: elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, cono elíptico, paraboloide elíptico y paraboloide hiperbólico. A la intersección de una superficie con un plano se le llama traza de la superficie en el plano. Para visualizar una superficie en el espacio, es útil determinar sus trazas en algunos planos elegidos inteligentemente. Las trazas de las superficies cuádricas son cónicas.

# Ecuación General de una Esfera

Una esfera con centro $C(h,k,l)$ y radio $r$ tiene ecuación:

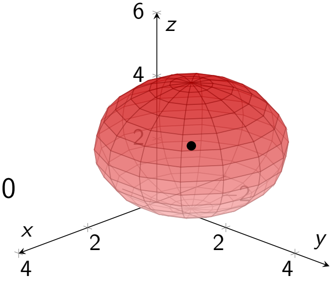
$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$$

La forma expandida es:

$$x^2+y^2+z^2-2hx-2ky-2lz+(h^2+k^2+l^2-r^2)=0$$

Ejemplo: esfera con centro en $(1,2,3)$ y radio 2

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$$



# Ejemplo de Elipsoide

Un elipsoide centrado en el origen tiene la ecuación:

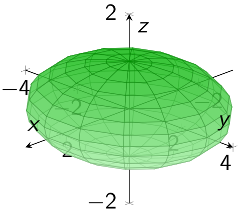
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde $a$, $b$ y $c$ son las longitudes de los semiejes.

Ejemplo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$$

con semiejes $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.



# Ejemplo de Paraboloide

Un paraboloide elíptico tiene la ecuación:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

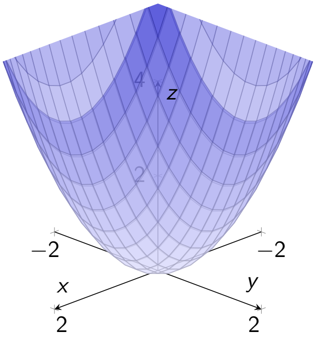
Ejemplo:

$$z = x^2 + y^2$$

Este es un paraboloide circular que abre hacia arriba con vértice en el origen.

Casos:

- $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (abre hacia arriba)
- $z = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ (abre hacia abajo)



## Ejemplo de Hiperboloide

Un hiperboloide de una hoja tiene la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

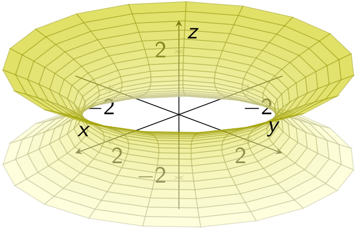
Un hiperboloide de dos hojas:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ejemplo (una hoja):

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$$

con $a = 2,\ b = 2,\ c = 1.$



# Cilindros I

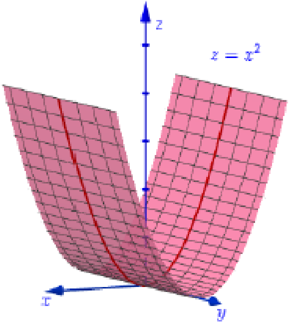
Un tipo de superficie en el espacio son las llamadas superficies cilíndricas, o simplemente cilindros.

## Definición

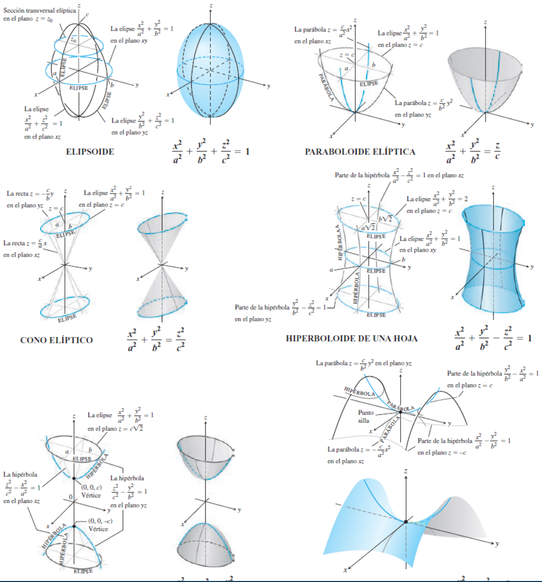
Sea $C$ una curva en un plano y sea $L$ una recta no paralela a ese plano. Al conjunto de todas las rectas paralelas a $L$ que cortan a $C$ se le llama **cilindro**. A $C$ se le llama **curva generadora** o **directriz** del cilindro y a las rectas paralelas se les llama **rectas generatrices**.

# Cilindros II

Graficar la superficie cilíndrica $z = x^2$.
Se tiene que la curva plana es una parábola en el plano $xz$. Sea $L$ una recta paralela el eje $y$, todas las rectas paralelas a $L$ que cortan a la curva plana forman la superficie cilíndrica.



# Resumen de Superficies



# Ejemplos en Geogebra

Ver en geogebra 3D.

# Definición de Función de Varias Variables I

## Definición

*Una función $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una regla que asocia a cada n-ada ordenada de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $I$, o bien, a cada vector $\mathbf{x}$ de $I$, un número real bien determinado $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El conjunto $I$ es el dominio de la función $f$, su codominio es $\mathbb{R}$ y el rango de $f$ es el conjunto de $z \in \mathbb{R}$ para las cuales existe $x \in I$ tal que $z = f(x)$, es decir*

$$\text{rango de } f = \{z \in \mathbb{R} \mid z = f(x),\ x \in I\}$$

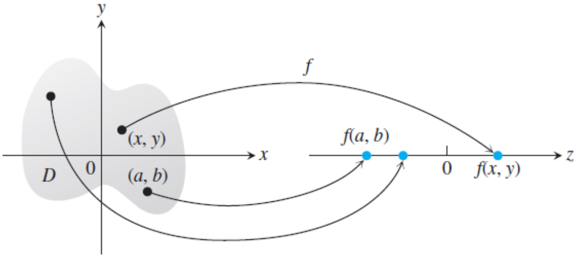
Para una función $f(x, y)$ de dos variables:

- Dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.
- La gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$.

# Funciones de Dos Variables I

## Definición

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asigna a cada punto $(x, y)$ en su dominio un único valor real $z = f(x, y)$.




Para encontrar el dominio natural:

1. Identificar los valores de $(x, y)$ donde la función está definida.
2. Excluir puntos donde:
   - Hay divisiones por cero.
   - Raíces cuadradas de números negativos.
   - Logaritmos de números negativos o cero.

Para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$:

## Funciones de Dos Variables II

- Dominio: todo $\mathbb{R}^2$.
- Rango: $[0, \infty)$.

## Ejemplo de Dominio de una Función

Encontrar el dominio y rango de:

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Solución:

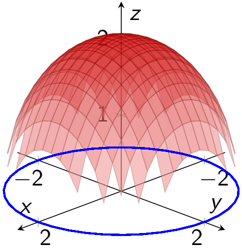
- Para que la función esté definida, necesitamos:

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

- Reordenando:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

- El dominio es un disco cerrado con centro en el origen y radio 2.
- El rango es $[0, 2]$.



# Definición de Límite en Dos Variables I

## Definición

Sea $f(x, y)$ una función definida en una región que contiene al punto $(a, b)$, excepto posiblemente en $(a, b)$. Decimos que el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y)$ tiende a $(a, b)$ es $L$, y escribimos:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Intuitivamente: podemos hacer que $f(x, y)$ esté tan cerca como queramos de $L$ tomando $(x, y)$ suficientemente cerca de $(a, b)$.

# Definición de Límite en Dos Variables II

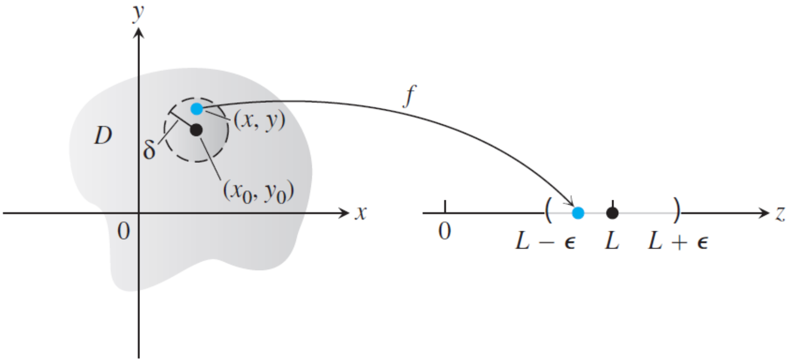



**Figura 2:** En la definición de límite, $\delta$ es el radio de un disco con centro en $(x_0, y_0)$. Para todos los puntos $(x, y)$ dentro de este disco, los valores de la función $f(x, y)$ se encuentran dentro del intervalo correspondiente $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

# Definición de Polinomio de Dos Variables

## Definición

Un polinomio de dos variables $P(x, y)$ es una expresión de la forma:

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$$

donde $a_{ij}$ son constantes reales y $m, n$ son enteros no negativos.

Ejemplos:

- $P(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$
- $Q(x, y) = x^3 - 3xy + 2$

# Ejemplo de Límite usando Definición $\varepsilon$-$\delta$ I

Demostrar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2x + 3y) = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned} |f(x,y) - L| &= |(2x + 3y) - 0| \\ &= |2x + 3y| \end{aligned}$$

Usando la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} |2x + 3y| &\leq |2x| + |3y| \\ &= 2|x| + 3|y| \end{aligned}$$

Si $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces $|x| < \delta$ y $|y| < \delta$.

# Ejemplo de Límite usando Definición $\varepsilon$-$\delta$ II

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |2x + 3y| &\leq 2|x| + 3|y| \\ &< 2\delta + 3\delta \\ &= 5\delta \end{aligned}$$

Si queremos que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

# Otro ejemplo I

Estudiemos el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

---

Si nos acercamos al origen por una recta del tipo $y = kx$ obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2\cdot kx}{x^2+k^2x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{3k}{1+k^2}x = 0$$

Esto no prueba en absoluto que el valor del límite sea cero. Lo que nos dice es que si tal límite existe, éste debe ser cero. Un argumento que concluye que el límite de hecho existe y vale cero, requiere la aplicación directa de la definición. Según

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{3x^2y}{x^2}\right| = 3|y|$$

## Otro ejemplo II

vemos que

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq 3|y| < 3\delta$$

Es decir, con $\delta = \epsilon/3$ nos queda

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

## Usando Coordenadas Polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}.$$

Decir que $(x, y) \to (0, 0)$ equivale a decir que (en coordenadas polares) $r \to 0$ (independientemente del valor de $\theta$ ). Expresando la función $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ en coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ obtenemos la función

$$g(r, \theta) = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} r = 3r\cos^2\theta\sin\theta$$

Obsérvese que ésta es el producto de la función $\varphi(\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta$ (que está acotada) por la función $\psi(r) = r$ (que tiende a cero cuando $r \to 0$). Podemos concluir entonces que

$$\lim_{r\to 0} g(r, \theta) = 0$$

# Definición de Derivadas Parciales I

## Definición

Sea $I$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene el punto $x$ y sea $i$ un índice con $1 \leq i \leq n$. Una función $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Se dice que tiene derivada parcial respecto a su $i$-ésima componente en el punto $x$ siempre que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\mathbf{e}_i) - f(x)}{t}$$

donde $\mathbf{e}_i$ es el vector cuya $i$-ésima componente es 1 y cuyas otras componentes son 0, existe. Si este límite existe, denotamos su valor por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ y lo llamamos derivada parcial de $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con respecto a la $i$-ésima componente en el punto $x$.

# Definición de Derivadas Parciales II

## Definición derivada parcial con respecto a $x$

La derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a $x$ en el punto $(x_0, y_0)$ es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si el límite existe.

## Definición derivada parcial con respecto a $y$

La derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a $y$ en el punto $(x_0, y_0)$ es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si el límite existe.

## Idea intuitiva

- La derivada parcial de una función respecto a una variable es la derivada de la función tratando las otras variables como constantes.
- Notación: $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la derivada parcial de $f$ respecto a $x$.

Ejemplo: Si $f(x, y) = x^2y + y^3$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

# Ejemplos

Obtenga $f_x$ y $f_y$ como funciones si

$$f(x,y) = \frac{2y}{y+\cos x}.$$

Tratamos a $f$ como un cociente. Manteniendo a $y$ constante, tenemos

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right) = \frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2} \\ &= \frac{(y+\cos x)(0) - 2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2} = \frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}. \end{aligned}$$

Si mantenemos a $x$ constante, tenemos

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right) = \frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial y}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2} \\ &= \frac{(y+\cos x)(2) - 2y(1)}{(y+\cos x)^2} = \frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}. \end{aligned}$$

# Derivadas de Segundo Orden y Derivadas Cruzadas I

Al derivar dos veces una función $f(x, y)$, generamos sus derivadas de segundo orden. Estas derivadas se representan por lo regular como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ o } f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ o } f_{yy},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ o } f_{yx}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ o } f_{xy}.$$

## Derivadas de Segundo Orden y Derivadas Cruzadas II

Ejemplo:

$$f(x, y) = x^2y + y^3$$

Las derivadas de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

# Derivada Cruzada o Mixta

## Teorema de la derivada mixta

Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales $f_x$, $f_y$, $f_{xy}$ y $f_{yx}$ están definidas en una región abierta que contiene a un punto $(a, b)$, y todas son continuas en $(a, b)$, entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 3y^2) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy) = 6x$$

Ambas derivadas cruzadas son iguales.

## Bibliografía I

[1] Thomas, G.B., Weir, M.D., Hass, J. *Cálculo de Varias Variables*. 12va Edición, Pearson.

[2] Stewart, J. *Cálculo de Varias Variables*. Cengage Learning, 8va Edición.

[3] Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. *Cálculo Multivariable*. McGraw-Hill, 8va Edición.

[4] Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. *Cálculo Multivariable*. Wiley, 10ma Edición.

[5] Marsden, J., & Tromba, A. *Cálculo Vectorial*. Addison Wesley, 5ta Edición.

[6] Leithold, L. *El Cálculo con Geometría Analítica*. Oxford University Press, 7ma Edición.