Guía Estudio Funciones Varias Variables II

MATUASD

Cálculo II
Escuela de Matemática,
Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD)

2025

Contenido

1. Regla de la Cadena en Varias Variables
2. Derivada Direccional y Vector Tangente
3. Plano Tangente
4. Bibliografía

1. **Regla de la Cadena en Varias Variables**
2. Derivada Direccional y Vector Tangente
3. Plano Tangente
4. Bibliografía

Regla de la Cadena I

Teorema

Si $w = f(x, y)$ es derivable y si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son funciones derivables de t, entonces la composición $w = f(x(t), y(t))$ es una función derivable de t y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Teorema

Si $w = f(x, y, z)$ es derivable, y x, y y z son funciones derivables de t, entonces w es una función derivable de t y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Regla de la Cadena II

Teorema

Suponga que $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ y $z = k(r, s)$. Si las cuatro funciones son derivables, entonces w tiene derivadas parciales con respecto a r y s, dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}. \tag{2}$$

Diagramas Neuronales

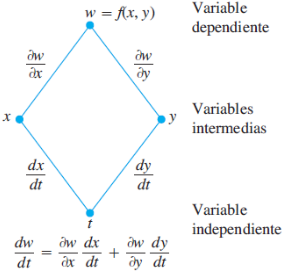

Figura 1: Calculo Thomas 12ma Edición.

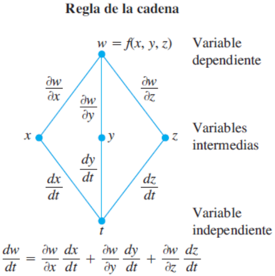

Figura 2: Calculo Thomas 12ma Edición.

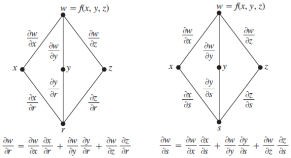

Figura 3: Calculo Thomas 12ma Edición.

Ejemplo

Suponga que $z = x^3 y$, donde $x = 2t$ y $y = t^2$. Determine dz/dt. **SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (3x^2 y)(2) + (x^3)(2t) \\ &= 6(2t)^2(t^2) + 2(2t)^3(t) \\ &= 40t^4\end{aligned}$$

Derivación Implícita

Teorema

Suponga que $F(x, y)$ es derivable y que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función derivable de x. Entonces en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

EJEMPLO Determine dy/dx si $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$

Sea $F(x, y) = x^3 + x^2y - 10y^4$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 40y^3}$$

1. Regla de la Cadena en Varias Variables
2. **Derivada Direccional y Vector Tangente**
3. Plano Tangente
4. Bibliografía

Derivada Direccional y Vector Gradiente

Definiciones

Derivada Direccional La *derivada de f en $P_0(x_0, y_0)$ en la dirección del vector unitario* $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ es el número

$$(D_u f)_{P_0} = \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

Vector Gradiente de $f(x, y)$ en un punto $P(x_0, y_0)$ es el vector

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

que se obtiene al calcular las derivadas parciales de f en el punto P_0.

Cont.

Teorema

La derivada direccional se obtiene mediante producto punto

Si $f(x,y)$ es derivable en una región abierta que contiene a $P(x_0,y_0)$, entonces

$$(D_u f)_{P_0} = \left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}, \tag{3}$$

es el producto punto del gradiente ∇f en P_0 con $\mathbf{u}$[a].

[a] Es un vector unitario

Ejemplos

Si $f(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$, determine la derivada direccional de f en $(2,-1)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

El vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{a}$ es $\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{j}$. Además $f_x(x,y) = 8x - y$ y $f_y(x,y) = -x + 6y$; así, $f_x(2,-1) = 17$ y $f_y(2,-1) = -8$. Entonces, el gradiente es $(\nabla f)_{P_0} = \langle 17, -8 \rangle$

En consecuencia, por el teorema anterior,

$$(\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}} f(2,-1) = \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle \cdot \langle 17, -8 \rangle = \frac{4}{5}(17) + \frac{3}{5}(-8) = \frac{44}{5}$$

1. Regla de la Cadena en Varias Variables
2. Derivada Direccional y Vector Tangente
3. **Plano Tangente**
4. Bibliografía

Plano Tangente

Definición

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ **en** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

El plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ de una función derivable f en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Ejemplo Plano Tangente

Demuestre que $f(x, y) = xe^y + x^2y$ es diferenciable en todas partes y calcule su gradiente. Luego determine la ecuación del plano tangente en $(2, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2$$

Ambas funciones son continuas en todas partes, por lo que f es diferenciable en todas partes. El gradiente es

$$\nabla f(x, y) = (e^y + 2xy)\mathbf{i} + (xe^y + x^2)\mathbf{j} = \langle e^y + 2xy, xe^y + x^2 \rangle$$

Así,

$$\nabla f(2, 0) = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} = \langle 1, 6 \rangle$$

y la ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} z &= f(2, 0) + \nabla f(2, 0) \cdot \langle x - 2, y \rangle \\ &= 2 + \langle 1, 6 \rangle \cdot \langle x - 2, y \rangle \\ &= 2 + (x - 2) + 6y = x + 6y \end{aligned}$$

Ver Geogebra

1. Regla de la Cadena en Varias Variables
2. Derivada Direccional y Vector Tangente
3. Plano Tangente
4. **Bibliografía**

Bibliografía

[1] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, *Cálculo de Thomas*, Pearson, 13ma edición, 2018.

[2] James Stewart, *Cálculo de varias variables*, Cengage Learning, 7ma edición, 2013.

[3] Ron Larson, Bruce Edwards, *Cálculo, Volumen 2*, McGraw-Hill, 10ma edición, 2014.

[4] Howard Anton, Irl C. Bivens, Stephen Davis, *Cálculo Multivariable*, Wiley, 10ma edición, 2013.

[5] Susan J. Colley, *Vector Calculus*, Pearson, 4ta edición, 2011.