

因果熵力

A. D. Wissner-Gross^{1,2,*}和C. E. Freer^{3,†}

1

哈佛大学应用计算科学研究所, 美国马萨诸塞州剑桥02138²麻省理工学院媒体实验室, 美国马萨诸塞州剑桥02139

3

美国夏威夷大学马诺阿分校数学系, 檀香山, 夏威夷96822, USA (收稿日期: 2012年5月24日; 2013年2月26日收稿; 2013年4月19日发布)

从宇宙学到计算机科学等领域的最新进展暗示了智能和熵最大化之间可能存在的深层联系, 但它们之间尚未建立正式的物理关系。在这里, 我们以熵力的因果概括的形式明确提出了迈向这种关系的第一步, 我们发现这可以导致人类“认知利基”的两种定义行为-工具使用和社会合作-自发地出现在简单的物理系统中。我们的研究表明, 作为开放系统中的非平衡过程, 适应性行为的一个潜在的通用热力学模型。

DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.168702](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.168702) PACS编号: 05.65.+b, 05.70., 07.05. Mh, 45.80.+r

从宇宙学到计算机科学等领域的最新进展暗示了智能和熵最大化之间可能存在的深层联系。在宇宙学中, 人类选择的因果熵原理在宇宙学参数预测中使用因果连接的时空区域中熵产生的最大化作为智能观察者集中的热力学代理[1]。在地球科学中, 熵产最大化已被提出作为行星发展和生命出现背后的非平衡过程的统一原则[2-4]。在计算机科学中, 最大熵方法已被用于在具有动态揭示信息的情况下进行推理[5], 策略算法甚至通过最大化可访问的未来游戏状态, 在历史上具有挑战性的高前瞻性深度和分支因素游戏(如围棋)中首次开始击败人类对手[6]。然而, 尽管有这些见解, 智能和熵最大化之间还没有建立正式的物理关系。在这封信中, 我们明确提出了迈向这种关系的第一步, 其形式是熵力的因果概括, 我们表明, 熵力可以在简单的物理系统中自发地诱发与人类“认知利基”相关的非常复杂的行为, 包括工具使用和社会合作。我们的研究表明, 作为开放系统中的非平衡过程, 适应性行为的潜在通用热力学模型。

非平衡物理系统对最大瞬时熵产生的偏向[3]反映在其向高熵宏观状态的演化中[7], 这一过程以熵力的形式化为特征[8]。在正则系综中, 与宏观状态划分相关的熵力 $F(x)$ 由

$$F(x_0) = T \nabla_x S(x)|_{x_0}, \quad (1)$$

其中 T 为储层温度, $S(x)$ 为与宏观状态 x 相关的熵, x_0 为当前宏观状态。

受最近发展[1-6]的启发, 自然地概括这种偏差, 使它们在当前和未来的时间范围内均匀地最大化熵的产生, 而不仅仅是贪婪地最大化瞬时熵的产生, 我们还可以考虑通过构型空间的路径上的广义熵力, 而不仅仅是在构型空间本身。特别是, 我们可以通过配置空间将微观状态从瞬时配置提升到固定持续时间的路径, 同时仍然根据每条路径的初始坐标将这些微观状态划分为宏观状态。更正式地说, 对于任何开放热力学系统, 我们可以将系统 $x(t)$ 在时间间隔 0 到 t 内所采取的相空间路径视为微观状态, 并根据等效关系 $x(t) \sim x(0)$ iff $x(t) \sim x(0)$ 将其划分为宏观状态 $f(x)$, 从而将每个宏观状态 x 标识为具有唯一存在的状态

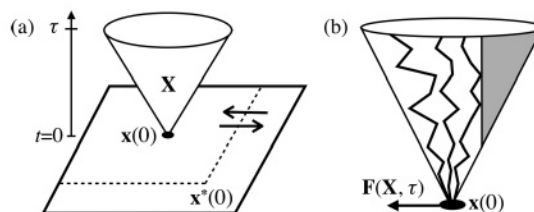


图1所示。因果熵力的示意图。(a)在具有初始环境状态 $x(0)$ 的开放热力学系统中, 具有视界时间的因果宏观状态 x , 由共享共同初始系统状态 $x(0)$ 的路径微观状态 $x(t)$ 组成。(b)属于因果宏观状态 x 的路径微观状态, 其中(为了说明目的)存在环境强加的排除路径空间体积, 该体积打破了平移对称性, 导致因果熵力 F 指向被排除的体积。

系统状态 $x(0)$, 如图1(a)所示。然后, 我们可以将宏观状态 X 的因果路径熵 S_c 与相关的当前系统状态 $x(t)$ 定义为路径积分

$$S_c(\mathbf{X}, \tau) = -k_B \int_{\mathbf{x}(t)} \Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0)) \ln \Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0)) \mathcal{D}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

式中, $\Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0))$ 表示系统在假设系统初始状态 $x(0)$ 的情况下, 通过路径 $x(t)$ 进化的条件概率, 对开放系统环境在同一区间内所采取的所有可能路径 $x(t)$ 进行积分:

$$\Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0)) = \int_{\mathbf{x}^*(t)} \Pr(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^*(t)|\mathbf{x}(0)) \mathcal{D}\mathbf{x}^*(t). \quad (3)$$

我们提出的因果路径熵测度(2)可以被看作是路径信息熵的一种特殊形式——一种更一般的测度, 最初是在稳态和涨落定理[9]的背景下提出的——其中宏观状态变量被限制在路径微观状态的初始状态(因此, 每个路径微观状态都可以被看作是它所属的宏观状态的“因果”结果)。相比之下, 根据定义, 路径信息熵不施加这种因果宏观状态限制, 并允许暂时离域的宏观状态变量, 如路径上的时间平均量[10]。通过将宏观状态变量限制在微观自由度的当前($t/4$)状态, 可以始终定义一个因果熵梯度力, 该力可以被视为直接作用于这些自由度的真实微观力, 并且可以规定系统状态空间中定义良好的流。同样, 与之相反, 路径信息熵的梯度只能一般地被解释为描述系统宏观动力学的现象学力。最近有人注意到, 路径信息熵的一般限制是作为宏观描述, 而不是微观物理处方来描述动力学[11]。

对应于(2)的基于路径的因果熵力 F , 如图1(b)所示, 可以表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \tau) = T_c \nabla_{\mathbf{X}} S_c(\mathbf{X}, \tau)|_{\mathbf{X}_0}, \quad (4)$$

其中 T_c 是一个因果路径温度, 它参数化了系统对使因果熵最大化的宏观状态的偏差。或者, T_c 可以被解释为参数化所有可能的固定持续时间路径的假设动态集合中路径相互转换的速率, 类似于负责其熵弹性的理想链的配置微观状态之间的转换。请注意, 力(4)完全由两个自由参数 T_c 和 τ 决定, 并在三个简并极限中消失, (i)在具有平动对称

动力学的系统中, (ii)为 0 , 以及(iii)如果系统及其环境是确定性的。

为了具体起见, 我们现在将探讨选择性地因因果熵强迫应用于经典机械系统的一个或多个自由度的位置的效果。在无界经典相空间中使用有界允许区域来打破平移对称, 我们将通过位置-动量相空间表示系统路径为 $x(t) \sim \delta q(t)$; $\delta p(t)$ 用 $f_j g$ 表示强制自由度, 有效质量 m_j 。作为引入不确定性的一种简单方法, 让我们选择环境 $x(t)$ 作为温度 T_r 下的热储存库, 它仅与系统的强制自由度相耦合, 并且它周期性地随时间尺度通过非线性朗之万动力学与时间离散的加性热噪声和摩擦项重新热化这些自由度。具体地说, 让我们假设强制自由度上的总能量为 $g_j \delta x(t)$; t 以的形式, 在这里, 收集任何确定性的依赖于状态的内部系统力, 并且 \angle 是一个随机高斯力, 其平均值是 0 , 相关函数是 $\langle f_j(t) f_j(t') \rangle = \delta(t-t') \frac{1}{4} m_j k_B T_r$; $j=0, 1, 2, 3$ 。 $b=c$; $b t=0$; $c=2$ 。

在这些假设下, 宏观状态 X_0 的因果熵力(4)的分量与相关的初始系统状态 $\delta q(0)$; $\delta p(0)$ 可表示为

$$F_j(\mathbf{X}_0, \tau) = T_c \left. \frac{\partial S_c(\mathbf{X}, \tau)}{\partial q_j(0)} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}, \quad (5)$$

对于强制自由度的位置。由于运行outside, 允许相空间区域的路径概率为零, $\Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0)) = 0$ if $q_j(t) \neq q_j(0)$, 因此将(5)的偏导数带入(2)的路径积分中产生

$$F_j(\mathbf{X}_0, \tau) = -k_B T_c \int_{\mathbf{x}(t)} \frac{\partial \Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0))}{\partial q_j(0)} \times \ln \Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0)) \mathcal{D}\mathbf{x}(t). \quad (6)$$

由于系统在每个周期 $1/2n$ 内是确定性的; $n \in \mathbb{N}$, 我们可以将任意非零条件路径概率 $\Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0))$ 表示为一阶马尔可夫链

$$\Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0)) = \left(\prod_{n=1}^{N-1} \Pr(\mathbf{x}(t_{n+1})|\mathbf{x}(t_n)) \right) \Pr(\mathbf{x}(\epsilon)|\mathbf{x}(0)), \quad (7)$$

其中 t_n 和 n , 因此

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0))}{\partial q_j(0)} \\ &= \left(\prod_{n=1}^{N-1} \Pr(\mathbf{x}(t_{n+1})|\mathbf{x}(t_n)) \right) \frac{\partial \Pr(\mathbf{x}(\epsilon)|\mathbf{x}(0))}{\partial q_j(0)}. \end{aligned} \quad (8)$$

选择要远远高于当地位置相关 $f_j(0)$ 的动量-位置分布 $\Pr(\mathbf{x}(0)|\mathbf{x}(0))$ 内部系统力量的变化,位置 $q_j(0)$ 由

$$q_j(\epsilon) = q_j(0) + \frac{p_j(0)}{2m_j} \epsilon + \frac{f_j(0) + h_j(0)}{2m_j} \epsilon^2. \quad (9)$$

从(9)中得出, $\Pr(\mathbf{x}(0)|\mathbf{x}(0))$ 的分布是高斯的, 并且由于 $\Pr(\mathbf{x}(0)|\mathbf{x}(0))$ 的分布是高斯的, 因此我们可以写

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pr(\mathbf{x}(\epsilon)|\mathbf{x}(0))}{\partial q_j(0)} &= - \frac{\partial \Pr(\mathbf{x}(\epsilon)|\mathbf{x}(0))}{\partial q_j(\epsilon)} \\ &= \frac{2f_j(0)}{k_B T_r} \Pr(\mathbf{x}(\epsilon)|\mathbf{x}(0)). \end{aligned} \quad (10)$$

最后, 把(10)代入(8), 把(8)代入(6), 我们发现

$$F_j(\mathbf{X}_0, \tau) = - \frac{2T_c}{T_r} \int_{\mathbf{x}(0)} f_j(0) \times \Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0)) \ln \Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0)) \mathcal{D}\mathbf{x}(t). \quad (11)$$

从质量上说, (11)的影响可以被看作是驱动强制自由度(j)的温度依赖强度($T_c=T_r$)在短期方向上的平均值 $[f_j(0)]$ 上, 通过长期路径的多样性 $\Pr(\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(0))$ 加权, 它们可以达到, 其中路径多样性是在系统的所有自由度上测量的, 而不仅仅是强制自由度。

为了更好地理解这种经典热形式(11)的因果熵强迫, 我们模拟了它对各种简单机械系统的因果宏观状态演化的影响[12,13]:(i)盒子中的粒子, (ii)手推车和电杆系统, (iii)工具使用难题, (iv)社会合作难题。选择前两种系统是为了说明问题。选择后两个系统是因为它们隔离了与人类“认知利基”相关的主要行为能力[14]。被广泛引用的认知生态位理论提出, 人类相对于其他动物高度发达的“认知”适应性行为特征的独特组合, 是为了在比自然进化更快的时间尺度上促进竞争性适应而进化的[15]。

作为应用于机械系统的因果熵强迫的第一个例子, 我们考虑了二维盒子中的一个粒子[13]。我们发现, 对粒子的两个动量自由度施加作用力会将粒子推向盒子的中心, 如图2(a)和补充材料[13]中的影片1所示。启发式地, 作为距离边界最远的整体位置, 中心位置最大化了内部布朗运动可达到的因果路径的多样性

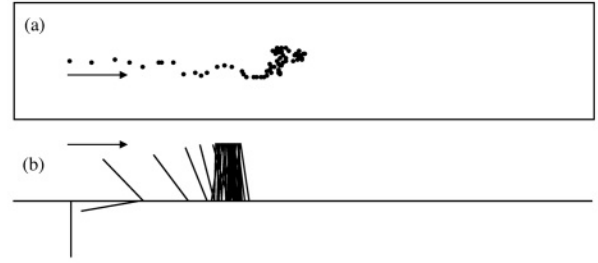


图2所示。因果熵强迫的说明性例子。(a)盒子中的粒子被强迫向盒子的中心移动。(b)小车和杆子系统, 其中只有小车被强迫成功地向上摆动并稳定最初向下悬挂的杆子。(参见补充材料, 电影1和电影2[13]。)

这个盒子。相反, 如果粒子只是从给定的初始状态扩散, 虽然它的期望位置会向盒子的中心放松, 但它的最大似然位置将保持静止。

作为第二个例子, 我们考虑了一个推车和杆子(或倒立摆)系统[13]。移动推车对杆子的直立稳定是两足运动的标准模型[16,17], 这是原始人与类人猿进化分化的一个重要特征[15], 这可能是腾出可握握的手来使用工具的原因[14]。我们发现, 手推车的因果熵力导致了最初向下悬挂的杆的成功摆动和直立稳定, 如图2(b)和补充材料[13]中的影片2所示。在垂直稳定过程中, 极点的角度变化让人联想到在人类姿势摇摆中观察到的相关随机行走[18]。启发式地, 再一次, 摆动和稳定杆使其更有利于小车随后将杆摆动到任何其他角度, 因此, 最大限度地提高了因果可达路径的多样性。同样, 虽然允许杆子不规则地绕圈而不是保持直立可能会使不同的杆子角度产生因果可达性, 但由于其方向偏差, 它会限制因果可达的杆子角动量的多样性。这一结果超越了之前的证据, 即瞬时噪声可以帮助稳定倒立钟摆[19,20], 有效地展示了潜在的未来噪声如何不仅可以稳定倒立钟摆, 还可以将倒立钟摆从向下悬挂的位置摆动起来。

作为第三个例子, 我们考虑了一个工具使用谜题[13], 该谜题基于先前的实验, 旨在隔离黑猩猩[21]和乌鸦[22]等非人类动物的工具使用能力, 其中无生命的物体被用作工具, 以操纵无法直接进入的密闭空间中的其他物体。我们将动物建模为经历因果熵强迫的磁盘(磁盘I), 将潜在工具建模为在因太窄而无法进入的管外的较小磁盘(磁盘II), 将感兴趣的对象建模为位于管内的第二个较小磁盘(磁盘III), 如图3(a)所示。

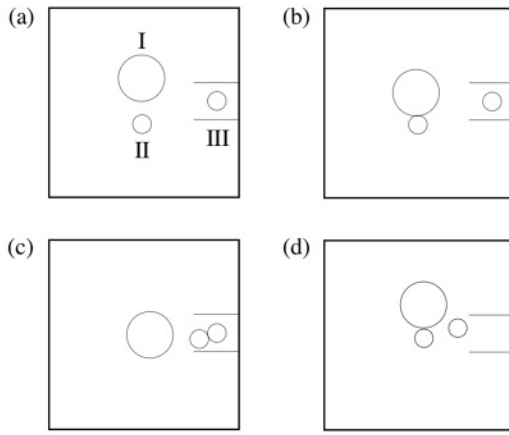


图3所示。因果熵强迫对工具使用难题的影响。(a)磁盘I太大,无法装入包含磁盘III的管中,而磁盘II则足够小。(b)磁盘I与磁盘II相撞。(c)磁盘II进入管中并与磁盘III碰撞。(d)磁盘III已成功地从其最初在管内的固定位置释放出来,现在可以由磁盘I直接操作(另见补充材料,电影3[13])。

补充材料[13]中的电影3。我们发现,磁盘I自发地与磁盘II碰撞[图3(b)],从而导致磁盘II随后与管内的磁盘III碰撞[图3(c)],成功地将磁盘III从其最初固定的位置释放出来,并使其自由度可以直接操作,甚至可以被磁盘I“播放”[图3(d)]。

作为第四个例子,我们考虑了一个社会合作谜题[13],该谜题基于先前的实验,旨在分离黑猩猩[23]、白头鸦[24]和大象[25]等非人类动物的社会合作能力,其中一对动物合作,同步拉动绳子或绳子的两端,以便从不可接近的区域取回物体。我们将一对动物建模为两个磁盘(磁盘I和磁盘II),它们经历独立的因果熵强迫并居住在不同的隔间中,它们最初与一对由一根弦连接的轻型“手柄”磁盘共享,如图4(a)和补充材料[13]中的电影4所示。这根弦缠绕在一根可以自由垂直移动的水平线上,并支撑着一个目标物体(磁盘III),目标物体可以在其上水平移动,最初磁盘I和II无法进入。磁盘质量和阻力的选择使得同步拉绳子两端导致磁盘III上的向下力比异步或单面拉大得多。此外,磁盘I和II的初始位置是不对称设置的,因此需要协调手柄磁盘向下推的开始时间,以使字符串不会从磁盘I或II中被拉离。我们发现,磁盘I和II的独立因果熵力使它们首先自发地对齐位置,并在弦的两个手柄上串联向下推,如图4(b)所示。

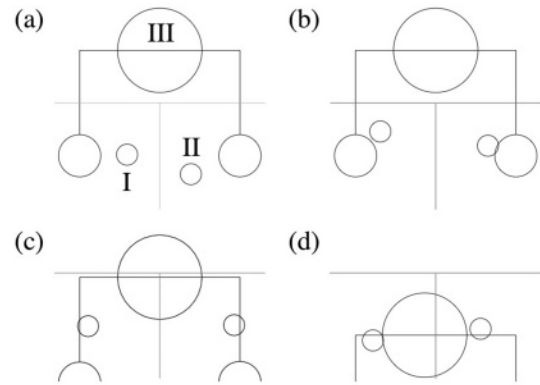


图4所示。因果熵强迫对社会合作的影响——优化难题。(a)初始配置。(b)磁盘一和磁盘二自发地同步其位置,并在两个弦柄上串联向下推。(c)磁盘III已被成功拉到可直接操作的位置。(d)磁盘一和磁盘二直接操纵磁盘三。(参见补充材料,电影4[13]。)

结果,磁盘III被成功地拉向包含磁盘I和II的隔室,如图4(c)所示,允许磁盘I和II直接操纵磁盘III,如图4(d)所示。启发式地,通过合作将磁盘III拉入其隔间,从而使其可以通过碰撞进行直接操作,磁盘I和II最大限度地提高了可访问因果路径的多样性。

据我们所知,这些工具使用谜题和社会合作谜题的结果代表了仅使用简单的物理过程就首次成功完成此类标准动物认知测试。这些复杂的行为从这样一个简单的物理过程中显著自发出现,这表明因果熵力可能被用作适应行为的通用(甚至可能是普遍)热力学模型的基础。也就是说,自适应行为可能会更普遍地出现在开放的热力学系统中,作为物理代理与系统的部分或全部自由度一起作用的结果,以便最大化其世界可访问的未来路径的总体多样性(因果熵强迫)。特别是,从达尔文的角度来看,由因果熵力驱动的物理代理可能会被视为竞争消耗未来的历史,就像生物复制因子竞争消耗瞬时物质资源一样[26]。在实践中,这样的主体可能会通过对未来历史[13]的内部蒙特卡洛采样来估计因果熵力[13],这些未来历史是由它们所处世界的学习模型生成的。这样的行为将确保它们对由于与环境的相互作用而导致的未来变化的适应性的统一能力,赋予潜在的生存优势,在其强度(由因果路径温度参数化, T_c)和它们预测未来的能力(由因果时间范围参数化, τ)允许的范围内。与该模型一致,发现在所有四个示例系统中都出现了非平凡行为

当(i)强迫的特征能量($k_B T_c$)大于系统内部动力学的特征能量(例如, 对于推车和杆子示例, 抬起向下悬挂的杆子所需的能量), 并且(ii)因果视界长于系统内部动力学的特征时间尺度(例如, 对于推车和杆子示例, 由于重力, 杆子需要摆动半圆的时间)。

这些结果具有广泛的物理意义。在凝聚态物理中, 我们的结果提出了一种驱动物理系统走向自组织临界性的新方法[27]。在粒子理论中, 他们提出了熵引力的自然泛化[8]。在经济物理学中, 他们提出了一种基于因果熵的财富新物理定义[28,29]。在宇宙学中, 他们建议对当前基于视界熵的人择选择原则进行基于路径熵的改进, 这可能更好地应对黑洞视界[1]。最后, 在生物物理学中, 他们提出了从生物分子构型到行星生态系统等系统的行为适应性和复杂性的新物理测量方法[2,3]。

总之, 基于熵力的因果推广, 我们明确提出了适应性行为和熵最大化之间的一种新的物理联系。我们已经详细研究了这种因果熵力对部分连接到热储的经典机械系统的一般情况的影响, 以及对各种简单示例系统的具体情况的影响。我们发现, 其中一些系统表现出与人类“认知生态位”相关的复杂自发行为, 包括工具使用和社会合作, 这表明, 作为开放系统中非平衡过程的适应性行为的潜在通用热力学模型。

我们感谢 E. Kaxiras, J. Gore, J. A. Barandes, M. Tegmark, E. S. Boyden, T. Hylton, L. Lerman, J. M. Smart, Z. D. Wissner-Gross和T. M. Sullivan的有益讨论。C. E. F. 部分由NSF资助。dms - 0901020。

*To whom all correspondence should be addressed.
alexwg@post.harvard.edu <http://www.alexwg.org>

现在地址: 电脑科学和人工
情报实验室, 麻萨诸塞州
麻省剑桥, 02139, USA。

[1] 李建军, 李建军, 李建军, 等。

Rev. D **76**, 043513(2007)。

[2] A. Kleidon, *Phys. Life Rev.* **7**, 424(2010)。

[3] L. Martyushev和V. Seleznev, *Phys. 众议员* **426**, 1(2006)。

- [4] E. J. Chaisson, *Cosmic Evolution: The Rise of Complexity in Nature* (Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002).
- [5] B. D. Ziebart, J. A. Bagnell, and A. K. Dey, in *Proceedings, Twenty-seventh International Conference on Machine Learning: Haifa, Israel, 2010*, edited by J. Fürnkranz and T. Joachims (International Machine Learning Society, Madison, WI, 2010), p. 1255.
- [6] S. Gelly, L. Kocsis, M. Schoenauer, M. Sebag, D. Silver, C. Szepesvári, and O. Teytaud, *Commun. ACM* **55**, 106 (2012).
- [7] C. R. Shalizi and C. Moore, [arXiv:cond-mat/0303625](http://arxiv.org/abs/cond-mat/0303625).
- [8] E. Verlinde, *J. High Energy Phys.* **04** (2011), 1.
- [9] R. C. Dewar, *J. Phys. A* **36**, 631 (2003).
- [10] R. C. Dewar, *J. Phys. A* **38**, L371 (2005).
- [11] R. C. Dewar, *Entropy* **11**, 931 (2009).
- [12] Our general-purpose causal entropic force simulation software will be made available for exploration at <http://www.causalentropy.org>.
- [13] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.110.168702> for additional example system details, calculation details, control experiment details, and movies.
- [14] S. Pinker, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **107**, 8993 (2010).
- [15] J. Tooby and I. DeVore, in *The Evolution of Human Behavior: Primate Models*, edited by W. G. Kinzey (State University of New York Press, New York, 1987), pp. 183–237.
- [16] P. Holmes, R. J. Full, D. Koditschek, and J. Guckenheimer, *SIAM Rev.* **48**, 207 (2006).
- [17] D. Schmitt, *J. Exp. Biol.* **206**, 1437 (2003).
- [18] J. J. Collins and C. J. DeLuca, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 764 (1994).
- [19] J. G. Milton, T. Ohira, J. L. Cabrera, R. M. Fraiser, J. B. Györfy, F. K. Ruiz, M. A. Strauss, E. C. Balch, P. J. Marin, and J. L. Alexander, *PLoS ONE* **4**, e7427 (2009).
- [20] J. Milton, J. L. Cabrera, T. Ohira, S. Tajima, Y. Tonosaki, C. W. Eurich, and S. A. Campbell, *Chaos* **19**, 026110 (2009).
- [21] C. Sanz, J. Call, and D. Morgan, *Biol. Lett.* **5**, 293 (2009).
- [22] A. A. S. Weir, J. Chappell, and A. Kacelnik, *Science* **297**, 981 (2002).
- [23] A. P. Melis, B. Hare, and M. Tomasello, *Animal Behaviour* **72**, 275 (2006).
- [24] A. M. Seed, N. S. Clayton, and N. J. Emery, *Proc. R. Soc. B* **275**, 1421 (2008).
- [25] J. M. Plotnik, R. Lair, W. Suphachoksahakun, and F. B. M. de Waal, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **108**, 5116 (2011).
- [26] R. Dawkins, *The Selfish Gene* (Oxford University Press, New York, 1976).
- [27] S. S. Elnashaie and J. R. Grace, *Chem. Eng. Sci.* **62**, 3295 (2007).
- [28] T. P. Wallace, *Wealth, Energy, And Human Values* (AuthorHouse, Bloomington, 2009).
- [29] D. Deutsch, *The Beginning of Infinity* (Allen Lane, London, 2011).