3 도함수의 연산

3.1 다항식의 도함수

함수의 도함수는 정의는 다음과 같다.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

또는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

이번 섹션에서는 도함수 연산을 연습한다. 다항식에 대한 미분의 간략한 규칙은 다음과 같다.

1. 상수의 도함수는 0이다.

$$\frac{d}{dx} c = 0.$$

기하학적 의미로는 x축에 대한 수평선 $y = f(x) = c$는 기울기 $m = 0, \forall x$이라는 뜻이다.

2. n이 양의 정수이면, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

x^n의 도함수는 지수 n을 내려오게하여 상수 계수로 만들고, 기존 지수에서 1을 차감하여 새 지수로 만든다. 증명은 다음과 같다.

Let $f(x) = x^n$.

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - \Delta x^n \\
&= \left[x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n\right] - x^n \\
&= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + ... + (\Delta x)^{n-1}\right] \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

3. c가 상수이고 $u = f(x)$가 x에 대해 미분가능할 때, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

즉, 임의의 함수의 상수배인 함수는 도함수도 상수배이다. 이를 증명하기 위해 $y = cu = cf(x)$라 하자. 그렇다면 $\Delta y = cf(x+\Delta x) - cf(x) = c[f(x+\Delta x) - f(x)] = c\Delta u$ 이다. 이 때 다음을 만족한다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta u}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

규칙 2와 3을 통해 다음을 확인할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}cx^n = cx^{n-1}$$

4. $u = f(x)$와 $v = g(x)$가 x의 함수일 때, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

증명은 다음을 따른다. $y = u + v = f(x) + g(x)$라 하자. 그렇다면 $\Delta y = [f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)] = [f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)] = \Delta u+\Delta v$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \Delta x \to 0 \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.\end{aligned}$$

3.2 곱과 나눗셈 규칙

$$uv \text{ 그리고 } \frac{u}{v}$$