3 도함수의 연산

3.1 다항식의 도함수

함수의 도함수는 정의는 다음과 같다.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

또는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

이번 섹션에서는 도함수 연산을 연습한다. 다항식에 대한 미분의 간략한 규칙은 다음과 같다.

1. 상수의 도함수는 0이다.

$$\frac{d}{dx} c = 0.$$

기하학적 의미로는 x축에 대한 수평선 $y = f(x) = c$는 기울기 $m = 0, \forall x$이라는 뜻이다.

2. n이 양의 정수이면, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

x^n의 도함수는 지수 n을 내려오게하여 상수 계수로 만들고, 기존 지수에서 1을 차감하여 새 지수로 만든다. 증명은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\text{Let } f(x) = x^n. \\
&\quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - \Delta x^n \\
&\qquad = \left[x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n \right] - x^n \\
&\qquad = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n. \\
&\quad \text{and} \\
&\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&\qquad = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + ... + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&\qquad = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

3. c가 상수이고 $u = f(x)$가 x에 대해 미분가능할 때, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

즉, 임의의 함수의 상수배인 함수는 도함수도 상수배이다. 이를 증명하기 위해 $y = cu = cf(x)$라 하자. 그렇다면 $\Delta y = cf(x+\Delta x) - cf(x) = c[f(x+\Delta x) - f(x)] = c\Delta u$ 이다. 이 때 다음을 만족한다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta u}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

규칙 2와 3을 통해 다음을 확인할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}cx^n = cx^{n-1}$$

4. $u = f(x)$와 $v = g(x)$가 x의 함수일 때, 다음을 만족한다.

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

증명은 다음을 따른다. $y = u + v = f(x) + g(x)$라 하자. 그렇다면 $\Delta y = [f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)] = [f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)] = \Delta u+\Delta v$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \Delta x \to 0 \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.\end{aligned}$$

3.2 곱과 나눗셈 규칙

덧셈과 상수 곱과 관련해 도함수를 구하는 규칙을 알아보았다. 이번에는 함수의 곱과 나눗셈에 대한 도함수를 구하는 규칙을 알아볼 것이다.

$$uv \text{ and } \frac{u}{v}, \text{ where u and v are differentiable function of x.}$$

예로 $u = x^3, v = x^4$라 하자. 이 때, uv의 도함수는 각 함수의 도함수의 곱인 $\frac{d}{dx}(uv) = 3x^2 * 4x^3 = 12x^5$ 가 아닌, $\frac{d}{dx}(uv) = 7x^6$ 이다. 다음은 두 함수의 곱으로 생성된 함수의 도함수 도출 증명이다.

Let $y = uv$

$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$

$\Delta y = (y + \Delta y) - y = u\Delta u + v\Delta v + \Delta u\Delta v$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$

Taking limits as $\Delta x \to 0$ then,

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0\frac{dv}{dx} \tag{1}$$

Thus,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$