

CAT(0) 立方複体とパーコレーション

CHOI, INHYEOK (チョイ・インヒョック)

ABSTRACT. 本論文では著者と Donggyun Seo が [CS25] で扱った群のケイリーグラフ上のパーコレーションを CAT(0) 立方複体の言語を通じて新たに解釈する。併せて、群上のパーコレーションと CAT(0) 立方複体の幾何学の基礎について説明する。

(Abstract in English) In [CS25], the author and Donggyun Seo proved the existence of infinitely many infinite clusters in a random subgraph of certain Cayley graphs. We provide an alternative proof of this result for CAT(0) cubical groups in terms of halfspaces.

This paper is expository, aiming at an invitation to percolation on infinite groups and/or CAT(0) cubical geometry.

キーワード. パーコレーション、ケイリーグラフ、CAT(0) 立方複体

1. 初めに

幾何学的群論の主要な哲学の一つは、群が距離空間に等長写像として作用するとき、その作用の性質から群の幾何学的性質を読み取ることである。このために使われる距離空間として CAT(0) 立方複体 (CAT(0) cube complex) というものがある。本論文では CAT(0) 立方複体上の真正かつココンパクトで既約な作用 (proper, cocompact and irreducible action) をもつ群の幾何学を考察する。これに基づき、そのような群のケイリーグラフ上のパーコレーションが表すある性質を証明する。

この結果はより一般的な設定において既に知られていることを述べておく。具体的には、著者と Donggyun Seo は [CS25] で非円筒的双曲群 (acylindrically hyperbolic group) に対して同様の結果を証明した。本論文で扱う群は全て非円通的双曲性をもつため、下記の定理 [1] は本質的に新しいものではない。しかしながら、定理 [1] を CAT(0) 立方複体の幾何学を用いて新たに証明することが目標である。すなわち、本論文の趣旨は、(1) 読者を CAT(0) 立方複体の幾何学へ招待すること、並びに (2) 双曲幾何学の言語で書かれた確率論的結果を CAT(0) 立方複体の枠組みで再解釈することにある。

まず幾何学的な設定を述べる。有限生成群 G とその有限生成集合 S が与えられたとき、 G の元を頂点とし、 S の元で関連されている元の対を辺で結ぼう。すなわち $g^{-1}h \in S$ を満たす $g, h \in G$ に対して辺 gh を結ぶのである。このように定義されるグラフ $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ を S に関する G のケイリーグラフ (Cayley graph) と呼ぶ。

次に、確率過程を一つ導入する。0 と 1 の間の実数 p を固定する。表が出る確率 p 、裏が出る確率 $1-p$ の硬貨を Γ の各辺に一つずつを置こう。全ての硬貨を独立に投げ、表が出た辺だけ残し、裏が出た辺は消す。この操作によって得られる部分グラフを $\Gamma[p]$ と記す。直感的には、 $\Gamma[p]$ は Γ のおよそ p 割を保持したランダムな部分グラフとみなせる。この確率的グラフの連結成分

のうち、無限に大きい成分がいくつあるかを調べたい。これに関する本論文の主要な定理を以下に述べる。

Theorem A. $CAT(0)$ 立方複体 X と有限生成群 G を一つ考える。このとき G が X に真正かつココンパクトかつ既約に作用すると仮定する。さらに、 G は整数群 \mathbb{Z} と同型な有限指数部分群 (*finite-index subgroup*) を持たないとする。

このとき、 G の任意の限生成集合 S に対して、ある実数 $0 < p < 1$ が存在し、 G のケイリーグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ の p -ランダム部分グラフ $\Gamma[p]$ の無限=非有界連結成分が無限に多い確率が 1 である。

今論じている確率過程をパーコレーション (percolation process) と呼ぶ。グラフ上のパーコレーションおよび $CAT(0)$ 立方複体に関する理論は極めて膨大であり、その全てを紹介することは不可能である。だが、定理の証明に必要な基礎だけはきちんと説明しよう。この内容はいずれも既知の結果であり、次の参考文献の一部を要約したものである。

- Geoffrey Grimmett, Percolation [BK89].
- Hugo Duminil-Copin, Introduction to Bernoulli percolation [DC18].
- Wolfgang Woess, Random walks on infinite graphs and groups [Woe00].
- Russell Lyons and Yuval Peres, Probability on trees and networks [LP16].
- Thomas Hutchcroft, Percolation on hyperbolic graphs [Hut19].
- Michah Sageev, Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes [Sag95].
- Pierre-Emmanuel Caprace and Michah Sageev, Rank rigidity for $CAT(0)$ cube complexes [CS11].
- Anthony Genevois, Algebraic properties of groups acting on median graphs [Gen24].

まずパーコレーションを二つの章にわたって説明する。第2章ではパーコレーションの理論を概説し、本論文における議論の背景を与える。第3章では $CAT(0)$ 立方複体上に作用する群の二つの幾何学的性質を述べ、これらを用いてパーコレーションに関する結果を導く。

続いて、 $CAT(0)$ 立方複体の理論を述べる。第4章では $CAT(0)$ 立方複体と本質的に等しい対象である中点グラフ (median graph) を紹介する。第5章では中点グラフの幾何学において重要な概念である超平面 (hyperplane)、半空間 (halfspace) およびそれらの鎖 (chain) を導入する。その後、パーコレーションに関する $CAT(0)$ 立方複体の幾何学的性質、例えば「手品補題¹」(命題6.1) を第6章および第7章で証明する。第8章ではより詳細な $CAT(0)$ 立方複体の幾何学を展開する。

既存の文献に現れていない議論は、第6章および第7章に限られている。したがって、読者がもし望めば、第3.1節のみを読んだ後、これらの章に進んでも差し支えない。また、パーコレーションの理論と $CAT(0)$ 立方複体の幾何学は、互いに独立に読んでも問題はない。

2. 背景の紹介

本章では、今後考察する問題を設定し、関連する歴史的背景を概説するが、証明は一切与えない。内容としては、第2.1節のみを読めば、第4章以降を理解するのに困難はない。しかしながら、初めてパーコレーションに接する読者には、本章全体に軽く目を通しておくことを勧める。

¹僕が名付けたものではありません。

2.1. グラフと群. 本稿におけるグラフ (graph) は頂点集合 \mathcal{V} と辺集合

$$\mathcal{E} \subseteq \binom{\mathcal{V}}{2} := \{S \subseteq \mathcal{V} : \#S = 2\}$$

からなる概念である。この慣習では自分自身を結ぶ辺である自己ループや、複数の辺が同じ頂点対の間を結ぶ多重辺は許さない。

辺 $e = \{v, w\} \in \mathcal{E}$ に対し、 v および w を e の端点 (endpoint) と呼び、 $e = \overline{vw}$ と表記する。また、二つの辺 $e, f \in \mathcal{E}$ が一つの端点を共有するとき、それらは隣接している (adjacent) と言う。二つの頂点 v, w がある辺で繋がれているときにもそれらが隣接しているといい、 $v \sim w$ と書く。

頂点集合の部分集合 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ が与えられたとき、

$$\partial_{\mathcal{E}} A := \{\overline{xy} \in \mathcal{E}(\Gamma) : x \in A \text{かつ } y \notin A\}$$

を A の境界 (boundary) と呼ぶ。この定義では辺を集めた一方、

$$\partial_{\mathcal{V}} A := \partial_{\mathcal{E}} A \cap A = \{x \in A : x \sim y \text{を満たす } A \text{ の外にある頂点 } y \notin A \text{ が存在する}\}$$

もまた A の境界と呼ぶ。文脈上混乱の恐れがない場合には、両方とも単に ∂A と記す。

グラフ $\Gamma = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma))$ の辺集合の部分集合 $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(\Gamma)$ で作られたグラフ $\Gamma' = (\mathcal{V}, \mathcal{E}')$ を Γ の部分グラフ (subgraph) と呼ぶ。このとき、次の表記を導入する：

$$\Gamma \setminus \Gamma' := (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \mathcal{E}').$$

グラフ Γ の頂点列 v_0, v_1, \dots, v_n に対し、 $e_1 := \overline{v_0v_1}, \dots, e_n := \overline{v_{n-1}v_n}$ がいずれも Γ の辺であれば、これら頂点と辺からなるグラフ $\Gamma' := (\{v_0, \dots, v_n\}, \{e_1, \dots, e_n\})$ を Γ 上の長さ n の経路 (path) と呼ぶ。このとき、経路の長さを $\text{len}(\Gamma') = n$ と定義する。

経路 Γ' の始点と終点が一致する場合、 Γ' を回路 (circuit) と呼ぶ。すなわち、頂点列 v_1, \dots, v_n に対してもし $e_1 := \overline{v_nv_1}, \dots, e_n := \overline{v_{n-1}v_n}$ がいずれも Γ の辺であるとき、 $\Gamma' := (\{v_1, \dots, v_n\}, \{e_1, \dots, e_n\})$ を Γ 上の長さ n の回路と呼ぶ。特に v_1, \dots, v_n が相違なる頂点であれば Γ' を長さ n のサイクル (cycle) もしくは n -サイクルと呼ぶ。

グラフ Γ の二つの部分集合 $A, B \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ が Γ 上のある経路で繋がっている場合、 $A \leftrightarrow_{\Gamma} B$ と書く。グラフ Γ が連結 (connected) であるとは、任意の頂点 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ に対し $x \leftrightarrow_{\Gamma} y$ であることをいう。グラフの各頂点および辺に対し、それを含む最大の連結部分グラフを一意に定めることができ、それをその頂点および辺の連結成分 (connected component) と呼ぶ。任意のグラフの頂点集合または辺集合は、連結成分によって分割される。

グラフ Γ が二分グラフ (bipartite graph) であるとは、 Γ の各辺がある A の頂点とある B の頂点を結ぶような $\mathcal{V}(\Gamma)$ の分割 $A \sqcup B$ が存在することをいう。

事実 2.1. グラフ Γ が二分グラフであることと、 Γ に奇数長さのサイクルが存在しないことは同値である。

連結グラフ Γ の頂点の間に自然な距離構造を与えることができる。二つの頂点 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ に対し

$$d(x, y) := \min \{\text{len}(P) : P \text{ は } x \text{ と } y \text{ を結ぶ経路}\}$$

と定義すれば良い。このとき $d(\cdot, \cdot)$ は三角不等式と非退化性 (nondegeneracy) を満たす。したがって $d(\cdot, \cdot)$ は実際に距離構造をなし、これを組合せ距離 (combinatorial metric)、 l^1 -距離またはグラフ距離 (graph metric) と呼ぶ。つまりグラフは自然に距離空間とみなせる。

頂点集合の部分集合 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ と正の実数 $k > 0$ に対し、

$$N_k(A) := \{y \in \mathcal{V}(\Gamma) : \text{ある } a \in A \text{ に対し } d_\Gamma(a, y) \leq k \text{ である}\}$$

を A の半径 k の近傍 (neighborhood) と呼ぶ。

さて群の話題に移ろう。群 (group) とは合成および逆の操作が可能な演算が備わっている構造を指す。具体的には、 id という特別な元を持つ集合 G に二項演算 $\cdot : G^2 \rightarrow G$ が定義されており、以下の条件を満たすとき、 (G, \cdot, id) を群と呼ぶ。

- (1) (結合法則) 任意の $g, h, k \in G$ に対し $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ である。
- (2) (単位元の性質) 任意の $g \in G$ に対し $g \cdot id = id \cdot g = g$ である。
- (3) (逆元の存在性) 任意の $g \in G$ に対し $g^{-1} \in G$ が存在して $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = id$ を満たす。

もし $id \in H \subseteq G$ に \cdot を制限したとき (H, \cdot, id) もまた群をなすなら、 H を G の部分群 (subgroup) と呼び $H \leq G$ のように記す。このとき、 G は $\{[gH] : g \in G\}$ という同値類によって分割されるが、この同値類の数を H の指数 (index) と呼ぶ。この指数が有限であれば H は G の有限指数部分群という。

群 G の部分集合 S が G の生成集合 (generating set for G) であるとは、 S を含む G の中の最小の部分群が G 全体と一致することをいう。すなわち、各 $g \in G$ に対し、 $g = s_1^{\epsilon_1} \cdots s_n^{\epsilon_n}$ を満たす S の有限個の元 s_1, \dots, s_n および $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{1, -1\}$ が存在することを意味する。このとき、 g を上記のように表すために必要な S の元の個数の最小値を g の S -単語ノルム (S -word norm) といい、 $\|g\|_S$ と記す。最後に、有限生成集合を持つ群を有限生成群 (finitely generated group) と呼ぶ。

数学にはさまざまな群がある。自明群 (trivial group) $1 = \{id\}$ や、 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のような有限群 (finite group) がその一例である。最も簡単な無限群としては、整数群 $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ が挙げられる。このような群は、しばしば次のように構成される。ある数学的な構造 X が与えられたとき、 X から X への写像のうち、逆操作が可能で (例えば単射写像・位相同型写像・正則行列など) かつ X の構造を保つものをすべて集めると、その集合は自然に群をなす。例えば、整数群 \mathbb{Z} は、数直線上のアフィン変換のうち、全単射であり、整数点全体の集合をそれ自身に移るもののが集まりとみなすことができる。

実は、すべての群はあるグラフの対称性を集めたものと見ることができる。生成集合 S が与えられた群 G を考えよう。初めに導入したように、 G のすべての元を頂点とし、 S の元によって関連付けられたすべての順序対を辺で結んだグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ を、 S に関する G のケイリーグラフ (Cayley graph of G with respect to S) と呼ぶ。このとき、グラフ距離は自然に S -単語ノルムによって与えられる。すなわち、 $d_\Gamma(g, h) := \|g^{-1}h\|_S$ である。生成集合 S への依存性をより明確にするため、 $d_S(g, h)$ と記すこともある。このとき、生成されたグラフが局所有限 (locally finite) であるためには、すなわち有限の半径を持つすべての球が有限個の頂点のみを含むためには、 S が有限集合であることが必要十分条件となる。

今後、留意すべき群が二つある。まず、 d 次元の整数格子群 \mathbb{Z}^d は

$$\{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) : v_i \in \mathbb{Z}\}$$

と定義される。この格子群の有限生成集合の一つとして $\{\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j=1}^d : i = 1, \dots, d\}$ を考えよう。これら d 個の「方向移動」を用いて他の移動を生成するとき、その順序は重要ではない。つまり、 $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ が成り立つ。実は、この等式さえ理解していれば、 \mathbb{Z}^d におけるすべ

ての等式 (例えば $(3, 1) = (2, 1) - (1, 3) + (2, 4)$ など) を導出することができる。深入りはしないが、これが

$$\mathbb{Z}^d \simeq \langle s_1, \dots, s_d \mid s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1} = id \rangle$$

と記述する理由である。このとき、右辺を \mathbb{Z}^d の表示 (presentation) と呼ぶ。

それでは、

$$F_d := \langle s_1, \dots, s_d \mid - \rangle$$

はどのような群を指すのだろうか。この群は s_1, \dots, s_d およびその逆元 $s_1^{-1} \dots s_d^{-1}$ を用いて書けるすべての単語の集合であり、ある文字とその逆元が隣り合ったときキャンセルできるという基本等式 ($s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = id$) 以外には、いかなる規則も持たない群である。この群をランク d の自由群 (free group of rank d) と呼び、このとき $\{s_1, \dots, s_d\}$ はこの群を自由に生成する (freely generate) という。ランク 2 の自由群のケイリーグラフがどのような形をしているか描いてみて、図 1 と比較せよ。

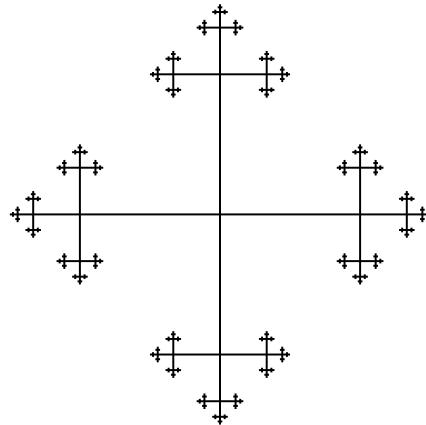


FIGURE 1. ランク 2 の自由群の標準ケイリーグラフ

一般に、群 G の任意の元 $g, h \in G$ が $gh = hg$ 、すなわち $ghg^{-1}h^{-1} = id$ を満たすとき、 G を可換群 (abelian group) と呼ぶ。可換群を含むより広い群のクラスとして、べき零群 (nilpotent group) や可解群 (solvable group) などがあるが、それらの定義は一応省略する。

最後に、群の成長 (growth) を論じる。有限生成群 G の有限生成集合 S を固定したとき、ケイリーグラフ $G = Cay(G, S)$ の半径 R の球内には頂点がいくつ含まれているかを問うことができる。例えば、

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln \#\{g \in G : \|g\|_S \leq R\}}{R} > 0?$$

のような質問を考えることである。もしこれに大した答えが「YES」なら、球内の要素数は半径に対して指数関数的に増加することである。実は、この問い合わせの答えは S の選択に寄らない。すなわち、群 G が与えられたとき、ある一つの有限生成集合に対して答えが「YES」であれば、他のどの有限生成集合を選んでも答えは「YES」となるのである。のような性質を持つ群を、指数関数的成長 (exponential growth) を持つと呼ぶ。例として、自由群は指数関数的に成長するが、整数格子群はそうではない。また、指数関数的に成長する部分群を持つすべての群は、それ

自身も指数関数的に成長する。(注意: 部分群内の単語距離は、親となる群での単語距離とは大きく異なる可能性があることに留意せよ。)

2.2. パーコレーション. これからはパーコレーション (percolation) について述べる。背景として連結グラフ $\Gamma = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma))$ を一つ固定し、その部分グラフ全体の空間

$$\Omega := \left\{ \Gamma' = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}') : \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(\Gamma) \right\}$$

を考える。各辺 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ に対し、 Ω を分割する二つの集合 $\{\Gamma' \subseteq \Gamma : e \in \Gamma'\}$ と $\{\Gamma' \subseteq \Gamma : e \notin \Gamma'\}$ を取ろう。これらをそれぞれ $\{\omega : e \text{ が開いている}\}$ および $\{\omega : e \text{ が閉まっている}\}$ と呼ぶ。すべての $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ に対しそのような集合を集め、それらが生成する最小の σ -代数を Ω に備えつける。

続いて、パラメータ $0 \leq p \leq 1$ を固定しよう。各辺 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ を独立に確率 p で開き、確率 $1-p$ で閉じるとすることで確率測度 \mathbb{P}_p を Ω 上に定める。直感的には、「全体グラフの $(100p)\%$ 」に当たるランダムな部分グラフを考えることになる。この確率的部分グラフを $\Gamma[p]$ と書く。

物理的な比喩として、 Γ の形状をした均質な結晶を構成する分子を考えよう。温度を徐々に上げると、結晶の各分子結合がある確率 ($= 1-p$) で切斷される。結晶がどのような形で碎けるかは確率的であり、この現象を模写したものが $\Gamma[p]$ である。このとき、各分子結合が残るか切れるかは互いに独立であると仮定していることに注意されたい。このような数学的モデルは Simon R. Broadbent と John M. Hammersley によって [BH57] で初めて導入された。

上記のモデルでは Γ の各辺が残るかまたは消えるが、これをベルヌイボンドパーコレーション (Bernoulli bond percolation process) と呼ぶ。各頂点が残るかまたは消えるサイトパーコレーション (site percolation process) もまた、物理的パーコレーションを記述するモデルの一つである。他にも、各辺に確率的な長さを与えることによって定まるグラフ距離の構造を探る ファーストパッセージパーコレーション (first passage percolation) などがある。本論文ではベルヌイボンドパーコレーションに焦点を当てる。パーコレーションについてより深い興味がある読者は、Geoffrey Grimmett の本 [Gri89] を参照されたい。

参考 2.2. 連結グラフ Γ の対象の群 $\text{Aut}(\Gamma)$ が Γ の任意の頂点の対 $v, w \in \Gamma$ を結びつけることができるとき、すなわち $v = g \cdot w$ を満たす $g = g(v, w) \in \text{Aut}(\Gamma)$ が存在するとき、 Γ は頂点推移的 (vertex-transitive) だという。これはすなわち $\mathcal{V}(\Gamma)$ における $\text{Aut}(\Gamma)$ -軌道がただ一つであることを意味する。一般に、 $\mathcal{V}(\Gamma)$ における $\text{Aut}(\Gamma)$ -軌道が有限個である場合、 Γ を準推移的 (quasi-transitive) と呼ぶ。

便宜上、今後はグラフの中でも 有限生成群のケイリーグラフ に限って話を進める。しかし、後で挙げる定理の多くは、ケイリーグラフよりも一般的なケースである頂点推移的、あるいは準推移的なグラフに対しても証明されている。詳細は原論文を参照されたい。

2.3. パーコレーションの相転移. まずは、平面格子 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ 上のパーコレーションを見てみよう。このとき、パラメータ p が大きいほど確率的により多くの辺が生き残るため、 p が 1 に近ければグラフ Γ がほぼそのまま残ると予想できる。これに対し、 p が 0 に近ければ元のグラフの大部分が削除され、小さな断片のみが残るだろう。この相反する予想の尺度として、

「無限に大きい連結成分が発生するか?」

を聞いてみよう。平面格子グラフに関しては、以下のことが知られている。

- $p \leq 1/2$ の時は、 $\Gamma[p]$ に無限連結成分が発生する \mathbb{P}_p -確率が 0 である一方、
- $p > 1/2$ の時は、 $\Gamma[p]$ に無限連結成分が発生する \mathbb{P}_p -確率が 1 である。

これを鑑みて、パラメータ p が $1/2$ に至るとき、平面格子上のパーコレーションは相転移 (phase transition) を起こすと言うことができる。このとき基準となる値 $1/2$ を臨界パラメータ (critical parameter) と呼び、 $p_c(\Gamma)$ と記す。すなわち、 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ に関して $p_c(\Gamma) = 1/2$ である。

一般的なグラフ Γ でパーコレーションを行うと、無限連結成分が発生する確率が 0 でも 1 でもない値をとる可能性もある。しかし、これは極めて非均質なグラフでのみ起こり得る現象であり、群のケイリーグラフのような均質なグラフでは決して起こらない。簡潔な議論のため、これからは群のケイリーグラフ上のパーコレーションのみを記述する。

ケイリーグラフ $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ を一つ考えよう。 Γ の形状はどの点から見ても同じなので（これが我々の望んでいた均質性である）、単位元 $id \in G$ を基点としよう。ランダム部分グラフ $\Gamma[p]$ における id の連結成分を C_{id} と記し、この起点連結成分が無限となる確率を

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(\#C_{id} = +\infty)$$

と定義する。このとき、次が成り立つ。

事実 2.3 (補題3.1参照). $\theta(p)$ は $p \in [0, 1]$ に対する単調増加関数である。

さらに、 p が十分小さい正の実数である場合 (例えば $0 < p \leq \frac{1}{\#2S}$ のとき) $\theta(p) = 0$ が成り立つことを確認できる。つまり、 $\theta(p)$ は初期区間では値 0 にとどまるが、ある時点から 0 より大きい値を持つことになる。この時点を Γ の臨界パラメータ (critical parameter) と定義する。形式的には

$$p_c(\Gamma) := \inf \{p \in [0, 1] : \theta(p; \Gamma) > 0\}$$

と定める。ケイリーグラフの均質性により、次の事実が成り立つ。

事実 2.4 (補題3.4参照). あるケイリーグラフ Γ の臨界パラメータ p_c を考えよう。このとき

- 各 $0 \leq p < p_c$ に対し、 $\mathbb{P}_p(\Gamma[p]$ には無限連結成分が一つもない) = 1 であり、かつ
- 各 $p_c < p \leq 1$ に対し、 $\mathbb{P}_p(\Gamma[p]$ に無限連結成分が存在する) = 1 である。

要するに、臨界相転移は任意のケイリーグラフにおいて起こる。ここで加えたいことは、 p_c が 1 となるグラフも多いことだ。例えば、図4に示した数直線グラフでは、左・右半直線上の辺が無限個切断されると、無限連結成分は生じない。このような事象は $p < 1$ のとき確率 1 で起こる。したがって、 $p_c(\mathbb{Z}) = 1$ が成り立つ。この事実は数直線グラフの場合に限ることではなく、 \mathbb{Z} のいかなるケイリーグラフに対して同様に成り立つ。一般に、 \mathbb{Z} を有限指数部分群と持つ群のケイリーグラフに対して $p_c = 1$ である。これらが $p_c = 1$ を満たすグラフの全てであるかどうかが、Itai Benjamini と Oded Schramm によって提起された予想である。

予想 2.5. [BS96] 整数群 \mathbb{Z} を有限指数部分群として持たない有限生成群の任意のケイリーグラフ Γ に対して、 $p_c(\Gamma) < 1$ が成り立つ。

この予想は指数関数的に成長する群に対しては Russell Lyons によって、有限表現を持つ群に対しては Eric Babson と Itai Benjamini によって示された (Lyo95, BB99)。その特殊例として、自由群のケイリーグラフに対して $p_c < 1$ であることは容易に分かる。自由群を部分群として持つ群のケイリーグラフに対しても同様に $p_c < 1$ が成り立つ。

事実 2.6. ランク 2 の自由群を部分群として持つ有限生成群の任意のケイリーグラフ Γ に対して、 $p_c(\Gamma) < 1$ が成り立つ。

この事実は前述の結果よりは弱いが、我々の目的のためには十分である。よって、事実 2.6 だけについて、後で証明を挙げる。

別の相転移を論じる前に、まずは臨界相転移をもう少し詳しく眺めてみよう。先ほど、 $\theta(p)$ の様子が $p = p_c$ を境に変化すると述べたが、さて臨界点 $p = p_c$ における値はいくらだろうか。すなわち、 $\theta(p_c)$ は 0 か、または正の値を取るかを考えよう。言い換えれば、臨界値 $p = p_c$ において $\Gamma[p]$ は無限連結成分を持つのか、という問い合わせになる（「臨界点パーコレーションが起こるか」とも表現される）。前述した平面格子 \mathbb{Z}^2 の場合には、 $\theta(p_c) = \theta(1/2) = 0$ であることが Harry Kesten による有名な結果として知られている（[Kes80]。Theodore Harris の論文 [Har60] も参照）。一方で、三次元整数格子 \mathbb{Z}^3 においては、 $\theta(p_c)$ が正なのか 0 なのかは現在でも重要な未解決問題である。次に、与えられたケイリーグラフ Γ とパラメータ $0 \leq p \leq 1$ に対して、基点 id の連結成分が平均的にどの程度大きいのかを考えることができる。これに対し

$$\chi_p := \mathbb{E}_p[\#C_{id}] = \sum_{g \in G} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p[\#C_{id} = n] & \theta(p) = 0 \text{ の場合}, \\ +\infty & \theta(p) > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

で定義される量を感受率 (susceptibility) と呼ぶ。先に定義した $\theta(p)$ と同様に、次が分かっている。

事実 2.7 (補題 3.1 参照). χ_p は $p \in [0, 1]$ に対して単調増加関数である。

定義から明らかのように、 $p > p_c$ のとき $\chi_p = +\infty$ である。また、 p が十分小さい正の値であれば $\chi_p < +\infty$ となることも容易に分かる。しかし、その中間でどのような値を取るかは自明ではない。実際、ほとんど確実に有限値を持つ確率変数であっても、その期待値が無限大になることはあり得るため、 $\theta(p) = 0$ だからといって直ちに $\chi_p < +\infty$ が従うわけではない。この点、すなわち $p < p_c$ に対して $\chi_p < +\infty$ であることは、Michael Aizenman と David Barsky がまず d 次元格子グラフの場合に示し、その後 Tonći Antunović と Ivan Veselić がケイリーグラフを含むより一般のグラフに対して証明した。

事実 2.8. [AB87, AV08] ケイリーグラフ Γ の臨界パラメータ p_c に対し、任意の $0 \leq p < p_c$ について χ_p は有限である。さらに、任意の $p \nearrow p_c$ について $\chi_p \nearrow +\infty$ となる。特に $\chi_{p_c} = +\infty$ となる。

この結果には、Hugo Duminil-Copin と Vincent Tassion によるより現代的な証明 [DCT16] や、Hugo Vanneuville による別のアプローチ [Van25] が知られている。

さらに、(1) χ_p が $p \nearrow p_c$ のときどのような速度で発散するのか、(2) $p \searrow p_c$ のとき $\theta(p)$ がどのような速度で 0 に近づくのか、(3) $p = p_c$ における C_{id} の大きさの確率分布がどのような形になるのか、といった問い合わせ立てることもできる。これ以上深入りはしないが、臨界パラメータ付近における $\Gamma[p]$ の基点連結成分の大きさや形状を理解することは、パーコレーション理論における根本的な課題である。

2.4. 無限連結成分の個数. これまで、パラメータ p がある領域 ($p_c < p \leq 1$) にあるとき、 $\Gamma[p]$ には「ほぼ確実」に無限連結成分が現れるという話をしてきた。では、いくつの無限連結成分がで

きるのだろうか？1個だろうか？2個、あるいは10個だろうか？それとも無限個なのだろうか。そして、この個数は p の値によってどのように変化するのだろうか。

もし議論の対象をケイリーグラフに限定していなければ、これらの問い合わせに答えるのは非常に困難である。しかしケイリーグラフについては、ある程度明確な回答が知られている。第一に、ケイリーグラフ Γ と $p \in [0, 1]$ が与えられたとき、 $\Gamma[p]$ が持つ無限連結成分の個数はほぼ確実に一つの値に定まる。さらに、その個数は必ず0個、1個、あるいは「無限個」のいずれかである。言い換えれば、次の事実が成り立つ。

事実 2.9. 有限生成群のケイリーグラフ Γ と各 $p \in [0, 1]$ に対して、 $N_\infty(\Gamma, p) \in \{0, 1, +\infty\}$ が存在し、

$$\mathbb{P}_p \{ \#\{\Gamma[p]\} \text{ 内の無限連結成分} \} = N_\infty(\Gamma, p) = 1$$

となる。

この事実は、C. M. Newman と Lawrence S. Schulman によって [NS81] で証明された。

ここで、次の定数を定義しよう。

$$p_u[\Gamma] := \inf \{p \in [0, 1] : \text{ほぼ確実に } \Gamma[p] \text{ は無限連結成分をただ一つ持つ}\}.$$

この値を Γ の一意性閾値 (uniqueness threshold) と呼ぶ。定義から直ちに $p_c \leq p_u$ であることがわかる。また、 $p_c < p < p_u$ を満たす p に対しては、 $\Gamma[p]$ はほぼ確実に無限連結成分を持つが、それは唯一ではない。したがって、この領域では $N_\infty(\Gamma, p) = +\infty$ となるはずである。

さて、これから述べる事実は非自明である。この事実は Itai Benjamini と Oded Schramm が有名なサーベイ論文 [BS96] で予想し、後に Olle Häggström と Yuval Peres がケイリーグラフに対して [HP99]、Roberto H. Schonmann がより一般的なグラフに対して証明した [Sch99]。

事実 2.10. ケイリーグラフ Γ の一意性閾値 p_u が与えられたとき、各 $p_u < p \leq 1$ に対して、

$$\mathbb{P}_p (\Gamma[p] \text{ に無限連結成分が一意に存在する}) = 1$$

が成り立つ。(厳密に言えば、この事実自体は我々の論証に必ずしも必要ではない。)

つまり、 $(p_u, 1]$ の全区間において、 $\Gamma[p]$ はほぼ確実にただ一つの無限連結成分を持つのである。したがって、 N_∞ は一般的に、図2に示されたような振る舞いを見せる。

このように見ると、 N_∞ に関しては相転移が二度起こるのが最も一般的な絵となる。しかし、それは $(0, p_c), (p_c, p_u)$ および $(p_u, 1)$ がすべて非自明な区間であるときの話である。このうち $0 < p_c$ は常に保証される。では、 $p_c < 1$ はどうだろうか？すべての群がこれを満たすわけではない。例えば、図1に描かれている4次正則樹木グラフ T_4 では、 p が1より少しでも小さければ $\Gamma[p]$ において辺が時々消されるはずだが、辺が一つ消えるたびに全体グラフは二つに分断される。このように「ポキポキと折れやすい」グラフのランダム部分グラフでは、唯一の連結成分は決して期待できず、さらには無限連結成分もまた一意的ではなくなる。したがって $p_u(T_4) = 1$ である。

あるグラフの有限個の辺を削除するだけでグラフを複数の連結成分に分断できる場合、そのグラフは「端（はし）が複数ある（not one-ended）」と呼ばれる。一般に、このようなケイリーグラフは $p_u = 1$ を持つことが比較的容易に確認できる。

それでは、残りのケイリーグラフについてはどうだろうか？前述の [BS96] において、Itai Benjamini と Oded Schramm は次のように問い合わせた。

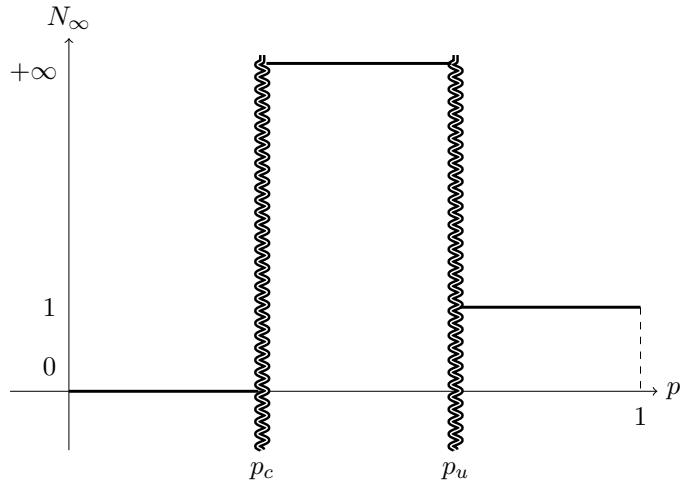


FIGURE 2. 無限連結成分の（ほぼ確実な）数の最も一般的な振る舞い

問題. 1端のケイリーグラフに対して常に $p_u < 1$ か？

この質問にはまだ完全な回答は知られていない。しかし、端が一つのケイリーグラフを生成する群が、もし有限表示 (finite presentation) を持つのであれば、 $p_u < 1$ であることは知られている。これは Eric Babson と Itai Benjamini による結果である [BB99]。

一方で、 $p_c < p_u$ に関しては何が知られているだろうか？まず、先に述べた \mathbb{Z}^2 の場合、 $N_\infty(p) = +\infty$ となる p は存在せず、また $p_c = p_u = 1/2$ である。これは 2 次元に限った話ではない。より高い次元 d を持つ \mathbb{Z}^d に対しても同様に $p_c = p_u$ が成立する。この事実は Michael Aizenman, Harry Kesten および Charles M. Newman が 1987 年に証明した重要な結果である [AKN87]。

一般に、（無限）可換群 (abelian group) やべき零群 (nilpotent group) を含め、指數関数より遅く成長する群 (group with subexponential growth) のケイリーグラフでは、すべて同様の現象が現れる。これに密接に関連しているのが、ケイリーグラフの有限部分集合たちの「体積」に対する「表面積」の競合である。ここで概念を一つ導入しよう。

定義 2.11. あるケイリーグラフ Γ の *Cheeger 定数* は

$$\iota(\Gamma) := \inf \left\{ \frac{\#\partial\mathcal{E}K}{\#K} = \frac{\#\{\overline{vw} \in \mathcal{E}(\Gamma) : v \in K, w \notin K\}}{\#K} : K \text{ は } \mathcal{V}(\Gamma) \text{ の有限部分集合} \right\}$$

のように定義される。グラフ Γ が *従順 (amenable)* であるとは、その Cheeger 定数が 0 であることを意味し、*非従順である (nonamenable)* とは、その Cheeger 定数が正であることを意味する。

ここで、Cheeger 定数の正確な値はそれほど重要ではない場合が多い。それよりも重要なのは、Cheeger 定数が 0 より大きいか否かである。整数群 \mathbb{Z} およびその直接積 \mathbb{Z}^d を含め、すべての可換群、べき零群、および指數関数より遅く成長する群のケイリーグラフはアメナブルである。これらについて、次のことが知られている。

命題 2.1 ([AKN87], [BK89], [GKN92]). すべての従順ケイリーグラフ Γ とすべての $0 \leq p \leq 1$ に対して、ほぼ確実に $\Gamma[p]$ は無限連結成分を高々一つ持つ。すなわち、 $N_\infty(p; \Gamma) = \infty$ となる p は存在しない。特に、 $p_c(\Gamma) = p_u(\Gamma)$ である。

この命題は、前述したようにまず \mathbb{Z}^d において Michael Aizenman, Harry Kesten, および Charles M. Newman が証明した。その後すぐに R. M. Burton および Michael S. Keane が別の証明を提示したが、Alberto Gandolfi, Michael S. Keane, および Charles M. Newman がその論証を従順なケイリーグラフへと拡張した。

それでは逆に、 $p_c < p_u$ となるグラフにはどのようなものがあるだろうか？前述の $p_u = 1$ となる例、すなわち端が一つより多いグラフを除いた最初の例は、Geoffrey Grimmett と Charles M. Newman が扱った（正則 d 次樹木グラフ） $\times \mathbb{Z}$ であり、これは自由群 $\times \mathbb{Z}$ の標準的なケイリーグラフである [GN90]。このグラフは、 $(0, p_c), (p_c, p_u), (p_u, 1)$ の三つの区間がすべて空集合ではない最初の例である。

この例の発見後、I. Benjamini と O. Schramm が提起した予想を紹介する。

予想 2.12 ([BS96, Conjecture 6]). すべての非従順ケイリーグラフ Γ に対して $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ である。

これは、グラフの連結構造に関する組合せ論的な概念である従順性と、 $\Gamma[p]$ が無限に多くの無限連結成分を持つような p が存在する (I) という確率論的な性質が一致するという予想である。実は、任意のケイリーグラフ Γ に対して、 $N_\infty(p; \Gamma) = +\infty$ となる p が一つでも存在することと $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ は同値である。これは命題 2.1 に加え、 Γ が非従順なとき、 $\Gamma[p_c]$ は（ほぼ確実に）無限連結成分を一つも持たないという事実によるものである [BLPS99]。

2.5. 予想 2.12 の現況と本論文の目標. 予想 2.12 に関する多様なケイリーグラフが研究されてきた。Steven Lalley が、種数 (genus) の大きい曲面群の双曲平面上の平面ケイリーグラフ (planar Cayley graph) について $p_c < p_u$ であることを証明した後 [Lal98]、予想の提唱者である I. Benjamini と O. Schramm は、双曲平面上に余コンパクトに描かれた任意のケイリーグラフに対して $p_c < p_u$ を証明した [BS01]。

上記の二つの結果では、ケイリーグラフの平面性が重要な役割を果たした。しかし、ここで確認しておくべき点がある。ある意味で曲面群は非常に 2 次元的であるが、そのような曲面群であっても、平面敵ではないケイリーグラフをいくらでも持ち得る。例えば、五角形の完全グラフ K_5 を部分グラフとして持つケイリーグラフを構成することができる。曲面群のこのようなケイリーグラフに対してても $p_c < p_u$ であるかは上記の結果から直ちに導かれるわけではない。

再び Benjamini と Schramm の質問に戻ろう。質問 および推測 2.12 は、グラフの確率論的な性質と、ある種の幾何学的な性質が同値であると主張しているが、この幾何学的な性質はグラフの微細な連結性には全く関心がなく、巨視的な形状のみを問題にする性質である。この点はこの質問および推測を一層興味深いものにする。例えば、平面性はグラフの巨視的構造と局所的構造の両方に依存する性質である。それに対し、グラフの端 (end) の数、あるいは従順性 (amenability) は（一見そうは見えないかもしれないが）、グラフの粗い形状のみに依存する性質であることが知られている。特に、ある群のケイリーグラフが多端であるか、あるいは非従順であれば、その群のいかなるケイリーグラフも同様であることが知られている。特殊な有限生成集

合を選んで、例え K_{100} を部分グラフに持つようにしたとしても、端の数や従順性は変えられないということだ。

したがって、予想2.12にアプローチする際、与えられた群の「特定の」ケイリーグラフではなく、すべてのケイリーグラフに対して回答できれば、より望ましいだろう。この観点と併せて知っておくべき事実が一つある。すべての非従順な群のそれぞれにおいて $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ を満足するケイリーグラフ Γ を少なくとも一つはあるというので、これは Igor Pak と Tatiana Smirnova-Nagnibeda による結果である [PSN00]。このように特殊に構築されたケイリーグラフの $p_c < p_u$ から、同じ群の他の任意のケイリーグラフの $p_c < p_u$ を導き出せるかどうかは知られていない。

それでは、そのすべてのケイリーグラフが $p_c < p_u$ を満足する群にはどのようなものがあるだろうか。これに関しては、Damien Gaboriau と Russell Lyons が扱った、1 次の l^2 -Betti 数が消滅しない群のケイリーグラフがある [Gab05], [Lyo00], [Lyo13]。この概念の定義をここで導入するのは無理があるため、その例をいくつか挙げる。Gaboriau と Lyons が任意のケイリーグラフについて $p_c < p_u$ を示した群の例には、以下のようなものがある。

- 自由軍、および **自由積 (free product)**;
- 種数 2 以上の曲面群;
- 従順ぐんに対して融合 (Amalgamate) した自由積。

一方、Gaboriau および Lyons が扱っていない群には以下のようなものがある。

- 自由群の直積;
- $SL(2, \mathbb{Z})(n, \mathbb{Z})$; 一般に、ランク n のリーブル群の中の格子 ($n \geq 3$)
- 双曲曲面の写像類群 (mapping class group) $Mod(\Sigma_g)$;
- 自由群の外部自己同型群 (outer automorphism group) $Out(F_N)$;
- 自由積ではない直角 Artin 群 (right-angled Artin group)

また、Kazhdan の性質 (T) を持つ群の中でも、上記の理論が適用される群の例はまだ発見されていない。

次に検討するのは、Thomas Hutchcroft が [Hut19] および [Hut20] で研究した群である。後者の論文では、ある特徴的な対称性を持つケイリーグラフに対して $p_c < p_u$ を証明している。ここでいう特徴的な対称性とは、グラフ Γ の自己同型群 $Aut(\Gamma)$ に十分に大きな部分群 H が存在することだが、 H が Γ のすべての頂点間をほぼ自由に移動できる一方で、いくつかの頂点を偏向的に固定するという非対称性も持っているという意味である。深くは論じないが、この非対称性理論によって Hutchcroft は、すべての $d \geq 3$ および $k \geq 1$ に対して $(T_d : d$ 次数正則樹木グラフ $) \times \mathbb{Z}^k$ の $p_c < p_u$ を証明した。ただし、このような非対称性はグラフの局所的な構造に依存する性質であり、ある群の一つのケイリーグラフが満たすとしても、他のケイリーグラフで必ずしも満たすわけではない。

これに対し、前者の論文では特定の群のすべてのケイリーグラフについて論じている。それを今から述べる。

定理 2.13. [Hut19] 整数群 \mathbb{Z} と同型な有限指数部分群を持たず、無限な Gromov 双曲群 G のすべてのケイリーグラフ Γ について、 $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ である。

Gromov 双極性 (Gromov hyperbolicity) は、 d 次元双曲空間 \mathbb{H}^d 、 $K < -a^2$ の曲率を持つ单連結多様体、および樹木グラフをすべて包括する幾何学的群論の核心概念である。Gromov 双

曲群の定義も具体的には記さないが、 \mathbb{H}^d に真正かつココンパクトに作用する群（すなわちココンパクト格子）を例として考えると分かりやすい。特に、閉双曲多様体の基本群や自由群はすべて Gromov 双曲的である。

Gromov 双曲性をさらに一般化した**非円筒的双曲性 (acylindrical hyperbolicity)** は、定義するのが少しややこしい。だが、この概念は Gromov 双曲群、双曲曲面の写像類群、自由群の外部自己同型群、自由積ではない直角 Artin 群をすべて含む概念と考えれば良い。このような群に対して、著者と Donggyun Seo は次を論じた。

定理 2.14. [CS25] 整数群 \mathbb{Z} と同型な有限指数部分群を持たず、非円筒的双曲的な G のすべてのケイリーグラフ Γ について、 $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ である。

本論文では、これから述べる CAT(0) 立方複体あるいは中点グラフに作用する群について考察する。これらの群と Gromov 双曲群の間には密接な関係がある。まず、Gromov 双曲群という概念と、我々が考慮する CAT(0) 立方群の概念は、互いに包含関係にはない。しかし、両方に該当する重要な対象がある。それは 3 次元閉双曲多様体の基本群である。これらの群の中には曲面群と同型な部分群が歪むことなくうまく埋め込まれていることを Jeremy Kahn と Vladimir Marković が示した一方 [KM12]、このような曲面群をタイリングの材料として、群が自由に (freely) かつココンパクトに作用する CAT(0) 立方複体を構成できることを Nicolas Bergeron と Daniel T. Wise が証明した [BW12]。実際、すべての 3 次元閉双曲多様体は、円上の双曲曲面束を有限群で割ったものとして理解できるが、これを**仮想的ファイバー定理 (virtual fibring theorem)** という [Ago13]。この定理の Ian Agol による証明では、Bergeron と Wise の CAT(0) 立方複体の理論が重要な材料として用いられている。

CAT(0) 立方群の別の例としては、直角 Artin 群や**直角 Coxeter 群 (right-angled Coxeter group)** がある。これらの群は、定められた数種類の関係子 (relator) からなる有限表示を持っており、その表示に従って自然に Salvetti 複体および Davis 複体という CAT(0) 立方複体を建設できる。また、これらの群はこれらの複体に真正かつココンパクトに作用する。一般に直角アルティン群には、自由群 F_n と同型な部分群や、整数直積群 \mathbb{Z}^n と同型な部分群がいたるところに絡み合っているため、Gromov 双曲的ではない場合が多い。本論文では、このような群を双曲幾何学の代わりに CAT(0) 立方複体の幾何学によって理解しようと試みる。

3. パーコレーションの理論

本章では、定理1の証明をいくつかの段階に分けて解説する。まず、証明に必要となる幾何学的な観察を第3.1節で述べる。これらの幾何学的材料がそろえば、確率論的な論証によって定理1を導くことができる。この方針は Thomas Hutchcroft による理論であり [Hut19]、第3.2および第3.3節ではその概要を説明する。

CAT(0) 立方複体の理論に特に关心がなく、群上のパーコレーションの理論だけを概観したい読者にとっては、本章まで読めば十分であろう。一方で、確率論的側面よりも CAT(0) 立方複体に集中したい読者は、第3.1節飲みを読んだ後、次章に進んでも差し支えない。

3.1. 証明に必要となる幾何学的な事実. 群 G の有限生成集合 S に対するケイリーグラフ $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ を一つ固定する。本節では、 G の有限部分集合が Γ 上でどのように配置されるかに関する二つの性質を述べる。まだ CAT(0) 立方複体の幾何学を導入していないため、ここでは

直感を与える例を用いる。整数格子群 \mathbb{Z}^2 よりも、自由群 $F_2 = \langle a, b \rangle$ を思い浮かべる方が理解しやすいだろう。そこで、 $G = F_2$ 、 $S = a, a^{-1}, b, b^{-1}$ として説明を進める。

自由群 F_2 の有限部分集合の例として

$$A := N_{100}(id) = \{a_1 a_2 \cdots a_k : k \leq 100, \{a_1, \dots, a_{100}\} \subseteq S\}$$

を考える。この部分集合の大部分、具体的には 98% 以上は、厚さ 4 の「殻」 $N_{100}(id) \setminus N_{96}(id)$ に集中している。この殻の上の点 u を一つ固定しよう。このとき、 u から見た集合 A は、一方に向かって偏っていることが分かる。

実際、 u から 4 歩進む方法は全部で $4 \times 3^3 = 108$ 通りある。しかし、ほとんどすべての $a \in A$ に対して、 u から a に向かって歩く際の最初の 4 歩は、 a の選び方にほとんど依存せず、108 通りのうちのある一つに固定される。これを明確にするために

$$A_u := \{a \in A : \overline{ua} \text{ と } \overline{u(id)} \text{ の最小の } 4 \text{ 歩が一致する}\}$$

と定める。このとき、任意の $u \in A \setminus N_{96}(id)$ に対して、 $A \setminus A_u$ は $N_{12}(id)$ に含まれ、その大きさは高々 $4 \cdot 3^{11}$ である。言い換えれば、 A の中で例外的な $4 \cdot 3^{11}$ 個の点を除けば、残りはすべて u から見て同じ方向に集中している。ここで $4 \cdot 3^{11}$ という数は相当大きいものの、「4 歩」という定数のみに依存しており、 A の半径には依存しないということに注意しておく。

さらに、 u 自身ではなく、 u に最も近い $\partial N_{100}(id)$ の点に立って A を眺めると、 A は実質的に完全に一方に向かって偏っていると言ってよい。すなわち、 A の 98% 以上を占める $A \setminus N_{96}(id)$ の任意の元 u に対して、 $d_S(u, v) < 4$ を満たす点 v が存在し、 $A_v \supseteq A$ が成り立つことである。

以上の観察から、ほとんどすべての $u \in A$ に対して $A \simeq A_u$ が成り立つことが分かる。この事実がなぜ有用なのかを説明するために、 p -ランダムグラフ $\Gamma[p]$ における u の連結成分 C_u を考えてみよう。 u を基準にすると、 C_u は id の方向にもある程度伸びるが、それと同程度の確率で他の方向にも伸びると考えられる。したがって直感的には、 $\#(C_u \cap A_u)$ は $\#C_u$ の $1/108$ 程度であるはずだ。さらに、 A_u と A の差は有限個の点にすぎないため、 $\#C_u$ が非常に大きい場合（すなわち $p \nearrow p_c$ のとき）には、 $\#(C_u \cap A)$ も $\#C_u$ の $1/100$ 程度に抑えられると期待される。これが我々の目指す状況である。

同じ事実を別の観点から言い換えてみよう。点 $u = a^{100}$ を固定すると、 u から id に向かう最初の 4 歩はすべて a^{-1} の方向である。したがって、 u から A_u へ至るすべての経路は、4 点 $ua^{-1}, ua^{-2}, ua^{-3}, ua^{-4}$ を必ず通過する。このとき $(a^{-1}) \cdot (a^{-1}) = a^{-2}$ という関係があるため、 $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$ 自体は自由に独立であるとは言えない。しかし、それぞれから距離 1 にある点 $a^{-1}b, a^{-2}b, a^{-3}b, a^{-4}b$ は互いに自由に独立である。

より一般に、任意の点 $u \in N_{100}(id) \setminus N_{96}(id)$ に対し、 u から id に向かう最初の 4 歩が順に $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ であるとしよう。このとき、 u から A_u へ至るすべての経路は $us_1, us_1s_2, us_1s_2s_3, us_1s_2s_3s_4$ の 4 点を必ず通過しなければならない。ここで $\{s_1, s_1s_2, s_1s_2s_3, s_1s_2s_3s_4\}$ 自体は必ずしも自由に独立であるとは限らない。しかし、 $t_i \in S \setminus \{s_1^{-1}, s_i^{-1}, s_{i+1}\}$ をそれぞれ選ぶとき、

$$\{s_1t_1, s_1s_2t_2, s_1s_2s_3t_3, s_1s_2s_3s_4t_4\}$$

は自由に独立である。これは、ある意味で A_u が u から見て「一方向」に偏っていることを示唆している。

興味深い点は、 $A \subseteq G$ が丸い球状の集合でなくとも、同様の現象が期待できることである。そのために、以下の概念を導入する。

定義 3.1. 群 G の部分集合 $A \subseteq G$ が分岐的である (*branching*) とは、 A が自由に独立であることを意味する。すなわち、 $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \in A$ が

$$a_1 \cdots a_n = a'_1 \cdots a'_m$$

を満たすならば、 $n = m$ かつ全ての i に対して $a_i = a'_i$ が成り立つ。

さらに、 G の有限生成集合 S を一つ固定する。部分集合 $A' \subseteq G$ と定数 $D > 0$ に対し、 A' が D -分岐的である (D -roughly branching) とは、 A' がある分岐的な集合 A の D -近傍に含まれることをいう。すなわち、

$$A' \subseteq \{as_1 \cdots s_n : a \in A, 0 \leq n \leq D, s_i \in S\}$$

を満たす分岐的な集合 A が存在することを意味する。

ある定数 D に対して D -分岐的な集合を単に概分岐的であるという。

定義 3.2. 有限生成集合 S をもつ群 G を考える。 S の元を各ステップとして得られる経路を S -経路と呼ぶ。すなわち、 (g_0, g_1, \dots, g_n) が S -経路であるとは、すべての $i = 1, \dots, n$ に対して $g_{i-1}^{-1}g_i \in S$ が成り立つことをいう。

部分集合 $A, B, C \subseteq G$ に対して、 A と C を結ぶすべての S -経路が必ず B を通過するとき、 B を A と C の間のバリア (barrier between A and C) と呼ぶ。

定義 3.3. 有限生成集合 S を備えた群 G を考える。 G が 手品補題 (magic lemma) を満たすとは、ある定数 $K > 0$ が存在し、任意の $D > 0$ に対して概分岐的な部分集合が存在し、さらに任意の $\epsilon, D, D' > 0$ に対して定数

$$N = N(\epsilon, K, D, D')$$

が存在して、以下が成り立つことをいう。

任意の有限集合 $A \subseteq G$ に対して、 A の $(100 - \epsilon)\%$ を占める部分集合 $A' \subseteq A$ が存在し、各 $a \in A'$ に対して二つの K -分岐的な部分集合

$$B(a) = B_1(a) \sqcup \cdots \sqcup B_D(a), \quad B'(a) = B'_1(a) \sqcup \cdots \sqcup B'_D(a)$$

が存在して

$$\begin{aligned} & \{y \in A : \text{各 } 1 \leq i \leq D \text{ に対し、 } B_i(a) \text{ が } id \text{ と } a^{-1}y \text{ の間のバリアである}\} \cup \\ & \{y \in A : \text{各 } 1 \leq i \leq D \text{ に対し、 } B'_i(a) \text{ が } id \text{ と } a^{-1}y \text{ の間のバリアである}\} \cup \\ & \{y \in A : B \setminus N_{D'}(id) \text{ が } id \text{ と } a^{-1}y \text{ の間のバリアである}\} \end{aligned}$$

は A の元のうち高々 N 個を逃す。

定義 3.4. 群 G が 概反転可能である (roughly flippable) とは、有限個の部分集合 $A_1 \dots A_N \subseteq G$ および有限個の元 $g_1 \dots g_N \in G$ が存在して、以下を満たすことをいう。まず、各 i に対して、 id と g_i を結ぶ S -経路であって、その前半は $g_i A_i$ の外側にあり、後半は A_i の外側にあるような経路 γ_i が存在する。

さらに、任意の有限集合 $A \subseteq G$ に対し、 A の半分を占める部分集合 $A' \subseteq A$ が存在して、各 $a \in A'$ に対して、ある i が存在し

$$A \subseteq aA_i \subsetneq ag_iA_i^c$$

が成り立つ。

上記の定義における γ_i の条件はやや煩雑に見えるかもしれないが、例えば $d_S(id, g_i) > 2d_S(id, A_i^c)$ が成り立つ場合には、 id と g_i を結ぶ任意の d_S -最短経路を取れば十分である。

これらの性質はいずれも G の幾何学的形状に関するものであり、確率論的な要素は一切含まれていない。本論文の中心となる幾何学的命題は次の通りである。

命題 3.1. 有限生成群 G が、ある中点グラフ X に真正に作用し、かつ正規のランク 1 の対称性をもつと仮定する（定義 7.1 参照）。例えば、 X 上の G の作用が真正で、余コンパクトで、かつ既約であれば、この条件は常に満たされる。さらに、 G が \mathbb{Z} と同型な有限指数部分群を含まないと仮定する。

このとき、 G は任意の有限生成集合に対して手品補題を満たし、さらに概反転可能である。

この事実がパーコレーションとどのように関係するかは、次の命題にまとめられている。

命題 3.2. 自由部分群をもち、有限集合 $S \subseteq G$ により生成される群 G が、手品補題を満たし、かつ概反転可能であると仮定する。このとき、ケイリーグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ は $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ を満たす。

本節の残りでは、命題 3.2 の証明を与える。続く章では、命題 3.1 の内容を詳しく考察する。

3.2. **基礎的な確率論.** 本節の内容は、[Gri89] の第 2 章および第 8 章、ならびに [DCT16] の第 1 節から抜粋して翻訳したものである。

有限集合あるいは可算集合 \mathcal{E} を一つ取り、

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{0, 1\}^{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E} \text{ から } \{0, 1\} \text{ への写像}\}, \\ \mathcal{B}(\Omega) &:= \{\Omega \text{ の Borel 部分集合}\} \end{aligned}$$

と定める。さらに、パラメータ $0 \leq p \leq 1$ が与えられたとき、各 $e \in \mathcal{E}$ に対して平均 p のベルヌーイ確率測度 μ_e を取り、その直積測度 $\mathbb{P}_p = \otimes_{e \in \mathcal{E}} \mu_e$ を考えることで、確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}_p)$ が得られる。

グラフ Γ 上のパーコレーションは、この確率空間を用いて自然に記述できる。辺集合 $\mathcal{E}(\Gamma)$ を \mathcal{E} とし、確率変数 $\Gamma : \omega \mapsto \Gamma(\omega)$ を

$$\Gamma(\omega) := (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\omega) := \{e : \omega(e) = 1\}) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

と定めると、 $\Gamma(\omega)$ は我々が考えてきた p -ランダム部分グラフ $\Gamma[p]$ に他ならない。

ある事象 $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ が増加的（increasing）であるとは、

$$[\omega \in A] \wedge [\omega \leq \omega'] \Rightarrow \omega' \in A \quad (\forall \omega, \omega' \in \Omega)$$

が成り立つことをいう。また、可測関数 $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が増加的であるとは、任意の t に対して集合 $\{\omega : F(\omega) > t\}$ が増加的であること、すなわち $\omega \leq \omega'$ ならば $F(\omega) \leq F(\omega')$ が成り立つことを意味する。

補題 3.1. 正の実数 $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$ を考える。このとき、任意の增加的事象 $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対して

$$\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A)$$

が成り立つ。さらに、任意の非負の增加的確率変数 $X \geq 0$ に対して

$$\mathbb{E}_{p_1} X \leq \mathbb{E}_{p_2} X$$

が成り立つ。

Proof. 二つの確率空間 $(\Omega, \mathbb{P}_{p_i})$ を同時に扱うため、

$$(Y, \mathbb{P}) := ([0, 1], Leb)^{\mathcal{E}(\Gamma)}$$

を考える。また写像 $\Psi_i : Y \rightarrow \Omega$ を次のように定める。 $y \in Y$ に対し、 $\Psi_i(y)$ の e 成分は、 $y(e) < p_i$ のとき 1、そうでないとき 0 とする。

このとき、 $\Psi_i^* \mathbb{P}$ による各座標の値は 1 となる確率が p_i であり、異なる座標は互いに独立である。したがって、 $\Psi_i^* \mathbb{P}$ と \mathbb{P}_{p_i} は同じ分布を持つ。

よって $\mathbb{P}_{p_i}(A)$ は $\mathbb{P}(\Psi_i^{-1}(A))$ に等しい。ここで A が增加的であることから、任意の $y \in Y$ に対して、 $\Psi_1(y) \in A$ ならば $\Psi_2(y) \geq \Psi_1(y)$ もまた A に属する。よって

$$\mathbb{P}_{p_i}(A) = \mathbb{P}(\Psi_1^{-1}(A)) \leq \mathbb{P}(\Psi_2^{-1}(A)) = \mathbb{P}_{p_2}(A)$$

が得られ、最初の主張が従う。

次に、 X が增加的事象の特性関数である場合についても、同様に第二の主張が成り立つ。さらに、そのような特性関数の非負係数による線形結合 (*) についても、同じ不等式が成り立つ。任意の增加的確率変数 X に対して、 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots, \lim_i f_i = X$ となるような (*) の関数 f_i を取ることができる。この関数列に単調収束定理を適用することで、一般の場合の第二の主張も得られる。□

この補題から、事実 2.3 および 2.7 は直ちに確認できる。

事実 2.3 および 2.7 の証明. 連結グラフ Γ の二点 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ に対して、

$$\{\omega : x \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} y\} \text{ および } \{\omega : \#C_x = +\infty\}$$

はいずれも增加的事象である。これらの事象に補題 3.1 を適用すれば、主張が従う。□

또다른 응용으로서 사설 2.6 를 증명해보자.

사설 2.6 의 증명. 먼저 자유군 $F_2 = \langle a, b \rangle$ 의 표준 생성집합 $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ 에 대한 케일리 그래프 위에서 $\theta(0.91) > 0$ 임을 보이겠다. 이를 위해

$$A_R(k) := \{\omega : \#\{v \in \partial N_R(id) : id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap N_R(id)} v\} \geq k\}$$

를 정의하자. 이 사건은 $N_R(id)$ 안의 모서리의 개폐여부에만 의존하고 바깥의 모서리는 신경쓰지 않음을 유의하라. 따라서 $N_R(id)$ 안의 모서리 개폐여부만을 명시한 사건들의 모임

$$\mathcal{E}_R := \{A \subseteq \Omega : \text{모든 } \omega, \omega' \in A \text{ 및 } e \subseteq N_R(id) \text{ 에 대해 } \omega(e) = \omega'(e)\}$$

를 정의하자. 이제 주장할 것은,