

CAT(0) 立方複体とパーコレーション

CHOI, INHYEOK (チョイ・インヒヨック)

ABSTRACT. 本論文では著者と Donggyun Seo が [CS25] で扱った群のケイリーグラフ上のパーコレーションを CAT(0) 立方複体の言語を通じて新たに解釈する。併わせて、群上のパーコレーションと CAT(0) 立方複体の幾何学の基礎について説明する。

(Abstract in English) In [CS25], the author and Donggyun Seo proved the existence of infinitely many infinite clusters in a random subgraph of certain Cayley graphs. We provide an alternative proof of this result for CAT(0) cubical groups in terms of halfspaces.

This paper is expository, aiming at an invitation to percolation on infinite groups and/or CAT(0) cubical geometry.

キーワード. パーコレーション、ケイリーグラフ、CAT(0) 立方複体

1. 初めに

幾何学的群論の主要な哲学の一つは、群が距離空間に等長写像として作用するとき、その作用の性質から群の幾何学的性質を読み取ることである。このために使われる距離空間として CAT(0) 立方複体 (CAT(0) cube complex) というものがある。本論文では CAT(0) 立方複体上の真性かつココンパクトで既約な作用 (proper, cocompact and irreducible action) をもつ群の幾何学を考察する。これに基づき、そのような群のケイリーグラフ上のパーコレーションが表すある性質を証明する。

この結果はより一般的な設定において既に知られていることを述べておく。具体的には、著者と Donggyun Seo は [CS25] で非円筒的双曲群 (acylindrically hyperbolic group) に対して同様の結果を証明した。本論文で扱う群は全て非円通的双曲性をもつため、下記の定理1は本質的に新しいものではない。しかしながら、定理1を CAT(0) 立方複体の幾何学を用いて新たに証明することが目標である。すなわち、本論文の趣旨は、(1) 読者を CAT(0) 立方複体の幾何学へ招待すること、並びに (2) 双曲幾何学の言語で書かれた確率論的结果を CAT(0) 立方複体の枠組みで再解釈することにある。

まず幾何学的な設定を述べる。有限生成群 G とその有限生成集合 S が与えられたとき、 G の元を頂点とし、 S の元で関連されている元の対を辺で結ぼう。すなわち $g^{-1}h \in S$ を満たす $g, h \in G$ に対して辺 \overline{gh} を結ぶのである。このように定義されるグラフ $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ を S に関する G のケイリーグラフ (Cayley graph) と呼ぶ。

次に、確率過程を一つ導入する。0 と 1 の間の実数 p を固定する。表が出る確率 p 、裏が出る確率 $1-p$ の硬貨を Γ の各辺に一つずつを置こう。全ての硬貨を独立に投げ、表が出た辺だけ残し、裏が出た辺は消す。この操作によって得られる部分グラフを $\Gamma[p]$ と記す。直感的には、 $\Gamma[p]$ は Γ のおよそ p 割を保持したランダムな部分グラフとみなせる。この確率的グラフの連結成分

のうち、無限に大きい成分がいくつあるかを調べたい。これに関する本論文の主要な定理を以下に述べる。

Theorem A. $CAT(0)$ 立方複体 X と有限生成群 G を一つ考える。このとき G が X に真性かつココンパクトかつ既約に作用すると仮定する。さらに、 G は整数群 \mathbb{Z} と同型な有限指数部分群 (*finite-index subgroup*) を持たないとする。

このとき、 G の任意の限生成集合 S に対して、ある実数 $0 < p < 1$ が存在し、 G のケイリーグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ の p -ランダム部分グラフ $\Gamma[p]$ の無限=非有界連結成分が無限に多い確率が1である。

今論じている確率過程をパーコレーション (percolation process) と呼ぶ。グラフ上のパーコレーションおよび $CAT(0)$ 立方複体に関する理論は極めて膨大であり、その全てを紹介することは不可能である。だが、定理の証明に必要な基礎だけはきちんと説明しよう。この内容はいずれも既知の結果であり、次の参考文献の一部を要約したものである。

- Geoffrey Grimmett, Percolation [BK89].
- Hugo Duminil-Copin, Introduction to Bernoulli percolation [DC18].
- Wolfgang Woess, Random walks on infinite graphs and groups [Woe00].
- Russell Lyons and Yuval Peres, Probability on trees and networks [LP16].
- Thomas Hutchcroft, Percolation on hyperbolic graphs [Hut19].
- Michah Sageev, Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes [Sag95].
- Pierre-Emmanuel Caprace and Michah Sageev, Rank rigidity for $CAT(0)$ cube complexes [CS11].
- Anthony Genevois, Algebraic properties of groups acting on median graphs [Gen24].

まずパーコレーションを二つの章にわたって説明する。第2章ではパーコレーションの理論を概説し、本論文における議論の背景を与える。第3章では $CAT(0)$ 立方複体上に作用する群の二つの幾何学的性質を述べ、これらを用いてパーコレーションに関する結果を導く。

続いて、 $CAT(0)$ 立方複体の理論を述べる。第4章では $CAT(0)$ 立方複体と本質的に等しい対象である中点グラフ (median graph) を紹介する。第5章では中点グラフの幾何学において重要な概念である超平面 (hyperplane)、半空間 (halfspace) およびそれらの鎖 (chain) を導入する。その後、パーコレーションに関連する $CAT(0)$ 立方複体の幾何学的性質、例えば「手品補題¹」(命題6.1) を第6章および第7章で証明する。第8章ではより詳細な $CAT(0)$ 立方複体の幾何学を展開する。

既存の文献に現れていない議論は、第6章および第7章に限られている。したがって、読者がもし望めば、第3.1節のみを読んだ後、これらの章に進んでも差し支えない。また、パーコレーションの理論と $CAT(0)$ 立方複体の幾何学は、互いに独立に読んでも問題はない。

2. 背景知識

本章では、今後考察する問題を設定し、関連する歴史的背景を概説するが、証明は一切与えない。内容としては、第2.1節のみを読めば、第4章以降を理解するのに困難はない。しかしながら、初めてパーコレーションに接する読者には、本章全体に軽く目を通しておくことを勧める。

¹僕が名付けたものではありません。

2.1. グラフと群. 本稿におけるグラフ (graph) は頂点集合 \mathcal{V} と辺集合

$$\mathcal{E} \subseteq \binom{\mathcal{V}}{2} := \{S \subseteq \mathcal{V} : \#S = 2\}$$

からなる概念である。この慣習では自分自身を結ぶ辺である自己ループや、複数の辺が同じ頂点対の間を結ぶ多重辺は許さない。

辺 $e = \{v, w\} \in \mathcal{E}$ に対し、 v および w を e の端点 (endpoint) と呼び、 $e = \overline{vw}$ と表記する。また、二つの辺 $e, f \in \mathcal{E}$ が一つの端点を共有するとき、それらは隣接している (adjacent) と言う。二つの頂点 v, w がある辺で繋がれているときにもそれらが隣接しているといい、 $v \sim w$ と書く。

頂点集合の部分集合 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ が与えられたとき、

$$\partial_{\mathcal{E}} A := \{\overline{xy} \in \mathcal{E}(\Gamma) : x \in A \text{かつ } y \notin A\}$$

を A の境界 (boundary) と呼ぶ。この定義では辺を集めた一方、

$$\partial_{\mathcal{V}} A := \partial_{\mathcal{E}} A \cap A = \{x \in A : x \sim y \text{を満たす } A \text{ の外にある頂点 } y \notin A \text{ が存在する}\}$$

もまた A の境界と呼ぶ。文脈上混乱の恐れがない場合には、両方とも単に ∂A と記す。

グラフ $\Gamma = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma))$ の辺集合の部分集合 $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(\Gamma)$ で作られたグラフ $\Gamma' = (\mathcal{V}, \mathcal{E}')$ を Γ の部分グラフ (subgraph) と呼ぶ。このとき、次の表記を導入する：

$$\Gamma \setminus \Gamma' := (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \mathcal{E}').$$

グラフ Γ の頂点列 v_0, v_1, \dots, v_n に対し、 $e_1 := \overline{v_0v_1}, \dots, e_n := \overline{v_{n-1}v_n}$ がいずれも Γ の辺であれば、これら頂点と辺からなるグラフ $\Gamma' := (\{v_0, \dots, v_n\}, \{e_1, \dots, e_n\})$ を Γ 上の長さ n の経路 (path) と呼ぶ。このとき、経路の長さを $\text{len}(\Gamma') = n$ と定義する。

経路 Γ' の始点と終点が一致する場合、 Γ' を回路 (circuit) と呼ぶ。すなわち、頂点列 v_1, \dots, v_n に対してもし $e_1 := \overline{v_nv_1}, \dots, e_n := \overline{v_{n-1}v_n}$ がいずれも Γ の辺であるとき、 $\Gamma' := (\{v_1, \dots, v_n\}, \{e_1, \dots, e_n\})$ を Γ 上の長さ n の回路と呼ぶ。特に v_1, \dots, v_n が相違なる頂点であれば Γ' を長さ n のサイクル (cycle) もしくは n -サイクルと呼ぶ。

グラフ Γ の二つの部分集合 $A, B \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ が Γ 上のある経路で繋がっている場合、 $A \leftrightarrow_{\Gamma} B$ と書く。グラフ Γ が連結 (connected) であるとは、任意の頂点 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ に対し $x \leftrightarrow_{\Gamma} y$ であることをいう。グラフの各頂点および辺に対し、それを含む最大の連結部分グラフを一意に定めることができ、それをその頂点および辺の連結成分 (connected component) と呼ぶ。任意のグラフの頂点集合または辺集合は、連結成分によって分割される。

グラフ Γ が二分グラフ (bipartite graph) であるとは、 Γ の各辺がある A の頂点とある B の頂点を結ぶような $\mathcal{V}(\Gamma)$ の分割 $A \sqcup B$ が存在することをいう。

事実 2.1. グラフ Γ が二分グラフであることと、 Γ に奇数長さのサイクルが存在しないことは同値である。

連結グラフ Γ の頂点の間に自然な距離構造を与えることができる。二つの頂点 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ に対し

$$d(x, y) := \min \{ \text{len}(P) : P \text{ は } x \text{ と } y \text{ を結ぶ経路}\}$$

と定義すれば良い。このとき $d(\cdot, \cdot)$ は三角不等式と非退化性 (nondegeneracy) を満たす。したがって $d(\cdot, \cdot)$ は実際に距離構造をなし、これを組合せ距離 (combinatorial metric)、 l^1 -距離またはグラフ距離 (graph metric) と呼ぶ。つまりグラフは自然に距離空間とみなせる。

頂点集合の部分集合 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ と正の実数 $k > 0$ に対し、

$$N_k(A) := \{y \in \mathcal{V}(\Gamma) : \text{ある } a \in A \text{ に対し } d_\Gamma(a, y) \leq k \text{ である}\}$$

を A の半径 k の**近傍 (neighborhood)** と呼ぶ。

さて群の話題に移ろう。群 (group) とは合成および逆の操作が可能な演算が備わっている構造を指す。具体的には、 id という特別な元を持つ集合 G に二項演算 $\cdot : G^2 \rightarrow G$ が定義されており、以下の条件を満たすとき、 (G, \cdot, id) を群と呼ぶ。

- (1) (結合法則) 任意の $g, h, k \in G$ に対し $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ である。
- (2) (単位元の性質) 任意の $g \in G$ に対し $g \cdot id = id \cdot g = g$ である。
- (3) (逆元の存在性) 任意の $g \in G$ に対し $g^{-1} \in G$ が存在して $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = id$ を満たす。

もし $id \in H \subseteq G$ に \cdot を制限したとき (H, \cdot, id) もまた群をなすなら、 H を G の部分群 (subgroup) と呼び $H \leq G$ のように記す。このとき、 G は $\{[gH] : g \in G\}$ という同値類によって分割されるが、この同値類の数を H の**指数 (index)** と呼ぶ。この指数が有限であれば H は G の有限指数部分群という。

群 G の部分集合 S が G の生成集合 (generating set for G) であるとは、 S を含む G の中の最小の部分群が G 全体と一致することをいう。すなわち、各 $g \in G$ に対し、 $g = s_1^{\epsilon_1} \cdots s_n^{\epsilon_n}$ を満たす S の有限個の元 s_1, \dots, s_n および $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{1, -1\}$ が存在することを意味する。このとき、 g を上記のように表すために必要な S の元の個数の最小値を g の S -単語ノルム (S -word norm) といい、 $\|g\|_S$ と記す。最後に、有限生成集合を持つ群を**有限生成群 (finitely generated group)** と呼ぶ。

数学にはさまざまな群がある。自明群 (trivial group) $1 = \{id\}$ や、 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のような有限群 (finite group) がその一例である。最も簡単な無限群としては、整数群 $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ が挙げられる。このような群は、しばしば次のように構成される。ある数学的な構造 X が与えられたとき、 X から X への写像のうち、逆操作が可能で (例えば单射写像・位相同型写像・正則行列など) かつ X の構造を保つものをすべて集めると、その集合は自然に群をなす。例えば、整数群 \mathbb{Z} は、数直線上のアフィン変換のうち、全单射であり、整数点全体の集合をそれ自身に移るもの集まりとみなすことができる。

実は、すべての群はあるグラフの対称性を集めたものと見ることができる。生成集合 S が与えられた群 G を考えよう。初めに導入したように、 G のすべての元を頂点とし、 S の元によって関連付けられたすべての順序対を辺で結んだグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ を、 S に関する G のケイリーグラフ (Cayley graph of G with respect to S) と呼ぶ。このとき、グラフ距離は自然に S -単語ノルムによって与えられる。すなわち、 $d_\Gamma(g, h) := \|g^{-1}h\|_S$ である。生成集合 S への依存性をより明確にするため、 $d_S(g, h)$ と記すこともある。このとき、生成されたグラフが局所有限 (locally finite) であるためには、すなわち有限の半径を持つすべての球が有限個の頂点のみを含むためには、 S が有限集合であることが必要十分条件となる。

今後、留意すべき群が二つある。まず、 d 次元の整数格子群 \mathbb{Z}^d は

$$\{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) : v_i \in \mathbb{Z}\}$$

と定義される。この格子群の有限生成集合の一つとして $\{\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j=1}^d : i = 1, \dots, d\}$ を考えよう。これら d 個の「方向移動」を用いて他の移動を生成するとき、その順序は重要ではない。つまり、 $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ が成り立つ。実は、この等式さえ理解していれば、 \mathbb{Z}^d におけるすべ

ての等式 (例えば $(3, 1) = (2, 1) - (1, 3) + (2, 4)$ など) を導出することができる。深入りはしないが、これが

$$\mathbb{Z}^d \simeq \langle s_1, \dots, s_d \mid s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1} = id \rangle$$

と記述する理由である。このとき、右辺を \mathbb{Z}^d の表示 (presentation) と呼ぶ。

それでは、

$$F_d := \langle s_1, \dots, s_d \mid - \rangle$$

はどのような群を指すのだろうか。この群は s_1, \dots, s_d およびその逆元 $s_1^{-1} \dots s_d^{-1}$ を用いて書けるすべての単語の集合であり、ある文字とその逆元が隣り合ったときキャンセルできるという基本等式 ($s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = id$) 以外には、いかなる規則も持たない群である。この群をランク d の自由群 (free group of rank d) と呼び、このとき $\{s_1, \dots, s_d\}$ はこの群を自由に生成する (freely generate) という。ランク 2 の自由群のケイリーグラフがどのような形をしているか描いてみて、図1と比較せよ。

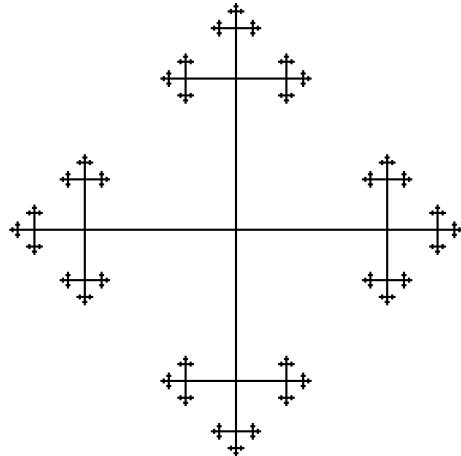


FIGURE 1. ランク 2 の自由群の標準ケイリーグラフ

一般に、群 G の任意の元 $g, h \in G$ が $gh = hg$, すなわち $ghg^{-1}h^{-1} = id$ を満たすとき、 G を可換群 (abelian group) と呼ぶ。可換群を含むより広い群のクラスとして、べき零群 (nilpotent group) や可解群 (solvable group) などがあるが、それらの定義は一応省略する。

最後に、群の成長 (growth) を論じる。有限生成群 G の有限生成集合 S を固定したとき、ケイリーグラフ $G = Cay(G, S)$ の半径 R の球内には頂点がいくつ含まれているかを問うことができる。例えば、

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln \#\{g \in G : \|g\|_S \leq R\}}{R} > 0?$$

のような質問を考えることである。もしこれに大した答えが「YES」なら、球内の要素数は半径に対して指数関数的に増加することである。実は、この問い合わせの答えは S の選択に寄らない。すなわち、群 G が与えられたとき、ある一つの有限生成集合に対して答えが「YES」であれば、他のどの有限生成集合を選んでも答えは「YES」となるのである。のような性質を持つ群を、指数関数的成長 (exponential growth) を持つと呼ぶ。例として、自由群は指数関数的に成長するが、整数格子群はそうではない。また、指数関数的に成長する部分群を持つすべての群は、それ

自身も指数関数的に成長する。(注意: 部分群内の単語距離は、親となる群での単語距離とは大きく異なる可能性があることに留意せよ。)

2.2. パーコレーション. これからはパーコレーション (percolation) について述べる。背景として連結グラフ $\Gamma = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma))$ を一つ固定し、その部分グラフ全体の空間

$$\Omega := \left\{ \Gamma' = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}') : \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(\Gamma) \right\}$$

を考える。各辺 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ に対し、 Ω を分割する二つの集合 $\{\Gamma' \subseteq \Gamma : e \in \Gamma'\}$ と $\{\Gamma' \subseteq \Gamma : e \notin \Gamma'\}$ を取ろう。これらをそれぞれ $\{\omega : e \text{ が開いている}\}$ および $\{\omega : e \text{ が閉まっている}\}$ と呼ぶ。すべての $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ に対しそのような集合を集め、それらが生成する最小の σ -加法族を Ω に備えつける。

続いて、パラメータ $0 \leq p \leq 1$ を固定しよう。各辺 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ を独立に確率 p で開き、確率 $1-p$ で閉じるとすることで確率測度 \mathbb{P}_p を Ω 上に定める。直感的には、「全体グラフの $(100p)\%$ 」に当たるランダムな部分グラフを考えることになる加法族である。この確率的部分グラフを $\Gamma[p]$ と書く。

物理的な比喩として、 Γ の形状をした均質な結晶を構成する分子を考えよう。温度を徐々に上げると、結晶の各分子結合がある確率 ($= 1-p$) で切断される。結晶がどのような形で碎けるかは確率的であり、この現象を模写したもののが $\Gamma[p]$ である。このとき、各分子結合が残るか切れるかは互いに独立であると仮定していることに注意されたい。このような数学的モデルは Simon R. Broadbent と John M. Hammersley によって [BH57] で初めて導入された。

上記のモデルでは Γ の各辺が残るかまたは消えるが、これをベルヌイボンドパーコレーション (Bernoulli bond percolation process) と呼ぶ。各頂点が残るかまたは消えるサイトパーコレーション (site percolation process) もまた、物理的パーコレーションを記述するモデルの一つである。他にも、各辺に確率的な長さを与えることによって定まるグラフ距離の構造を探るファーストパッセージパーコレーション (first passage percolation) などがある。本論文ではベルヌイボンドパーコレーションに焦点を当てる。パーコレーションについてより深い興味がある読者は、Geoffrey Grimmett の本 [Gri89] を参照されたい。

参考 2.2. 連結グラフ Γ の対象の群 $\text{Aut}(\Gamma)$ が Γ の任意の頂点の対 $v, w \in \Gamma$ を結びつけることができるとき、すなわち $v = g \cdot w$ を満たす $g = g(v, w) \in \text{Aut}(\Gamma)$ が存在するとき、 Γ は頂点推移的 (vertex-transitive) だという。これはすなわち $\mathcal{V}(\Gamma)$ における $\text{Aut}(\Gamma)$ -軌道がただ一つであることを意味する。一般に、 $\mathcal{V}(\Gamma)$ における $\text{Aut}(\Gamma)$ -軌道が有限個である場合、 Γ を準推移的 (quasi-transitive) と呼ぶ。

便宜上、今後はグラフの中でも 有限生成群のケイリーグラフ に限って話を進める。しかし、後で挙げる定理の多くは、ケイリーグラフよりも一般的なケースである頂点推移的、あるいは準推移的なグラフに対しても証明されている。詳細は原論文を参照されたい。

2.3. パーコレーションの相転移. まずは、平面格子 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ 上のパーコレーションを見てみよう。このとき、パラメータ p が大きいほど確率的により多くの辺が生き残るために、 p が 1 に近ければグラフ Γ がほぼそのまま残ると予想できる。これに対し、 p が 0 に近ければ元のグラフの大部分が削除され、小さな断片のみが残るだろう。この相反する予想の尺度として、

「無限に大きい連結成分が発生するか？」

を聞いてみよう。平面格子グラフに関しては、以下のことが知られている。

- $p \leq 1/2$ の時は、 $\Gamma[p]$ に無限連結成分が発生する \mathbb{P}_p -確率が 0 である一方、
- $p > 1/2$ の時は、 $\Gamma[p]$ に無限連結成分が発生する \mathbb{P}_p -確率が 1 である。

これを鑑みて、パラメータ p が $1/2$ に至るとき、平面格子上のパーコレーションは相転移 (phase transition) を起こすと言うことができる。このとき基準となる値 $1/2$ を臨界パラメータ (critical parameter) と呼び、 $p_c(\Gamma)$ と記す。すなわち、 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ に関して $p_c(\Gamma) = 1/2$ である。

一般的なグラフ Γ でパーコレーションを行うと、無限連結成分が発生する確率が 0 でも 1 でもない値をとる可能性もある。しかし、これは極めて非均質なグラフでのみ起こり得る現象であり、群のケイリーグラフのような均質なグラフでは決して起こらない。簡潔な議論のため、これからは群のケイリーグラフ上でのパーコレーションのみを記述する。

ケイリーグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ を一つ考えよう。 Γ の形状はどの点から見ても同じなので（これが我々の望んでいた均質性である）、単位元 $id \in G$ を基点としよう。ランダム部分グラフ $\Gamma[p]$ における id の連結成分を C_{id} と記し、この起点連結成分が無限となる確率を

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p (\#C_{id} = +\infty)$$

と定義する。このとき、次が成り立つ。

事実 2.3 (補題3.1参照). $\theta(p)$ は $p \in [0, 1]$ に対する単調増加関数である。

さらに、 p が十分小さい正の実数である場合 (例えば $0 < p \leq \frac{1}{\#2S}$ のとき) $\theta(p) = 0$ が成り立つことを確認できる。つまり、 $\theta(p)$ は初期区間では値 0 にとどまるが、ある時点から 0 より大きい値を持つことになる。この時点を Γ の臨界パラメータ (critical parameter) と定義する。形式的には

$$p_c(\Gamma) := \inf \{p \in [0, 1] : \theta(p; \Gamma) > 0\}$$

と定める。ケイリーグラフの均質性により、次の事実が成り立つ。

事実 2.4 (補題3.4参照). あるケイリーグラフ Γ の臨界パラメータ p_c を考えよう。このとき

- 各 $0 \leq p < p_c$ に対し、 $\mathbb{P}_p (\Gamma[p] \text{ には無限連結成分が一つもない}) = 1$ であり、かつ
- 各 $p_c < p \leq 1$ に対し、 $\mathbb{P}_p (\Gamma[p] \text{ に無限連結成分が存在する}) = 1$ である。

要するに、臨界相転移は任意のケイリーグラフにおいて起こる。ここで加えたいことは、 p_c が 1 となるグラフも多いことだ。例えば、図4に示した数直線グラフでは、左・右半直線上の辺が無限個切断されると、無限連結成分は生じない。このような事象は $p < 1$ のとき確率 1 で起こる。したがって、 $p_c(\mathbb{Z}) = 1$ が成り立つ。この事実は数直線グラフの場合に限ることではなく、 \mathbb{Z} のいかなるケイリーグラフに対して同様に成り立つ。一般に、 \mathbb{Z} を有限指数部分群と持つ群のケイリーグラフに対して $p_c = 1$ である。これらが $p_c = 1$ を満たすグラフの全てであるかどうかが、Itai Benjamini と Oded Schramm によって提起された予想である。

予想 2.5. [BS96] 整数群 \mathbb{Z} を有限指数部分群として持たない有限生成群の任意のケイリーグラフ Γ に対して、 $p_c(\Gamma) < 1$ が成り立つ。

この予想は指数関数的に成長する群に対しては Russell Lyons によって、有限表現を持つ群に対しては Eric Babson と Itai Benjamini によって示された ([Lyo95], [BB99])。その特殊例として、自由群のケイリーグラフに対して $p_c < 1$ であることは容易に分かる。自由群を部分群として持つ群のケイリーグラフに対しても同様に $p_c < 1$ が成り立つ。

事実 2.6. ランク 2 の自由群を部分群として持つ有限生成群の任意のケイリーグラフ Γ に対して、 $p_c(\Gamma) < 1$ が成り立つ。

この事実は前述の結果よりは弱いが、我々の目的のためには十分である。よって、事実 2.6だけについて、後で証明を挙げる。

別の相転移を論じる前に、まずは臨界相転移をもう少し詳しく眺めてみよう。先ほど、 $\theta(p)$ の様子が $p = p_c$ を境に変化すると述べたが、さて臨界点 $p = p_c$ における値はいくらだろうか。すなわち、 $\theta(p_c)$ は 0 か、または正の値を取るかを考えよう。言い換えれば、臨界値 $p = p_c$ において $\Gamma[p]$ は無限連結成分を持つのか、という問い合わせになる（「臨界点パーコレーションが起こるか」とも表現される）。前述した平面格子 \mathbb{Z}^2 の場合には、 $\theta(p_c) = \theta(1/2) = 0$ であることが Harry Kesten による有名な結果として知られている ([Kes80]。Theodore Harris の論文 [Har60] も参照)。一方で、三次元整数格子 \mathbb{Z}^3 においては、 $\theta(p_c)$ が正なのか 0 なのかは現在でも重要な未解決問題である。次に、与えられたケイリーグラフ Γ とパラメータ $0 \leq p \leq 1$ に対して、基点 id の連結成分が平均的にどの程度大きいのかを考えることができる。これに対し

$$\chi_p := \mathbb{E}_p[\#C_{id}] = \sum_{g \in G} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p[\#C_{id} = n] & \theta(p) = 0 \text{ の場合}, \\ +\infty & \theta(p) > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

で定義される量を **感受率 (susceptibility)** と呼ぶ。 $\theta(p)$ と同様に、次が分かっている。

事実 2.7 (補題3.1参照). χ_p は $p \in [0, 1]$ に対して単調増加関数である。

定義から明らかなように、 $p > p_c$ のとき $\chi_p = +\infty$ である。また、 p が十分小さい正の値であれば $\chi_p < +\infty$ となることも容易に分かる。しかし、その中間でどのような値を取るかは自明ではない。実際、ほとんど確実に有限値を持つ確率変数であっても、その期待値が無限大になることはあり得るため、 $\theta(p) = 0$ だからといって直ちに $\chi_p < +\infty$ が従うわけではない。この点、すなわち $p < p_c$ に対して $\chi_p < +\infty$ であることは、Michael Aizenman と David Barsky がまず d 次元格子グラフの場合に示し、その後 Tonći Antunović と Ivan Veselić がケイリーグラフを含むより一般のグラフに対して証明した。

事実 2.8. [[AB87], [AV08]] ケイリーグラフ Γ の臨界パラメータ p_c に対し、任意の $0 \leq p < p_c$ について χ_p は有限である。さらに、任意の $p \nearrow p_c$ について $\chi_p \nearrow +\infty$ となる。特に $\chi_{p_c} = +\infty$ となる。

この結果には、Hugo Duminil-Copin と Vincent Tassion によるより現代的な証明 [DCT16] や、Hugo Vanneuville による別のアプローチ [Van25] が知られている。

さらに、(1) χ_p が $p \nearrow p_c$ のときどのような速度で発散するのか、(2) $p \searrow p_c$ のとき $\theta(p)$ がどのような速度で 0 に近づくのか、(3) $p = p_c$ における C_{id} の大きさの確率分布がどのような形になるのか、といった問い合わせ立てることもできる。これ以上深入りはしないが、臨界パラメータ付近における $\Gamma[p]$ の基点連結成分の大きさや形状を理解することは、パーコレーション理論における根本的な課題である。

2.4. 無限連結成分の個数. これまで、パラメータ p がある領域 ($p_c < p \leq 1$) にあるとき、 $\Gamma[p]$ には「ほぼ確実」に無限連結成分が現れるという話をしてきた。では、いくつの無限連結成分ができるのだろうか？1 個だろうか？2 個、あるいは 10 個だろうか？それとも無限個なのだろうか。そして、この個数は p の値によってどのように変化するのだろうか。

もし議論の対象をケイリーグラフに限定していなければ、これらの問い合わせに答えるのは非常に困難である。しかしケイリーグラフについては、ある程度明確な回答が知られている。第一に、ケイリーグラフ Γ と $p \in [0, 1]$ が与えられたとき、 $\Gamma[p]$ が持つうる無限連結成分の個数はほぼ確実に一つの値に定まる。さらに、その個数は必ず 0 個、1 個、あるいは「無限個」のいずれかである。言い換えれば、次の事実が成り立つ。

事実 2.9. 有限生成群のケイリーグラフ Γ と各 $p \in [0, 1]$ に対して、 $N_\infty(\Gamma, p) \in \{0, 1, +\infty\}$ が存在し、

$$\mathbb{P}_p \{ \#\{\Gamma[p]\} \text{ 内の無限連結成分} \} = N_\infty(\Gamma, p) = 1$$

となる。

この事実は、C. M. Newman と Lawrence S. Schulman によって [NS81] で証明された。

ここで、次の定数を定義しよう。

$$p_u[\Gamma] := \inf \{p \in [0, 1] : \text{ほぼ確実に } \Gamma[p] \text{ は無限連結成分をただ一つ持つ}\}.$$

この値を Γ の一意性閾値 (uniqueness threshold) と呼ぶ。定義から直ちに $p_c \leq p_u$ であることがわかる。また、 $p_c < p < p_u$ を満たす p に対しては、 $\Gamma[p]$ はほぼ確実に無限連結成分を持つが、それは唯一ではない。したがって、この領域では $N_\infty(\Gamma, p) = +\infty$ となるはずである。

さて、これから述べる事実は非自明である。この事実は Itai Benjamini と Oded Schramm が有名なサーベイ論文 [BS96] で予想し、後に Olle Häggström と Yuval Peres がケイリーグラフに対して [HP99]、Roberto H. Schonmann がより一般的なグラフに対して証明した [Sch99]。

事実 2.10. ケイリーグラフ Γ の一意性閾値 p_u が与えられたとき、各 $p_u < p \leq 1$ に対して、

$$\mathbb{P}_p (\Gamma[p] \text{ に無限連結成分が一意に存在する}) = 1$$

が成り立つ。(厳密に言えば、この事実自体は我々の論証に必ずしも必要ではない。)

つまり、 $(p_u, 1]$ の全区間において、 $\Gamma[p]$ はほぼ確実にただ一つの無限連結成分を持つのである。したがって、 N_∞ は一般的に、図2 に示されたような振る舞いを見せる。

このように見ると、 N_∞ に関しては相転移が二度起こるのが最も一般的な絵となる。しかし、それは $(0, p_c), (p_c, p_u)$ および $(p_u, 1)$ がすべて非自明な区間であるときの話である。このうち $0 < p_c$ は常に保証される。では、 $p_c < 1$ はどうだろうか？すべての群がこれを満たすわけではない。例えば、図 1 に描かれている 4 次正則樹木グラフ T_4 では、 p が 1 より少しでも小さければ $\Gamma[p]$ において辺が時々消されるはずだが、辺が一つ消えるたびに全体グラフは二つに分断される。このように「ポキポキと折れやすい」グラフのランダム部分グラフでは、唯一の連結成分は決して期待できず、さらには無限連結成分もまた一意的ではなくなる。したがって $p_u(T_4) = 1$ である。

あるグラフの有限個の辺を削除するだけでグラフを複数の連結成分に分断できる場合、そのグラフは「端（はし）が複数ある (not one-ended)」と呼ばれる。一般に、このようなケイリーグラフは $p_u = 1$ を持つことが比較的容易に確認できる。

それでは、残りのケイリーグラフについてはどうだろうか？前述の [BS96] において、Itai Benjamini と Oded Schramm は次のように問い合わせた。

問題. 1 端のケイリーグラフに対して常に $p_u < 1$ か？

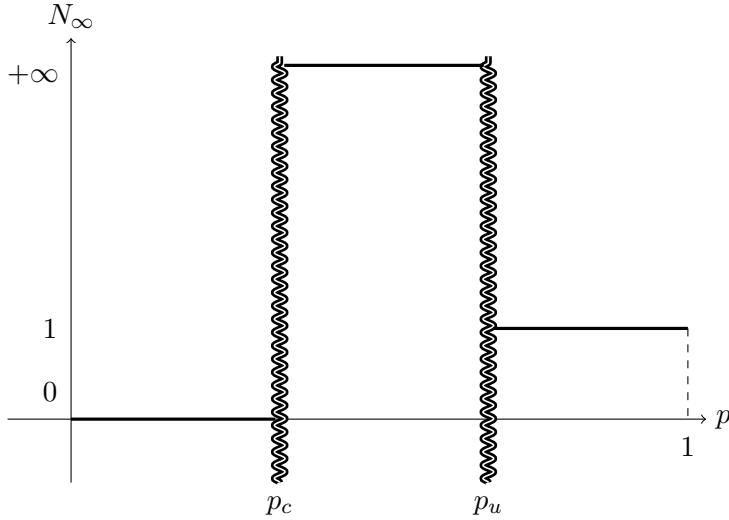


FIGURE 2. 無限連結成分の（ほぼ確実な）数の最も一般的な振る舞い

この質問には未だ完全な回答は知られていない。しかし、端が一つのケイリーグラフを生成する群が、もし有限表示 (finite presentation) を持つのであれば、 $p_u < 1$ であることは知られている。これは Eric Babson と Itai Benjamini による結果である [BB99]。

一方で、 $p_c < p_u$ に関しては何が知られているだろうか？まず、先に述べた \mathbb{Z}^2 の場合、 $N_\infty(p) = +\infty$ となる p は存在せず、また $p_c = p_u = 1/2$ である。これは 2 次元に限った話ではない。より高い次元 d を持つ \mathbb{Z}^d に対しても同様に $p_c = p_u$ が成立する。この事実は Michael Aizenman、Harry Kesten および Charles M. Newman が 1987 年に証明した重要な結果である [AKN87]。

一般に、（無限）可換群 (abelian group) やべき零群 (nilpotent group) を含め、指数関数より遅く成長する群 (group with subexponential growth) のケイリーグラフでは、すべて同様の現象が現れる。これに密接に関連しているのが、ケイリーグラフの有限部分集合たちの「体積」に対する「表面積」の競合である。ここで概念を一つ導入しよう。

定義 2.11. あるケイリーグラフ Γ の *Cheeger 定数* は

$$\iota(\Gamma) := \inf \left\{ \frac{\#\partial_{\mathcal{E}} K}{\#K} = \frac{\#\{vw \in \mathcal{E}(\Gamma) : v \in K, w \notin K\}}{\#K} : K \text{ は } \mathcal{V}(\Gamma) \text{ の有限部分集合} \right\}$$

のように定義される。グラフ Γ が *従順 (amenable)* であるとは、その Cheeger 定数が 0 であることを意味し、*非従順である (nonamenable)* とは、その Cheeger 定数が正であることを意味する。

ここで、Cheeger 定数の正確な値はそれほど重要ではない場合が多い。それよりも重要なのは、Cheeger 定数が 0 より大きいか否かである。整数群 \mathbb{Z} およびその直接積 \mathbb{Z}^d を含め、すべての可換群、べき零群、および指数関数より遅く成長する群のケイリーグラフはアメナブルである。これらについて、次のことが知られている。

命題 2.1 ([AKN87], [BK89], [GKN92]). すべての従順ケイリーグラフ Γ とすべての $0 \leq p \leq 1$ に対して、ほぼ確実に $\Gamma[p]$ は無限連結成分を高々一つ持つ。すなわち、 $N_\infty(p; \Gamma) = \infty$ となる p は存在しない。特に、 $p_c(\Gamma) = p_u(\Gamma)$ である。

この命題は、前述したようにまず \mathbb{Z}^d において Michael Aizenman, Harry Kesten, および Charles M. Newman が証明した。その後すぐに R. M. Burton および Michael S. Keane が別の証明を提示したが、Alberto Gandolfi, Michael S. Keane, および Charles M. Newman がその論証を従順なケイリーグラフへと拡張した。

それでは逆に、 $p_c < p_u$ となるグラフにはどのようなものがあるだろうか？前述の $p_u = 1$ となる例、すなわち端が一つより多いグラフを除いた最初の例は、Geoffrey Grimmett と Charles M. Newman が扱った（正則 d 次樹木グラフ） $\times \mathbb{Z}$ であり、これは自由群 $\times \mathbb{Z}$ の標準的なケイリーグラフである [GN90]。このグラフは、 $(0, p_c), (p_c, p_u), (p_u, 1)$ の三つの区間がすべて空集合ではない最初の例である。

この例の発見後、I. Benjamini と O. Schramm が提起した予想を紹介する。

予想 2.12 ([BS96, Conjecture 6]). すべての非従順ケイリーグラフ Γ に対して $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ である。

これは、グラフの連結構造に関する組合せ論的な概念である従順性と、 $\Gamma[p]$ が無限に多くの無限連結成分を持つような p が存在する (!) という確率論的な性質が一致するという予想である。実は、任意のケイリーグラフ Γ に対して、 $N_\infty(p; \Gamma) = +\infty$ となる p が一つでも存在することと $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ は同値である。これは命題 2.1 に加え、 Γ が非従順なとき、 $\Gamma[p_c]$ は（ほぼ確実に）無限連結成分を一つも持たないという事実によるものである [BLPS99]。

2.5. 予想2.12 の現況と本論文の目標. 予想2.12に関して多様なケイリーグラフが研究されてきた。Steven Lalley が、種数 (genus) の大きい曲面群の双曲平面上の平面ケイリーグラフ (planar Cayley graph) について $p_c < p_u$ であることを証明した後 [Lal98]、予想の提唱者である I. Benjamini と O. Schramm は、双曲平面上に余コンパクトに描かれた任意のケイリーグラフに対して $p_c < p_u$ を証明した [BS01]。

上記の二つの結果では、ケイリーグラフの平面性が重要な役割を果たした。しかし、ここで確認しておくべき点がある。ある意味で曲面群は非常に 2 次元的であるが、そのような曲面群であっても、平面敵ではないケイリーグラフをいくらでも持ち得る。例えば、五角形の完全グラフ K_5 を部分グラフとして持つケイリーグラフを構成することができる。曲面群のこのようなケイリーグラフに対しても $p_c < p_u$ であるかは上記の結果から直ちに導かれるわけではない。

再び Benjamini と Schramm の質問に戻ろう。質問 および推測 2.12 は、グラフの確率論的な性質と、ある種の幾何学的な性質が同値であると主張しているが、この幾何学的な性質はグラフの微細な連結性には全く関心がなく、巨視的な形状のみを問題にする性質である。この点はこの質問および推測を一層興味深いものにする。例えば、平面性はグラフの巨視的構造と局所的構造の両方に依存する性質である。それに対し、グラフの端 (end) の数、あるいは従順性 (amenability) は（一見そうは見えないかもしれないが）、グラフの粗い形状のみに依存する性質であることが知られている。特に、ある群のケイリーグラフが多端であるか、あるいは非従順であれば、その群のいかなるケイリーグラフも同様であることが知られている。特殊な有限生成集

合を選んで、例え K_{100} を部分グラフに持つようにしたとしても、端の数や従順性は変えられないということだ。

したがって、予想2.12 にアプローチする際、与えられた群の「特定の」ケイリーグラフではなく、すべてのケイリーグラフに対して回答できれば、より望ましいだろう。この観点と併せて知っておくべき事実が一つある。すべての非従順な群のそれぞれにおいて $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ を満足するケイリーグラフ Γ を少なくとも一つはあるというので、これは Igor Pak と Tatiana Smirnova-Nagnibeda による結果である [PSN00]。このように特殊に構築されたケイリーグラフの $p_c < p_u$ から、同じ群の他の任意のケイリーグラフの $p_c < p_u$ を導き出せるかどうかは知られていない。

それでは、そのすべてのケイリーグラフが $p_c < p_u$ を満足する群にはどのようなものがあるだろうか。これに関しては、Damien Gaboriau と Russell Lyons が扱った、1 次の l^2 -Betti 数が消滅しない群のケイリーグラフがある [Gab05], [Lyo00], [Lyo13]。この概念の定義をここで導入するのは無理があるため、その例をいくつか挙げる。Gaboriau と Lyons が任意のケイリーグラフについて $p_c < p_u$ を示した群の例には、以下のようなものがある。

- 自由軍、および **自由積 (free product)**;
- 種数 2 以上の曲面群;
- 従順ぐんに対して融合 (Amalgamate) した自由積。

一方、Gaboriau および Lyons が扱っていない群には以下のようなものがある。

- 自由群の直積;
- $SL(2, \mathbb{Z})(n, \mathbb{Z})$; 一般に、ランク n のリーヤー群の中の格子 ($n \geq 3$)
- 双曲曲面の写像類群 (mapping class group) $Mod(\Sigma_g)$;
- 自由群の外部自己同型群 (outer automorphism group) $Out(F_N)$;
- 自由積ではない直角 Artin 群 (right-angled Artin group)

また、Kazhdan の性質 (T) を持つ群の中でも、上記の理論が適用される群の例はまだ発見されていない。

次に検討するのは、Thomas Hutchcroft が [Hut19] および [Hut20] で研究した群である。後者の論文では、ある特徴的な対称性を持つケイリーグラフに対して $p_c < p_u$ を証明している。ここでいう特徴的な対称性とは、グラフ Γ の自己同型群 $Aut(\Gamma)$ に十分に大きな部分群 H が存在することだが、 H が Γ のすべての頂点間をほぼ自由に移動できる一方で、いくつかの頂点を偏向的に固定するという非対称性も持っているという意味である。深くは論じないが、この非対称性理論によって Hutchcroft は、すべての $d \geq 3$ および $k \geq 1$ に対して $(T_d : d$ 次数正則樹木グラフ $) \times \mathbb{Z}^k$ の $p_c < p_u$ を証明した。ただし、このような非対称性はグラフの局所的な構造に依存する性質であり、ある群の一つのケイリーグラフが満たすとしても、他のケイリーグラフで必ずしも満たすわけではない。

これに対し、前者の論文では特定の群のすべてのケイリーグラフについて論じている。それを今から述べる。

定理 2.13. [Hut19] 整数群 \mathbb{Z} と同型な有限指数部分群を持たず、無限な Gromov 双曲群 G のすべてのケイリーグラフ Γ について、 $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ である。

Gromov 双極性 (Gromov hyperbolicity) は、 d 次元双曲空間 \mathbb{H}^d 、 $K < -a^2$ の曲率を持つ单連結多様体、および樹木グラフをすべて包括する幾何学的群論の核心概念である。Gromov 双

曲群の定義も具体的には記さないが、 \mathbb{H}^d に真性かつココンパクトに作用する群（すなわちココンパクト格子）を例として考えると分かりやすい。特に、閉双曲多様体の基本群や自由群はすべて Gromov 双曲的である。

Gromov 双曲性をさらに一般化した非円筒的双曲性 (acylindrical hyperbolicity) は、定義するのが少しややこしい。だが、この概念は Gromov 双曲群、双曲曲面の写像類群、自由群の外部自己同型群、自由積ではない直角 Artin 群をすべて含む概念と考えれば良い。このような群に対して、著者と Donggyun Seo は次を論じた。

定理 2.14. *[CS25]* 整数群 \mathbb{Z} と同型な有限指数部分群を持たず、非円筒的双曲的な G のすべてのケイリーグラフ Γ について、 $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ である。

本論文では、これから述べる CAT(0) 立方複体あるいは中点グラフに作用する群について考察する。これらの群と Gromov 双曲群の間には密接な関係がある。まず、Gromov 双曲群という概念と、我々が考慮する CAT(0) 立方群の概念は、互いに包含関係はない。しかし、両方に該当する重要な対象がある。それは 3 次元閉双曲多様体の基本群である。これらの群の中には曲面群と同型な部分群が歪むことなくうまく埋め込まれていることを Jeremy Kahn と Vladimir Marković が示した一方 [KM12]、このような曲面群をタイリングの材料として、群が自由に (freely) かつココンパクトに作用する CAT(0) 立方複体を構成できることを Nicolas Bergeron と Daniel T. Wise が証明した [BW12]。実際、すべての 3 次元閉双曲多様体は、円上の双曲曲面束を有限群で割ったものとして理解できるが、これを**仮想的ファイバー定理 (virtual fibering theorem)** という [Ago13]。この定理の Ian Agol による証明では、Bergeron と Wise の CAT(0) 立方複体の理論が重要な材料として用いられている。

CAT(0) 立方群の別の例としては、直角 Artin 群や**直角 Coxeter 群 (right-angled Coxeter group)** がある。これらの群は、定められた数種類の関係子 (relator) からなる有限表示を持っており、その表示に従って自然に Salvetti 複体および Davis 複体という CAT(0) 立方複体を建設できる。また、これらの群はこれらの複体に真性かつココンパクトに作用する。一般に直角アルティン群には、自由群 F_n と同型な部分群や、整数直積群 \mathbb{Z}^n と同型な部分群がいたるところに絡み合っているため、Gromov 双曲的ではない場合が多い。本論文では、このような群を双曲幾何学の代わりに CAT(0) 立方複体の幾何学によって理解しようと試みる。

3. パーコレーションの理論

本章では、定理1の証明をいくつかの段階に分けて解説する。まず、証明に必要となる幾何学的な観察を第3.1節で述べる。これらの幾何学的材料がそろえば、確率論的な論証によって定理1を導くことができる。この方針は Thomas Hutchcroft による理論であり [Hut19]、第3.2および第3.3節ではその概要を説明する。

CAT(0) 立方複体の理論に特に关心がなく、群上のパーコレーションの理論だけを概観したい読者にとっては、本章まで読めば十分であろう。一方で、確率論的側面よりも CAT(0) 立方複体に集中したい読者は、第3.1節飲みを読んだ後、次章に進んでも差し支えない。

3.1. 証明に必要となる幾何学的な事実. 群 G の有限生成集合 S に対するケイリーグラフ $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ を一つ固定する。本節では、 G の有限部分集合が Γ 上でどのように配置されるかに関する二つの性質を述べる。まだ CAT(0) 立方複体の幾何学を導入していないため、ここでは

直感を与える例を用いる。整数格子群 \mathbb{Z}^2 よりも、自由群 $F_2 = \langle a, b \rangle$ を思い浮かべる方が理解しやすいだろう。そこで、 $G = F_2$ 、 $S = a, a^{-1}, b, b^{-1}$ として説明を進める。

自由群 F_2 の有限部分集合の例として

$$A := N_{100}(id) = \{a_1 a_2 \cdots a_k : k \leq 100, \{a_1, \dots, a_{100}\} \subseteq S\}$$

を考える。この部分集合の大部分、具体的には 98% 以上は、厚さ 4 の「殻」 $N_{100}(id) \setminus N_{96}(id)$ に集中している。この殻の上の点 u を一つ固定しよう。このとき、 u から見た集合 A は、一方に向かって偏っていることが分かる。

実際、 u から 4 歩進む方法は全部で $4 \times 3^3 = 108$ 通りある。しかし、ほとんどすべての $a \in A$ に対して、 u から a に向かって歩く際の最初の 4 歩は、 a の選び方にほとんど依存せず、108 通りのうちのある一つに固定される。これを明確にするために

$$A_u := \{a \in A : \overline{ua} \text{ と } \overline{u(id)} \text{ の最小の } 4 \text{ 歩が一致する}\}$$

と定める。このとき、任意の $u \in A \setminus N_{96}(id)$ に対して、 $A \setminus A_u$ は $N_{12}(id)$ に含まれ、その大きさは高々 $4 \cdot 3^{11}$ である。言い換えれば、 A の中で例外的な $4 \cdot 3^{11}$ 個の点を除けば、残りはすべて u から見て同じ方向に集中している。ここで $4 \cdot 3^{11}$ という数は相当大きいものの、「4 歩」という定数のみに依存しており、 A の半径には依存しないということに注意しておく。

さらに、 u 自身ではなく、 u に最も近い $\partial N_{100}(id)$ の点に立って A を眺めると、 A は実質的に完全に一方向へ偏っていると言ってよい。すなわち、 A の 98% 以上を占める $A \setminus N_{96}(id)$ の任意の元 u に対して、 $d_S(u, v) < 4$ を満たす点 v が存在し、 $A_v \supseteq A$ が成り立つことである。

以上の観察から、ほとんどすべての $u \in A$ に対して $A \simeq A_u$ が成り立つことが分かる。この事実がなぜ有用なのかを説明するために、 p -ランダムグラフ $\Gamma[p]$ における u の連結成分 C_u を考えてみよう。 u を基準にすると、 C_u は id の方向にもある程度伸びるが、それと同程度の確率で他の方向にも伸びると考えられる。したがって直感的には、 $\#(C_u \cap A_u)$ は $\#C_u$ の $1/108$ 程度であるはずだ。さらに、 A_u と A の差は有限個の点にすぎないため、 $\#C_u$ が非常に大きい場合（すなわち $p \nearrow p_c$ のとき）には、 $\#(C_u \cap A)$ も $\#C_u$ の $1/100$ 程度に抑えられると期待される。これが我々の目指す状況である。

同じ事実を別の観点から言い換えてみよう。点 $u = a^{100}$ を固定すると、 u から id に向かう最初の 4 歩はすべて a^{-1} の方向である。したがって、 u から A_u へ至るすべての経路は、4 点 $ua^{-1}, ua^{-2}, ua^{-3}, ua^{-4}$ を必ず通過する。このとき $(a^{-1}) \cdot (a^{-1}) = a^{-2}$ という関係があるため、 $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$ 自体は自由に独立であるとは言えない。しかし、それぞれから距離 1 にある点 $a^{-1}b, a^{-2}b, a^{-3}b, a^{-4}b$ は互いに自由に独立である。

より一般に、任意の点 $u \in N_{100}(id) \setminus N_{96}(id)$ に対し、 u から id に向かう最初の 4 歩が順に $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ であるとしよう。このとき、 u から A_u へ至るすべての経路は $us_1, us_1s_2, us_1s_2s_3, us_1s_2s_3s_4$ の 4 点を必ず通過しなければならない。ここで $\{s_1, s_1s_2, s_1s_2s_3, s_1s_2s_3s_4\}$ 自体は必ずしも自由に独立であるとは限らない。しかし、 $t_i \in S \setminus \{s_1^{-1}, s_i^{-1}, s_{i+1}\}$ をそれぞれ選ぶとき、

$$\{s_1t_1, s_1s_2t_2, s_1s_2s_3t_3, s_1s_2s_3s_4t_4\}$$

は自由に独立である。これは、ある意味で A_u が u から見て「一方向」に偏っていることを示唆している。

興味深い点は、 $A \subseteq G$ が丸い球状の集合でなくとも、同様の現象が期待できることである。そのために、以下の概念を導入する。

定義 3.1. 群 G の部分集合 $A \subseteq G$ が分岐的である (*branching*) とは、 A が自由に独立であることを意味する。すなわち、 $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \in A$ が

$$a_1 \cdots a_n = a'_1 \cdots a'_m$$

を満たすならば、 $n = m$ かつ全ての i に対して $a_i = a'_i$ が成り立つ。

さらに、 G の有限生成集合 S を一つ固定する。部分集合 $A' \subseteq G$ と定数 $D > 0$ に対し、 A' が D -分岐的である (D -roughly branching) とは、 A' がある分岐的な集合 A の D -近傍に含まれることをいう。すなわち、

$$A' \subseteq \{as_1 \cdots s_n : a \in A, 0 \leq n \leq D, s_i \in S\}$$

を満たす分岐的な集合 A が存在することを意味する。

ある定数 D に対して D -分岐的な集合を単に概分岐的であるという。

定義 3.2. 有限生成集合 S をもつ群 G を考える。 S の元を各ステップとして得られる経路を S -経路と呼ぶ。すなわち、 (g_0, g_1, \dots, g_n) が S -経路であるとは、すべての $i = 1, \dots, n$ に対して $g_{i-1}^{-1}g_i \in S$ が成り立つことをいう。

部分集合 $A, B, C \subseteq G$ に対し、 A と C を結ぶすべての S -経路が必ず B を通過するとき、 B を A と C の間のバリア (barrier between A and C) と呼ぶ。

定義 3.3. 有限生成集合 S を備えた群 G を考える。 G が 手品補題 (*magic lemma*) を満たすとは、ある定数 $K > 0$ が存在し、任意の $D > 0$ に対して概分岐的な部分集合が存在し、さらに任意の $\epsilon, D, D' > 0$ に対して定数

$$N = N(\epsilon, K, D, D')$$

が存在して、以下が成り立つことをいう。

任意の有限集合 $A \subseteq G$ に対して、 A の $(100 - \epsilon)\%$ を占める部分集合 $A' \subseteq A$ が存在し、各 $a \in A'$ に対して二つの K -分岐的な部分集合

$$B(a) = B_1(a) \sqcup \cdots \sqcup B_D(a), \quad B'(a) = B'_1(a) \sqcup \cdots \sqcup B'_D(a)$$

が存在して

$$\begin{aligned} &\{y \in A : \text{各 } 1 \leq i \leq D \text{ に対し、} B_i(a) \text{ が } id \text{ と } a^{-1}y \text{ の間のバリアである}\} \cup \\ &\{y \in A : \text{各 } 1 \leq i \leq D \text{ に対し、} B'_i(a) \text{ が } id \text{ と } a^{-1}y \text{ の間のバリアである}\} \cup \\ &\{y \in A : B \setminus N_{D'}(id) \text{ が } id \text{ と } a^{-1}y \text{ の間のバリアである}\} \end{aligned}$$

は A の元のうち高々 N 個を逃す。

定義 3.4. 群 G が 概反転可能である (*roughly flippable*) とは、有限個の部分集合 $A_1 \dots A_N \subseteq G$ および有限個の元 $g_1 \dots g_N \in G$ が存在して、以下を満たすことをいう。まず、各 i に対して、 id と g_i を結ぶ S -経路であって、その前半は $g_i A_i$ の外側にあり、後半は A_i の外側にあるような経路 γ_i が存在する。

さらに、任意の有限集合 $A \subseteq G$ に対し、 A の半分を占める部分集合 $A' \subseteq A$ が存在して、各 $a \in A'$ に対して、ある i が存在し

$$A \subseteq aA_i \subsetneq ag_iA_i^c$$

が成り立つ。

上記の定義における γ_i の条件はやや煩雑に見えるかもしれないが、例えば $d_S(id, g_i) > 2d_S(id, A_i^c)$ が成り立つ場合には、 id と g_i を結ぶ任意の d_S -最短経路を取れば十分である。

これらの性質はいずれも G の幾何学的形状に関するものであり、確率論的な要素は一切含まれていない。本論文の中心となる幾何学的命題は次の通りである。

命題 3.1. 有限生成群 G が、ある中点グラフ X に真性に作用し、かつ正規のランク 1 の対称性をもつと仮定する（定義 7.1 参照）。例えば、 X 上の G の作用が真性で、余コンパクトで、かつ既約であれば、この条件は常に満たされる。さらに、 G が \mathbb{Z} と同型な有限指数部分群を含まないと仮定する。

このとき、 G は任意の有限生成集合に対して手品補題を満たし、さらに概反転可能である。

この事実がパーコレーションとどのように関係するかは、次の命題にまとめられている。

命題 3.2. 自由部分群をもち、有限集合 $S \subseteq G$ により生成される群 G が、手品補題を満たし、かつ概反転可能であると仮定する。このとき、ケイリーグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ は $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ を満たす。

本節の残りでは、命題 3.2 の証明を与える。続く章では、命題 3.1 の内容を詳しく考察する。

3.2. 基礎的な確率論. 本節の内容は、[Gri89] の第 2 章および第 8 章、ならびに [DCT16] の第 1 節から抜粋して翻訳したものである。

有限集合あるいは可算集合 \mathcal{E} を一つ取り、

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{0, 1\}^{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E} \text{ から } \{0, 1\} \text{ への写像}\}, \\ \mathcal{B}(\Omega) &:= \{\Omega \text{ の Borel 部分集合}\} \end{aligned}$$

と定める。さらに、パラメータ $0 \leq p \leq 1$ が与えられたとき、各 $e \in \mathcal{E}$ に対して平均 p のベルヌーイ確率測度 μ_e を取り、その直積測度 $\mathbb{P}_p = \otimes_{e \in \mathcal{E}} \mu_e$ を考えることで、確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}_p)$ が得られる。

グラフ Γ 上のパーコレーションは、この確率空間を用いて自然に記述できる。辺集合 $\mathcal{E}(\Gamma)$ を \mathcal{E} とし、確率変数 $\Gamma : \omega \mapsto \Gamma(\omega)$ を

$$\Gamma(\omega) := (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\omega) := \{e : \omega(e) = 1\}) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

と定めると、 $\Gamma(\omega)$ は我々が考えてきた p -ランダム部分グラフ $\Gamma[p]$ に他ならない。

ある事象 $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ が増加的（increasing）であるとは、

$$[\omega \in A] \wedge [\omega \leq \omega'] \Rightarrow \omega' \in A \quad (\forall \omega, \omega' \in \Omega)$$

が成り立つことをいう。また、可測関数 $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が増加的であるとは、任意の t に対して集合 $\{\omega : F(\omega) > t\}$ が増加的であること、すなわち $\omega \leq \omega'$ ならば $F(\omega) \leq F(\omega')$ が成り立つことを意味する。

補題 3.1. 正の実数 $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$ を考える。このとき、任意の增加的事象 $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対して

$$\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A)$$

が成り立つ。さらに、任意の非負の增加的確率変数 $X \geq 0$ に対して

$$\mathbb{E}_{p_1} X \leq \mathbb{E}_{p_2} X$$

が成り立つ。

Proof. 二つの確率空間 $(\Omega, \mathbb{P}_{p_i})$ を同時に扱うため、

$$(Y, \mathbb{P}) := ([0, 1], Leb)^{\mathcal{E}(\Gamma)}$$

を考える。また写像 $\Psi_i : Y \rightarrow \Omega$ を次のように定める。 $y \in Y$ に対し、 $\Psi_i(y)$ の e 成分は、 $y(e) < p_i$ のとき 1、そうでないとき 0 とする。

このとき、 $\Psi_i^* \mathbb{P}$ による各座標の値は 1 となる確率が p_i であり、異なる座標は互いに独立である。したがって、 $\Psi_i^* \mathbb{P}$ と \mathbb{P}_{p_i} は同じ分布を持つ。

よって $\mathbb{P}_{p_i}(A)$ は $\mathbb{P}(\Psi_i^{-1}(A))$ に等しい。ここで A が増加的であることから、任意の $y \in Y$ に対して、 $\Psi_1(y) \in A$ ならば $\Psi_2(y) \geq \Psi_1(y)$ もまた A に属する。よって

$$\mathbb{P}_{p_i}(A) = \mathbb{P}(\Psi_1^{-1}(A)) \leq \mathbb{P}(\Psi_2^{-1}(A)) = \mathbb{P}_{p_2}(A)$$

が得られ、最初の主張が従う。

次に、 X が増加的事象の特性関数である場合についても、同様に第二の主張が成り立つ。さらに、そのような特性関数の非負係数による線形結合 (*) についても、同じ不等式が成り立つ。任意の増加的確率変数 X に対して、 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots, \lim_i f_i = X$ となるような (*) の関数 f_i を取ることができる。この関数列に単調収束定理を適用することで、一般の場合の第二の主張も得られる。□

この補題から、事実 2.3 および 2.7 は直ちに確認できる。

事実 2.3 および 2.7 の証明. 連結グラフ Γ の二点 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ に対して、

$$\{\omega : x \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} y\} \text{ および } \{\omega : \#C_x = +\infty\}$$

はいずれも増加的事象である。これらの事象に補題 3.1 を適用すれば、主張が従う。□

もう一つの応用として、事実 2.6 を証明しよう。

事実 2.6 の証明. まず、自由群 $F_2 = \langle a, b \rangle$ の標準生成集合 $S = a, a^{-1}, b, b^{-1}$ に関するケイリーグラフに対し、 $\theta(0.91) > 0$ が成り立つことを示す。そのためには

$$A_R(k) := \{\omega : \#\{v \in \partial N_R(id) : id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap N_R(id)} v\} \geq k\}$$

と定義する。この事象は $N_R(id)$ の中にある辺の開閉のみに依存し、外側の辺には依存しないことに注意しよう。そこで、 $N_R(id)$ の中にある辺の開閉のみを定めた事象の集まり

$$\mathcal{E}_R := \{A \subseteq \Omega : \text{各 } \omega, \omega' \in A \text{ および } e \subseteq N_R(id) \text{ に対して } \omega(e) = \omega'(e)\}$$

を定め、以下を主張する。

主張 3.5. パラメータ $p > 5/6$ を固定する。このとき、任意の $R, k \geq 0$ および $A \in \mathcal{E}_R$ かつ $A \subseteq A_R(k)$ であるものに対して、

$$\mathbb{P}_p(A_{R+1}(2k)|A) \geq 1 - \frac{10(1-p)}{k}$$

が成り立つ。

これを示すため、 A を一つ固定し、 A に属する部分グラフの中で id と繋がっている $\partial N_R(id)$ 上の頂点を v_1, \dots, v_N とする。これらと $N_{R+1}(id)$ を結ぶ辺はちょうど $3N$ 本 ($R=0$ のときは $4N$ 本) 存在する。このうち M 本が開いていれば、 id と連結な $N_{R+1}(id)$ の頂点の個数も正確に M 個となる。したがって、二項分布 $B(3N, p)$ に対してチェビシェフの不等式を適用すると、

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(A_{R+1}(2k)|A) &= \mathbb{P}(B(3N, p) \geq 2k) \geq \mathbb{P}(B(3k, p) \geq 2k) \\ &= 1 - \mathbb{P}(B(3k, p) \leq 3kp - (3kp - 2k)) \\ &\geq 1 - \frac{\text{Var}(B(3k, p))}{(3kp - 2k)^2} \geq 1 - \frac{2.5k(1-p)}{(0.5k)^2} \end{aligned}$$

が従う。これで主張が示された。

主張 3.5 を繰り返し用いると、

$$\mathbb{P}_p(A_R(2^R)) \geq \prod_{i=1}^R \left(1 - \frac{10(1-p)}{2^i}\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^R \frac{10(1-p)}{2^i} \geq 1 - 10(1-p)$$

を得る。この値は $p > 9/10$ のとき一様に正である。したがって、すべての $R \geq 0$ に対する $A_R(2^R)$ の共通部分も正の確率を持ち、これはすなわち $\theta(p) > 0$ を示唆する。

次に、有限生成集合 S を備えた群 G が、自由部分群 $H \simeq F_2 = \langle a, b \rangle$ を含む場合を考える。便宜上、群同型 $\rho : \langle a, b \rangle \rightarrow H$ を固定する。このとき、各 $u \in a, b$ に対して、 id と $\rho(u)$ を結ぶ経路 γ_u を $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ の中に取ることができ、その長さを L_u と書く。必要であれば、 $F_2 \simeq \langle a, b \rangle$ を $F_2 \simeq \langle ba, ab \rangle$ に取り替えることで、 $L_a = L_b =: L$ と仮定できる。ここで、 F_2 の標準的なケイリーグラフの各辺に $L-1$ 個の頂点を挿入して辺の長さを L に引き伸ばしたグラフ T を考える。各 $g \in F_2$ を $\rho(g) \in \mathcal{V}(\Gamma)$ に写し、 $v \in a, b$ に対して $g \sim gv$ を結ぶ（長さ L の）辺を $g \cdot \gamma_v$ に対応させることで、 T から Γ への写像 ρ を定める。

この写像 ρ はある意味で真性である。実際、 $u, v \in a, b$ を固定すると、 $\rho(g)\gamma_u$ と γ_v が交わるような $g \in F_2$ は有限個しか存在しない。なぜなら、そのような g に対して $\rho(g)$ の S -語ノルムは $2(\text{diam}_S(\gamma_a) + \text{diam}_S(\gamma_b))$ 以下であり、かつ ρ は単射だからである。従って

$$M := \sup_{f \in \mathcal{E}(\Gamma)} \#\rho^{-1}(f) + \sup_{v \in \mathcal{V}(\Gamma)} \#\rho^{-1}v < +\infty$$

が成り立つ

ここで $0.9^{1/L} < q < 1$ を選び、 $p := 1 - (1-q)^M$ と定める。もちろん p は 0 と 1 の間にある。各 $f \in \rho(\mathcal{E}(T))$ に対して、次の開閉規則を課す：

$$f \in \rho(\mathcal{E}(T)) \leftrightarrow e \in \rho^{-1}(f) \text{ 가하나라도 연결되어있음.}$$

そして T 上で q -パーコレーションを行ったとき、 $\rho(T)$ の各辺の開閉は互いに独立であり、開く確率は $1 - (1 - q)^{\#\rho^{-1}(f)}$ となる。ここで補題 3.1 を用いると、

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_p(\Gamma(\omega) \subseteq T \text{ における } id \text{ の連結成分が無限に大きい}) \\ & \geq \mathbb{P}_q(\rho(T(\omega)) \subseteq T \text{ における } id \text{ の連結成分が無限に大きい}) \end{aligned}$$

が従う。さらに、 ρ は (T の頂点集合上で) 高々 M 対 1 の写像であるから、 $T(\omega) \subseteq T$ が無限連結成分を持つたびに、 $\rho(T(\omega))$ も無限連結成分を持つ。したがって

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_p(\Gamma(\omega) \subseteq T \text{ における } id \text{ の連結成分が無限に大きい}) \\ & \geq \mathbb{P}_q(\Gamma(\omega) \subseteq T \text{ における } id \text{ の連結成分が無限に大きい}) > 0 \end{aligned}$$

となる。以上で証明は完了である。 \square

増加的事象について一点補足しておく。我々が扱う Ω 上の確率変数の多くは、 $\mathcal{E} = e_1, e_2, \dots$ の有限部分集合によって決定される確率変数の増加列の極限として表される。その一例として、あるグラフ $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 上のパーコレーションを考えよう。頂点集合の部分集合 $A, B \subseteq \mathcal{V}$ を固定し、

$$f_{A,B} := \sum_{a \in A, b \in B} 1_{\{a \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} b\}}$$

と定める。ここで $\mathcal{E}_n := \{e_1, \dots, e_n\}$ とおくと、 f_A は

$$f_{k;A,B} := \sum_{a \in A, b \in B} 1_{\{id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap \mathcal{E}_n} a\}}$$

という単調増加な確率変数列の極限として表される。各 k に対し、 $f_{k;A,B}$ は高々有限個の辺 e_1, \dots, e_k の開閉のみに依存する。従って $\mathbb{E}_p(f_{k;A,B})$ が p に関して連続であることは明らかである。また $\mathbb{E}_p(f_{n;A,B})$ と $\mathbb{E}_p(f_{A,B})$ はいずれも p に関して単調増加である。この場合、極限関数 $\mathbb{E}_p(f_{A,B})$ は左連続でなければならない。この事実を次に記録しておく。

補題 3.2. グラフ $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ および $A, B \subseteq \mathcal{V}$ に対して

$$\chi_p(A \leftrightarrow B) := \sum_{a \in A, b \in B} \mathbb{P}_p(a \leftrightarrow b)$$

は p に関して左連続である。すなわち、任意の p_0 に対して

$$\chi_{p_0}(A \leftrightarrow B) = \lim_{p \nearrow p_0} \chi_p(A \leftrightarrow B)$$

が成り立つ。

次に、Theodore Harris が [Har60] で初めて導入し、Cees Fortuin、Pieter Kasteleyn、Jean Ginibre が [FKG71] で一般化した Harris–FKG 不等式を紹介する。

補題 3.3. 二つの増加的事象 A, B に対して

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B)$$

が成り立つ。また、有限分散をもつ二つの増加的確率変数 X, Y に対して

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X) \mathbb{E}_p(Y)$$

が成り立つ。

Proof. 第二の主張、すなわち確率変数に関する主張のみを、集合 \mathcal{E} の大きさについての帰納法で証明する。まず $\mathcal{E} = \{e_1\}$ が一元集合の場合には、以下の不等式を確認すれば十分である。実数 $a_1 \leq a_2$ および $b_1 \leq b_2$ に対して、

$$(3.1) \quad \begin{aligned} (1-p)a_1b_1 + pa_2b_2 &\geq (1-p)a_1b_1 + pa_2b_2 - p(1-p)(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \\ &= ((1-p)a_1 + pa_2)((1-p)b_1 + pb_2) \end{aligned}$$

が成り立つ。これで $\#\mathcal{E} = 1$ の場合に主張が示された。

次に、 $\mathcal{E} = \{1, \dots, n\}$ の場合の主張を仮定し、 $\mathcal{E} = \{1, \dots, n+1\}$ の場合の主張を示す。このために、 X, Y を $1, \dots, n+1$ 上の增加的確率変数とする。各 $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in 0, 1^n$ および $Z \in X, Y$ に対し、条件付き期待値

$$\mathbb{E}_p[Z|\mathbf{w}] = (1-p)Z(\mathbf{w}, 0) + pZ(\mathbf{w}, 1)$$

を定める。 $\mathbb{E}_p[Z | \cdot]$ は $0, 1^n$ 上の增加的確率変数であることが直ちに分かる。さらに、各 $\mathbf{w} \in 0, 1^n$ に対して

$$\begin{aligned} E_p[XY|\mathbf{w}] &:= (1-p)X(\mathbf{w}, 0)Y(\mathbf{w}, 0) + pX(\mathbf{w}, 1)Y(\mathbf{w}, 1) \\ &\geq ((1-p)X(\mathbf{w}, 0) + pX(\mathbf{w}, 1))((1-p)Y(\mathbf{w}, 0) + pY(\mathbf{w}, 1)) = \mathbb{E}_p[X|\mathbf{w}]\mathbb{E}_p[Y|\mathbf{w}] \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで用いたのは $Z(\mathbf{w}, 0) \leq Z(\mathbf{w}, 1)$ ($Z \in X, Y$) および不等式 (3.1) である。これを用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(XY) &= \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[XY | \omega_1, \dots, \omega_n]] \\ &\geq \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[X | \omega_1, \dots, \omega_n] \cdot \mathbb{E}_p[Y | \omega_1, \dots, \omega_n]] \\ &\geq \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[X | \omega_1, \dots, \omega_n]] \cdot \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[Y | \omega_1, \dots, \omega_n]] \quad (\because \text{ 귀납가정}) \\ &\geq \mathbb{E}_p X \mathbb{E}_p Y \end{aligned}$$

が従い、 $\mathcal{E} = \{1, \dots, n+1\}$ の場合の証明が完了する。残るのは \mathcal{E} が（無限）可算集合の場合である。この場合は、各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$X_n(\mathbf{w}) := \mathbb{E}_p[X|\mathbf{w}], \quad Y_n(\mathbf{w}) := \mathbb{E}_p[Y|\mathbf{w}] \quad (\forall \mathbf{w} \in \{0, 1\}^n)$$

と定めた確率変数列に有限版の不等式を適用し、その後 L^2 -マルチングール収束定理を適用すればよい。□

次の不等式を導入する前に、「証人」という概念を定義する。増加的事象 $A \subseteq \Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{E}}$ および $\omega \in A$ が与えられたとする。 $0 \leq W \leq \omega$ が ω における A の証人 (witness for A in ω) であることは、 W のすべての辺が開いている任意の $\Gamma' \subseteq \Gamma$ は必ず A の元になることを意味する。

二つの増加的事象 A, B に対し

$$\begin{aligned} A \circ B &:= \{\omega \in \Omega : \text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset \text{ を満たす } \omega \text{ における } A \text{ の証人 } f \text{ および } B \text{ の証人 } g \text{ が取れる}\} \\ &= \{\omega \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{E}} : \omega \text{ における互いに交わらない } A \text{ の証人と } B \text{ の証人が共存する}\} \end{aligned}$$

と定める。これで、J. van den Berg と Harry Kesten が [vdBK85] で導入した BK 不等式を述べる準備が整った。

事実 3.6. すべての元が有限な証人をもつ増加的事象 A, B に対して、

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B)$$

が成り立つ。

我々が実際に用いるのは、次の二つの系である。そのため、以下ではそれらの証明のみを紹介する。

系 3.1. グラフ Γ の頂点 $v_1, \dots, v_N, u_1, \dots, u_N \in \mathcal{V}(\Gamma)$ を考える。このとき
(3.2)

$$\mathbb{P}_p\left(\omega : \Gamma(\omega) \text{ における } N \text{ 個の互いに異なる連結成分 } C_1, \dots, C_N \text{ が存在し、各 } i \text{ に対し、 } v_i, u_i \in C_i \text{ である}\right)$$

が成り立つ。

Proof. 簡単のため $N = 2$ の場合のみ証明するが、一般の N に対しても同様に拡張できる。
任意の $K \subseteq \mathcal{E}(\Gamma)$ に対して

$$N(K) := \{e : e \text{ は } K \text{ のある元と少なくとも一つの頂点を共有する}\} = K \cup \{e : \exists f \in K [e \sim f]\}$$

と定めると、式3.2の左辺には

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \sum_{v_1, u_1 \in C_1 \subseteq \Gamma} \sum_{v_2, u_2 \in C_2 \subseteq \Gamma \setminus N(C_1)} \mathbb{P}[C_1, C_2 \text{ が } \Gamma(\omega) \text{ における (互いに異なる) 二つの連結成分である}] \\ &= \sum_{v_1, u_1 \in C_1 \subseteq \Gamma} \mathbb{P}[C_1 \text{ が } \Gamma(\omega) \text{ における連結成分}] \cdot \sum_{v_2, u_2 \in C_2 \subseteq \Gamma \setminus N(C_1)} \mathbb{P}[C_2 \text{ が } \Gamma(\omega) \setminus N(C_1) \text{ における連結成分}] \end{aligned}$$

という上限が与えられる。ここで等号が成り立つ理由は、「 C_1 および C_2 が与えられたとき、「 C_1 が $\Gamma(\omega)$ における連結成分である」という事象と「 C_2 が $\Gamma(\omega) \setminus N(C_1)$ における連結成分である」という事象は、それぞれ $N(C_1)$ の辺と $N(C_2) \setminus N(C_1)$ の辺の開閉のみに依存し、互いに独立だからである。さらに、「 C_1 が何であっても

$$\sum_{v_2, u_2 \in C_2 \subseteq \Gamma \setminus N(C_1)} \mathbb{P}[C_2 \text{ が } \Gamma(\omega) \setminus N(C_1) \text{ における連結成分}] = \mathbb{P}_p[v_2 \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \setminus N(C_1)} u_2] \leq \mathbb{P}_p[v_2 \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} u_2]$$

が成り立つのは明らかである。したがって、3.3 の右辺は

$$\sum_{v_1, u_1 \in C_1 \subseteq \Gamma} \mathbb{P}[C_1 \text{ が } \Gamma(\omega) \text{ の連結成分}] \cdot \mathbb{P}_p(v_2 \leftrightarrow u_2) = \mathbb{P}_p(v_1 \leftrightarrow u_1) \mathbb{P}_p(v_2 \leftrightarrow u_2)$$

以下であり、これで証明は完了する。 \square

第二の系を述べる前に、先に定義した「バリア」の概念を思い出しておこう。

系 3.2. 点 x を含み、 y を含まない集合 $A \subseteq G$ に対して、次が成り立つ：

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) &\leq \sum_{a \in \partial A} \sum_{b \in \partial A^c} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow_A a) \mathbb{P}_p(a \leftrightarrow b) \mathbb{P}_p(b \leftrightarrow y) \\ &\leq \sum_{a \in \partial A} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow_A a) \mathbb{P}_p(a \leftrightarrow y). \end{aligned}$$

Proof. まず、 $x \leftrightarrow y$ が成り立つ任意の部分グラフ $\Gamma(\omega)$ に対し、 $A \cap \Gamma(\omega)$ における x の連結成分 C と、 $a \in C \cap \partial A$ およびその隣接点 $b \in \partial A^c$ が存在して、 $b \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \setminus N(C)} y$ が成り立つことを観察しよう。実際、 $x \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} y$ を実現する経路 $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ を一つ取り、 $x_i \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap A} x$ を満たす最大の i を選べば、 $x_{i+1} \notin A$ でなければならない。このとき x_i と x_{i+1} がそれぞれ a, b の役割を果たす。以上より

$$\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) \leq \sum_{x \in C \subseteq A} \sum_{a \in C \cap \partial A} \sum_{b \in \partial A^c} \mathbb{P}_p \left(\begin{array}{l} A \cap \Gamma(\omega) \text{ における } x \text{ の連結成分が } C \text{ であり,} \\ \overline{ab} \text{ が開いていて、かつ } \Gamma(\omega) \setminus N(C) \text{ 上で } b \leftrightarrow y \end{array} \right)$$

が従う。ここで C, a, b が与えられると、「 C が $A \cap \Gamma(\omega)$ における連結成分である」こと、「 $a \leftrightarrow b$ である」こと、および「 $\Gamma(\omega) \setminus (N(C) \cap A)$ 上で b と y が繋がっている」ことは、それぞれ $N(C) \cap A$ 、辺 \overline{ab} 、および $\mathcal{E}(\Gamma) \setminus N(C)$ の辺にのみ依存する独立な事象である。したがって

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) &\leq \sum_{x \in C \subseteq A} \sum_{a \in C \cap \partial A} \sum_{b \in \partial A^c} \mathbb{P}_p(C \text{ が } A \cap \Gamma(\omega) \text{ における連結成分である}) \\ &\quad \cdot \mathbb{P}_p(\omega(\overline{ab}) = 1) \mathbb{P}_p \left(a \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \setminus (N(C) \cap A)} y \right) \\ &\leq \sum_{x \in C \subseteq A} \sum_{a \in C \cap \partial A} \sum_{b \in \partial A^c, a \sim b} p \mathbb{P}_p(C \text{ が } A \cap \Gamma(\omega) \text{ における}) \cdot \mathbb{P}_p(b \leftrightarrow y) \\ &= \sum_{a \in \partial A, b \in \partial A^c, a \sim b} p \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow_A a) \mathbb{P}_p(b \leftrightarrow y) \end{aligned}$$

となり、主張が従う。 \square

次にルッソの公式を紹介する前に、もう一つの概念を導入しておく。辺 $e \in \mathcal{E}$ とボンド配置 $\omega \in \Omega$ が与えられたとき、 $f \in \mathcal{E} : f \neq e$ 上で ω と一致するボンド配置はちょうど二つ存在する。一つは e が開いている場合、もう一つは e が閉じている場合である。前者を ω^e 、後者を ω_e と書くことにする。すなわち、 ω^e, ω_e のうち一方は ω と一致し、もう一方は ω から辺 e の開閉条件を反転させたものである。

増加的な事象 $A \subseteq \Omega$ とボンド配置 $\omega \in \Omega$ に対して、辺 e が ω において事象 A に決定的である (e is pivotal in ω for A) とは、 $\omega^e \in A$ かつ $\omega_e \notin A$ であることを意味する。また、

$$\{e \text{ が } A \text{ に決定的}\} = \{\omega : e \text{ が } \omega \text{ において } A \text{ に決定的}\}$$

と略する。

最後に、単調増加関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ と $p_0 \in (0, 1)$ に対する Dini 微分 (Dini derivative) は

$$\left(\frac{d}{dp} \right)_+ f \Big|_{p=p_0} := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{f(p_0 + \epsilon) - f(p_0)}{\epsilon}$$

と定める。これで、Grigory Margulis および Lucio Russo によって確立された次の公式を紹介する準備が整った。

命題 3.3. 増加的な事象 A と $p_0 \in (0, 1)$ に対して

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dp} \right)_+ \mathbb{P}_p(A) \Big|_{p=p_0} &\geq \sum_{e \in E} \mathbb{P}_p(e \text{ が } A \text{ に決定的}) \\ &= \frac{1}{1-p_0} \sum_{e \in E} \mathbb{P}_p(\omega(e) = 0 \text{かつ } e \text{ が } A \text{ に決定的}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. まず \mathcal{E} が有限集合の場合を考える。このとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) &= \frac{d}{dp} \sum_{\omega \in A} p^{\sum_e \omega(e)} (1-p)^{\#\mathcal{E} - \sum_e \omega(e)} \\ &= \sum_{\omega \in A} \left(\frac{1}{p} \sum_e \omega(e) - \frac{1}{1-p} (\#\mathcal{E} - \sum_e \omega(e)) \right) \cdot p^{\sum_e \omega(e)} (1-p)^{\#\mathcal{E} - \sum_e \omega(e)} \\ &= \frac{1}{p(1-p)} \sum_{e \in \mathcal{E}} \mathbb{E}_p[(\omega(e) - p) \cdot 1_{\omega \in A}] \end{aligned}$$

が計算により確認できる。ここで $e \in \mathcal{E}$ および $\omega|_{\mathcal{E} \setminus e}$ を固定して $\mathbb{E}_p[(\omega(e) - p) 1_{\omega \in A}]$ を計算してみよう。この値が正の値 $p(1-p)$ を取るのは、 $\omega^e \in A$ かつ $\omega_e \notin A$ のときに限られる。実際、 ω^e と ω_e が同時に A に属するか、あるいは同時に A に属さない場合には、 $\mathbb{E}_p[(\omega(e) - p) 1_{\omega \in A}] = 0$ である。また、 A が増加的であるため、 $\omega_e \in A$ かつ $\omega^e \notin A$ ということは不可能である。以上より、右辺が $\sum_{e \in \mathcal{E}} \mathbb{P}_p(e \text{ が } A \text{ に決定的})$ に等しいことが分かる。

次に \mathcal{E} が可算無限集合の場合を考える。まず、任意の有限部分集合 $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ を取ろう。 \mathcal{E}' の中にある辺は確率 $p_0 + \epsilon$ で開き、 \mathcal{E}' の外にある辺は確率 p_0 で開く確率測度を $\mathbb{P}'_{p_0, \epsilon}$ と書くと、

$$\mathbb{P}_{p_0+\epsilon}(A) \geq \mathbb{P}'_{p_0, \epsilon}(A) \geq \mathbb{P}_{p_0}(A)$$

が成り立つ。これは A が増加的である故だ。これを鑑みて前述の計算を行うと

$$\left(\frac{d}{dp} \right)_+ \mathbb{P}_p(A) \Big|_{p=p_0} \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}'_{p_0, \epsilon}(A) - \mathbb{P}_{p_0}(A)}{\epsilon} = \sum_{e \in \mathcal{E}'} \mathbb{P}_p(e \text{ が } A \text{ に決定的})$$

を得る。最後に、 \mathcal{E}' を \mathcal{E} 全体へと拡大することで、主張の不等式が従う。 \square

これで、感受率 $\chi_p := \mathbb{E}_p \#C_{id}$ の挙動に関する事実 2.8 を証明する準備が整った。以下の証明は、Hugo Duminil-Copin と Vincent Tassion による現代的な議論を踏襲したものである [DCT16]。なお、Margulis-Russo の公式を用いない Hugo Vanneuville の別証明も参考になるので、併せて参照されたい [Van25]。

命題 3.4. 有限生成集合 S をもつ無限群 G のケイリーグラフ $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ に対し、臨界パラメータ

$$p_c := \inf \{p \in [0, 1] : \theta(p) := \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} \infty) > 0\}$$

を定める。このとき、感受率 $\chi_p := \mathbb{E}_p \#C_{id}$ は $p < p_c$ のもとで有限であり、 $p = p_c$ では無限大となる。

Proof. 任意の有限集合 $A \subseteq G$ に対し、

$$\epsilon_A(p) := p \sum_{x \in \partial A, y \in \partial A^c, x \sim y} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow_A x)$$

と定義する。さらに

$$p_{\text{有限}} := \sup \{p \in [0, 1] : \text{ある有限集合 } id \in A \subseteq G \text{ に対して } \epsilon_A(p) < 1\}$$

とおく。以下では、次の三つの主張を順に示す。

主張 3.7. 任意の $p < p_{\text{有限}}$ に対して、 χ_p は有限である。

この主張を示すため、 $p < p_{\text{有限}}$ を固定する。このとき、 $\epsilon_A(p) < 1$ を満たす有限集合 A が存在する。

次に、有限集合 $H \subseteq G$ を任意に取る。 $u \in G$ に対し

$$\chi_{p,H}(u) := \sum_{h \in H} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow h)$$

定めると、 H が有限であることから、 $\#H$ という u によらない上限を持つ。つまり、 $\sup_{y \in G} \chi_{p,H}(y)$ は有限である。ここで任意の $u \in G$ に対して、系 3.2 を適用すると

$$\chi_{p,H \setminus uA}(u) \leq p \sum_{x \in \partial A, y \in \partial A^c, x \sim y} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow_A x) \cdot \chi_{p,H \setminus uA}(y)$$

が得られる。一方で $\chi_{p,uA}(u) \leq \#(uA) = \#A$ であることは明らかである。以上を合わせると

$$\chi_{p,H}(u) \leq \epsilon_A(p) \cdot \sup_{y \in G} \chi_{p,H}(y) + \#A$$

が従う。ここで $\sup_{y \in G} \chi_{p,H}(y)$ が有限であることを既に知っているので、

$$\sup_{y \in G} \chi_{p,H}(y) \leq \frac{\#A}{1 - \epsilon_A(p)}$$

と結論できる。特に $\chi_{p,H}(id) \leq \#A/(1 - \epsilon_A)$ が成り立つ。この不等式は H の選び方に依存しないため、 H を増大させることで $\chi_p \leq \#A/(1 - \epsilon_A) < +\infty$ が従い、主張が示される。

なお、この議論から特に $p = 1$ の場合には、 $\epsilon_A(p) < 1$ を満たす有限集合 $id \in A \subseteq G$ は存在しないことが分かる。実際、 G は無限群であるから $\chi_1 = \infty$ である。

主張 3.8. $p = p_{\text{有限}}$ のとき、 $\chi_p = \infty$ である。

これを確認するため、 $p = p_{\text{有限}}$ とし、任意の n に対して

$$\sum_{\|g\|_S = n, \|h\|_S = n+1, g \sim h} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \geq 1/p_{\text{有限}}$$

が成り立つことを思い出そう。ここで、 $\|g\|_S = n$ を満たす各 g に対し、 $|h|_S = n+1$ かつ g の隣接点 h の個数は高々 $\#S$ 個である。したがって

$$\sum_{g \in (N_n(id))^c} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \geq \frac{1}{p \# S}$$

が従う。これを $n = 1, 2, \dots$ について足し合わせると級数は発散し、主張が得られる。

残るのは $p = p_c$ を示すことである。すなわち、次を証明すればよい。

主張 3.9. 任意のパラメータ $p > p$ に対し、 $\theta(p) > 0$ である。

任意の n に対して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dp} \right)_+ \mathbb{P}_p \left(id \leftrightarrow (N_n(id))^c \right) &\geq \sum_{e \in N_n(id)} \mathbb{P}_p(e \text{ は } id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap N_n(id)} (N_n(id))^c \text{ に決定的}) \\ &= \frac{1}{1-p} \sum_{id \in A \subseteq N_n(id), x \sim y, x \in A \not\ni y} \mathbb{P}_p \left(\begin{array}{l} \overline{xy} \text{ は } id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap N_n(id)} (N_n(id))^c \text{ に決定的で} \\ \text{かつ } A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{ である} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{1-p} \sum_{id \in A \subseteq N_n(id), x \sim y, x \in A \not\ni y} \mathbb{P}_p \left(\begin{array}{l} x \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap A} y \text{ で} \\ \text{かつ } A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{ である} \end{array} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、固定した部分集合 $A \subseteq N_n(id)$ および $x \in A \not\ni y$ を満たす辺 \overline{xy} に対し、事象 $\{x \leftrightarrow_A y\}$ は A 内の辺のみに依存し、一方 $\{A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\}\}$ である} という事象は、ちょうど ∂A および A の外部の辺のみに依存する。したがって、これら二つの事象は独立であり、同時に起こる確率はそれぞれの確率の積として表される。以上より、 $p \geq p$ 有限 のもとで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p \left(id \leftrightarrow (N_n(id))^c \right) &\geq \frac{1}{1-p} \left(\inf_A \epsilon_A(p) \right) \cdot \sum_{id \in A \subseteq N_n(id)} \mathbb{P}_p(A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{ である}) \\ &\geq \frac{1}{1-p} \sum_{id \in A \subseteq N_n(id)} \mathbb{P}_p(A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{ である}) \end{aligned}$$

が従う。ところが、右辺の総和は $\{id \text{ が } N_n^c(id) \text{ と分離されている}\}$ という事象の分割になっている。したがって $f_n(p) := \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow (N_n(id))^c)$ は $p \geq p$ 有限 のもとで $(\frac{d}{dp})_+ f_n(p) \geq 1 - f_n(p)$ を満たす。これより、 $p \in (p_c, 1]$ に対して $f_n(p) \geq 1 - e^{-(p-p_c)} > 0$ が得られる。同じ範囲の p について $\theta(p) = \lim_n f_n(p) \geq 1 - e^{(p-p_c)} > 0$ も直ちに従う。以上により p 有限 $= p_c$ が示され、証明は完了する。□

次に、無限連結成分の個数 N_∞ の挙動を考察する。この証明においては、群の作用が本質的な役割を果たす。

補題 3.4. ケイリーグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ に対する p -パーコレーション確率分布 \mathbb{P}_p は、群 G の作用に関して不变であり、かつエルゴード的である。

Proof. まず、有限個の辺 e_1, \dots, e_n の開閉状態のみに依存する事象 A と任意の群元 $g \in G$ に対して $\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(gA)$ が成り立つことは明らかである。ここで

$$\mathcal{P} := \{\text{有限個の辺のみに依存する事象}\}, \mathcal{L} := \{G \text{ の作用に関して確率値が不变な事象}\}$$

と定めると、 \mathcal{P} は \mathcal{L} に含まれる π -系であり、 \mathcal{L} は λ -系である。したがって Dynkin の $\pi-\lambda$ 定理より、 \mathcal{L} はすべてのボレル集合を含む。これにより、 \mathbb{P}_p が群作用に関して不变であることが示された。

次に、二つの集合 $A, B \subseteq \mathcal{E}$ の 対称差を $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と定義する。さらに

$$\mathcal{L} := \{A : \mathcal{P} \text{ の元列 } \{A_n\}_{n>0} \text{ が存在し}, \lim_n \mathbb{P}_p(A \Delta A_n) = 0\}$$

とおくと、 \mathcal{L} もまた λ -系となる。再び Dynkin の $\pi-\lambda$ 定理より、 \mathcal{L} はすべての Borel 集合を含む。

以上を踏まえ、 \mathbb{P}_p が G -エルゴード的であることを示す。 G -不变な任意の事象 A を取り、任意の $\epsilon > 0$ を与える。すると $A \in \mathcal{L}$ であるから、 $\mathbb{P}_p(A \setminus A') < \epsilon$ を満たす $A' \in \mathcal{P}$ を取ることができる。このとき A' は、ある有限個の辺 e_1, \dots, e_n の開閉状態のみに依存する。ケイリーグラフ $Cay(G, S)$ において G が真性に作用するため、 $\{g : \text{ある } i, j \text{ に対して } g(e_i) = e_j\}$ は有限集合である。一方、 G 自身は無限集合であるから、この集合の外にある元 $h \in G$ を選ぶことができる。このとき、 A' と hA' は互いに重ならない辺集合に依存するため、独立な事象である。したがって

$$\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(A \cap hA) =_{2\epsilon} \mathbb{P}_p(A' \cap hA') = \mathbb{P}_p(A') \mathbb{P}_p(hA') =_{2\epsilon+\epsilon^2} (\mathbb{P}_p(A))^2$$

が成り立つ。これが任意の $0 < \epsilon < 1$ に対して成立するためには、 $\mathbb{P}_p(A)$ は 0 または 1 でなければならない。以上によりエルゴード性が証明された。 \square

事実 2.4 は、この補題から直ちに従う。無限連結成分の個数という確率変数は、群 G の作用に関して不变であるからである。最後に、事実 2.9 を証明する。

事実 2.9 の証明. ある p 、あるケイリーグラフ $\Gamma = Cay(G, S)$ 、および $N \in 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して、ほとんど確実に $\Gamma[p]$ がちょうど N 個の無限連結成分をもつと仮定する。すなわち、 $N = +\infty$ の場合を排除して議論を始める。この証明では、

$$B_k := \{\overline{vw} \in \mathcal{V}(\Gamma) : v, w \in N_k(id)\}$$

と定める。また、 $i = 0, 1$ に対して、 $\{\omega : \text{すべての } e \in B_k \text{ について } \omega(e) = i \text{ が成り立つ}\}$ を \mathbf{i}_k と表す。次に、各正整数 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、

$$E_{k;\text{開}} := \{\omega : \Gamma(\omega) \text{ は } N \text{ 個の無限連結成分をもつ}\} \cap \mathbf{1}_k,$$

$$E_{k;\text{閉}} := \{\omega : \Gamma(\omega) \text{ は } N \text{ 個の無限連結成分をもつ}\} \cap \mathbf{0}_k,$$

$$E_{k;\text{一意}} := \{\omega : \Gamma(\omega) \setminus B_k \text{ の無限連結成分のうち、} N_k(id) \text{ と接しているものは高々一つである}\}$$

を定義する。まず、 $E_{k;\text{開}}$ の補集合は $\mathbf{1}_k^c$ と $\Gamma(\omega)$ の無限連結成分の個数が N ではないの和集合である。前者の確率は $1 - p^{\#B_k}$ 、後者の確率は仮定より 0 であるから、 $\mathbb{P}_p(E_{k;\text{開}}) = p^{\#B_k}$ が成り立つ。同様にして、 $\mathbb{P}_p(E_{k;\text{閉}}) = (1 - p)^{\#B_k}$ も従う。

次に、 $E_{k;\text{一意}}$ は $\mathcal{E}(\Gamma) \setminus B_k$ に属する辺のみに依存する事象である。仮に $E_{k;\text{一意}}^c$ が正の確率をもつとすると、

$$\mathbb{P}_p(E_{k;\text{一意}}^c \cap \mathbf{0}_k) = \mathbb{P}_p(E_{k;\text{一意}}^c) \mathbb{P}_p(\mathbf{0}_k) = \mathbb{P}_p(E_{k;\text{一意}}^c)(1 - p)^{\#B_k} > 0$$

となる。一方、この集合と $E_{k;\text{閉}}$ はいずれも $\mathbf{0}_k$ の部分集合であり、その確率の和は $\mathbb{P}_p(\mathbf{0}_k) = (1 - p)^{\#B_k}$ を上回る。したがって、それらの共通部分もまた正の確率をもたなければならない。

ところが、 $E_{k;\text{一意}}^c \cap E_{k;\text{閉}}$ は

$$E' := \left\{ \omega : \begin{array}{l} \Gamma(\omega) \setminus B_k \text{ における無限連結成分がちょうど } N \text{ 個存在し、} \\ \text{そのうち } N_k(id) \text{ と接しているものが少なくとも一つある} \end{array} \right\}$$

に含まれる。したがって、 E' も正の確率をもつ。ここで E' は $\mathcal{E}(\Gamma) \setminus B_k$ の辺のみに依存する事象であるから、

$$\mathbb{P}_p(E' \cap \mathbf{1}_k) = \mathbb{P}_p(E') \mathbb{P}(\mathbf{1}_k) > 0$$

が成り立つ。

しかし $\Gamma(\omega) \setminus B_k$ における少なくとも二つの無限連結成分が B_k に含まれる辺によって連結される。その結果、 $E' \cap \mathbf{1}_k$ における無限連結成分の個数は $N - 1$ 個以下となる。これは $\mathbb{P}_p(E_k; \text{開}) < p^k$ を意味し、前の計算と矛盾する。

以上により、 $\mathbb{P}(E_{k; \text{ 유일}}) = 0$ でなければならない。これがすべての k に対して成り立つため、

$$\cup_k E_{k; \text{一意}}^c = \{\omega : \Gamma(\omega) \text{ における無限連結成分は少なくとも二つある}\}$$

も確率 0 の事象である。したがって $N = 0$ または $N = 1$ であり、証明は完了する。 \square

3.3. 행렬해석. 이절과 다음절에서는 [Hut19] 의 이론을 설명하겠다. 다만 세세한 점을 일부 부연한다.

어떤 유한 생성되는 무한군 G 의 (대칭적인) 유한 생성집합을 선택해 만든 Cayley 그래프 Γ 를 이절내내 고정하겠다. 이때 Γ 의 꼭짓점집합 $\mathcal{V}(\Gamma)$ 는 G 와 같다. 또, Γ 의 정의에 사용된 유한 생성집합의 크기를 D 로 적겠다. 그러면 Γ 는 모든 점에서의 차수가 D 로 동일한 정규그래프 (regular graph) 이다.

이절의 핵심은 행렬의 L^2 -노름이다. 먼저, G -차원 벡터 $v \in \mathbb{R}^G$ 에 대해

$$\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{g \in G} (v(g))^2}$$

로 두고, $\|\cdot\|_2$ -노름이 유한한 벡터의 공간을 $L_2^{(G)}$ 로 표기하겠다. 이때, 코시-슈바르츠 부등식에 의해 $\|\sum_i v_i\|_2 \leq \sum_i \|v_i\|_2$ 임을 유의하라.

이제 G 위에 정의된 음이 아닌 대칭 행렬 $M : \mathbb{R}_{\geq 0}^{G \times G}$ 에 대해

$$\|M\|_{2 \rightarrow 2} := \sup \left\{ \frac{\|Mf\|_2}{\|f\|_2} : f \in L^2(G), f \neq 0 \right\}$$

으로 정의하겠다. 이때 $\|M_1 M_2\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|M_1\|_{2 \rightarrow 2} \cdot \|M_2\|_{2 \rightarrow 2}$ 임은 쉽게 확인할 수 있다. 사실은 비슷하게

$$\|M\|_{1 \rightarrow 1} := \sup_{v \in G} \sum_{u \in G} M(u, v)$$

를 정의할 수 있다. 이때 다음을 확인하자.

事實 3.10. 모든 음이 아닌 대칭 행렬 $M : \mathbb{R}_{\geq 0}^{G \times G}$ 에 대해

$$\|M\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|M\|_{1 \rightarrow 1}.$$

이다. 특히, $\|M\|_{1 \rightarrow 1}$ 이 유한할 때 M 은 $L^2(G)$ 위에서의 연속작용소이다.

아래 증명은 [Woe00] 의 10.A 절에서 발췌한 것이다.

Proof. 스칼라 배를 감안했을 때, $\|M\|_{1 \rightarrow 1} \leq 1$ 인 경우에만 증명하면 충분하니 그 경우에 집중하겠다. 이 때 임의의 $n \geq 0$ 에 대해 M^n 은 각 항이 유한한 값을 가지는 음이 아닌 행렬이고 $\|M^n\|_{1 \rightarrow 1} \leq 1$ 이라는 것은 바로 확인할 수 있다.

먼저, $L^2(G)$ 의 조밀한 부분 공간인 유한서포트 가지는 음이 아닌 벡터들의 공간

$$c_0(G) := \{f \in \mathbb{R}_{\geq 0}^G : \#\{g : f(g) \neq 0\} < +\infty\}$$

및 음이 아닌 벡터들의 공간 $P(G) := \mathbb{R}_{\geq 0}^G$ 을 생각하겠다. 임의의 $f_1, f_2 \in P(G)$ 에 대해

$$(3.5) \quad \langle f_1, Mf_2 \rangle = \sum_{u \in G} f_1(u) \cdot \sum_{v \in G} M(u, v) f_2(v) = \sum_{v \in G} f_2(v) \cdot \sum_{u \in G} M(v, u) f_1(u) = \langle Mf_1, f_2 \rangle$$

임을 기억하라.

먼저 벡터 $f \in c_0(G) \cap P(G)$ 을 하나 생각하겠다. 즉, 유한개의 원소 $g_1, \dots, g_N \in G$ 및 $c_1, \dots, c_N > 0$ 이 존재하여 $g = g_i$ 일 때 $f(g) = c_i$, 그리고 $g \notin \{g_1, \dots, g_N\}$ 일 때 $f(g) = 0$ 이라고 하겠다. 증명하고자 하는 것은 $\langle Mf, Mf \rangle \leq \langle f, f \rangle$ 이다. 만약 $Mf = 0$ 이라면 이부등식은 바로 따라나온다. 따라서 그렇지 않은 경우에 집중하겠다.

이때, $\langle M^n f, M^n f \rangle = \langle f, M^{2n} f \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i M^{2n}(g_i, g_j) c_j$ 는 유한합이기에 그 값은 유한해야 한다. 더하여, 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$\langle M^{n+1} f, M^{n+1} f \rangle^2 = \langle M^n f, M^{n+2} f \rangle^2 \leq \langle M^n f, M^n f \rangle \cdot \langle M^{n+2} f, M^{n+2} f \rangle$$

임을 얻는다. 가정인 $f \neq 0 \neq Mf$ 를 초기 경우로 삼고 이부등식을 귀납적으로 적용하면, 각 n 에 대해 $M^n f$ 가 0 벡터가 아님을 알 수 있다. 또한, $a_n := \frac{\langle M^n f, M^n f \rangle}{\langle M^{n-1} f, M^{n-1} f \rangle}$ 가 단조증가수열임을 알 수 있다:

$$(3.6) \quad \frac{\langle Mf, Mf \rangle}{\langle f, f \rangle} \leq \frac{\langle M^2 f, M^2 f \rangle}{\langle Mf, Mf \rangle} \leq \frac{\langle M^3 f, M^3 f \rangle}{\langle M^2 f, M^2 f \rangle} \leq \dots$$

이제 귀류법을 적용하기 위해 $a_1 > 1$ 이라고 가정해보자. 그러면

$$a_1^m > \frac{\left(\sum_{i=1}^N c_i \right)^2}{\langle f, f \rangle}$$

가성립하게끔 하는 충분히 큰 m 을 잡을 수 있다. 이 m 에 대하여

$$\langle M^m f, M^m f \rangle = \langle f, f \rangle \cdot \prod_{i=1}^m a_i > \left(\sum_{i=1}^N c_i \right)^2$$

임을 알 수 있다. 그런데,

$$\begin{aligned} \langle M^m f, M^m f \rangle &= \langle f, M^{2m} f \rangle = \sum_{i=1}^N c_i \cdot \sum_{j=1}^N M^{2m}(g_i, g_j) c_j \\ &\leq \sum_{i=1}^N c_i \cdot \left(\max_{j=1}^N c_j \cdot \sum_j M^{2m}(g_i, g_j) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^N c_i \cdot \max_{j=1}^N c_j \leq \left(\sum_{i=1}^N c_i \right)^2 \end{aligned}$$

가성립하기에 이는 모순이다. 따라서 $a_1 \leq 1$, 즉 $\|Mf\|_2 \leq \|f\|_2$ 이다.

이제 f 가 $L^2(G) \cap P(G)$ 의 원소일 때 $\langle Mf, Mf \rangle \leq \langle f, f \rangle$ 임을 증명해보겠다. 이 때 G 를 적당히 $\{g_1, g_2, \dots\}$ 라고 정렬하고,

$$f_n(g_j) = \begin{cases} f(g_j) & j = 1, \dots, n \\ 0 & j > n \end{cases}$$

라는 근사 벡터를 만들면 각 f_n 은 $c_0(G) \cap P(G)$ 의 원소이다. 따라서 방금 증명했듯 $\langle Mf_n, Mf_n \rangle \leq \langle f_n, f_n \rangle$ 이다. 또한,

$$\langle f, f \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} f(g_j)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(g_j)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, f_n \rangle$$

이고, 또한 $M, f \geq 0$ 이라는점을사용하면

$$\langle Mf, Mf \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(g_i) f(g_k) M^2(g_i, g_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(g_i) f(g_k) M^2(g_i, g_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Mf_n, Mf_n \rangle$$

임을얻는다. 이를결합하면바라던부등식 $\langle Mf_n, Mf_n \rangle \leq \langle f_n, f_n \rangle$ 을얻는다.

남은경우는 f 가 $L^2(G) \setminus P(G)$ 에살때인데, 이때각계수에절대값을씌워만든벡터 $|f|$ 는

$$\langle Mf, Mf \rangle \leq \langle M|f|, M|f| \rangle \leq \langle |f|, |f| \rangle = \langle f, f \rangle$$

를만족한다는것을알수있다. 이로써증명이끝난다. \square

이제각 $p \in [0, 1]$ 마다 G 에서 G 로향하는대칭행렬 $T_p : G^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 을다음과같이잡겠다:

$$T_p(u, v) := \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) := \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v).$$

앞에서행렬의 L^2 -노름을정의하였는데, 이를이용해

$$p_{2 \rightarrow 2} := \sup \{p : \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} < \infty\}$$

를정의하겠다. 참고로, $p \in [0, p_c)$ 인경우에는각 $u \in G$ 에대해

$$\sum_{v \in G} T_p(u, v) =: \chi_p < +\infty$$

임을알수있다. 이는곧 $\|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|T_p\|_{1 \leftrightarrow 1} \leq \chi_p < +\infty$ 라는얘기인즉, $p_{1 \leftrightarrow 1} \leq p_c \leq p_{2 \rightarrow 2}$ 이다.

이제

$$p_u := \inf \{p : \text{거의확실하게 } \Gamma[p] \text{ 가무한연결성분을정확히한개가지고있음}\}$$

이었음을기억하라. 이때 $p_c \leq p_u$ 임은이미알려져있다. 또한, 각각의 $p > p_c$ 마다 $\mathbb{P}_p(C(id)$ 가무한히큼) 는양수라는것을기억하라. 이값을 ϵ_p 라고표시하자. 각각의 $q > p_u$ 마다, $\Gamma[p]$ 가무한연결성분을정확 히한개가질확률이 1 인 $q > p \geq p_u$ 가존재한다. 그 p 에대해, 임의의 $u, v \in \Gamma$ 에대해

$\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) \geq \mathbb{P}_p(u \text{ 가 (유일한) 무한연결성분에포함됨}) \cdot \mathbb{P}_p(v \text{ 가 (유일한) 무한연결성분에포함됨}) \geq \epsilon_p^2 > 0$ 이다. 즉, T_p 는각항이 ϵ_p^2 보다큰무한행렬인것이다. 이는곧

$$\chi_q \geq \chi_p = \sum_{g \in G} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \geq \sum_{g \in G} \epsilon_p^2 = +\infty$$

임을의미한다. 비슷한이유로, $\|T_q\|_{2 \rightarrow 2}$ 또한무한대이다. 따라서 $p_{1 \leftrightarrow 1} \leq p_{2 \rightarrow 2} \leq p_u$ 이다.

우리의목표는 $p_c < p_{2 \rightarrow 2}$ 를증명하는것, 다시말해 $p_c = p_{2 \rightarrow 2}$ 인경우를배제하는것이다. 이목표에 다다를수있는기준을이제부터살펴보겠다. 먼저,

$$A(u, v) := \begin{cases} 1 & \Gamma \text{ 안에서 } u \sim v \\ 0 & \text{그외의경우} \end{cases}$$

라는행렬을정의하자. 이행렬을 **인접성행렬 (adjacency matrix)** 이라고부른다. 이절첫머리에, Γ 가 D 차수정규그래프임을강조했다. 따라서 $\|A\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|A\|_{1 \rightarrow 1} = D$ 이다. 이제다음을관찰하겠다.

補題 3.5. 각각의 $0 \leq p < p_{2 \rightarrow 2}$ 에대해

$$\|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \geq \frac{1-p}{D(p_{2 \rightarrow 2} - p)}$$

가성립한다.

Proof. 이를 귀류법으로 증명하기 위해, 어떤 $q > p_{2 \rightarrow 2}$ 에 대해

$$\|T_p\|_{2 \rightarrow 2} < \frac{1-p}{D(q-p)}$$

라고 가정한 뒤 모순을 이끌어내겠다.

이번 증명에서는 $\Gamma = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma))$ 를 복제하겠다. 즉, $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ 는 Γ 와 똑같이 생긴 그래프이다. 이 때 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 에 대응하는 $\Gamma^{(i)}$ 의 모서리를 $e^{(i)}$ 라고 표기하겠다. 꼭짓점에 대해서도 비슷하게 하겠다.

이제, $\Gamma^{(1)}$ 에서는 p -파이-코レーション을, $\Gamma^{(2)}$ 에서는 $\frac{q-p}{1-p}$ -파이-코レーション을 독립적으로 진행한 뒤 포개어 응합하겠다. 더 엄밀하게 말하자면, $\Gamma^{(1)}[p]$ 와 $\Gamma^{(2)}[\frac{q-p}{1-p}]$ 를 독립적으로 진행한 뒤, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 를 다음과 같이 정의 한다는 것인데, 어떤 모서리 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 가 Γ' 에서 열려 있을 필요 충분 조건은 $e^{(1)}$ 가 $\Gamma^{(1)}$ 에서 열려 있거나 혹은 $e^{(2)}$ 가 $\Gamma^{(2)}$ 에서 열려 있다는 것이다.

이렇게 하면, Γ' 에서 어떤 모서리 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 가 닫혀 있을 확률은 $(1-p) \cdot (1 - \frac{q-p}{1-p}) = 1-q$ 이다. 또 Γ 의 각 모서리의 Γ' 에서의 개폐 여부는 독립적이다. 따라서 Γ' 는 q -파이-코レーション을 모사하는 모델이다.

이때 임의의 $u, v \in G$ 에 대해

$$\{u \leftrightarrow_{\Gamma'} v\} \subseteq \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{v_i, u_i\}_{i=1}^N \subseteq G} \left\{ \begin{array}{l} \text{순서쌍 } (u_0^{(1)}, v_1^{(1)}), \dots, (u_{N-1}^{(1)}, v_N^{(1)}) \text{ 이 서로 다른} \\ N \text{ 개의 } \Gamma^{(1)}\text{-연결 성분에 들어 있고,} \\ \text{각 } i \text{ 마다 } \overline{v_{i+1}^{(2)} u_{i+1}^{(2)}} \in \mathcal{E}(\Gamma^{(2)}) \end{array} : u_0 = u, v_{N+1} = v \right\}$$

이다. 왼쪽 사건에 들어 있는 원소, 즉 u 와 v 가 어떤 Γ' -경로로 이어져 있는 경우에, u 와 같은 $\Gamma^{(1)}$ -연결 성분에 있으면서 P 상에서 가장 나중에 오는 점을 v_1 이라고 잡으면 v_1 과 그 다음 점은 $\Gamma^{(1)}$ 에서 이어져 있을 수 없고 따라서 $\Gamma^{(2)}$ 의 모서리로 연결되어 있기 때문이다.

이제 각 N 및 $\{v_i, u_i\}_{i=1}^N \subseteq G$ 에 대해, ($u_0 = u, v_{N+1} = v$ 로 설정했을 때)

$$(3.7) \quad \mathbb{P} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{(1)} \text{ 안의 서로 만나지 않는 경로} \\ P_0, \dots, P_N \text{ 이 존재해 } u_i^{(1)} \leftrightarrow_{P_i} v_{i+1}^{(1)} \text{이고,} \\ \overline{v_{i+1}^{(2)} u_{i+1}^{(2)}} \in \mathcal{E}(\Gamma^{(2)}) \end{array} : u_0 = u, v_{N+1} = v \right\} \leq \prod_{i=0}^N \mathbb{P}_p(u_i \leftrightarrow v_i) \cdot \left(\frac{q-p}{1-p} \right)^N \cdot \prod_{i=1}^N A(v_i, u_i)$$

인데, 그 이유를 설명하겠다. 먼저, $\Gamma^{(1)}$ 에서의 연결여부와 $\Gamma^{(2)}$ 에서의 연결여부는 독립이다. 더하여,

$$\mathbb{P} \left(\Gamma^{(1)} \text{ 안의 서로 만나지 않는 경로 } P_0, \dots, P_N \text{ 이 존재해 } u_i^{(1)} \leftrightarrow_{P_i} v_{i+1}^{(1)} \text{임} \right) \leq \prod_{i=0}^N \mathbb{P}_p(u_i \leftrightarrow v_i)$$

인 것은 BK 부등식 (혹은 따름 정리 3.1)에 의한 것이다. 또, $\overline{v_1^{(2)} u_1^{(2)}}, \dots, \overline{v_N^{(2)} u_N^{(2)}}$ 각각이 $\mathcal{E}(\Gamma^{(2)})$ 에 속하는 사건은 모두 독립적이고 각각의 확률은 $A(v_i, u_i) \cdot \left(\frac{q-p}{1-p} \right)$ 이다. 이로써 식 3.7의 설명이 끝난다.

이를 요약하면

$$T_q(u, v) = \mathbb{P}_q(u \leftrightarrow v) \leq \sum_{N=0}^{\infty} T_p \left(\frac{q-p}{1-p} AT_p \right)^N (u, v)$$

임을 알수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}
 \|T_q\|_{2 \rightarrow 2} &\leq \left\| \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{q-p}{1-p} \right)^N T_p(AT_p)^N \right\|_{2 \rightarrow 2} \leq \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{q-p}{1-p} \right)^N \|T_p(AT_p)^N\|_{2 \rightarrow 2} \\
 (3.8) \quad &\leq \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \cdot \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{q-p}{1-p} \|A\|_{2 \rightarrow 2} \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \right)^N
 \end{aligned}$$

임을 확인할수 있다. 이때, $\|A\|_{2 \rightarrow 2} \leq D$ 라는 것은 일전에 확인했다. 따라서

$$\frac{q-p}{1-p} \|A\|_{2 \rightarrow 2} \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \leq \frac{q-p}{(1-p)} D \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} < 1$$

이다. 이는 식 3.8 우변의 급수가 수렴한다는 것을 의미한다. 하지만 $q > p_{2 \rightarrow 2}$ 이기에 좌변은 무한대여야 하고, 이는 모순이다. 이로써 증명이 끝난다. \square

이제, 각각의 $0 \leq p < p_c$ 에 대해

$$\begin{aligned}
 \iota(T_p) &:= \inf \left\{ \frac{\sum_{u \in A, v \notin A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} : A \text{ 는 } G \text{ 의 유한집합} \right\} \\
 &= 1 - \sup \left\{ \frac{\sum_{u, v \in A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} : A \text{ 는 } G \text{ 의 유한집합} \right\}
 \end{aligned}$$

를 정의하자. 이는 등주상수 (isoperimetric constant) 라고 불린다. 아래 증명은 [Woe00, Prop I.4.3] 혹은 [LP16, Lem 6.8]에서 가져온 것이다.

補題 3.6. 각각의 $0 < p < p_c$ 에 대해 다음식이 성립한다:

$$\|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \leq \chi_p \sqrt{1 - \iota(T_p)^2}.$$

Proof. 먼저, 각각의 $f \in c_0(G) \cap P$ 에 대해

$$(3.9) \quad \iota(T_p) \|f\|_1 \leq \frac{1}{2\chi_p} \left(\sum_{v, w \in G} |f(v) - f(w)| \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right)$$

가 성립한다는 것을 보이겠다. 먼저, 우변은

$$\begin{aligned}
 \sum_{v, w \in G: f(v) > f(w)} (f(v) - f(w)) \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \chi_p^{-1} &= \sum_{w \in G} \sum_{v \in G: f(v) > f(w)} \chi_p^{-1} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \cdot \int_{f(w)}^{f(v)} 1 dt \\
 &= \int_0^\infty \left(\sum_{v, w: f(w) \leq t < f(v)} \chi_p^{-1} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right) dt \\
 &= \chi_p^{-1} \cdot \int_0^\infty \left(\sum_{v \in \{f > t\}, w \notin \{f > t\}} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right) dt
 \end{aligned}$$

임을 알수 있다. 이때, 피적분항은 등주상수로 다스릴 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \chi_p^{-1} \cdot \int_0^\infty \left(\sum_{v \in \{f > t\}, w \notin \{f > t\}} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right) dt &\geq \chi_p^{-1} \int_0^\infty \iota(T_p) \cdot \chi_p \#\{u : f(u) > t\} dt \\ &= \iota(T_p) \sum_{u \in G} f(u) = \iota(T_p) \|f\|_1 \end{aligned}$$

이기 예주장이 증명되었다.

이제 임의의 $f \in c_0(G) \cap P$ 에 대해 부등식 3.9을 활용하면

$$\begin{aligned} \iota(T_p)^2 \|f\|_2^4 &= \iota(T_p)^2 \|f^2\|_1^2 \leq \frac{1}{4\chi_p^2} \left(\sum_{v,w \in G} |f^2(v) - f^2(w)| \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\chi_p^2} \left(\sum_{v,w \in G} |f(v) - f(w)| (f(v) + f(w)) \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\chi_p^2} \left(\sum_{v,w \in G} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) (f(v) - f(w))^2 \right) \cdot \left(\sum_{v,w \in G} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) (f(v) + f(w))^2 \right) \quad (\because \text{코사-슈바르츠}) \end{aligned}$$

을 얻는다. 이때,

$$\sum_{v,w \in G} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) (f^2(v) + f^2(w) \pm 2f(v)f(w)) = \sum_{v \in G} \chi_p f^2(v) + \sum_{w \in G} \chi_p f^2(w) \pm 2\langle f, T_p f \rangle = 2\chi_p \langle f, f \rangle \pm 2\langle f, T_p f \rangle$$

이다. 이로부터

$$\|f\|_2^4 \iota(T_p)^2 \leq \|f\|_2^4 - \frac{\langle f, T_p f \rangle^2}{\chi_p^2}$$

임을 알수 있다. 이는 다시 말해

$$\chi_p^2 (1 - \iota(T_p)^2) \geq \frac{\langle f, T_p f \rangle^2}{\langle f, f \rangle^2}$$

임을 의미한다. 또 $\langle |f|, T_p |f| \rangle \geq \langle f, T_p f \rangle$ 이므로, 이 계산은 임의의 $f \in c_0(G)$ 에 대해서도 유효하다. 마지막으로, $c_0(G)$ 는 $L^2(G)$ 안에서 조밀하고 T_p 는 연속 작용소이므로 이 계산은 $f \in L^2(G)$ 에 대해서도 유효하다. 따라서

$$K := \sup \left\{ \frac{|\langle f, T_p f \rangle|}{\|f\|_2} : f \in L^2(G) \setminus \{0\} \right\}$$

는 $\chi_p \sqrt{1 - \iota(T_p^2)}$ 보다 작거나 같다.

이제 $K \geq \|T_p\|_{2 \rightarrow 2}$ 만 확인하면 된다. 이를 위해 임의의 $f \in L^2(G)$ 를 가져온 뒤 $g = T_p f$ 로 두자. 그러면 임의의 $t > 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} 4\langle tg, T_p f \rangle &= \langle T_p(f + tg), f + tg \rangle - \langle T_p(f - tg), f - tg \rangle \\ &\leq K|f + tg|^2 + K|f - tg|^2 \end{aligned}$$

이므로

$$4\langle g, T_p f \rangle \leq 2K \left(\frac{1}{t} \|f\|_2^2 + t\|g\|_2^2 \right) \quad (\forall t > 0)$$

가되어야한다. 이것이 가능하려면 $4\langle g, T_p f \rangle \leq 4K \|f\|_2 \|g\|_2$ 여야하고, 이로부터

$$\frac{\langle T_p f, T_p f \rangle}{\|f\|_2^2} \leq K \cdot \frac{\|T_p f\|_2}{\|f\|_2} \leq K^2$$

임을 알수있다. 이로부터 $K \geq \|T_p\|_{2 \rightarrow 2}$ 가증명되었다. (사실들은 같은값이다.) \square

3.4. 명제 3.2의 증명. 보조정리 3.5 및 3.6를 결합하면, $0 \leq p < p_c$ 각각에 대해

$$\frac{1}{D} \leq \frac{1}{1-p} (p_{2 \rightarrow 2} - p) \cdot \chi_p \sqrt{1 - \iota(T_p)^2}$$

임을 알수있다. 또, 우리가 다루는 군들은 자유군을 부분군으로 가지기에 사실 2.6에 의해 $p_c < 1$ 이다. 따라서, 만약 $p_{2 \rightarrow 2} = p_c < 1$ 이 성립한다면,

$$\lim_{p \nearrow p_c} (p_c - p) \chi_p \cdot \sqrt{1 - \iota(T_p)^2} = \frac{1}{D(1-p_c)} > 0$$

이어야만 한다.

이를 감안했을 때, $p_c < p_{2 \rightarrow 2}$ 를 통해 명제 3.2를 증명하기 위해서는 다음 명제 3.5와 명제 3.6만 증명하면 되고, 이것이 이절의 내용이다.

命題 3.5. 자유부분군을 가지는 대충반전가능한군 G 와 그 유한 생성집합 S 를 하나 고정하자. 그러면 케일리그래프 $\Gamma = Cay(G, S)$ 의 임계변수 $p_c = p_c(\Gamma)$ 에 대해,

$$\limsup_{p \nearrow p_c} (p_c - p) \chi_p < +\infty$$

가 성립한다.

Proof. 구간 $p = [0, p_c)$ 위에서 χ_p 는 단조증가함수였다는 것을 기억하라. 우리 목표는 어떤 양수 $C > 0$ 에 대해

$$\left(\frac{d}{dp} \right)_+ \chi_p \geq C \chi_p^2$$

구간 $p \in [0.5p_c, p_c)$ 위에서 성립한다는 것을 보이는 것이다. 실제로, 위 부등식만 있으면

$$\chi_p^{-1} = -(\chi_{p_c}^{-1} - \chi_p^{-1}) \geq - \int_p^{p_c} \left(\frac{d}{dp} \right)^+ \chi_p^{-1} dp = \int_p^{p_c} \chi_p^{-2} \left(\frac{d}{dp} \right)_+ \chi_p dp = C(p_c - p)$$

가 동일한 구간에서 성립함을 확인할 수 있다.

이제 감수율의 디니도 함수를 계산해보겠다. 마굴리스-루쏘의 공식에 의해,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dp} \right)_+ \sum_{g \in G} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) &\geq \frac{1}{1-p} \sum_{g \in G} \sum_{e \in \mathcal{E}(\Gamma)} \mathbb{P}_p(e \text{ 가 } id \leftrightarrow g \text{ 에 중추적이고 닫혀있음}) \\
 &= \frac{1}{1-p} \sum_{g \in G} \sum_{v,w \in G, v \sim w} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow v \wedge v \not\leftrightarrow w \wedge w \leftrightarrow g) \\
 (3.10) \quad &= \frac{1}{1-p} \sum_{g \in G} \sum_{v,w \in G, v \sim w} \mathbb{P}_p(v^{-1} \leftrightarrow id \wedge id \not\leftrightarrow v^{-1}w \wedge v^{-1}w \leftrightarrow vg) \\
 &= \frac{1}{1-p} \sum_{g,h \in G} \sum_{s \in S} \mathbb{P}_p(h \leftrightarrow id \wedge id \not\leftrightarrow s \wedge s \leftrightarrow g)
 \end{aligned}$$

임을 알수있다. 여기서 세 번째 줄에서는 확률이 $v^{-1} \in G$ 의 작용에 불변임을 사용했다.

다음으로, 군 G 가 대충 반전하다는 사실을 구현하는 부분집합 $A_1, \dots, A_N \subseteq G$ 및 원소 g_1, \dots, g_N 을 잡자. 이제 임의의 유한집합 $A \subseteq G$ 및 임의의 원소 $a \in G$ 마다

$$I(a, A) := \begin{cases} 1 & A \subseteq aA_i \subsetneq ag_i A_i^c \text{이게 끔하는 } i \text{ 가 존재함} \\ 0 & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

를 정의하자. 군 G 가 대충 반전 가능하기에, $\sum_{a \in A} I(a, A)$ 는 항상 $\#A$ 의 절반이상이다.

이제, 퍼코レーション을 위한 확률 공간 Ω 위에서 함수 $F : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{R}$ 을 다음과 같이 잡아주겠다:

$$F(\omega, a) := I(a, C_{id}(\omega)) \cdot 1_{a \in C_{id}(\omega)}.$$

그러면 p 의 값이 그 무엇이든

$$\sum_{a \in G} \mathbb{E}_p F(\omega, a) = \mathbb{E}_p \sum_{a \in C_{id}(\omega)} I(a, C_{id}(\omega)) \geq \mathbb{E}_p \left(\frac{1}{2} \#C_{id}(\omega) \right) = \frac{1}{2} \chi_p$$

임을 알 수 있다. 그런데 좌변의 항은

$$\begin{aligned} \sum_{a \in G} \mathbb{E}_p F(\omega, a) &= \sum_{a \in G} \mathbb{E}_p F(\omega, a^{-1}) = \mathbb{E}_p \sum_{a: a^{-1} \in C_{id}(\omega)} I(a^{-1}, C_{id}(\omega)) \\ &= \mathbb{E}_p \sum_{a: id \in C_a(\omega)} I(id, C_a(\omega)) \\ &= \mathbb{E}_p \sum_{a \in C_{id}(\omega)} I(id, C_a(\omega)) = \mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot I(id, C_{id}(\omega))] \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \subsetneq g_i A_i^c}] \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이 부등식들을 조합하면, 어떤 $i \in \{1, \dots, N\}$ 가 존재하여

$$\mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \subsetneq g_i A_i^c}] \geq \frac{1}{2N} \chi_p$$

가 성립함을 알 수 있다. 마찬가지 이유로,

$$\mathbb{E}_p [\#C_{g_j}(\omega) \cdot 1_{C_{g_j}(\omega) \subseteq g_i A_i}] \geq \frac{1}{2N} \chi_p$$

임을 알 수 있다. 또한, 확률 변수 $\#C_{id}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i}$ 및 $\#C_{g_i}(\omega) \cdot 1_{C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}$ 는 독립적인 변수이다. 이들은 각각 A_i 및 $g_i A_i$ 라는 서로 겹치지 않는 모서리 집합에 의존하기 때문이다. 따라서,

$$\mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot \#C_{g_i}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \wedge C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}] \geq \frac{1}{4N^2} \chi_p^2$$

라는 계산을 얻는다.

이제, 적당한 $0 < L' < L$ 에 대해, id 에서 g_i 를 잇는 S -경로 $\gamma_i = (v_0, v_1, \dots, v_L)$ 이면서 $v_0, \dots, v_{L'} \in g_i A_i^c$ 및 $v_{L'+1}, \dots, v_L \in A_i^c$ 인 그런 경로를 하나 잡자. 이는 g_1, \dots, g_N 및 A_1, \dots, A_N 에 대해 염려진 가정이었다. 이제 $v := v_{L'}$ 과 $v' = v_{L'+1}$ 을 잡고, γ_i 의 v 이전부분을 $[v_0 v]$, v' 이후부분을 $[v' g_i]$ 로 적겠다.

이제 어떤 양수 c_p 에 대해

$$\mathbb{E}_p [(\#C_v)(\#C_{v'}) 1_{v \neq v'}] \geq c_p \mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot \#C_{g_i}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \wedge C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}]$$

임을보이겠다. 이를위해, 우변에서다루는상태 $\omega \in \Omega$ 를좌변에맞게끔변형하는사상 $F : \Omega \rightarrow \Omega$ 를정의하겠다. 먼저 $C_{id}(\omega) \subseteq A_i$ 이고 $C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i$ 인 $\omega \in \Omega$ 를준비하자.

- (1) 먼저, $[v_0v]$ 및 $[v'g_i]$ 의모든모서리는열고, $\overline{vv'}$ 는닫아주겠다.
- (2) 다음으로, $[v_0v]$ 에인접해있는모서리중최소한끝점이 $C_{id}(\omega)$ 에들어있지않은모서리는닫아주겠다.
- (3) 마찬가지로, $[v'g_i]$ 에인접해있는모서리중최소한끝점이 $C_{g_i}(\omega)$ 에들어있지않은모서리는닫아주겠다.

이작업이끝났을때만들어지는상태를 $F(\omega)$ 라고적겠다.

위에서수행한조작은 (랜덤하지않고정확하게명시된) $N_1(\gamma_i)$ 안의모서리의개폐여부만바꿨다는사실에주목하라. 즉, 기껏해야 $\#S \cdot L$ 개의모서리만조작한것이다. 따라서각상태 ω 마다 $\#F^{-1}(\omega)$ 의크기는 $(\#S) \cdot L$ 이하이고, 또라돈-니코딤도함수의크기에관해

$$\frac{d\mathbb{P}_p F^*(\cdot)}{d\mathbb{P}_p(\cdot)} \geq \min\left(\frac{1-p}{p}, \frac{p}{1-p}\right)^{(\#S) \cdot L}$$

라는부등식이성립한다. 이제상태 $F(\omega)$ 의그래프에서

$$C_{id}(F(\omega)) = C_{id}(\omega) \cup [v_0v]$$

임을확인하고자한다. 먼저, $C_{id}(\omega)$ 의임의의점이 $\Gamma(F(\omega))$ 에서어떻게들어있는지보기위해, id 에서그점으로향하는 $\Gamma(\omega)$ -경로에속하는모서리 e 를잡자. 이때 $v' \notin A_i \supseteq C_{id}(\omega)$ 이므로 $e = \overline{vv'}$ 일리는없기에조작 (1) 이 e 를닫을일은없다. 조작 (2) 가 e 를닫을일도없다. 마지막으로, $C_{id}(\omega) \subseteq A_i$ 는 $[v'g_i]$ 와만나지않기에, 조작 (3) 이 e 를닫을일도없다. 즉, $F(\omega)$ 에서도이경로는살아있고, $C_{id}(\omega)$ 의임의의점은 $\Gamma(F(\omega))$ 에서도 id 에연결되어있다.

다음으로, $[v_0v]$ 위의각모서리들은 (기존개폐여부와관계없이) 조작에의해열리니모두 $C_{id}(F(\omega))$ 에속한다. 이제반대방향포함관계를보이기위해, $\Gamma(F(\omega))$ 에서 id 와연결되어있는점 u 과, 그것을구현하는 $\Gamma(F(\omega))$ -최단경로 ($id = u_0, u_1, \dots, u_T = u$) 를생각하겠다. 이때 $t = \max\{i : u_i \in C_{id}(\omega) \cup [v_0v]\}$ 라고하자. 만약 $t = T$ 라면이는우리가원하는바이다. 만약그렇지않다면, u_{t+1} 은 $C_{id}(\omega)$ 에도 $[v_0v]$ 에도들어있지않은점이된다. 만약 $u_t \in [v_0v]$ 라면, 작업 (2) 에의해 $\overline{u_t u_{t+1}}$ 은 「강제로닫혔어야하기에」 모순이생긴다. 만약 $u_t \in C_{id}(\omega) \setminus [v_0v]$ 라면, u_t 는 A_i 안의점이고따라서 $[v'g_i]$ 위에도있을수없다. 즉, $[u_t u_{t+1}]$ 는작업 (1) 에의해새로열린모서리는아니라는뜻이다. 그럼에도열려있다는것은 $\Gamma(\omega)$ 에서도열려있었다는뜻이고, 따라서 $u_{t+1} \in C_{id}(\omega)$ 이어야하는데이는모순이다. 이로써 $t = T$ 이고 $u \in C_{id}(\omega) \cup [v_0v]$ 임을알수있다.

마찬가지이유로, $C_{g_i}(F(\omega)) = C_{g_i}(\omega) \cup [v'g_i]$ 임을알수있다. 즉, 조작 F 는 id 연결성분도 g_i 연결성분도조금더키워각각 v 및 v' 에연결되게끔하지만, 두연결성분이여전히서로떨어져있게끔하는조작임을알수있다. 따라서, $\text{Im } F := F(\{\omega : C_{id}(\omega) \subseteq A_i \wedge C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i\})$ 로두었을때,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[(\#C_v)(\#C_{v'})1_{v \leftrightarrow v'}] &\geq \mathbb{E}_p [(\#C_v(\omega')) \cdot (\#C_{v'}(\omega')) : \omega' \in \text{Im } F] \\ &\geq \frac{1}{\max_{\omega' \in \text{Im } F} \#F^{-1}(\omega')} \mathbb{E}_p F^* [\#C_{id}(\omega) \cdot \#C_{g_i}(\omega) 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \wedge C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}] \\ &\geq \frac{1}{(\#S) \cdot d_S(id, g_i)} \min\left(\frac{1-p}{p}, \frac{p}{1-p}\right)^{(\#S) \cdot L} \cdot \frac{1}{4N^2} \chi_p^2 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 여기서, v 와 v' 는 g_i 라는 선택지로부터 결정된 인접한 꼭짓점들이다. 다시 말해, $s := v^{-1}v'$ 는 S 의 한 원소이다. 위 좌변의 사건에 v^{-1} 를 곱해부등식 3.10에 넣음으로써,

$$\left(\frac{d}{dp}\right)_+ \chi_p \geq \frac{1}{1-p} \frac{1}{(\#S) \cdot L} \min\left(\frac{1-p}{p}, \frac{p}{1-p}\right)^{(\#S) \cdot d_S(id, g_i)} \cdot \frac{1}{4N^2} \chi_p^2 \quad (0 < p < p_c)$$

임을 알 수 있다. 여기서 우변의 χ_p^2 앞에 곱해져 있는 계수는 $(0.5p_c, p_c)$ 구간 위에서 양수하한을 가진다. (여기서는 $0 < p_c < 1$ 임이 쓰였다.) 이하한이 우리가 찾던 C 이다. 이로써 증명이 끝난다. \square

이제 보조정리를 몇 개 증명하겠다.

補題 3.7. 유한생성집합 S 가 갖춰진 군 G 의 케일리그래프 $\Gamma = Cay(G, S)$ 의 임계변수가 $p_c = p_c(\Gamma)$ 라고 하자. 그러면 각각의 $K < 0$ 마다 양수 $C = C(K)$ 가 존재해, 임의의 $0 \leq p \leq p_c$ 및 K -나무스러운 집합 A 에 대해

$$\sum_{g \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq C$$

가 성립한다.

Proof. 가정에 의해 A 는 어떤 나무스러운 집합 A' 의 K -근방에 포함되어 있다. 이 때, 각각의 $a \in A$ 마다 $ab_a \in A'$ 및 $d_S(id, b_a) \leq K$ 를 만족하는 $b_a \in G$ 가 존재한다. 이로써 증명 3.3에 의해

$$\mathbb{P}_p(id \leftrightarrow ab_a) \geq \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a \leftrightarrow ab_a) \geq \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a) \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow b_a)$$

가 성립한다. 이로부터

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a) &\leq \left(\min_{b: d_S(id, b) \leq K} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow b) \right)^{-1} \cdot \sum_{a \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow ab_a) \\ &\leq (\#S)^K \cdot \left(\min_{b: d_S(id, b) \leq K} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow b) \right)^{-1} \sum_{a' \in A'} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a') \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이를 감안했을 때, A 가 나무스러운 경우에 대해서만 증명해도 충분하기에 그렇게 가정하겠다.

다시 보조정리 3.3에 의해

$$\sum_{a_1, a_2, \dots, a_N \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a_1 \cdots a_N) \geq \left(\sum_{g \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \right)^N$$

인 것은 분명하다. 그런데 A 가 나무스럽기 때문에 $(a_1, \dots, a_N) \mapsto a_1 \cdots a_N$ 이라는 사상이 일대일 사상이므로, 좌변은

$$\sum_{a_1, a_2, \dots, a_N \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a_1 \cdots a_N) \leq \sum_{a \in A^n} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a) \leq \chi_p$$

로 다스릴 수 있다. 이 때 우변은 $0 \leq p < p_c$ 일 때 유한해야 하는데, 그러면 $\sum_{g \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g)$ 가 1 이하여야 한다. 이로써 $p \in [0, p_c]$ 위에서 바라던 부등식을 얻고, 좌변 속성에 의해 (보조정리 3.2) $p = p_c$ 에서 까지 연장할 수 있다. \square

위 명제가 유용할 수 있는 것은 아래 따름 정리 덕분이다.

系 3.3. 유한생성집합 S 가갖춰진군 G 의케일리그래프 Γ 를생각하고, K -나무스러운집합 $B \subseteq G$ 를생각하자.

그러면임의의 $\epsilon > 0$ 마다 $D > 0$ 이존재해,

$$\sum_{\substack{g \in G: B \setminus N_D(id) \\ g \text{ 는 } id \text{ 와 } g \text{ 사이의장벽임}}} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq \epsilon \cdot \chi_p$$

가성립한다.

Proof. 보조정리 3.7에의해잡히는상수 $C = C(K)$ 를생각하자. 그러면

$$\sum_{g \in B} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq C < +\infty$$

이다. 그러면단조수렴정리에의해, 임의의 $\epsilon > 0$ 에대해

$$\sum_{g \in B \cap N_D(id)} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \geq C - \epsilon$$

인 D 가존재한다.

이제 $A' := \{g \in G : id \leftrightarrow_{G \setminus (B \setminus N_D(id))} g\}$ 를잡자. 그러면, id 와의사이에 $B \setminus N_D(id)$ 로가로막힌 원소들은모조리 A' 바깥에있다. 물론 $id \in A'$ 이고또 $\partial A' \subseteq B \setminus N_D(id)$ 이다. 이제따름정리 3.2를적용하면

$$\sum_{\substack{g \in G: B \setminus N_D(id) \\ g \text{ 는 } id \text{ 와 } g \text{ 사이의장벽임}}} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq \sum_{g \in B \setminus N_D(id)} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \cdot \chi_p \leq \epsilon \chi_p$$

라는결론을내릴수있다. \square

系 3.4. 유한생성집합 S 가갖춰진군 G 의케일리그래프 Γ 를생각하자. 그러면임의의 $\epsilon, K > 0$ 마다 $D > 0$ 이존재해다음이성립한다.

임의의 K -나무스러운집합 $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_D$ 에대해,

$$\sum_{\substack{g \in G: B_1, \dots, B_D \\ g \text{ 각각은 } id \text{ 와 } g \text{ 사이의장벽임}}} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq \epsilon \cdot \chi_p$$

가성립한다.

Proof. 보조정리 3.7에의해잡히는상수 $C = C(K)$ 를생각하자. 그리고 $D > C/\epsilon$ 을생각하자. 그러면

$$\sum_{i=1}^D \sum_{g \in B_i} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \sum_{g \in B} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq C$$

이다. 따라서최소한한 i 에대해서는 $\sum_{g \in B_i} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) < C/D < \epsilon$ 이다. 이제방금과같이따름정리 3.2를적용하면부등식을얻는다. \square

이제두번째명제를증명하겠다.

命題 3.6. 유한생성집합 S 가갖춰진군 G 가마법보조정리를만족한다고가정하자. 그러면

$$\lim_{p \nearrow p_c} \left(\iota(T_p) := \inf \left\{ \frac{\sum_{u \in K, v \notin A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} : A \text{ 는 } G \text{ 의유한집합} \right\} \right) = 1$$

이성립한다.

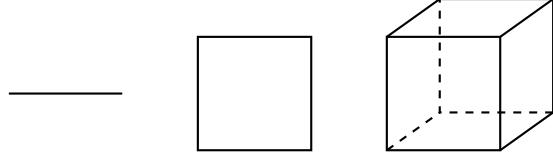


FIGURE 3. (속이꽉차있는) 1, 2, 3 차원큐브들.

Proof. 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $\eta(\epsilon) > 0$ 을 잡아, 임의의 $p \in (p_c - \eta, p_c)$ 및 유한집합 $A \subseteq G$ 에 대해

$$\frac{\sum_{u,v \in A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} < 10\epsilon$$

임을보이기만하면충분하다. 먼저, G 가마법보조정리를만족하게끔하는상수 $K > 0$ 을택한뒤, $\epsilon, K > 0$ 에대한상수 $D > 0$ 를따름정리 3.4로부터얻는다. 이제이 D 에대해마법보조정리가보장하는대충나무스러운집합 B 를고정하겠다. 마지막으로, B 에따름정리 3.3를적용해 $D' = D(\epsilon)$ 을잡자. 이제 G 에관한마법보조정리는어떤숫자 $N = N(\epsilon, D)$ 가보장한다. 또, 명제 3.4 및보조정리 3.2에의해 $\lim_{p \nearrow p_c} \chi_p = +\infty$ 임을기억하라. 따라서 $\chi_{p_c - \eta} \geq N\epsilon^{-1}$ 인 $\eta > 0$ 을잡는것은어렵지않다.

모든준비가끝났다. 증명을위해 $p \in (p_c - \eta, p_c)$ 및 유한집합 $A \subseteq G$ 를임의로잡겠다. 그러면마법보조정리에의해 $\#A' \geq (1 - \epsilon)\#A$ 인부분집합 $A' \subseteq A$ 가존재하고, 각각의 $u \in A'$ 마다어떤 K -나무스러운부분집합 $B(u) = B_1(u) \sqcup \dots \sqcup B_D(u)$ 및 $B'(u) = B'_1(u) \sqcup \dots \sqcup B'_D(u)$ 가존재하여

$$A_1(u) := \{v \in A : uB_1(u), \dots, uB_D(u) 모두가각각 u 와 v 사이의장벽임\},$$

$$A_2(u) := \{v \in A : uB'_1(u), \dots, uB'_D(u) 모두가각각 u 와 v 사이의장벽임\},$$

$$A_3(u) := \{v \in A : u(B \setminus N_{D'}(id)) 가 u 와 v 사이의장벽임\}$$

에대해 $\#A \setminus (A_1(u) \cup A_2(u) \cup A_3(u)) \leq N$ 이성립한다. 이때, 따름정리 3.3 및 3.4를적용하면

$$\sum_{v \in A_i(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) \leq \epsilon \chi_p \quad (u \in A', i = 1, \dots, 4)$$

임을알수있다. 따라서

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{u,v \in A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} &\leq \frac{\sum_{u \in A, v \in A_1(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A, v \in A_2(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} \\ &\quad + \frac{\sum_{u \in A, v \in A_3(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A, v \notin A_1(u) \cup A_2(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} \\ &\leq \frac{\sum_{u \in A} \epsilon \chi_p}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A} \epsilon \chi_p}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A} \epsilon \chi_p}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A} N}{\chi_p \# A} \leq 3\epsilon + \frac{N}{\chi_p} \leq 4\epsilon \end{aligned}$$

임을알수있다. 이로써증명이끝났다. \square

4. CAT(0) 큐브복합체

유클리드공간 \mathbb{R}^n 에서단위구간 $[0, 1]$ 의 n 번곱 $[0, 1]^n$ 을생각할수있는데, 이모양을 n 차원 (유클리드) 큐브라고부르겠다. (그림 3 참조.)

유클리드큐브를재료로사용해구면, 토러스및쌍곡면과위상동형인거리공간을만드는것은어렵지않다. 예를들어, 2 차원타일 6 개를정육면체처럼이어붙이면구면과위상동형인거리공간을만들수있다. 이정육면체의윗면/앞면/오른쪽면의중점을각각 A, B, C 라고해보자. 그러면점 A, B, C 의각순서쌍

을잇는정육면체표면상의측지선이유일하게결정된다. 이측지선삼각형은평면상에그린정삼각형보다 더뚱뚱하다는것을알수있다. 이를테면, 변 \overline{AB} 의중점과변 \overline{BC} 의중점사이거리는삼각형한변의길이의 $1/\sqrt{2}$ 인데, 평면상에그린정삼각형에대해같은거리를재어보면삼각형한변의길이의 $1/\sqrt{3}$ 으로더 작다.

한편, 위와같은 2 차원정육면체의 「내부」를채우기위해 3 차원큐브를추가할수있다. 이렇게만들 어진새로운거리공간에서는, 임의의측지선삼각형은그것과변의길이가동일한평면삼각형에비해뚱뚱 하지않다. 이러한공간을 $CAT(0)$ 거리공간이라고부른다.

이제 $CAT(0)$ 큐브복합체를정의할준비가되었다. 유클리드큐브를이어붙인큐브복합체중거리공간으로서 $CAT(0)$ 인복합체를 $CAT(0)$ 큐브복합체라고부른다.

이정의는간단하기는한데, 그다지구체적이지는않다. 유클리드큐브를어떻게이어붙였을때 $CAT(0)$ 성질을보장할수있을까? 이것이실은 Misha Gromov 가 $CAT(0)$ 큐브복합체를다룬이유이다. $CAT(0)$ 거리공간의예시에는음의곡률을가진리만다양체등이있으나, 더다양한 $CAT(0)$ 거리공간을손쉽게만들방법이있으면군을공부할때도움이될수도있을것이다. 이러한관점에서 Gromov 는큐브를이어붙인 공간들을생각했고, 더나아가, 큐브복합체가 $CAT(0)$ 인지아닌지는손쉽게체크할수있는기준을마련했다. 이간단한기준이오늘날 $CAT(0)$ 큐브복합체의정의로여겨지기도하는데, 이정의를소개하겠다.

定義 4.1. $CAT(0)$ 큐브복합체 ($CAT(0)$ cube complex) 란유클리드큐브를이어붙인복합체중연 결되어있고 (*connected*), 단순연결되어있으면서 (*simply-connected*), 각꼭짓점에붙어있는큐브들의 모임이깃발복합체 (*flag complex*) 를이루게끔붙여만든폐포복합체 (*cell complex*) 이다.

여기서깃발복합체라고함은다음을의미한다. 어느꼭짓점 v 에붙어있는모서리 e_1, \dots, e_n 에대해, 만약각각의서로다른정수 $i, j \in \{1, \dots, n\}$ 마다 e_i 와 e_j 를동시에포함하는 2 차원타일이공간속에존재 한다면, e_1, \dots, e_n 모두를모서리로가지는 n 차원큐브가공간속에존재한다는것이다. 예를들어, 상술 한 2 차원정육면체가 $CAT(0)$ 큐브복합체안에존재한다면, 그정육면체의 「내부」에해당하는 3 차원 큐브또한존재해야한다는것이다.

한편, $CAT(0)$ 큐브복합체의그래프이론적인버전을소개하겠다. 앞에서그래프에줄수있는자연스러 운거리구조인그래프거리를얘기했다. 그런데평면격자그래프에서도쉽게볼수있듯이, 주어진두점사이 최단경로가꼭유일할필요는없다. 그러한최단경로들을모두측지선이라고부르겠다. 또, x 와 y 를잇는 모든측지선의합집합을 $I(x, y)$ 라고부르겠다.

定義 4.2. 연결된그래프 Γ 가 중점그래프 (*median graph*) 라는것은, 임의의점 $x, y, z \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해

$$d(x, m) + d(m, y) = d(x, y),$$

$$d(y, m) + d(m, z) = d(y, z),$$

$$d(z, m) + d(m, x) = d(z, x)$$

을만족하는점 $m \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 가유일하게존재한다는것이다. 달리말하자면 $I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$ 가 점하나짜리집합이라는것이다. 이유일한점 m 을 x, y, z 의중점 (*median*) 이라고부른다.

예시 4.3. (1) 수직선은정수점들을꼭짓점으로하고, 인접한정수끼리모서리로이은그래프로볼수 있다. 이때, 임의의 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 에대해 $I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$ 는 x, y, z 중중간인숫자로유 일하게결정된다.



FIGURE 4. 정수군 \mathbb{Z} 의케일리그래프로볼수있는수직선

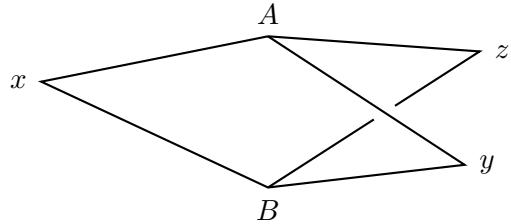


FIGURE 6. $K_{2,3}$ 그래프

- (2) 차수 2 짜리자유군 F_2 의 표준적인 케일리그래프는 각점의 차수 (degree) 가 4인 나무그래프인데, 이 그래프에서 임의의 측지선 삼각형은 두께가 0이고, 중점이 유일하게 존재한다는 것을 확인할 수 있다. 더욱 일반적으로, 사이클이 없는 그래프, 즉 나무그래프 (tree) 는 모두 중점 그래프이다.
- (3) 사이클이 무수히 많은 중점 그래프도 있다. 대표적으로, 평면 격자 그래프 \mathbb{Z}^2 에서 점 $x = (0,0), y = (4,2), z = (1,3)$ 을 생각해보자. 이 때 $I(x,y)$ 는 $(0,0)$ 과 $(4,2)$ 를 꼭짓점으로 가지는 수직직사각형이 된다. $I(y,z)$ 및 $I(z,x)$ 도 비슷한 패턴으로 그려지고, 이 세 집합의 교집합은 정확히 $(1,2)$ 한 점이 된다. 더 일반적으로, n 차원 정수 격자 그래프 \mathbb{Z}^n 또한 중점 그래프이다.

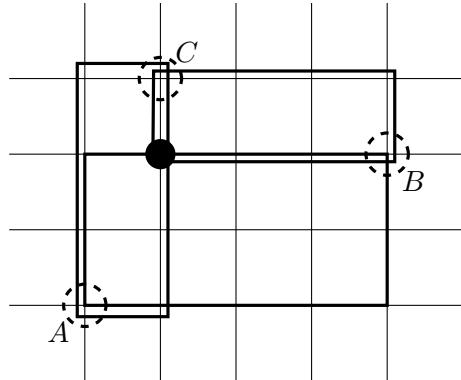


FIGURE 5. 평면 격자 그래프 위의 세 점과 그 중점

- (4) 중점 그래프가 아닌 예시도 있다. 길이 3짜리 사이클을 포함하는 그래프는 결코 중점 그래프가 될 수 없다. 삼각형의 세 꼭짓점을 위한 중점이 존재하지 않기 때문이다.
- 잘 생각해보면, 길이 5짜리 사이클을 가지는 그래프 또 한 결코 중점 그래프가 될 수 없다. 사실은, 중점 그래프의 사이클은 항상 짝수 길이를 가진다. 다시 말해, 중점 그래프는 반드시 이분 그래프 (bipartite graph) 이다.
- (5) 중점 그래프가 아닌 또 다른 예시로는 $K_{2,3}$ 그래프가 있다. 이 그래프는 꼭짓점 A, B, x, y, z 및, 대문자와 소문자를 잇는 모서리 6개로 이루어져 있다. 이 그래프에서 $I(x,y)$ 는 $x - A - y$ 측지선도, $x - B - y$ 측지선도 포함한다. 즉, A 와 B 모두 $I(x,y)$ 에 들어 있다. 마찬가지로, A 와 B 는 $I(y,z)$ 에도, $I(z,x)$ 에도 들어 있다. 즉, x, y, z 의 중점을 찾을 수 없는 것이 문제가 아니라, 너무 많은 후보가 있다는 것이 문제인 것이다.

일반적으로, $K_{2,3}$ 을 부분 그래프로 가지는 그래프는 중점 그래프일 수 없다.

CAT(0) 큐브복합체와중점그래프를같이이야기한이유가있다. CAT(0) 큐브복합체가주어졌을때, 2 차원이상인큐브조각들은모두지우고 1 차원큐브, 즉모서리만남긴것을 1 차뼈대 (1-skeleton) 이라고부른다. 이때이 1 차뼈대는중점그래프가된다. 역으로, 중점그래프가주어졌을때, 사각형 (=4-사이클) 이보일때마다 2 차원타일을붙여넣고, 정육면체의 1 차뼈대가보일때마다 3 차원큐브를붙여넣고, n 차원큐브의 1 차뼈대가부분그래프로들어있을때마다 n 차원큐브를붙여넣는다고해보자. 이렇게 만들어진복합체는각꼭짓점에서깃발복합체조건을만족한다. 다시말해, 이복합체는 CAT(0) 큐브복합체이다. 요약하자면, 중점그래프의모임과 CAT(0) 큐브복합체의 1 차뼈대의모임은정확히똑같다. 이는 Victor Chepoi, Victor Gerasimov, Martin Roller 등여러저자에의해증명된사실이다 ([Rol99], [Ger98], [Che00]).

지금부터는 CAT(0) 큐브복합체를얘기할때그 1 차뼈대인중점그래프를같이떠올릴것이다. 이경우, 유클리드큐브들을이어붙여만든 CAT(0) 거리를생각하는대신, 1 차뼈대를따라정의되는그래프거리를생각하면편리할때가있다. 따라서이제 CAT(0) 거리는잊고, 항상 1 차뼈대상의그래프거리를부여하는것으로간주하겠다.

CAT(0) 큐브복합체및중점그래프를얘기할때빠질수없는도구가바로반공간 (halfspace) 및초평면 (hyperplane) 이다. 이관점은 Michah Sageev 가박사학위논문 ([Sag95]) 에서도입한바있다.

定義 4.4. *CAT(0) 큐브복합체 X 에서모서리 e 를하나택하자. 이때, e 를관통하는초평면 (hyperplane) \mathfrak{h} 는다음을만족하는가장작은 X 의부분집합이다.*

- (1) e 의중점은 \mathfrak{h} 에포함되어있다.
- (2) X 를구성하는어떤큐브 $C \simeq [0, 1]^n$ 에대해, 만약 \mathfrak{h} 가 C 의어떤모서리의중점을포함한다면, 그중점에서그모서리에직교하는 $(n - 1)$ 차원큐브또한 \mathfrak{h} 에포함된다. 즉, 예를들어점 $(1/2, 0, \dots, 0) \in [0, 1]^n$ 이 \mathfrak{h} 에포함된다면 $\{1/2\} \times [0, 1]^{n-1}$ 전체또한 \mathfrak{h} 에포함된다.

위상황에서초평면 \mathfrak{h} 는복합체 X 를둘로나누는데, 예를들어 e 의두꼭짓점은 $X \setminus \mathfrak{h}$ 의서로다른연결성분에있게된다. 이때 $X \setminus \mathfrak{h}$ 의한연결성분의닫음 (closure) 을 \mathfrak{h} 에면한반공간 (halfspace) 이라고부른다.

위개념을중점그래프의언어로해석하면다음과같다.

定義 4.5. 중점그래프 Γ 안에 4-사이클이있을때, 4-사이클의변중맞닿아있지않는모서리끼리서로평행하다 (parallel) 고부른다. 더나아가, Γ 의모서리들 e_1, \dots, e_n 에대해, 만약각 $i = 1, \dots, n - 1$ 마다 e_i 와 e_{i+1} 가평행하다면, e_1 과 e_n 또한평행하다고부른다.

그래프 Γ 의초평면 (hyperplane) 이란, Γ 의모서리들중평행한것끼리모은극대집합을뜻한다. 다시말해, Γ 의어떤모서리 e 를관통하는초평면은, e 와평행한모서리들의모임이다.

그래프 Γ 의초평면 \mathfrak{h} 가주어졌을때, Γ 의꼭짓점들은그대로두고, 모서리중 \mathfrak{h} 에들어있는것들은삭제하고나머지만남긴부분그래프를생각하자. 이부분그래프의연결성분을각각 \mathfrak{h} 에면한반공간 (halfspace) 이라고부른다.

예시 4.6. (1) 나무그래프들은모두중점그래프라고앞에서언급했다. 나무그래프에는사이클이없기때문에, 평행한모서리쌍이란존재할수없다. 따라서각각의모서리가초평면이된다. 각모서리를삭제하면나무그래프는두토막으로나뉘는데, 이들각각이반공간이된다.

- (2) 평면격자그래프 \mathbb{Z}^2 에서초평면들에는두종류가있는데, x 좌표가서로같은가로모서리의모임이거나혹은 y 좌표가서로같은세로모서리의모임이다.

CAT(0) 큐브복합체의초평면두개를생각하자. 이두초평면은일치하거나, 서로만나지않거나, 아니면어떤 2 차원큐브에서교차한다. (이때이 2 차원큐브가유일할필요는없다.) 중점그래프에서해석하자면, 두초평면은일치하거나, 꼭짓점을아예공유하지않거나, 아니면어떤 4-사이클의네변을평행한것끼리양분한다.

초평면의성질을더구체적으로적으면다음과같다. 이또한 Michah Sageev 가박사학위논문에서증명한것이다.

事實 4.7. 중점그래프 Γ 의초평면 \mathfrak{h} 를하나생각하자. 그러면다음이성립한다.

- (1) 초평면 \mathfrak{h} 는전체공간을정확히둘로나누고, 따라서 \mathfrak{h} 에면한반공간은정확히두개다. 특히, 각 모서리 $e \in \mathfrak{h}$ 에대해, e 의두끝점은서로다른반공간에속한다.
- (2) 초평면 \mathfrak{h} 의두모서리 $e = \overline{xy}$, $f = \overline{vw}$ 가주어졌을때 $d(x, v) = d(y, w)$ 가성립한다.

위사실은그냥믿어도상관없으나, 중점그래프의언어로이것을증명하고싶다면 8절을보면된다. 이로부터특히알수있는것은, 서로다른초평면 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ 에대해다음두가지중정확히하나가성립한다는것이다.

- (1) \mathfrak{h} 에면한두반공간과 \mathfrak{h}' 에면한두반공간은각각서로만난다.
- (2) \mathfrak{h} 에면한어느한반공간에 $N(\mathfrak{h}')$ 및 \mathfrak{h}' 에면한어느한반공간이들어있다.

전자의경우, 두초평면은교차한다 (transverse) 고하고 $\mathfrak{h} \pitchfork \mathfrak{h}'$ 라고쓴다. 후자의경우, 두초평면은평행하다 (parallel) 고하고 $\mathfrak{h} \parallel \mathfrak{h}'$ 라고쓴다. 이것을반공간의언어로다시쓰면다음과같다.

事實 4.8. 중점그래프 Γ 의두반공간 H 및 H' 에대해, 다음중하나가정확히성립한다.

- (1) H 와 H' 가같다.
- (2) H 와 H' 는서로의여집합이다. 즉, $\mathcal{V}(H)$ 와 $\mathcal{V}(H')$ 는 $\mathcal{V}(\Gamma)$ 를분할한다.
- (3) $H \subsetneq H'$.
- (4) $H' \subsetneq H$.
- (5) (2) 가아니되, H 와 H' 는서로겹치지않는다. 즉, $H \cap H' = \emptyset$ 이다.
- (6) (2) 가아니되, $H \cup H' = \Gamma$ 이다.
- (7) 위의그어느상황도아니다. 다시말해, $H \cap H'$, $H \cap H'^c$, $H^c \cap H'$, $H^c \cap H'^c$ 각각이모두공집합이아니다.

(1) 및 (2) 인경우, H 와 H' 가면한초평면들은일치한다. (3), (4), (5) 및 (6) 인경우, H 와 H' 가면한초평면들은서로평행하고, 이때 H 와 H' 가평행하다고부르며 $H \parallel H'$ 라고쓴다. (7) 인경우, H 와 H' 가면한초평면들은서로교차하고, 이때 H 와 H' 가교차한다고부르며 $H \pitchfork H'$ 라고쓴다.

Proof. 집합

$$A_1 := H \cap H', \quad A_2 := H^c \cap H', \quad A_3 := H \cap H'^c, \quad A_4 := H^c \cap H'^c$$

을생각했을때, 이넷중셋이상이공집합인경우 H, H^c, H', H'^c 중최소하나가공집합이된다. 이는사실 4.7에모순이다. 따라서 A_1, A_2, A_3 및 A_4 중기껏해야두개만공집합일수있다. 또, 실제로이중두개가공집합일수있는가능성은 $A_1 = A_4 = \emptyset \neq A_2, A_3$ 와 $A_2 = A_3 = \emptyset \neq A_1, A_4$ 두가지뿐이다. 이에더해, A_1, \dots, A_4 중정확히하나가공집합인경우네가지, 그리고그어느것도공집합이아닌경우한가지로총 7 가지가능성이있다. 이들이각각 (1)-(7) 에해당함은쉽게확인할수있다. 그림 7를참조하라. \square

이제평면격자그래프를다시살펴보자. 여기서꼭짓점 $(0, 0)$ 과 $(3, 2)$ 사이조합적 = 그래프거리가 $3 + 2 = 5$ 임은쉽게확인할수있다. 물론이거리를실현시키는측지선은하나가아니다. 위로 2 번이동한

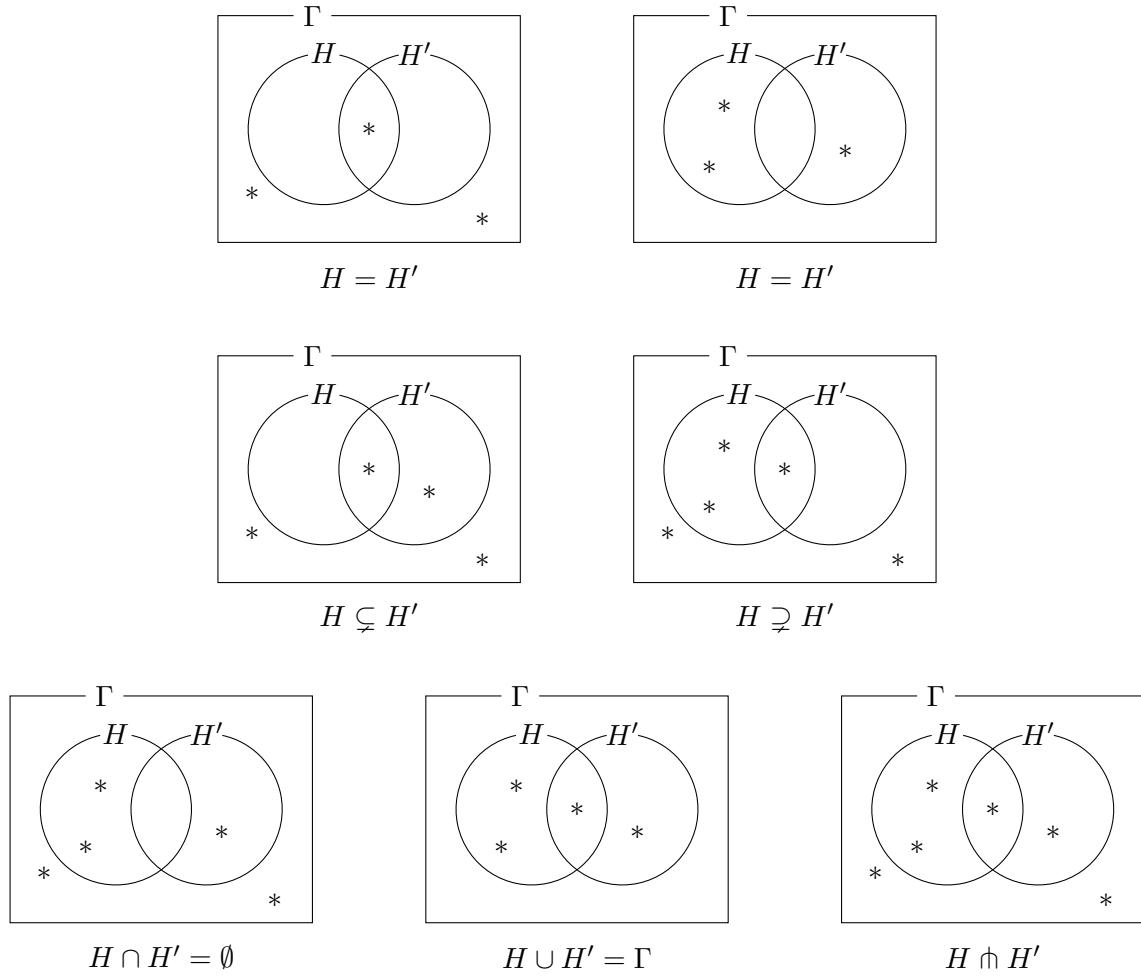


FIGURE 7. 두반공간의위치관계

뒤오른쪽으로 3 번가도측지선이되고, 오른쪽으로먼저간뒤위로가도측지선이되며, 그순서를조금섞으면또다른측지선이된다. 하지만여기서중요한규칙이하나있다. 「오른쪽으로만가야하며」, 「위쪽으로만가야한다」는사실이다. 오른쪽으로총 4 번갔다가왼쪽으로 1 번가는방식으로 $(0, 0)$ 에서 $(3, 2)$ 까지가게되면, 가로방향움직임에낭비가생긴것이다. 이는측지선이될수없다.

이를다르게얘기하자면다음과같다. $(0, 0)$ 에서 $(3, 2)$ 로가는측지선은, 반드시 $\{x = 0.5\}$, $\{x = 1.5\}$, $\{x = 2.5\}$ 라는세로선을정확히한번씩지나고, $\{x = n + 1/2 : n \geq 3 \text{ 혹은 } n < 0\}$ 라는세로선들은절대지나지않는다. 마찬가지로, $\{y = n + 1/2 : n = 1, 2\}$ 라는가로선들은정확히한번씩지나고, 그외의반정수 y 좌표가로선들은절대지나지않는다. 더놀라운점은, 이것이필요조건이자충분조건이라는것이다. 더나아가, 이사실은일반적인중점그래프에서도성립한다.

補題 4.1. 중점그래프 Γ 및그꼭짓점 x 및 y 를생각하자. 이때, x 와 y 를잇는 Γ 상의경로 P 에대해 다음성질들은동치다.

- (1) P 는조합적거리에따른측지선이다.
- (2) P 는 Γ 의각초평면을기껏해야한번씩만만난다.

(3) P 는 Γ 의초평면중 x 와 y 를가르는것들은정확히한번씩만나고, 그렇지않은초평면들은만나지않는다.

Proof. 먼저 (1)로부터 (2)을유도하겠다. 모순을이끌어내기위해, 어떤측지선 P 가어떤초평면 \mathfrak{h} 를두번이상만난다고가정하자. $P \cap \mathfrak{h}$ 중첫번째모서리를 $e_i = \overrightarrow{uv}$, 두번째모서리를 $e_j = \overrightarrow{u'v'}$ 라고하자. 여기서 v 와 u' 는 \mathfrak{h} 에들어있지않은모서리 e_{i+1}, \dots, e_{j+1} 로이루어진경로로이어져있다. 따라서 v 와 u' 는 \mathfrak{h} 에면하는같은반공간에들어있다. 이제사실 4.7(3)을쓰면 $d(v, u') = d(u, v')$ 가성립해야한다. 그러나 u, v, u', v' 는동일한측지선위에주어진순서대로나타나기때문에, $d(v, u') > d(u, v')$ 여야한다. 이는모순이다. 따라서 (2) 가성립한다.

이제 (2)로부터 (3)을유도하겠다. 먼저, \mathfrak{h} 가 x 와 y 를가르는초평면이라고해보자. 그러면정의상그어떤경로도 \mathfrak{h} 를지나지않고서는 x 와 y 를잇지못한다. 따라서 x 와 y 를잇는 P 는 \mathfrak{h} 를반드시만난다. 이제방금증명한사실과합하면, 이만남은정확히한번이라는것을알수있다.

반면, \mathfrak{h} 가 x 와 y 를가르지않는경우, 즉두점모두 \mathfrak{h} 에면한동일한반공간 H 에속해있는경우를살펴보자. 만약 P 가 \mathfrak{h} 를만난다면, $P \cap \mathfrak{h}$ 중첫번째모서리 $e_i = \overrightarrow{uv}$ 를잡을수있다. 이때 x 에서 u 까지잇는 P 의부분경로는 \mathfrak{h} 를만나기전이므로, H 에속해있다. 그리고 \overrightarrow{uv} 는 \mathfrak{h} 의원소이므로, v 는 H 가아닌다른반공간에속해있음을알수있다. 이제 e_i 이후의 P 의부분경로는 v 와 y 를이어야하는데, $v \notin H$ 및 $y \in H$ 라는점으로부터, P 는 e_i 이후에도 \mathfrak{h} 를다시지나게됨을알수있다. 이는측지선 P 가결코초평면 \mathfrak{h} 를두번이상만날수없다는사실에모순이다. 따라서, P 는 \mathfrak{h} 를만나지않는다. 이로써 (3) 또한증명되었다.

이제 (3)으로부터 (1)을유도하겠다. 먼저, P 상의각모서리는정확히한개의초평면에반드시들어있다. 따라서,

$$l(P) = \sum_{\mathfrak{h}: \Gamma \text{ 안의초평면}} \#(P \cap \mathfrak{h})$$

라는공식이성립한다. 이제 (3)의가정에의해, 이는정확히 x 와 y 사이를가르는초평면의개수이다. 한편, x 와 y 를잇는임의의경로 Q 를생각해보자. 그러면 x 와 y 를가르는각각의초평면 \mathfrak{h} 마다 $Q \cap \mathfrak{h}$ 에속하는어떤모서리 $e_{\mathfrak{h}}$ 가반드시존재해야하고, 이러한 $e_{\mathfrak{h}}$ 는초평면 \mathfrak{h} 마다반드시달라야한다. 이를생각하면 Q 의길이는 x 와 y 사이초평면의개수이상이어야한다. 즉, 우리가잡은 P 는최소길이를달성하는것이고, 따라서 P 는측지선이다. 이로써증명이끝났다. \square

5. 초평면사슬과반공간사슬

어떤점들간의위치관계를파악할때, 그점들사이에끼겨있는초평면들은매우중요한역할을한다. 이를더효율적으로공부하기위해개념을하나도입하겠다.

定義 5.1. 반공간 n 개 H_1, H_2, \dots, H_n 가

$$H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_n$$

라는위치관계를만족할때, (H_1, \dots, H_n) 을 반공간사슬 (*halfspace chain*) 이라고부른다. 또, 이때각 H_i 가면한초평면 \mathfrak{h}_i 에대해, $(\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n)$ 을 초평면사슬 (*hyperplane chain*) 이라고부른다. 더욱이, 어떤집합 $S, T \subseteq \Gamma$ 에대해, 만약 $S \subseteq H_1^c$ 및 $T \subseteq H_n$ 가성립하면, $(\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n)$ 가 S 및 T 사이에끼겨있다고얘기한다.

어떤집합 $S, T \subseteq \Gamma$ 를고정한뒤, S 및 T 사이에끼겨있는사슬을생각하자. 이때이사슬이극대(*maximal*) 이라는것은, 이사슬을부분나열로포함하면서 S 및 T 사이에끼겨있는더큰사슬이존재하지않는다는뜻이다.

어떤 두 점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 가 주어졌을 때, 그 사이에 깊은 초평면 사슬의 최대 길이는 $d(x, y)$ 이하임을 보조 정리 4.1에서 보았다. 따라서, 두 점 사이에 깊은 임의의 사슬이 주어졌을 때, 더 깊어 넣을 수 있는 만큼 사슬을 계속 키워나갈 때 언젠가는 멈추게 되어 있다. 즉, x 와 y 사이에 깊은 임의의 사슬은 반드시 x 및 y 사이에 깊은 극대 사슬로 확장할 수 있다.

사실은 중점 그래프 Γ 위에는 조합적 거리 외에 또 다른 자연스러운 거리 구조를 줄 수 있다. 이는 n 차원 정수 격자 그래프 위에 l^1 -거리 외에 l^∞ -거리 또한 줄 수 있다는 사실에 대응한다.

정의 5.2. 중점 그래프 상의 어떤 두 집합 $A, B \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해, A 와 B 사이에 깊은 사슬의 최대 길이를 A 와 B 사이의 l^∞ -거리라고 부르고, $d^\infty(A, B)$ 로 표시한다.

예시 5.3. (1) 예시 4.3(2) 의 4 차수 나무 그래프를 생각해보자. 여기에는 4-사이클이라는 것 자체가 존재하지 않기 때문에, 각각의 모서리가 초평면이 된다는 것을 관찰했다. 이제 임의의 두 점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 사이를 잇는 l^1 -측지선 ($x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$) 가 유일하게 존재한다. 이 때 $\Gamma \setminus \overline{x_{i-1}x_i}$ 의 연결성 분명 x_i 쪽의 연결성 분명 H_i 라고 부르면, $x \notin H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_n \ni y$ 라는 사슬을 만들 수 있다. 이 사슬이 극대인 것은 쉽게 관찰할 수 있다.

또, 이 그래프에서는 서로 다른 초평면은 반드시 평행하다는 것을 관찰하라.

(2) 이번에는 예시 4.3(3) 의 정수 격자 그래프를 생각하자. 여기서 초평면은 y 좌표가 서로 같은 세로 모서리의 모임 혹은 x 좌표가 서로 같은 가로 모서리의 모임이라고 했다. 전자를 가로 초평면, 후자를 세로 초평면이라고 부르자. 이 그래프에서, 초평면끼리 평행하려면 둘 다가로이거나 혹은 둘다 세로여야 한다는 사실을 쉽게 관찰할 수 있다.

이제 예를 들어 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 사이에 끼어 있는 초평면들은 정확히, y 좌표가 0 과 4 사이에 있는 가로 초평면 4 개 및 x 좌표가 0 과 3 사이에 있는 세로 초평면 3 개이다. 물론 이들 모두의 개수는 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 사이 l^1 -거리이다. 그러나 이 두 점 사이에 길이 7 짜리 사슬은 없다. 가로 초평면과 세로 초평면은 서로 평행할 수 없기 때문이다. 따라서, 방금 말한 가로 초평면 4 개로 만든 사슬 및 세로 초평면 3 개로 만든 사슬이 각각 극대 사슬이 된다. 이들 중 가장 긴 것이 l^∞ -거리를 구현하기는 하지만, 이들 모두가 그렇게 하지는 않음을 주의하라.

이제, 잠깐 군에 관한 얘기를 돌아가겠다. 우리의 최종 목표는, 중점 그래프의 대칭군으로 나타나는 특정 군에서 파스코레ーシ옹을 공부하고자 하는 것이다. 방금 본 예시 중 정수 격자 그래프에는 \mathbb{Z}^2 라는 군이 평행이동으로 작용하고, 이 작용은 여-컴팩트하며 진정하다. 헌데 정수 격자 그래프는 이차식 성장률 (quadratic growth) 를 가지기에, 이 그래프에 여-컴팩트하며 진정으로 작용하는 군은 항상 평균 가능 군 (amenable group) 이다. 이러한 군에서는 우리가 바라는 파스코레ーシ옹이 일어나지 않는다는 것이 이미 알려져 있다 ([BK89], [GKN92]). 따라서, 중점 그래프에 적절한 비평균 가능성 (non-amenable) 가정을 얹어주는 것이 필요하다.

정수 격자 그래프의 주요 특징 중 하나로, 두 성분 그래프의 곱 그래프라는 점이 있다. 즉, \mathbb{Z} 의 표준 케일리 그래프 두 개를 Γ_1, Γ_2 라고 한 뒤, 이 두 그래프를 직접 곱 (direct product) 하면 정수 격자 그래프를 얻는다. 이와 연관된 사실로, 정수 격자 그래프에서는 모서리를 공유하지 않는 평행한 초평면 쌍은 분명 존재하지만 (이를 테면 세로 초평면 두 개), 그런 초평면들에 동시에 교차하는 초평면 (이를 테면 가로 초평면) 이 항상 존재한다. 이러한 현상은 곱 그래프에서도 이어진다.

이제부터는 위와 같지 않은 그래프에 집중하려고 한다. 이를 위해 다음을 정의하겠다.

정의 5.4. 중점 그래프 Γ 의 평행한 두 초평면이 강하게 분리되어 있다 (*strongly separated*) 라는 것은, 두 초평면에 동시에 교차하는 초평면이 존재하지 않는다는 것이다.

또한, Γ 의두반공간 H, H' 에 대해, 만약 H 가면해있는초평면과 H' 가면해있는초평면이 강하게 분리되어 있다면, H 와 H' 또한 강하게 분리되어 있다고 얘기한다.

예시 5.5. (1) 나무그래프에서는 그 어떤 초평면도 다른 초평면과 교차할 수 없다. 4-사이클이 아예 없기 때문이다. 따라서, 모든 초평면은 서로 강하게 분리되어 있다.

(2) 전혀 나무 같지 않은 그래프에서도 강하게 분리된 초평면이 존재할 수 있다. 그림 8에는 사각형 타일을 한 꼭짓점에서 6 개씩 모이도록 이어붙인 것이다. 이 때 전체 $CAT(0)$ 큐브복합체는 평면과 위상동형이다. 실은, 이 그래프 Γ 의 전체 대칭군에는 쌍곡곡면군 (*surface group*) 과 동형인 유한 지수 부분군이 들어 있다. 그런 의미에서, 이 타일링은 쌍곡평면 (*hyperbolic plane*) 을 모델링 한 것으로 볼 수도 있다.

이 복합체에는 교차하는 초평면도 있지만, 서로 만나지 않는 초평면도 있고 강하게 분리된 초평면도 있다. 특히, 그림에 나타나 있는 강하게 분리된 두 초평면 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ 은 그래프의 어떤 대칭을 통해 완전히 포괄할 수 있다. 즉, $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ 가 존재해 $\mathfrak{h}' = g\mathfrak{h}$ 라는 것이다.

定義 5.6. 어떤 실수열 $\mathbf{a} = (a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1})$ 을 생각하자. 이 때 어떤 초평면 사슬 (h_1, \dots, h_n) 이 \mathbf{a} -등간격으로 분리되어 있다 (*equispaced*) 는 것은, $d^\infty(h_i, h_j) = a_{|j-i|}$ 이라는 것이다. 이 때, 이 초평면들에 면하는 반공간들로 이루어진 사슬 또한 \mathbf{a} -등간격으로 분리되어 있다고 얘기한다.

주어진 중점 그래프 위에 일정한 간격으로 강하게 분리된 초평면이 존재하는지는 앞으로의 얘기에서 매우 중요해질 것이다. 이를 보장할 수 있는 가장 간편한 방법은, 그래프의 대칭성 = 등거리 사상 g 와 반공간 H 를 잘 잡아 $gH \subsetneq H$ 이면서 gH 와 H 가 강하게 분리되어 있게끔 하는 것이다. 이러한 대칭성 및 반공간은 꽤 많은 경우에 존재하는데, Pierre-Emmanuel Caprace 와 Michah Sageev 의 다음 정리가 이를 얘기한다.

定理 5.7 ([CS11, Corollary B]). 국소적으로 컴팩트하고 (*locally compact*) 측지선적으로 완비한 (*geodesically complete*) $CAT(0)$ 큐브복합체 X 를 생각하자. 또, X 에 진정으로, 또여-컴팩트하게 작용하는 이산적인 무한군 G 를 생각하자.

그러면 Γ 는 (1) 측지선적으로 완비하고 지름이 무한하며 (*unbounded*) 불록한 (*convex*) 부분복합체들의 곱이거나, 혹은 (2) G 의 원소 g 및 Γ 의 반공간 H 가 하나씩 존재하여, $gH \subsetneq H$ 이고 gH 와 H 가 강하게 분리되어 있다.

5.1. 반공간에 관한 몇 가지 보조 정리. 이제부터 흔히 사용할 반공간의 성질을 몇 가지 정리해 두겠다.

補題 5.1. 중점 그래프 Γ 의 점 $x, y \in \Gamma$ 와 꼭짓점 집합 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 를 생각하자. 그러면

$$d^\infty(x, A) \leq d^\infty(x, y) + d^\infty(y, A)$$

가 성립한다.

Proof. 먼저 x 와 y 사이 d^∞ -거리를 구현하는 극대 반공간 사슬

$$x \notin L_1 \supseteq \dots \supseteq L_N \supseteq A$$

를 생각한 뒤, $L_i \ni y$ 인 가장 큰 수 i 를 잡자. 그러면 $y \notin L_{i+1}$ 이므로

$$x \notin L_1 \supseteq \dots \supseteq L_i \supseteq A, \quad y \notin L_{i+1} \supseteq \dots \supseteq L_N \supseteq A$$

는 각각 x 와 y 사이 및 y 와 A 사이에 깐 반공간 사슬이 된다. 이로부터 바라던 부등식을 얻는다. \square

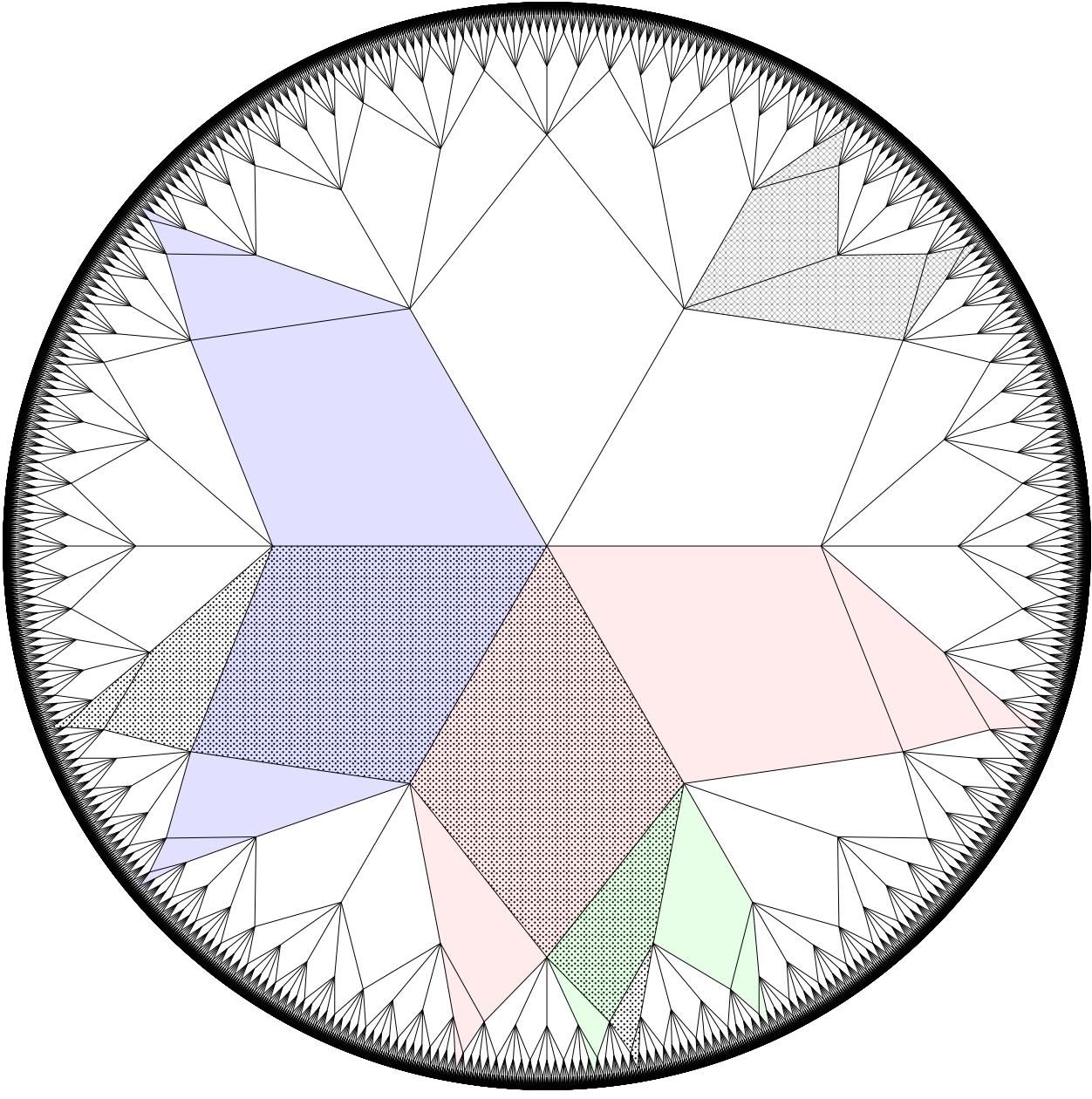


FIGURE 8. 사각형타일링이깔린쌍곡평면. 점박이초평면과교차하는초평면중세개가 색칠되어있다. 그리고오른쪽상단의체크무늬초평면은색깔초평면들과결코만나지 않는다. 즉, 점박이초평면 h 와체크무늬초평면 h' 는서로강하게분리되어있다.

補題 5.2. 중점그래프 Γ 의두반공간 H_1, H_2 을생각하자. 만약 H_1 과 H_2 가어떤점을공유하되어면 다른점을동시에놓친다면 (즉 $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset \neq H_1^c \cap H_2^c$ 이라면), H_1 과 H_2 는교차하거나포함관계에 있다.

Proof. 이경우, 사실 4.8의 (2), (5), (6) 이배제된다는것은분명하다. □

補題 5.3. 중점그래프 Γ 의두반공간 $H_1 \subsetneq H_2$ 이강하게분리되어있고, 어떤반공간 L 이 H_1^c 의어느두점사이를가른다고하자. 그러면 L 은 H_2 를완전히포함하거나혹은만나지않는다.

Proof. 만약 L 은 H_2 의어느두점사이를가른다면 L 이 H_1 과 H_2 둘다에교차하게되는데, 이는 H_1 과 H_2 가강하게분리되어있다는것에모순이다. 따라서 $L \supsetneq H_2$ 혹은 $L \cap H_2 = \emptyset$ 이성립한다. \square

補題 5.4. 중점그래프 Γ 의세반공간 $H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3$ 을생각하되, H_1 과 H_2 가강하게분리되어있다고하자. 그러면 H_1^c 의임의의두점 $x, y \notin H_1$ 에대해,

$$d^\infty(x, y) \leq d^\infty(x, H_2) + d^\infty(y, H_3)$$

가성립한다.

Proof. 점 x 와 y 사이에낀반공간 $x \notin L \ni y$ 를임의로생각하자. 그러면보조정리 5.3에의해, L 은 H_2 를완전히포함하거나혹은만나지않는다. 전자의경우, L 은 x 와 H_2 사이에끼여있다. 후자의경우, y 는 y 와 H_3 사이에끼여있다.

이제, x 와 y 사이 d^∞ -거리를구현하는극대반공간사슬

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_N \ni y$$

를생각한뒤, $L_i \supseteq H_2$ 를만족하는가장큰수 i 를잡자. 그러면보조정리 5.3에의해

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_i \supseteq H_2, \quad H_3^c \supseteq L_{i+1} \supsetneq \dots \supsetneq H_N \ni y$$

는각각 x 와 H_2 사이및 H_3^c 와 y 사이에낀반공간사슬이된다. 이로부터바라던부등식을얻는다. \square

補題 5.5. 중점그래프 Γ 의두꼭짓점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 와세반공간 H, H', L 가

$$x \notin H \supsetneq H' \ni y \quad \text{및} \quad x \notin L \ni y$$

라는위치관계를만족한다고하자. 더하여 H 와 H' 가강하게분리되어있다고하자. 그러면 $H \supsetneq L$ 혹은 $L \supsetneq H'$ 둘중하나가성립한다.

Proof. 보조정리 5.2에의해, H, H', L 은서로교차하거나혹은포함관계에있음을유의하라. 만약 $H \supsetneq L$ 혹은 $L \supseteq H$ 이면원하는결론에해당한다. 따라서둘다아닌경우, 즉 H 와 L 이교차하는경우가남는다. 이때 L 은 H' 에마저교차할수는없다. 또 $H \not\supseteq L$ 이므로 L 이 H' 에포함될수도없다. 따라서 L 은 H' 와같지않으면서 H' 를포함한다. 이로써증명이끝난다. \square

補題 5.6. 중점그래프 Γ 의두점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 와강하게분리된두반공간 H, H' 가

$$x \notin H \supsetneq H' \ni y$$

라는위치관계를만족한다고하자. 그러면

$$d^\infty(x, y) \leq d^\infty(x, H') + d^\infty(H^c, y)$$

이다.

Proof. 먼저 x 와 y 사이거리를구현하는반공간사슬

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_N \ni y$$

를 생각한뒤, $L_i \supseteq H'$ 를 만족하는 가장 큰 수 i 를 잡자. 이때 보조정리 5.5에 의해 $H \supsetneq L_{i+1}$ 혹은 $L_{i+1} \supsetneq H'$ 여야한다. 후자는 i 의 정의에 위배하므로 전자가 성립해야 한다. 즉,

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_i \supseteq H', \quad H \supsetneq L_{i+1} \supsetneq \dots \supsetneq L_N \ni y$$

라는 반공간 사슬을 얻게 된다. 이로부터 바라던 부등식을 얻게 된다. \square

6. 마법 보조정리 (MAGIC LEMMA)

이제 본격적으로 퍼코レーション에 관련된 중점 그래프의 기하학을 얘기하려고 한다.

定義 6.1. 어떤 거리 공간 X 의 부분 집합 $Y \subseteq X$ 가 (이산적으로) 균일하게 거리상 진정하다 (*uniformly metrically proper*) 는 것은, 각각의 $R > 0$ 마다

$$\sup_{y \in Y} \#\{y' \in Y : d(y, y') < R\} < +\infty$$

인 것이다.

이를 테면, 만약 어떤 연결된 거리 공간 X 에 등거리 사상으로 진정으로 작용하는 군 G 이 주어졌을 때, 임의의 $x \in X$ 에 대해 그 G -궤도 $G \cdot x$ 는 균일하게 거리상 진정하다.

중점 그래프 Γ 및 점 $y \in \mathcal{V}(\Gamma)$, 유한 집합 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$, 실수 $D > 0$ 및 실수열 $\mathbf{a} = (a_1 < \dots < a_{12})$ 이 주어졌을 때 다음과 같은 집합을 정의하겠다.

$$\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(y, A) := \left\{ z \in \mathcal{V}(\Gamma) : \begin{array}{l} \mathbf{a}-\text{등간격으로 강하게 분리된} \text{반공간 사슬 } H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_{12} \text{에 대해} \\ \{y\} \cup A \subseteq H_1^c \text{이고 } z \in H_{11} \text{이고 } d^\infty(z, H_{12}) \leq D \text{이며 } d^\infty(y, H_{12}) \leq D \text{이다.} \end{array} \right\}$$

실수열의 정체가 중요하지 않을 때는 $\mathcal{H}_D(y, A)$ 라고 적기도 하겠다. 여기서 $z \in \mathcal{H}_D(y, x)$ 인 상황을 다룰 때는, x, y, z 가 순서대로 한 직선상에 놓여 있는 그림을 떠올리면 좋다. 예를 들어 다음과 같은 그림을 성립한다.

補題 6.1. 중점 그래프 Γ 의 꼭짓점 x, y, z 이

$$z \in \mathcal{H}_D(y, x)$$

을 만족한다고 하자. 그러면 $d^\infty(x, z) \geq d^\infty(x, y) + d^\infty(y, z) - 2D$ 이다.

Proof. 가정에 의해, 강하게 분리된 반공간 사슬 $H_1 \supsetneq \dots \supsetneq H_{12}$ 중 $\{x, y\} \subseteq H_1^c$ 이고 $z \in H_{10}$ 이며 $d^\infty(y, H_{12}) \leq D$ 인 것이 존재한다. 이제 $d^\infty(x, y)$ 를 구현하는 극대 사슬

$$x \notin H'_1 \supsetneq H'_2 \supsetneq \dots \supsetneq H'_{d^\infty(x, y)} \ni y$$

를 하나 생각하자. 보조정리 5.3에 의해 $H_{d^\infty(x, y)-D}$ 는 H_2 를 포함하거나 혹은 만나지 않는다. 후자의 경우,

$$d^\infty(y, H_2) \leq D < d^\infty(y, H'_{d^\infty(x, y)-D}^c)$$

라는 사실에 위배된다. 따라서 $H_2 \subseteq H'_{d^\infty(x, y)-D}$ 라는 결론을 내릴 수 있다.

이제 y, z 사이의 거리를 구현하는 극대 사슬

$$y \notin H''_1 \supsetneq H''_2 \supsetneq \dots \supsetneq H''_{d^\infty(y, z)} \ni z$$

를 생각하자. 그러면

$$y \notin H_3 \supseteq H_4 \ni z, \quad y \notin H''_{D+1} \ni z$$

에보조정리 5.5를 적용할수있다. 이때 $d^\infty(y, H_3) \leq D < d^\infty(y, H''_{D+1})$ 이기여 $H_3 \subseteq H''_{D+1}$ 일수는 없으므로, $H_2 \supsetneq H_3 \supseteq H''_{D+1}$ 임을알수있다.

이를모두결합하면,

$$x \notin H'_1 \supsetneq H'_2 \supsetneq \dots \supsetneq H'_{d^\infty(x,y)-D} \supsetneq H''_{D+1} \supsetneq \dots \supsetneq H''_{d^\infty(y,z)} \ni z$$

라는극대사슬을얻게된다. 이로부터 $d^\infty(x, z) \geq d^\infty(x, y) + d^\infty(y, z) - 2D$ 라는결론을얻는다. \square

앞의일직선비유를다시생각해보자. 어떤점들 x, y, y', z 이 $z \in \mathcal{H}_D(y, x)$ 및 $z \in \mathcal{H}_D(y', x)$ 을만족할때, y 와 y' 중어느것이직선상에먼저나타나느냐에따라 $y' \in \mathcal{H}_D(y, x)$ 혹은 $y \in \mathcal{H}_D(y', x)$ 가성립했으면좋겠다. 이에다음보조정리를증명하겠다.

補題 6.2. 중점그래프 Γ 의꼭짓점 x, y, y', z 및부분집합 $A, A' \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 가

$$x \in A \cap A' \text{ 및 } z \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(y, A) \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(y', A')$$

을만족한다고하자. 더하여, y, y' 및 z 가서로 $10D$ -분리되어있다고가정하자. 그러면다음중정확히하나가성립한다.

- (1) $y' \in \mathcal{H}_D(y, A)$ 이고 $d^\infty(x, y) < d^\infty(x, y')$ 이다.
- (2) $y \in \mathcal{H}_D(y', A')$ 이고 $d^\infty(x, y) > d^\infty(x, y')$ 이다.

Proof. 가정으로부터, \mathbf{a} -간격으로강하게분리된반공간사슬두개

$$H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_{12}, \quad H'_1 \supsetneq H'_2 \supsetneq \dots \supsetneq H'_{12}$$

가존재해, 다음을모두만족한다:

- $A \cup \{y\} \subseteq H_1^c$, $A' \cup \{y'\} \subseteq H'_1^c$,
- $z \in H_{11} \cap H'_{11}$, 그리고
- $d^\infty(z, H_{12}), d^\infty(z, H'_{12}), d^\infty(y, H_{12}), d^\infty(y', H'_{12}) \leq D$.

이때, 각 $i, j \in \{1, \dots, 11\}$ 에대해 $H_i \cap H'_j \ni z$ 및 $H_i \cup H'_j \not\ni x$ 이므로, 보조정리 5.2에의해 H_i 와 H'_j 는교차하거나혹은포함관계에있다.

먼저 H'_{10} 과 H_{12} 가서로만난다는것을확인하기위해, y' 와 z 사이 d^∞ -거리를구현하는극대사슬

$$y' \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_{d^\infty(y', z)} \ni z$$

를잡자. $L_m \supseteq H'_{11}$ 인가장큰 m 를잡으면, $d^\infty(y', H'_{11}) \leq D$ 이기여 $m \leq D$ 이다. 이제

$$y \notin H'_{10} \supsetneq H'_{11} \ni z, \quad y \notin L_{m+1} \ni z$$

에보조정리 5.5를적용할수있다. 그런데 m 을선택한방식때문에 $L_{m+1} \supseteq H'_{11}$ 은불가능하므로 $L_{m+1} \subsetneq H'_{10}$ 이어야함을알수있다.

즉 $H'_{10} \supseteq L'_{m+1} \supsetneq \dots \supsetneq L_{d^\infty(y', z)} \ni z$ 는 H'_{10} 과 z 사이에끼겨있는길이 $d^\infty(y', z) - m \geq 9D$ 짜리사슬이다. 만약 H'_{10} 과 H_{12} 이만나지않는다면, 이사슬전체가 z 와 H_{12} 사이에있게되어 $d^\infty(z, H_{12}) \geq 9D$ 임을얻는다. 이는가정과모순된다.

따라서, H'_{10} 과 H_{12} 는어떤원소 u 를공유한다. 이제

$$x \notin H'_9 \supsetneq H'_{10} \ni u, \quad x \notin H_{12} \ni u$$

에보조정리 5.5를적용하면, (A) $H'_9 \supsetneq H_{12}$ 혹은 (B) $H'_{10} \subsetneq H_{12}$ 이라는결론을얻는다.

같은이유로, (A') $H_9 \supsetneq H'_{12}$ 혹은 (B') $H_{10} \subsetneq H'_{12}$ 이다.

이중 (B) $H'_{10} \subsetneq H_{12}$ 인경우를살펴보겠다. 이때 $d^\infty(y', H_{12}) \leq d^\infty(y', H'_{10}) \leq D$ 임은쉽게알수있다. 이제 $y' \in H_{11}$ 이기만하면, (H_2, \dots, H_{12}) 라는사슬이 $y' \in \mathcal{H}_D(y, A)$ 임을보장해준다. 이를귀류법으로증명하기위해 $y' \notin H_{11}$ 라고가정해보자. 이때 $y, y' \notin H_{11} \supsetneq H_{12} \supseteq H'_{10}$ 이고 H_{11} 와 H_{12} 는 강하게분리되어있다. 보조정리 5.4에의해, y 와 y' 사이거리는 $d^\infty(y, H_{12}) + d^\infty(y', H'_{10}) \leq 2D$ 이하이다. 이는 y 와 y' 가 $10D$ 이상분리되어있다고가정에모순이다. 따라서 $y' \notin H_{11}$ 일수없다.

요약하자면, 우리는 (B) 이면 $y' \in \mathcal{H}_D(y, A)$ 라는사실을증명했다. 이때보조정리 6.1에의해

$$d^\infty(x, y') \geq d^\infty(x, y) + d^\infty(y, y') - 2D$$

임을알수있다. 여기서 $d^\infty(y, y') \geq 10D > 2D$ 이므로 $d^\infty(x, y') > d(x, y)$ 를얻는다. 이로써 (B) 의경우에는결론 (1) 이성립함을증명했다.

비슷한이유로 (B') 의경우에는 $y \in \mathcal{H}_D(y', A')$ 이며결론 (2) 가성립한다.

이제남은경우는 (A) 이면서 (A') 인상황, 즉 $H'_9 \supsetneq H_{12}$ 이면서 $H_9 \supsetneq H'_{12}$ 인경우이다.

먼저 $H'_9 \supseteq H_6$ 일수는없음을유의하라. 왜냐하면, $H'_9 \supseteq H_6 \supsetneq H_9 \supsetneq H'_{12}$ 라는위치관계는

$$d^\infty(H'^c_9, H'_{12}) > d^\infty(H^c_6, H_9) = d^\infty(H'^c_9, H'_{12})$$

이라는모순을유발하기때문이다. 이제

$$x \notin H_5 \supsetneq H_6 \ni z, \quad x \notin H'_9 \ni z$$

에보조정리 5.5를적용하자. 그러면 $H_5 \supseteq H'_9$ 임을얻는다.

이제 $H'_8 \supseteq H_4$ 일수는없다. 왜냐하면, $H'_8 \supseteq H_4 \supsetneq H_5 \supsetneq H'_9$ 라는위치관계는

$$d^\infty(H'^c_8, H'_9) > d^\infty(H^c_4, H_5) = d^\infty(H'^c_8, H'_9)$$

라는모순을유발하기때문이다. 따라서 H'_8 은 H_4 를포함하지않는다. 이제

$$x \notin H_3 \supsetneq H_4 \ni z, \quad x \notin H'_8 \ni z$$

에보조정리 5.5를적용하자. 그러면 $H_3 \supseteq H'_8$ 임을얻는즉, $y \in H^c_3$ 는 H'_8 바깥에있다.

이제, $y, y' \notin H'_8 \supsetneq H'_9 \supseteq H_{12}$ 라는위치관계에보조정리 5.4을적용하면

$$d^\infty(y, y') \leq d^\infty(y, H_{12}) + d^\infty(y', H'_9) \leq 2D$$

임을얻는다. 이는 y 와 y' 가 $10D$ -분리되어있다는가정에모순이다. 따라서 (A) 이면서 (A') 일수는없고증명이끝난다. \square

命題 6.1. 중점그래프 Γ 의균일하게거리상진정한부분집합 $Y \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 를하나고정하자. 그러면각각의 $0 < \epsilon < 1$ 및 $D > 1$ 에대해, 어떤상수 $N = N(\epsilon, D)$ 가존재하여다음이항상성립한다.

실수열 \mathbf{a} 및유한집합 $A \subseteq Y$ 를임의로생각하자. 그러면크기가 $(1 - \epsilon)\#A$ 이상인 A 의부분집합 A' 이하나존재하여, 각각의 $a \in A'$ 마다

$$\#\left(A \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a, \{x, x'\})\right) \leq N$$

이게끔하는 $x, x' \in A$ 가존재한다.

Proof. 먼저 $x_0 \in A$ 를임의로고정하겠다. 이제

$$M := \sup_{v \in Y} \#\{w \in Y : d^\infty(v, w) \leq 10D\}$$

라는상수를잡자. 집합 Y 가균일하게거리상진정하기때문에, M 은유한한값을가진다.

이제, 주어진 A 에 대해

$$A_1 := \left\{ a \in A : \begin{array}{l} \text{그어느 } x, x' \in A \text{에 대해서도} \\ A \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a, \{x, x'\}) \text{의 크기가 } 2M/\epsilon + M \text{ 보다 큼} \end{array} \right\}$$

을 정의하자. 그리고 A_1 의 $10D$ -분리된 부분집합 중 극대인 것을 하나 A_2 로 잡는다. 그러면 A_1 은 A_2 의 $10D$ -근방에 포함되고, 따라서 $\#A_1 \leq MA_2$ 이다.

이제 남은 일은 $\#A_2 \leq \frac{\epsilon}{M} \#A$ 임을 보이는 것이다. 편의상 A_2 를 x_0 로부터의 l^∞ -거리 순서대로 정렬하겠다. 즉, $A_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_{\#A_2}\}$ 로 적되 $d^\infty(x_0, a_1) \leq d^\infty(x_0, a_2) \leq \dots$ 이게 끔하겠다는 것이다.

먼저 시간 $i = 0$ 일 때 $\mathcal{B} = \mathcal{G} = \mathcal{U} = \emptyset$ 를 정의하겠다. 그리고 시간 $i = 1, 2, \dots, \#A_2$ 에 걸쳐 어떤 알고리즘을 실행하겠다. (알고리즘 자체는 다음 문단에서 서술하겠다.) 이 때 $\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{U}$ 는 A_2 의 부분집합들로 시간에 따라 변하는데, 매 순간마다 서로 겹치지 않음을 유지된다. 각 i 번째 스텝마다 다음 두 가지 중 하나가 실행되는데,

- (1) a_i 이라는 원소가 (기존에 어떤 카테고리였든 그것을 잊은 채) \mathcal{G} 에 추가되거나, 혹은
- (2) a_i 이라는 원소가 (기존에 어떤 카테고리였든 그것을 잊은 채) \mathcal{B} 에 추가되고, $A_2 \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{U})$ 의 어떤 두 원소가 \mathcal{U} 에 추가된다.

각 a_i 는 i 번째 스텝에 \mathcal{G} 에 넣어지거나 혹은 \mathcal{B} 에 넣어지고, 그 이후에는 운명이 바뀌지 않는다. 특히, 모든 스텝이 종료되면 모든 A_2 의 원소는 \mathcal{B} 아니면 \mathcal{G} 에 들어가 있고, \mathcal{U} 는 비어 있게 된다. 또, 매 스텝마다 $\#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{G} + \#\mathcal{U}$ 라는 등식은 내내 성립하게끔 할 것이다. 그렇게 하면 결과적으로, 마지막 스텝이 끝났을 때 $\#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{G}$ 를 얻게 될 것이다. 이 알고리즘의 또 다른 목표는, $a_i \in \mathcal{G}$ 마다 점 b_i 를 택해, $\{A \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, \{x_0, b_i\}) : a_i \in \mathcal{G}\}$ 가 모두 서로 겹치지 않게끔 하는 것이다.

이제 알고리즘을 기술하겠다. 스텝 i 에서, 먼저 $\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, x_0) \cap A_2$ 가공집합 인지를 묻겠다. 만약이 것이 공집합이라면, $b_i := x_0$ 로 선언하고 a_i 를 \mathcal{G} 에 집어 넣은 뒤 다음 스텝으로 넘어간다.

만약 $\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, x_0) \cap A_2$ 가공집합이 아니라면, 그 원소 중 x_0 에 가장 가까운 것을 b_i 라고 선언하겠다. 이어 $\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap A_2$ 가공집합 인지를 묻겠다. 만약 이것이 공집합이라면, a_i 를 \mathcal{G} 에 집어 넣은 뒤 다음 스텝으로 넘어간다. 만약 $\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap A_2$ 이 공집합이 아니라면, 그 원소 중 x_0 에 가장 가까운 것을 c_i 라고 선언한 뒤, a_i 는 \mathcal{B} 에, b_i, c_i 는 \mathcal{U} 에 넣는다. 이것으로 알고리즘 설명은 끝이다.

각 단계에서 잡히는 b_i 는 $\mathcal{H}_D(a_i, x_0) \cap A_2$ 의 원소로, 특히 a_i 와는 다른 A_1 의 원소이다. A_1 가 $10D$ -분리되어 있으므로, $d^\infty(a_i, b_i) \geq 10D$ 이다. 보조정리 6.1에 의해 $d^\infty(x_0, a_i) < d^\infty(x_0, b_i)$ 임을 알 수 있다. 아까 A_2 를 정렬할 때 x_0 로부터의 거리를 기준으로 했으므로, $b_i \in \{a_{i+1}, \dots, a_{\#A_2}\}$ 임을 알 수 있다. 마찬가지 이유로 c_i 도 $\{a_1, \dots, a_i\}$ 바깥에서 뽑힌다.

또한 i 번째 스텝에서 \mathcal{G} 및 \mathcal{B} 에는 그저 a_i 가 추가되거나 추가되지 않기만 하고, 그 외의 원소 변동은 없다. 즉, i 번째 스텝이 끝난 시점에서 \mathcal{G} 와 \mathcal{B} 가 $\{1, \dots, i\}$ 의 분할 (partition)을 이룬다는 것은 분명하다. 이제 부등식

$$(6.1) \quad \#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{G} + \#\mathcal{U}$$

가각 스텝에서 유지되는지 살펴보겠다. 한 가지 시나리오는, a_i 를 기존의 \mathcal{U} 에서 꺼내왔든 아니든 \mathcal{G} 에 추가하는 경우이다. 이 경우 $\#\mathcal{G} + \#\mathcal{U}$ 는 그대로 있거나 혹은 1 만큼 증가하고, $\#\mathcal{B}$ 는 변하지 않는다. 따라서 부등식 6.1은 유지된다. 다른 한 가지 경우는, a_i 를 기존 \mathcal{U} 에서 꺼내왔든 아니든 \mathcal{B} 에 추가하는 경우이다. 이 경우 \mathcal{U} 에는 기존 $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 에 속하지 않는 원소 $\{b_i, c_i\}$ 를 추가하게 된다. 이 때, 만약 $\{b_i, c_i\}$ 가 기존, 즉 $i - 1$ 번째 스텝 직후의 \mathcal{U} 에 속하지 않는 진정한 새로운 원소라면, i 번째 스텝에서 부등식 6.1의 좌변이

1 만큼증가하되, 우변의 $\#\mathcal{U}$ 도최소 1 만큼증가한다. 따라서, 다음만확인하면부등식 6.1를보장할수 있다.

主張 6.2. 각 $i < j$ 에대해, 만약 $a_i, a_j \in \mathcal{B}$ 이라면 $\{b_i, c_i\} \cap \{b_j, c_j\} = \emptyset$ 이다.

이를귀류법으로확인하기위해, 먼저 $b_i \in \{b_j, c_j\}$ 라고가정해보자. 그러면 $b_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, x_0) \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, x_0)$ 이기에보조정리 6.2를적용할수있다. 보조정리 6.2에의하면, $d^\infty(x_0, a_i) \leq d^\infty(x_0, a_j)$ 라는사실에비추어보아, $a_j \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, x_0)$ 라는것을알수있다. 물론이때 $b_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, x_0)$ 이기때문에 보조정리 6.1에의해

$$d^\infty(x_0, b_i) \geq d^\infty(x_0, a_j) + d^\infty(a_j, b_i) - 2D - 2 > d^\infty(x_0, a_j)$$

임을알수있다. 여기서는 $\{a_j, b_i\} \in A_2$ 가 $10D$ -분리되어있다는사실이쓰였다. 이는 b_i 가 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, x_0) \cap A_2$ 의원소중가장 x_0 에가까운것이라는사실에모순이다. 따라서 $b_i \in \{b_j, c_j\}$ 일수없다.

다음으로, $c_i \in \{b_j, c_j\}$ 라고가정해보자. 그러면 c_i 는 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\})$ 및 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, x_0)$ 의원소이다. 방금과같이보조정리 6.2를적용하면, $d^\infty(x_0, a_i) \leq d^\infty(x_0, a_j)$ 라는사실에비추어보아, $a_j \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\})$ 임을알수있다. 이때 $c_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, x_0)$ 이기때문에보조정리 6.1에의해

$$d^\infty(x_0, c_i) \geq d^\infty(x_0, a_j) + d^\infty(a_j, c_i) - 2D - 2 > d^\infty(x_0, a_j)$$

임을알수있다. 이는 c_i 가 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap A_2$ 의원소중가장 x_0 에가까운것이라는사실에모순이다. 따라서 $c_i \in \{b_j, c_j\}$ 일수없다.

이제주장 6.2이증명되었으므로, 알고리즘은앞에서설명한대로동작한다. 즉, 마지막스텝이끝났을 때 $\#\mathcal{U} = 0$ 이고, 부등식 6.1에의해 A_2 의최소절반이 \mathcal{G} 에들어가있다. 이제각 $a_i \in \mathcal{G}$ 마다

$$K_i := \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \setminus \mathcal{N}_{10D}(a_i)$$

로정의하겠다. 그러면각 $a_i \in \mathcal{G} \subseteq A_1$ 에대해

$$\#(K_i \cap A) \geq \#(\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap A) - M \geq 2M/\epsilon$$

이다. 이제, 서로다른 \mathcal{G} 의원소 $a_i, a_j \in \mathcal{G}$ 에대해 K_i 와 K_j 가겹치지않음을주장하겠다. 만약그렇지 않고

$$z \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, \{x_0, b_j\}), \quad d(z, a_i) > 10D, \quad d(z, a_j) > 10D$$

를만족하는 $z \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 가존재한다고해보자. 그러면보조정리 6.2에의해 $a_j \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\})$ 이거나혹은 $a_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, \{x_0, b_j\})$ 이다. 어느경우이든, a_i 및 a_j 가 \mathcal{G} 의원소라는사실에모순이다. 따라서그러한 z 는존재하지않는다.

이로부터,

$$\#A \geq \#(\cup_{i:a_i \in \mathcal{G}} K_i) = \sum_{i:a_i \in \mathcal{G}} \#K_i \geq (2M/\epsilon) \cdot \#\mathcal{G}$$

임을알수있다. 이로부터목표한부등식

$$\#A_1 \leq 2\#\mathcal{G} \leq \frac{2}{2M/\epsilon} \#A \leq \frac{\epsilon}{M} \#A$$

을얻으면서증명이끝난다. □

7. 랭크 1 등거리사상

定義 7.1. 중점그래프 Γ 의어떤대칭 g 가 정규 1 차수 (*regular rank-1*) 라는것은, 어떤반공간 H 와지수 n 이존재하여 g^nH 이 H 에포함되고또 H 와강하게분리되어있다는뜻이다. 이경우, g 가 H 를펜다 (*skewer*) 고말한다.

이제정규 1 차수대칭을 어떻게활용할수있는지살펴보겠다.

補題 7.1 (Tits 대안). 중점그래프 Γ 에진정으로작용하는대칭군 $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 가정규 1 차수원소 g 를하나포함한다고가정하자. 그러면다음둘중하나가성립한다:

- (1) G 는 \mathbb{Z} 를유한지수부분군으로갖거나, 혹은
- (2) 적당히큰정수 n 과 G 의원소 g' , 그리고반공간 H 가존재하여, $g^nH, g^{-n}H^c, g'H, g'^{-1}H^c$ 가모두서로겹치지않으면서서로강하게분리되어있다.

Proof. 먼저, g 가꿰는반공간 H 를하나고정하자. 원소 g 를적당히큰거듭제곱으로대체함으로써, $gH \subsetneq H$ 라고가정할수있다. 참고로이때임의의 $k > 0$ 에대해 $g^kH \subsetneq g^{k-1}H \subsetneq \dots \subsetneq H$ 이기에 $g^k \neq id$ 이다. 따라서 g 로생성된 G 의부분군 $\langle g \rangle$ 는정수군 \mathbb{Z} 와동형이다.

더하여, H 밖에있는점 x 을하나고정하고 $d^\infty(x, g^6H) = D$ 로두겠다. 군 G 의작용이진정하다고 가정했으므로, $A := \{a \in H : d^\infty(x, ax) < 2D\}$ 는유한집합이다.

이제, G 의원소 h 에대한성질

$$P(h) := g^{-n}H \supsetneq hH \supsetneq g^nH \text{ 이성립하게끔하는양의정수 } n \text{ 이존재함},$$

$$Q(h) := g^{-n}H \supsetneq hH^c \supsetneq g^nH \text{ 이성립하게끔하는양의정수 } n \text{ 이존재함}$$

을정의하겠다. 동일한원소가 P 및 Q 를동시에가질수는없음에유의하라.

主張 7.2. 어떤 G 의원소 $h \in G$ 를생각하자. 만약 h 및 hg 가동시에성질 P 를가지면, h 는 $\langle g \rangle \cdot A$ 안에들어있다.

주장7.2의증명. 주어진조건을다시요약하면, $g^{-n}H \supsetneq hH \supsetneq hgH \supsetneq g^nH$ 이게끔하는 $n > 0$ 이존재 한다는뜻이다. 이제

$$m(h) := \max \{i : g^iH \supseteq hH\}, \quad M(h) := \min \{i : g^iH \subseteq hgH\}$$

를정의하자. 위에서논하는집합은공집합이아니고, 각각상한및하한이존재하는집합이므로이값들은잘 정의된다. 물론 $g^{m(h)}H \supseteq hH \supsetneq hgH \supseteq g^{M(h)}H$ 이므로 $-n \leq m(h) < M(h) \leq n$ 이다.

여기서 $M(h) \leq m(h) + 5$ 임을보이겠다. 만약그렇지않고 $M(h) > m(h) + 5$ 라고가정하면,

$$g^{-n}H \supsetneq g^{m(h)+1}H \supsetneq g^{m(h)+2}H \supsetneq g^nH, \quad g^{-n}H \supsetneq hH \supsetneq g^nH$$

에보조정리 5.5를적용할수있고 $g^{m(h)+1}H \supsetneq hH$ 혹은 $hH \supsetneq g^{m(h)+2}H$ 임을얻는다. 그런데전자는 $m(h)$ 의정의상불가능하므로 $hH \supsetneq g^{m(h)+2}H$ 임을얻는다. 비슷한이유로, $g^{M(h)-2}H \supsetneq hgH$ 이다. 허나 $m(h) + 3 < M(h) - 2$ 임을가정했으므로,

$$\begin{aligned} d^\infty(hH^c, hgH) &\geq d^\infty(g^{m(h)+2}H^c, g^{M(h)-2}H) \\ &\geq d^\infty(g^{m(h)+2}H^c, g^{m(h)+3}H^c) + d^\infty(g^{m(h)+3}H^c, g^{M(h)-2}H) \\ &> d^\infty(H^c, gH) \end{aligned}$$

라는모순을얻는다. 따라서이는불가능하고 $M(h) \leq m(h) + 5$ 이다.

따라서

$$g^{m(h)}x, hx \notin hH \supsetneq hgH \supseteq g^{M(h)}H \supseteq g^{m(h)+5}H$$

임을 알수 있다. 이는

$$d^\infty(g^{m(h)}x, hx) \leq d^\infty(hx, hgH) + d^\infty(g^{m(h)}x, g^{m(h)+5}H) \leq 2D$$

를 의미하며, 따라서 $g^{-m(h)}h \in A$ 이다. 즉 $h \in \langle g \rangle \cdot A$ 이다. \square

비슷한 증명을 통해, 다음도 알수 있다.

主張 7.3. 군 G 의 원소 $h \in G$ 를 생각하자. 만약 h 및 hg^{-1} 가 동시에 성질 Q 를 가지면, h 는 $\langle g \rangle \cdot A$ 안에 들어 있다.

위 주장들로부터 다음 주장도 얻는다.

主張 7.4. 군 G 의 원소 $h \in G$ 를 생각하자. 만약 h 와 $hg^{\#A}$ 가 동시에 성질 P 를 가지면, 임의의 $k \in \mathbb{Z}$ 에 대해 hg^k 또한 P 를 가진다.

주장 7.4의 증명. 가정에 의해

$$g^{-M}H \supsetneq hH \supsetneq hg^{\#A}H \supsetneq g^M H$$

를 만족하는 $M > 0$ 이 존재 한다. 특히, $h, hg, \dots, hg^{\#A-1}$ 가 모두 성질 P 를 가진다. 주장 7.2에 의해, 각각의 $i = 0, \dots, \#A - 1$ 마다

$$hg^i = g^{m_i}a_i$$

에 해당하는 어떤 $m_i \in \mathbb{Z}$ 및 $a_i \in A$ 가 존재 한다. 비둘기집의 원리에 의해, 어떤 $0 \leq i < j < \#A$ 에 대해 $a_i = a_j$ 이고, 이 때 $hg^{j-i}h^{-1} = g^{m_j - m_i}$ 이다. 표기 편의상 $A = j - i$, $B = m_j - m_i$ 라고 표시 하자. 이 때 $A > 0$ 임에 유의 하라. 그러면 $hg^A = g^Bh$ 및 $hg^{-A} = g^{-B}h$ 이다. 이를 연달아 활용하면

$$hg^{Ak} = g^{Bk}h \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

임을 알수 있다.

이제 임의의 k 에 대해,

$$g^{-|k|B}hg^kH = hg^{-|k|A}g^kH \supsetneq hH \supsetneq g^M H$$

임을 안다. 이는 다시 말해 $hg^kH \supsetneq g^{M+|k|B}H$ 라는 것이다. 또한

$$g^{|k|B}hg^kH = hg^{|k|A}g^kH \subsetneq hH \subsetneq g^{-M}H$$

이므로 $hg^kH \subsetneq g^{-M-|k|B}H$ 이다. 이로써 hg^k 가 성질 P 를 가짐을 증명 했다. \square

마찬가지 증명을 통해 다음이 따라나온다.

主張 7.5. 어떤 G 의 원소 $h \in G$ 를 생각하자. 만약 h 와 $hg^{\#A}$ 가 동시에 성질 Q 를 가지면, 임의의 $k \in \mathbb{Z}$ 에 대해 hg^k 또한 Q 를 가진다.

이제, 만약 각각의 $h \in G$ 이 P 또는 Q 를 만족한다면 결론 (1) 이 성립함을 논증하겠다. 만약 모든 $h \in G$ 가 P 를 만족한다면 주장 7.2에 의해 증명이 끝난다. 그렇지 않고 Q 를 만족하는 G 의 원소 u 가 존재하는 경우,

$$G_+ = \{h \in H : P(h)\}, \quad G_- = \{h \in H : Q(h)\}$$

로나누겠다. 이때 G_+ 가지수 2 짜리부분군임을관찰하기위해 $a, b \in G_+$ 를임의로고르자. 그러면

$$g^{-n}H \supsetneq aH \supsetneq g^nH, \quad g^{-m}H \supsetneq bH \supsetneq g^mH$$

인 $n, m > 0$ 이존재한다. 여기서, ag^{-m} 이만약성질 Q 를만족하면, $ag^{-m}H^c \supsetneq g^kH$ 를만족하는정수 $k > 0$ 를찾을수있다. 이는곧

$$g^kH^c \supsetneq ag^{-m}H \supsetneq aH \supsetneq g^nH$$

임을의미하는데, 이는 $H^c \subseteq g^kH^c$ 및 $H^c \cap g^nH = \emptyset$ 에모순이다. 따라서이는불가능하고, ag^{-m} 이 성질 P 를만족한다. 다시말해, $g^{-l}H \supsetneq ag^{-m}H$ 를만족하는정수 $l > 0$ 이존재한다. 그러면

$$g^{-l}H \supsetneq ag^{-m}H \supsetneq abH$$

로부터, ab 는성질 Q 를가질수없고대신 P 를가져야함을알수있다. 위관찰은곧 G_+ 가 G 의부분군이고 $uG_+ = G_-$ 라는것이다. 이로써 G_+ 가 G 의지수 2 짜리부분군임을알수있다. 물론, G_+ 에는 \mathbb{Z} 에동형인유한지수부분군이존재한다. 이로써논증이끝난다.

이제성질 P 도 Q 도가지지않는 $h \in G$ 가존재하는경우결론 (2) 가성립함을보이겠다. 여기서 $\{g^iH\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 중 hH 와교차할수있는것은기껏해야하나밖에없고, 나머지는모두 g^iH 와평행하다. 또한, hH 가 $\{g^iH : i \in \mathbb{Z}\}$ 모두에포함되어있는것은불가능하다. 만약그렇게될경우, 임의의 $i > 0$ 에대해 $d^\infty(H^c, hH) \geq d^\infty(H^c, g^iH) \geq i$ 라는얘기가되어, Γ 가연결되어있지않다는모순이생기기때문이다. 마찬가지로, hH 가 $\{g^iH^c : i \in \mathbb{Z}\}$ 모두에포함되어있을수없다. 마지막으로, 어떤 n 에대해 $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 를 hH 가분리한다면이는가정에모순이다. 이를모두종합하면, hH 혹은 hH^c 중하나는충분히큰 n 에대해 $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 과겹치지않는다.

이후증명에서는 hH , $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 가서로겹치지않는경우를논하겠다. 나머지경우, 즉 hH^c , $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 가서로겹치지않는경우또한비슷한논법으로다룰수있다.

먼저 $D = d^\infty(hH, g^nH) + d^\infty(hH, g^{-n}H^c) + \#A$ 로두자. 그후 $hg^{-D}, hg^{-2D}, hg^{-3D}$ 라는 G 의세원소를생각하자. 만약이세원소각각이 P 또는 Q 를만족하면, 최소두개는같은종류의성질을가지게된다. 이때주장 7.4에비추어보면 $h\langle g \rangle$ 전체가그성질을가지게된다. 특히, h 또한 P 또는 Q 를가지게되어이는모순이다. 따라서그럴수없고, 어떤 $k \in \{1, 2, 3\}$ 에대해 $hg^{-kD}H$ 는 P 도 Q 도가지지않는다. 이는곧충분히큰 $m > n + 2$ 에대해 $hg^{kD}H$ 가 $g^{-m}H^c$ 및 g^mH 둘다와겹치지않거나혹은둘다를포함한다는뜻이다.

이상황에서만약 $hg^{-kD}H$ 가 $g^{-m}H^c$ 및 g^mH 와겹치지않는다면어떻게될까? 이경우, $hg^{-kD}H$ 는 $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 중기껏해야한개랑만교차할수있다. 만약 hg^{-kD} 와 g^nH 가교차하지않는다면, 이 hg^{-kD} 와 g^nH 는서로겹치지않아야한다. $hg^{-kD}H$ 는 $g^nH \supsetneq g^mH$ 를포함할수없고, g^nH 도 $hg^{-kD}H \supseteq H$ 를포함할수없으며, $hg^{-kD} \cup g^nH$ 는 g^mH 라는부분을놓치기때문이다. 따라서, $hg^{-kD}H$ 는 hH 와 g^nH 사이에끼겨있어야하는데, 이는

$$d^\infty(hH, g^nH) < D \leq d^\infty(hH, hg^{-kD}H^c) \leq d^\infty(hH, g^nH)$$

라는모순을낳는다. 따라서이러한일은생길수없다. 마찬가지로, hg^{-kD} 와 $g^{-n}H^c$ 가교차하지않을때도비슷한모순이생긴다. 따라서, $hg^{-kD}H$ 가 $g^{-m}H^c$ 및 g^mH 와겹치지않을수는없고, 둘모두를포함해야한다. 이제 $g^{-m}H^c, g^mH, hH, hg^{-kD}H^c$ 가모두서로겹치지않는다는것은명백하다. 더하여, $g^{-m-1}H^c, g^{m+1}H, hgH, hg^{-kD-1}H^c$ 은강하게분리되어있기까지하다. 이는원하는결론이다. \square

이제, 명제 3.1의절반을증명할준비가되었다.

命題 7.1. 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용하는 대칭군 $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 를 생각하자. 또, G 가 정규 1 차수 원소 $g \in G$ 를 하나 포함하고 있고, \mathbb{Z} 와 동형인 유한지수부분군이 없다고 가정하자. 또 $x_0 \in \Gamma$ 를 하나 고정하자. 그러면 각각의 $0 < \epsilon < 1$ 에 대해 어떤 유한집합 $\{b_1, \dots, b_T\} \subseteq G$ 및 반공간 유한개 L_1, \dots, L_T 가 존재하여 다음이 항상 성립한다.

유한집합 $A \subseteq G$ 를 임의로 생각하자. 그러면 크기가 $(1 - \epsilon)\#A$ 이상인 A 의 부분집합 A' 이 하나 존재하여, 각각의 $a \in A'$ 마다 어떤 i 가 존재하여

$$ax_0 \in A'x_0 \subseteq aL_i \subsetneq ab_iL_i^c$$

가 성립한다.

Proof. 보조정리 7.1에 의해, G 안의 정규 1 차수원소 g_1, g_2 및 반공간 H 가 존재하여

$$g_1H, g_1^{-1}H^c, g_2H, g_2^{-1}H^c$$

가 모두 강하게 분리되어 있다. 이때 id 와 g_i 을 잇는 S -경로 γ_i 를 하나 씩 고르자. 그러면 적당히 큰 n 에 대해 $\gamma_1 \cdot x_0$ 및 $\gamma_2 \cdot x_0$ 는 $g_1H^c \cap g_1^{-1}H \cap g_2H^c \cap g_2^{-1}H$ 안에 갇혀 있다고 말할 수 있다. 이때 그러면 γ_i 는 $\gamma_i \cdot (g_1\gamma_i) \cdot \dots \cdot (g_i^{n-1}\gamma_i)$ 로 대체하고, g_i 는 g_i^n 으로 대체함으로써, $\gamma_i x_0$ 가 $g_1H^c \cap g_1^{-1}H \cap g_2H^c \cap g_2^{-1}H$ 에 갇혀 있다고 가정할 수 있다. 또, (g_1, g_2) 를 (g_1g_2, g_2^2) 로 대체함으로써,

$$\{H^c, g_1H, g_2H\}, \quad \{H, g_1^{-1}H^c, g_2^{-1}H^c\}$$

라는 두 모임 각각이 강하게 분리된 반공간의 모임이라고 얘기할 수 있다. 이 때,

$$M := \max \{d^\infty(H^c, u_1 \cdots u_{15}H) : u_i \in \{g_1, g_2\}\} + d^\infty(x_0, g_2^{-1}H^c)$$

로 놓겠다.

이제 명제 6.1을 활용해보자. 현재 G 의 작용이 거리상 진정하기에, $G \cdot x_0$ 라는 집합은 균일하게 거리상 진정하다. 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해, 명제 6.1에서 보장하는 $N = N(\epsilon, M)$ 을 잡자. 그러면 각각의 유한집합 $A \subseteq G$ 마다 크기가 $(1 - \epsilon)\#A$ 이상인 A 의 부분집합 A' 이 하나 존재하여, 각각의 $a \in A'$ 마다

$$\#\left(Ax_0 \cap \mathcal{H}_M(ax_0, \{x, x'\})\right) \leq N$$

이게 끔하는 $x, x' \in Ax_0$ 가 존재한다. 여기서

$$\{c_1, c_2, \dots, c_{2N+13}\} := \{u_1 u_2 \cdots u_{N+14} : u_i \in \{g_1, g_2\}\}$$

으로 잡고, $b_i := c_i g_1^5 c_i^{-1}$ 및 $L_i = c_i H^c$ 로 잡겠다.

이제 각 $a \in A'$ 의 각 점마다 명제에서 요구하는 정수 i 가 존재한다는 것을 논하겠다. 먼저

$$g_1^2H, g_1g_2H, g_2g_1H, g_2^2H$$

는 모두 서로 겹치지 않기에, 최소한 하나는 x_0 도, $a^{-1}x$ 도, $a^{-1}x'$ 도 포함하지 않는다. 그러한 것을 g_a 라고 표시하겠다. 그러면

$$\{a, x, x'\} \subseteq ag_aH^c, \quad ag_aH \supsetneq ag_ag_1 \supsetneq H \supsetneq \dots \supsetneq ag_ag_1^{10}H$$

이 성립한다. 더하여, ax_0 도 $ag_ag_1^{10}H$ 도 $ag_1^{-1}H^c$ 밖에 있으니, 보조정리 5.3에 의해

$$d^\infty(ax_0, ag_ag_1^{10}H) \leq d^\infty(ax_0, ag^{-2}H^c) + d^\infty(ag^{-2}H^c, ag_ag_1^{10}H) \leq M$$

이 성립한다. 이로부터, $ag_ag_1^{10}H$ 의 원소들은 모두 $\mathcal{H}_M(ax_0, \{x, x'\})$ 밖에 있음을 알 수 있다.

그렇다면 $Ax_0 \cap ag_ag_1^{10}H$ 에는 기껏해야 N 개의 원소가 있다. 따라서 $ag_ag_1^{10}H$ 에 포함되어 있는

$$\{ag_ag_1^{10}u_1u_2 \cdots u_NH : u_i \in \{g_1, g_2\}\}$$

라는 2^N 개의 서로 겹치지 않는 반공간 중, Ax_0 의 원소를 포함하지 않는 것이 분명히 존재한다. 그러한 선택지 u_1, \dots, u_N 들을 하나 고정했을 때,

$$A'x_0 \subseteq ag_ag_1^{10}u_1 \cdots u_NH^c \subsetneq ag_ag_1^{10}u_1 \cdots u_N \cdot g_1^5H$$

가 성립한다. 따라서, $c_i = g_ag_1^{10}u_1 \cdots u_N$ 인 i 를 택하고, $L_i = c_iH^c$ 및 $b_i = c_ig_1^{10}c_i^{-1}$ 를 택하면 원하던 조건을 만족한다. 물론 id 와 b_i 사이는 적당히 γ_1, γ_2 혹은 그 역 방향 경로들을 이어붙인 S -경로로 이을 수 있다. 이 때

$$((\gamma_1) \cdot \dots \cdot (c_ig_1^5\gamma_1)) \cdot x_0 \subsetneq c_ig_1^{10}H^c$$

임은 분명하다. 마찬가지로, 후반부 경로의 x_0 -궤도가 c_iH 에 포함됨은 분명하다. 이로써 경로 γ_i 의 존재성까지 확인하였고 증명이 끝난다. \square

이제 남은 것은 마법 보조 정리의 증명을 완수하는 것이다.

命題 7.2. 중점 그래프 Γ 에 진정으로 작용하는 대칭군 $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 를 생각하자. 또, G 가 정규 1 차수 원소 $g \in G$ 를 하나 포함하고 있고, \mathbb{Z} 와 동형인 유한지수 부분군이 없다고 하자. 더하여, g 가 끼워 넣는 반공간 H 및 점 x_0 을 하나 고정하자. 그러면 각각의 $N > 20$ 마다 $K > 0$ 이 존재하여

$$\mathcal{C}_N(g) := \left\{ h \in G : \begin{array}{l} x_0 \notin wgH \supsetneq wg^N H \ni hx_0 \text{ 혹은 } hx_0 \notin wgH \supsetneq wg^N H \ni x_0 \text{ 가} \\ \text{성립하게끔 하는 } w \in G \text{ 가 존재하지 않음} \end{array} \right\}$$

가 K -나무스럽다.

Proof. 대칭 g 를 적당히 큰 거듭제곱으로 대체함으로써 $x_0 \notin gH \cap g^{-1}H^c$ 임을 가정할 수 있다. 이 때 증명을 위해 상수

$$K := 100 \left(d^\infty(x_0, g^{100}H) + d^\infty(x_0, g^{-100(N+1)}H^c) \right)$$

를 잡겠다.

먼저 $\mathcal{C}_N(g)$ 의 $0.5K$ -분리된 부분집합 중 id 를 포함하고 또 극대인 것을 하나 골라 \mathcal{C}' 라고 하자. 이제 각각의 $u \in \mathcal{C}'$ 에 대해

$$\Psi(u) := ug^{40N}$$

을 잡아주겠다.

이제 다음 관찰이 필요하다.

主張 7.6. 두 원소 $u_1, u_2 \in \mathcal{C}'$ 에 대해,

$$x_0 \notin u_1g^{5N}H \supsetneq u_1g^{35N}H \supsetneq \Psi(u_1)u_2g^{5N}H \supseteq \Psi(u_1)u_2g^{35N}H \ni \Psi(u_1)\Psi(u_2)x_0$$

가 성립한다.

주장 7.6의 증명. 다음은 $i = 1, 2$ 각각에 대한 얘기이다. 만약 $x_0 \in u_ig^N H$ 이라면

$$u_ix_0 \notin u_igH \supsetneq u_ig^N H \ni x_0$$

라는 얘기가 되어 $u_i \in \mathcal{C}_N(g)$ 라는 가정에 모순이다. 따라서 $u_i^{-1}x_0 \notin g^N H$ 이다. 마찬가지 이유로 $u_ix_0 \in g^{-N}H$ 이다.

이제 남은 것은 가운데 포함 관계, 즉 $g^{-5N}H \supsetneq u_2g^{5N}H$ 임을 증명하는 것이다. 앞에서 얘기했다시피 u_2x_0 는 $g^{-N}H$ 에 포함된다. 여기서 귀류법을 적용하기 위해, $u_2g^{5N}H$ 가 $g^{-5N}H$ 에 포함되지 않는 즉, $u_2g^{5N}H$ 와 $g^{-5N}H^c$ 가 어떤 원소 y 를 공유한다고 가정해보자. 이 경우, $u_2x_0 \notin u_2^{5N-1}H \supsetneq u_2^{5N}H \ni y$ 및 $u_2x_0 \notin g^{-5N}H^c \ni y$ 라는 위치 관계에 보조 정리 5.5를 적용하면 $u_2^{5N-1}H \supsetneq g^{-5N}H^c$ 혹은 $g^{-5N}H^c \supsetneq u_2^{5N}H$ 여야 한다. 전자의 경우

$$x_0, u_2x_0 \notin u_2g^{5N-2}H \supsetneq u_2g^{5N-1}H \supsetneq g^{-5N}H^c$$

라는 위치 관계에 보조 정리 5.4을 적용하면

$$d^\infty(x_0, u_2x_0) \leq d^\infty(u_2x_0, u_2g^{5N-2}H) + d^\infty(x_0, g^{-5N}H^c) \leq 0.02K$$

가된다. 이는 $u_2 \in \mathcal{C}'$ 라는 가정에 어긋난다. 후자의 경우에도

$$x_0, u_2x_0 \notin g^{-5N+1}H^c \supsetneq g^{-5N}H^c \supsetneq u_2^{5N}H$$

라는 위치 관계에 보조 정리 5.4을 적용하면

$$d^\infty(x_0, u_2x_0) \leq d^\infty(u_2x_0, u_2g^{5N}H) + d^\infty(x_0, g^{-5N}H^c) \leq 0.02K$$

가된다. 이는 역시 $u_2 \in \mathcal{C}'$ 라는 가정에 어긋난다. 따라서 $u_2g^{5N}H$ 가 $g^{-5N}H$ 에 포함되어야 하고 주장의 증명이 끝난다. \square

主張 7.7. 집합 \mathcal{C}' 의 원소 u_1, \dots, u_m 및 v_1, \dots, v_n 에 대해, 만약 $\Phi(u_1) \cdots \Phi(u_m) = \Psi(v_1) \cdots \Psi(v_n)$ 이라면 $u_1 = v_1$ 이다.

주장 7.7의 증명. 편의를 위해 $U := \Phi(u_1) \cdots \Phi(u_m) = \Psi(v_1) \cdots \Psi(v_n)$ 라고 두자. 주장 7.6에 의해,

$$\begin{aligned} x_0 \notin u_1g^{5N}H \supsetneq u_1g^{35N}H &\supseteq \dots \supsetneq \Phi(u_1) \cdots \Phi(u_{m-1})u_mg^{35N}H \ni Ux_0, \\ x_0 \notin v_1g^{5N}H \supsetneq v_1g^{35N}H &\supseteq \dots \supsetneq \Phi(v_1) \cdots \Phi(v_{n-1})v_ng^{35N}H \ni Ux_0 \end{aligned}$$

가성립한다.

여기서 만약 $v_1x_0 \in u_1g^{6N}H$ 라면 이는 곧 $x_0 \notin u_1g^{5N} \cdot gH \supsetneq u_1g^{5N} \cdot g^N H \ni v_1x_0$ 라는 의미가 되어 $v_1 \in \mathcal{C}_N(g)$ 임에 모순이다. 따라서 $v_1x_0 \notin u_1g^{6N}H$ 이고 마찬가지 이유로 $u_1x_0 \notin v_1g^{6N}H$ 이다.

이제

$$x_0 \notin u_1g^{10N}H \supsetneq u_1g^{11N}H \ni Ux_0, \quad x_0 \notin v_1g^{10N}H \supsetneq Ux_0$$

라는 위치 관계에 보조 정리 5.5를 적용하면, $u_1g^{10N}H \supsetneq v_1g^{10N}H$ 혹은 $v_1g^{10N}H \supsetneq u_1g^{11N}H$ 임을 알 수 있다. 전자의 경우

$$u_1x_0, v_1x_0 \notin u_1g^{9N}H \supsetneq u_1g^{10N}H \supsetneq v_1g^{10N}H$$

라는 위치 관계에 보조 정리 5.4를 적용해

$$d^\infty(u_1x_0, v_1x_0) \leq d^\infty(u_1x_0, u_1g^{10N}H) + d^\infty(v_1x_0, v_1g^{10N}H) \leq 0.02K$$

임을 알 수 있다. 후자의 경우

$$u_1x_0, v_1x_0 \notin v_1g^{9N}H \supsetneq v_1g^{10N}H \supsetneq u_1g^{11N}H$$

라는 위치 관계에 보조 정리 5.4를 적용해

$$d^\infty(u_1x_0, v_1x_0) \leq d^\infty(u_1x_0, u_1g^{11N}H) + d^\infty(v_1x_0, v_1g^{10N}H) \leq 0.02K$$

임을 알수 있다. 어느 경우이든, $0.5K$ -분리된 집합인 \mathcal{C}' 에서 뽑은 u_1, v_1 에게는 $u_1 = v_1$ 임을 알려준다. \square

주장 7.7를 반복해서 적용하면, $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}'$ 에 대해 만약 $\Phi(u_1) \cdots \Phi(u_m) = \Psi(v_1) \cdots \Psi(v_n)$ 이면 곧 $m - n$ 이고 $u_i = v_i (i = 1, \dots, n)$ 임을 알수 있다. 이는 곧 $\Psi(\mathcal{C}')$ 가 0 -나무스럽다는것이고, \mathcal{C}' 는 $0.5K$ -나무스러우며, 따라서 \mathcal{C} 는 K -나무스럽다. \square

命題 7.3. 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용하는 대칭군 $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 를 생각하자. 또, G 가 정규 1 차수 원소 $g \in G$ 를 하나 포함하고 있고, \mathbb{Z} 와동형인 유한지수부분군이 없다고 하자. 더하여, g 가 궤뚫는 반공간 H 및 점 x_0 을 고정하자. 그러면 $K > 0$ 이 존재하여, 충분히 큰 $T > 0$ 마다 다음이 성립한다.

점 x_0 와 또 다른 임의의 점 $x' \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 사이의 반공간 극대사슬

$$x_0 \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_M \ni x'$$

를 고정한뒤,

$$\mathcal{L}_i := \{g \in G : d^\infty(gx_0, \partial L_{Ti}) \leq 0.001T\}$$

를 잡자. 그러면 $\mathcal{L}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{L}_{M/T}$ 는 K -나무스럽다.

Proof. 이번에는 조금 더 품이 필요하다. 보조정리 7.1에 의해 어떤 $a_1, \dots, a_4 \in G$ 가 존재해 다음이 성립한다:

그어느 $x, y, z \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해서도, $\{x, y, z\} \subseteq a_i g H^c \cap a_i g^{-1} H^c$ 인 i 가 존재함.

이들을 가지고

$$K := 100 \left(d^\infty(x_0, g^{100} H) + d^\infty(x_0, a^{-100(N+1)} H^c) + \max_{i=1}^4 d^\infty(x_0, a_i x_0) \right)$$

를 정의할수 있다. 이 K 는 x' 에는 의존하지 않음에 유의하라.

특히 $\{x, y, z\} = \{x_0, x_0, x'\}$ 에 대한 선택지를 \mathbf{t} 라고 정해두자. 그리고 각 $g \in \mathcal{L}_i$ 마다, $\{x, y, z\} = \{x_0, u^{-1}x_0, u^{-1}x'\}$ 에 대한 선택지를 $\mathbf{s}(u)$ 라고 표기하겠다, 그런후

$$\Phi(u) := u\mathbf{s}(u)g^{200}\mathbf{t}$$

로 고정하겠다.

이번에도 $\sqcup_i \mathcal{L}_i$ 의 $0.5K$ -분리된 부분집합 중 극대인 것을 하나 골라 \mathcal{C}' 라고 하겠다. 이전 증명과 비슷하게 정렬성에 관한 주장을 먼저 증명한 뒤 단사성을 증명하려고 한다.

사실 정렬성은 증명할 것이 별로 없다. 임의의 $u_1 \in \mathcal{C}'$ 를 골랐을 때, $x_0 \notin u_1 \mathbf{s}(u_1)H$ 이라는 것은 \mathbf{s} 의 정의로부터 바로 따라나온다. 그다음으로, 임의의 $u_2 \in \mathcal{C}'$ 를 추가로 고르자. 이때 $L_{T/2}$ 라는 초평면은 x_0 과 x' 사이에 끼어있음을 기억하라. 그런데 $u_2 \mathbf{s}(u_2)gH$ 및 $u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H$ 는 이 두 점 모두 포함하지 않는다. 보조정리 5.3에 의해, $L_{T/2}$ 은 $u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H$ 를 완전히 포함하거나 혹은 서로 겹치지 않아야 한다. 그런데 이때 $u_2 x_0$ 은 $L_{T/2}^c$ 에도 $u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H$ 에도 포함되어 있지 않다. 따라서 만약 위의 후자의 경우

$$d^\infty(u_2 x_0, L_{T/2}^c) \leq d^\infty(u_2 x_0, u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H) \leq 0.1T$$

인데 이는 $u_2 x_0$ 와 $L_{T/2}^c$ 사이에 반공간 $L_{T/2+1}, L_{T/2+2}, \dots, L_T$ 가 끼어있다는 사실에 모순이다. 따라서 $L_1 \supsetneq u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H$ 이다.

마찬가지로, $\mathbf{t}^{-1}g^{-2}H \supsetneq L_1$ 임을 알수 있다. 이를 모두 조합하면 정렬성

$$x_0 \notin u_1 \mathbf{s}(u_1)H \supsetneq u_1 \mathbf{s}(u_1)g^{198}H \supsetneq \Phi(u_1)u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H \supsetneq \Phi(u_1)u_2 \mathbf{s}(u_2)g^{200}H \ni \Phi(u_1)\Phi(u_2)x_0$$

임을 알수 있다.

이제, 임의의 $u_1, v_1 \in \mathcal{C}'$ 에 대해 $v_1x_0 \in u_1\mathfrak{s}(u_1)g^{30}H$ 일수 있는지 알아보겠다. 이 때 $u_1x_0 \in N_{0.001T}(\partial L_m)$ 인 m 을 먼저 잡아두겠다. 이제 x_0 과 x' 는 모두 $u_1\mathfrak{s}(u_1)gH \supsetneq u_1\mathfrak{s}(u_1)g^2H$ 바깥에 있음을 유의하라. 보조정리 5.3(및 보조정리 5.4의 증명도 참조)에 따라 어떤 m' 이 존재해

$$x_0 \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_{m'} \supseteq u_1\mathfrak{s}(u_1)g^2H, \quad u_1\mathfrak{s}(u_1)g^2H^c \supseteq L_{m'+1} \supsetneq \dots \supsetneq L_M \ni x'$$

여야 한다. 그러면 $|m' - m| \leq 0.001T + d^\infty(x_0, \mathfrak{s}(u_1)x_0) + d^\infty(x_0, g^2H) \leq 0.002T$ 여야 한다. 또 $v_1x_0 \in N_{0.001T}(\partial L_k)$ 인 k 를 잡으면, $L_{m'}$ 과 L_k 사이에 있는 모든 Li 들은 v_1x_0 과 L_k 사이에 깊게 있음을 알수 있다. 이로부터 $|m' - k| \leq 0.001T$ 임도 알수 있다. 즉, $|m - k| \leq 0.002T$ 이고, 이로부터 $m = k$ 여야함을 알수 있다.

그런데 u_1 와 v_1 가 같은 반공간 L_m 의 경계에 있으면서 그 사이에 $u_1\mathfrak{s}(u_1)gH \supsetneq \dots \supsetneq u_1\mathfrak{s}(u_1)g^{30}H$ 가 깊게 있다는 것은, $u_1\mathfrak{s}(u_1)gH \supsetneq \dots \supsetneq u_1\mathfrak{s}(u_1)g^{30}H$ 가 강하게 분리되어 있다는 사실에 모순이다. 따라서 이러한 일은 일어날 수 없다.

위 이유와 정렬성을 함께 결합해 이전 증명과 같이 논증하면 단사성 또한 얻는다. 이로써 $\Phi(\mathcal{C}')$ 가 나무스럽다는 것을 알수 있고, $\sqcup_i \mathcal{L}_i$ 은 따라서 K -나무스럽다. \square

命題 7.4. 유한집합 S 로 생성되는 군 G 가 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용한다고 하자. 또, G 가 정규 1 차수원소 g 를 하나 포함하고 있고, \mathbb{Z} 와 동형인 유한지수부분군이 없다고 가정하자. 또, g 가 꿰뚫는 반공간 H 및 점 $x_0 \in \Gamma$ 를 하나 고정하자. 또한 실수열

$$\mathbf{a} := (d^\infty(H^c, g^n H))_{n=1}^{11}$$

을 두겠다. 그러면 충분히 큰 T 및 임의의 N 에 대해 다음이 성립한다.

임의의 점 $x, x' \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해, id 와 $\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(x_0, \{x, x'\}) \setminus N_D(id)$ 바깥을 잇는 임의의 S -경로는 반드시 셋중하나를 만족해야 한다:

- (1) $\mathcal{C}_N(g) \setminus N_{D/10}(id)$ 을 지나거나,
- (2) x_0 와 x 사이에 끼인 임의의 극대사슬 $x_0 \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_{0.1N} \supsetneq \dots \ni x$ 에 대해

$$\mathcal{L}_i := \{g \in G : d^\infty(gx_0, \partial L_{Ti}) \leq 0.001T\} \quad (i = 1, \dots, 0.1N/T)$$

각각을 지나거나, 혹은

- (3) x_0 와 x' 사이에 끼인 임의의 극대사슬 $x_0 \notin L'_1 \supsetneq \dots \supsetneq L'_{0.1N} \supsetneq \dots \ni x$ 에 대해

$$\mathcal{L}'_i := \{g \in G : d^\infty(gx_0, \partial L'_{Ti}) \leq 0.001T\} \quad (i = 1, \dots, 0.1N/T)$$

각각을 지난다.

Proof. 증명을 위해 $h \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(x_0, \{x, x'\}) \setminus N_D(id)$ 를 임의로 정하자. 그러면 x_0 와 hx_0 사이에는 $x_0 \notin L \ni hx_0, d^\infty(x_0, L) = D/2$ 인 반공간 L 이 존재한다. 이 L 의 경계의 T -근방

$$\mathcal{L} := \{g \in G : d^\infty(\partial L, gx_0) < T\}$$

을 잡으면, id 와 h 를 잇는 S -경로는 반드시 \mathcal{L} 을 한번은 지나게 되어 있다. 이 시점을 h' 라고 하자. 만약 $h' \in \mathcal{C}_N(g)$ 라면 증명이 끝난다. 만약 아니라면,

$$x_0 \notin wgH \supsetneq \dots \supsetneq wg^N H \ni h'^{\pm 1}x_0$$

인 w 가 존재한다. 일단 $wg^N H \ni h'x_0$ 인 경우를 논하겠다. 나머지 경우도 논증은 비슷하다.

이때, $wg^{N-T}H$ 는 반드시 L 을 포함한다. 여기서 만약 $x, x' \notin wg^{N-T-20}H$ 라면, $x_0, x, x' \notin wg^{N-T-20}H \supsetneq wg^{N-T}H \ni h^{\pm 1}x_0$ 및 $d^\infty(x_0, wg^{N-T}H) \leq D/2$ 라는 사실로부터 $h \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(x_0, \{x, x'\})$ 라는 모순을 얻게 된다. 따라서 그럴 수 없고, x 혹은 x' 와 x_0 사이에는 최소한 $wgH \supsetneq \dots \supsetneq wg^{N-T-20}H$ 이라는 $0.5N$ 개 이상의 반공간이 위치한다. 이 반공간들을 id 와 h' 사이 S -경로가 넘어야 함은 물론이다. 이로부터 2 번 혹은 3 번 결과를 유도할 수 있다. \square

8. 더자세한 CAT(0) 기하학

補題 8.1. 모든 중점 그래프는 이분 그래프 (*bipartite graph*) 이다.

Proof. 모순을 이끌어내기 위해, 어떤 그래프 Γ 에 홀수 길이 사이클이 있다고 가정하자. 그런 홀수 사이클 중 가장 길이가 작은 것을 잡고, 그 꼭짓점을 순서대로 $v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}$ 이라고 이름붙이자. 이 때 만약 $d(v_1, v_n)$ 이 n 보다 작을 경우, 그 거리를 실현시키면서 v_1 에서 v_n 으로 향하는 측지선을 P 라고 잡았을 때, $v_1 \cdots v_n \cdots v_{n-1} \cdots v_2 \cdots v_1$ 및 $v_1 \cdots v_n \cdots v_{n+1} \cdots v_{2n+1} \cdots v_1$ 은 둘 다 길이 $2n$ 이하이고, 둘 중 하나는 길이가 홀수이다. 이는 $v_1 - v_2 - \dots - v_{2n+1} - v_1$ 이 최소 홀수 길이 사이클이라는 사실에 모순이다. 따라서 $d(v_1, v_n) = n$ 이 성립한다.

마찬가지로 이유로 $d(v_{n+1}, v_1) = n$ 이 성립한다. 물론 $d(v_n, v_{n+1}) = 1$ 이다. 이제 v_1, v_n, v_{n+1} 의 중점 m 을 잡으려고 하면, $d(v_n, m) = \frac{1}{2}[n + 1 - n] = 1/2$ 라는 계산이나온다. 이러한 거리를 만족하는 꼭짓점 m 은 존재하지 않기 때문에, Γ 는 중점 그래프가 아니다. \square

補題 8.2 (사각형 보조 정리). 중점 그래프 Γ 상의 두 꼭짓점 x, y 을 잇는 측지선 두 개

$$\gamma_1 = (x = p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n = y), \gamma_2 = (x = q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n = y),$$

를 생각하자. 그러면 $d(x, r) = n - 2$ 이면서 p_{n-1} 및 q_{n-1} 과 동시에 인접해 있는 꼭짓점 r 이 존재한다.

Proof. 먼저, $p_{n-1} = q_{n-1}$ 인 경우에는 $r = p_{n-2}$ 로 잡으면 된다.

만약 $p_{n-1} \neq q_{n-1}$ 이라면, 그 둘 간의 거리는 정확히 2이다. 왜냐면 $p_{n-1} - y - q_{n-1}$ 라는 경로가 존재하기에 $d(p_{n-1}, q_{n-1})$ 는 2 보다 작거나 같으며, 또 그래프의 이분성 때문에 $d(p_{n-1}, q_{n-1})$ 는 짝수여야 하기 때문이다.

이 경우, x, p_{n-1}, q_{n-1} 의 중점 r 을 잡으면,

$$\begin{aligned} d(x, r) &= \frac{1}{2}[d(x, p_{n-1}) + d(x, q_{n-1}) - d(p_{n-1}, q_{n-1})] = n - 2, \\ d(p_{n-1}, r) &= \frac{1}{2}[d(x, p_{n-1}) + d(p_{n-1}, q_{n-1}) - d(x, q_{n-1})] = 1, \\ d(q_{n-1}, r) &= \frac{1}{2}[d(x, q_{n-1}) + d(p_{n-1}, q_{n-1}) - d(x, p_{n-1})] = 1 \end{aligned}$$

을 만족한다. 이로써 증명이 끝났다. \square

이제 초평면의 모양을 더 자세히 이해해보자. 그래프 안의 4-사이클이란, 서로 다른 모서리 e_1, e_2, e_3, e_4 및 서로 다른 꼭짓점 v_1, v_2, v_3, v_4 가

$$e_i = \overline{v_i v_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad e_4 = \overline{v_4 v_1}$$

형태로 배열되어 있는 부분 그래프임을 기억하라.

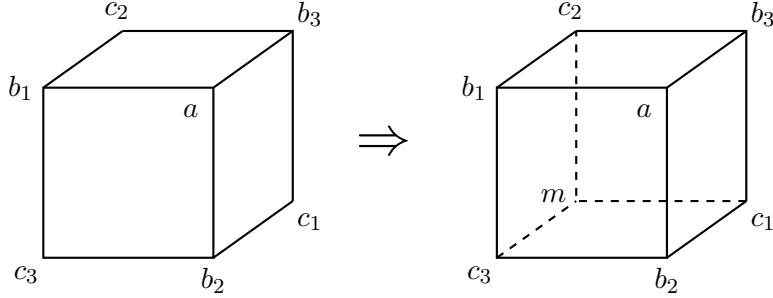


FIGURE 9. 보조정리 8.3에서의 상황도

補題 8.3. 중점그래프 Γ 안의 점들 $a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 에 대해, $\square ab_1c_2b_3, \square ab_2c_3b_1, \square ab_3c_1b_2$ 가 모두 4-사이클을 이룬다고 가정하자. 그러면 $\square mc_1b_2c_3, \square mc_2b_3c_1, \square mc_3b_1c_2$ 가 각각 4-사이클이게끔 하는 m 라는 점이 존재하며, 이 8개의 점은 모두 서로 다르다.

Proof. 먼저 가정을 만족하는 $a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 7개의 점은 서로 결코 같을 수 없다. 예를 들어, a, b_1, c_2, b_3 끼리 같을 수 없음은 4-사이클의 정의로부터 바로나온다. 또, 만약 c_1 와 c_2 가 같다면, $a, b_1, b_2, b_3, c_1 = c_2$ 가 $K_{2,3}$ 그래프를 이룬다는 것을 알 수 있다. 이는 곧 a 도 c_1 도 서로 다른 세 점 b_1, b_2, b_3 의 중점이 된다는 것이다. 이는 중점의 유일성에 모순이므로 불가능하다. 비슷한 논리로, c_1, c_2, c_3 은 모두 다르다. 이로써 7개의 점이다 다르다는 것을 알 수 있다.

특히, c_1, c_2, c_3 은 서로 다른 점이면서 길이 2짜리 경로로 서로 연결되어 있기에, 서로 간의 거리가 2이다. 이 세 점의 중점 m 를 잡으면, 세 점으로부터 거리 1에 있게 된다. 이 점이 만약 b_1 과 같다면, a, c_1, b_1, b_2, b_3 이 $K_{2,3}$ 그래프를 형성해 마찬가지로 모순이 된다. 따라서 m 은 b_1 일수 없고, 마찬가지로 b_2 일수도 b_3 일수도 없다. 또한 a, c_1, c_2, c_3 일수도 없음은 훌짜성에 의해 분명하다. 이로써, 8개의 점이 모두 서로 다르다는 것을 확인했다. 아울러 $\square mc_ib_{i+1}c_{i+2}(\text{mod } i)$ 가 4-사이클이라는 것은 분명하다. \square

補題 8.4. 중점그래프 Γ 안에 4-사이클

$$C_1 = \square u_0u_1v_1v_0, C_2 = \square u_1u_2v_2v_1, \dots, C_n = \square u_{n-1}u_nv_nv_{n-1}$$

이주어져 있는데, 이때 C_{i-1} 과 C_i 는 변 $\overrightarrow{u_iv_i}$ 를 공유한다고 하자. 더하여, $d_\Gamma(\overline{v_0u_0}, \overline{v_nu_n}) = 1$ 이라고 가정하자. 그러면 $\square v_0u_0u_nv_n$ 은 4-사이클이다.

Proof. 필요하다면 v_i 와 u_i 의 라벨링을 뒤바꿔, v_0 이 $\overline{v_nv_n}$ 로부터 거리 1에 있고 u_0 은 $\overline{v_nv_n}$ 에 포함되지 않는다고 가정하겠다. 이제 주어진 명제를 n 및 $S := \sum_{i=1}^n d(v_0, v_i)$ 에 대한 귀납법으로 증명하겠다.

먼저 n 이 1인 경우는 자명하고, $n = 2$ 이 불가능함도 어렵지 않게 확인할 수 있다.

이제 n 이 2보다 큰 경우를 논하겠다. 먼저 $i \in \{1, \dots, n\}$ 중 $d(v_0, v_i)$ 가 최대가 되는 i 를 하나 잡자. 이 때, 만약 최댓값이 1이라면, 이는 $d(v_0, v_2) = 0$, 즉 $v_0 = v_2$ 임을 의미한다. 이 경우, u_0 와 u_2 는 일치해야 한다. 만약 그렇지 않을 경우, $v_0 = v_2, u_1, v_1, u_0, u_2$ 는 $K_{2,3}$ 부분그래프의 꼭짓점이 되기 때문에 Γ 가 중점그래프라는 사실에 모순이기 때문이다. 이제 C_3, \dots, C_n 에 대해 귀납가정을 적용하면 $\overrightarrow{v_0u_0} = \overrightarrow{v_2u_2}$ 와 $\overrightarrow{v_nv_n}$ 이 어떤 4-사이클의 평행한 두 변이라는 결론을 이끌어 낼 수 있다.

만약 최댓값이 2 이상이라면, 잡은 i 는 1보다 크고 n 보다 작을 것이다. 그러면 $d(v_0, v_{i-1})$ 및 $d(v_0, v_{i+1})$ 는 $d(v_0, v_i)$ 와 1만큼 차이나는데, $d(v_0, v_i)$ 의 최대성으로부터 $d(v_0, v_{i-1}) = d(v_0, v_i + 1) = d(v_0, v_i) - 1$ 임을 관찰할 수 있다. 이 때 만약 $v_{i-1} = v_{i+1}$ 라면, C_i, C_{i+1} 에 귀납가정을 적용해

$\overrightarrow{v_{i-1}u_{i-1}} = \overrightarrow{v_{i+1}u_{i+1}}$ 를 이끌어낸뒤 $C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i+2}, \dots, C_n$ 에 귀납가정을 적용해 $\overrightarrow{v_0u_0} = \overrightarrow{v_nu_n}$ 임을 결론낼수있다.

이제 v_{i-1} 와 v_{i+1} 가 다른점인경우를 다루자. 사각형보조정리를 이용하면 $\square v_{i-1}v_iv_{i+1}v'$ 가 4-사이클이면서 $d(v_0, v') = d(v_0, v_i) - 2$ 이게끔하는꼭짓점 v' 가존재한다. 이제 보조정리 8.3을 사용하면, $C_i := \square v_{i-1}v'u'u_{i-1}$, $C_{i+1} := \square v_{i+1}v'u'u_{i+1}$ 가둘다 4-사이클이게끔하는점 u' 가존재한다. 이제 순차적으로 인접한 4-사이클들 $C_1, \dots, C_{i-1}, C'_i, C'_{i+1}, \dots, C_n$ 에 대해서는 귀납가정을 적용할수있다. 왜냐면 $d(v_0, v') < d(v_0, v_{i+1})$ 이기때문이다. 이로써증명이끝난다. \square

이로부터 다음을 쉽게 관찰할수있다.

系 8.1. 중점그래프 Γ 의초평면 \mathfrak{h} 를하나생각하자.

- (1) 임의의 $v \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 대해, v 에 인접한모서리 $e_{\mathfrak{h}}(v) \in \mathfrak{h}$ 는 유일하게 존재한다. 이때, $e_{\mathfrak{h}}(v)$ 의 다른한꼭짓점을 $\iota_{\mathfrak{h}}(v)$ 라고 적겠다.
- (2) 그래프 Γ 안의 어떤 4-사이클의 모서리를 순서대로 e_1, e_2, e_3, e_4 라고 했을 때, 만약 $e_1 \in \mathfrak{h}$ 라면 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \cap \mathfrak{h} = \{e_1, e_3\}$ 가 정확히 성립한다.
- (3) 만약 두 꼭짓점 $v, w \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 가 $N(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ 에서 서로 이웃한다면, $\iota_{\mathfrak{h}}(v)$ 및 $\iota_{\mathfrak{h}}(w)$ 또한 그러하다.
- (4) 그래프 Γ 안의 어떤 4-사이클의 네 꼭짓점 중 어느 세개가 $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 들어있다면, 나머지 하나또한 $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 들어있다.

Proof. (1) 꼭짓점 $v \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 인접한 \mathfrak{h} 의 원소 $e = \overrightarrow{uv}$, $e' = \overrightarrow{u'v}$ 를 생각하자. 초평면 \mathfrak{h} 의 정의상, 연달아인접한 4-사이클

$$C_1 = \square uu_1v_1v, C_2 = \square u_1u_2v_2v_1, \dots, C_{n-1} = \square u_{n-2}u_{n-1}v_{n-1}v_{n-2}, C_n = \square u_{n-1}u'vv_{n-1}$$

이 존재한다. 이때 보조정리 8.4로부터, $\square u_{n-1}uvv_{n-1}$ 또한 4-사이클임을 알수있다. 만약이때 v' 와 v 가 일치하지 않는다면, $u, u', v_{n-1}, v, u_{n-1}$ 가 $K_{2,3}$ 부분그래프를 형성하므로 모순이다. 따라서 $u' = u$ 라고 결론지을수있다.

- (2) (1)로부터 곧바로 따라나온다.
- (3) (2)로부터 곧바로 따라나온다.
- (4) 어떤 4-사이클 $\square xyzw$ 에 대해 $x, y, z \in \mathfrak{h}$ 라고 하자. 만약 $\iota_{\mathfrak{h}}(x), \iota_{\mathfrak{h}}(y), \iota_{\mathfrak{h}}(z)$ 중 그어느것이라도 $\{x, y, z, w\}$ 에 속한다면, 이는 곧 $\square xyzw$ 의 네변 중 평행한 어느 두 변이 \mathfrak{h} 에 속한다는 뜻이다. 그 경우 w 는 자동으로 $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 들어간다. 만약 그렇지 않다면, (3)에 의해 $\square xy\iota_{\mathfrak{h}}(y)\iota_{\mathfrak{h}}(x)$ 및 $\square yz\iota_{\mathfrak{h}}(z)\iota_{\mathfrak{h}}(y)$ 모두 4-사이클이된다. 이제 보조정리 8.3을 적용하면, $\square xwv\iota_{\mathfrak{h}}(x)$ 및 $\square zwv\iota_{\mathfrak{h}}(z)$ 가 4-사이클을 이루게끔 꼭짓점 v 를 잡을수있다. 이는 곧 $w \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 및 $v = \iota_{\mathfrak{h}}(w)$ 를 의미하는 것이다. \square

이제 초평면에 관해 앞에서 주장한 사실들을 증명하겠다. 그전에 개념하나를 도입하자. 초평면 \mathfrak{h} 가 주어졌을 때, \mathfrak{h} 의 꼭짓점집합이 생성해내는 Γ 의 부분그래프 $N(\mathfrak{h})$ 를 \mathfrak{h} 의 운반함 (carrier) 혹은 근방 (neighborhood) 라고 한다. 다시 말해, $N(\mathfrak{h})$ 의 꼭짓점집합은 \mathfrak{h} 의 것과 일치하고, $N(\mathfrak{h})$ 의 모서리집합은 $\{xy \in \mathcal{E}(\Gamma) : x, y \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})\}$ 이다.

補題 8.5. 중점그래프 Γ 의초평면 \mathfrak{h} 를하나생각하자. 그러면 다음이 성립한다.

- (1) 초평면 \mathfrak{h} 의 근방은 볼록하다 (convex). 다시 말해, 근방안의 두 꼭짓점을 잇는 Γ -측지선은 반드시 근방안에 갇혀있다.
- (2) 초평면 \mathfrak{h} 는 전체공간을 정확히 둘로 나누고, 따라서 \mathfrak{h} 에면한반공간은 정확히 두개다.

(3) 초평면 \mathfrak{h} 에 들어있는 임의의 모서리 $\overline{xy}, \overline{vw} \in \mathfrak{h}$ 에 대해, $d(x, v) = d(y, w)$ 이다.

Proof. (1) 먼저, $x, y \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 대해, $N(\mathfrak{h})$ 안의 경로들을 이용해 $d_{\mathfrak{h}}(x, y)$ 를 정의하겠다. 즉, $d_{\mathfrak{h}}(x, y) \leq n$ 라는 것은 x 와 y 를 잇는 길이 n 이하인 $N(\mathfrak{h})$ 안의 경로가 존재한다는 것이다.

이제 임의의 $x, y \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 대해 $I(x, y) \subseteq N(\mathfrak{h})$ 임을 $d_{\mathfrak{h}}(x, y)$ 에 대한 귀납법으로 증명하겠다. 먼저 $d_{\mathfrak{h}}(x, y) = 0$, 즉 x 와 y 가 일치할 때는 더 물을 것이 없다. 다음으로 $d_{\mathfrak{h}}(x, y) = 1$, 즉 x 와 y 가 인접한 경우도 더 물을 것이 없다.

이제 $d_{\mathfrak{h}}(x, y) \leq n - 1$ 일 때 명제가 성립한다고 가정한 뒤, $d_{\mathfrak{h}}(x, y) = n$ 인 경우를 생각해보자. 그리고 길이 $d(x, y)$ 짜리 Γ -측지선 ($x = p_0, p_1, \dots, p_{d(x,y)} = y$)를 임의로 잡자. 우리의 목표는 이 측지선이 $N(\mathfrak{h})$ 에 포함됨을 보이는 것이다.

여기서, x 와 y 사이를 잇는 길이 n 짜리 $N(\mathfrak{h})$ -측지선 ($x = q_0, q_1, \dots, q_n = y$)를 하나 생각할 수 있다. 그러면 (q_1, \dots, q_n) 는 길이 $n - 1$ 짜리 $N(\mathfrak{h})$ -측지선이면서 Γ -측지선이기도 하다. 이는 q_1 과 y 사이에는 귀납가정을 적용할 수 있기 때문이다.

한편, $d(q_1, y)$ 는 $d(x, y)$ 와 정확히 1만큼 차이 나야 한다. 먼저 $d(x, y) = n - 2$ 가 불가능함을 설명하고자 한다. 귀류법을 위해 $d(x, y) = n - 2$ 라고 가정해보자. 이는 $(q_1, q_0 = p_0, p_1, \dots, p_{n-2})$ 및 (q_1, q_2, \dots, q_n) 가 q_1 와 y 를 잇는 Γ -측지선임을 뜻한다. 사각형 보조정리를 적용하면, x 및 q_2 에 동시에 인접하는 꼭짓점 u 중 $d(u, y) = n - 3$ 인 것이 존재한다는 뜻이다. 여기서 x 와 q_2 는 y 로부터의 $d_{\mathfrak{h}}$ -거리가 다르기 때문에 다른 꼭짓점이며, q_1 과 u 또한 y 로부터의 d -거리가 다르기 때문에 다른 꼭짓점이다. 즉 $\square xq_1q_2u$ 는 4-사이클이며, 그 꼭짓점 중 최소 세 개는 \mathfrak{h} 의 꼭짓점이다. 따름정리 8.1(4)에 의해, u 또한 \mathfrak{h} 의 꼭짓점이 된다. 따라서

$$d_{\mathfrak{h}}(x, y) \leq 1 + d_{\mathfrak{h}}(u, y) = n - 2$$

를 얻게 되는데, 이는 가정에 모순이다. 따라서, $d(x, y) = n - 2$ 는 불가능하다.

따라서 $d(x, y) = n$ 임을 알 수 있고, (p_0, \dots, p_n) 및 (q_0, \dots, q_n) 은 x 와 y 사이를 잇는 두 Γ -측지선이다. 이제 사각형 보조정리를 적용하면, p_1 및 q_1 에 이웃한 꼭짓점 u 중 $d(u, y) = n - 2$ 인 것을 잡을 수 있다. 만약 이 때 $p_1 = q_1$ 라면, $d_{\mathfrak{h}}(q_1, y) = n - 1$ 이므로 귀납가정에 의해 $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 임을 결론지을 수 있다. 따라서 $p_1 \neq q_1$ 인 경우만 남았다. 이 경우 $\square p_1 x q_1 u$ 는 4-사이클이 된다.

이 때, $d(q_1, u) + d(u, y) = 1 + n - 2 = n - 1 = d(q_1, y)$ 이므로, u 는 q_1 과 y 사이를 잇는 어느 Γ -측지선 위에 있다. 이 측지선에는 귀납가정을 적용할 수 있음을 상기하라. 이에 $u \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 임을 결론지을 수 있다. 즉 $\square p_1 x q_1 u$ 의 꼭짓점 중 x, q_1, u 가 \mathfrak{h} 의 꼭짓점인 것이다. 그러면 따름정리 8.1(4)에 의해, $p_1 \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 또한 성립한다. 이 말인즉

$$d_{\mathfrak{h}}(p_1, y) \leq 1 + d_{\mathfrak{h}}(u, y) = n - 1$$

라는 것이고, 귀납가정에 의해 p_1, \dots, p_n 모두 \mathfrak{h} 에 포함되어 있다. 이로써 증명이 끝난다.

(2) 초평면 \mathfrak{h} 에 들어있는 모서리 $e = \overline{xy}$ 를 하나 편의 대로 고르자. 이제 각 점 $v \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해

$$f(v) := d(v, x) - d(v, y)$$

라고 정의된 함수를 고려할 것이다. 홀짝성 및 삼각부등식에 의해, $f(v) \in \{+1, -1\}$ 임은 쉽게 확인할 수 있다. 또, $\{v : f(v) = -1\}$ 안의 임의의 꼭짓점으로부터 x 까지 측지선을 그었을 때, 그 측지선은 $\{v : f(v) = -1\}$ 안에 있어야 한다. 실제로, 그런 측지선 $(p_0, p_1, \dots, p_n = x)$ 이 주어졌

을때,

$$d(p_i, x) = n - i, \quad d(p_1, y) \geq d(x, y) - d(x, p_i) \geq (n + 1) - i$$

이기때문이다.

이제주장하고싶은것은, $v, w \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에대해 $\overline{vw} \in \mathfrak{h}$ 일필요충분조건이 $f(v) \neq f(w)$ 라는 것이다. 편의상 $f(v) = -1$ 인경우에집중하겠다. 이를위해 $d(v, x)$ 에대한귀납법을쓸것이다.

먼저, $d(v, x) = 0$, 즉 $v = x$ 인경우를살펴보자. 이때 $f(v) = -1 \neq 1 = f(w)$ 라는조건은곧 $x = v$ 및 $y = w$ 임을의미한다. 이경우 $\overline{vw} = \overline{xy} \in \mathfrak{h}$ 임은분명하다. 역으로, 만약 \overline{vw} 가 \mathfrak{h} 에 들어있으면따름정리 8.1(1) 에의해 $w = y$ 임을알수있다. 이때 $f(v) = -1$ 및 $f(w) = 1$ 임은 분명하다.

다음으로, $d(v, x) \leq n - 1$ 에대해주장을가정한뒤, $d(v, x) = n$ 인경우를들여다보겠다. 먼저 $f(v) = -1$ 및 $f(w) = 1$ 을가정해보자. 이때 $d(v, y) = d(v, x) - f(v) = n + 1$ 이성립하고, 이값은 $d(w, y)$ 와정확히 1 만큼차이난다. 만약 $d(w, y) = n + 2$ 라면, $f(w) = d(w, x) - d(w, y) \leq d(w, v) + d(v, x) - d(w, y) \leq 1 + n - (n + 1) = 0$ 이되어, $f(w) = 1$ 에위배된다. 따라서 $d(w, y) = n$ 임을알수있다. 다시말해 $d(v, y) = d(v, x) + d(x, y) = d(v, w) + d(w, y)$ 이며, w 도 x 도 $I(v, y)$ 에포함된다는것을알수있다.

이를활용하기위해, $(v, w, p_2, \dots, p_n, y)$ 및 $(v, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, x, y)$ 라는두 Γ -측지선을고려하자. 이제사각형보조정리를사용하면, $d(u, w) = d(u, q_1) = 1$, $d(y, u) = n - 1$ 인꼭짓점 u 가존재한다. 물론이때 u 와 v 는다른점이다. 더하여, $d(x, q_1) = n - 1$ 인반면 $d(x, w) = d(w, y) + f(w) = n + 1$ 이라는사실로부터 $q_1 \neq w$ 임도알수있다. 즉 $\square vq_1uw$ 는실제로 4-사이클이다.

이때, $d(q_1, x) = n - 1$ 이고 $n = d(v, y) - 1 \leq d(q_1, y) \leq d(q_1, x) + 1 = n$ 임을관찰할수 있다. 더하여, $d(u, y) = n - 1$ 이고 $d(u, x) \geq d(y, x) - 1 = n$ 임을알수있다. 종합하자면, $f(q_1) = -1$ 이고 $f(u) = 1$ 이다. 이제귀납가정을 $\overline{q_1u}$ 에적용하면 $\overline{q_1u} \in \mathfrak{h}$ 을얻는다. 이모서리와 4-사이클안에서평행한변 \overline{vw} 또한 \mathfrak{h} 에속하는것은물론이다.

역으로, \overline{vw} 가 \mathfrak{h} 에속한다는것을가정해보자. 이때 v 와 x 를잇는 Γ -측지선 ($v = p_0, \dots, p_n = v$) 를하나잡자. (1) 에의해이측지선전체는 $N(\mathfrak{h})$ 에들어있으며, 또측지선의전체꼭짓점에서 f 값이항상 -1 로일정하다. 이제만약 $p_1 = w$ 라면, $\overline{p_1v}$ 는 \mathfrak{h} 의원소이면서, $f(p_1) = -1$ 이고 $d(p_1, x) = n - 1$ 이다. 귀납가정에의해 $f(v) = 1$ 이되는데, 이는모순이다. 따라서 p_1 과 w 는다른점이다. 이것이 v 와 x 를임의의점에대해성립하므로, w 는 v 에비해 x 로부터멀리있는점이고 $d(w, x) = d(v, x) + 1 = n + 1$ 이다.

한편, 다시 Γ -측지선 ($v = p_0, \dots, p_n = v$) 를하나잡자. 이측지선위에서 f 값이 -1 이므로, 귀납가정에의해각각의 $\overline{p_ip_{i+1}}$ 는 \mathfrak{h} 에속하지않는모서리이다. 이제 $q_i := \iota_{\mathfrak{h}}(p_i)$ 로잡자. 그러면따름정리 8.1(3) 에의해, (w, q_1, \dots, q_n) 은 Γ -경로가된다. 더하여, $q_n := \iota_{\mathfrak{h}}(x) = y$ 가 성립한다. 이로부터 $d(w, y) \leq n$ 임을안다. 이를종합하면 $f(w) = 1$ 임을알수있다. 이로써 $f(v) = -1 \neq f(w) = 1$ 과 $\overline{vw} \in \mathfrak{h}$ 가동치임을확인했다.

이로써, $\{v : f(v) = 1\}$ 와 $\{v : f(v) = -1\}$ 사이를잇는모서리는반드시 \mathfrak{h} 안에들어있음을확인했다. 따라서두집합은 $\Gamma \setminus \mathfrak{h}$ 에서분리되어있다. 더욱이, $\{v : f(v) = \pm 1\}$ 의점들은 $\{v : f(v) = \pm 1\}$ 안에서이어질수있음도측지선을이용해앞에서확인했다. 이때사용되는모서리들은 \mathfrak{h} 밖에있는것들이므로, $\{v : f(v) = \pm 1\}$ 가 $\Gamma \setminus \mathfrak{h}$ 에서연결되어있음을결론지을수있다.

(3) 위논증에서, $\overline{xy} \in \mathfrak{h}$ 를하나고정한뒤 $\overline{vw} \in \mathfrak{h}$ 를뽑으면

$$d(v, x) - d(v, y) = f(v) \neq f(w) = d(w, x) - d(w, y)$$

임을확인했다. 먼저 $f(v) = -1$ 인경우에대해다루겠다. 그말인즉 $f(w) = 1$ 임을가정하겠다는말과같다. 여기서 $d(v, y)$ 와 $d(w, y)$ 는정확히 1 차이나는데, 만약 $d(w, y) = d(v, y) + 1$ 이라면

$$d(w, x) - d(w, y) \leq d(v, x) + 1 - d(w, y) \leq d(v, x) - d(v, y) = f(v)$$

가되어모순이다. 따라서 $d(w, y) = d(v, y) - 1 = d(v, x)$ 이다. 또한 $d(w, x) = d(w, y) + f(w) = d(w, y) + 1 = d(v, x) + 1 = d(v, y)$ 도성립한다. $f(v) = 1$ 인경우도비슷하게증명할수있다.

□

REFERENCES

- [AB87] Michael Aizenman and David J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Comm. Math. Phys.*, 108(3):489–526, 1987.
- [Ago13] Ian Agol. The virtual Haken conjecture. *Doc. Math.*, 18:1045–1087, 2013. With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning.
- [AKN87] M. Aizenman, H. Kesten, and C. M. Newman. Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation. *Comm. Math. Phys.*, 111(4):505–531, 1987.
- [AV08] Tonči Antunović and Ivan Veselić. Sharpness of the phase transition and exponential decay of the subcritical cluster size for percolation and quasi-transitive graphs. *J. Stat. Phys.*, 130(5):983–1009, 2008.
- [BB99] Eric Babson and Itai Benjamini. Cut sets and normed cohomology with applications to percolation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(2):589–597, 1999.
- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:629–641, 1957.
- [BK89] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):501–505, 1989.
- [BLPS99] Itai Benjamini, Russell Lyons, Yuval Peres, and Oded Schramm. Critical percolation on any nonamenable group has no infinite clusters. *Ann. Probab.*, 27(3):1347–1356, 1999.
- [BS96] Itai Benjamini and Oded Schramm. Percolation beyond \mathbf{Z}^d , many questions and a few answers. *Electron. Comm. Probab.*, 1:no. 8, 71–82, 1996.
- [BS01] Itai Benjamini and Oded Schramm. Percolation in the hyperbolic plane. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2):487–507, 2001.
- [BW12] Nicolas Bergeron and Daniel T. Wise. A boundary criterion for cubulation. *Amer. J. Math.*, 134(3):843–859, 2012.
- [Che00] Victor Chepoi. Graphs of some CAT(0) complexes. *Adv. in Appl. Math.*, 24(2):125–179, 2000.
- [CS11] Pierre-Emmanuel Caprace and Michah Sageev. Rank rigidity for CAT(0) cube complexes. *Geom. Funct. Anal.*, 21(4):851–891, 2011.
- [CS25] Inhyeok Choi and Donggyun Seo. Percolation in acylindrically hyperbolic groups. *arXiv preprint arXiv:2508.08932*, 2025.
- [DC18] Hugo Duminil-Copin. Introduction to bernouli percolation. <https://www.ihes.fr/~duminil/publi/2017percolation.pdf>, 2018.
- [DCT16] Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 343(2):725–745, 2016.
- [FKG71] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22:89–103, 1971.

- [Gab05] D. Gaboriau. Invariant percolation and harmonic Dirichlet functions. *Geom. Funct. Anal.*, 15(5):1004–1051, 2005.
- [Gen24] Anthony Genevois. Algebraic properties of groups acting on median graphs. <https://sites.google.com/view/agenevois/books?authuser=0>, 2024.
- [Ger98] V. Gerasimov. Fixed-point-free actions on cubings [translation of *algebra, geometry, analysis and mathematical physics (russian) (novosibirsk, 1996)*, 91–109, 190, Izdat. Ross. Akad. Nauk Sibirsk. Otdel. Inst. Mat., Novosibirsk, 1997; MR1624115 (99c:20049)]. *Siberian Adv. Math.*, 8(3):36–58, 1998.
- [GKN92] A. Gandolfi, M. S. Keane, and C. M. Newman. Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses. *Probab. Theory Related Fields*, 92(4):511–527, 1992.
- [GN90] G. R. Grimmett and C. M. Newman. Percolation in $\infty + 1$ dimensions. In *Disorder in physical systems*, Oxford Sci. Publ., pages 167–190. Oxford Univ. Press, New York, 1990.
- [Gri89] Geoffrey Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Har60] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 56:13–20, 1960.
- [HP99] Olle Häggström and Yuval Peres. Monotonicity of uniqueness for percolation on Cayley graphs: all infinite clusters are born simultaneously. *Probab. Theory Related Fields*, 113(2):273–285, 1999.
- [Hut19] Tom Hutchcroft. Percolation on hyperbolic graphs. *Geom. Funct. Anal.*, 29(3):766–810, 2019.
- [Hut20] Tom Hutchcroft. Nonuniqueness and mean-field criticality for percolation on nonunimodular transitive graphs. *J. Amer. Math. Soc.*, 33(4):1101–1165, 2020.
- [Kes80] Harry Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Comm. Math. Phys.*, 74(1):41–59, 1980.
- [KM12] Jeremy Kahn and Vladimir Markovic. Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold. *Ann. of Math. (2)*, 175(3):1127–1190, 2012.
- [Lal98] Steven P. Lalley. Percolation on Fuchsian groups. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 34(2):151–177, 1998.
- [LP16] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on trees and networks*, volume 42 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, New York, 2016.
- [Lyo95] Russell Lyons. Random walks and the growth of groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(11):1361–1366, 1995.
- [Lyo00] Russell Lyons. Phase transitions on nonamenable graphs. volume 41, pages 1099–1126. 2000. Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.
- [Lyo13] Russell Lyons. Fixed price of groups and percolation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 33(1):183–185, 2013.
- [NS81] C. M. Newman and L. S. Schulman. Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.*, 26(3):613–628, 1981.
- [PSN00] Igor Pak and Tatiana Smirnova-Nagnibeda. On non-uniqueness of percolation on nonamenable Cayley graphs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(6):495–500, 2000.
- [Rol99] Martin Roller. Poc sets, median algebras and group actions. *Habilitationsschrift, arXiv preprint arXiv:1607.07747*, 1999.
- [Sag95] Michah Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 71(3):585–617, 1995.
- [Sch99] Roberto H. Schonmann. Stability of infinite clusters in supercritical percolation. *Probab. Theory Related Fields*, 113(2):287–300, 1999.
- [Van25] Hugo Vanneuville. Exponential decay of the volume for Bernoulli percolation: a proof via stochastic comparison. *Annales Henri Lebesgue*, 8:101–112, 2025.
- [vdBK85] J. van den Berg and H. Kesten. Inequalities with applications to percolation and reliability. *J. Appl. Probab.*, 22(3):556–569, 1985.

- [Woe00] Wolfgang Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*, volume 138 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

SCHOOL OF MATHEMATICS, KIAS, 85 HOEGI-RO, DONGDAEMUN-GU, SEOUL 02455, SOUTH KOREA
Email address: inhyeokchoi48@gmail.com