

CAT(0) 큐브 기하학과 삼투 현상

최인혁

ABSTRACT. 이 논문에서는 저자와 서동균이 [CS25]에서 논한 군의 캐일리 그래프 상에서의 삼투 현상을 CAT(0) 큐브 복합체의 언어로 재해석한다. 이와 함께, 군 위에서의 삼투 현상 이론 및 CAT(0) 큐브 기하학의 기초를 소개한다.

(Abstract in English) In [CS25], the author and Donggyun Seo proved the existence of infinitely many infinite clusters in a random subgraph of certain Cayley graphs. We provide an alternative proof of this result for CAT(0) cubical groups in terms of halfspaces.

This paper is expository, aiming at an invitation to percolation on infinite groups and/or CAT(0) cubical geometry.

핵심 단어. 삼투 현상, 캐일리 그래프, CAT(0) 큐브 복합체

1. 서론

기하군론의 핵심 철학 중 하나는, 어떤 군이 어떤 거리공간에 등거리사상으로 작용할 때, 그 작용의 성질로부터 군의 기하학을 읽어내는 것이다. 이때 흔히 사용되는 거리공간 중 CAT(0) 큐브 복합체 (CAT(0) cube complex)라는 것이 있다. 본 논문에서는 CAT(0) 큐브 복합체에 진정으로, 여-컴팩트하게, 그리고 기약적으로 작용하는 (proper, cocompact and irreducible action) 군의 기하학을 설명한다. 이를 바탕으로, 그러한 군의 캐일리 그래프 위에서의 삼투 현상이 만족하는 성질을 하나 증명한다.

이는 더 일반적인 세팅에서 이미 증명된 바 있음을 밝혀 둔다. 구체적으로 [CS25]에서 저자와 서동균은 비원통적이게 쌍곡적인 군(acylindrically hyperbolic group)에 대해 해당 결과를 증명했다. 본 논문에서 다루는 모든 군은 비원통적이게 쌍곡적이므로, 아래의 정리 A은 새로울 것이 없다. 그러나 정리 A의 증명을 CAT(0) 큐브 기하학으로 새롭게 적어낼 수 있다는 것이 요지이다. 따라서 본 논문은 (1) 큐브 기하학으로 독자를 초대하는 한편, (2) 쌍곡기하로 증명한 확률론 결과를 큐브 기하학으로 재해석하는 의의가 있다.

먼저 기하학적인 배경을 설정하겠다. 유한 생성 군 G 와 그 (대칭적인) 유한 생성 집합 S 가 주어졌을 때, G 의 원소들을 꼭짓점으로 하고, S 의 원소로 연관된 원소 쌍마다 모서리를 그릴 수 있다. 다시 말해, $g, h \in G$ 가 $g^{-1}h \in S$ 일 때마다 \overline{gh} 이라는 모서리를 그리겠다는 말이다. 이 그래프 $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ 를 S 에 대한 G 의 캐일리 그래프(Cayley graph)라고 부른다.

다음으로 확률과정을 하나 도입하겠다. 먼저 0과 1 사이 실수 p 를 하나 정하자. 이제 앞면이 나올 확률이 p , 뒷면이 나올 확률이 $1 - p$ 인 동전을 Γ 의 각 모서리에 하나씩 둔다. 모든 동전을 일제히 던져, 앞면이 나온 모서리는 남기고 뒷면이 나온 모서리는 삭제한다. 이때 각 동전의 결과는 독립적이라는 가정을 하겠다. 이런 삭제 과정 이후에 남은 부분그래프를 $\Gamma[p]$ 라고 적겠다. 그러면 $\Gamma[p]$ 는 결정적인 그래프가 아닌 확률 변수가 된다. 이 확률적인 그래프의 연결 성분들 중, 무한히 큰 성분이 몇 개가 생기는지를 답하고자 한다. 이 논문에서는 다음을 증명한다.

Theorem A. $CAT(0)$ 큐브 복합체 X 및 유한 생성 군 G 를 하나씩 생각하자. 이때, G 가 X 에 진정으로, 여-컴팩트하게, 그리고 기약적으로 작용한다고 가정하자. 더하여, G 안에는 정수군 \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군(*finite-index subgroup*)을 가지지 않는다고 가정하자.

그러면 G 의 유한 생성 집합 S 각각마다 실수 $0 < p < 1$ 이 존재하여 G 의 케일리 그래프 $\Gamma = Cay(G, S)$ 의 p -랜덤 부분그래프 $\Gamma[p]$ 의 무한 연결성분이 무한히 많을 확률이 1이다.

위에서 다른 확률 과정을 **삼투 과정(percolation process)**이라고 부른다. 그래프 위에서의 삼투 과정과 $CAT(0)$ 큐브 기하학에 관한 방대한 이론을 다 소개할 수는 없겠으나, 위 정리를 증명하는 데 필요한 기초만큼은 모두 설명하겠다. 여기에 새로운 것은 전혀 없고, 다음 참고문헌들에서 추린 것이다.

- Geoffrey Grimmett, Percolation [BK89].
- Hugo Duminil-Copin, Introduction to Bernoulli percolation [DC18].
- Wolfgang Woess, Random walks on infinite graphs and groups [Woe00].
- Russell Lyons and Yuval Peres, Probability on trees and networks [LP16].
- Thomas Hutchcroft, Percolation on hyperbolic graphs [Hut19].
- Michah Sageev, Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes [Sag95].
- Pierre-Emmanuel Caprace and Michah Sageev, Rank rigidity for $CAT(0)$ cube complexes [CS11].
- Anthony Genevois, Algebraic properties of groups acting on median graphs [Gen24].

삼투 과정론은 다음 두 장에서 논의한다. 2장에서는 삼투 과정론을 빠르게 소개한 뒤 논의를 전개할 배경을 설명한다. 3장에서는 $CAT(0)$ 큐브 복합체 위의 좋은 군 작용으로부터 기대할 수 있는 기하학적인 성질을 두 개 소개하고, 이 성질들을 이용해 삼투 과정에 관한 결과를 유도한다.

이어서 $CAT(0)$ 큐브 기하학을 다룬다. 4장에서는 $CAT(0)$ 큐브 복합체와 사실상 동등한 객체라고 볼 수 있는 중점그래프(median graph)를 소개한다. 5장에서는 중점그래프 기하학에서 아주 중요한 개념인 초평면(hyperplane), 반공간(halfspace) 및 그 사슬(chain)을 공부한다. 그후 삼투 과정에 필요한 $CAT(0)$ 큐브 복합체의 기하학적인 성질, 이를테면 마법 보조정리(명제 6.1)를 6장 및 7장에서 증명한다. 8장에서는 좀 더 자세한 $CAT(0)$ 큐브 기하학을 다룬다.

이 논문에서 새로운 것은 오직 6장 및 7장뿐이니 원한다면 3.1절만 본 뒤 이것으로 넘어가도 괜찮다. 또, 삼투 과정론 부분과 $CAT(0)$ 큐브 기하학 부분은 따로따로 보아도 크게 무리가 없다.

2. 배경 설명

이 장에서는 우리가 다룰 문제를 설정하고 그 역사를 개괄하는데, 그 어떤 것도 증명하지 않을 것이다. 내용적으로는 2.1절만 읽으면 4장 이후를 읽는 데 지장은 없다. 그럼에도, 삼투 과정을 처음 접하는 독자들은 이 장 전체를 가볍게 훑어 보았으면 한다.

2.1. 그래프 이 논문에서 그래프(graph)란 꼭짓점 집합 \mathcal{V} 와 모서리 집합

$$\mathcal{E} \subseteq \binom{\mathcal{V}}{2} := \{S \subseteq \mathcal{V} : |S| = 2\}$$

이라는 두 데이터를 결합한 개념이다. 이 관습에서는 어떤 모서리가 한 꼭짓점에만 매달려 있거나, 혹은 여러 개의 모서리가 같은 두 점 사이를 잇는 것은 허용하지 않는다.

어떤 모서리 $e = \{v, w\} \in \mathcal{E}$ 가 주어졌을 때 v 및 w 를 e 의 **끝점(endpoint)**이라고 부른다. 이 경우 관습적으로 $e = \overline{vw}$ 와 같이 적는다. 또, 어떤 두 모서리 $e, f \in \mathcal{E}$ 가 끝점을 하나 공유할 때, 두 모서리가

인접해 있다(adjacent)고 한다. 두 꼭짓점 v, w 가 어떤 모서리로 이어져 있을 때도 두 꼭짓점이 인접해 있다고 하고, $v \sim w$ 로 적는다.

꼭짓점 부분집합 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 가 주어져 있을 때,

$$\partial_{\mathcal{E}} A := \{\overline{xy} \in \mathcal{E}(\Gamma) : x \in A \text{이고 } y \notin A\}$$

를 A 의 경계 혹은 가장자리(boundary)라고 부른다. 위 정의에서는 모서리를 모은 반면

$$\partial_{\mathcal{V}} A := \partial_{\mathcal{E}} A \cap A = \{x \in A : x \sim y \text{인 } A \text{ 밖의 꼭짓점 } y \notin A \text{가 존재함}\}$$

또한 A 의 경계 또는 가장자리라고 부른다. 맥락상 혼동의 여지가 없을 때는 간단히 ∂A 라고 적겠다.

그래프 $\Gamma = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma))$ 의 모서리 일부 $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(\Gamma)$ 를 가지고 만든 다른 그래프 $\Gamma' = (\mathcal{V}, \mathcal{E}')$ 를 Γ 의 부분그래프(subgraph)라고 부른다. 이때,

$$\Gamma \setminus \Gamma' := (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma) \setminus \mathcal{E}')$$

로 정의한다.

그래프 Γ 의 어떤 꼭짓점들 v_0, v_1, \dots, v_n 에 대해, 만약 $e_1 := \overline{v_0v_1}, \dots, e_n := \overline{v_{n-1}v_n}$ 이 모두 Γ 의 모서리로 나타난다면, 그래프 $\Gamma' := (\{v_0, \dots, v_n\}, \{e_1, \dots, e_n\})$ 를 Γ 위의 길이 n 짜리 경로(path)라고 부른다. 이때 $\text{len}(\Gamma') = n$ 으로 정의한다.

위에서 만약 경로 Γ' 의 시작점과 끝점이 같다면, Γ' 를 회로(circuit)라고 부른다. 다시 말해, 어떤 꼭짓점들 v_1, \dots, v_n 에 대해 만약 $e_1 := \overline{v_nv_1}, \dots, e_n := \overline{v_{n-1}v_n}$ 이 모두 Γ 의 모서리로 나타난다면, $\Gamma' := (\{v_0, \dots, v_n\}, \{e_1, \dots, e_n\})$ 를 Γ 위의 길이 n 짜리 회로라고 부른다. 만약 여기에 더해 v_1, \dots, v_n 이 모두 서로 다른 꼭짓점이라면, Γ' 를 길이 n 짜리 사이클(cycle) 혹은 n -사이클이라고 부른다.

그래프 Γ 에서 두 집합 $A, B \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 가 Γ 안의 어떤 경로로 이어져 있으면 $A \leftrightarrow_{\Gamma} B$ 라고 적는다. 이제 Γ 가 연결되어 있다(connected)는 것은 임의의 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해 $x \leftrightarrow_{\Gamma} y$ 라는 뜻이다. 어떤 그래프의 각각의 꼭짓점 혹은 모서리마다 그것을 포함하는 연결된 부분그래프를 찾아줄 수 있는데, 이를 그 꼭짓점 혹은 모서리의 연결성분(connected component)이라고 한다. 모든 그래프의 꼭짓점 집합 및 모서리 집합은 연결성분들로 분할된다.

그래프 Γ 가 이분 그래프(bipartite graph)라는 것은, Γ 의 모든 모서리가 A 의 어느 점과 B 의 어느 점 사이를 잇도록 하는 $\mathcal{V}(\Gamma)$ 의 분할 $A \sqcup B$ 가 존재한다는 뜻이다.

사실 2.1. 그래프 Γ 가 이분 그래프인 것과, Γ 에 훌수 길이 사이클이 없다는 것은 동치다.

연결그래프 Γ 의 꼭짓점들에 자연스러운 거리 구조를 줄 수 있다. 두 꼭짓점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해

$$d(x, y) := \min \{ \text{len}(P) : P \text{는 } x \text{와 } y \text{를 잇는 경로}\}$$

로 정의하는 것이다. 그러면 $d(\cdot, \cdot)$ 은 삼각 부등식과 비자명성(nondegeneracy)을 만족한다. 따라서 $d(\cdot, \cdot)$ 은 거리 구조가 되고, 이를 조합적 거리(combinatorial metric), l^1 -거리 혹은 그래프 거리(graph metric)라고 부른다.

어떤 꼭짓점 부분집합 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 및 양수 $k > 0$ 에 대해

$$N_k(A) := \{y \in \mathcal{V}(\Gamma) : \text{어떤 } a \in A \text{에 대해 } d_{\Gamma}(a, y) \leq k \text{임}\}$$

을 A 의 반지름 k 짜리 근방(neighborhood)이라고 부른다.

2.2. 삼투 현상 이제 그래프 상의 삼투 현상(percolation)을 논하겠다. 배경이 되는 연결그래프 $\Gamma = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma))$ 를 하나 고정한 뒤, 그 부분그래프들이 공간

$$\Omega := \left\{ \Gamma' = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}') : \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(\Gamma) \right\}$$

를 생각하겠다. 각각의 모서리 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 마다, Ω 를 분할하는 두 집합 $\{\Gamma' \subseteq \Gamma : e \in \Gamma'\}$ 와 $\{\Gamma' \subseteq \Gamma : e \notin \Gamma'\}$ 을 생각할 수 있다. 이들을 통상 $\{\omega : e \text{가 열려 있음}\}$ 및 $\{\omega : e \text{가 닫혀 있음}\}$ 이라고 부른다. 이런 집합들을 모든 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 에 대해 모아, 그것으로 생성되는 가장 작은 σ -대수를 Ω 에 얹어 주겠다.

이제 매개변수 $0 \leq p \leq 1$ 을 하나 고정하자. 각각의 모서리 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 를 독립적으로 열거나 닫되

$$\mathbb{P}_p(\{e \text{가 열려 있음}\}) = p, \quad \mathbb{P}_p(\{e \text{가 닫혀 있음}\}) = 1 - p$$

라고 설정함으로써 확률측도 \mathbb{P}_p 를 Ω 에 얹어줄 수 있다. 즉, “전체 그래프의 $(100p)\%$ 짜리 랜덤 부분그래프를 생각하는 것이다. 이 확률변수를 $\Gamma[p]$ 라고 적겠다.

이 개념을 조금 덜 형식적으로 표현하면 다음과 같다. 그래프 Γ 의 각 모서리마다 앞면이 나올 확률 p , 뒷면이 나올 확률 $1-p$ 짜리 동전을 하나씩 짹지어 놓고, 동전을 일제히 독립적으로 던진 다음 앞면에 해당하는 모서리만 남기자. 이때 남는 부분그래프는 Ω 의 다양한 원소가 될 수 있는데, 각 결과가 나올 확률은 매개변수 p 에 의존한다. 이러한 확률적 부분그래프를 $\Gamma[p]$ 로 표시한다.

더 실제에 가까운 비유를 하자면, 여러 문자가 처음에는 Γ 모양으로 결합해 균질한 결정을 이루고 있는 상황을 떠올리자. 서서히 온도를 높였을 때 각각의 문자결합이 일정 확률($= 1 - p$)로 끊어질 것이다. 이때 결정이 어떤 모양으로 쪼개질지는 확률적인데, 이를 모사하는 것이 $\Gamma[p]$ 이다. 이때 각 문자결합이 끊어질지 말지는 독립적이라는 가정을 달았다는 점에 주목하라. 이러한 수학적인 모델은 Simon R. Broadbent와 John M. Hammersley가 [BH57]에서 처음 도입했다.

위 모델에서는 배경 그래프의 각 모서리가 생존하거나 혹은 제거되는데, 이를 **베르누이 결합 삼투 과정**(Bernoulli bond percolation process)이라고 부른다. 각 꼭짓점이 생존하거나 혹은 제거되는 자리 **삼투 과정**(site percolation process) 또한 물리적인 삼투 현상을 모사하는 모델이다. 이외에도 각 모서리를 그대로 두거나 제거하는, 말하자면 길이 1 혹은 무한대를 부여하는 규칙 대신, 확률적인 길이를 주어 그래프의 변형된 거리 구조를 탐색하는 **첫 통과 삼투 과정**(first passage percolation) 등이 있다. 본 논문에서는 베르누이 결합 삼투 과정에 초점을 두겠다. 삼투 과정에 더 관심이 있는 독자는 Geoffrey Grimmett의 책 [Gri89]을 참조하면 좋겠다.

참고 2.2. 어떤 연결그래프 Γ 의 전체 대칭군 $\text{Aut}(\Gamma)$ 가 Γ 의 임의의 두 꼭짓점 $v, w \in \Gamma$ 를 연결지을 수 있을 때, 즉 $g = g(v, w) \in \text{Aut}(\Gamma)$ 가 존재해 $v = g \cdot w$ 일 때, Γ 를 **꼭짓점 전이적**(vertex-transitive)이라고 부른다. 이는 곧 $\mathcal{V}(\Gamma)$ 내의 $\text{Aut}(\Gamma)$ -궤도가 오직 한 개라는 뜻이다. 더 나아가, 만약 $\mathcal{V}(\Gamma)$ 내의 $\text{Aut}(\Gamma)$ -궤도가 유한 개라면 Γ 를 **준전이적**(quasi-transitive)이라고 부른다.

논의의 편의상, 앞으로는 그래프 중 유한 생성 군의 케일리 그래프에만 한정해서 얘기를 진행하겠다. 그러나, 추후 언급할 정리들 중 상당수는 케일리 그래프보다 더 일반적인 경우, 즉 꼭짓점 전이적 혹은 준전이적 그래프에 대해서도 증명된 것이다. 이는 원 논문을 참조하는 것을 추천한다.

2.3. 삼투 과정의 상전이 가장 먼저 평면 격자 그래프 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ 위에서의 삼투 과정을 살펴 보자. 이때, 매개변수 p 가 클수록 확률적으로 더 많은 모서리가 살아남기에, p 가 1에 가까우면 원래 그래프 Γ 가 거의 그대로 남는다고 예상할 수 있다. 이에 반해, p 가 0에 가까우면 원래 그래프의 대부분이 삭제되고 작은 자투리만 남을 듯하다. 이 상반되는 예상의 측도로서

“크기가 무한한 연결성분이 발생하는가?”

를 물을 수 있다. 평면 격자 그래프에 관해서는 다음이 알려져 있다:

- $p \leq 1/2$ 일 때는 $\Gamma[p]$ 에 무한 연결성분이 발생할 \mathbb{P}_p -확률이 0인 반면,
- $p > 1/2$ 일 때는 $\Gamma[p]$ 에 무한 연결성분이 발생할 \mathbb{P}_p -확률이 1이다.

이러한 의미에서, 매개변수 p 가 $1/2$ 에 다다를 때 평면 격자상의 삼투 과정은 **상전이(phase transition)**을 겪는다고 얘기할 수 있다. 이때 기준이 되는 값 $1/2$ 를 임계 변수(critical parameter)라고 부르고, $p_c(\Gamma)$ 라고 적는다. 즉, $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ 일 때 $p_c(\Gamma) = 1/2$ 이다.

일반적인 그래프 Γ 에서 삼투 과정을 진행하면 무한 연결성분이 발생할 확률이 0도 1도 아닌 값을 가질 수도 있다. 하지만 이는 굉장히 비균질한 그래프에서만 가능한 현상이며, 군의 케일리 그래프 같이 균질한 그래프에서는 결코 이런 일이 일어나지 않는다는 것이 알려져 있다. 간결한 논의를 위해 이제부터는 군의 케일리 그래프 위에서의 삼투 과정만 묘사하겠다.

케일리 그래프 $\Gamma = Cay(G, S)$ 를 하나 생각하자. 어차피 Γ 의 모양은 어느 기점을 기준으로 보나 똑같으니(이것이 우리가 바라던 균질성이다), 항등원 원소 $id \in G$ 를 기점으로 삼겠다. 삼투 과정 그래프 $\Gamma[p]$ 에서 id 의 연결성분을 C_{id} 라고 적겠다. 이 기점 연결성분이 무한히 클 확률을

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p (\#C_{id} = +\infty)$$

로 적겠다. 이때 다음이 성립한다.

사실 2.3 (보조정리 3.1 참고). $\theta(p)$ 는 $p \in [0, 1]$ 에 대한 단조증가함수이다.

또한, p 가 상당히 작은 양수일 때 (이를테면 $0 < p \leq \frac{1}{\#2S}$ 일 때) $\theta(p) = 0$ 임을 확인할 수 있다. 즉, $\theta(p)$ 는 첫 구간 동안에는 0이라는 값에 머물다가, 어느 시점부터 0보다 커지게 된다. 이 시점을 Γ 의 **임계 변수(critical parameter)**라고 정의한다. 즉,

$$p_c(\Gamma) := \inf \{p \in [0, 1] : \theta(p; \Gamma) > 0\}$$

으로 정의하겠다. 이제 케일리 그래프의 균질성 때문에 다음과 같은 사실이 성립한다:

사실 2.4 (보조정리 3.4 참고). 어떤 케일리 그래프 Γ 의 임계 변수가 p_c 라고 하자. 그러면,

- 각 $0 \leq p < p_c$ 에 대해 $\mathbb{P}_p(\Gamma[p]$ 가 무한 연결성분을 하나도 가지지 않음) = 1이고, 또
- 각 $p_c < p \leq 1$ 에 대해 $\mathbb{P}_p(\Gamma[p]$ 가 무한 연결성분을 하나 이상 가짐) = 1이다.

즉, 임계점 상전이는 임의의 케일리 그래프에서도 일어나는 것이다. 여기에 첨언할 것은, p_c 가 1인 그래프도 많다는 사실이다. 예를 들어 그림 3의 수직선 그래프에서, 좌측/우측 반직선상의 무한히 많은 모서리가 끊어지는 순간 무한 연결성분은 생기지 않는다. 이러한 상황은 $p < 1$ 일 때는 100% 생긴다. 따라서 $p_c(\mathbb{Z}) = 1$ 이다. 이는 비단 수직선 그래프뿐만 아니라, \mathbb{Z} 의 그 어느 케일리 그래프를 가져와도 마찬가지다. 일반적으로 \mathbb{Z} 를 유한 지수 부분군으로 가지는 군의 케일리 그래프에서는 $p_c = 1$ 이다.

또다른 상전이로 넘어가기 전에, 임계점 상전이를 더 자세히 들여다 보겠다. 먼저, $\theta(p)$ 의 양상이 $p = p_c$ 를 기점으로 변한다고는 했지만, 과연 p_c 에서의 값은 얼마일까? 즉, $\theta(p_c)$ 는 0일까 혹은 양수일까? 다르게 말하자면, 임계 변수 $p = p_c$ 에서 $\Gamma[p]$ 는 무한 연결성분을 가질것인가? (“임계점 삼투가 일어날 것인가?”라고 묻기도 한다.) 앞에서 본 평면 격자 \mathbb{Z}^2 의 경우, $\theta(p_c) = \theta(1/2)$ 은 0이라는 것이 Harry Kesten의 유명한 결과이다 ([Kes80]; Theodore Harris의 [Har60]도 참조). 놀랍게도, 아직까지 3차원 정수 격자 \mathbb{Z}^3 에서는 $\theta(p_c)$ 가 양수인지 0인지 알려진 것이 없고 이는 중요한 미해결 문제이다.

다음으로, 주어진 케일리 그래프 Γ 및 매개변수 $0 \leq p \leq 1$ 에 대해, 기점 id 의 연결성분이 평균적으로 얼마나 큰지 물을 수 있다. 이에

$$\chi_p := \mathbb{E}_p[\#C_{id}] = \sum_{g \in G} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}_p[\#C_{id} = n] & \theta(p) = 0 \text{인 경우} \\ +\infty & \theta(p) > 0 \text{인 경우} \end{cases}$$

라는 값을 **감수율(susceptibility)**이라고 부르겠다. 아까 정의한 $\theta(p)$ 와 마찬가지로,

사실 2.5 (보조정리 3.1 참고). χ_p 는 $p \in [0, 1]$ 에 대한 단조증가함수이다.

정의상 $p > p_c$ 일 때 $\chi_p = +\infty$ 이고, p 가 충분히 작은 양수일 때 $\chi_p < +\infty$ 임을 관찰하는 것도 어렵지 않다. 하지만 그 사이에는 어떤 값을 가지는지 자명하지 않다. 참고로 변수의 값은 항상 유한하지만 기댓값이 무한대인 확률변수는 얼마든지 만들 수 있기에, $\theta(p) = 0$ 이라고 해서 $\chi_p < +\infty$ 인 것이 바로 따라나오는 것은 아니다. 이는 증명이 필요한 사실로, Michael Aizenman과 David Barsky가 d 차원 격자 그래프에서 먼저 관찰했고 Tonći Antunović와 Ivan Veselić이 케일리 그래프를 포함하는 더 일반적인 그래프에 대해 증명했다.

사실 2.6. [AB87], [AV08] 케일리 그래프 Γ 의 임계 변수 p_c 가 주어졌을 때, 각 $0 \leq p < p_c$ 에 대해 χ_p 는 유한한 값을 갖는다. 더하여, $p \nearrow p_c$ 일 때 $\chi_p \nearrow +\infty$ 이다. 특히 $\chi_{p_c} = +\infty$ 이다.

이 정리의 좀 더 현대적인 증명으로 Hugo Duminil-Copin 및 Vincent Tassion의 논증[DCT16]과 Hugo Vanneuville의 방법론[Van25]이 있다.

우리가 사용할 또 다른 사실이 있다.

사실 2.7. [Lyo95], [BB99] 군 G 가 지수함수적으로 성장한다면(*exponentially growing*) 그 군의 임의의 케일리 그래프 Γ 는 $p_c(\Gamma) < 1$ 을 만족한다.

군 G 가 유한 표현(*finite presentation*)을 가지되 \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군을 가지지 않는다 면 그 군의 임의의 케일리 그래프 Γ 는 $p_c(\Gamma) < 1$ 을 만족한다.

사실은, 우리가 다룰 군들은 모두 차수 2짜리 자유군을 부분군으로 가지는 군들이다. 자유군의 케일리 그래프에 대해 $p_c < 1$ 임을 관찰하는 것은 어려운 일이 아니다. 이로부터, 자유군을 부분군으로 가지는 군의 케일리 그래프에 대해 $p_c < 1$ 이라는 사실도 금방 따라 나온다. 이 증명은 생략하겠다.

이외에도, (1) χ_p 가 $p \nearrow p_c$ 일 때 정확히 어떤 속도로 발산하는지, (2) $p \searrow p_c$ 일 때 $\theta(p)$ 는 정확히 어떤 속도로 0에趋하는지, (3) $p = p_c$ 일 때 C_{id} 의 크기 확률 분포가 대략 어떻게 되는지 등을 물을 수 있다. 그러면 관계상 더 깊이 들어가지는 않겠지만, 이렇게 p 가 임계 변수 근처일 때 $\Gamma[p]$ 의 기점 연결성분의 크기 및 모양 정보를 알고자 하는 것이 삼투 과정 이론의 근본 중 하나이다.

2.4. **무한 연결성분의 갯수** 지금까지, p 가 어떤 영역($p_c < p \leq 1$)에 들어 있을 때 $\Gamma[p]$ 에 거의 확실하게 무한 연결성분이 나타난다는 것을 얘기했다. 그렇다면 과연 몇 개나 등장할까? 한 개? 두 개? 열 개? 아니면 무한 개? 그리고 p 의 값에 따라 이 갯수는 어떻게 변할까?

만약 논의를 케일리 그래프에 좁히지 않았다면 이 질문들은 답하기 매우 난감하다. 그러나 케일리 그래프에 대해서는 어느 정도 만족스러운 답이 알려져 있다. 첫째로, 케일리 그래프 Γ 와 $p \in [0, 1]$ 이 주어졌을 때, $\Gamma[p]$ 가 가질 수 있는 무한 연결성분의 갯수는 거의 확실하게 고정된다. 또, 그 갯수는 반드시 0개, 1개 혹은 “무한히 많다”이다. 다시 말해,

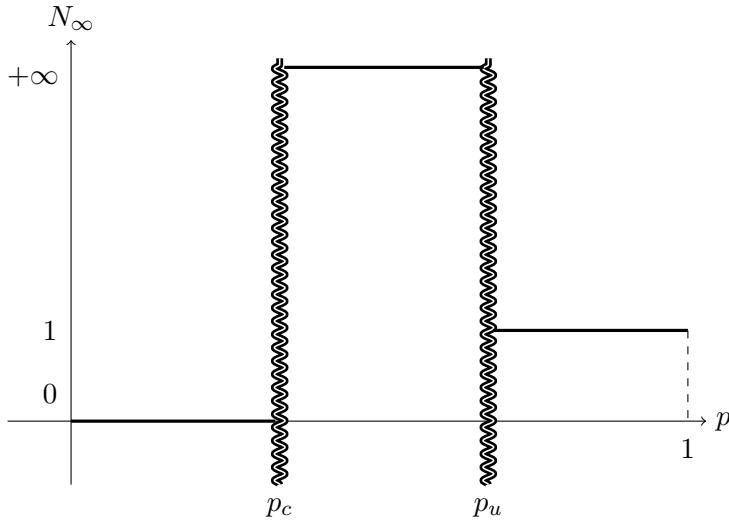


FIGURE 1. 무한 연결성분의 (거의 확실한) 갯수의 가장 일반적인 개형

사실 2.8. 유한 생성 군의 케일리 그래프 Γ 와 $p \in [0, 1]$ 각각마다 $N_\infty(\Gamma, p) \in \{0, 1, +\infty\}$ 가 존재해

$$\mathbb{P}_p \{ \#\{\Gamma[p] \text{ 안의 무한 연결성분들}\} = N_\infty(\Gamma, p) \} = 1$$

이다.

이 사실은 C. M. Newman과 Lawrence S. Schulman이 [NS81]에서 증명했다.
이제 다음을 정의하자.

$$p_u[\Gamma] := \inf \{p \in [0, 1] : \text{거의 확실하게 } \Gamma[p] \text{가 무한 연결성분을 정확히 하나 가지고 있다}\}.$$

이 상수를 Γ 의 **유일성 한계(uniqueness threshold)**라고 부른다. 정의로부터 $p_c \leq p_u$ 임은 바로 따라나온다. 또, $p_c < p < p_u$ 인 p 에 대해서는, $\Gamma[p]$ 는 거의 확실하게 무한 연결성분을 가지지만 유일한 무한 연결성분을 가지지는 않는다. 따라서 $N_\infty(\Gamma, p) = +\infty$ 여야 할 것이다. 이제 다음 정리가 진짜 비자명한 사실이다. 이 사실은 Itai Benjamini와 Oded Schramm이 유명한 서베이 논문 [BS96]에서 추측했고, Olle Häggström과 Yuval Peres가 케일리 그래프들에 대해 [HP99], Roberto H. Schonmann이 좀 더 일반적인 그래프들에 대해 증명했다 [Sch99].

사실 2.9. 케일리 그래프 Γ 의 유일성 한계 p_u 가 주어졌을 때, 각각의 $p_u < p \leq 1$ 에 대해

$$\mathbb{P}_p (\Gamma[p] \text{에 무한 연결성분이 유일하게 존재한다}) = 1$$

이다. (엄밀히 말하면, 이 사실 자체는 우리 증명에 꼭 필요하지는 않다.)

다시 말해, $(p_u, 1]$ 전 구간에서 거의 확실하게 $\Gamma[p]$ 는 유일한 무한 연결성분을 가진다. 따라서, N_∞ 는 일반적으로 도식 1과 같은 개형을 만족한다.

이렇게 보면, N_∞ 에 관해서는 상전이가 두 번 일어나는 것이 가장 일반적인 그림이다. 허나 그것은 $(0, p_c)$, (p_c, p_u) 및 $(p_u, 1)$ 이 모두 비자명한 구간일 때의 얘기이다. 이중 $0 < p_c$ 는 항상 보장된다. 그렇다면 $p_u < 1$ 은 어떨까? 이는 모든 군이 만족하지는 않는다. 예를 들어 4에 묘사되어 있는 4차수 정규 나무 그래프 T_4 에서는, p 가 1보다 조금이라도 작으면 $\Gamma[p]$ 에서 모서리가 군데군데 사라져 있을 것인데, 모서리가 하나 사라질 때마다 전체 그래프를 둘로 나누게 된다. 이렇게 똑똑 부러뜨리기 쉬운

그래프의 랜덤 부분그래프에서는 유일한 연결성분은 결코 기대할 수 없고, 더 나아가 무한 연결성분 또한 유일하지 않게 된다. 이를 통해 $p_u(T_4) = 1$ 임을 알 수 있다.

어떤 그래프의 유한 개의 모서리만 삭제해도 그래프를 여러 연결성분으로 끊어낼 수 있는 경우, 그 그래프의 끝이 여러 개(not one-ended)라고 부른다. 일반적으로 이런 케일리 그래프들은 $p_u = 1$ 을 가진다는 것을 어렵지 않게 확인할 수 있다.

그렇다면 나머지 케일리 그래프들은 어떨까? 앞에서 언급한 [BS96]에서 Itai Benjamini와 Oded Schramm은 다음을 물었다:

문제. 끝이 하나짜리인 케일리 그래프의 경우 항상 $p_u < 1$ 인가?

이 질문은 아직까지 완전한 답이 알려져 있지 않다. 그러나, 끝 하나짜리인 이 케일리 그래프를 만들어내는 군이 만약 유한 표현(finite presentation)을 가진다면 $p_u < 1$ 임은 알려져 있다. 이는 Eric Babson과 Itai Benjamini의 결과이다 [BB99].

한편, $p_c < p_u$ 에 관해서는 어떤 것이 알려져 있을까? 먼저, 앞에서 얘기한 \mathbb{Z}^2 의 경우, $N_\infty(p) = +\infty$ 인 p 가 존재하지 않고, 또 $p_c = p_u = 1/2$ 이다. 이는 2차원에 국한된 얘기가 아니다. 더 높은 차원 d 를 가지는 \mathbb{Z}^d 에 대해서도 마찬가지로 $p_c = p_u$ 가 성립한다. 이 사실은 Michael Aizenman, Harry Kesten 및 Charles M. Newman이 1987년에 증명한 중요한 결과이다[AKN87]. 일반적으로, (무한한) 가환군 (abelian group), 역영 군(nilpotent group)을 포함하여 지수함수보다 느리게 성장하는 군(group with subexponential growth)의 케일리 그래프에서는 모두 동일한 현상이 나타난다. 이것에 밀접하게 관련된 것이 케일리 그래프의 유한 부분집합들의 “부피” 대비 “표면 면적”의 경합이다. 이에 개념 하나를 도입하겠다.

정의 2.10. 어떤 케일리 그래프 Γ 의 *Cheeger 상수*는

$$\iota(\Gamma) := \inf \left\{ \frac{\#\partial_{\mathcal{E}} K}{\#K} = \frac{\#\{vw \in \mathcal{E}(\Gamma) : v \in K, w \notin K\}}{\#K} : K \text{는 } \mathcal{V}(\Gamma) \text{의 유한 부분집합} \right\}$$

와 같이 정의된다. 그래프 Γ 가 평균가능하다(amenable)는 것은 그 Cheeger 상수가 0이라는 뜻이고, 평균불가능하다(nonamenable)는 것은 그 Cheeger 상수가 양수라는 뜻이다.

여기서 Cheeger 상수의 정확한 값은 그다지 중요하지 않을 때가 많다. 그보다 더 중요한 것은 Cheeger 상수가 0보다 크거나 아니거나이다. 정수군 \mathbb{Z} 및 그 직접곱 \mathbb{Z}^d 를 포함해서, 모든 가환군, 역영 군 및 지수함수보다 느리게 성장하는 군의 케일리 그래프들은 평균가능하다. 이들에 대해 다음이 알려져 있다.

명제 2.1 ([AKN87], [BK89], [GKN92]). 모든 평균가능한 케일리 그래프 Γ 와 모든 $0 \leq p \leq 1$ 에 대해, 거의 확실하게 $\Gamma[p]$ 는 무한 연결성분을 기껏해야 한 개 가진다. 즉, $N_\infty(p; \Gamma) = \infty$ 인 p 는 존재하지 않는다. 특히, $p_c(\Gamma) = p_u(\Gamma)$ 이다.

이 명제는 상술했듯 먼저 \mathbb{Z}^d 에서 Michael Aizenman, Harry Kesten 및 Charles M. Newman이 증명했다. 곧이어 R. M. Burton 및 Michael S. Keane이 다른 증명을 제시했는데, Alberto Gandolfi, Michael S. Keane 및 Charles M. Newman이 그 논증을 평균가능한 케일리 그래프로 확장했다.

그렇다면 반대로, $p_c < p_u$ 인 그래프는 어떤 것들이 있을까? 앞에서 언급한 $p_u = 1$ 인 예시들, 즉 끝이 한 개보다 많은 그래프들을 제외한 첫 예시는 Geoffrey Grimmett과 Charles M. Newman이 다른 (정규 d 차 나무 그래프) $\times \mathbb{Z}$ 로 이는 자유군 $\times \mathbb{Z}$ 의 표준적인 케일리 그래프이다 [GN90]. 이 그래프는 $(0, p_c), (p_c, p_u), (p_u, 1)$ 세 구간이 모두 공집합이 아닌 첫 예시이다.

이 예시의 발견 이후 I. Benjamini와 O. Schramm가 제기한 추측을 소개한다.

추측 2.11 ([BS96, Conjecture 6]). 모든 평균불가능한 케일리 그래프 Γ 에 대해 $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ 이다.

이는 그래프의 연결성에 관한 조합적인 개념인 평균불가능성과, $\Gamma[p]$ 가 무한히 많은 무한 연결성분을 가지게끔 하는 p 가 무한히 많다는(!) 확률론적인 성질이 정확하게 일치한다는 추측이다. 실은, 그 어느 케일리 그래프 Γ 를 가져와도, $N_\infty(p; \Gamma) = +\infty$ 이게끔 하는 p 가 하나라도 존재하는 것과 $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ 는 동치이다. 이는 명제 2.1에 더해, Γ 가 평균불가능할 경우 $\Gamma[p_c]$ 는 (거의 확실하게) 무한 연결성분을 하나도 갖지 않는다는 사실 때문이다 [BLPS99].

2.5. 추측 2.11의 현황과 본 논문의 목표 사람들은 다양한 케일리 그래프를 놓고 추측 2.11을 연구해 왔다. Steven Lalley가 종수가 큰 곡면군(high-genus surface group)이 쌍곡평면에 그리는 **평면 그래프** (planar graph)에 대해 $p_c < p_u$ 임을 증명한 뒤 [Lal98], 추측 원작자인 I. Benjamini와 O. Schramm은 쌍곡평면 위에 여-컴팩트하게 그려진 임의의 케일리 그래프에 대해 $p_c < p_u$ 를 증명했다 [BS01].

위 두 결과에서는 케일리 그래프의 평면성이 중요한 역할을 했다. 그런데 여기서 짚고 넘어갈 것이다. 어떤 의미에서 곡면군은 매우 2차원스럽지만, 그런 곡면군도 평면적이지 않은 케일리 그래프를 얼마든지 가질 수 있다. 예를 들어 오각형 완전그래프 K_5 를 부분그래프로 가지는 케일리 그래프를 잡을 수 있다. 곡면군의 이런 케일리 그래프에 대해서도 $p_c < p_u$ 임을 어떻게 볼 수 있을까?

여기서 한 가지 짚고 넘어갈 점이 있다. 질문 및 추측 2.11은 그래프의 확률론적인 성질과 어떤 기하학적인 성질이 동치라고 주장하는데, 이 기하학적인 성질은 그래프의 세세한 연결성에는 전혀 관심이 없고 거시적인 모양새만을 따지는 성질이다. 이것이 이 질문 및 추측을 한층 흥미롭게 만드는 요소다. 이를테면 평면성은 그래프의 거시적인 구조와 국소적인 구조 둘 다에 의존하는 성질이다. 그에 반해 그래프의 끝의 개수 혹은 평균불가능성은 (겉보기에는 그렇지 않을 수 있지만) 그래프의 거친 모양만에 달린 성질이라는 것이 알려져 있다. 특히, 어떤 군의 한 케일리 그래프가 끝이 여러 개이거나 혹은 평균불가능하면, 그 군의 모든 다른 케일리 그래프 또한 마찬가지라는 것이 알려져 있다. 유한 생성집합을 특이하게 잡아 K_{100} 을 부분그래프로 가지게끔 한다고 해도 끝의 개수 혹은 평균불가능성은 뒤틀 수 없다는 얘기다.

따라서, 추측 2.11을 접근할 때 주어진 군의 특정 케일리 그래프가 아닌 모든 케일리 그래프에 대해 대답할 수 있다면 더욱 좋을 것이다. 이 관점과 같이 알아들 만한 사실이 하나 있다. 모든 평균불가능한 군 각각마다 $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ 를 만족하는 케일리 그래프 Γ 를 하나씩은 잡아줄 수 있다는 것으로, Igor Pak과 Tatiana Smirnova-Nagnibeda의 결과이다 [PSN00]. 이렇게 특수하게 만든 케일리 그래프의 $p_c < p_u$ 로부터, 같은 군의 다른 임의의 케일리 그래프의 $p_c < p_u$ 를 유도해 낼 수 있는지는 미지수다.

그러면 그 모든 케일리 그래프가 $p_c < p_u$ 를 만족하는 군은 어떤 것이 있을까? 이 방향으로는 Damien Gaboriau와 Russell Lyons가 다룬, 첫번째 l^2 -베티 수가 죽는 군들의 케일리 그래프가 있다 [Gab05], [Lyo00], [Lyo13]. 이 개념의 정의를 여기서 도입하는 것은 무리일 듯하고, 그 예시들만을 몇 개 들겠다. Gaboriau와 Lyons가 각각의 케일리 그래프에 대해 $p_c < p_u$ 를 보인 군의 예시에는

- 자유군 및 무한군의 자유곱 군(free product);
- 종수 2 이상인 곡면군;
- 평균가능한 군들에 대해 아밀감한 자유곱 군

등이 있다. 그에 반해, Gaboriau 및 Lyons가 다루지 않는 군에는

- 자유군들의 직접곱;
- $SL(2, \mathbb{Z})(n, \mathbb{Z})$; 더하여, n 차수 리 군 안의 격자들 ($n \geq 3$)
- 쌍곡 곡면의 사상류 군(mapping class group) $Mod(\Sigma_g)$;
- 자유군의 외자기동형사상 군(outer automorphism group) $Out(F_N)$;

- 자유곱이 아닌 직교 아틴군(right-angled Artin group)

등이 있다. 또, Kazhdan 성질 (T)를 가지는 군들 중에서도 위 이론이 적용되는 군의 예시는 아직 발견되지 않았다.

그 다음으로 살펴볼 것은 Thomas Hutchcroft가 [Hut19] 및 [Hut20]에서 공부한 군들이다. 이중 두 번째 논문에서는 어떤 특징적인 대칭성을 가지는 케일리 그래프들에 대해 $p_c < p_u$ 를 증명한다. 여기서 특징적인 대칭성이라 함은, 그래프 Γ 의 대칭군 $\text{Aut}(\Gamma)$ 에 충분히 큰 부분군 H 가 존재한다는 것인데, 충분히 크기에 H 가 Γ 의 모든 꼭짓점 사이를 거의 자유롭게 오갈 수 있지만, 몇몇 꼭짓점들을 편향적으로 고정하는 비대칭성도 가진다는 뜻이다. 더 깊이 논하지는 않겠으나, 이 비대칭성 이론으로 Hutchcroft는 모든 $d \geq 3$ 및 $k \geq 1$ 에 대해 $(T_d : d\text{차수 정규 나무그래프}) \times \mathbb{Z}^k$ 의 $p_c < p_u$ 를 증명해 냈다. 다만, 이러한 비대칭성은 그래프의 국소적인 구조에 의존하는 성질로, 어떤 군의 한 케일리 그래프에서 찾아냈을 때 다른 케일리 그래프에서도 반드시 찾아낼 수 있는 것은 아니다.

이에 반해 첫번째 논문에서는 특정 군들의 모든 케일리 그래프에 대해 논한다. 이는 다음과 같다.

정리 2.12. [[Hut19]] 정수군 \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군이 없고 무한한 Gromov 쌍곡적인 군 G 의 모든 케일리 그래프 Γ 에 대해, $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ 이다.

Gromov 쌍곡성(Gromov hyperbolicity)은 d 차원 쌍곡공간 \mathbb{H}^d , $K < -a^2$ 의 곡률을 가지는 단순연결 다양체 및 나무 그래프를 모두 아우르는 기하군론 핵심 개념이다. Gromov 쌍곡군의 정의 역시 구체적으로 적지는 않겠지만, \mathbb{H}^d 에 진정으로 여-컴팩트하게 작용하는 군(즉 여-컴팩트 격자)을 예시로 생각하면 좋다. 특히, 닫힌 쌍곡다양체들의 자유군들은 모두 Gromov 쌍곡적이다.

Gromov 쌍곡성을 한층 더 일반화한 비원통적인 쌍곡성(acylindrical hyperbolicity)은 더욱 정의하기 쉽지 않지만, Gromov 쌍곡 군과 쌍곡 곡면의 사상류 군, 자유군의 외자기동형사상 군, 자유곱이 아닌 직교 아틴 군을 모두 포함하는 개념이라고 생각할 수 있다. 이러한 군들에 대해 저자와 서동균은 다음을 증명했다.

정리 2.13. [[CS25]] 정수군 \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군이 없고 비원통적으로 쌍곡적인 G 의 모든 케일리 그래프 Γ 에 대해, $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ 이다.

이 논문에서는 곧 얘기할 CAT(0) 큐브 복합체 혹은 중점그래프에 작용하는 군들에 대해 살펴볼 것이다. 이러한 군들과 Gromov 쌍곡 군 간에는 밀접한 관계가 있다. 먼저, Gromov 쌍곡 군이라는 개념과 우리가 고려할 CAT(0) 큐브 군의 개념은 서로를 포함하지는 않는다. 하지만 둘 다에 해당하는 중요한 대상이 있는데, 바로 3차원 닫힌 쌍곡다양체의 기본군들이다. 이 군들 안에는 쌍곡군과 동형인 부분군들이 구겨지지 않고 잘 들어가 있다는 것을 Jeremy Kahn과 Vladimir Marković가 보였는데 [KM12], 이런 쌍곡군들을 타일링 재료로 삼아 군이 자유롭게(freely) 또 여-컴팩트하게 작용하는 CAT(0) 큐브 복합체를 구성해줄 수 있다는 것을 Nicolas Bergeron과 Daniel T. Wise가 증명했다[BW12]. 사실은, 모든 3차원 닫힌 쌍곡다양체는 원 위의 쌍곡 곡면 다발을 유한군으로 자른 것으로 이해할 수 있는데, 이를 사실상의 다발 만들어내기 정리(virtual fibring theorem)라고 한다[Ago13]. Ian Agol이 이를 증명하기 위해 긴요하게 사용했던 재료가 바로 Bergeron과 Wise의 CAT(0) 큐브 복합체라고 할 수 있다.

CAT(0) 큐브 군의 또 다른 예시는 직교 아틴군과 직교 콕세터군(right-angled Coxeter group)이 있다. 이들 군은 정해진 몇 가지 종류의 관련자(relator)로 이루어진 유한 표현을 가지고 있는데, 이 표현에 따라 자연스럽게 Salvetti 복합체 및 Davis 복합체라는 CAT(0) 큐브 복합체를 건설할 수 있다.

또 이들 군은 이들 복합체에 진정으로 또 여-컴팩트하게 작용한다. 일반적으로 직교 아틴군에는 자유 군 F_n 과 동형인 부분군 및 정수 직접곱 군 \mathbb{Z}^n 과 동형인 부분군이 온갖 곳에서 얹혀 있는데, Gromov 쌍곡적이지 않은 경우가 많다. 따라서 이번 논문에서는 이러한 군들을 쌍곡기하 대신 CAT(0) 큐브 기하학으로 이해해볼 것이다.

3. 삼투 과정 이론

이 장에서는 정리 A의 증명을 몇 가지 단계로 세분할 것이다. 증명에 필요한 기하학적인 관찰들을 먼저 3.1절에서 기술하겠다. 이 기하학적인 재료들만 있으면 확률론 논증을 통해 정리 A를 이끌어낼 수 있다는 것이 Thomas Hutchcroft의 이론인데 [Hut19], 이 이론을 3.2절 및 3.3절에서 설명하겠다.

CAT(0) 큐브 기하학을 깊이 파고들지 않고 군 위의 삼투 현상 이론만을 읽고 싶은 독자들은 이 장까지만 읽으면 충분하다. 한편, 확률론 테크닉보다는 CAT(0) 큐브 기하학에 관심이 있는 독자들은 3.1절만 읽은 뒤 다음 장으로 넘어가도 좋다.

3.1. 우리가 증명해야 할 기하학적인 사실들 군 G 의 유한 생성 집합 S 에 대한 케일리 그래프 $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ 를 하나 고정했을 때, G 의 유한 부분집합이 Γ 상에서 어떻게 배치되어 있는지에 관한 성질 두 개를 기술하겠다. 아직 우리는 CAT(0) 큐브 기하학을 만나지 않았기에 길잡이 역할을 할 예시가 필요한데, 정수 격자 군 \mathbb{Z}^2 보다는 자유군 $F_2 = \langle a, b \rangle$ 을 상상하는 편이 도움이 될 것이다. 그러니 일단 $G = F_2$ 및 $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ 로 두고 설명하겠다.

자유군 F_2 의 유한 부분집합의 예시로

$$A := N_{100}(id) = \{a_1 a_2 \cdots a_N : N \leq 100, \{a_1, \dots, a_{100}\} \subseteq S\}$$

를 생각해볼 수 있다. 이 부분집합의 대부분, 즉 98% 이상은 두께 4짜리 가장자리 껍질 $N_{100}(id) \setminus N_{96}(id)$ 에 몰려 있다. 이 껍질 위의 점 u 를 아무 것이나 고정하자. 그러면 u 에서 바라본 집합 A 는 상당히 한 방향에 쏠려 있다. 예를 들어, u 로부터 네 걸음 걸어 나오는 방법은 총 $4 \times 3^3 = 108$ 가지가 있다. 그러나, 거의 대부분의 $a \in A$ 에 대해, u 에서 a 를 향해 Γ 위에서 걸어 나갈 때 첫 네 걸음은 a 에 거의 의존하지 않고, 108가지 중 정해진 단 한 가지로 고정된다. 이를 구체적으로 논하기 위해

$$A_u := \{a \in A : \overline{ua} \text{와 } \overline{u(id)} \text{의 첫 네 걸음이 일치함}\}$$

를 정의하면, A 의 최소 98%에 해당하는 $u \in A \setminus N_{96}(id)$ 에 대해 $A \setminus A_u$ 는 $N_{12}(p)$ 에 포함되어 있고 그 크기는 $4 \cdot 3^{11}$ 이하이다. 다시 얘기하면, A 에서 예외적인 원소 $4 \cdot 3^{11}$ 만 제외하면 모두 u 관점에서 보았을 때 같은 방향에 몰려 있다. 여기서 $4 \cdot 3^{11}$ 이라는 숫자는 엄청 크기는 하지만, 이 숫자는 “네 걸음”이라는 변수에만 의존하지 A 의 반지름과는 무관하다는 것에 유의하라.

더 나아가, u 에서 바라보는 대신 u 와 거리 4 안에 있는 점으로부터 바라보면, A 는 정말로 한 방향에 쏠려 있다고 말할 수 있다. 다시 말해, A 의 최소 98%에 해당하는 $u \in A \setminus N_{96}(id)$ 에 대해서는, $d_S(u, v) < 4$ 인 점이 존재해 $A_v \supseteq A$ 가 된다는 것이다.

위 관찰에서 우리는 대부분의 $u \in A$ 에 대해 $A \simeq A_u$ 임을 얘기했다. 여기서 $A \simeq A_u$ 라는 사실이 왜 유용한지 보기 위해, p -랜덤 그래프 $\Gamma[p]$ 안에서의 u 의 연결 성분 C_u 를 살펴 보겠다. 이때, C_u 는 u 기준에서 보았을 때 id 방향으로도 어느 정도 뻗어 있겠지만, 그것과 동등한 확률로 다른 방향으로도 뻗어 있을 것이다. 즉 직관적으로 $\#(C_u \cap A_u)$ 는 $\#C_u$ 의 $1/108$ 밖에 안 되어야 할 것이다. 또 A_u 와 A 는 기껏해야 점 유한 개밖에 차이나지 않으니, $\#C_u$ 가 아주 큰 경우 (즉 $p \nearrow p_c$ 일 때) $\#(C_u \cap A)$ 는 $\#C_u$ 의 $1/100$ 밖에 안 되어야 할 것이다. 이것이 우리가 원하는 상황이다.

위 사실을 다른 방식으로 표현해 보겠다. 점 $u = a^{100} \in N_{100}(id) \setminus N_{96}(id)$ 를 고정하면, u 에서 id 로 향하는 첫 네 걸음은 모두 a^{-1} 방향이다. 따라서 u 에서 A_u 로 이어지는 모든 경로는 네 점 $ua^{-1}, ua^{-2}, ua^{-3}, ua^{-4}$ 을 지나야 한다. 이때 예를 들어 $(a^{-1}) \cdot (a^{-1}) = a^{-2}$ 라는 관계가 성립하니 $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$ 는 서로 자유롭게 독립적(freely independent)이라고 볼 수는 없다. 하지만, $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$ 각각으로부터 거리 1에 있는 점 $a^{-1}b, a^{-2}b, a^{-3}b, a^{-4}b$ 는 자유롭게 독립적이다.

더 일반적으로, 임의의 점 $u \in N_{100}(id) \setminus N_{96}(id)$ 에서 id 로 향하는 첫 네 걸음이 순서대로 $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ 라고 했을 때, u 에서 A_u 로 이어지는 모든 경로는 $us_1, \dots, us_1s_2s_3s_4$ 네 점을 지나야 한다. 이때 $\{s_1, s_1s_2, s_1s_2s_3, s_1s_2s_3s_4\}$ 자체는 자유롭게 독립적이지 않을 수 있다. 하지만, $t_i \in S \setminus \{s_1^{-1}, s_i^{-1}, s_{i+1}\}$ 를 하나씩 잡으면

$$\{s_1t_1, s_1s_2t_2, s_1s_2s_3t_3, s_1s_2s_3s_4t_4\}$$

는 자유롭게 독립적이다. 이는 어떤 의미에서 A_u 가 u 로부터 “한 방향”에 치우쳐 있다는 것을 시사한다.

놀라운 점은, $A \subseteq G$ 가 등근 공 모양이 아니어도 위와 같은 현상을 기대할 수 있다는 것이다. 이를 위해 몇 가지 개념을 정의하겠다.

정의 3.1. 군 G 의 어떤 부분집합 $A \subseteq G$ 가 **나무스럽다**(branching)는 것은 곧 A 가 자유롭게 독립적이라는 뜻이다. 그말인즉, 만약 $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \in A$ 에 대해

$$a_1 \cdots a_n = a'_1 \cdots a'_m$$

이면 반드시 $n = m$ 이고 각각의 i 에 대해 $a_i = a'_i$ 여야 한다.

이제 G 의 어떤 유한 생성 집합 S 를 고정하자. 어떤 부분집합 $A' \subseteq G$ 및 $D > 0$ 에 대해 A' 가 D -나무스럽다(D -roughly branching)는 것은, A' 가 어떤 나무스러운 집합 A 의 D -근방에 포함된다는 뜻이다. 다시 말해,

$$A' \subseteq \{as_1 \cdots s_n : a \in A, 0 \leq n \leq D, s_i \in S\}$$

이게끔 하는 나무스러운 집합 A 가 존재한다는 것을 의미한다.

정의 3.2. 유한 생성 집합 S 가 고정된 어떤 군 G 를 생각하자. 이때, $(g_0, g_1, \dots, g_n) \circ| d_S$ -경로라는 것은, 각각의 $i = 1, \dots, n$ 에 대해 $g_{i-1}^{-1}g_i \in S$ 라는 것이다.

세 집합 $A, B, C \subseteq G$ 에 대해, 만약 A 와 C 를 잇는 모든 d_S -경로가 B 를 지나야 한다면 B 를 A 와 C 사이 장벽(barrier between A and C)라고 적겠다.

정의 3.3. 유한 생성 집합 S 가 갖춰진 군 G 를 생각하자. 이때 G 가 **마법 보조정리**(magic lemma)를 만족한다는 것은 어떤 $K > 0$ 가 존재하고, 각각의 $D > 0$ 마다 어떤 $K' = K'(D)$ 및 $K'(D)$ -나무스러운 부분집합 B 가 있으며, 또 각각의 $\epsilon, D, D' > 0$ 마다 어떤 숫자 $N = N(\epsilon, K, D, D')$ 가 존재하여 다음이 성립한다는 것이다.

임의의 유한 집합 $A \subseteq G$ 마다 A 의 $(100 - \epsilon)\%$ 를 차지하는 부분집합 $A' \subseteq A$ 이 존재하는데, 각각의 $a \in A'$ 마다 어떤 K -나무스러운 부분집합 두 개

$$B(a) = B_1(a) \sqcup \dots \sqcup B_D(a), \quad B'(a) = B'_1(a) \sqcup \dots \sqcup B'_D(a)$$

가 존재해

$$\{y \in A : B_1(a), \dots, B_D(a) \text{ 각각이 } id \text{와 } a^{-1}y \text{ 사이 장벽임}\} \cup$$

$$\{y \in A : B'_1(a), \dots, B'_D(a) \text{ 각각이 } id \text{와 } a^{-1}y \text{ 사이 장벽임}\} \cup$$

$$\{y \in A : B \setminus N_{D'}(id) \not\models id \text{와 } a^{-1}y \text{ 사이 장벽임}\}$$

은 A 의 원소 중 많아야 N 개를 놓친다.

정의 3.4. 군 G 가 대강 반전 가능하다(*roughly flippable*)는 것은 다음을 만족하는 부분집합 유한 개 $A_1, \dots, A_N \subseteq G$ 및 원소 유한 개 $g_1, \dots, g_N \in G$ 이 존재한다는 뜻이다.

먼저, 각각의 i 에 대해, id 와 g_i 사이를 잇는 d_S -경로이면서 전반부는 $g_i A_i^c$ 바깥에, 후반부는 A_i 바깥에 위치하는 어떤 경로 γ_i 가 있다.

더하여, 임의의 유한 집합 $A \subseteq G$ 마다 A 의 절반을 차지하는 부분집합 $A' \subseteq A$ 이 존재하는데, 각각의 $a \in A'$ 마다 어떤 i 가 존재해

$$A \subseteq aA_i \subsetneq ag_i A_i^c$$

가 성립한다.

위 정의에서 γ_i 의 조건이 조금 까다로울 수 있는데, 예를 들어 $d_S(id, g_i) > 2d_S(id, A_i^c)$ 인 경우에는 그냥 id 와 g_i 사이 아무 d_S -최단 경로나 잡으면 된다.

위 성질들은 G 의 기하학적 모양에 관한 것이고, 확률론적인 요소는 하나도 없다. 이 논문의 핵심 중 하나인 기하학 명제는 다음과 같다.

명제 3.1. 유한 생성 군 G 가 어떤 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용하고 또 정규 1차수 대칭을 가진다고 가정하자(정의 7.1 참조). 예를 들어 Γ 상의 G -작용이 진정이고 여-컴팩트하며 기약적이면 항상 그러하다. 또, G 안에는 \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군이 없다고 가정하자.

그러면 G 는 각각의 유한 생성 집합에 대해 마법 보조정리를 만족하고, 또 대강 반전 가능하다.

이 사실이 삼투 현상에 관련이 있는 이유가 아래에 적혀 있다.

명제 3.2. 자유군을 부분군으로 가지는 유한 생성 군 G 의 캐일리 그래프 Γ 가 마법 보조정리를 만족하고, 또 G 가 대강 반전 가능하다고 가정하자. 그러면 $p_c(\Gamma) < p_u(\Gamma)$ 가 성립한다.

이 절의 나머지 동안에는 명제 3.2을 증명하겠다. 이어지는 장에서는 명제 3.1을 공부한다.

3.2. **기초적인 확률론** 이 절의 내용은 [Gri89]의 2장 및 8장, 그리고[DCT16]의 1절을 발췌해 번역한 것이다.

유한집합 혹은 가산집합 \mathcal{E} 를 하나 생각한 뒤

$$\Omega := \{0, 1\}^{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E} \text{에서 } \{0, 1\} \text{로 향하는 함수}\},$$

$$\mathcal{B}(\Omega) := \{\Omega \text{의 보렐 부분집합들}\}$$

로 두겠다. 또, $0 \leq p \leq 1$ 이라는 매개변수가 주어졌을 때, 각 $e \in \mathcal{E}$ 마다 평균 p 짜리 베르누이 확률 측도 μ_e 를 잡은 뒤 그 곱측도 $\mathbb{P}_p = \otimes_{e \in \mathcal{E}} \mu_e$ 를 생각하면, 확률공간 $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}_p)$ 을 만들 수 있다.

그래프 Γ 상의 삼투 과정을 위와 같은 확률공간에서 모사할 수 있다. 모서리 집합 $\mathcal{E}(\Gamma)$ 를 \mathcal{E} 로 활용하고, 확률변수 $\Gamma : \omega \mapsto \Gamma(\omega)$ 를

$$\Gamma(\omega) := (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\omega) := \{e : \omega(e) = 1\}) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

로 잡아주면 Γ 는 우리가 바라던 p -랜덤 부분 그래프 $\Gamma[p]$ 가 된다.

어떤 사건 $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ 가 증가적(increasing)이라는 것은,

$$[\omega \in A] \wedge [\omega \leq \omega'] \Rightarrow \omega' \in A \quad (\forall \omega, \omega' \in \Omega)$$

라는 것이다. 어떤 가측함수 $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 이 증가적이라는 것은 각각의 t 마다 $\{\omega : F(\omega) > t\}$ 가 증가적이라는 것이다. 달리 말해, $\omega \leq \omega'$ 이면 $F(\omega) \leq F(\omega')$ 라는 것이다.

보조정리 3.1. 실수 두 개 $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$ 을 생각하자. 그러면 모든 증가적인 사건 $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ 에 대해 $\mathbb{P}_{p_1}(A) \leq \mathbb{P}_{p_2}(A)$ 이다. 또, 모든 증가적인 확률변수 $X \geq 0$ 에 대해 $\mathbb{E}_{p_1} X \leq \mathbb{E}_{p_2} X$ 이다.

Proof. 두 확률공간 $(\Omega, \mathbb{P}_{p_i})$ 한번에 다루기 위해

$$(Y, \mathbb{P}) := ([0, 1], Leb)^{\mathcal{E}(\Gamma)}$$

를 생각하자. 또 $\Psi_i : Y \rightarrow \Omega$ 는 다음과 같이 두는데, Y 의 원소 y 에 대해, $\Psi_i(y)$ 의 e -좌표는 $y(e)$ 가 p_i 보다 작으면 1, 아니면 0으로 정의한다. 이렇게 하면 $\Psi_i^* \mathbb{P}$ 의 각 좌표는 1일 확률이 p_i 이고, 서로 다른 좌표값들은 독립적이다. 이를 통해 $\Psi_i^* \mathbb{P}$ 와 \mathbb{P}_{p_i} 가 같은 분포를 가진다는 것을 알 수 있다.

따라서 $\mathbb{P}_{p_i}(A)$ 는 $\Psi_i(A)$ 의 \mathbb{P} 값이다. 그런데 A 가 증가적이므로 $\Psi_1(y) \in A$ 이면 $\Psi_2(y) \geq \Psi_1(y)$ 또한 A 의 원소이다. 이는 곧

$$\mathbb{P}_{p_i}(A) = \mathbb{P}(\Psi_1(A)) \leq \mathbb{P}(\Psi_2(A)) = \mathbb{P}_{p_2}(A)$$

를 의미한다. 이로써 첫번째 주장을 얻는다.

또한 확률변수 X 가 어떤 증가적인 사건의 특성함수(characteristic function)인 경우의 두번째 주장을 얻었다. 이러한 특성함수들의 양수 계수 선형결합(*)에 대해서도 마찬가지 부등식이 성립한다. 임의의 증가적인 확률변수 X 에 대해 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots, \lim_i f_i = X$ 이게끔 (*) 성질을 만족하는 f_i 들을 잡아줄 수 있다. 이 함수열에 대해 단조수렴정리를 적용하면 일반적인 두번째 주장을 얻는다. \square

이로부터 사실 2.3 및 2.5을 간단히 확인할 수 있다.

사실 2.3 및 2.5의 증명 연결그래프 Γ 의 두 점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해,

$$\{\omega : x \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} y\} \text{ 및 } \{\omega : \#C_x = +\infty\}$$

는 증가적인 사건이다. 이 사건들에 보조정리 3.1을 적용하면 바라던 사실들을 얻는다. \square

증가적인 사건에 관해 한 가지를 첨언하겠다. 우리가 다룰 Ω 상의 확률변수 중 상당수는 사실 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots\}$ 의 유한 집합에 의해 결정되는 확률변수들의 증가적인 극한으로 나타난다. 그중 한 예시로, 어떤 그래프 $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 위에서의 삼투 과정을 생각해 보자. 이때 꼭짓점 부분집합 $A, B \subseteq \mathcal{V}$ 를 하나 고정했을 때,

$$f_{A,B} := \sum_{a \in A, b \in B} 1_{\{a \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} b\}}$$

을 생각해 보자. 이제 $\mathcal{E}_n := \{e_1, \dots, e_n\}$ 으로 두면, f_A 는

$$f_{k;A,B} := \sum_{a \in A, b \in B} 1_{\{id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap \mathcal{E}_n} a\}}$$

라는 단조증가하는 확률변수열의 극한이다. 이때 각 k 에 대해 $f_{k;A,B}$ 기껏해야 모서리 유한 개 e_1, \dots, e_k 의 개폐 여부에만 의존함을 알 수 있다. 즉, $\mathbb{E}_p(f_{k;A,B})$ 가 p 에 대해 연속이라는 것은 분명하다. 또한 $\mathbb{E}_p(f_{k;A,B})$ 및 $\mathbb{E}_p(f_{A,B})$ 는 모두 단조증가한다. 이 경우, 극한 함수인 $\mathbb{E}_p(f_{A,B})$ 는 좌연속이어야 한다. 이를 기록해 두겠다.

보조정리 3.2. 그래프 $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 및 $A, B \subseteq \mathcal{V}$ 에 대해

$$\chi_p(A \leftrightarrow B) := \sum_{a \in A, b \in B} \mathbb{P}_p(a \leftrightarrow b)$$

는 p 에 대해 좌연속이다. 즉, 임의의 p_0 에 대해

$$\chi_{p_0}(A \leftrightarrow B) = \lim_{p \nearrow p_0} \chi_p(A \leftrightarrow B)$$

이다.

이제 Theodore Harris가 [Har60]에서 처음 다루고 Cees Fortuin, Pieter Kasteleyn 및 Jean Ginibre가 [FKG71]에서 일반화한 Harris-FKG 부등식을 소개하겠다.

보조정리 3.3. 두 증가적인 사건 A, B 에 대해

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B)$$

가 성립한다. 또, 유한한 분산값을 가지는 두 증가적인 확률변수 X, Y 에 대해

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X) \mathbb{E}_p(Y)$$

가 성립한다.

Proof. 두번째 주장, 즉 확률변수에 관한 것만을 집합 \mathcal{E} 의 크기에 대해 귀납적으로 증명하겠다. 먼저 $\mathcal{E} = \{e_1\}$ 가 원소 하나짜리 집합일 때는 다음 부등식만 확인하면 된다: 실수 $a_1 \leq a_2$ 및 $b_1 \leq b_2$ 에 대해

$$(3.1) \quad \begin{aligned} (1-p)a_1b_1 + pa_2b_2 &\geq (1-p)a_1b_1 + pa_2b_2 - p(1-p)(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \\ &= ((1-p)a_1 + pa_2)((1-p)b_1 + pb_2). \end{aligned}$$

이제 $\mathcal{E} = \{1, \dots, n\}$ 에 대한 주장을 가정하고 $\mathcal{E} = \{1, \dots, n+1\}$ 에 대해 주장을 증명하겠다. 이를 위해 X 와 Y 가 $\{1, \dots, n+1\}$ 위에서의 증가적인 확률변수라고 하자. 이때 각 $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n$ 및 $Z \in \{X, Y\}$ 에 대해 조건부 기댓값

$$\mathbb{E}_p[Z|\mathbf{w}] = (1-p)Z(\mathbf{w}, 0) + pZ(\mathbf{w}, 1)$$

을 정의할 수 있다. 그러면 $\mathbb{E}_p[Z|\cdot]$ 가 $\{0, 1\}^n$ 위에서의 증가적인 확률변수라는 것은 바로 관찰할 수 있다. 또한, 각 $\mathbf{w} \in \{0, 1\}^n$ 에 대해

$$\begin{aligned} E_p[XY|\mathbf{w}] &:= (1-p)X(\mathbf{w}, 0)Y(\mathbf{w}, 0) + pX(\mathbf{w}, 1)Y(\mathbf{w}, 1) \\ &\geq ((1-p)X(\mathbf{w}, 0) + pX(\mathbf{w}, 1))((1-p)Y(\mathbf{w}, 0) + pY(\mathbf{w}, 1)) = \mathbb{E}_p[X|\mathbf{w}] \mathbb{E}_p[Y|\mathbf{w}] \end{aligned}$$

이다. 이때 사용한 것은 $Z(\mathbf{w}, 0) \leq Z(\mathbf{w}, 1)$ ($Z \in \{X, Y\}$) 및 부등식 3.1이다. 이를 이용해

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(XY) &= \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[XY|\omega_1, \dots, \omega_n]] \\ &\geq \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[X|\omega_1, \dots, \omega_n] \cdot \mathbb{E}_p[Y|\omega_1, \dots, \omega_n]] \\ &\geq \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[X|\omega_1, \dots, \omega_n]] \cdot \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[Y|\omega_1, \dots, \omega_n]] \quad (\because \text{귀납가정}) \\ &\geq \mathbb{E}_p X \mathbb{E}_p Y \end{aligned}$$

를 관찰할 수 있다. 이로써 $\mathcal{E} = \{1, \dots, n+1\}$ 에 대한 증명이 끝났다.

이제 남은 것은 \mathcal{E} 가 (무한) 가산집합인 경우이다. 이 경우는 각 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 마다

$$X_n(\mathbf{w}) := \mathbb{E}_p[X|\mathbf{w}], \quad Y_n(\mathbf{w}) := \mathbb{E}_p[Y|\mathbf{w}] \quad (\forall \mathbf{w} \in \{0, 1\}^n)$$

로 정의된 확률변수열에 유한 벼전의 부등식을 적용한 뒤, L^2 -마팅게일 수렴 정리를 적용하면 된다. 이 증명은 생략하겠다. \square

다음 부등식을 소개하기에 앞서 증인이라는 개념을 도입하겠다. 어떤 증가적인 사건 $A \subseteq \Omega = \{0, 1\}^E$ 및 그 사건의 원소 $\omega \in A$ 가 주어졌다고 하자. 어떤 $0 \leq W \leq \omega$ 가 ω 안의 A 측 증인(witness for A in ω)이라는 것은

$$1_W := \{\omega' \in \Omega : \forall e \in E [W(e) = 1 \Rightarrow \omega'(e) = 1]\} \subseteq A$$

가 성립한다는 것이다. 이해를 돋기 위해 그래프 삼투 과정에서의 언어로 다시 표현해 보겠다. 어떤 조건 A 를 만족하는 $\omega \in \Omega$ 가 주어졌을 때, $\Gamma(\omega)$ 에서 열려 있는 모서리 몇 개를 모은 집합 W 이 ω 를 위한 A 의 증인이라는 것은 다음을 뜻하는데, W 의 원소인 모서리가 모두 열려 있는 Γ 의 부분그래프는 반드시 A 를 만족한다는 것이다.

이제, 두 증가적인 사건 A, B 에 대해

$$\begin{aligned} A \circ B &:= \{\omega \in \Omega : \text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset \text{ 이거나 } \omega \text{ 안의 } A \text{측 증인 } f \leq \omega \text{과 } B \text{측 증인 } g \leq \omega \text{를 잡을 수 있음}\} \\ &= \{\omega \subseteq \{0, 1\}^E : \omega \text{ 안에는 서로 만나지 않는 } A \text{측 증인 및 } B \text{측 증인이 공존함}\} \end{aligned}$$

으로 정의하겠다. 이제 J. van der Berg와 Harry Kesten[vdBK85]에서 도입한 BK 부등식을 서술할 준비가 끝났다.

사실 3.5. 모든 원소가 유한한 증인을 가지는 증가적인 사건 A, B 에 대해,

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B)$$

가 성립한다.

우리가 진짜 활용할 것은 다음 두 따름정리이기에, 이를 증명만 소개하겠다.

따름정리 3.1. 그래프 Γ 의 꼭짓점 $v_1, \dots, v_N, u_1, \dots, u_N \in V(\Gamma)$ 를 생각하자. 그러면
(3.2)

$$\mathbb{P}_p \left(\omega : \Gamma(\omega) \text{ 안의 } N \text{ 개의 서로 다른 연결 성분 } C_1, \dots, C_N \text{ 가 존재해 } v_i, u_i \in C_i \text{ 임 } \right) \leq \prod_{i=1}^N \mathbb{P}_p(v_i \leftrightarrow u_i)$$

가 성립한다.

Proof. 편의상 $N = 2$ 일 때만 증명하겠다. 더 일반적인 N 에 대해서도 쉽게 확장된다.

임의의 $K \subseteq E(\Gamma)$ 에 대해

$$N(K) := \{e : e \text{는 어떤 } K \text{의 원소와 최소 한 꼭짓점을 공유함}\} = K \cup \{e : \exists f \in K [e \sim f]\}$$

라고 두겠다. 그러면 식 3.2의 좌변이

$$\begin{aligned} (3.3) \quad & \sum_{v_1, u_1 \in C_1 \subseteq \Gamma} \sum_{v_2, u_2 \in C_2 \subseteq \Gamma \setminus N(C_1)} \mathbb{P}[C_1, C_2 \text{ 둘 다 각각 } \Gamma(\omega) \text{의 연결성분임}] \\ &= \sum_{v_1, u_1 \in C_1 \subseteq \Gamma} \mathbb{P}[C_1 \text{가 } \Gamma(\omega) \text{의 연결성분임}] \cdot \sum_{v_2, u_2 \in C_2 \subseteq \Gamma \setminus N(C_1)} \mathbb{P}[C_2 \text{가 } \Gamma(\omega) \setminus N(C_1) \text{의 연결성분임}] \end{aligned}$$

보다 작거나 같다. 이때 등호가 성립하는 이유는 C_1 및 C_2 가 결정되었을 때, “ C_1 이 $\Gamma(\omega)$ 의 한 연결성분임” 및 “ C_2 가 $\Gamma(\omega) \setminus N(C_1)$ 의 한 연결성분임”은 각각 $N(C_1)$ 의 모서리들 및 $N(C_2) \setminus N(C_1)$ 의 모서리들의 개폐 여부에 의존하는 것으로, 독립적인 사건이기 때문이다. 물론 C_1 이 그 무엇이든,

$$\sum_{v_2, u_2 \in C_2 \subseteq \Gamma \setminus N(C_1)} \mathbb{P}[C_2 \text{가 } \Gamma(\omega) \setminus N(C_1) \text{의 연결성분임}] = \mathbb{P}_p[v_2 \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \setminus N(C_1)} u_2] \leq \mathbb{P}_p[v_2 \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} u_2]$$

임은 분명하다. 이로부터 식 3.3의 우변이

$$\sum_{v_1, u_1 \in C_1 \subseteq \Gamma} \mathbb{P}[C_1 \text{가 } \Gamma(\omega) \text{의 연결성분임}] \cdot \mathbb{P}_p(v_2 \leftrightarrow u_2) = \mathbb{P}_p(v_1 \leftrightarrow u_1) \mathbb{P}_p(v_2 \leftrightarrow u_2)$$

보다 작거나 같음을 알 수 있고 증명이 끝난다. \square

두번째 따름정리를 기술하기 전에, 앞에서 정의한 장벽 개념을 기억하라.

따름정리 3.2. 점 x 를 포함하고 y 는 포함하지 않는 집합 $A \subseteq G$ 에 대해 다음이 성립한다:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) &\leq \sum_{a \in \partial A} \sum_{b \in \partial A^c} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow_A a) \mathbb{P}_p(a \leftrightarrow b) \mathbb{P}_p(b \leftrightarrow y) \\ &\leq \sum_{a \in \partial A} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow_A a) \mathbb{P}_p(a \leftrightarrow y). \end{aligned}$$

Proof. 먼저 $x \leftrightarrow y$ 인 임의의 부분그래프 $\Gamma(\omega)$ 에 대해 $A \cap \Gamma(\omega)$ 안에서의 x 의 연결성분 C 와 점 $a \in C \cap \partial A$ 및 그 이웃 $b \in \partial A^c$ 를 찾을 수 있어 $b \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \setminus N(C)} y$ 임을 관찰하자. 실제로, $x \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} y$ 임을 구현하는 경로 $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ 를 하나 잡고, $x_i \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap A} x$ 인 가장 큰 i 를 잡으면 $x_{i+1} \notin A$ 여야 한다. 이 x_i 및 x_{i+1} 가 a 및 b 의 역할을 한다는 것은 분명하다.

이는 곧

$$\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) \leq \sum_{x \in C \subseteq A} \sum_{a \in C \cap \partial A} \sum_{b \in \partial A^c} \mathbb{P}_p \left(\begin{array}{l} A \cap \Gamma(\omega) \text{ 안에서의 } x \text{의 연결성분이 } C \text{이고,} \\ \overline{ab} \text{가 커져 있으며 } \Gamma(\omega) \setminus N(C) \text{에서 } b \text{와 } y \text{가 연결됨} \end{array} \right)$$

임을 의미한다. 물론 C, a, b 가 주어졌을 때, A 안에서의 x 의 연결성분이 C 인 것과 $a \leftrightarrow b$ 인 것, 그리고 $\Gamma(\omega) \setminus (N(C) \cap A)$ 에서 a 와 y 가 연결되어 있다는 것은 각각 $N(C) \cap A$, \overline{ab} 및 $\mathcal{E}(\Gamma) \setminus N(C)$ 의 모서리들에 의존하는 것으로 독립적인 사건이다. 이로써

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) &\leq \sum_{x \in C \subseteq A} \sum_{a \in C \cap \partial A} \sum_{b \in \partial A^c} \mathbb{P}_p(C \text{가 } A \cap \Gamma(\omega) \text{의 연결성분임}) \cdot \mathbb{P}_p(\omega(\overline{ab}) = 1) \mathbb{P}_p \left(a \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \setminus (N(C) \cap A)} y \right) \\ &\leq \sum_{x \in C \subseteq A} \sum_{a \in C \cap \partial A} \sum_{b \in \partial A^c, a \sim b} p \mathbb{P}_p(C \text{가 } A \cap \Gamma(\omega) \text{의 연결성분임}) \cdot \mathbb{P}_p(b \leftrightarrow y) \\ &= \sum_{a \in \partial A, b \in \partial A^c, a \sim b} p \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow_A a) \mathbb{P}_p(b \leftrightarrow y) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. \square

다음 순서인 루쏘의 공식을 소개하기에 앞서 또 다른 개념을 도입하겠다. 모서리 $e \in \mathcal{E}$ 및 상태 $\omega \in \Omega$ 가 주어졌을 때, $\{f \in \mathcal{E} : f \neq e\}$ 위에서 ω 와 일치하는 상태는 정확히 두 개가 있다. 하나는 e 가 커져 있고 다른 하나는 e 가 꺼져 있을 텐데, 전자를 ω^e , 후자를 ω_e 로 적겠다. 즉 ω^e, ω_e 중 하나는 ω 와 일치하고, 다른 하나는 정확히 ω 에서 e 의 상태만 바꾼 것이다.

이제 증가적인 사건 $A \subseteq \Omega$ 및 상태 $\omega \in \Omega$ 에 대해, e 가 ω 에서 사건 A 를 위한 중추적인 역할을 한다 (e is pivotal in ω for A)는 것은 $\omega^e \in A$ 이고 $\omega_e \notin A$ 임을 의미한다. 그리고

$$\{e \text{가 } A \text{에 중추적임}\} = \{\omega : e \text{가 } \omega \text{에서 사건 } A \text{를 위한 중추적인 역할을 함}\}$$

와 같이 줄여 적는다.

마지막으로, 단조증가함수 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 및 $p_0 \in (0, 1)$ 에 대한 디니 도함수(Dini derivative)

$$\left(\frac{d}{dp} \right)_+ f \Big|_{p=p_0} := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{f(p_0 + \epsilon) - f(p_0)}{\epsilon}$$

을 기억하자. 이제 Grigory Margulis와 Lucio Russo가 정립한 다음 공식을 소개할 수 있다.

명제 3.3. 증가적인 사건 A 및 $p_0 \in (0, 1)$ 에 대해

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dp} \right)_+ \mathbb{P}_p(A) \Big|_{p=p_0} &\geq \sum_{e \in E} \mathbb{P}_p(e \text{가 } A \text{에 중추적임}) \\ &= \frac{1}{1-p_0} \sum_{e \in E} \mathbb{P}_p(\omega(e) = 0 \text{이고 } e \text{가 } A \text{에 중추적임}) \end{aligned}$$

이다.

Proof. 먼저 \mathcal{E} 가 유한집합일 때를 다루겠다. 이 경우에,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) &= \frac{d}{dp} \sum_{\omega \in A} p^{\sum_e \omega(e)} (1-p)^{\#\mathcal{E} - \sum_e \omega(e)} \\ &= \sum_{\omega \in A} \left(\frac{1}{p} \sum_e \omega(e) - \frac{1}{1-p} (\#\mathcal{E} - \sum_e \omega(e)) \right) \cdot p^{\sum_e \omega(e)} (1-p)^{\#\mathcal{E} - \sum_e \omega(e)} \\ &= \frac{1}{p(1-p)} \sum_{e \in \mathcal{E}} \mathbb{E}_p[(\omega(e) - p) \cdot 1_{\omega \in A}] \end{aligned}$$

임은 계산을 통해 바로 확인할 수 있다. 여기서 $e \in \mathcal{E}$ 및 $\omega|_{\mathcal{E} \setminus e}$ 값을 하나 고정했을 때 $\mathbb{E}_p[(\omega(e) - p)1_{\omega \in A}]$ 가 얼마인지를 계산해 보자. 이 값은 $\omega^e \in A$ 및 $\omega_e \notin A$ 일 때에만 $p(1-p)$ 라는 양수 값을 가진다. 두 상태 ω^e 및 ω_e 가 동시에 A 에 속하거나 혹은 동시에 배제되는 경우에는, $\mathbb{E}_p[(\omega(e) - p)1_{\omega \in A}] = 0$ 이다. 마지막으로, $\omega_e \in A$ 및 $\omega^e \notin A$ 인 경우는 없다. 이는 A 가 증가적인 사건이기 때문이다. 이로부터 우변이 $\sum_{e \in \mathcal{E}} \mathbb{P}_p(e \text{가 } A \text{에 중추적임})$ 이라는 사실을 알 수 있다.

다음으로 \mathcal{E} 가 가산 무한집합인 경우, 유한 부분집합 $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ 을 임의로 잡을 수 있다. 이때, \mathcal{E}' 안의 모서리는 확률 $p_0 + \epsilon$ 로 열고, \mathcal{E}' 밖의 모서리는 확률 p_0 로 여는 확률을 $\mathbb{P}'_{p_0, \epsilon}$ 라고 했을 때

$$\mathbb{P}_{p_0+\epsilon}(A) \geq \mathbb{P}'_{p_0, \epsilon}(A) \geq \mathbb{P}_{p_0}(A)$$

가 성립한다. 이는 A 가 증가적인 사건이기 때문이다. 이제 위와 같은 계산을 하면

$$\left(\frac{d}{dp} \right)_+ \mathbb{P}_p(A) \Big|_{p=p_0} \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{\mathbb{P}'_{p_0, \epsilon}(A) - \mathbb{P}_{p_0}(A)}{\epsilon} = \sum_{e \in \mathcal{E}'} \mathbb{P}_p(e \text{가 } A \text{에 중추적임})$$

임을 알 수 있다. 이제 \mathcal{E} 를 향해 \mathcal{E}' 를 키움으로써 원하는 부등식을 얻는다. \square

이제 감수율 $\chi_p := \mathbb{E}_p \#C_{id}$ 의 거동에 관한 사실 2.6을 증명할 준비가 끝났다. 아래 증명은 Hugo Duminil-Copin과 Vincent Tassion의 현대적인 논증을 가져온 것이다 [DCT16]. 하지만 마굴리스-루쏘 공식을 이용하지 않는 Hugo Vanneuville의 논증도 참조하기를 추천한다 [Van25].

명제 3.4. 유한 생성 집합 S 이 갖춰진 무한군 G 의 캐일리 그래프 $\Gamma = Cay(G, S)$ 의 임계변수

$$p_c := \inf \{p \in [0, 1] : \theta(p) := \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega)} \infty) > 0\}$$

을 생각하자. 그러면 $\chi_p := \mathbb{E}_p \#C_{id}$ 는 $p < p_c$ 일 때 유한하고 $p = p_c$ 에서는 무한하다.

Proof. 임의의 유한 집합 $A \subseteq G$ 마다

$$\epsilon_A(p) := p \sum_{x \in \partial A, y \in \partial A^c, x \sim y} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow_A x)$$

를 정의하자. 그리고

$$p_{\text{유한}} := \sup \{p \in [0, 1] : \text{어떤 유한 집합 } id \in A \subseteq G \text{에 대해 } \epsilon_A(p) < 1 \text{임}\}$$

을 정의하자. 다음 주장을 차례로 보이겠다.

주장 3.6. 각 $p < p_{\text{유한}}$ 일 때 χ_p 는 유한하다.

이 주장을 보이기 위해 $p < p_{\text{유한}}$ 을 하나 잡겠다. 그러면 $\epsilon_A(p) < 1$ 인 유한 집합 A 가 존재한다.

다음으로, 유한 집합 $H \subseteq G$ 를 임의로 잡자. 그러면

$$\chi_{p,H}(u) := \sum_{h \in H} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow h)$$

는 $u \in G$ 가 그 무엇이든 $\#H < +\infty$ 라는 상한을 가진다. 즉 $\sup_{y \in G} \chi_{p,H}(y)$ 는 유한하다. 이제 임의의 $u \in G$ 에 대해 따름정리 3.2를 적용하면

$$\chi_{p,H \setminus uA}(u) \leq p \sum_{x \in \partial A, y \in \partial A^c, x \sim y} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow_A x) \cdot \chi_{p,H \setminus uA}(y)$$

임을 알 수 있다. 또한, $\chi_{p,uA}(u) \leq \#(uA) = \#A$ 임은 분명하다. 이로부터,

$$\chi_{p,H}(u) \leq \epsilon_A(p) \cdot \sup_{y \in G} \chi_{p,H}(y) + \#A$$

임을 알 수 있다. 여기서 $\sup_{y \in G} \chi_{p,H}(y)$ 가 유한하다는 것을 이미 알기 때문에,

$$\sup_{y \in G} \chi_{p,H}(y) \leq \frac{\#A}{1 - \epsilon_A(p)}$$

라는 결론을 내릴 수 있다. 물론 이는 $\chi_{p,H}(id) \leq \#A/(1 - \epsilon_A)$ 임을 얘기해 준다. 그런데 이 부등식은 H 의 정체에 관계없이 성립하므로, H 를 키움으로써 $\chi_p \leq \#A/(1 - \epsilon_A) < +\infty$ 까지 알 수 있다.

위 증명은 특히, $p = 1$ 에서는 $\epsilon_A(p) < 1$ 인 유한 집합 $id \in A \subseteq G$ 가 없어야 한다는 것을 보여 준다. 군 G 가 무한군이기에 $\chi_1 = +\infty$ 이기 때문이다.

주장 3.7. 매개변수가 $p = p_{\text{유한}}$ 일 때 $\chi_p = +\infty$ 이다.

이것을 확인하기 위해, $p = p_{\text{유한}}$ 및 각 n 에 대해

$$\sum_{\|g\|_S = n, \|h\|_S = n+1, g \sim h} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \geq 1/p_{\text{유한}}$$

임을 기억하라. 물론, $\|g\|_S = n$ 인 각각의 g 에 대해 $\|h\|_S = n+1, g \sim h$ 인 h 의 갯수는 기껏해야 $\#S$ 개이다. 따라서

$$\sum_{g \in (N_n(id))^c} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \geq \frac{1}{p \# S}$$

이다. 이를 $n = 1, 2, \dots$ 에 대해 모두 합하면 발산하기에 주장이 따라 나온다.

이제 남은 것은 $p_{\text{유한}} = p_c$ 임을 증명하는 것이다. 즉, 다음을 증명해야 한다:

주장 3.8. 매개변수 p 가 $p_{\text{유한}}$ 보다 조금이라도 크면 $\theta(p) > 0$ 이다.

임의의 n 에 대해,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dp}\right)_+ \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow (N_n(id))^c) &\geq \sum_{e \in N_n(id)} \mathbb{P}_p(e \stackrel{\text{def}}{=} id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap N_n(id)} (N_n(id))^c \text{에 중추적임}) \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{id \in A \subseteq N_n(id), x \sim y, x \in A \not\ni y} \mathbb{P}_p \left(\begin{array}{l} \overline{xy} \stackrel{\text{def}}{=} id \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap N_n(id)} (N_n(id))^c \text{에 중추적이고} \\ A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{임} \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{id \in A \subseteq N_n(id), x \sim y, x \in A \not\ni y} \mathbb{P}_p \left(\begin{array}{l} x \leftrightarrow_{\Gamma(\omega) \cap A} y \text{고} \\ A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{임} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

이다. 이때, 고정된 $A \subseteq N_n(id)$ 및 $x \in A \not\ni y$ 로 이루어진 모서리 \overline{xy} 에 대해, $\{x \leftrightarrow_A y\}$ 는 A 안의 모서리에 의존하고, $\{A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{임}\}$ 은 정확히 ∂A 및 A 밖의 모서리에 의존한다. 즉, 이 두 사건은 독립적이고, 두 사건이 동시에 일어날 확률은 각각의 확률의 곱이다. 이는 곧 $p \geq p_{\text{유한}}$ 일 때

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow (N_n(id))^c) &\geq \frac{1}{1-p} \left(\inf_A \epsilon_A(p) \right) \cdot \sum_{id \in A \subseteq N_n(id)} \mathbb{P}_p(A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{임}) \\
&\geq \frac{1}{1-p} \sum_{id \in A \subseteq N_n(id)} \mathbb{P}_p(A = \{x : x \not\leftrightarrow (N_n(id))^c\} \text{임})
\end{aligned}$$

이라는 사실을 의미한다. 그런데 우변의 합은 $\{id \in N_n^c(id) \text{에 이어지지 않음}\}$ 이라는 사건을 분할한 것이다. 따라서, $f_n(p) := \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow (N_n(id))^c)$ 는 $(\frac{d}{dp})_+ f_n(p) \geq 1 - f_n(p)$ 라는 방정식을 $p \geq p_{\text{유한}}$ 에서 만족한다. 이로부터 $p \in (p_c, 1]$ 구간에서 $f_n(p) \geq 1 - e^{-(p-p_c)} > 0$ 임을 얻는다. 같은 범위의 p 에 대해 $\theta(p) = \lim_n f_n(p) \geq 1 - e^{-(p-p_c)} > 0$ 을 얻는 것은 물론이다. 이로써 $p_{\text{유한}} = p_c$ 임을 확인할 수 있고 증명이 끝난다. \square

이제 무한 연결성분의 갯수 N_∞ 의 거동을 살펴볼 차례이다. 이 증명에서는 군의 작용이 필수적이다.

보조정리 3.4. 케일리 그래프 $\Gamma = Cay(G, S)$ 에 대한 p -삼투 확률분포 \mathbb{P}_p 는 군 G 의 작용에 불변하며 \mathbb{P}_p 에르고딕하다.

Proof. 먼저 유한 개의 모서리 e_1, \dots, e_n 의 개폐 여부에만 의존하는 사건 A 및 군 원소 $g \in G$ 에 대해 $\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(gA)$ 임은 분명하다. 이제

$$\mathcal{P} := \{\text{유한 개의 모서리에만 의존하는 사건}\}, \mathcal{L} := \{G \text{의 작용에 확률값이 불변인 사건}\}$$

로 정의하면 \mathcal{P} 는 \mathcal{L} 이라는 λ -체계(λ -system)에 포함되는 π -체계(π -system)이다. 따라서 Dynkin의 $\pi-\lambda$ 정리에 의해 \mathcal{L} 은 모든 보렐 집합을 포함한다. 이로써 \mathbb{P}_p 의 군 작용 불변성이 증명되었다.

두 집합 $A, B \subseteq \mathcal{E}$ 의 대칭차(symmetric difference) $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 를 기억하라. 이제

$$\mathcal{L} := \{A : \mathcal{P} \text{의 원소 나열 } \{A_n\}_{n>0} \text{에 } \lim_n \mathbb{P}_p(A \Delta A_n) = 0\}$$

를 잡으면 \mathcal{L} 또한 λ -체계이다. 역시 Dynkin의 $\pi-\lambda$ 정리에 의해 \mathcal{L} 은 모든 보렐 집합을 포함한다.

이제 \mathbb{P}_p 의 G -에르고딕성을 증명하기 위해 G -불변인 임의의 사건 A 를 하나 잡자. 또 임의의 $\epsilon > 0$ 을 하나 잡자. 그러면 $A \in \mathcal{L}$ 이므로 $\mathbb{P}_p(A \setminus A') < \epsilon$ 인 $A' \in \mathcal{P}$ 를 잡을 수 있다. 이때 A' 는 어떤 유한 개의 모서리 e_1, \dots, e_n 의 개폐 여부에만 의존한다. 이때 $Cay(G, S)$ 에 G 가 진정으로 작용하기에

$\{g : 어떤 i, j에 대해 g(e_i) = e_j\}$ 는 유한 집합인 반면 G 에는 원소가 무한히 많으므로 이 집합 바깥에 있는 $h \in G$ 를 잡을 수 있다. 그러면 A' 와 hA' 는 서로 겹치지 않는 모서리 집합들에 의존하므로 독립적인 사건이다. 이는 곧

$$\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(A \cap hA) =_{2\epsilon} \mathbb{P}_p(A' \cap hA') = \mathbb{P}_p(A') \mathbb{P}_p(hA') =_{2\epsilon+e^2} (\mathbb{P}_p(A))^2$$

임을 의미한다. 이것이 임의의 $0 < \epsilon < 1$ 에 대해 성립하려면 $\mathbb{P}_p(A)$ 는 0 또는 1이어야 한다. 이로써 에르고딕성이 증명되었다. \square

사실 2.4는 이 보조정리로부터 바로 따라 나온다. 무한 연결성분의 갯수라는 확률변수는 G 의 작용에 불변이기 때문이다. 마지막으로, 사실 2.8을 증명하겠다.

사실 2.8의 증명 모순을 이끌어내기 위해, 어떤 p 및 어떤 케일리 그래프 $\Gamma = Cay(G, S)$ 및 어떤 $N \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 에 대해 거의 확실하게 $\Gamma[p]$ 이 N 개의 무한 연결성분을 가진다고 가정해 보자. 즉 $N = +\infty$ 인 상황을 배제하고 시작하는 것이다. 이 증명에서,

$$B_k := \{\overline{vw} \in \mathcal{V}(\Gamma) : v, w \in N_k(id)\}$$

로 나타내겠다. 또, $i = 0, 1$ 에 대해 $\{\omega : 모든 e \in B_k에 대해 \omega(e) = i\text{임}\}$ 을 \mathbf{i}_k 로 나타내겠다.

이제 각각의 정수 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 에 대해,

$$E_{k;\text{열림}} := \{\omega : \Gamma(\omega)는 N개의 무한 연결성분을 가짐\} \cap \mathbf{1}_k,$$

$$E_{k;\text{닫힘}} := \{\omega : \Gamma(\omega)는 N개의 무한 연결성분을 가짐\} \cap \mathbf{0}_k,$$

$$E_{k;\text{유일}} := \{\omega : \Gamma(\omega) \setminus B_k의 무한 연결성분 중 N_k(id)와 닿아 있는 것은 한 개 이하임\}$$

을 정의하겠다. 먼저, $E_{k;\text{열림}}$ 의 여집합은 $\mathbf{1}_k^c$ 와 $\{\Gamma(\omega)\text{의 무한 연결성분이 } N\text{개가 아님}\}$ 의 합집합인데, 전자의 확률은 $1 - p^{\#B_k}$ 이고 후자의 확률은 0이다. 따라서 $\mathbb{P}_p(E_{k;\text{열림}}) = p^{\#B_k}$ 이다. 비슷한 이유로 $\mathbb{P}_p(E_{k;\text{닫힘}}) = (1-p)^{\#B_k}$ 이다.

다음으로, $E_{k;\text{유일}}$ 은 $\mathcal{E}(\Gamma) \setminus B_k$ 의 모서리들에만 의존한다. 만약 $E_{k;\text{유일}}^c$ 의 양수 확률을 가진다면,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(E_{k;\text{유일}}^c \cap \mathbf{0}_k) &= \mathbb{P}_p(E_{k;\text{유일}}^c) \mathbb{P}_p(\mathbf{0}_k) \\ &= \mathbb{P}_p(E_{k;\text{유일}}^c)(1-p)^{\#B_k} > 0 \end{aligned}$$

이다. 이 집합과 $E_{k;\text{닫힘}}$ 은 $\mathbf{0}_k$ 의 부분집합이면서 그 확률의 합이 $\mathbb{P}_p(\mathbf{0}_k) = (1-p)^{\#B_k}$ 보다 크므로, 둘의 교집합 또한 양수 확률을 가져야 한다. 그런데 $E_{k;\text{유일}}^c \cap E_{k;\text{닫힘}}$ 은

$E' := \{\omega : \Gamma(\omega) \setminus B_k의 무한 연결성분은 정확히 N개이고 그중 N_k(id)와 닿아 있는 것이 하나 이상임\}$ 에 포함되어 있으므로, E' 또한 양수 확률을 가진다. 여기서 E' 는 $\mathcal{E}(\Gamma) \setminus B_k$ 의 모서리들에만 의존하므로,

$$\mathbb{P}_p(E' \cap \mathbf{1}_k) = \mathbb{P}_p(E') \mathbb{P}(\mathbf{1}_k) > 0$$

이다. 그런데 $E' \cap \mathbf{1}_k$ 의 무한 연결성분의 갯수는 $N - 1$ 개 이하이다. $\Gamma(\omega) \setminus B_k$ 의 무한 연결성분 최소 두 개가 B_k 의 모서리들에 의해 연결되기 때문이다. 이는 곧 $\mathbb{P}_p(E_{k;\text{열림}}) < p^k$ 임을 의미해 모순이다.

따라서, $\mathbb{P}(E_{k;\text{유일}}) = 0$ 이다. 이것이 모든 k 에 대해 성립하므로,

$$\cup_k E_{k;\text{유일}} = \{\omega : \Gamma(\omega)\text{의 무한 연결성분은 한 개 이상임}\}$$

또한 확률이 0이다. 이는 곧 $N = 0$ 혹은 $N = 1$ 임을 의미하고, 이로써 증명이 끝난다. \square

3.3. 행렬 해석 이 절과 다음 절에서는 [Hut19]의 이론을 설명하겠다. 다만 세세한 점을 일부 부연한다.

어떤 유한 생성되는 무한군 G 의 (대칭적인) 유한 생성 집합을 선택해 만든 Cayley 그래프 Γ 를 이 절 내내 고정하겠다. 이때 Γ 의 꼭짓점 집합 $\mathcal{V}(\Gamma)$ 은 G 와 같다. 또, Γ 의 정의에 사용된 유한 생성 집합의 크기를 D 로 적겠다. 그러면 Γ 는 모든 점에서의 차수가 D 로 동일한 정규 그래프(regular graph)이다.

이 절의 핵심은 행렬의 L^2 -노름이다. 먼저, G -차원 벡터 $v \in \mathbb{R}^G$ 에 대해

$$\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{g \in G} (v(g))^2}$$

로 두고, $\|\cdot\|_2$ -노름이 유한한 벡터의 공간을 $L_2^{(G)}$ 로 표기하겠다. 이때, 코시-슈바르츠 부등식에 의해 $\|\sum_i v_i\|_2 \leq \sum_i \|v_i\|_2$ 임을 유의하라.

이제 G 위에 정의된 음이 아닌 대칭행렬 $M : \mathbb{R}_{\geq 0}^{G \times G}$ 에 대해

$$\|M\|_{2 \rightarrow 2} := \sup \left\{ \frac{\|Mf\|_2}{\|f\|_2} : f \in L^2(G), f \neq 0 \right\}$$

으로 정의하겠다. 이때 $\|M_1 M_2\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|M_1\|_{2 \rightarrow 2} \cdot \|M_2\|_{2 \rightarrow 2}$ 임은 쉽게 확인할 수 있다. 사실은 비슷하게

$$\|M\|_{1 \rightarrow 1} := \sup_{v \in G} \sum_{u \in G} M(u, v)$$

를 정의할 수 있다. 이때 다음을 확인하자.

사실 3.9. 모든 음이 아닌 대칭행렬 $M : \mathbb{R}_{\geq 0}^{G \times G}$ 에 대해

$$\|M\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|M\|_{1 \rightarrow 1}.$$

이다. 특히, $\|M\|_{1 \rightarrow 1}$ 이 유한할 때 M 은 $L^2(G)$ 위에서의 연속 작용소이다.

아래 증명은 [Woe00]의 10.A절에서 발췌한 것이다.

Proof. 스칼라배를 감안했을 때, $\|M\|_{1 \rightarrow 1} \leq 1$ 인 경우에만 증명하면 충분하니 그 경우에 집중하겠다. 이때 임의의 $n \geq 0$ 에 대해 M^n 은 각 항이 유한한 값을 가지는 음이 아닌 행렬이고 $\|M^n\|_{1 \rightarrow 1} \leq 1$ 이라는 것은 바로 확인할 수 있다.

먼저, $L^2(G)$ 의 조밀한 부분공간인 유한 서포트 가지는 음이 아닌 벡터들의 공간

$$c_0(G) := \{f \in \mathbb{R}_{\geq 0}^G : \#\{g : f(g) \neq 0\} < +\infty\}$$

및 음이 아닌 벡터들의 공간 $P(G) := \mathbb{R}_{\geq 0}^G$ 을 생각하겠다. 임의의 $f_1, f_2 \in P(G)$ 에 대해

$$(3.5) \quad \langle f_1, Mf_2 \rangle = \sum_{u \in G} f_1(u) \cdot \sum_{v \in G} M(u, v) f_2(v) = \sum_{v \in G} f_2(v) \cdot \sum_{u \in G} M(v, u) f_1(u) = \langle Mf_1, f_2 \rangle$$

임을 기억하라.

먼저 벡터 $f \in c_0(G) \cap P(G)$ 을 하나 생각하겠다. 즉, 유한 개의 원소 $g_1, \dots, g_N \in G$ 및 $c_1, \dots, c_N > 0$ 이 존재하여 $g = g_i$ 일 때 $f(g) = c_i$, 그리고 $g \notin \{g_1, \dots, g_N\}$ 일 때 $f(g) = 0$ 이라고 하겠다. 증명하고자 하는 것은 $\langle Mf, Mf \rangle \leq \langle f, f \rangle$ 이다. 만약 $Mf = 0$ 이라면 이 부등식은 바로 따라 나온다. 따라서 그렇지 않은 경우에 집중하겠다.

이때, $\langle M^n f, M^n f \rangle = \langle f, M^{2n} f \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i M^{2n}(g_i, g_j) c_j$ 는 유한합이기에 그 값은 유한해야 한다. 더하여, 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$\langle M^{n+1} f, M^{n+1} f \rangle^2 = \langle M^n f, M^{n+2} f \rangle^2 \leq \langle M^n f, M^n f \rangle \cdot \langle M^{n+2} f, M^{n+2} f \rangle$$

임을 얻는다. 가정인 $f \neq 0 \neq Mf$ 를 초기 경우로 삼고 이 부등식을 귀납적으로 적용하면, 각 n 에 대해 $M^n f$ 가 0벡터가 아님을 알 수 있다. 또한, $a_n := \frac{\langle M^n f, M^n f \rangle}{\langle M^{n-1} f, M^{n-1} f \rangle}$ 가 단조증가수열임을 알 수 있다:

$$(3.6) \quad \frac{\langle Mf, Mf \rangle}{\langle f, f \rangle} \leq \frac{\langle M^2 f, M^2 f \rangle}{\langle Mf, Mf \rangle} \leq \frac{\langle M^3 f, M^3 f \rangle}{\langle M^2 f, M^2 f \rangle} \leq \dots$$

이제 귀류법을 적용하기 위해 $a_1 > 1$ 이라고 가정해 보자. 그러면

$$a_1^m > \frac{\left(\sum_{i=1}^N c_i \right)^2}{\langle f, f \rangle}$$

가 성립하게끔 하는 충분히 큰 m 을 잡을 수 있다. 이 m 에 대하여

$$\langle M^m f, M^m f \rangle = \langle f, f \rangle \cdot \prod_{i=1}^m a_i > \left(\sum_{i=1}^N c_i \right)^2$$

임을 알 수 있다. 그런데,

$$\begin{aligned} \langle M^m f, M^m f \rangle &= \langle f, M^{2m} f \rangle = \sum_{i=1}^N c_i \cdot \sum_{j=1}^N M^{2m}(g_i, g_j) c_j \\ &\leq \sum_{i=1}^N c_i \cdot \left(\max_{j=1}^N c_j \cdot \sum_j M^{2m}(g_i, g_j) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^N c_i \cdot \max_{j=1}^N c_j \leq \left(\sum_{i=1}^N c_i \right)^2 \end{aligned}$$

가 성립하기에 이는 모순이다. 따라서 $a_1 \leq 1$, 즉 $\|Mf\|_2 \leq \|f\|_2$ 이다.

이제 f 가 $L^2(G) \cap P(G)$ 의 원소일 때 $\langle Mf, Mf \rangle \leq \langle f, f \rangle$ 임을 증명해 보겠다. 이때 G 를 적당히 $\{g_1, g_2, \dots\}$ 라고 정렬하고,

$$f_n(g_j) = \begin{cases} f(g_j) & j = 1, \dots, n \\ 0 & j > n \end{cases}$$

라는 근사 벡터를 만들면 각 f_n 은 $c_0(G) \cap P(G)$ 의 원소이다. 따라서 방금 증명했듯 $\langle Mf_n, Mf_n \rangle \leq \langle f_n, f_n \rangle$ 이다. 또한,

$$\langle f, f \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} f(g_j)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(g_j)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, f_n \rangle$$

이고, 또한 $M, f \geq 0$ 이라는 점을 사용하면

$$\langle Mf, Mf \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(g_i) f(g_k) M^2(g_i, g_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(g_i) f(g_k) M^2(g_i, g_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Mf_n, Mf_n \rangle$$

임을 얻는다. 이를 결합하면 바라던 부등식 $\langle Mf_n, Mf_n \rangle \leq \langle f_n, f_n \rangle$ 을 얻는다.

남은 경우는 f 가 $L^2(G) \setminus P(G)$ 에 살 때인데, 이때 각 계수에 절대값을 씌워 만든 벡터 $|f|$ 는

$$\langle Mf, Mf \rangle \leq \langle M|f|, M|f| \rangle \leq \langle |f|, |f| \rangle = \langle f, f \rangle$$

를 만족한다는 것을 알 수 있다. 이로써 증명이 끝난다. □

이제 각 $p \in [0, 1]$ 마다 G 에서 G 로 향하는 대칭행렬 $T_p : G^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 을 다음과 같이 잡겠다:

$$T_p(u, v) := \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) := \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v).$$

앞에서 행렬의 L^2 -노름을 정의하였는데, 이를 이용해

$$p_{2 \rightarrow 2} := \sup \{p : \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} < \infty\}$$

를 정의하겠다. 참고로, $p \in [0, p_c)$ 인 경우에는 각 $u \in G$ 에 대해

$$\sum_{v \in G} T_p(u, v) =: \chi_p < +\infty$$

임을 알 수 있다. 이는 곧 $\|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|T_p\|_{1 \leftrightarrow 1} \leq \chi_p < +\infty$ 라는 얘기인즉, $p_{1 \leftrightarrow 1} \leq p_c \leq p_{2 \rightarrow 2}$ 이다.

이제

$$p_u := \inf \{p : \text{거의 확실하게 } \Gamma[p] \text{가 무한 연결성분을 정확히 한 개 가지고 있음}\}$$

이었음을 기억하라. 이때 $p_c \leq p_u$ 임은 이미 알려져 있다. 또한, 각각의 $p > p_c$ 마다 $\mathbb{P}_p(C(id))$ 가 무한히 큼은 양수라는 것을 기억하라. 이 값을 ϵ_p 라고 표시하자. 각각의 $q > p_u$ 마다, $\Gamma[q]$ 가 무한 연결성분을 정확히 한 개 가질 확률이 1인 $q > p \geq p_u$ 가 존재한다. 그 p 에 대해, 임의의 $u, v \in \Gamma$ 에 대해

$\mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) \geq \mathbb{P}_p(u \text{가 (유일한) 무한 연결성분에 포함됨}) \cdot \mathbb{P}_p(v \text{가 (유일한) 무한 연결성분에 포함됨}) \geq \epsilon_p^2 > 0$ 이다. 즉, T_p 는 각 항이 ϵ_p^2 보다 큰 무한 행렬인 것이다. 이는 곧

$$\chi_q \geq \chi_p = \sum_{g \in G} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \geq \sum_{g \in G} \epsilon_p^2 = +\infty$$

임을 의미한다. 비슷한 이유로, $\|T_q\|_{2 \rightarrow 2}$ 또한 무한대이다. 따라서 $p_{1 \leftrightarrow 1} \leq p_{2 \rightarrow 2} \leq p_u$ 이다.

우리의 목표는 $p_c < p_{2 \rightarrow 2}$ 를 증명하는 것, 다시 말해 $p_c = p_{2 \rightarrow 2}$ 인 경우를 배제하는 것이다. 이 목표에 다다를 수 있는 기준을 이제부터 살펴보겠다. 먼저,

$$A(u, v) := \begin{cases} 1 & \Gamma \text{ 안에서 } u \sim v \\ 0 & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

라는 행렬을 정의하자. 이 행렬을 인접성 행렬(adjacency matrix)이라고 부른다. 이 절 첫머리에, Γ 가 D 차수 정규 그래프임을 강조했다. 따라서 $\|A\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|A\|_{1 \rightarrow 1} = D$ 이다. 이제 다음을 관찰하겠다.

보조정리 3.5. 각각의 $0 \leq p < p_{2 \rightarrow 2}$ 에 대해

$$\|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \geq \frac{1-p}{D(p_{2 \rightarrow 2} - p)}$$

가 성립한다.

Proof. 이를 귀류법으로 증명하기 위해, 어떤 $q > p_{2 \rightarrow 2}$ 에 대해

$$\|T_p\|_{2 \rightarrow 2} < \frac{1-p}{D(q-p)}$$

라고 가정한 뒤 모순을 이끌어내겠다.

이번 증명에서는 $\Gamma = (\mathcal{V}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma))$ 를 복제하겠다. 즉, $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ 는 Γ 와 똑같이 생긴 그래프이다. 이때 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 에 대응하는 $\Gamma^{(i)}$ 의 모서리를 $e^{(i)}$ 라고 표기하겠다. 꼭짓점에 대해서도 비슷하게 하겠다.

이제, $\Gamma^{(1)}$ 에서는 p -삼투 과정을, $\Gamma^{(2)}$ 에서는 $\frac{q-p}{1-p}$ -삼투 과정을 독립적으로 진행한 뒤 포개어 융합하겠다. 더 염밀하게 말하자면, $\Gamma^{(1)}[p]$ 와 $\Gamma^{(2)}[\frac{q-p}{1-p}]$ 를 독립적으로 진행한 뒤, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 를 다음과 같이

정의한다는 것인데, 어떤 모서리 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 가 Γ' 에서 열려 있을 필요충분조건은 $e^{(1)}$ 가 $\Gamma^{(1)}$ 에서 열려 있거나 혹은 $e^{(2)}$ 가 $\Gamma^{(2)}$ 에서 열려 있다는 것이다.

이렇게 하면, Γ' 에서 어떤 모서리 $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ 가 닫혀 있을 확률은 $(1-p) \cdot (1 - \frac{q-p}{1-p}) = 1-q$ 이다. 또 Γ 의 각 모서리의 Γ' 에서의 개폐 여부는 독립적이다. 따라서 Γ' 는 q -삼투 과정을 모사하는 모델이다.

이때 임의의 $u, v \in G$ 에 대해

$$\{u \leftrightarrow_{\Gamma'} v\} \subseteq \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{v_i, u_i\}_{i=1}^N \subseteq G} \left\{ \begin{array}{l} \text{순서쌍 } (u_0^{(1)}, v_1^{(1)}), \dots, (u_{N-1}^{(1)}, v_N^{(1)}) \text{이 서로 다른} \\ N \text{개의 } \Gamma^{(1)}\text{-연결성분에 들어 있고,} \\ \text{각 } i \text{마다 } \overline{v_{i+1}^{(2)} u_{i+1}^{(2)}} \in \mathcal{E}(\Gamma^{(2)}) \end{array} : u_0 = u, v_{N+1} = v \right\}$$

이다. 왼쪽 사건에 들어 있는 원소, 즉 u 와 v 가 어떤 Γ' -경로로 이어져 있는 경우에, u 와 같은 $\Gamma^{(1)}$ -연결 성분에 있으면서 P 상에서 가장 나중에 오는 점을 v_1 이라고 잡으면 v_1 과 그 다음 점은 $\Gamma^{(1)}$ 에서 이어져 있을 수 없고 따라서 $\Gamma^{(2)}$ 의 모서리로 연결되어 있기 때문이다.

이제 각 N 및 $\{v_i, u_i\}_{i=1}^N \subseteq G$ 에 대해, $(u_0 = u, v_{N+1} = v)$ 로 설정했을 때)

$$(3.7) \quad \mathbb{P} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{(1)} \text{ 안의 서로 만나지 않는 경로} \\ P_0, \dots, P_N \text{이 존재해 } u_i^{(1)} \leftrightarrow_{P_i} v_{i+1}^{(1)} \text{이고, } : u_0 = u, v_{N+1} = v \\ \overline{v_{i+1}^{(2)} u_{i+1}^{(2)}} \in \mathcal{E}(\Gamma^{(2)}) \end{array} \right\} \leq \prod_{i=0}^N \mathbb{P}_p(u_i \leftrightarrow v_i) \cdot \left(\frac{q-p}{1-p} \right)^N \cdot \prod_{i=1}^N A(v_i, u_i)$$

인데, 그 이유를 설명하겠다. 먼저, $\Gamma^{(1)}$ 에서의 연결 여부와 $\Gamma^{(2)}$ 에서의 연결 여부는 독립이다. 더하여,

$$\mathbb{P} \left(\Gamma^{(1)} \text{ 안의 서로 만나지 않는 경로 } P_0, \dots, P_N \text{이 존재해 } u_i^{(1)} \leftrightarrow_{P_i} v_{i+1}^{(1)} \text{임} \right) \leq \prod_{i=0}^N \mathbb{P}_p(u_i \leftrightarrow v_i)$$

인 것은 BK 부등식(혹은 따름정리 ??)에 의한 것이다. 또, $\overline{v_1^{(2)} u_1^{(2)}}, \dots, \overline{v_N^{(2)} u_N^{(2)}}$ 각각이 $\mathcal{E}(\Gamma^{(2)})$ 에 속하는 사건은 모두 독립적이고 각각의 확률은 $A(v_i, u_i) \cdot \left(\frac{q-p}{1-p} \right)$ 이다. 이로써 식 3.7의 설명이 끝난다. 이를 요약하면

$$T_q(u, v) = \mathbb{P}_q(u \leftrightarrow v) \leq \sum_{N=0}^{\infty} T_p \left(\frac{q-p}{1-p} AT_p \right)^N (u, v)$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \|T_q\|_{2 \rightarrow 2} &\leq \left\| \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{q-p}{1-p} \right)^N T_p (AT_p)^N \right\|_{2 \rightarrow 2} \leq \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{q-p}{1-p} \right)^N \|T_p (AT_p)^N\|_{2 \rightarrow 2} \\ &\leq \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \cdot \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{q-p}{1-p} \|A\|_{2 \rightarrow 2} \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \right)^N \end{aligned}$$

임을 확인할 수 있다. 이때, $\|A\|_{2 \rightarrow 2} \leq D$ 라는 것은 일전에 확인했다. 따라서

$$\frac{q-p}{1-p} \|A\|_{2 \rightarrow 2} \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \leq \frac{q-p}{(1-p)} D \|T_p\|_{2 \rightarrow 2} < 1$$

이다. 이는 식 3.8 우변의 급수가 수렴한다는 것을 의미한다. 하지만 $q > p_{2 \rightarrow 2}$ 이기에 좌변은 무한대여야 하고, 이는 모순이다. 이로써 증명이 끝난다. \square

이제, 각각의 $0 \leq p < p_c$ 에 대해

$$\begin{aligned}\iota(T_p) &:= \inf \left\{ \frac{\sum_{u \in A, v \notin A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} : A \text{는 } G \text{의 유한집합} \right\} \\ &= 1 - \sup \left\{ \frac{\sum_{u, v \in A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} : A \text{는 } G \text{의 유한집합} \right\}\end{aligned}$$

를 정의하자. 이는 등주상수(isoperimetric constant)라고 불린다. 아래 증명은 [Woe00, Prop I.4.3] 혹은 [LP16, Lem 6.8]에서 가져온 것이다.

보조정리 3.6. 각각의 $0 < p < p_c$ 에 대해 다음 식이 성립한다:

$$\|T_p\|_{2 \rightarrow 2} \leq \chi_p \sqrt{1 - \iota(T_p)^2}.$$

Proof. 먼저, 각각의 $f \in c_0(G) \cap P$ 에 대해

$$(3.9) \quad \iota(T_p) \|f\|_1 \leq \frac{1}{2\chi_p} \left(\sum_{v, w \in G} |f(v) - f(w)| \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right)$$

가 성립한다는 것을 보이겠다. 먼저, 우변은

$$\begin{aligned}\sum_{v, w \in G: f(v) > f(w)} (f(v) - f(w)) \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \chi_p^{-1} &= \sum_{w \in G} \sum_{v \in G: f(v) > f(w)} \chi_p^{-1} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \cdot \int_{f(w)}^{f(v)} 1 dt \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{v, w: f(w) \leq t < f(v)} \chi_p^{-1} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right) dt \\ &= \chi_p^{-1} \cdot \int_0^\infty \left(\sum_{v \in \{f > t\}, w \notin \{f > t\}} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right) dt\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이때, 피적분항은 등주상수로 다스릴 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}\chi_p^{-1} \cdot \int_0^\infty \left(\sum_{v \in \{f > t\}, w \notin \{f > t\}} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right) dt &\geq \chi_p^{-1} \int_0^\infty \iota(T_p) \cdot \chi_p \#\{u : f(u) > t\} dt \\ &= \iota(T_p) \sum_{u \in G} f(u) = \iota(T_p) \|f\|_1\end{aligned}$$

이기에 주장이 증명되었다.

이제 임의의 $f \in c_0(G) \cap P$ 에 대해 부등식 3.9을 활용하면

$$\begin{aligned}\iota(T_p)^2 \|f\|_2^4 &= \iota(T_p)^2 \|f^2\|_1^2 \leq \frac{1}{4\chi_p^2} \left(\sum_{v, w \in G} |f^2(v) - f^2(w)| \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\chi_p^2} \left(\sum_{v, w \in G} |f(v) - f(w)| (f(v) + f(w)) \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\chi_p^2} \left(\sum_{v, w \in G} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) (f(v) - f(w))^2 \right) \cdot \left(\sum_{v, w \in G} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) (f(v) + f(w))^2 \right) \quad (\because \text{코시-슈바르츠})\end{aligned}$$

을 얻는다. 이때,

$$\sum_{v,w \in G} \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow w) (f^2(v) + f^2(w) \pm 2f(v)f(w)) = \sum_{v \in G} \chi_p f^2(v) + \sum_{w \in G} \chi_p f^2(w) \pm 2\langle f, T_p f \rangle = 2\chi_p \langle f, f \rangle \pm 2\langle f, T_p f \rangle$$

이다. 이로부터

$$\|f\|_2^4 \iota(T_p)^2 \leq \|f\|_2^4 - \frac{\langle f, T_p f \rangle^2}{\chi_p^2}$$

임을 알 수 있다. 이는 다시 말해

$$\chi_p^2 (1 - \iota(T_p)^2) \geq \frac{\langle f, T_p f \rangle^2}{\langle f, f \rangle^2}$$

임을 의미한다. 또 $\langle |f|, T_p |f| \rangle \geq \langle f, T_p f \rangle$ 이므로, 이 계산은 임의의 $f \in c_0(G)$ 에 대해서도 유효하다. 마지막으로, $c_0(G)$ 는 $L^2(G)$ 안에서 조밀하고 T_p 는 연속 작용소이므로 이 계산은 $f \in L^2(G)$ 에 대해서도 유효하다. 따라서

$$K := \sup \left\{ \frac{|\langle f, T_p f \rangle|}{\|f\|_2} : f \in L^2(G) \setminus \{0\} \right\}$$

는 $\chi_p \sqrt{1 - \iota(T_p^2)}$ 보다 작거나 같다.

이제 $K \geq \|T_p\|_{2 \rightarrow 2}$ 만 확인하면 된다. 이를 위해 임의의 $f \in L^2(G)$ 를 가져온 뒤 $g = T_p f$ 로 두자. 그러면 임의의 $t > 0$ 에 대해

$$\begin{aligned} 4\langle tg, T_p f \rangle &= \langle T_p(f + tg), f + tg \rangle - \langle T_p(f - tg), f - tg \rangle \\ &\leq K|f + tg|^2 + K|f - tg|^2 \end{aligned}$$

이므로

$$4\langle g, T_p f \rangle \leq 2K \left(\frac{1}{t} \|f\|_2^2 + t\|g\|_2^2 \right) \quad (\forall t > 0)$$

가 되어야 한다. 이것이 가능하려면 $4\langle g, T_p f \rangle \leq 4K\|f\|_2\|g\|_2$ 여야 하고, 이로부터

$$\frac{\langle T_p f, T_p f \rangle}{\|f\|_2^2} \leq K \cdot \frac{\|T_p f\|_2}{\|f\|_2} \leq K^2$$

임을 알 수 있다. 이로부터 $K \geq \|T_p\|_{2 \rightarrow 2}$ 가 증명되었다. (사실 둘은 같은 값이다.) \square

3.4. 명제 3.2의 증명 보조정리 3.5 및 3.6를 결합하면, $0 \leq p < p_c$ 각각에 대해

$$\frac{1}{D} \leq \frac{1}{1-p} (p_{2 \rightarrow 2} - p) \cdot \chi_p \sqrt{1 - \iota(T_p)^2}$$

임을 알 수 있다. 또, 우리가 다루는 군들은 자유군을 부분군으로 가지기에 사실 2.7에 의해 $p_c < 1$ 이다. 따라서, 만약 $p_{2 \rightarrow 2} = p_c < 1$ 이 성립한다면,

$$\lim_{p \nearrow p_c} (p_c - p) \chi_p \cdot \sqrt{1 - \iota(T_p)^2} = \frac{1}{D(1 - p_c)} > 0$$

이어야만 한다.

이를 감안했을 때, $p_c < p_{2 \rightarrow 2}$ 를 통해 명제 3.2를 증명하기 위해서는 다음 명제 3.5와 명제 3.6만 증명하면 되고, 이것이 이 절의 내용이다.

명제 3.5. 자유 부분군을 가지는 대강 반전 가능한 군 G 와 그 유한 생성 집합 S 를 하나 고정하자. 그러면 케일리 그래프 $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ 의 임계 변수 $p_c = p_c(\Gamma)$ 에 대해,

$$\limsup_{p \nearrow p_c} (p_c - p) \chi_p < +\infty$$

가 성립한다.

Proof. 구간 $p = [0, p_c)$ 위에서 χ_p 는 단조증가함수였다는 것을 기억하라. 우리 목표는 어떤 양수 $C > 0$ 에 대해

$$\left(\frac{d}{dp} \right)_+ \chi_p \geq C \chi_p^2$$

구간 $p \in [0.5p_c, p_c)$ 위에서 성립한다는 것을 보이는 것이다. 실제로, 위 부등식만 있으면

$$\chi_p^{-1} = -(\chi_{p_c}^{-1} - \chi_p^{-1}) \geq - \int_p^{p_c} \left(\frac{d}{dp} \right)^+ \chi_p^{-1} dp = \int_p^{p_c} \chi_p^{-2} \left(\frac{d}{dp} \right)_+ \chi_p dp = C(p_c - p)$$

가 동일한 구간에서 성립함을 확인할 수 있다.

이제 감수율의 디니 도함수를 계산해 보겠다. 마굴리스-루쏘의 공식에 의해,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dp} \right)_+ \sum_{g \in G} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) &\geq \frac{1}{1-p} \sum_{g \in G} \sum_{e \in \mathcal{E}(\Gamma)} \mathbb{P}_p(e \nmid id \leftrightarrow g \text{에 중추적이고 닫혀 있음}) \\ (3.10) \quad &= \frac{1}{1-p} \sum_{g \in G} \sum_{v, w \in G, v \sim w} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow v \wedge v \not\leftrightarrow w \wedge w \leftrightarrow g) \\ &= \frac{1}{1-p} \sum_{g \in G} \sum_{v, w \in G, v \sim w} \mathbb{P}_p(v^{-1} \leftrightarrow id \wedge id \not\leftrightarrow v^{-1}w \wedge v^{-1}w \leftrightarrow vg) \\ &= \frac{1}{1-p} \sum_{g, h \in G} \sum_{s \in S} \mathbb{P}_p(h \leftrightarrow id \wedge id \not\leftrightarrow s \wedge s \leftrightarrow g) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 여기서 세번째 줄에서는 확률이 $v^{-1} \in G$ 의 작용에 불변임을 사용했다.

다음으로, 군 G 가 대강 반전하다는 사실을 구현하는 부분집합 $A_1, \dots, A_N \subseteq G$ 및 원소 g_1, \dots, g_N 을 잡자. 이제 임의의 유한집합 $A \subseteq G$ 및 임의의 원소 $a \in G$ 마다

$$I(a, A) := \begin{cases} 1 & A \subseteq aA_i \subsetneq ag_iA_i^c \text{이게끔 하는 } i \text{가 존재함} \\ 0 & \text{그외의 경우} \end{cases}$$

를 정의하자. 군 G 가 대강 반전 가능하기에, $\sum_{a \in A} I(a, A)$ 는 항상 $\#A$ 의 절반 이상이다.

이제, 삼투 과정을 위한 확률공간 Ω 위에서 함수 $F : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{R}$ 을 다음과 같이 잡아 주겠다:

$$F(\omega, a) := I(a, C_{id}(\omega)) \cdot 1_{a \in C_{id}(\omega)}.$$

그리면 p 의 값이 그 무엇이든

$$\sum_{a \in G} \mathbb{E}_p F(\omega, a) = \mathbb{E}_p \sum_{a \in C_{id}(\omega)} I(a, C_{id}(\omega)) \geq \mathbb{E}_p \left(\frac{1}{2} \#C_{id}(\omega) \right) = \frac{1}{2} \chi_p$$

임을 알 수 있다. 그런데 좌변의 항은

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in G} \mathbb{E}_p F(\omega, a) &= \sum_{a \in G} \mathbb{E}_p F(\omega, a^{-1}) = \mathbb{E}_p \sum_{a: a^{-1} \in C_{id}(\omega)} I(a^{-1}, C_{id}(\omega)) \\
&= \mathbb{E}_p \sum_{a: id \in C_a(\omega)} I(id, C_a(\omega)) \\
&= \mathbb{E}_p \sum_{a \in C_{id}(\omega)} I(id, C_a(\omega)) = \mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot I(id, C_{id}(\omega))] \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \subsetneq g_i A_i^c}]
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이 부등식들을 조합하면, 어떤 $i \in \{1, \dots, N\}$ 가 존재하여

$$\mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \subsetneq g_i A_i^c}] \geq \frac{1}{2N} \chi_p$$

가 성립함을 알 수 있다. 마찬가지 이유로,

$$\mathbb{E}_p [\#C_{g_i}(\omega) \cdot 1_{C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}] \geq \frac{1}{2N} \chi_p$$

임을 알 수 있다. 또한, 확률변수 $\#C_{id}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i}$ 및 $\#C_{g_i}(\omega) \cdot 1_{C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}$ 는 독립적인 변수이다. 이들은 각각 A_i 및 $g_i A_i$ 라는 서로 겹치지 않는 모서리 집합에 의존하기 때문이다. 따라서,

$$\mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot \#C_{g_i}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \wedge C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}] \geq \frac{1}{4N^2} \chi_p^2$$

라는 계산을 얻는다.

이제, 적당한 $0 < L' < L$ 에 대해, id 에서 g_i 를 잇는 d_S -경로 $\gamma_i = (v_0, v_1, \dots, v_L)$ 으로 $v_0, \dots, v_{L'} \in g_i A_i$ 및 $v_{L'+1}, \dots, v_L \in A_i^c$ 인 그러한 경로를 하나 잡자. 이는 g_1, \dots, g_N 및 A_1, \dots, A_N 에 대해 염려진 가정이었다. 이제 $v := v_{L'}$ 과 $v' = v_{L'+1}$ 을 잡고, γ_i 의 v 이전 부분을 $[v_0 v]$, v' 이후 부분을 $[v' g_i]$ 로 적겠다.

이제 어떤 양수 c_p 에 대해

$$\mathbb{E}_p [(\#C_v)(\#C_{v'}) 1_{v \neq v'}] \geq c_p \mathbb{E}_p [\#C_{id}(\omega) \cdot \#C_{g_i}(\omega) \cdot 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \wedge C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}]$$

임을 보이겠다. 이를 위해, 우변에서 다루는 상태 $\omega \in \Omega$ 를 좌변에 맞게끔 변형하는 사상 $F : \Omega \rightarrow \Omega$ 를 정의하겠다. 먼저 $C_{id}(\omega) \subseteq A_i$ 이고 $C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i$ 인 $\omega \in \Omega$ 를 준비하자.

- (1) 먼저, $[v_0 v]$ 및 $[v' g_i]$ 의 모든 모서리는 열고, $\overline{vv'}$ 는 닫아 주겠다.
- (2) 다음으로, $[v_0 v]$ 에 인접해 있는 모서리 중 최소 한 끝점이 $C_{id}(\omega)$ 에 들어 있지 않은 모서리는 닫아 주겠다.
- (3) 마찬가지로, $[v' g_i]$ 에 인접해 있는 모서리 중 최소 한 끝점이 $C_{g_i}(\omega)$ 에 들어 있지 않은 모서리는 닫아 주겠다.

이 작업이 끝났을 때 만들어지는 상태를 $F(\omega)$ 라고 적겠다.

위에서 수행한 조작은 (랜덤하지 않고 정확하게 명시된) $N_1(\gamma_i)$ 안의 모서리의 개폐 여부만 바꿨다는 사실에 주목하라. 즉, 기껏해야 $\#S \cdot L$ 개의 모서리만 조작한 것이다. 따라서 각 상태 ω 마다 $\#F^{-1}(\omega)$ 의 크기는 $(\#S) \cdot L$ 이하이고, 또 라돈-니코딤 도함수의 크기에 관해

$$\frac{d\mathbb{P}_p F^*(\cdot)}{d\mathbb{P}_p(\cdot)} \geq \min \left(\frac{1-p}{p}, \frac{p}{1-p} \right)^{(\#S) \cdot L}$$

라는 부등식이 성립한다. 이제 상태 $F(\omega)$ 의 그래프에서

$$C_{id}(F(\omega)) = C_{id}(\omega) \cup [v_0v]$$

임을 확인하고자 한다. 먼저, $C_{id}(\omega)$ 의 임의의 점이 $\Gamma(F(\omega))$ 에서 어떻게 들어 있는지 보기 위해, id 에서 그 점으로 향하는 $\Gamma(\omega)$ -경로에 속하는 모서리 e 를 잡자. 이때 $v' \notin A_i \supseteq C_{id}(\omega)$ 이므로 $e = \overline{vv'}$ 일리는 없기에 조작 (1)이 e 를 닫을 일은 없다. 조작 (2)가 e 를 닫을 일도 없다. 마지막으로, $C_{id}(\omega) \subseteq A_i$ 는 $[v'g_i]$ 와 만나지 않기에, 조작 (3)이 e 를 닫을 일도 없다. 즉, $F(\omega)$ 에서도 이 경로는 살아 있고, $C_{id}(\omega)$ 의 임의의 점은 $\Gamma(F(\omega))$ 에서도 id 에 연결되어 있다.

다음으로, $[v_0v]$ 위의 각 모서리들은 (기존 개폐 여부와 관계없이) 조작에 의해 열리니 모두 $C_{id}(F(\omega))$ 에 속한다. 이제 반대 방향 포함 관계를 보이기 위해, $\Gamma(F(\omega))$ 에서 id 와 연결되어 있는 점 u 과, 그것을 구현하는 $\Gamma(F(\omega))$ -최단 경로 ($id = u_0, u_1, \dots, u_T = u$)를 생각하겠다. 이때 $t = \max\{i : u_i \in C_{id}(\omega) \cup [v_0v]\}$ 라고 하자. 만약 $t = T$ 라면 이는 우리가 원하는 바이다. 만약 그렇지 않다면, u_{t+1} 은 $C_{id}(\omega)$ 에도 $[v_0v]$ 에도 들어있지 않은 점이 된다. 만약 $u_t \in [v_0v]$ 라면, 작업 (2)에 의해 $\overline{u_t u_{t+1}}$ 은 “강제로 닫혔어야 하기에” 모순이 생긴다. 만약 $u_t \in C_{id}(\omega) \setminus [v_0v]$ 라면, u_t 는 A_i 안의 점이고 따라서 $[v'g_i]$ 위에 도 있을 수 없다. 즉, $[u_t u_{t+1}]$ 는 작업 (1)에 의해 새로 열린 모서리는 아니라는 뜻이다. 그럼에도 열려 있다는 것은 $\Gamma(\omega)$ 에서도 열려 있었다는 뜻이고, 따라서 $u_{t+1} \in C_{id}(\omega)$ 이어야 하는데 이는 모순이다. 이로써 $t = T$ 이고 $u \in C_{id}(\omega) \cup [v_0v]$ 임을 알 수 있다.

마찬가지 이유로, $C_{g_i}(F(\omega)) = C_{g_i}(\omega) \cup [v'g_i]$ 임을 알 수 있다. 즉, 조작 F 는 id 연결성분도 g_i 연결성분도 조금 더 키워 각각 v 및 v' 에 연결되게끔 하지만, 두 연결성분이 여전히 서로 떨어져 있게끔 하는 조작임을 알 수 있다. 따라서, $\text{Im } F := F(\{\omega : C_{id}(\omega) \subseteq A_i \wedge C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i\})$ 로 두었을 때,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[(\#C_v)(\#C_{v'})1_{v \leftrightarrow v'}] &\geq \mathbb{E}_p [(\#C_v(\omega')) \cdot (\#C_{v'}(\omega')) : \omega' \in \text{Im } F] \\ &\geq \frac{1}{\max_{\omega' \in \text{Im } F} \#F^{-1}(\omega')} \mathbb{E}_p F^* [\#C_{id}(\omega) \cdot \#C_{g_i}(\omega) 1_{C_{id}(\omega) \subseteq A_i \wedge C_{g_i}(\omega) \subseteq g_i A_i}] \\ &\geq \frac{1}{(\#S) \cdot d_S(id, g_i)} \min\left(\frac{1-p}{p}, \frac{p}{1-p}\right)^{(\#S) \cdot L} \cdot \frac{1}{4N^2} \chi_p^2 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 여기서, v 와 v' 는 g_i 라는 선택지로부터 결정된 인접한 꼭짓점들이다. 다시 말해, $s := v^{-1}v'$ 는 S 의 한 원소이다. 위 좌변의 사건에 v^{-1} 를 곱해 부등식 3.10에 넣음으로써,

$$\left(\frac{d}{dp}\right)_+ \chi_p \geq \frac{1}{1-p} \frac{1}{(\#S) \cdot L} \min\left(\frac{1-p}{p}, \frac{p}{1-p}\right)^{(\#S) \cdot d_S(id, g_i)} \cdot \frac{1}{4N^2} \chi_p^2 \quad (0 < p < p_c)$$

임을 알 수 있다. 여기서 우변의 χ_p^2 앞에 곱해져 있는 계수는 $(0.5p_c, p_c)$ 구간 위에서 양수 하한을 가진다. (여기서는 $0 < p_c < 1$ 임이 쓰였다.) 이 하한이 우리가 찾던 C 이다. 이로써 증명이 끝난다. \square

이제 보조정리를 몇개 증명하겠다.

보조정리 3.7. 유한 생성 집합 S 가 갖춰진 군 G 의 케일리 그래프 $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ 의 임계 변수가 $p_c = p_c(\Gamma)$ 라고 하자. 그러면 각각의 $K < 0$ 마다 양수 $C = C(K)$ 가 존재해, 임의의 $0 \leq p \leq p_c$ 및 K -나무스러운 집합 A 에 대해

$$\sum_{g \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq C$$

가 성립한다.

Proof. 가정에 의해 A 는 어떤 나무스러운 집합 A' 의 K -근방에 포함되어 있다. 이때, 각각의 $a \in A$ 마다 $ab_a \in A'$ 및 $d_S(id, b_a) \leq K$ 를 만족하는 $b_a \in G$ 가 존재한다. 이때 보조정리 3.3에 의해

$$\mathbb{P}_p(id \leftrightarrow ab_a) \geq \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a \leftrightarrow ab_a) \geq \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a) \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow b_a)$$

가 성립한다. 이로부터

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a) &\leq \left(\min_{b: d_S(id, b) \leq K} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow b) \right)^{-1} \cdot \sum_{a \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow ab_a) \\ &\leq (\#S)^K \cdot \left(\min_{b: d_S(id, b) \leq K} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow b) \right)^{-1} \sum_{a' \in A'} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a') \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이를 감안했을 때, A 가 나무스러운 경우에 대해서만 증명해도 충분하기에 그렇게 가정하겠다.

다시 보조정리 3.3에 의해

$$\sum_{a_1, a_2, \dots, a_N \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a_1 \cdots a_N) \geq \left(\sum_{g \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \right)^N$$

인 것은 분명하다. 그런데 A 가 나무스럽기 때문에 $(a_1, \dots, a_N) \mapsto a_1 \cdots a_N$ 이라는 사상이 일대일 사상이므로, 좌변은

$$\sum_{a_1, a_2, \dots, a_N \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a_1 \cdots a_N) \leq \sum_{a \in A^n} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow a) \leq \chi_p$$

로 다스릴 수 있다. 이때 우변은 $0 \leq p < p_c$ 일 때 유한해야 하는데, 그러면 $\sum_{g \in A} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g)$ 가 1 이하여야만 한다. 이로써 $p \in [0, p_c)$ 위에서 바라던 부등식을 얻고, 좌연속성에 의해 (보조정리 3.2) $p = p_c$ 에서까지 연장할 수 있다. \square

위 명제가 유용할 수 있는 것은 아래 따름정리 덕분이다.

따름정리 3.3. 유한 생성 집합 S 가 갖춰진 군 G 의 케일리 그래프 Γ 를 생각하고, K -나무스러운 집합 $B \subseteq G$ 를 생각하자.

그러면 임의의 $\epsilon > 0$ 마다 $D > 0$ 이 존재해,

$$\sum_{g \in G: B \setminus N_D(id) \text{는 } id \text{와 } g \text{ 사이의 장벽임}} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq \epsilon \cdot \chi_p$$

가 성립한다.

Proof. 보조정리 3.7에 의해 잡히는 상수 $C = C(K)$ 를 생각하자. 그러면

$$\sum_{g \in B} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq C < +\infty$$

이다. 그러면 단조수렴정리에 의해, 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해

$$\sum_{g \in B \cap N_D(id)} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \geq C - \epsilon$$

인 D 가 존재한다.

이제 $A' := \{g \in G : id \leftrightarrow_{G \setminus (B \setminus N_D(id))} g\}$ 를 잡자. 그러면, id 와의 사이에 $B \setminus N_D(id)$ 로 가로막힌 원소들은 모조리 A' 바깥에 있다. 물론 $id \in A'$ 이고 또 $\partial A' \subseteq B \setminus N_D(id)$ 이다. 이제 따름정리 3.2를 적용하면

$$\sum_{g \in G : B \setminus N_D(id) \text{는 } id \text{와 } g \text{ 사이의 장벽임}} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq \sum_{g \in B \setminus N_D(id)} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \cdot \chi_p \leq \epsilon \chi_p$$

라는 결론을 내릴 수 있다. \square

따름정리 3.4. 유한 생성 집합 S 가 갖춰진 군 G 의 케일리 그래프 Γ 를 생각하자. 그러면 임의의 $\epsilon, K > 0$ 마다 $D > 0$ 이 존재해 다음이 성립한다.

임의의 K -나무스러운 집합 $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_D$ 에 대해,

$$\sum_{g \in G : B_1, \dots, B_D \text{ 각각은 } id \text{와 } g \text{ 사이의 장벽임}} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq \epsilon \cdot \chi_p$$

가 성립한다.

Proof. 보조정리 3.7에 의해 잡히는 상수 $C = C(K)$ 를 생각하자. 그리고 $D > C/\epsilon$ 을 생각하자. 그러면

$$\sum_{i=1}^D \sum_{g \in B_i} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \sum_{g \in B} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) \leq C$$

이다. 따라서 최소한 한 i 에 대해서는 $\sum_{g \in B_i} \mathbb{P}_p(id \leftrightarrow g) < C/D < \epsilon$ 이다. 이제 방금과 같이 따름정리 3.2를 적용하면 부등식을 얻는다. \square

이제 두번째 명제를 증명하겠다.

명제 3.6. 유한 생성 집합 S 가 갖춰진 군 G 가 마법 보조정리를 만족한다고 가정하자. 그러면

$$\lim_{p \nearrow p_c} \left(\iota(T_p) := \inf \left\{ \frac{\sum_{u \in K, v \notin A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} : A \text{는 } G \text{의 유한집합} \right\} \right) = 1$$

이 성립한다.

Proof. 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $\eta(\epsilon) > 0$ 을 잡아, 임의의 $p \in (p_c - \eta, p_c)$ 및 유한 집합 $A \subseteq G$ 에 대해

$$\frac{\sum_{u, v \in A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} < 10\epsilon$$

임을 보이기만 하면 충분하다. 먼저, G 가 마법 보조정리를 만족하게끔 하는 상수 $K > 0$ 을 택한 뒤, $\epsilon, K > 0$ 에 대한 상수 $D > 0$ 를 따름정리 3.4로부터 얻는다. 이제 이 D 에 대해 마법 보조정리가 보장하는 상수 $K'(D)$ 및 $K'(D)$ -나무스러운 집합 B 를 고정하겠다. 마지막으로, 이 대강 나무스러운 집합 B 에 여기에 따름정리 3.3를 적용해 $D' = D(\epsilon)$ 을 잡자. 이제 G 에 관한 마법 보조정리는 어떤 숫자 $N = N(\epsilon, D)$ 가 보장한다. 또, 명제 3.4 및 보조정리 3.2에 의해 $\lim_{p \nearrow p_c} \chi_p = +\infty$ 임을 기억하라. 따라서 $\chi_{p_c - \eta} \geq N\epsilon^{-1}$ 인 $\eta > 0$ 을 잡는 것은 어렵지 않다.

모든 준비가 끝났다. 증명을 위해 $p \in (p_c - \eta, p_c)$ 및 유한 집합 $A \subseteq G$ 를 임의로 잡겠다. 그러면 마법 보조정리에 의해 $\#A' \geq (1 - \epsilon)\#A$ 인 부분집합 $A' \subseteq A$ 가 존재하고, 각각의 $u \in A'$ 마다 어떤

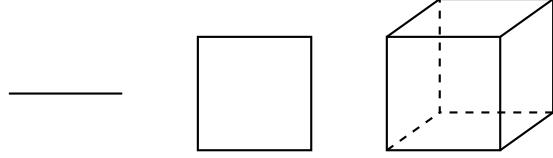


FIGURE 2. (속이 꽉 차있는) 1, 2, 3차원 큐브들.

K -나무스러운 부분집합 $B(u) = B_1(u) \sqcup \dots \sqcup B_D(u)$ 및 $B'(u) = B'_1(u) \sqcup \dots \sqcup B'_D(u)$ 가 존재하여

$$A_1(u) := \{v \in A : uB_1(u), \dots, uB_D(u) \text{ 모두가 각각 } u \text{와 } v \text{ 사이의 장벽임}\},$$

$$A_2(u) := \{v \in A : uB'_1(u), \dots, uB'_D(u) \text{ 모두가 각각 } u \text{와 } v \text{ 사이의 장벽임}\},$$

$$A_3(u) := \{v \in A : u(B \setminus N_{D'}(id)) \text{가 } u \text{와 } v \text{ 사이의 장벽임}\}$$

에 대해 $\#A \setminus (A_1(u) \cup A_2(u) \cup A_3(u)) \leq N$ 이 성립한다. 이때, 따름정리 3.3 및 3.4를 적용하면

$$\sum_{v \in A_i(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v) \leq \epsilon \chi_p \quad (u \in A', i = 1, \dots, 4)$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{u,v \in A} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} &\leq \frac{\sum_{u \in A, v \in A_1(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A, v \in A_2(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} \\ &\quad + \frac{\sum_{u \in A, v \in A_3(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A, v \notin A_1(u) \cup A_2(u)} \mathbb{P}_p(u \leftrightarrow v)}{\chi_p \# A} \\ &\leq \frac{\sum_{u \in A} \epsilon \chi_p}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A} \epsilon \chi_p}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A} \epsilon \chi_p}{\chi_p \# A} + \frac{\sum_{u \in A} N}{\chi_p \# A} \leq 3\epsilon + \frac{N}{\chi_p} \leq 4\epsilon \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이로써 증명이 끝났다. \square

4. CAT(0) 큐브 복합체

유클리드 공간 \mathbb{R}^n 에서 단위 구간 $[0, 1]$ 의 n 번 곱 $[0, 1]^n$ 을 생각할 수 있는데, 이 모양을 n 차원 (유클리드) 큐브라고 부르겠다. (그림 2 참조.)

유클리드 큐브를 재료로 사용해 구면, 토러스 및 쌍곡면과 위상동형인 거리공간을 만드는 것은 어렵지 않다. 예를 들어, 2차원 타일 6개를 정육면체처럼 이어 붙이면 구면과 위상동형인 거리공간을 만들 수 있다. 이 정육면체의 윗면/앞면/오른쪽 면의 중점을 각각 A, B, C 라고 해보자. 그러면 점 A, B, C 의 각 순서쌍을 잇는 정육면체 표면상의 측지선이 유일하게 결정된다. 이 측지선 삼각형은 평면상에 그린 정삼각형보다 더 둥뚱하다는 것을 알 수 있다. 이를테면, 변 \overline{AB} 의 중점과 변 \overline{BC} 의 중점 사이 거리는 삼각형 한 변의 길이의 $1/\sqrt{2}$ 인데, 평면 상에 그린 정삼각형에 대해 같은 거리를 채어 보면 삼각형 한 변의 길이의 $1/\sqrt{3}$ 으로 더 작다.

한편, 위와 같은 2차원 정육면체의 "내부"를 채우기 위해 3차원 큐브를 추가할 수 있다. 이렇게 만들 어진 새로운 거리공간에서는, 임의의 측지선 삼각형은 그것과 변의 길이가 동일한 평면 삼각형에 비해 둥뚱하지 않다. 이러한 공간을 CAT(0) 거리공간이라고 부른다.

이제 CAT(0) 큐브 복합체를 정의할 준비가 되었다. 유클리드 큐브를 이어 붙인 큐브 복합체 중 거리공간으로서 CAT(0)인 복합체를 CAT(0) 큐브 복합체라고 부른다.

이 정의는 간단하기는 한데, 그다지 구체적이지는 않다. 유clidean 큐브를 어떻게 이어 붙였을 때 CAT(0) 성질을 보장할 수 있을까? 이것이 실은 Misha Gromov가 CAT(0) 큐브 복합체를 다룬 이유이다. CAT(0) 거리 공간의 예시에는 음의 곡률을 가진 리만다양체 등이 있으나, 더 다양한 CAT(0) 거리 공간을 손쉽게 만들 방법이 있으면 군을 공부할 때 도움이 될 수도 있을 것이다. 이러한 관점에서 Gromov는 큐브를 이어붙인 공간들을 생각했고, 더 나아가, 큐브 복합체가 CAT(0)인지 아닌지는 손쉽게 체크할 수 있는 기준을 마련했다. 이 간단한 기준이 오늘날 CAT(0) 큐브 복합체의 정의로 여겨지기도 하는데, 이 정의를 소개하겠다.

정의 4.1. *CAT(0) 큐브 복합체(CAT(0) cube complex)*란 유clidean 큐브를 이어붙인 복합체 중 연결되어 있고(*connected*), 단순연결되어 있으면서(*simply-connected*), 각 꼭짓점에 붙어 있는 큐브들의 모임이 깃발 복합체(*flag complex*)를 이루게끔 붙여 만든 폐포 복합체(*cell complex*)이다.

여기서 깃발 복합체라고 함은 다음을 의미한다. 어느 꼭짓점 v 에 붙어 있는 모서리 e_1, \dots, e_n 에 대해, 만약 각각의 서로 다른 정수 $i, j \in \{1, \dots, n\}$ 마다 e_i 와 e_j 를 동시에 포함하는 2차원 타일이 공간 속에 존재한다면, e_1, \dots, e_n 모두를 모서리로 가지는 n 차원 큐브가 공간 속에 존재한다는 것이다. 예를 들어, 상술한 2차원 정육면체가 CAT(0) 큐브 복합체 안에 존재한다면, 그 정육면체의 ”내부”에 해당하는 3차원 큐브 또한 존재해야 한다는 것이다.

한편, CAT(0) 큐브 복합체의 그래프이론적인 버전을 소개하겠다. 앞에서 그래프에 줄 수 있는 자연스러운 거리 구조인 그래프 거리를 얘기했다. 그런데 평면 격자 그래프에서도 쉽게 볼 수 있듯이, 주어진 두 점 사이 최단 경로가 꼭 유일할 필요는 없다. 그러한 최단 경로들을 모두 측지선이라고 부르겠다. 또, x 와 y 를 잇는 모든 측지선의 합집합을 $I(x, y)$ 라고 부르겠다.

정의 4.2. 연결된 그래프 Γ 가 중점 그래프(*median graph*)라는 것은, 임의의 점 $x, y, z \in V(\Gamma)$ 에 대해

$$\begin{aligned} d(x, m) + d(m, y) &= d(x, y), \\ d(y, m) + d(m, z) &= d(y, z), \\ d(z, m) + d(m, x) &= d(z, x) \end{aligned}$$

을 만족하는 점 $m \in V(\Gamma)$ 가 유일하게 존재한다는 것이다. 달리 말하자면 $I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$ 가 점 하나짜리 집합이라는 것이다. 이 유일한 점 m 을 x, y, z 의 중점(*median*)이라고 부른다.

예시 4.3. (1) 수직선은 정수 점들을 꼭짓점으로 하고, 인접한 정수끼리 모서리로 이은 그래프로 볼 수 있다. 이때, 임의의 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 에 대해 $I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$ 는 x, y, z 중 중간인 숫자로 유일하게 결정된다.



FIGURE 3. 정수군 \mathbb{Z} 의 캐일리 그래프로 볼 수 있는 수직선

(2) 차수 2짜리 자유군 F_2 의 표준적인 캐일리 그래프는 각 점의 차수(*degree*)가 4인 나무 그래프인데, 이 그래프에서 임의의 측지선 삼각형은 두께가 0이고, 중점이 유일하게 존재한다는 것을 확인할 수 있다. 더욱 일반적으로, 사이클이 없는 그래프, 즉 나무 그래프(*tree*)는 모두 중점 그래프이다.

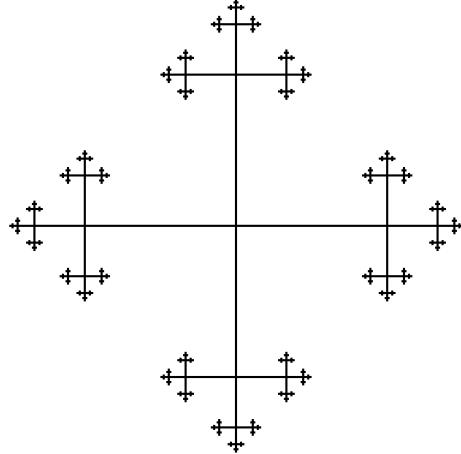


FIGURE 4. 차수 2짜리 자유군의 표준적인 케일리 그래프

- (3) 사이클이 무수히 많은 중점 그래프도 있다. 대표적으로, 평면 격자 그래프 \mathbb{Z}^2 에서 점 $x = (0,0), y = (4,2), z = (1,3)$ 을 생각해 보자. 이때 $I(x,y)$ 는 $(0,0)$ 과 $(4,2)$ 를 꼭짓점으로 가지는 수직 직사각형이 된다. $I(y,z)$ 및 $I(z,x)$ 도 비슷한 패턴으로 그려지고, 이 세 집합의 교집합은 정확히 $(1,2)$ 한 점이 된다. 더 일반적으로, n 차원 정수 격자 그래프 \mathbb{Z}^n 또한 중점 그래프이다.

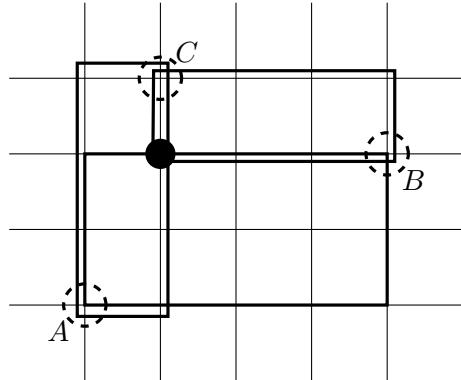


FIGURE 5. 평면 격자 그래프 위의 세 점과 그 중점

- (4) 중점 그래프가 아닌 예시도 있다. 길이 3짜리 사이클을 포함하는 그래프는 결코 중점 그래프가 될 수 없다. 삼각형의 세 꼭짓점을 위한 중점이 존재하지 않기 때문이다.

잘 생각해보면, 길이 5짜리 사이클을 가지는 그래프 또한 결코 중점 그래프가 될 수 없다. 사실은, 중점 그래프의 사이클은 항상 짝수 길이를 가진다. 다시 말해, 중점 그래프는 반드시 이분 그래프(bipartite graph)이다.

- (5) 중점 그래프가 아닌 또 다른 예시로는 $K_{2,3}$ 그래프가 있다. 이 그래프는 꼭짓점 A, B, x, y, z 및, 대문자와 소문자를 잇는 모서리 6개로 이루어져 있다. 이 그래프에서 $I(x,y)$ 는 $x - A - y$ 측지선도, $x - B - y$ 측지선도 포함한다. 즉, A 와 B 모두 $I(x,y)$ 에 들어 있다. 마찬가지로, A 와 B 는 $I(y,z)$ 에도, $I(z,x)$ 에도 들어 있다. 즉, x, y, z 의 중점을 찾을 수 없는 것이 문제가 아니라, 너무 많은 후보가 있다는 것이 문제인 것이다.

일반적으로, $K_{2,3}$ 을 부분 그래프로 가지는 그래프는 중점 그래프일 수 없다.

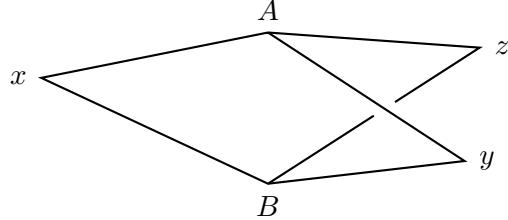


FIGURE 6. $K_{2,3}$ 그래프

$CAT(0)$ 큐브 복합체와 중점 그래프를 같이 이야기한 이유가 있다. $CAT(0)$ 큐브 복합체가 주어졌을 때, 2차원 이상인 큐브 조각들은 모두 지우고 1차원 큐브, 즉 모서리만 남긴 것을 1차 뼈대(1-skeleton)이라고 부른다. 이때 이 1차 뼈대는 중점 그래프가 된다. 역으로, 중점 그래프가 주어졌을 때, 사각형(=4-사이클)이 보일 때마다 2차원 타일을 붙여 넣고, 정육면체의 1차 뼈대가 보일 때마다 3차원 큐브를 붙여 넣고, n 차원 큐브의 1차 뼈대가 부분 그래프로 들어 있을 때마다 n 차원 큐브를 붙여 넣는다고 해보자. 이렇게 만들어진 복합체는 각 꼭짓점에서 깃발 복합체 조건을 만족한다. 다시 말해, 이 복합체는 $CAT(0)$ 큐브 복합체이다. 요약하자면, 중점 그래프의 모임과 $CAT(0)$ 큐브 복합체의 1차 뼈대의 모임은 정확히 똑같다. 이는 Victor Chepoi, Victor Gerasimov, Martin Roller 등 여러 저자에 의해 증명된 사실이다 ([Rol99], [Ger98], [Che00]).

지금부터는 $CAT(0)$ 큐브 복합체를 얘기할 때 그 1차 뼈대인 중점 그래프를 같이 떠올릴 것이다. 이 경우, 유클리드 큐브들을 이어붙여 만든 $CAT(0)$ 거리를 생각하는 대신, 1차 뼈대를 따라 정의되는 그래프 거리를 생각하면 편리할 때가 있다. 따라서 이제 $CAT(0)$ 거리는 잊고, 항상 1차 뼈대상의 그래프 거리를 부여하는 것으로 간주하겠다.

$CAT(0)$ 큐브 복합체 및 중점 그래프를 얘기할 때 빠질 수 없는 도구가 바로 반공간(halfspace) 및 초평면(hyperplane)이다. 이 관점은 Michah Sageev가 박사학위논문([Sag95])에서 도입한 바 있다.

정의 4.4. $CAT(0)$ 큐브 복합체 X 에서 모서리 e 를 하나 택하자. 이때, e 를 관통하는 초평면(hyperplane) \mathfrak{h} 는 다음을 만족하는 가장 작은 X 의 부분집합이다.

- (1) e 의 중점을 \mathfrak{h} 에 포함되어 있다.
- (2) X 를 구성하는 어떤 큐브 $C \simeq [0, 1]^n$ 에 대해, 만약 \mathfrak{h} 가 C 의 어떤 모서리의 중점을 포함한다면, 그 중점에서 그 모서리에 직교하는 $(n - 1)$ 차원 큐브 또한 \mathfrak{h} 에 포함된다. 즉, 예를 들어 점 $(1/2, 0, \dots, 0) \in [0, 1]^n$ 이 \mathfrak{h} 에 포함된다면 $\{1/2\} \times [0, 1]^{n-1}$ 전체 또한 \mathfrak{h} 에 포함된다.

위 상황에서 초평면 \mathfrak{h} 는 복합체 X 를 둘로 나누는데, 예를 들어 e 의 두 꼭짓점은 $X \setminus \mathfrak{h}$ 의 서로 다른 연결성분에 있게 된다. 이때 $X \setminus \mathfrak{h}$ 의 한 연결성분의 닫음(closure)을 \mathfrak{h} 에 면한 반공간(halfspace)이라고 부른다.

위 개념을 중점그래프의 언어로 해석하면 다음과 같다.

정의 4.5. 중점그래프 Γ 안에 4-사이클이 있을 때, 4-사이클의 변 중 맞닿아있지 않는 모서리끼리 서로 평행하다(parallel)고 부른다. 더 나아가, Γ 의 모서리들 e_1, \dots, e_n 에 대해, 만약 각 $i = 1, \dots, n - 1$ 마다 e_i 와 e_{i+1} 가 평행하다면, e_1 과 e_n 또한 평행하다고 부른다.

그래프 Γ 의 초평면(hyperplane)이란, Γ 의 모서리들 중 평행한 것끼리 모은 극대집합을 뜻한다. 다시 말해, Γ 의 어떤 모서리 e 를 관통하는 초평면은, e 와 평행한 모서리들의 모임이다.

그래프 Γ 의 초평면 \mathfrak{h} 가 주어졌을 때, Γ 의 꼭짓점들은 그대로 두고, 모서리 중 \mathfrak{h} 에 들어있는 것들은 삭제하고 나머지만 남긴 부분그래프를 생각하자. 이 부분그래프의 연결성분을 각각 \mathfrak{h} 에 면한 반공간 (halfspace)이라고 부른다.

- 예시 4.6.**
- (1) 나무 그래프들은 모두 중점 그래프라고 앞에서 언급했다. 나무 그래프에는 사이클이 없기 때문에, 평행한 모서리 쌍이란 존재할 수 없다. 따라서 각각의 모서리가 초평면이 된다. 각 모서리를 삭제하면 나무 그래프는 두 토막으로 나뉘는데, 이들 각각이 반공간이 된다.
 - (2) 평면 격자 그래프 \mathbb{Z}^2 에서 초평면들에는 두 종류가 있는데, x 좌표가 서로 같은 가로 모서리의 모임이거나 혹은 y 좌표가 서로 같은 세로 모서리의 모임이다.

CAT(0) 큐브 복합체의 초평면 두 개를 생각하자. 이 두 초평면은 일치하거나, 서로 만나지 않거나, 아니면 어떤 2차원 큐브에서 교차한다. (이때 이 2차원 큐브가 유일할 필요는 없다.) 중점 그래프에서 해석하자면, 두 초평면은 일치하거나, 꼭짓점을 아예 공유하지 않거나, 아니면 어떤 4-사이클의 네 변을 평행한 것끼리 양분한다.

초평면의 성질을 더 구체적으로 적으면 다음과 같다.

사실 4.7. 중점그래프 Γ 의 초평면 \mathfrak{h} 를 하나 생각하자. 그러면 다음이 성립한다.

- (1) 초평면 \mathfrak{h} 는 전체 공간을 정확히 둘로 나누고, 따라서 \mathfrak{h} 에 면한 반공간은 정확히 두 개다. 특히, 각 모서리 $e \in \mathfrak{h}$ 에 대해, e 의 두 끝점은 서로 다른 반공간에 속한다.
- (2) 초평면 \mathfrak{h} 의 두 모서리 $e = \overline{xy}$, $f = \overline{vw}$ 가 주어졌을 때 $d(x, v) = d(y, w)$ 가 성립한다.

위 사실은 그냥 믿어도 상관없고, 실제로 증명하고 싶다면 8절을 보면 된다. 이로부터 특히 알 수 있는 것은, 서로 다른 초평면 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ 에 대해 다음 두 가지 중 정확히 하나가 성립한다는 것이다.

- (1) \mathfrak{h} 에 면한 두 반공간과 \mathfrak{h}' 에 면한 두 반공간은 각각 서로 만난다.
- (2) \mathfrak{h} 에 면한 어느 한 반공간에 $N(\mathfrak{h}')$ 및 \mathfrak{h}' 에 면한 어느 한 반공간이 들어 있다.

전자의 경우, 두 초평면은 교차한다(transverse)고 하고 $\mathfrak{h} \pitchfork \mathfrak{h}'$ 라고 쓴다. 후자의 경우, 두 초평면은 평행하다(parallel)고 하고 $\mathfrak{h} \parallel \mathfrak{h}'$ 라고 쓴다. 이것을 반공간의 언어로 다시 쓰면 다음과 같다.

사실 4.8. 중점그래프 Γ 의 두 반공간 H 및 H' 에 대해, 다음 중 하나가 정확히 성립한다.

- (1) H 와 H' 가 같다.
- (2) H 와 H' 는 서로의 여집합이다. 즉, $\mathcal{V}(H)$ 와 $\mathcal{V}(H')$ 는 $\mathcal{V}(\Gamma)$ 를 분할한다.
- (3) $H \subsetneq H'$.
- (4) $H' \subsetneq H$.
- (5) (2)가 아니되, H 와 H' 는 서로 겹치지 않는다. 즉, $H \cap H' = \emptyset$ 이다.
- (6) (2)가 아니되, $H \cup H' = \Gamma$ 이다.
- (7) 위의 그 어느 상황도 아니다. 다시 말해, $H \cap H'$, $H \cap H'^c$, $H^c \cap H'$, $H^c \cap H'^c$ 각각이 모두 공집합이 아니다.

(1) 및 (2)인 경우, H 와 H' 가 면한 초평면들은 일치한다. (3), (4), (5) 및 (6)인 경우, H 와 H' 가 면한 초평면들은 서로 평행하고, 이때 H 와 H' 가 평행하다고 부르며 $H \parallel H'$ 라고 쓴다. (7)인 경우, H 와 H' 가 면한 초평면들은 서로 교차하고, 이때 H 와 H' 가 교차한다고 부르며 $H \pitchfork H'$ 라고 쓴다.

Proof. 집합

$$A_1 := H \cap H', \quad A_2 := H^c \cap H', \quad A_3 := H \cap H'^c, \quad A_4 := H^c \cap H'^c$$

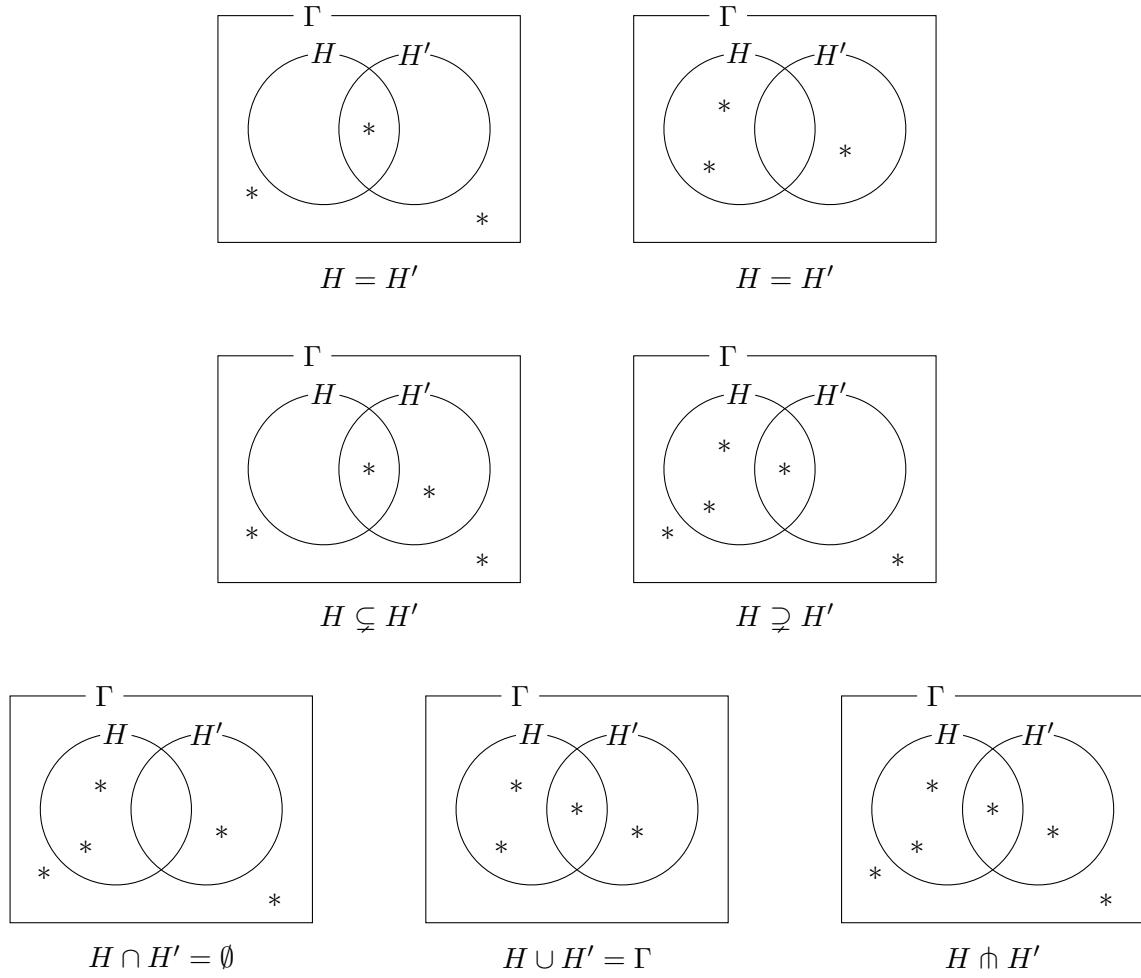


FIGURE 7. 두 반공간의 위치 관계

을 생각했을 때, 이 넷 중 셋 이상이 공집합인 경우 H, H^c, H', H'^c 중 최소 하나가 공집합이 된다. 이는 사실 4.7에 모순이다. 따라서 A_1, A_2, A_3 및 A_4 중 기껏해야 두 개만 공집합일 수 있다. 또, 실제로 이중 두 개가 공집합일 수 있는 가능성은 $A_1 = A_4 = \emptyset \neq A_2, A_3$ 와 $A_2 = A_3 = \emptyset \neq A_1, A_4$ 두 가지뿐이다. 이에 더해, A_1, \dots, A_4 중 정확히 하나가 공집합인 경우 네 가지, 그리고 그 어느 것도 공집합이 아닌 경우 한 가지로 총 7가지 가능성이 있다. 이들이 각각 (1)-(7)에 해당함은 쉽게 확인할 수 있다. 그럼 7를 참조하라. \square

이제 평면 격자 그래프를 다시 살펴보자. 여기서 꼭짓점 $(0, 0)$ 과 $(3, 2)$ 사이 조합적=그래프 거리가 $3 + 2 = 5$ 임은 쉽게 확인할 수 있다. 물론 이 거리를 실현시키는 측지선은 하나가 아니다. 위로 2번 이동한 뒤 오른쪽으로 3번 가도 측지선이 되고, 오른쪽으로 먼저 간 뒤 위로 가도 측지선이 되며, 그 순서를 조금 섞으면 또 다른 측지선이 된다. 하지만 여기서 중요한 규칙이 하나 있다. “오른쪽으로만 가야 하며”, “위쪽으로만 가야 한다”는 사실이다. 오른쪽으로 총 4번 갔다가 왼쪽으로 1번 가는 방식으로 $(0, 0)$ 에서 $(3, 2)$ 까지 가게 되면, 가로 방향 움직임에 낭비가 생긴 것이다. 이는 측지선이 될 수 없다.

이를 다르게 얘기하자면 다음과 같다. $(0, 0)$ 에서 $(3, 2)$ 로 가는 측지선은, 반드시 $\{x = 0.5\}$, $\{x = 1.5\}$, $\{x = 2.5\}$ 라는 세로선을 정확히 한번씩 지나고, $\{x = n + 1/2 : n \geq 3$ 혹은 $n < 0\}$ 라는 세로선들은 절대 지나지 않는다. 마찬가지로, $\{y = n + 1/2 : n = 1, 2\}$ 라는 가로선들은 정확히 한번씩 지나고, 그 외의 반정수 y 좌표 가로선들은 절대 지나지 않는다. 더 놀라운 점은, 이것이 필요조건이자 충분조건이라는 것이다. 더 나아가, 이 사실은 일반적인 중점 그래프에서도 성립한다.

보조정리 4.1. 중점 그래프 Γ 및 그 꼭짓점 x 및 y 를 생각하자. 이때, x 와 y 를 잇는 Γ 상의 경로 P 에 대해 다음 성질들은 동치다.

- (1) P 는 조합적 거리에 따른 측지선이다.
- (2) P 는 Γ 의 각 초평면을 기껏해야 한 번씩만 만난다.
- (3) P 는 Γ 의 초평면 중 x 와 y 를 가르는 것들은 정확히 한 번씩 만나고, 그렇지 않은 초평면들은 만나지 않는다.

Proof. 먼저 (1)로부터 (2)을 유도하겠다. 모순을 이끌어 내기 위해, 어떤 측지선 P 가 어떤 초평면 \mathfrak{h} 를 두 번 이상 만난다고 가정하자. $P \cap \mathfrak{h}$ 중 첫번째 모서리를 $e_i = \overrightarrow{uv}$, 두번째 모서리를 $e_j = \overrightarrow{u'v'}$ 라고 하자. 여기서 v 와 u' 는 \mathfrak{h} 에 들어 있지 않은 모서리 e_{i+1}, \dots, e_{j+1} 로 이루어진 경로로 이어져 있다. 따라서 v 와 u' 는 \mathfrak{h} 에 면하는 같은 반공간에 들어 있다. 이제 사실 4.7(3)을 쓰면 $d(v, u') = d(u, v')$ 가 성립해야 한다. 그러나 u, v, u', v' 는 동일한 측지선 위에 주어진 순서대로 나타나기 때문에, $d(v, u') > d(u, v')$ 여야 한다. 이는 모순이다. 따라서 (2)가 성립한다.

이제 (2)로부터 (3)을 유도하겠다. 먼저, \mathfrak{h} 가 x 와 y 를 가르는 초평면이라고 해보자. 그러면 정의상 그 어떤 경로도 \mathfrak{h} 를 지나지 않고서는 x 와 y 를 잇지 못한다. 따라서 x 와 y 를 잇는 P 는 \mathfrak{h} 를 반드시 만난다. 이제 방금 증명한 사실과 합하면, 이 만남은 정확히 한 번이라는 것을 알 수 있다.

반면, \mathfrak{h} 가 x 와 y 를 가르지 않는 경우, 즉 두 점 모두 \mathfrak{h} 에 면한 동일한 반공간 H 에 속해 있는 경우를 살펴보자. 만약 P 가 \mathfrak{h} 를 만난다면, $P \cap \mathfrak{h}$ 중 첫번째 모서리 $e_i = \overrightarrow{uv}$ 를 잡을 수 있다. 이때 x 에서 u 까지 있는 P 의 부분경로는 \mathfrak{h} 를 만나기 전이므로, H 에 속해 있다. 그리고 \overline{uv} 는 \mathfrak{h} 의 원소이므로, v 는 H 가 아닌 다른 반공간에 속해 있음을 알 수 있다. 이제 e_i 이후의 P 의 부분경로는 v 와 y 를 이어야 하는데, $v \notin H$ 및 $y \in H$ 라는 점으로부터, P 는 e_i 이후에도 \mathfrak{h} 를 다시 지나게 됨을 알 수 있다. 이는 측지선 P 가 결코 초평면 \mathfrak{h} 를 두 번 이상 만날 수 없다는 사실에 모순이다. 따라서, P 는 \mathfrak{h} 를 만나지 않는다. 이로써 (3) 또한 증명되었다.

이제 (3)으로부터 (1)을 유도하겠다. 먼저, P 상의 각 모서리는 정확히 한 개의 초평면에 반드시 들어 있다. 따라서,

$$l(P) = \sum_{\mathfrak{h}: \Gamma \text{ 안의 초평면}} \#(P \cap \mathfrak{h})$$

라는 공식이 성립한다. 이제 (3)의 가정에 의해, 이는 정확히 x 와 y 사이를 가르는 초평면의 개수이다. 한편, x 와 y 를 잇는 임의의 경로 Q 를 생각해 보자. 그러면 x 와 y 를 가르는 각각의 초평면 \mathfrak{h} 마다 $Q \cap \mathfrak{h}$ 에 속하는 어떤 모서리 $e_{\mathfrak{h}}$ 가 반드시 존재해야 하고, 이러한 $e_{\mathfrak{h}}$ 는 초평면 \mathfrak{h} 마다 반드시 달라야 한다. 이를 생각하면 Q 의 길이는 x 와 y 사이 초평면의 개수 이상이어야 한다. 즉, 우리가 잡은 P 는 최소 길이를 달성하는 것이고, 따라서 P 는 측지선이다. 이로써 증명이 끝났다. \square

5. 초평면 사슬과 반공간 사슬

어떤 점들 간의 위치 관계를 파악할 때, 그 점들 사이에 낄겨 있는 초평면들은 매우 중요한 역할을 한다. 이를 더 효율적으로 공부하기 위해 개념을 하나 도입하겠다.

정의 5.1. 반공간 n 개 H_1, H_2, \dots, H_n 가

$$H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_n$$

라는 위치 관계를 만족할 때, (H_1, \dots, H_n) 을 **반공간 사슬(halfspace chain)**이라고 부른다. 또, 이 때 각 H_i 가 면한 초평면 \mathfrak{h}_i 에 대해, $(\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n)$ 을 **초평면 사슬(hyperplane chain)**이라고 부른다. 더욱이, 어떤 집합 $S, T \subseteq \Gamma$ 에 대해, 만약 $S \subseteq H_1^c$ 및 $T \subseteq H_n$ 가 성립하면, $(\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n)$ 가 S 및 T 사이에 깊게 있다고 얘기한다.

어떤 집합 $S, T \subseteq \Gamma$ 를 고정한 뒤, S 및 T 사이에 깊게 있는 사슬을 생각하자. 이때 이 사슬이 극대(*maximal*)이라는 것은, 이 사슬을 부분나열로 포함하면서 S 및 T 사이에 깊게 있는 더 큰 사슬이 존재하지 않는다는 뜻이다.

어떤 두 점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 가 주어졌을 때, 그 사이에 깊은 초평면 사슬의 최대 길이는 $d(x, y)$ 이하임을 보조정리 4.1에서 보았다. 따라서, 두 점 사이에 깊게 있는 임의의 사슬이 주어졌을 때, 더 집어 넣을 수 있는 만큼 사슬을 계속 키워나갈 때 언젠가는 멈추게 되어 있다. 즉, x 와 y 사이에 깊은 임의의 사슬은 반드시 x 및 y 사이에 깊은 극대 사슬로 확장할 수 있다.

사실은 중점그래프 Γ 위에는 조합적 거리 외에 또 다른 자연스러운 거리 구조를 줄 수 있다. 이는 n 차원 정수 격자 그래프 위에 l^1 -거리 이외에 l^∞ -거리 또한 줄 수 있다는 사실에 대응한다.

정의 5.2. 중점그래프 상의 어떤 두 집합 $A, B \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해, A 와 B 사이에 깊은 사슬의 최대 길이를 A 와 B 사이의 l^∞ -거리라고 부르고, $d^\infty(A, B)$ 로 표시한다.

예시 5.3. (1) 예시 4.3(2)의 4차수 나무 그래프를 생각해 보자. 여기에는 4-사이클이라는 것 자체가 존재하지 않기 때문에, 각각의 모서리가 초평면이 된다는 것을 관찰했다. 이제 두 점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 를 임의로 잡았을 때, 두 점 사이를 잇는 l^1 -측지선 ($x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$) 가 유일하게 존재한다. 이때 $\Gamma \setminus \overline{x_{i-1}x_i}$ 의 연결성분 중 x_i 쪽의 연결성분을 H_i 라고 부르면, $x \notin H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_n \ni y$ 라는 사슬을 만들 수 있다. 이 사슬이 극대인 것은 쉽게 관찰할 수 있다.

또, 이 그래프에서는 서로 다른 초평면은 반드시 평행하다는 것을 관찰하라.

(2) 이번에는 예시 4.3(3)의 정수 격자 그래프를 생각하자. 여기서 초평면은 y 좌표가 서로 같은 세로 모서리의 모임 혹은 x 좌표가 서로 같은 가로 모서리의 모임이라고 했다. 전자를 가로 초평면, 후자를 세로 초평면이라고 부르자. 이 그래프에서, 초평면끼리 평행하려면 둘 다 가로이거나 혹은 둘 다 세로여야 한다는 사실을 쉽게 관찰할 수 있다.

이제 예를 들어 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 사이에 끼어 있는 초평면들은 정확히, y 좌표가 0과 4 사이에 있는 가로 초평면 4개 및 x 좌표가 0과 3 사이에 있는 세로 초평면 3개이다. 물론 이들 모두의 개수는 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 사이 l^1 -거리이다. 그러나 이 두 점 사이에 길이 7짜리 사슬은 없다. 가로 초평면과 세로 초평면은 서로 평행할 수 없기 때문이다. 따라서, 방금 말한 가로 초평면 4개로 만든 사슬 및 세로 초평면 3개로 만든 사슬이 각각 극대 사슬이 된다. 이들 중 가장 긴 것이 l^∞ -거리를 구현하기는 하지만, 이들 모두가 그렇게 하지는 않음을 주의하라.

이제, 잠깐 군에 관한 얘기로 돌아가겠다. 우리의 최종 목표는, 중점 그래프의 대칭 군으로 나타나는 특정 군에서 삼투 현상을 공부하고자 하는 것이다. 방금 본 예시 중 정수 격자 그래프에는 \mathbb{Z}^2 라는 군이 평행이동으로 작용하고, 이 작용은 여-컴팩트하며 진정하다. 헌데 정수 격자 그래프는 이차식 성장률(quadratic growth)를 가지기에, 이 그래프에 여-컴팩트하며 진정으로 작용하는 군은 항상 평균가능군

(amenable group)이다. 이러한 군에서는 우리가 바라는 삼투 현상이 일어나지 않는다는 것이 이미 알려져 있다 ([BK89], [GKN92]). 따라서, 중점그래프에 적절한 비평균가능성(non-amenability) 가정을 엿어 주는 것이 필요하다.

정수 격자 그래프의 주요 특징 중 하나로, 두 성분 그래프의 곱 그래프라는 점이 있다. 즉, \mathbb{Z} 의 표준 캐일리 그래프 두 개를 Γ_1, Γ_2 라고 한 뒤, 이 두 그래프를 직접곱(direct product)하면 정수 격자 그래프를 얻는다. 이와 연관된 사실로, 정수 격자 그래프에서는 모서리를 공유하지 않는 평행한 초평면 쌍은 분명 존재하지만 (이를테면 세로 초평면 두 개), 그런 초평면들에 동시에 교차하는 초평면(이를테면 가로 초평면)이 항상 존재한다. 이러한 현상은 곱 그래프에서도 이어진다.

이제부터는 위와 같지 않은 그래프에 집중하려고 한다. 이를 위해 다음을 정의하겠다.

정의 5.4. 중점그래프 Γ 의 평행한 두 초평면이 강하게 분리되어 있다(*strongly separated*)라는 것은, 두 초평면에 동시에 교차하는 초평면이 존재하지 않는다는 것이다.

또한, Γ 의 두 반공간 H, H' 에 대해, 만약 H 가 면해 있는 초평면과 H' 가 면해 있는 초평면이 강하게 분리되어 있다면, H 와 H' 또한 강하게 분리되어 있다고 얘기한다.

예시 5.5. (1) 나무 그래프에서는 그 어떤 초평면도 다른 초평면과 교차할 수 없다. 4-사이클이 아예 없기 때문이다. 따라서, 모든 초평면은 서로 강하게 분리되어 있다.

(2) 전혀 나무같지 않은 그래프에서도 강하게 분리된 초평면이 존재할 수 있다. 그림 8에는 사각형 타일을 한 꼭짓점에서 6개씩 모이도록 이어붙인 것이다. 이때 전체 $CAT(0)$ 큐브 복합체는 평면과 위상동형이다. 실은, 이 그래프 Γ 의 전체 대칭군에는 쌍곡 곡면군(surface group)과 동형인 유한 지수 부분군이 들어 있다. 그런 의미에서, 이 타일링은 쌍곡평면(hyperbolic plane)을 모델링한 것으로 볼 수도 있다.

이 복합체에는 교차하는 초평면도 있지만, 서로 만나지 않는 초평면도 있고 강하게 분리된 초평면도 있다. 특히, 그림에 나타나 있는 강하게 분리된 두 초평면 h, h' 은 그래프의 어떤 대칭을 통해 완전히 포갤 수 있다. 즉, $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ 가 존재해 $h' = g\bar{h}$ 라는 것이다.

정의 5.6. 어떤 실수열 $\mathbf{a} = (a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1})$ 을 생각하자. 이때 어떤 초평면 사슬 (h_1, \dots, h_n) 이 \mathbf{a} -등간격으로 분리되어 있다(*equispaced*)는 것은, $d^\infty(h_i, h_j) = a_{|j-i|}$ 이라는 것이다. 이때, 이 초평면들에 면하는 반공간들로 이루어진 사슬 또한 \mathbf{a} -등간격으로 분리되어 있다고 얘기한다.

주어진 중점그래프 위에 일정한 간격으로 강하게 분리된 초평면이 존재하는지는 앞으로의 얘기에서 매우 중요해질 것이다. 이를 보장할 수 있는 가장 간편한 방법은, 그래프의 대칭성=등거리사상 g 와 반공간 H 를 잘 잡아 $gH \subsetneq H$ 이면서 gH 와 H 가 강하게 분리되어 있게끔 하는 것이다. 이러한 대칭성 및 반공간은 꽤 많은 경우에 존재하는데, Pierre-Emmanuel Caprace와 Michah Sageev의 다음 정리가 이를 얘기한다.

정리 5.7 ([CS11, Corollary B]). 국소적으로 컴팩트하고(*locally compact*) 측지선적으로 완비한(*geodesically complete*) $CAT(0)$ 큐브 복합체 X 를 생각하자. 또, X 에 진정으로, 또 여-컴팩트하게 작용하는 이산적인 무한군 G 를 생각하자.

그러면 Γ 는 (1) 측지선적으로 완비하고 지름이 무한하며(unbounded) 볼록한(convex) 부분복합체들의 곱이거나, 혹은 (2) G 의 원소 g 및 Γ 의 반공간 H 가 하나씩 존재하여, $gH \subsetneq H$ 이고 gH 와 H 가 강하게 분리되어 있다.

5.1. 반공간에 관한 몇 가지 보조정리 이제부터 흔히 사용할 반공간의 성질을 몇 가지 정리해 두겠다.

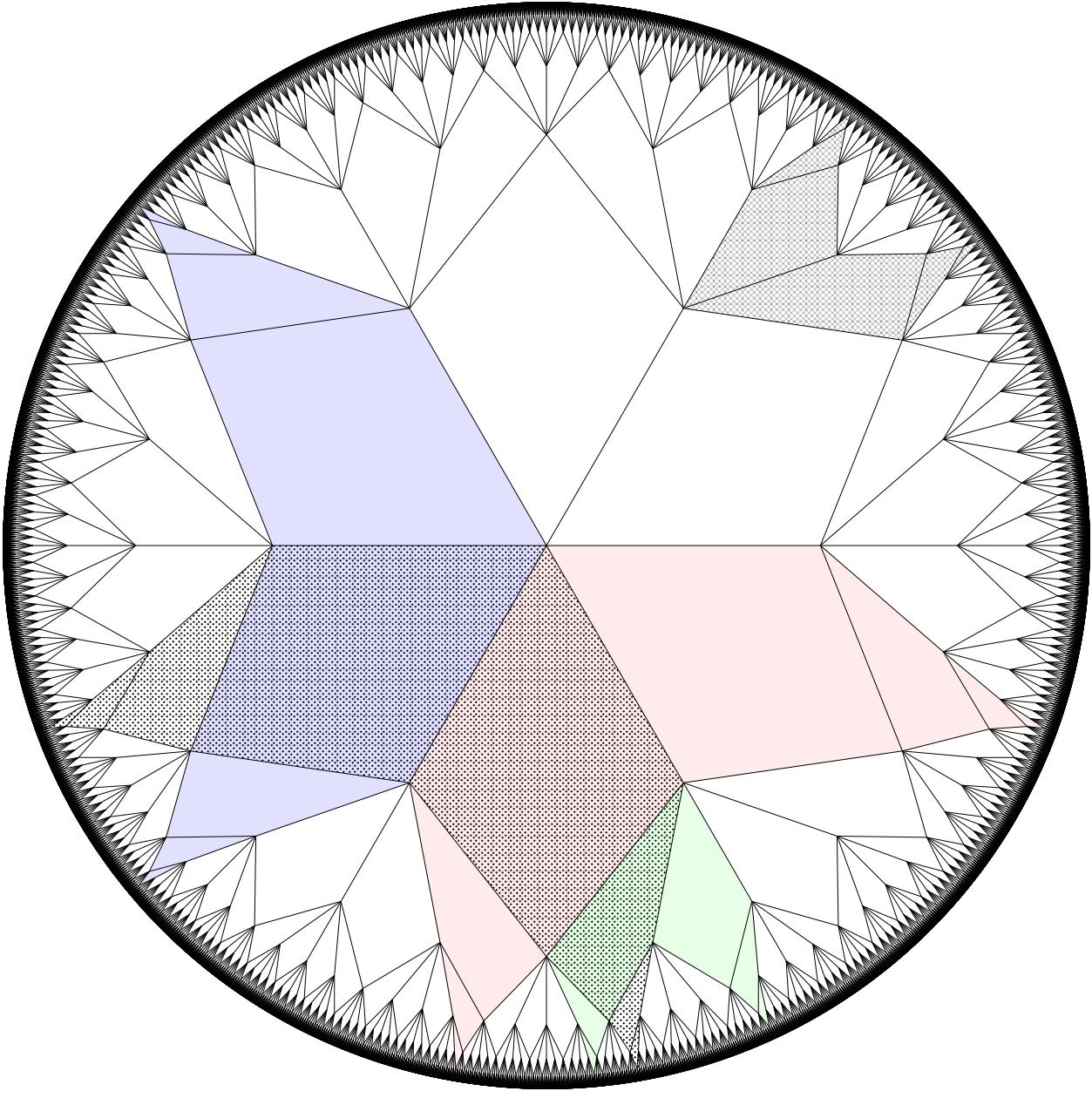


FIGURE 8. 사각형 타일링이 깔린 쌍곡평면. 점박이 초평면과 교차하는 초평면 중 세 개가 색칠되어 있다. 그리고 오른쪽 상단의 체크무늬 초평면은 색깔 초평면들과 결코 만나지 않는다. 즉, 점박이 초평면 h 와 체크무늬 초평면 h' 는 서로 강하게 분리되어 있다.

보조정리 5.1. 중점그래프 Γ 의 점 $x, y \in \Gamma$ 와 꼭짓점 집합 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 를 생각하자. 그러면

$$d^\infty(x, A) \leq d^\infty(x, y) + d^\infty(y, A)$$

가 성립한다.

Proof. 먼저 x 와 y 사이 d^∞ -거리를 구현하는 극대 반공간 사슬

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_N \supseteq A$$

를 생각한 뒤, $L_i \ni y$ 인 가장 큰 수 i 를 잡자. 그러면 $y \notin L_{i+1}$ 이므로

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_i \supseteq A, \quad y \notin L_{i+1} \supsetneq \dots \supsetneq L_N \supseteq A$$

는 각각 x 와 y 사이 및 y 와 A 사이에 낀 반공간 사슬이 된다. 이로부터 바라던 부등식을 얻는다. \square

보조정리 5.2. 중점그래프 Γ 의 두 반공간 H_1, H_2 을 생각하자. 만약 H_1 과 H_2 가 어떤 점을 공유하되 어떤 다른 점을 동시에 놓친다면(즉 $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset \neq H_1^c \cap H_2^c$ 라면), H_1 과 H_2 는 교차하거나 포함 관계에 있다.

Proof. 이 경우, 사실 4.8의 (2), (5), (6)이 배제된다는 것은 분명하다. \square

보조정리 5.3. 중점그래프 Γ 의 두 반공간 $H_1 \subsetneq H_2$ 가 강하게 분리되어 있고, 어떤 반공간 L 이 H_1^c 의 어느 두 점 사이를 가른다고 하자. 그러면 L 은 H_2 를 완전히 포함하거나 혹은 만나지 않는다.

Proof. 만약 L 은 H_2 의 어느 두 점 사이를 가른다면 L 이 H_1 과 H_2 둘 다에 교차하게 되는데, 이는 H_1 과 H_2 가 강하게 분리되어 있다는 것에 모순이다. 따라서 $L \supsetneq H_2$ 혹은 $L \cap H_2 = \emptyset$ 이 성립한다. \square

보조정리 5.4. 중점그래프 Γ 의 세 반공간 $H_1 \supsetneq H_2 \supseteq H_3$ 을 생각해보면, H_1 과 H_2 가 강하게 분리되어 있다고 하자. 그러면 H_1^c 의 임의의 두 점 $x, y \notin H_1$ 에 대해,

$$d^\infty(x, y) \leq d^\infty(x, H_2) + d^\infty(y, H_3)$$

가 성립한다.

Proof. 점 x 와 y 사이에 낀 반공간 $x \notin L \ni y$ 를 임의로 생각하자. 그러면 보조정리 5.3에 의해, L 은 H_2 를 완전히 포함하거나 혹은 만나지 않는다. 전자의 경우, L 은 x 와 H_2 사이에 끼여 있다. 후자의 경우, y 는 y 와 H_3 사이에 끼여 있다.

이제, x 와 y 사이 d^∞ -거리를 구현하는 극대 반공간 사슬

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_N \ni y$$

를 생각한 뒤, $L_i \supseteq H_2$ 를 만족하는 가장 큰 수 i 를 잡자. 그러면 보조정리 5.3에 의해

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_i \supseteq H_2, \quad H_3^c \supseteq L_{i+1} \supsetneq \dots \supsetneq H_N \ni y$$

는 각각 x 와 H_2 사이 및 H_3^c 와 y 사이에 낀 반공간 사슬이 된다. 이로부터 바라던 부등식을 얻는다. \square

보조정리 5.5. 중점그래프 Γ 의 두 꼭짓점 $x, y \in V(\Gamma)$ 와 세 반공간 H, H', L 가

$$x \notin H \supsetneq H' \ni y \quad \text{및} \quad x \notin L \ni y$$

라는 위치 관계를 만족한다고 하자. 더하여 H 와 H' 가 강하게 분리되어 있다고 하자. 그러면 $H \supsetneq L$ 혹은 $L \supsetneq H'$ 둘 중 하나가 성립한다.

Proof. 보조정리 5.2에 의해, H, H', L 은 서로 교차하거나 혹은 포함 관계에 있음을 유의하라. 만약 $H \supsetneq L$ 혹은 $L \supsetneq H$ 이면 원하는 결론에 해당한다. 따라서 둘 다 아닌 경우, 즉 H 와 L 이 교차하는 경우가 남는다. 이때 L 은 H' 에마저 교차할 수는 없다. 또 $H \not\supseteq L$ 이므로 L 이 H' 에 포함될 수도 없다. 따라서 L 은 H' 와 같지 않으면서 H' 를 포함한다. 이로써 증명이 끝난다. \square

보조정리 5.6. 중점그래프 Γ 의 두 점 $x, y \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 와 강하게 분리된 두 반공간 H, H' 가

$$x \notin H \supsetneq H' \ni y$$

라는 위치 관계를 만족한다고 하자. 그러면

$$d^\infty(x, y) \leq d^\infty(x, H') + d^\infty(H^c, y)$$

이다.

Proof. 먼저 x 와 y 사이 거리를 구현하는 반공간 사슬

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_N \ni y$$

를 생각한 뒤, $L_i \supseteq H'$ 를 만족하는 가장 큰 수 i 를 잡자. 이때 보조정리 5.5에 의해 $H \supsetneq L_{i+1}$ 혹은 $L_{i+1} \supsetneq H'$ 여야 한다. 후자는 i 의 정의에 위배하므로 전자가 성립해야 한다. 즉,

$$x \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_i \supseteq H', \quad H \supsetneq L_{i+1} \supsetneq \dots \supsetneq L_N \ni y$$

라는 반공간 사슬을 얻게 된다. 이로부터 바라던 부등식을 얻게 된다. \square

6. 마법 보조정리 (MAGIC LEMMA)

이제 본격적으로 삼투 현상에 관련된 중점그래프의 기하학을 얘기하려고 한다.

정의 6.1. 어떤 거리공간 X 의 부분집합 $Y \subseteq X$ 가 (이산적으로) 균일하게 거리상 진정하다(*uniformly metrically proper*)는 것은, 각각의 $R > 0$ 마다

$$\sup_{y \in Y} \#\{y' \in Y : d(y, y') < R\} < +\infty$$

인 것이다.

이를테면, 만약 어떤 연결된 거리공간 X 에 등거리사상으로 진정으로 작용하는 군 G 이 주어졌을 때, 임의의 $x \in X$ 에 대해 그 G -궤도 $G \cdot x$ 는 균일하게 거리상 진정하다.

중점그래프 Γ 및 점 $y \in \mathcal{V}(\Gamma)$, 유한 집합 $A \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$, 실수 $D > 0$ 및 실수열 $\mathbf{a} = (a_1 < \dots < a_{11})$ 이 주어졌을 때 다음과 같은 집합을 정의하겠다.

$$\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(y, A) := \left\{ z \in \mathcal{V}(\Gamma) : \begin{array}{l} \mathbf{a}\text{-등간격으로 강하게 분리된 어떤 반공간 사슬 } H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_{12} \text{ 에 대해} \\ \{y\} \cup A \subseteq H_1^c \text{이고 } z \in H_{11} \text{이고 } d^\infty(z, H_{12}) \leq D \text{이며 } d^\infty(y, H_{12}) \leq D \text{이다.} \end{array} \right\}$$

실수열의 정체가 중요하지 않을 때는 $\mathcal{H}_D(y, A)$ 라고 적기도 하겠다. 여기서 $z \in \mathcal{H}_D(y, x)$ 인 상황을 다룰 때는, x, y, z 가 순서대로 한 직선상에 놓여 있는 그림을 떠올리면 좋다. 예를 들어 다음이 성립한다.

보조정리 6.1. 중점그래프 Γ 의 꼭짓점 $x, y, z \circ]$

$$z \in \mathcal{H}_D(y, x)$$

을 만족한다고 하자. 그러면 $d^\infty(x, z) \geq d^\infty(x, y) + d^\infty(y, z) - 2D \circ]$ 이다.

Proof. 가정에 의해, 강하게 분리된 반공간 사슬 $H_1 \supsetneq \dots \supsetneq H_{12}$ 중 $\{x, y\} \subseteq H_1^c$ 이고 $z \in H_{10}$ 이며 $d^\infty(y, H_{12}) \leq D$ 인 것이 존재한다. 이제 $d^\infty(x, y)$ 를 구현하는 극대 사슬

$$x \notin H'_1 \supsetneq H'_2 \supsetneq \dots \supsetneq H'_{d^\infty(x,y)} \ni y$$

를 하나 생각하자. 보조정리 5.3에 의해 $H_{d^\infty(x_0, a_i)-D}$ 는 H_2 를 포함하거나 혹은 만나지 않는다. 후자의 경우,

$$d^\infty(y, H_2) \leq D < d^\infty(y, H'_{d^\infty(x,y)-D}^c)$$

라는 사실에 위배된다. 따라서 $H_2 \subseteq H'_{d^\infty(x,y)-D}$ 라는 결론을 내릴 수 있다.

이제 y, z 사이의 거리를 구현하는 극대 사슬

$$y \notin H''_1 \supsetneq H''_2 \supsetneq \dots \supsetneq H''_{d^\infty(y,z)} \ni z$$

를 생각하자. 그러면

$$y \notin H_3 \supseteq H_4 \ni z, \quad y \notin H''_{D+1} \ni z$$

에 보조정리 5.5를 적용할 수 있다. 이때 $d^\infty(y, H_3) \leq D < d^\infty(y, H''_{D+1})$ 이기 때문에 $H_3 \subseteq H''_{D+1}$ 일 수는 없으므로, $H_2 \supsetneq H_3 \supseteq H''_{D+1}$ 임을 알 수 있다.

이를 모두 결합하면,

$$x \notin H'_1 \supsetneq H'_2 \supsetneq \dots \supsetneq H'_{d^\infty(x,y)-D} \supsetneq H''_{D+1} \supsetneq \dots \supsetneq H''_{d^\infty(y,z)} \ni z$$

라는 극대 사슬을 얻게 된다. 이로부터 $d^\infty(x, z) \geq d^\infty(x, y) + d^\infty(y, z) - 2D$ 라는 결론을 얻는다. \square

앞의 일직선 비유를 다시 생각해보자. 어떤 점들 $x, y, y', z \in \mathcal{H}_D(y, x)$ 및 $z \in \mathcal{H}_D(y', x)$ 을 만족할 때, y 와 y' 중 어느 것이 직선상에 먼저 나타나느냐에 따라 $y' \in \mathcal{H}_D(y, x)$ 혹은 $y \in \mathcal{H}_D(y', x)$ 가 성립했으면 좋겠다. 이에 다음 보조정리를 증명하겠다.

보조정리 6.2. 중점그래프 Γ 의 꼭짓점 x, y, y', z 및 부분집합 $A, A' \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 가

$$x \in A \cap A' \text{ 및 } z \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(y, A) \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(y', A')$$

을 만족한다고 하자. 더하여, y, y' 및 z 가 서로 $10D$ -분리되어 있다고 가정하자. 그러면 다음 중 정확히 하나가 성립한다.

- (1) $y' \in \mathcal{H}_D(y, A)$ 이고 $d^\infty(x, y) < d^\infty(x, y')$ 이다.
- (2) $y \in \mathcal{H}_D(y', A')$ 이고 $d^\infty(x, y) > d^\infty(x, y')$ 이다.

Proof. 가정으로부터, \mathbf{a} -간격으로 강하게 분리된 반공간 사슬 두 개

$$H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_{12}, \quad H'_1 \supsetneq H'_2 \supsetneq \dots \supsetneq H'_{12}$$

가 존재해, 다음을 모두 만족한다:

- $A \cup \{y\} \subseteq H_1^c, A' \cup \{y'\} \subseteq H'_1^c$,
- $z \in H_{11} \cap H'_{11}$, 그리고
- $d^\infty(z, H_{12}), d^\infty(z, H'_{12}), d^\infty(y, H_{12}), d^\infty(y', H'_{12}) \leq D$.

이때, 각 $i, j \in \{1, \dots, 11\}$ 에 대해 $H_i \cap H'_j \ni z$ 및 $H_i \cup H'_j \not\ni x$ 이므로, 보조정리 5.2에 의해 H_i 와 H'_j 는 교차하거나 혹은 포함 관계에 있다.

먼저 H'_{10} 과 H_{12} 가 서로 만난다는 것을 논하겠다. 이를 위해 y' 와 z 사이 d^∞ -거리를 구현하는 극대 사슬

$$y' \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_{d^\infty(y', z)} \ni z$$

를 잡자.

이제 $L_m \supseteq H'_{11}$ 인 가장 큰 m 를 잡으면, $d^\infty(y', H'_{11}) \leq D$ 이기 때문에 $m \leq D$ 이다. 이제

$$y \notin H'_{10} \supsetneq H'_{11} \ni z, \quad y \notin L_{m+1} \ni z$$

에 보조정리 5.5를 적용할 수 있다. 그런데 m 을 선택한 방식 때문에 $L_{m+1} \supseteq H'_{11}$ 은 불가능하므로 $L_{m+1} \subsetneq H'_{10}$ 이어야 함을 알 수 있다.

즉 $H'_{10} \supseteq L'_{m+1} \supsetneq \dots \supsetneq L_{d^\infty(y', z)} \ni z$ 는 H'_{10} 과 z 사이에 낄겨 있는 길이 $d^\infty(y', z) - m \geq 9D$ 짜리 사슬이다. 만약 H'_{10} 과 H_{12} 가 만나지 않는다면, 이 사슬 전체가 z 와 H_{12} 사이에 있게 되어 $d^\infty(z, H_{12}) \geq 9D$ 임을 얻는다. 이는 가정과 모순된다.

따라서, H'_{10} 과 H_{12} 는 어떤 원소 u 를 공유한다. 이제

$$x \notin H'_9 \supsetneq H'_{10} \ni u, \quad x \notin H_{12} \ni u$$

에 보조정리 5.5를 적용하면, (A) $H'_9 \supsetneq H_{12}$ 혹은 (B) $H'_{10} \subsetneq H_{12}$ 이라는 결론을 얻는다.

같은 이유로, (A') $H_9 \supsetneq H'_{12}$ 혹은 (B') $H_{10} \subsetneq H'_{12}$ 이다.

이중 (B) $H'_{10} \subsetneq H_{12}$ 인 경우를 살펴 보겠다. 이때 $d^\infty(y', H_{12}) \leq d^\infty(y', H'_{10}) \leq D$ 임은 쉽게 알 수 있다. 이제 $y' \in H_{11}$ 이기만 하면, (H_2, \dots, H_{12}) 라는 사슬이 $y' \in \mathcal{H}_D(y, A)$ 임을 보장해 준다. 이를 귀류법으로 증명하기 위해 $y' \notin H_{11}$ 라고 가정해 보자. 이때 $y, y' \notin H_{11} \supsetneq H_{12} \supseteq H'_{10}$ 이고 H_{11} 와 H_{12} 는 강하게 분리되어 있다. 보조정리 5.4에 의해, y 와 y' 사이 거리는 $d^\infty(y, H_{12}) + d^\infty(y', H'_{10}) \leq 2D$ 이하이다. 이는 y 와 y' 가 $10D$ 이상 분리되어 있다고 가정에 모순이다. 따라서 $y' \notin H_{11}$ 일 수 없다.

요약하자면, 우리는 (B)이면 $y' \in \mathcal{H}_D(y, A)$ 라는 사실을 증명했다. 이때 보조정리 6.1에 의해

$$d^\infty(x, y') \geq d^\infty(x, y) + d^\infty(y, y') - 2D$$

임을 알 수 있다. 여기서 $d^\infty(y, y') \geq 10D > 2D$ 이므로 $d^\infty(x, y') > d(x, y)$ 를 얻는다. 이로써 (B)의 경우에는 결론 (1)이 성립함을 증명했다.

비슷한 이유로 (B')의 경우에는 $y \in \mathcal{H}_D(y', A')$ 이며 결론 (2)가 성립한다.

이제 남은 경우는 (A)이면서 (A')인 상황, 즉 $H'_9 \supsetneq H_{12}$ 이면서 $H_9 \supsetneq H'_{12}$ 인 경우이다.

먼저 $H'_9 \supseteq H_6$ 일 수는 없음을 유의하라. 왜냐하면, $H'_9 \supseteq H_6 \supsetneq H_9 \supsetneq H'_{12}$ 라는 위치 관계는

$$d^\infty(H'^c_9, H'_{12}) > d^\infty(H^c_6, H_9) = d^\infty(H'^c_9, H'_{12})$$

이라는 모순을 유발하기 때문이다. 이제

$$x \notin H_5 \supsetneq H_6 \ni z, \quad x \notin H'_9 \ni z$$

에 보조정리 5.5를 적용하자. 그러면 $H_5 \supseteq H'_9$ 임을 얻는다.

이제 $H'_8 \supseteq H_4$ 일 수는 없다. 왜냐하면, $H'_8 \supseteq H_4 \supsetneq H_5 \supsetneq H'_9$ 라는 위치 관계는

$$d^\infty(H'^c_8, H'_9) > d^\infty(H^c_4, H_5) = d^\infty(H'^c_8, H'_9)$$

라는 모순을 유발하기 때문이다. 따라서 H'_8 은 H_4 를 포함하지 않는다. 이제

$$x \notin H_3 \supseteq H_4 \ni z, \quad x \notin H'_8 \ni z$$

에 보조정리 5.5를 적용하자. 그러면 $H_3 \supseteq H'_8$ 임을 얻는즉, $y \in H_3^c$ 는 H'_8 바깥에 있다.

이제, $y, y' \notin H'_8 \supseteq H'_9 \supseteq H_{12}$ 라는 위치 관계에 보조정리 5.4을 적용하면

$$d^\infty(y, y') \leq d^\infty(y, H_{12}) + d^\infty(y', H'_9) \leq 2D$$

임을 얻는다. 이는 y 와 y' 가 $10D$ -분리되어 있다는 가정에 모순이다. 따라서 (A)이면서 (A')일 수는 없고 증명이 끝난다. \square

명제 6.1. 중점그래프 Γ 의 균일하게 거리상 진정한 부분집합 $Y \subseteq \mathcal{V}(\Gamma)$ 를 하나 고정하자. 그러면 각각의 $0 < \epsilon < 1$ 및 $D > 1$ 에 대해, 어떤 상수 $N = N(\epsilon, D)$ 가 존재하여 다음이 항상 성립한다.

실수열 \mathbf{a} 및 유한 집합 $A \subseteq Y$ 를 임의로 생각하자. 그러면 크기가 $(1 - \epsilon)\#A$ 이상인 A 의 부분집합 A' 이 하나 존재하여, 각각의 $a \in A'$ 마다

$$\#\left(A \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a, \{x, x'\})\right) \leq N$$

이게끔 하는 $x, x' \in A$ 가 존재한다.

Proof. 먼저 $x_0 \in A$ 를 임의로 고정하겠다. 이제

$$M := \sup_{v \in Y} \#\{w \in Y : d^\infty(v, w) \leq 10D\}$$

라는 상수를 잡자. 집합 Y 가 균일하게 거리상 진정하기 때문에, M 은 유한한 값을 가진다.

이제, 주어진 A 에 대해

$$A_1 := \left\{ a \in A : \begin{array}{l} \text{그 어느 } x, x' \in A \text{에 대해서도} \\ A \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a, \{x, x'\}) \text{의 크기가 } 2M/\epsilon + M \text{보다 큼} \end{array} \right\}$$

을 정의하자. 그리고 A_1 의 $10D$ -분리된 부분집합 중 극대인 것을 하나 A_2 로 잡는다. 그러면 A_1 은 A_2 의 $10D$ -근방에 포함되고, 따라서 $\#A_1 \leq M\#A_2$ 이다.

이제 남은 일은 $\#A_2 \leq \frac{\epsilon}{M}\#A$ 임을 보이는 것이다. 편의상 A_2 를 x_0 로부터의 l^∞ -거리 순서대로 정렬하겠다. 즉, $A_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_{\#A_2}\}$ 로 적되 $d^\infty(x_0, a_1) \leq d^\infty(x_0, a_2) \leq \dots$ 이게끔 하겠다는 것이다.

먼저 시간 $i = 0$ 일 때 $\mathcal{B} = \mathcal{G} = \mathcal{U} = \emptyset$ 를 정의하겠다. 그리고 시간 $i = 1, 2, \dots, \#A_2$ 에 걸쳐 어떤 알고리즘을 실행하겠다. (알고리즘 자체는 다음 문단에서 서술하겠다.) 이때 $\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{U}$ 는 A_2 의 부분집합들로 시간에 따라 변하는데, 매 순간마다 서로 겹치지 않음을 유지된다. 각 i 번째 스텝마다 다음 두 가지 중 하나가 실행되는데,

- (1) a_i 이라는 원소가 (기준에 어떤 카테고리였든 그것을 잊은 채) \mathcal{G} 에 추가되거나, 혹은
- (2) a_i 이라는 원소가 (기준에 어떤 카테고리였든 그것을 잊은 채) \mathcal{B} 에 추가되고, $A_2 \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{U})$ 의 어떤 두 원소가 \mathcal{U} 에 추가된다.

각 a_i 는 i 번째 스텝에 \mathcal{G} 에 넣어지거나 혹은 \mathcal{B} 에 넣어지고, 그 이후에는 운명이 바뀌지 않는다. 특히, 모든 스텝이 종료되면 모든 A_2 의 원소는 \mathcal{B} 아니면 \mathcal{G} 에 들어가 있고, \mathcal{U} 는 비어 있게 된다. 또, 매 스텝마다 $\#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{G} + \#\mathcal{U}$ 라는 등식은 내내 성립하게끔 할 것이다. 그렇게 하면 결과적으로, 마지막 스텝이 끝났을 때 $\#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{G}$ 를 얻게 될 것이다. 이 알고리즘의 또 다른 목표는, $a_i \in \mathcal{G}$ 마다 점 b_i 를 택해, $\{A \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, \{x_0, b_i\}) : a_i \in \mathcal{G}\}$ 가 모두 서로 겹치지 않게끔 하는 것이다.

이제 알고리즘을 기술하겠다. 스텝 i 에서, 먼저 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, x_0) \cap A_2$ 가 공집합인지를 묻겠다. 만약 이것이 공집합이라면, $b_i := x_0$ 로 선언하고 a_i 를 \mathcal{G} 에 집어넣은 뒤 다음 스텝으로 넘어간다.

만약 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, x_0) \cap A_2$ 가 공집합이 아니라면, 그 원소 중 x_0 에 가장 가까운 것을 b_i 라고 선언하겠다. 이어 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap A_2$ 가 공집합인지를 묻겠다. 만약 이것이 공집합이라면, a_i 를 \mathcal{G} 에 집어넣은 뒤 다음 스텝으로 넘어간다. 만약 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap A_2$ 가 공집합이 아니라면, 그 원소 중 x_0 에 가장 가까운 것을 c_i 라고 선언한 뒤, a_i 는 \mathcal{B} 에, b_i, c_i 는 \mathcal{U} 에 넣는다. 이것으로 알고리즘 설명은 끝이다.

각 단계에서 잡히는 b_i 는 $\mathcal{H}_D(a_i, x_0) \cap A_2$ 의 원소로, 특히 a_i 와는 다른 A_1 의 원소이다. A_1 가 $10D$ -분리되어 있으므로, $d^\infty(a_i, b_i) \geq 10D$ 이다. 보조정리 6.1에 의해 $d^\infty(x_0, a_i) < d^\infty(x_0, b_i)$ 임을 알 수 있다. 아까 A_2 를 정렬할 때 x_0 로부터의 거리를 기준으로 했으므로, $b_i \in \{a_{i+1}, \dots, a_{\#A_2}\}$ 임을 알 수 있다. 마찬가지 이유로 c_i 도 $\{a_1, \dots, a_i\}$ 바깥에서 뽑힌다,

또한 i 번째 스텝에서 \mathcal{G} 및 \mathcal{B} 에는 그저 a_i 가 추가되거나 추가되지 않기만 하고, 그 외의 원소 변동은 없다. 즉, i 번째 스텝이 끝난 시점에서 \mathcal{G} 와 \mathcal{B} 가 $\{1, \dots, i\}$ 의 분할(partition)을 이룬다는 것은 분명하다. 이제 부등식

$$(6.1) \quad \#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{G} + \#\mathcal{U}$$

가 각 스텝에서 유지되는지 살펴보겠다. 한 가지 시나리오는, a_i 를 기준의 \mathcal{U} 에서 꺼내왔든 아니든 \mathcal{G} 에 추가하는 경우이다. 이 경우 $\#\mathcal{G} + \#\mathcal{U}$ 는 그대로 있거나 혹은 1만큼 증가하고, $\#\mathcal{B}$ 는 변하지 않는다. 따라서 부등식 6.1은 유지된다. 다른 한 가지 경우는, a_i 를 기준 \mathcal{U} 에서 꺼내왔든 아니든 \mathcal{B} 에 추가하는 경우이다. 이 경우 \mathcal{U} 에는 기존 $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 에 속하지 않는 원소 $\{b_i, c_i\}$ 를 추가하게 된다. 이때, 만약 $\{b_i, c_i\}$ 가 기존, 즉 $i - 1$ 번째 스텝 직후의 \mathcal{U} 에 속하지 않는 진정한 새로운 원소라면, i 번째 스텝에서 부등식 6.1의 좌변이 1만큼 증가하되, 우변의 $\#\mathcal{U}$ 도 최소 1만큼 증가한다. 따라서, 다음만 확인하면 부등식 6.1을 보장할 수 있다.

주장 6.2. 각 $i < j$ 에 대해, 만약 $a_i, a_j \in \mathcal{B}$ 이라면 $\{b_i, c_i\} \cap \{b_j, c_j\} = \emptyset$ 이다.

이를 귀류법으로 확인하기 위해, 먼저 $b_i \in \{b_j, c_j\}$ 라고 가정해 보자. 그러면 $b_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, x_0) \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, x_0)$ 이기에 보조정리 6.2를 적용할 수 있다. 보조정리 6.2에 의하면, $d^\infty(x_0, a_i) \leq d^\infty(x_0, a_j)$ 라는 사실에 비추어 보아, $a_j \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, x_0)$ 라는 것을 알 수 있다. 물론 이때 $b_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, x_0)$ 이기 때문에 보조정리 6.1에 의해

$$d^\infty(x_0, b_i) \geq d^\infty(x_0, a_j) + d^\infty(a_j, b_i) - 2D - 2 > d^\infty(x_0, a_j)$$

임을 알 수 있다. 여기서는 $\{a_j, b_i\} \in A_2$ 가 $10D$ -분리되어 있다는 사실이 쓰였다. 이는 b_i 가 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, x_0) \cap A_2$ 의 원소 중 가장 x_0 에 가까운 것이라는 사실에 모순이다. 따라서 $b_i \in \{b_j, c_j\}$ 일 수 없다.

다음으로, $c_i \in \{b_j, c_j\}$ 라고 가정해 보자. 그러면 c_i 는 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\})$ 및 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, x_0)$ 의 원소이다. 방금과 같이 보조정리 6.2를 적용하면, $d^\infty(x_0, a_i) \leq d^\infty(x_0, a_j)$ 라는 사실에 비추어 보아, $a_j \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\})$ 임을 알 수 있다. 이때 $c_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_j, x_0)$ 이기 때문에 보조정리 6.1에 의해

$$d^\infty(x_0, c_i) \geq d^\infty(x_0, a_j) + d^\infty(a_j, c_i) - 2D - 2 > d^\infty(x_0, a_j)$$

임을 알 수 있다. 이는 c_i 가 $\mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap A_2$ 의 원소 중 가장 x_0 에 가까운 것이라는 사실에 모순이다. 따라서 $c_i \in \{b_j, c_j\}$ 일 수 없다.

이제 주장 6.2이 증명되었으므로, 알고리즘은 앞에서 설명한 대로 동작한다. 즉, 마지막 스텝이 끝났을 때 $\#\mathcal{U} = 0$ 이고, 부등식 6.1에 의해 A_2 의 최소 절반이 \mathcal{G} 에 들어가 있다. 이제 각 $a_i \in \mathcal{G}$ 마다

$$K_i := \mathcal{H}_{\mathbf{a},D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \setminus \mathcal{N}_{10D}(a_i)$$

로 정의하겠다. 그러면 각 $a_i \in \mathcal{G} \subseteq A_1$ 에 대해

$$\#(K_i \cap A) \geq \#(\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap A) - M \geq 2M/\epsilon$$

이다. 이제, 서로 다른 \mathcal{G} 의 원소 $a_i, a_j \in \mathcal{G}$ 에 대해 K_i 와 K_j 가 겹치지 않음을 주장하겠다. 만약 그렇지 않고

$$z \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, \{x_0, b_i\}) \cap \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_j, \{x_0, b_j\}), d(z, a_i) > 10D, d(z, a_j) > 10D$$

를 만족하는 $z \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 가 존재한다고 해보자. 그러면 보조정리 6.2에 의해 $a_j \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_i, \{x_0, b_i\})$ 이거나 혹은 $a_i \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(a_j, \{x_0, b_j\})$ 이다. 어느 경우이든, a_i 및 a_j 가 \mathcal{G} 의 원소라는 사실에 모순이다. 따라서 그러한 z 는 존재하지 않는다.

이로부터,

$$\#A \geq \#(\cup_{i:a_i \in \mathcal{G}} K_i) = \sum_{i:a_i \in \mathcal{G}} \#K_i \geq (2M/\epsilon) \cdot \#\mathcal{G}$$

임을 알 수 있다. 이로부터 목표한 부등식

$$\#A_1 \leq 2\#\mathcal{G} \leq \frac{2}{2M/\epsilon} \#A \leq \frac{\epsilon}{M} \#A$$

을 얻으면서 증명이 끝난다. \square

7. 랭크 1 등거리사상

정의 7.1. 중점그래프 Γ 의 어떤 대칭 g 가 정규 1차수(*regular rank-1*)라는 것은, 어떤 반공간 H 와 지수 n 이 존재하여 $g^n H$ 이 H 에 포함되고 또 H 와 강하게 분리되어 있다는 뜻이다. 이 경우, g 가 H 를 펜다(*skewer*)고 말한다.

이제 정규 1차수 대칭을 어떻게 활용할 수 있는지 살펴보겠다.

보조정리 7.1 (Tits 대안). 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용하는 대칭군 $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 가 정규 1차수 원소 g 를 하나 포함한다고 가정하자. 그러면 다음 둘 중 하나가 성립한다:

- (1) G 는 \mathbb{Z} 를 유한 지수 부분군으로 갖거나, 혹은
- (2) 적당히 큰 정수 n 과 G 의 원소 g' , 그리고 반공간 H 가 존재하여, $g^n H$, $g^{-n} H^c$, $g' H$, $g'^{-1} H^c$ 가 모두 서로 겹치지 않으면서 서로 강하게 분리되어 있다.

Proof. 먼저, g 가 뛰는 반공간 H 를 하나 고정하자. 원소 g 를 적당히 큰 거듭제곱으로 대체함으로써, $gH \subsetneq H$ 라고 가정할 수 있다. 참고로 이때 임의의 $k > 0$ 에 대해 $g^k H \subsetneq g^{k-1} H \subsetneq \dots \subsetneq H$ 이기에 $g^k \neq id$ 이다. 따라서 g 로 생성된 G 의 부분군 $\langle g \rangle$ 는 정수군 \mathbb{Z} 와 동형이다.

더하여, H 밖에 있는 점 x 을 하나 고정하고 $d^\infty(x, g^6 H) = D$ 로 두겠다. 군 G 의 작용이 진정하다고 가정했으므로, $A := \{a \in H : d^\infty(x, ax) < 2D\}$ 는 유한 집합이다.

이제, G 의 원소 h 에 대한 성질

$$P(h) := "g^{-n} H \supsetneq hH \supsetneq g^n H" \text{이 성립하게끔 하는 양의 정수 } n \text{이 존재함},$$

$$Q(h) := "g^{-n} H \supsetneq hH^c \supsetneq g^n H" \text{이 성립하게끔 하는 양의 정수 } n \text{이 존재함}"$$

을 정의하겠다. 동일한 원소가 P 및 Q 를 동시에 가질 수는 없음에 유의하라.

주장 7.2. 어떤 G 의 원소 $h \in G$ 를 생각하자. 만약 h 및 hg 가 동시에 성질 P 를 가지면, h 는 $\langle g \rangle \cdot A$ 안에 들어 있다.

주장 7.2의 증명 주어진 조건을 다시 요약하면, $g^{-n}H \supsetneq hH \supsetneq hgH \supsetneq g^nH$ 이게끔 하는 $n > 0$ 이 존재한다는 뜻이다. 이제

$$m(h) := \max \{i : g^i H \supseteq hH\}, \quad M(h) := \min \{i : g^i H \subseteq hgH\}$$

를 정의하자. 위에서 논하는 집합은 공집합이 아니고, 각각 상한 및 하한이 존재하는 집합이므로 이 값들은 잘 정의된다. 물론 $g^{m(h)}H \supseteq hH \supsetneq hgH \supseteq g^{M(h)}H$ 이므로 $-n \leq m(h) < M(h) \leq n$ 이다.

여기서 $M(h) \leq m(h) + 5$ 임을 보이겠다. 만약 그렇지 않고 $M(h) > m(h) + 5$ 라고 가정하면,

$$g^{-n}H \supsetneq g^{m(h)+1}H \supsetneq g^{m(h)+2}H \supsetneq g^nH, \quad g^{-n}H \supsetneq hH \supsetneq g^nH$$

에 보조정리 5.5를 적용할 수 있고 $g^{m(h)+1}H \supsetneq hH$ 혹은 $hH \supsetneq g^{m(h)+2}H$ 임을 얻는다. 그런데 전자는 $m(h)$ 의 정의상 불가능하므로 $hH \supsetneq g^{m(h)+2}H$ 임을 얻는다. 비슷한 이유로, $g^{M(h)-2}H \supsetneq hgH$ 이다. 그러나 $m(h) + 3 < M(h) - 2$ 임을 가정했으므로,

$$\begin{aligned} d^\infty(hH^c, hgH) &\geq d^\infty(g^{m(h)+2}H^c, g^{M(h)-2}H) \\ &\geq d^\infty(g^{m(h)+2}H^c, g^{m(h)+3}H^c) + d^\infty(g^{m(h)+3}H^c, g^{M(h)-2}H) \\ &> d^\infty(H^c, gH) \end{aligned}$$

라는 모순을 얻는다. 따라서 이는 불가능하고 $M(h) \leq m(h) + 5$ 이다.

따라서

$$g^{m(h)}x, hx \notin hH \supsetneq hgH \supseteq g^{M(h)}H \supseteq g^{m(h)+5}H$$

임을 알 수 있다. 이는

$$d^\infty(g^{m(h)}x, hx) \leq d^\infty(hx, hgH) + d^\infty(g^{m(h)}x, g^{m(h)+5}H) \leq 2D$$

를 의미하며, 따라서 $g^{-m(h)}h \in A$ 이다. 즉 $h \in \langle g \rangle \cdot A$ 이다. \square

비슷한 증명을 통해, 다음도 알 수 있다.

주장 7.3. 군 G 의 원소 $h \in G$ 를 생각하자. 만약 h 및 hg^{-1} 가 동시에 성질 Q 를 가지면, h 는 $\langle g \rangle \cdot A$ 안에 들어 있다.

위 주장들로부터 다음 주장도 얻는다.

주장 7.4. 군 G 의 원소 $h \in G$ 를 생각하자. 만약 h 와 $hg^{\#A}$ 가 동시에 성질 P 를 가지면, 임의의 $k \in \mathbb{Z}$ 에 대해 hg^k 또한 P 를 가진다.

주장 7.4의 증명.. 가정에 의해

$$g^{-M}H \supsetneq hH \supsetneq hg^{\#A}H \supsetneq g^M H$$

를 만족하는 $M > 0$ 이 존재한다. 특히, $h, hg, \dots, hg^{\#A-1}$ 가 모두 성질 P 를 가진다. 주장 7.2에 의해, 각각의 $i = 0, \dots, \#A - 1$ 마다

$$hg^i = g^{m_i}a_i$$

에 해당하는 어떤 $m_i \in \mathbb{Z}$ 및 $a_i \in A$ 가 존재한다. 비둘기집의 원리에 의해, 어떤 $0 \leq i < j < \#A$ 에 대해 $a_i = a_j$ 이고, 이때 $hg^{j-i}h^{-1} = g^{m_j - m_i}$ 이다. 표기 편의상 $A = j - i, B = m_j - m_i$ 라고 표시하자. 이때 $A > 0$ 임에 유의하라. 그러면 $hg^A = g^B h$ 및 $hg^{-A} = g^{-B} h$ 이다. 이를 연달아 활용하면

$$hg^{Ak} = g^{Bk}h \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

임을 알 수 있다.

이제 임의의 k 에 대해,

$$g^{-|k|B}hg^kH = hg^{-|k|A}g^kH \supsetneq hH \supsetneq g^M H$$

임을 안다. 이는 다시 말해 $hg^kH \supsetneq g^{M+|k|B}H$ 라는 것이다. 또한

$$g^{|k|B}hg^kH = hg^{|k|A}g^kH \subsetneq hH \subsetneq g^{-M} H$$

이므로 $hg^kH \subsetneq g^{-M-|k|B}H$ 이다. 이로써 hg^k 가 성질 P 를 가짐을 증명했다. \square

마찬가지 증명을 통해 다음이 따라 나온다.

주장 7.5. 어떤 G 의 원소 $h \in G$ 를 생각하자. 만약 h 와 $hg^{\#A}$ 가 동시에 성질 Q 를 가지면, 임의의 $k \in \mathbb{Z}$ 에 대해 hg^k 또한 Q 를 가진다.

이제, 만약 각각의 $h \in G$ 이 P 또는 Q 를 만족한다면 결론 (1)이 성립함을 논증하겠다. 만약 모든 $h \in G$ 가 P 를 만족한다면 주장 7.2에 의해 증명이 끝난다. 그렇지 않고 Q 를 만족하는 G 의 원소 u 가 존재하는 경우,

$$G_+ = \{h \in H : P(h)\}, \quad G_- = \{h \in H : Q(h)\}$$

로 나누겠다. 이때 G_+ 가 지수 2짜리 부분군임을 관찰하기 위해 $a, b \in G_+$ 를 임의로 고르자. 그러면

$$g^{-n}H \supsetneq aH \supsetneq g^nH, \quad g^{-m}H \supsetneq bH \supsetneq g^mH$$

인 $n, m > 0$ 이 존재한다. 여기서, ag^{-m} 이 만약 성질 Q 를 만족하면, $ag^{-m}H^c \supsetneq g^kH$ 를 만족하는 정수 $k > 0$ 를 찾을 수 있다. 이는 곧

$$g^kH^c \supsetneq ag^{-m}H \supsetneq aH \supsetneq g^nH$$

임을 의미하는데, 이는 $H^c \subseteq g^kH^c$ 및 $H^c \cap g^nH = \emptyset$ 에 모순이다. 따라서 이는 불가능하고, ag^{-m} 이 성질 P 를 만족한다. 다시 말해, $g^{-l}H \supsetneq ag^{-m}H$ 를 만족하는 정수 $l > 0$ 이 존재한다. 그러면

$$g^{-l}H \supsetneq ag^{-m}H \supsetneq abH$$

로부터, ab 는 성질 Q 를 가질 수 없고 대신 P 를 가져야 함을 알 수 있다. 위 관찰은 곧 G_+ 가 G 의 부분군이고 $uG_+ = G_-$ 라는 것이다. 이로써 G_+ 가 G 의 지수 2짜리 부분군임을 알 수 있다. 물론, G_+ 에는 \mathbb{Z} 에 동형인 유한 지수 부분군이 존재한다. 이로써 논증이 끝난다.

이제 성질 P 도 Q 도 가지지 않는 $h \in G$ 가 존재하는 경우 결론 (2)가 성립함을 보이겠다. 여기서 $\{g^iH\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 중 hH 와 교차할 수 있는 것은 기껏해야 하나밖에 없고, 나머지는 모두 g^iH 와 평행하다. 또한, hH 가 $\{g^iH : i \in \mathbb{Z}\}$ 모두에 포함되어 있는 것은 불가능하다. 만약 그렇게 될 경우, 임의의 $i > 0$ 에 대해 $d^\infty(H^c, hH) \geq d^\infty(H^c, g^iH) \geq i$ 라는 얘기가 되어, Γ 가 연결되어 있지 않다는 모순이 생기기 때문이다. 마찬가지로, hH 가 $\{g^iH^c : i \in \mathbb{Z}\}$ 모두에 포함되어 있을 수 없다. 마지막으로, 어떤 n 에 대해 $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 를 hH 가 분리한다면 이는 가정에 모순이다. 이를 모두 종합하면, hH 혹은 hH^c 중 하나는 충분히 큰 n 에 대해 $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 과 겹치지 않는다.

이후 증명에서는 hH , $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 가 서로 겹치지 않는 경우를 논하겠다. 나머지 경우, 즉 hH^c , $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 가 서로 겹치지 않는 경우 또한 비슷한 논법으로 다룰 수 있다.

먼저 $D = d^\infty(hH, g^nH) + d^\infty(hH, g^{-n}H^c) + \#A$ 로 두자. 그후 $hg^{-D}, hg^{-2D}, hg^{-3D}$ 라는 G 의 세 원소를 생각하자. 만약 이 세 원소 각각이 P 또는 Q 를 만족하면, 최소 두 개는 같은 종류의 성질을 가지게 된다. 이때 주장 7.4에 비추어 보면 $h\langle g \rangle$ 전체가 그 성질을 가지게 된다. 특히, h 또한 P 또는

Q 를 가지게 되어 이는 모순이다. 따라서 그럴 수 없고, 어떤 $k \in \{1, 2, 3\}$ 에 대해 $hg^{-kD}H$ 는 P 도 Q 도 가지지 않는다. 이는 곧 충분히 큰 $m > n + 2$ 에 대해 $hg^{kD}H$ 가 $g^{-m}H^c$ 및 g^mH 둘 다와 겹치지 않거나 둘 다를 포함한다는 뜻이다.

이 상황에서 만약 $hg^{-kD}H$ 가 $g^{-m}H^c$ 및 g^mH 와 겹치지 않는다면 어떻게 될까? 이 경우, $hg^{-kD}H$ 는 $g^{-n}H^c$ 및 g^nH 중 기껏해야 한 개량만 교차할 수 있다. 만약 hg^{-kD} 와 g^nH 가 교차하지 않는다면, 이 hg^{-kD} 와 g^nH 는 서로 겹치지 않아야 한다. $hg^{-kD}H$ 는 $g^nH \supsetneq g^mH$ 를 포함할 수 없고, g^nH 도 $hg^{-kD}H \supseteq H$ 를 포함할 수 없으며, $hg^{-kD} \cup g^nH$ 는 g^mH 라는 부분을 놓치기 때문이다. 따라서, $hg^{-kD}H$ 는 hH 와 g^nH 사이에 끼겨 있어야 하는데, 이는

$$d^\infty(hH, g^nH) < D \leq d^\infty(hH, hg^{-kD}H^c) \leq d^\infty(hH, g^nH)$$

라는 모순을 낳는다. 따라서 이러한 일은 생길 수 없다. 마찬가지로, hg^{-kD} 와 $g^{-n}H^c$ 가 교차하지 않을 때도 비슷한 모순이 생긴다. 따라서, $hg^{-kD}H$ 가 $g^{-m}H^c$ 및 g^mH 와 겹치지 않을 수는 없고, 둘 모두를 포함해야 한다. 이제 $g^{-m}H^c, g^mH, hH, hg^{-kD}H^c$ 가 모두 서로 겹치지 않는다는 것은 명백하다. 더하여, $g^{-m-1}H^c, g^{m+1}H, hgH, hg^{-kD-1}H^c$ 은 강하게 분리되어 있기까지 하다. 이는 원하는 결론이다. \square

이제, 명제 3.1의 절반을 증명할 준비가 되었다.

명제 7.1. 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용하는 대칭군 $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 를 생각하자. 또, G 가 정규 1차수 원소 $g \in G$ 를 하나 포함하고 있고, \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군이 없다고 가정하자. 또 $x_0 \in \Gamma$ 를 하나 고정하자. 그러면 각각의 $0 < \epsilon < 1$ 에 대해 어떤 유한 집합 $\{b_1, \dots, b_T\} \subseteq G$ 및 반공간 유한 개 L_1, \dots, L_T 가 존재하여 다음이 항상 성립한다.

유한 집합 $A \subseteq G$ 를 임의로 생각하자. 그러면 크기가 $(1 - \epsilon)\#A$ 이상인 A 의 부분집합 A' 이 하나 존재하여, 각각의 $a \in A'$ 마다 어떤 i 가 존재하여

$$ax_0 \in A'x_0 \subseteq aL_i \subsetneq ab_iL_i^c$$

가 성립한다.

Proof. 보조정리 7.1에 의해, G 안의 정규 1차수 원소 g_1, g_2 및 반공간 H 가 존재하여

$$g_1H, g_1^{-1}H^c, g_2H, g_2^{-1}H^c$$

가 모두 강하게 분리되어 있다. 이때 id 와 g_i 을 잇는 d_S -경로 γ_i 를 하나씩 고르자. 그러면 적당히 큰 n 에 대해 $\gamma_1 \cdot x_0$ 및 $\gamma_2 \cdot x_0$ 는 $g_1H^c \cap g_1^{-1}H \cap g_2H^c \cap g_2^{-1}H$ 안에 갇혀 있다고 말할 수 있다. 이때 그러면 γ_i 는 $\gamma_i \cdot (g_1\gamma_i) \cdot \dots \cdot (g_i^{n-1}\gamma_i)$ 로 대체하고, g_i 는 g_i^n 으로 대체함으로써, $\gamma_i x_0$ 가 $g_1H^c \cap g_1^{-1}H \cap g_2H^c \cap g_2^{-1}H$ 에 갇혀 있다고 가정할 수 있다. 또, (g_1, g_2) 를 (g_1g_2, g_2^2) 로 대체함으로써,

$$\{H^c, g_1H, g_2H\}, \quad \{H, g_1^{-1}H^c, g_2^{-1}H^c\}$$

라는 두 모임 각각이 강하게 분리된 반공간의 모임이라고 얘기할 수 있다. 이때,

$$M := \max \{d^\infty(H^c, u_1 \cdots u_{15}H) : u_i \in \{g_1, g_2\}\} + d^\infty(x_0, g_2^{-1}H^c)$$

로 놓겠다.

이제 명제 6.1을 활용해 보자. 현재 G 의 작용이 거리상 진정하기에, $G \cdot x_0$ 라는 집합은 균일하게 거리상 진정하다. 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해, 명제 6.1에서 보장하는 $N = N(\epsilon, M)$ 을 잡자. 그러면 각각의

유한 집합 $A \subseteq G$ 마다 크기가 $(1 - \epsilon)\#A$ 이상인 A 의 부분집합 A' 이 하나 존재하여, 각각의 $a \in A'$ 마다

$$\#\left(Ax_0 \cap \mathcal{H}_M(ax_0, \{x, x'\})\right) \leq N$$

이제끔 하는 $x, x' \in Ax_0$ 가 존재한다. 여기서

$$\{c_1, c_2, \dots, c_{2N+13}\} := \{u_1 u_2 \cdots u_{N+14} : u_i \in \{g_1, g_2\}\}$$

으로 잡고, $b_i := c_i g_1^5 c_i^{-1}$ 및 $L_i = c_i H^c$ 로 잡겠다.

이제 각 $a \in A'$ 의 각 점마다 명제에서 요구하는 정수 i 가 존재한다는 것을 논하겠다. 먼저

$$g_1^2 H, g_1 g_2 H, g_2 g_1 H, g_2^2 H$$

는 모두 서로 겹치지 않기에, 최소한 하나는 x_0 도, $a^{-1}x$ 도, $a^{-1}x'$ 도 포함하지 않는다. 그러한 것을 g_a 라고 표시하겠다. 그러면

$$\{a, x, x'\} \subseteq ag_a H^c, \quad ag_a H \supsetneq ag_a g_1 \supsetneq H \supsetneq \dots \supsetneq ag_a g_1^{10} H$$

이 성립한다. 더하여, ax_0 도 $ag_a g_1^{10} H$ 도 $ag_1^{-1} H^c$ 밖에 있으니, 보조정리 5.3에 의해

$$d^\infty(ax_0, ag_a g_1^{10} H) \leq d^\infty(ax_0, ag^{-2} H^c) + d^\infty(ag^{-2} H^c, ag_a g_1^{10} H) \leq M$$

이 성립한다. 이로부터, $ag_a g_1^{10} H$ 의 원소들은 모두 $\mathcal{H}_M(ax_0, \{x, x'\})$ 밖에 있음을 알 수 있다.

그렇다면 $Ax_0 \cap ag_a g_1^{10} H$ 에는 기껏해야 N 개의 원소가 있다. 따라서 $ag_a g_1^{10} H$ 에 포함되어 있는

$$\{ag_a g_1^{10} u_1 u_2 \cdots u_N H : u_i \in \{g_1, g_2\}\}$$

라는 2^N 개의 서로 겹치지 않는 반공간 중, Ax_0 의 원소를 포함하지 않는 것이 분명히 존재한다. 그러한 선택지 u_1, \dots, u_N 들을 하나 고정했을 때,

$$A'x_0 \subseteq ag_a g_1^{10} u_1 \cdots u_N H^c \subsetneq ag_a g_1^{10} u_1 \cdots u_N \cdot g_1^5 H$$

가 성립한다. 따라서, $c_i = g_a g_1^{10} u_1 \cdots u_N$ 인 i 를 택하고, $L_i = c_i H^c$ 및 $b_i = c_i g_1^{10} c_i^{-1}$ 를 택하면 원하던 조건을 만족한다. 물론 id 와 b_i 사이는 적당히 γ_1, γ_2 혹은 그 역방향 경로들을 이어붙인 d_S -경로로 이를 수 있다. 이때

$$((\gamma_1) \cdot \dots \cdot (c_i g_1^5 \gamma_1)) \cdot x_0 \subsetneq c_i g_1^{10} H^c$$

임은 분명하다. 마찬가지로, 후반부 경로의 x_0 -궤도가 $c_i H$ 에 포함됨은 분명하다. 이로써 경로 γ_i 의 존재성까지 확인하였고 증명이 끝난다. \square

이제 남은 것은 마법 보조정리의 증명을 완수하는 것이다.

명제 7.2. 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용하는 대칭군 $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 를 생각하자. 또, G 가 정규 1차수 원소 $g \in G$ 를 하나 포함하고 있고, \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군이 없다고 하자. 더하여, g 가 궤뚫는 반공간 H 및 점 x_0 을 하나 고정하자. 그러면 각각의 $N > 20$ 마다 $K > 0$ 이 존재하여

$$\mathcal{C}_N(g) := \left\{ h \in G : \begin{array}{l} x_0 \notin wgH \supsetneq wg^N H \ni hx_0 \text{ 혹은 } hx_0 \notin wgH \supsetneq wg^N H \ni x_0 \text{가} \\ \text{성립하게끔 하는 } w \in G \text{가 존재하지 않음} \end{array} \right\}$$

가 K -나무스럽다.

Proof. 대칭 g 를 적당히 큰 거듭제곱으로 대체함으로써 $x_0 \notin gH \cap g^{-1}H^c$ 임을 가정할 수 있다. 이때 증명을 위해 상수

$$K := 100 \left(d^\infty(x_0, g^{100}H) + d^\infty(x_0, a^{-100(N+1)}H^c) \right)$$

를 잡겠다.

먼저 $\mathcal{C}_N(g)$ 의 $0.5K$ -분리된 부분집합 중 id 를 포함하고 또 극대인 것을 하나 골라 \mathcal{C}' 라고 하자. 이제 각각의 $u \in \mathcal{C}'$ 에 대해

$$\Psi(u) := ug^{40N}$$

을 잡아 주겠다.

이제 다음 관찰이 필요하다.

주장 7.6. 두 원소 $u_1, u_2 \in \mathcal{C}'$ 에 대해,

$$x_0 \notin u_1g^{5N}H \supsetneq u_1g^{35N}H \supsetneq \Psi(u_1)u_2g^{5N}H \supseteq \Psi(u_1)u_2g^{35N}H \ni \Psi(u_1)\Psi(u_2)x_0$$

가 성립한다.

주장 7.6의 증명.. 다음은 $i = 1, 2$ 각각에 대한 얘기이다. 만약 $x_0 \in u_i g^N H$ 이라면

$$u_i x_0 \notin u_i g H \supsetneq u_i g^N H \ni x_0$$

라는 얘기가 되어 $u_i \in \mathcal{C}_N(g)$ 라는 가정에 모순이다. 따라서 $u_i^{-1}x_0 \notin g^N H$ 이다. 마찬가지 이유로 $u_i x_0 \in g^{-N} H$ 이다.

이제 남은 것은 가운데 포함관계, 즉 $g^{-5N}H \supsetneq u_2g^{5N}H$ 임을 증명하는 것이다. 앞에서 얘기했다시피 u_2x_0 는 $g^{-N}H$ 에 포함된다. 여기서 귀류법을 적용하기 위해, $u_2g^{5N}H$ 가 $g^{-5N}H$ 에 포함되지 않는즉, $u_2g^{5N}H$ 와 $g^{-5N}H^c$ 가 어떤 원소 y 를 공유한다고 가정해 보자. 이 경우, $u_2x_0 \notin u_2^{5N-1}H \supsetneq u_2^{5N}H \ni y$ 및 $u_2x_0 \notin g^{-5N}H^c \ni y$ 라는 위치관계에 보조정리 5.5를 적용하면 $u_2^{5N-1}H \supsetneq g^{-5N}H^c$ 혹은 $g^{-5N}H^c \supsetneq u_2^{5N}H$ 여야 한다. 전자의 경우

$$x_0, u_2x_0 \notin u_2g^{5N-2}H \supsetneq u_2g^{5N-1}H \supsetneq g^{-5N}H^c$$

라는 위치 관계에 보조정리 5.4을 적용하면

$$d^\infty(x_0, u_2x_0) \leq d^\infty(u_2x_0, u_2g^{5N-2}H) + d^\infty(x_0, g^{-5N}H^c) \leq 0.02K$$

가 된다. 이는 $u_2 \in \mathcal{C}'$ 라는 가정에 어긋난다. 후자의 경우에도

$$x_0, u_2x_0 \notin g^{-5N+1}H^c \supsetneq g^{-5N}H^c \supsetneq u_2^{5N}H$$

라는 위치 관계에 보조정리 5.4을 적용하면

$$d^\infty(x_0, u_2x_0) \leq d^\infty(u_2x_0, u_2g^{5N}H) + d^\infty(x_0, g^{-5N}H^c) \leq 0.02K$$

가 된다. 이는 역시 $u_2 \in \mathcal{C}'$ 라는 가정에 어긋난다. 따라서 $u_2g^{5N}H$ 가 $g^{-5N}H$ 에 포함되어야 하고 주장의 증명이 끝난다. \square

주장 7.7. 집합 \mathcal{C}' 의 원소 u_1, \dots, u_m 및 v_1, \dots, v_n 에 대해, 만약 $\Phi(u_1) \cdots \Phi(u_m) = \Psi(v_1) \cdots \Psi(v_n)$ 이라면 $u_1 = v_1$ 이다.

주장 7.7의 증명.. 편의를 위해 $U := \Phi(u_1) \cdots \Phi(u_m) = \Psi(v_1) \cdots \Psi(v_n)$ 라고 두자. 주장 7.6에 의해,

$$x_0 \notin u_1 g^{5N} H \supsetneq u_1 g^{35N} H \supseteq \dots \supsetneq \Phi(u_1) \cdots \Phi(u_{m-1}) u_m g^{35N} H \ni U x_0,$$

$$x_0 \notin v_1 g^{5N} H \supsetneq v_1 g^{35N} H \supseteq \dots \supsetneq \Phi(v_1) \cdots \Phi(v_{n-1}) v_n g^{35N} H \ni U x_0$$

가 성립한다.

여기서 만약 $v_1 x_0 \in u_1 g^{6N} H$ 라면 이는 곧 $x_0 \notin u_1 g^{5N} \cdot g H \supsetneq u_1 g^{5N} \cdot g^N H \ni v_1 x_0$ 라는 의미가 되어 $v_1 \in \mathcal{C}_N(g)$ 임에 모순이다. 따라서 $v_1 x_0 \notin u_1 g^{6N} H$ 이고 마찬가지 이유로 $u_1 x_0 \notin v_1 g^{6N} H$ 이다.

이제

$$x_0 \notin u_1 g^{10N} H \supsetneq u_1 g^{11N} H \ni U x_0, \quad x_0 \notin v_1 g^{10N} H \supsetneq U x_0$$

라는 위치 관계에 보조정리 5.5를 적용하면, $u_1 g^{10N} H \supsetneq v_1 g^{10N} H$ 혹은 $v_1 g^{10N} H \supsetneq u_1 g^{11N} H$ 임을 알 수 있다. 전자의 경우

$$u_1 x_0, v_1 x_0 \notin u_1 g^{9N} H \supsetneq u_1 g^{10N} H \supsetneq v_1 g^{10N} H$$

라는 위치 관계에 보조정리 5.4를 적용해

$$d^\infty(u_1 x_0, v_1 x_0) \leq d^\infty(u_1 x_0, u_1 g^{10N} H) + d^\infty(v_1 x_0, v_1 g^{10N} H) \leq 0.02K$$

임을 알 수 있다. 후자의 경우

$$u_1 x_0, v_1 x_0 \notin v_1 g^{9N} H \supsetneq v_1 g^{10N} H \supsetneq u_1 g^{11N} H$$

라는 위치 관계에 보조정리 5.4를 적용해

$$d^\infty(u_1 x_0, v_1 x_0) \leq d^\infty(u_1 x_0, u_1 g^{11N} H) + d^\infty(v_1 x_0, v_1 g^{10N} H) \leq 0.02K$$

임을 알 수 있다. 어느 경우이든, $0.5K$ -분리된 집합인 \mathcal{C}' 에서 뽑은 u_1, v_1 에게는 $u_1 = v_1$ 임을 알려 준다. \square

주장 7.7를 반복해서 적용하면, $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}'$ 에 대해 만약 $\Phi(u_1) \cdots \Phi(u_m) = \Psi(v_1) \cdots \Psi(v_n)$ 이면 곧 $m - n$ 이고 $u_i = v_i (i = 1, \dots, n)$ 임을 알 수 있다. 이는 곧 $\Psi(\mathcal{C}')$ 가 0-나무스럽다는 것이고, \mathcal{C}' 는 $0.5K$ -나무스러우며, 따라서 \mathcal{C} 는 K -나무스럽다. \square

명제 7.3. 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용하는 대칭군 $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ 를 생각하자. 또, G 가 정규 1차수 원소 $g \in G$ 를 하나 포함하고 있고, \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군이 없다고 하자. 더하여, g 가 꿰뚫는 반공간 H 및 점 x_0 을 고정하자. 그러면 $K > 0$ 이 존재하여, 충분히 큰 $T > 0$ 마다 다음이 성립한다.

점 x_0 와 또 다른 임의의 점 $x' \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 사이의 반공간 극대 사슬

$$x_0 \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_M \ni x'$$

를 고정한 뒤,

$$\mathcal{L}_i := \{g \in G : d^\infty(gx_0, \partial L_{Ti}) \leq 0.001T\}$$

를 잡자. 그러면 $\mathcal{L}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{L}_{M/T}$ 는 K -나무스럽다.

Proof. 이번에는 조금 더 품이 필요하다. 보조정리 7.1에 의해 어떤 $a_1, \dots, a_4 \in G$ 가 존재해 다음이 성립한다:

그 어느 $x, y, z \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해서도, $\{x, y, z\} \subseteq a_i g H^c \cap a_i g^{-1} H^c$ 인 i 가 존재함.

특히 $\{x, y, z\} = \{x_0, x_0, x'\}$ 에 대한 선택지를 \mathbf{t} 라고 정해 두자. 그리고 각 $g \in \mathcal{L}_i$ 마다, $\{x, y, z\} = \{x_0, u^{-1}x_0, u^{-1}x'\}$ 에 대한 선택지를 $\mathbf{s}(u)$ 라고 표기하겠다, 그런 후

$$\Phi(u) := u\mathbf{s}(u)g^{200}\mathbf{t}$$

로 고정하겠다. 또 이번에는

$$K := 100 \left(d^\infty(x_0, g^{100}H) + d^\infty(x_0, a^{-100(N+1)}H^c) + \max_{i=1}^4 d^\infty(x_0, a_i x_0) \right)$$

로 두겠다.

이번에도 $\sqcup_i \mathcal{L}_i$ 의 $0.5K$ -분리된 부분집합 중 극대인 것을 하나 골라 \mathcal{C}' 라고 하겠다. 이전 증명과 비슷하게 정렬성에 관한 주장을 먼저 증명한 뒤 단사성을 증명하려고 한다.

사실 정렬성은 증명할 것이 별로 없다. 임의의 $u_1 \in \mathcal{C}'$ 를 골랐을 때, $x_0 \notin u_1 \mathbf{s}(u_1)H$ 이라는 것은 \mathbf{s} 의 정의로부터 바로 따라 나온다. 그다음으로, 임의의 $u_2 \in \mathcal{C}'$ 를 추가로 고르자. 이때 $L_{T/2}$ 이라는 초평면은 x_0 과 x' 사이에 끼어 있음을 기억하라. 그런데 $u_2 \mathbf{s}(u_2)gH$ 및 $u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H$ 는 이 두 점 모두 포함하지 않는다. 보조정리 5.3에 의해, $L_{T/2}$ 은 $u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H$ 를 완전히 포함하거나 혹은 서로 겹치지 않아야 한다. 그런데 이때 $u_2 x_0$ 은 L_1^c 에도 $u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H$ 에도 포함되어 있지 않다. 따라서 만약 위의 후자의 경우

$$d^\infty(u_2 x_0, L_{T/2}^c) \leq d^\infty(u_2 x_0, u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H) \leq 0.1T$$

인데 이는 $u_2 x_0$ 과 $L_{T/2}^c$ 사이에 반공간 $L_{T/2+1}, L_{T/2+2}, \dots, L_T$ 가 끼어 있다는 사실에 모순이다. 따라서 $L_1 \supsetneq u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H$ 이다.

마찬가지 논법으로, $\mathbf{t}^{-1}g^{-2}H \supsetneq L_1$ 임을 알 수 있다. 이를 모두 조합하면 정렬성

$$x_0 \notin u_1 \mathbf{s}(u_1)H \supsetneq u_1 \mathbf{s}(u_1)g^{198}H \supsetneq \Phi(u_1)u_2 \mathbf{s}(u_2)g^2H \supsetneq \Phi(u_1)u_2 \mathbf{s}(u_2)g^{200}H \ni \Phi(u_1)\Phi(u_2)x_0$$

임을 알 수 있다.

이제, 임의의 $u_1, v_1 \in \mathcal{C}'$ 에 대해 $v_1 x_0 \in u_1 \mathbf{s}(u_1)g^{30}H$ 일 수 있는지 알아보겠다. 이때 $u_1 x_0 \in N_{0.001T}(\partial L_m)$ 인 m 을 먼저 잡아 두겠다. 이제 x_0 과 x' 는 모두 $u_1 \mathbf{s}(u_1)gH \supsetneq u_1 \mathbf{s}(u_1)g^2H$ 바깥에 있음을 유의하라. 보조정리 5.3(및 보조정리 5.4의 증명도 참조)에 따라 어떤 m' 이 존재해

$$x_0 \notin L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_{m'} \supseteq u_1 \mathbf{s}(u_1)g^2H, \quad u_1 \mathbf{s}(u_1)g^2H^c \supseteq L_{m'+1} \supsetneq \dots \supsetneq L_M \ni x'$$

여야 한다. 그러면 $|m' - m| \leq 0.001T + d^\infty(x_0, \mathbf{s}(u_1)x_0) + d^\infty(x_0, g^2H) \leq 0.002T$ 여야 한다. 또 $v_1 x_0 \in N_{0.001T}(\partial L_k)$ 인 k 를 잡으면, $L_{m'}$ 과 L_k 사이에 있는 모든 Li 들은 $v_1 x_0$ 과 L_k 사이에 깊게 있음을 알 수 있다. 이로부터 $|m' - k| \leq 0.001T$ 임도 알 수 있다. 즉, $|m - k| \leq 0.002T$ 이고, 이로부터 $m = k$ 여야 함을 알 수 있다.

그런데 u_1 와 v_1 가 같은 반공간 L_m 의 경계에 있으면서 그 사이에 $u_1 \mathbf{s}(u_1)gH \supsetneq \dots \supsetneq u_1 \mathbf{s}(u_1)g^{30}H$ 가 깊게 있다는 것은, $u_1 \mathbf{s}(u_1)gH \supsetneq \dots \supsetneq u_1 \mathbf{s}(u_1)g^{30}H$ 가 강하게 분리되어 있다는 사실에 모순이다. 따라서 이러한 일은 일어날 수 없다.

위 이유와 정렬성을 함께 결합해 이전 증명과 같이 논증하면 단사성 또한 얻는다. 이로써 $\Phi(\mathcal{C}')$ 가 나무스럽다는 것을 알 수 있고, $\sqcup_i \mathcal{L}_i$ 은 따라서 K -나무스럽다. \square

명제 7.4. 유한 집합 S 로 생성되는 군 G 가 중점그래프 Γ 에 진정으로 작용한다고 하자. 또, G 가 정규 1차수 원소 g 를 하나 포함하고 있고, \mathbb{Z} 와 동형인 유한 지수 부분군이 없다고 가정하자. 또, g 가 꿰뚫는 반공간 H 및 점 $x_0 \in \Gamma$ 를 하나 고정하자. 또한 실수열

$$\mathbf{a} := (d^\infty(H^c, g^n H))_{n=1}^{11}$$

을 두겠다. 그러면 충분히 큰 T 및 임의의 N 에 대해 다음이 성립한다.

임의의 점 $x, x' \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해, id 와 $\mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(x_0, \{x, x'\}) \setminus N_D(id)$ 바깥을 잇는 임의의 S -경로는 반드시 셋 중 하나를 만족해야 한다:

(1) $\mathcal{C}_N(g) \setminus N_{D/10}(id)$ 을 지나거나,

(2) x_0 와 x 사이에 끼인 임의의 극대 사슬 $x_0 \notin L_1 \supseteq \dots \supseteq L_{0.1N} \supseteq \dots \ni x$ 에 대해

$$\mathcal{L}_i := \{g \in G : d^\infty(gx_0, \partial L_{Ti}) \leq 0.001T\} \quad (i = 1, \dots, 0.1N/T)$$

각각을 지나거나, 혹은

(3) x_0 와 x' 사이에 끼인 임의의 극대 사슬 $x_0 \notin L'_1 \supseteq \dots \supseteq L'_{0.1N} \supseteq \dots \ni x$ 에 대해

$$\mathcal{L}'_i := \{g \in G : d^\infty(gx_0, \partial L'_{Ti}) \leq 0.001T\} \quad (i = 1, \dots, 0.1N/T)$$

각각을 지난다.

Proof. 증명을 위해 $h \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(x_0, \{x, x'\}) \setminus N_D(id)$ 를 임의로 정하자. 그러면 x_0 와 hx_0 사이에는 $x_0 \notin L \ni hx_0, d^\infty(x_0, L) = D/2$ 인 반공간 L 이 존재한다. 이 L 의 경계의 T -근방

$$\mathcal{L} := \{g \in G : d^\infty(\partial L, gx_0) < T\}$$

을 잡으면, id 와 h 를 잇는 d_S -경로는 반드시 \mathcal{L} 을 한번은 지나게 되어 있다. 이 시점을 h' 라고 하자. 만약 $h' \in \mathcal{C}_N(g)$ 라면 증명이 끝난다. 만약 아니라면,

$$x_0 \notin wgH \supseteq \dots \supseteq wg^N H \ni h'^{\pm 1} x_0$$

인 w 가 존재한다. 일단 $wg^N H \ni h'^{\pm 1} x_0$ 인 경우를 논하겠다. 나머지 경우도 논증은 비슷하다.

이때, $wg^{N-T} H$ 는 반드시 L 을 포함한다. 여기서 만약 $x, x' \notin wg^{N-T-20} H$ 라면, $x_0, x, x' \notin wg^{N-T-20} H \supseteq wg^{N-T} H \ni h^{\pm 1} x_0$ 및 $d^\infty(x_0, wg^{N-T} H) \leq D/2$ 라는 사실로부터 $h \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}, D}(x_0, \{x, x'\})$ 라는 모순을 얻게 된다. 따라서 그럴 수 없고, x 혹은 x' 와 x_0 사이에는 최소한 $wgH \supseteq \dots \supseteq wg^{N-T-20} H$ 이라는 0.5N개 이상의 반공간이 위치한다. 이 반공간들을 id 와 h' 사이 d_S -경로가 넘어야 함은 물론이다. 이로부터 2번 혹은 3번 결과를 유도할 수 있다. \square

8. 더 자세한 CAT(0) 기하학

보조정리 8.1. 모든 중점그래프는 이분그래프(bipartite graph)이다.

Proof. 모순을 이끌어내기 위해, 어떤 그래프 Γ 에 훌수 길이 사이클이 있다고 가정하자. 그런 훌수 사이클 중 가장 길이가 작은 것을 잡고, 그 꼭짓점을 순서대로 $v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}$ 이라고 이름붙이자. 이때 만약 $d(v_1, v_n)$ 이 n 보다 작을 경우, 그 거리를 실현시키면서 v_1 에서 v_n 으로 향하는 측지선을 P 라고 잡았을 때, $v_1 \xrightarrow{P} v_n \xrightarrow{P} v_{n-1} \xrightarrow{P} \dots \xrightarrow{P} v_2 \xrightarrow{P} v_1$ 및 $v_1 \xrightarrow{P} v_n \xrightarrow{P} v_{n+1} \xrightarrow{P} \dots \xrightarrow{P} v_{2n+1} \xrightarrow{P} v_1$ 은 둘 다 길이 $2n$ 이하이고, 둘 중 하나는 길이가 훌수이다. 이는 $v_1 - v_2 - \dots - v_{2n+1} - v_1$ 이 최소 훌수 길이 사이클이라는 사실에 모순이다. 따라서 $d(v_1, v_n) = n$ 이 성립한다.

마찬가지로 이유로 $d(v_{n+1}, v_1) = n$ 이 성립한다. 물론 $d(v_n, v_{n+1}) = 1$ 이다. 이제 v_1, v_n, v_{n+1} 의 중점 m 을 잡으려고 하면, $d(v_n, m) = \frac{1}{2}[n+1-n] = 1/2$ 라는 계산이 나온다. 이러한 거리를 만족하는 꼭짓점 m 은 존재하지 않기 때문에, Γ 는 중점그래프가 아니다. \square

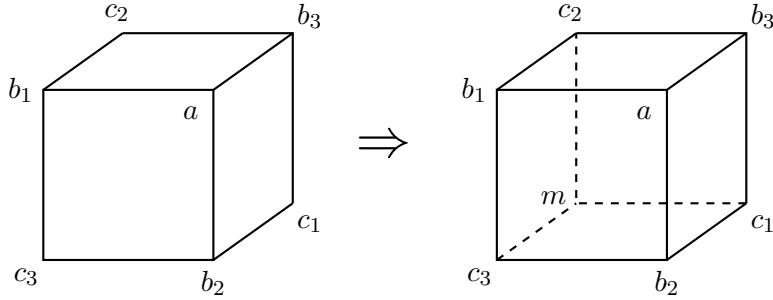


FIGURE 9. 보조정리 8.3에서의 상황도

보조정리 8.2 (사각형 보조정리). 중점그래프 Γ 상의 두 꼭짓점 x, y 을 잇는 측지선 두 개

$$\gamma_1 = (x = p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n = y), \gamma_1 = (x = q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n = y),$$

를 생각하자. 그러면 $d(x, r) = n - 2$ 면서 p_{n-1} 및 q_{n-1} 과 동시에 인접해 있는 꼭짓점 r 이 존재한다.

Proof. 먼저, $p_{n-1} = q_{n-1}$ 인 경우에는 $r = p_{n-2}$ 로 잡으면 된다.

만약 $p_{n-1} \neq q_{n-1}$ 이라면, 그 둘간의 거리는 정확히 2이다. 왜냐면 $p_{n-1} - y - q_{n-1}$ 라는 경로가 존재하기에 $d(p_{n-1}, q_{n-1})$ 는 2보다 작거나 같으며, 또 그래프의 이분성 때문에 $d(p_{n-1}, q_{n-1})$ 는 짝수여야 하기 때문이다.

이 경우, x, p_{n-1}, q_{n-1} 의 중점 r 을 잡으면,

$$\begin{aligned} d(x, r) &= \frac{1}{2}[d(x, p_{n-1}) + d(x, q_{n-1}) - d(p_{n-1}, q_{n-1})] = n - 2, \\ d(p_{n-1}, r) &= \frac{1}{2}[d(x, p_{n-1}) + d(p_{n-1}, q_{n-1}) - d(x, q_{n-1})] = 1, \\ d(q_{n-1}, r) &= \frac{1}{2}[d(x, q_{n-1}) + d(p_{n-1}, q_{n-1}) - d(x, p_{n-1})] = 1 \end{aligned}$$

을 만족한다. 이로써 증명이 끝났다. \square

이제 초평면의 모양을 더 자세히 이해해 보자. 그래프 안의 4-사이클이란, 서로 다른 모서리 e_1, e_2, e_3, e_4 및 서로 다른 꼭짓점 v_1, v_2, v_3, v_4 가

$$e_i = \overline{v_i v_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad e_4 = \overline{v_4 v_1}$$

형태로 배열되어 있는 부분그래프임을 기억하라.

보조정리 8.3. 중점그래프 Γ 안의 점들 $a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 에 대해서, $\square ab_1c_2b_3, \square ab_2c_3b_1, \square ab_3c_1b_2$ 가 모두 4-사이클을 이룬다고 가정하자. 그러면 $\square mc_1b_2c_3, \square mc_2b_3c_1, \square mc_3b_1c_2$ 가 각각 4-사이클이게끔 하는 m 라는 점이 존재하며, 이 8개의 점은 모두 서로 다르다.

Proof. 먼저 가정을 만족하는 $a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 7개의 점은 서로 결코 같을 수 없다. 예를 들어, a, b_1, c_2, b_3 끼리 같은 수 없음은 4-사이클의 정의로부터 바로 나온다. 또, 만약 c_1 와 c_2 가 같다면, $a, b_1, b_2, b_3, c_1 = c_2$ 가 $K_{2,3}$ 그래프를 이룬다는 것을 알 수 있다. 이는 곧 a 도 c_1 도 서로 다른 세 점 b_1, b_2, b_3 의 중점이 된다는 것이다. 이는 중점의 유일성에 모순이므로 불가능하다. 비슷한 논리로, c_1, c_2, c_3 은 모두 다르다. 이로써 7개의 점이 다 다르다는 것을 알 수 있다.

특히, c_1, c_2, c_3 은 서로 다른 점이면서 길이 2짜리 경로로 서로 연결되어 있기에, 서로간의 거리가 2이다. 이 세 점의 중점 m 를 잡으면, 세 점으로부터 거리 1에 있게 된다. 이 점이 만약 b_1 과 같다면, a, c_1, b_1, b_2, b_3 이 $K_{2,3}$ 그래프를 형성해 마찬가지로 모순이 된다. 따라서 m 은 b_1 일 수 없고, 마찬가지로 b_2 일 수도 b_3 일 수도 없다. 또한 a, c_1, c_2, c_3 일 수도 없음은 훌짝성에 의해 분명하다. 이로써, 8개의 점이 모두 서로 다르다는 것을 확인했다. 아울러 $\square m c_i b_{i+1} c_{i+2} \pmod{i}$ 가 4-사이클이라는 것은 분명하다. \square

보조정리 8.4. 중점그래프 Γ 안에 4-사이클

$$C_1 = \square u_0 u_1 v_1 v_0, C_2 = \square u_1 u_2 v_2 v_1, \dots, C_n = \square u_{n-1} u_n v_n v_{n-1}$$

이 주어져 있는데, 이때 C_{i-1} 과 C_i 는 변 $\overline{u_i v_i}$ 를 공유한다고 하자. 더하여, $d_\Gamma(\overline{v_0 u_0}, \overline{v_n u_n}) = 1$ 이라고 가정하자. 그러면 $\square v_0 u_0 u_n v_n$ 은 4-사이클이다.

Proof. 필요하다면 v_i 와 u_i 의 라벨링을 뒤바꿔, $v_0 \circlearrowleft \overline{v_n u_n}$ 로부터 거리 1에 있고 u_0 는 $\overline{v_n u_n}$ 에 포함되지 않는다고 가정하겠다. 이제 주어진 명제를 n 및 $S := \sum_{i=1}^n d(v_0, v_i)$ 에 대한 귀납법으로 증명하겠다.

먼저 n 이 1인 경우는 자명하고, $n = 2$ 이 불가능함도 어렵지 않게 확인할 수 있다.

이제 n 이 2보다 큰 경우를 논하겠다. 먼저 $i \in \{1, \dots, n\}$ 중 $d(v_0, v_i)$ 가 최대가 되는 i 를 하나 잡자. 이때, 만약 최댓값이 1이라면, 이는 $d(v_0, v_2) = 0$, 즉 $v_0 = v_2$ 임을 의미한다. 이 경우, u_0 와 u_2 는 일치해야 한다. 만약 그렇지 않을 경우, $v_0 = v_2, u_1, v_1, u_0, u_2$ 는 $K_{2,3}$ 부분그래프의 꼭짓점이 되기 때문에 Γ 가 중점그래프라는 사실에 모순이기 때문이다. 이제 C_3, \dots, C_n 에 대해 귀납가정을 적용하면 $\overrightarrow{v_0 u_0} = \overrightarrow{v_2 u_2}$ 와 $\overrightarrow{v_n u_n}$ 이 어떤 4-사이클의 평행한 두 변이라는 결론을 이끌어낼 수 있다.

만약 최댓값이 2 이상이라면, 잡은 i 는 1보다 크고 n 보다 작을 것이다. 그러면 $d(v_0, v_{i-1})$ 및 $d(v_0, v_{i+1})$ 는 $d(v_0, v_i)$ 와 1만큼 차이나는데, $d(v_0, v_i)$ 의 최대성으로부터 $d(v_0, v_{i-1}) = d(v_0, v_{i+1}) = d(v_0, v_i) - 1$ 임을 관찰할 수 있다. 이때 만약 $v_{i-1} = v_{i+1}$ 라면, C_i, C_{i+1} 에 귀납가정을 적용해 $\overrightarrow{v_{i-1} u_{i-1}} = \overrightarrow{v_{i+1} u_{i+1}}$ 를 이끌어낸 뒤 $C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i+2}, \dots, C_n$ 에 귀납가정을 적용해 $\overrightarrow{v_0 u_0} = \overrightarrow{v_n u_n}$ 임을 결론낼 수 있다.

이제 v_{i-1} 와 v_{i+1} 가 다른 점인 경우를 다루자. 사각형 보조정리를 이용하면 $\square v_{i-1} v_i v_{i+1} v'$ 가 4-사이클이면서 $d(v_0, v') = d(v_0, v_i) - 2$ 이게끔 하는 꼭짓점 v' 가 존재한다. 이제 보조정리 8.3을 사용하면, $C_i := \square v_{i-1} v' u' u_{i-1}$, $C_{i+1} := \square v_{i+1} v' u' u_{i+1}$ 가 둘 다 4-사이클이게끔 하는 점 u' 가 존재한다. 이제 순차적으로 인접한 4-사이클들 $C_1, \dots, C_{i-1}, C'_i, C'_{i+1}, \dots, C_n$ 에 대해서는 귀납가정을 적용할 수 있다. 왜냐면 $d(v_0, v') < d(v_0, v_{i+1})$ 이기 때문이다. 이로써 증명이 끝난다. \square

이로부터 다음을 쉽게 관찰할 수 있다.

따름정리 8.1. 중점그래프 Γ 의 초평면 \mathfrak{h} 를 하나 생각하자.

- (1) 임의의 $v \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 대해, v 에 인접한 모서리를 $e_{\mathfrak{h}}(v) \in \mathfrak{h}$ 는 유일하게 존재한다. 이때, $e_{\mathfrak{h}}(v)$ 의 다른 한 꼭짓점을 $\iota_{\mathfrak{h}}(v)$ 라고 적겠다.
- (2) 그래프 Γ 안의 어떤 4-사이클의 모서리를 순서대로 e_1, e_2, e_3, e_4 라고 했을 때, 만약 $e_1 \in \mathfrak{h}$ 라면 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \cap \mathfrak{h} = \{e_1, e_3\}$ 가 정확히 성립한다.
- (3) 만약 두 꼭짓점 $v, w \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 가 $N(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ 에서 서로 이웃한다면, $\iota_{\mathfrak{h}}(v)$ 및 $\iota_{\mathfrak{h}}(w)$ 또한 그러하다.
- (4) 그래프 Γ 안의 어떤 4-사이클의 네 꼭짓점 중 어느 세 개가 $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 들어 있다면, 나머지 하나 또한 $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 들어 있다.

Proof. (1) 꼭짓점 $v \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 인접한 \mathfrak{h} 의 원소 $e = \overline{uv}$, $e' = \overline{u'v}$ 를 생각하자. 초평면 \mathfrak{h} 의 정의상, 연달아 인접한 4-사이클

$$C_1 = \square uu_1v_1v, C_2 = \square u_1u_2v_2v_1, \dots, C_{n-1} = \square u_{n-2}u_{n-1}v_{n-1}v_{n-2}, C_n = \square u_{n-1}u'vv_{n-1}$$

이 존재한다. 이때 보조정리 8.4로부터, $\square u_{n-1}uvv_{n-1}$ 또한 4-사이클임을 알 수 있다. 만약 이 때 v' 와 v 가 일치하지 않는다면, $u, u', v_{n-1}, v, u_{n-1}$ 가 $K_{2,3}$ 부분그래프를 형성하므로 모순이다. 따라서 $u' = u$ 라고 결론지을 수 있다.

(2) (1)로부터 곧바로 따라 나온다.

(3) (2)로부터 곧바로 따라 나온다.

(4) 어떤 4-사이클 $\square xyzw$ 에 대해 $x, y, z \in \mathfrak{h}$ 라고 하자. 만약 $\iota_{\mathfrak{h}}(x), \iota_{\mathfrak{h}}(y), \iota_{\mathfrak{h}}(z)$ 중 그 어느 것이라도 $\{x, y, z, w\}$ 에 속한다면, 이는 곧 $\square xyzw$ 의 네 변 중 평행한 어느 두 변이 \mathfrak{h} 에 속한다는 뜻이다. 그 경우 w 는 자동으로 $\mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 들어간다. 만약 그렇지 않다면, (3)에 의해 $\square xy\iota_{\mathfrak{h}}(y)\iota_{\mathfrak{h}}(x)$ 및 $\square yz\iota_{\mathfrak{h}}(z)\iota_{\mathfrak{h}}(y)$ 모두 4-사이클이 된다. 이제 보조정리 8.3을 적용하면, $\square xwvv\iota_{\mathfrak{h}}(x)$ 및 $\square zwvv\iota_{\mathfrak{h}}(z)$ 가 4-사이클을 이루게끔 꼭짓점 v 를 잡을 수 있다. 이는 곧 $w \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 및 $v = \iota_{\mathfrak{h}}(w)$ 를 의미하는 것이다. \square

이제 초평면에 관해 앞에서 주장한 사실들을 증명하겠다. 그전에 개념 하나를 도입하자. 초평면 \mathfrak{h} 가 주어졌을 때, \mathfrak{h} 의 꼭짓점 집합이 생성해 내는 Γ 의 부분그래프 $N(\mathfrak{h})$ 를 \mathfrak{h} 의 운반함(carrier) 혹은 근방(neighborhood)라고 한다. 다시 말해, $N(\mathfrak{h})$ 의 꼭짓점 집합은 \mathfrak{h} 의 것과 일치하고, $N(\mathfrak{h})$ 의 모서리 집합은 $\{xy \in \mathcal{E}(\Gamma) : x, y \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})\}$ 이다.

보조정리 8.5. 중점그래프 Γ 의 초평면 \mathfrak{h} 를 하나 생각하자. 그러면 다음이 성립한다.

- (1) 초평면 \mathfrak{h} 의 근방은 볼록하다(convex). 다시 말해, 근방 안의 두 꼭짓점을 잇는 Γ -측지선은 반드시 근방 안에 갇혀 있다.
- (2) 초평면 \mathfrak{h} 는 전체 공간을 정확히 둘로 나누고, 따라서 \mathfrak{h} 에 면한 반공간은 정확히 두 개다.
- (3) 초평면 \mathfrak{h} 에 들어 있는 임의의 모서리 $\overline{xy}, \overline{vw} \in \mathfrak{h}$ 에 대해, $d(x, v) = d(y, w)$ 이다.

Proof. (1) 먼저, $x, y \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 대해, $N(\mathfrak{h})$ 안의 경로들을 이용해 $d_{\mathfrak{h}}(x, y)$ 를 정의하겠다. 즉, $d_{\mathfrak{h}}(x, y) \leq n$ 라는 것은 x 와 y 를 잇는 길이 n 이하인 $N(\mathfrak{h})$ 안의 경로가 존재한다는 것이다.

이제 임의의 $x, y \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 에 대해 $I(x, y) \subseteq N(\mathfrak{h})$ 임을 $d_{\mathfrak{h}}(x, y)$ 에 대한 귀납법으로 증명하겠다. 먼저 $d_{\mathfrak{h}}(x, y) = 0$, 즉 x 와 y 가 일치할 때는 더 물을 것이 없다. 다음으로 $d_{\mathfrak{h}}(x, y) = 1$, 즉 x 와 y 가 인접한 경우도 더 물을 것이 없다.

이제 $d_{\mathfrak{h}}(x, y) \leq n - 1$ 일 때 명제가 성립한다고 가정한 뒤, $d_{\mathfrak{h}}(x, y) = n$ 인 경우를 생각해 보자. 그리고 길이 $d(x, y)$ 짜리 Γ -측지선 ($x = p_0, p_1, \dots, p_{d(x,y)} = y$)를 임의로 잡자. 우리의 목표는 이 측지선이 $N(\mathfrak{h})$ 에 포함됨을 보이는 것이다.

여기서, x 와 y 사이를 잇는 길이 n 짜리 $N(\mathfrak{h})$ -측지선 ($x = q_0, q_1, \dots, q_n = y$)를 하나 생각할 수 있다. 그러면 (q_1, \dots, q_n) 는 길이 $n - 1$ 짜리 $N(\mathfrak{h})$ -측지선이면서 Γ -측지선이기도 하다. 이는 q_1 과 y 사이에는 귀납 가정을 적용할 수 있기 때문이다.

한편, $d(q_1, y)$ 는 $d(x, y)$ 와 정확히 1만큼 차이나야 한다. 먼저 $d(x, y) = n - 2$ 가 불가능함을 설명하고자 한다. 귀류법을 위해 $d(x, y) = n - 2$ 라고 가정해 보자. 이는 $(q_1, q_0 = p_0, p_1, \dots, p_{n-2})$ 및 (q_1, q_2, \dots, q_n) 가 q_1 와 y 를 잇는 Γ -측지선임을 뜻한다. 사각형 보조정리를 적용하면, x 및 q_2 에 동시에 인접하는 꼭짓점 u 중 $d(u, y) = n - 3$ 인 것이 존재한다는 뜻이다. 여기서 x 와 q_2 는 y 로부터의 $d_{\mathfrak{h}}$ -거리가 다르기 때문에 다른 꼭짓점이며, q_1 과 u 또한 y 로부터의 d -거리가

다르기 때문에 다른 꼭짓점이다. 즉 $\square xq_1q_2u$ 는 4-사이클이며, 그 꼭짓점 중 최소 세 개는 \mathfrak{h} 의 꼭짓점이다. 따름정리 8.1(4)에 의해, u 또한 \mathfrak{h} 의 꼭짓점이 된다. 따라서

$$d_{\mathfrak{h}}(x, y) \leq 1 + d_{\mathfrak{h}}(u, y) = n - 2$$

를 얻게 되는데, 이는 가정에 모순이다. 따라서, $d(x, y) = n - 2$ 는 불가능하다.

따라서 $d(x, y) = n$ 임을 알 수 있고, (p_0, \dots, p_n) 및 (q_0, \dots, q_n) 은 x 와 y 사이를 잇는 두 Γ -측지선이다. 이제 사각형 보조정리를 적용하면, p_1 및 q_1 에 이웃한 꼭짓점 u 중 $d(u, y) = n - 2$ 인 것을 잡을 수 있다. 만약 이때 $p_1 = q_1$ 라면, $d_{\mathfrak{h}}(q_1, y) = n - 1$ 이므로 귀납 가정에 의해 $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 임을 결론지을 수 있다. 따라서 $p_1 \neq q_1$ 인 경우만 남았다. 이 경우 $\square p_1 x q_1 u$ 는 4-사이클이 된다.

이때, $d(q_1, u) + d(u, y) = 1 + n - 2 = n - 1 = d(q_1, y)$ 이므로, u 는 q_1 과 y 사이를 잇는 어느 Γ -측지선 위에 있다. 이 측지선에는 귀납 가정을 적용할 수 있음을 상기하라. 이에 $u \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 임을 결론지을 수 있다. 즉 $\square p_1 x q_1 u$ 의 꼭짓점 중 x, q_1, u 가 \mathfrak{h} 의 꼭짓점인 것이다. 그러면 따름정리 8.1(4)에 의해, $p_1 \in \mathcal{V}(\mathfrak{h})$ 또한 성립한다. 이 말인즉

$$d_{\mathfrak{h}}(p_1, y) \leq 1 + d_{\mathfrak{h}}(u, y) = n - 1$$

라는 것이고, 귀납 가정에 의해 p_1, \dots, p_n 모두 \mathfrak{h} 에 포함되어 있다. 이로써 증명이 끝난다.

(2) 초평면 \mathfrak{h} 에 들어 있는 모서리 $e = \overline{xy}$ 를 하나 편의대로 고르자. 이제 각 점 $v \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해

$$f(v) := d(v, x) - d(v, y)$$

라고 정의된 함수를 고려할 것이다. 훌쩍성 및 삼각부등식에 의해, $f(v) \in \{+1, -1\}$ 임은 쉽게 확인할 수 있다. 또, $\{v : f(v) = -1\}$ 안의 임의의 꼭짓점으로부터 x 까지 측지선을 그었을 때, 그 측지선은 $\{v : f(v) = -1\}$ 안에 있어야 한다. 실제로, 그런 측지선 $(p_0, p_1, \dots, p_n = x)$ 이 주어졌을 때,

$$d(p_i, x) = n - i, \quad d(p_1, y) \geq d(x, y) - d(x, p_i) \geq (n + 1) - i$$

이기 때문이다.

이제 주장하고 싶은 것은, $v, w \in \mathcal{V}(\Gamma)$ 에 대해 $\overline{vw} \in \mathfrak{h}$ 일 필요충분조건이 $f(v) \neq f(w)$ 라는 것이다. 편의상 $f(v) = -1$ 인 경우에 집중하겠다. 이를 위해 $d(v, x)$ 에 대한 귀납법을 쓸 것이다.

먼저, $d(v, x) = 0$, 즉 $v = x$ 인 경우를 살펴보자. 이때 $f(v) = -1 \neq 1 = f(w)$ 라는 조건은 곧 $x = v$ 및 $y = w$ 임을 의미한다. 이 경우 $\overline{vw} = \overline{xy} \in \mathfrak{h}$ 임은 분명하다. 역으로, 만약 \overline{vw} 가 \mathfrak{h} 에 들어 있으면 따름정리 8.1(1)에 의해 $w = y$ 임을 알 수 있다. 이때 $f(v) = -1$ 및 $f(w) = 1$ 임은 분명하다.

다음으로, $d(v, x) \leq n - 1$ 에 대해 주장을 가정한 뒤, $d(v, x) = n$ 인 경우를 들여다 보겠다. 먼저 $f(v) = -1$ 및 $f(w) = 1$ 을 가정해 보자. 이때 $d(v, y) = d(v, x) - f(v) = n + 1$ 이 성립하고, 이 값은 $d(w, y)$ 와 정확히 1만큼 차이난다. 만약 $d(w, y) = n + 2$ 라면, $f(w) = d(w, x) - d(w, y) \leq d(w, v) + d(v, x) - d(w, y) \leq 1 + n - (n + 1) = 0$ 이 되어, $f(w) = 1$ 에 위배된다. 따라서 $d(w, y) = n$ 임을 알 수 있다. 다시 말해 $d(v, y) = d(v, x) + d(x, y) = d(v, w) + d(w, y)$ 이며, w 도 x 도 $I(v, y)$ 에 포함된다는 것을 알 수 있다.

이를 활용하기 위해, $(v, w, p_2, \dots, p_n, y)$ 및 $(v, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, x, y)$ 라는 두 Γ -측지선을 고려하자. 이제 사각형 보조정리를 사용하면, $d(u, w) = d(u, q_1) = 1$, $d(y, u) = n - 1$ 인 꼭짓점 u 가 존재한다. 물론 이때 u 와 v 는 다른 점이다. 더하여, $d(x, q_1) = n - 1$ 인 반면 $d(x, w) =$

$d(w, y) + f(w) = n + 1$ 이라는 사실로부터 $q_1 \neq w$ 임도 알 수 있다. 즉 $\square vq_1uw$ 는 실제로 4-사이클이다.

이때, $d(q_1, x) = n - 1$ 이고 $n = d(v, y) - 1 \leq d(q_1, y) \leq d(q_1, x) + 1 = n$ 임을 관찰할 수 있다. 더하여, $d(u, y) = n - 1$ 이고 $d(u, x) \geq d(y, x) - 1 = n$ 임을 알 수 있다. 종합하자면, $f(q_1) = -1$ 이고 $f(u) = 1$ 이다. 이제 귀납가정을 $\overline{q_1u}$ 에 적용하면 $\overline{q_1u} \in \mathfrak{h}$ 을 얻는다. 이 모서리와 4-사이클 안에서 평행한 변 \overline{vw} 또한 \mathfrak{h} 에 속하는 것은 물론이다.

역으로, \overline{vw} 가 \mathfrak{h} 에 속한다는 것을 가정해 보자. 이때 v 와 x 를 잇는 Γ -측지선 ($v = p_0, \dots, p_n = v$)를 하나 잡자. (1)에 의해 이 측지선 전체는 $N(\mathfrak{h})$ 에 들어 있으며, 또 측지선의 전체 꼭짓점에서 f 값이 항상 -1 로 일정하다. 이제 만약 $p_1 = w$ 라면, $\overline{p_1v}$ 는 \mathfrak{h} 의 원소이면서, $f(p_1) = -1$ 이고 $d(p_1, x) = n - 1$ 이다. 귀납가정에 의해 $f(v) = 1$ 이 되는데, 이는 모순이다. 따라서 p_1 과 w 는 다른 점이다. 이것이 v 와 x 를 임의의 점에 대해 성립하므로, w 는 v 에 비해 x 로부터 멀리 있는 점이고 $d(w, x) = d(v, x) + 1 = n + 1$ 이다.

한편, 다시 Γ -측지선 ($v = p_0, \dots, p_n = v$)를 하나 잡자. 이 측지선 위에서 f 값이 -1 이므로, 귀납가정에 의해 각각의 $\overline{p_ip_{i+1}}$ 는 \mathfrak{h} 에 속하지 않는 모서리이다. 이제 $q_i := \iota_{\mathfrak{h}}(p_i)$ 로 잡자. 그러면 따름정리 8.1(3)에 의해, (w, q_1, \dots, q_n) 은 Γ -경로가 된다. 더하여, $q_n := \iota_{\mathfrak{h}}(x) = y$ 가 성립한다. 이로부터 $d(w, y) \leq n$ 임을 안다. 이를 종합하면 $f(w) = 1$ 임을 알 수 있다. 이로써 $f(v) = -1 \neq f(w) = 1$ 과 $\overline{vw} \in \mathfrak{h}$ 가 동치임을 확인했다.

이로써, $\{v : f(v) = 1\}$ 와 $\{v : f(v) = -1\}$ 사이를 잇는 모서리는 반드시 \mathfrak{h} 안에 들어 있음을 확인했다. 따라서 두 집합은 $\Gamma \setminus \mathfrak{h}$ 에서 분리되어 있다. 더욱이, $\{v : f(v) = \pm 1\}$ 의 점들은 $\{v : f(v) = \pm 1\}$ 안에서 이어질 수 있음도 측지선을 이용해 앞에서 확인했다. 이때 사용되는 모서리들은 \mathfrak{h} 밖에 있는 것들이므로, $\{v : f(v) = \pm 1\}$ 가 $\Gamma \setminus \mathfrak{h}$ 에서 연결되어 있음을 결론지을 수 있다.

(3) 위 논증에서, $\overline{xy} \in \mathfrak{h}$ 를 하나 고정한 뒤 $\overline{vw} \in \mathfrak{h}$ 를 뽑으면

$$d(v, x) - d(v, y) = f(v) \neq f(w) = d(w, x) - d(w, y)$$

임을 확인했다. 먼저 $f(v) = -1$ 인 경우에 대해 다루겠다. 그말인즉 $f(w) = 1$ 임을 가정하겠다는 말과 같다. 여기서 $d(v, y)$ 와 $d(w, y)$ 는 정확히 1 차이나는데, 만약 $d(w, y) = d(v, y) + 1$ 이라면

$$d(w, x) - d(w, y) \leq d(v, x) + 1 - d(w, y) \leq d(v, x) - d(v, y) = f(v)$$

가 되어 모순이다. 따라서 $d(w, y) = d(v, y) - 1 = d(v, x)$ 이다. 또한 $d(w, x) = d(w, y) + f(w) = d(w, y) + 1 = d(v, x) + 1 = d(v, y)$ 도 성립한다. $f(v) = 1$ 인 경우도 비슷하게 증명할 수 있다.

□

REFERENCES

- [AB87] Michael Aizenman and David J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Comm. Math. Phys.*, 108(3):489–526, 1987.
- [Ago13] Ian Agol. The virtual Haken conjecture. *Doc. Math.*, 18:1045–1087, 2013. With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning.
- [AKN87] M. Aizenman, H. Kesten, and C. M. Newman. Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation. *Comm. Math. Phys.*, 111(4):505–531, 1987.

- [AV08] Tonči Antunović and Ivan Veselić. Sharpness of the phase transition and exponential decay of the subcritical cluster size for percolation and quasi-transitive graphs. *J. Stat. Phys.*, 130(5):983–1009, 2008.
- [BB99] Eric Babson and Itai Benjamini. Cut sets and normed cohomology with applications to percolation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(2):589–597, 1999.
- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:629–641, 1957.
- [BK89] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):501–505, 1989.
- [BLPS99] Itai Benjamini, Russell Lyons, Yuval Peres, and Oded Schramm. Critical percolation on any nonamenable group has no infinite clusters. *Ann. Probab.*, 27(3):1347–1356, 1999.
- [BS96] Itai Benjamini and Oded Schramm. Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers. *Electron. Comm. Probab.*, 1:no. 8, 71–82, 1996.
- [BS01] Itai Benjamini and Oded Schramm. Percolation in the hyperbolic plane. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2):487–507, 2001.
- [BW12] Nicolas Bergeron and Daniel T. Wise. A boundary criterion for cubulation. *Amer. J. Math.*, 134(3):843–859, 2012.
- [Che00] Victor Chepoi. Graphs of some CAT(0) complexes. *Adv. in Appl. Math.*, 24(2):125–179, 2000.
- [CS11] Pierre-Emmanuel Caprace and Michah Sageev. Rank rigidity for CAT(0) cube complexes. *Geom. Funct. Anal.*, 21(4):851–891, 2011.
- [CS25] Inhyeok Choi and Donggyun Seo. Percolation in acylindrically hyperbolic groups. *arXiv preprint arXiv:2508.08932*, 2025.
- [DC18] Hugo Duminil-Copin. Introduction to bernouli percolation. <https://www.ihes.fr/~duminil/publi/2017percolation.pdf>, 2018.
- [DCT16] Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 343(2):725–745, 2016.
- [FKG71] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22:89–103, 1971.
- [Gab05] D. Gaboriau. Invariant percolation and harmonic Dirichlet functions. *Geom. Funct. Anal.*, 15(5):1004–1051, 2005.
- [Gen24] Anthony Genevois. Algebraic properties of groups acting on median graphs. <https://sites.google.com/view/agenevois/books?authuser=0>, 2024.
- [Ger98] V. Gerasimov. Fixed-point-free actions on cubings [translation of *algebra, geometry, analysis and mathematical physics (russian) (novosibirsk, 1996)*, 91–109, 190, Izdat. Ross. Akad. Nauk Sibirsk. Otdel. Inst. Mat., Novosibirsk, 1997; MR1624115 (99c:20049)]. *Siberian Adv. Math.*, 8(3):36–58, 1998.
- [GKN92] A. Gandolfi, M. S. Keane, and C. M. Newman. Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses. *Probab. Theory Related Fields*, 92(4):511–527, 1992.
- [GN90] G. R. Grimmett and C. M. Newman. Percolation in $\infty + 1$ dimensions. In *Disorder in physical systems*, Oxford Sci. Publ., pages 167–190. Oxford Univ. Press, New York, 1990.
- [Gri89] Geoffrey Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Har60] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 56:13–20, 1960.
- [HP99] Olle Häggström and Yuval Peres. Monotonicity of uniqueness for percolation on Cayley graphs: all infinite clusters are born simultaneously. *Probab. Theory Related Fields*, 113(2):273–285, 1999.
- [Hut19] Tom Hutchcroft. Percolation on hyperbolic graphs. *Geom. Funct. Anal.*, 29(3):766–810, 2019.
- [Hut20] Tom Hutchcroft. Nonuniqueness and mean-field criticality for percolation on nonunimodular transitive graphs. *J. Amer. Math. Soc.*, 33(4):1101–1165, 2020.
- [Kes80] Harry Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Comm. Math. Phys.*, 74(1):41–59, 1980.

- [KM12] Jeremy Kahn and Vladimir Markovic. Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold. *Ann. of Math. (2)*, 175(3):1127–1190, 2012.
- [Lal98] Steven P. Lalley. Percolation on Fuchsian groups. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 34(2):151–177, 1998.
- [LP16] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on trees and networks*, volume 42 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, New York, 2016.
- [Lyo95] Russell Lyons. Random walks and the growth of groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(11):1361–1366, 1995.
- [Lyo00] Russell Lyons. Phase transitions on nonamenable graphs. volume 41, pages 1099–1126. 2000. Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.
- [Lyo13] Russell Lyons. Fixed price of groups and percolation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 33(1):183–185, 2013.
- [NS81] C. M. Newman and L. S. Schulman. Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.*, 26(3):613–628, 1981.
- [PSN00] Igor Pak and Tatiana Smirnova-Nagnibeda. On non-uniqueness of percolation on nonamenable Cayley graphs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(6):495–500, 2000.
- [Rol99] Martin Roller. Poc sets, median algebras and group actions. *Habilitationsschrift, arXiv preprint arXiv:1607.07747*, 1999.
- [Sag95] Michah Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 71(3):585–617, 1995.
- [Sch99] Roberto H. Schonmann. Stability of infinite clusters in supercritical percolation. *Probab. Theory Related Fields*, 113(2):287–300, 1999.
- [Van25] Hugo Vanneuville. Exponential decay of the volume for Bernoulli percolation: a proof via stochastic comparison. *Annales Henri Lebesgue*, 8:101–112, 2025.
- [vdBK85] J. van den Berg and H. Kesten. Inequalities with applications to percolation and reliability. *J. Appl. Probab.*, 22(3):556–569, 1985.
- [Woe00] Wolfgang Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*, volume 138 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

CORNELL UNIVERSITY, 583 MALOTT HALL, ITHACA, NY, USA

Email address: inhyeokchoi48@gmail.com