Cálculo Numérico | 7261/045-P | HOJA Nº 1

Ignacio Nieto | FECHA 23/08/2012

Prof: Santamaría (Tiene parcial y Final.) → memorizar algoritmos (tangente)

- Capítulo 1: Teoría del Error (relat, abs, converg, estabil.)
- Capítulo 2: Resolución de Ecuaciones
- Capítulo 3: Algebra Lineal (Sistemas Mal condicionados, autovalores y autovectores)
- Capítulo 4: Interpolación y Aproximación
- Capítulo 5: Integración
- Capítulo 6: Resol. de Ec. Dif. ordinaria

Bibliografía: Burden & Faires. "Análisis Numérico"
Mathews & Fink " " "con Matlab"

- Horario: 19-21 hs.

① Algoritmos: según el tipo de problema, pueden ser Directos ó Iterativos (aprox. sucesivas)

Datos → Algoritmo → Información

- Datos: tienen errores
- Algoritmo: propaga o incrementa los errores
- Información: tiene errores resultado, es más una aproximación

Algoritmo (característica) — Rapidez (de cálculo)
— Precisión → aumento de errores de forma lineal ó exponencial

② Números: $1/2 = 0,5$, $1/3 = 0,333\ldots$, $\pi = 3,14159\ldots$ (representación "decimal")

$1/3$ es periódico, π no lo es.

Reglas para cortar los decimales so que el error se compense.

Error Absoluto: (desconocido)

A, B, C valores exactos (desconocidos) y A', B', C' valores aproximados (conocidos)

$\Delta A = A' - A$, $\Delta B = B' - B$, $\Delta C = C' - C$ ⟶ errores absolutos (desconocidos)

Si $\Delta x > 0$ ⇒ aprox. por exceso.
$(<)$ (defecto)

Como los err. abs son desconocidos, se define una cota de error $\Delta^* x$ (A, B, C)

Ej:

2 cifras significativas

3cs

4cs

5

$\pi = 3,14159\ldots \xrightarrow{\text{def.}} \pi'$ 3.1 3.14 3.141 3.1415 (aprox x defecto)

$\xrightarrow{\text{ex.}} \pi''$ 3,2 3,15 3,142 3,1416 (aprox exceso)

- Redondeo: es de las 2 aprox., tomas lo que de un nro más parecido al absoluto. (se puede revisar con el próximo decimal). El q' da el $|\Delta|$ más chico.
- Cifras significativas: la cant. de decimales del delta Δx.

Ej:

$A' = 100,1$ $\quad \Delta A = 100,1 - 100 = 0,1$ $\quad 1/1000 = 0,01\%$
$A = 100$

relatividad

$B' = 1,1$ $\quad \Delta B = 1,1 - 1 = 0,1$ $\quad 1/10 = 10\%$
$B = 1$

Error Relativo: (desconocido)

$\alpha_A = \dfrac{\Delta A}{A} = \dfrac{0,1}{100} = 0,001 < \beta_B = \dfrac{\Delta B}{B} = \dfrac{0,1}{1} = 0,1$

<alf. griego>

Cota: $\alpha^* = \dfrac{\Delta^* A}{A'}$ con $\alpha^* = |\alpha|$

Errores ⟶ causan problemas.

- Problemas Directos: datos c/ err. ⟶ consecuencia de ello (propagación) "dato IN" ⟶ "result. OUT"
- Probl. Indirectos: como deben ser los algoritmos so bajos los % de error "IN" ⟵ "OUT"

Cálculo Numérico

HOJA N° 2

Ignacio Nieto FECHA 23/08/2012

(3) Propagación de Errores:

SUMA

$$\left.\begin{array}{l} A' = A + \Delta A \\ B' = B + \Delta B \end{array}\right\} \quad A' + B' = A + B + \underbrace{\Delta A + \Delta B}_{\Delta(A+B)}$$

$\Delta(A+B) \rightarrow$ hay que tratar que se compense.

PRODUCTO

$$A' \cdot B' = (A + \Delta A) \cdot (B + \Delta B) = A \cdot B + \underline{\Delta A \cdot B + \Delta A \cdot B + \Delta A \cdot \Delta B}$$

$$\underset{\text{(error relativo)}}{\varepsilon} = \frac{\Delta A \cdot B + \Delta B \cdot A + \Delta A \cdot \Delta B}{A \cdot B} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta A\, \Delta B}{AB} \rightarrow \text{despreciable}$$

$\varepsilon^* = \alpha^* + \beta^* \rightarrow$ se suman. (la suma de los errores relativos)

COCIENTE

$$\frac{A'}{B'} - \frac{A}{B} = \frac{A + \Delta A}{B + \Delta B} - \frac{A}{B} = \frac{B(A + \Delta A) - A(B + \Delta B)}{B(B + \Delta B)} = \frac{\cancel{BA} + \Delta A B - \cancel{AB} - \Delta B A}{B(B + \Delta B)}$$

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\Delta A B - \Delta B A}{\cancel{B}(B + \Delta B)}}{A/\cancel{B}} = \frac{B \Delta A}{A(B + \Delta B)} - \frac{B \Delta B}{B(B + \Delta B)} = \frac{B}{B + \Delta B}\left(\frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta B}{B}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta A}{A} - \dfrac{\Delta B}{B}}{1 + \dfrac{\Delta B}{B}} = \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta} \Rightarrow \varepsilon^* = \frac{\alpha^* \overset{\text{refuerzo de la cota.}}{+} \beta^*}{1 + \beta^*}$$

Los err. se propagan, y hay que tratar que no se propaguen (teniéndolos en cuenta)

En resumen:

Producto: $\alpha^* + \beta^*$; Cociente: $\alpha^* + \beta^*$ Raíz: $\dfrac{\alpha^*}{2}$

pero $(1+\beta^*)^{-1}$ agrandando la cota

(4-) $A' = 316{,}47 = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

Dec. base 10 $\{0, 1, 2 \ldots 9\}$

Bin. $b = 2$ $\{0, 1\} \Rightarrow A' = 110{,}1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 4 + 2 + 0 + \frac{1}{2} = 6{,}5_{10}$

Octal $b = 8$ $\{0, 1 \ldots 7\}$

Hexagesimal $b = 16$ $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, \ldots F\}$

NOTA

Pasajes 139_{10} ÷ 8 = 17 resto 3; 17 ÷ 8 = 2 resto 1

139 ÷ 16 = 8 resto 13

139 ÷ 2

$139_{10} \equiv 10001011_2$

$139_{10} \equiv 213_8$

$139_{10} \equiv 8\,13_{16}$

5) Punto Flotante

32 bits

signo | Exponente | Mantiza

signo: 1 negat, 0 posit

Exponente:
$0000000 = 0_{10}$
$1111111 \equiv 127_{10}$

⟨polarizado en 64⟩

$60 \rightarrow 60-64 = -4$
$120 \rightarrow 120-64 = 56$

$\underbrace{\text{polarizado en } 64}$

$-64, 0, 63$ usando de 0 a 127.

$\pm(16)^{(\text{exponente})} \cdot (\text{mantiza})$

$16^{63} \cong 10^{75}$

$16^{-64} \approx 10^{-77}$.

Underflow: cuando es $< 16^{-64}$
Overflow: $> 16^{36}$.

Operaciones de punto flotante

$$x \oplus y = fl\left[fl(x) \pm fl(y)\right]$$

$$x \otimes y = fl\left[fl(x) \cdot fl(y)\right]$$

$$x \oslash y = fl\left[fl(x) / fl(y)\right]$$

6) Errores y Ordenes de Convergencia

$p \approx p^*$, sea g un cálculo cualquiera.

despreciable el err. de Taylor

$$g(p) \approx g(p^*) + \overset{\text{deriv.}}{g'}(p^*)(p-p^*) + \cancel{\frac{\overset{\text{deriv. 2da}}{g''}(\xi)}{2}(p-p^*)^2}$$ (aprox. por Taylor)

con ξ $\quad p < \xi < p^*$

$$\left|g(p) - g(p^*)\right| \approx g'(p^*)\,|p-p^*|$$? ero algo así como un err equival o otro

Ejemplo: $g(p) = p^{3/2} \Rightarrow \dfrac{\left|g(p)-g(p^*)\right|}{|g(p)|} \approx \left|\dfrac{3}{2}\,p^{*\,1/2}\right| \cdot \dfrac{|p-p^*|}{|p^{3/2}|} \approx$

el divisor me da el err. relat.

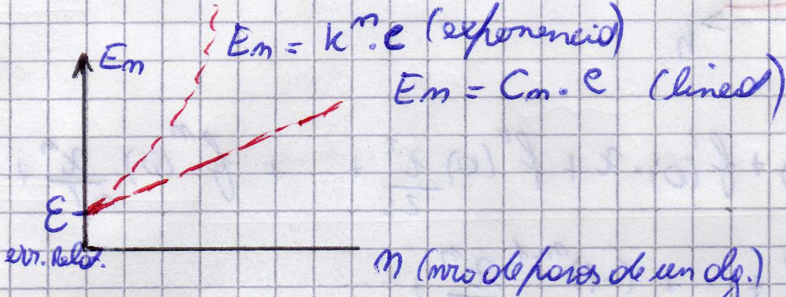
NOTA

Calculo Numérico

Ignacio Nieto FECHA 23/08/2012

$\approx \frac{3}{2} \frac{|\rho - \rho^*|}{|\rho|}$? ¿ρ?

Def:



Queremos que nuestros alg. sean estables (poco err. prop. y autogen)

7) Órdenes de convergencia

Nos dicen qué tan rápido los alg. iterativos convergen al resultado (órden).

Def: Si $\alpha_n\big|_1^\infty$ es una sucesión que converge a α, se dice que lo hace con orden b_n, si b_n es otra sucesión tal q' la $\frac{|\alpha - \alpha_n|}{b_n} \leq K$ (cierto K cte.) para n suficientemente grande.

α converge con órden B_n $\boxed{\varphi(B_n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - \alpha_n|}{b_n} \leq K \quad = \quad \alpha_n = \alpha + \varphi(B_n) \longrightarrow$$

α_n converge a α como B_n converge a su límite

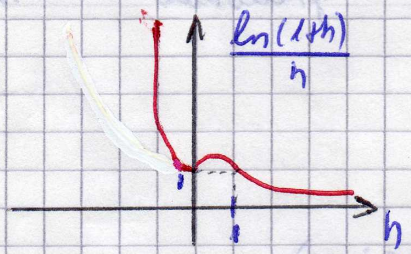
Ej: $\alpha_n = \frac{\text{sen}\, n}{n} \wedge B_n = 1/n \Longrightarrow \left| \frac{\frac{\text{sen}\, n}{\cancel{n}} - 0}{1/\cancel{n}} \right| = |\text{sen}\, n| \leq 1 = K.$

$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\, n}{n} = 0 \right)$

Def: Si $\lim_{h\to 0} F(h) = l$ la convergencia tiene $\varphi_{(g(h))}$ si existe $K>0$ con k indep. del h tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|F(h) - L|}{|g(h)|} \leq K \quad = \quad F(h) = L + \varphi(g(h))$$

Ej: $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ Aplicando L'Hopital cumple.



$$\ln(1+x) = f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{n}(0)\cdot\frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = 1 - h/2 + h^2/3 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{h^{n-1}}{n} + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{\ln(1+h)}{h}-1\right|}{|h|} = \lim_{h\to 0}\left|-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{h}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{h^{n-2}}{n}}_{h\to 0}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} = K.$$

entonces $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)}{h} = 1$ con $\varphi(h)$

Ej: 1º) En los calc. sig., todos los núm están bien redondeados.

En cada operación establecer el intervalo de err. del result.

i – $1,1062 + 0,947$

ii – $23,46 - 12,753$

iii – $2,747 \cdot 6,83$

iv – $\frac{8,473}{0,[illegible]64}$

2º) $y = \frac{x}{x-1}$ si $x \in [10,12]$, obt el interv. de error del result.

3º) Sea $y = \frac{2,5132\cdot x - 0,0476}{4,2715x - 6,3120}$ evaluar y para $x = 1,62$ y acotar su error suponiendo que el valor de x es exacto y que los coef. son nros. bien redondeados.

Calculo Numérico   Ignacio Nieto

4º) Calcular el producto $\pi \cdot e$ y el cociente $\frac{\pi}{e}$ redondeado correctamente a los 5 dígitos

30/08/2012

Resolución de Ecuaciones

$$f(x)=0 \qquad 3x^7+5x^6+4x^4+x^3-x^2+5=0$$

Se sabe que hay 7 raíces. Para el grado 5 en adelante no hay fórmula que encuentre las raíces de una ecuación polinómica.

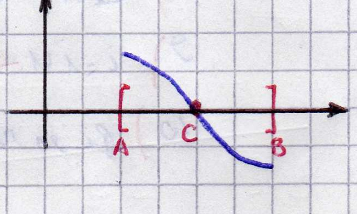
Se deberá proceder iterativamente para acercarse a la solución.

Se tendrá que evaluar la rapidez y la precisión.

Algoritmo de Bisección

Teorema del valor intermedio

Si la función toma valores en un rango $[A,B]$, de forma tal que $f(A)>0$ y $f(B)<0$, existe un c tal que $f(c)=0$



Sirve para intervalos con solo una raíz que es lo que queremos hallar $p' \approx p$ haciendo valer el teorema.

1º- tomo el punto medio del intervalo $P_1 = \frac{A_1+B_1}{2}$

2º- Si $f(P_1)$ igual signo que $f(B)$

$P_1 = b_2$, $a_2 = a_1$, $P_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$

3º Hago una sucesión $p_1, p_2, \dots, p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

defino una tolerancia para cortar en algún momento.

$|p_m - p_{m-1}| < \varepsilon$ o bien $\frac{|p_m - p_{m-1}|}{|p_m|} < \varepsilon$ (error relativo)

Algoritmo $f(x)$

Paso	Tarea
1)	$a_1 = a \quad b_1 = b$
2)	$i = 1$
3)	$p_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$
4)	p_i es suficiente aproximación? NO → 5, SI → 10
5)	$f(p_i) \cdot f(a_i) > 0 \rightarrow 6$; $f(p_i)\, f(a_i) < 0 \rightarrow 8$
6)	$a_{i+1} = p_i \quad b_{i+1} = b_i$
7)	$i = i+1 \rightarrow 3$
8)	$a_{i+1} = a_i \quad b_{i+1} = p_i$
9)	$i = i+1 \rightarrow 3$
10)	p_i es raíz de $f(x)$ ($p_i \approx p$) "aproximo"

Convergencia (vel. de aproximación)

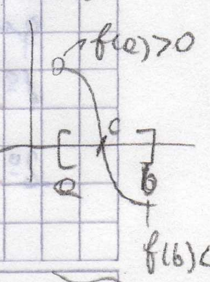
Teorema: Sea $f \in [a,b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$

entonces el pvr. de Bisección $\{p_n\}$ es tal que:

$p_n \rightarrow p$ según $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$

converge

teorema del valor medio



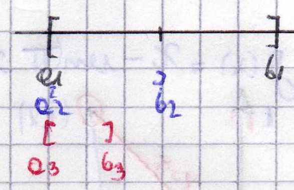
$\exists c / f(c) = 0$

Cálculo Numérico — Ignacio Nieto — HOJA Nº 5 — FECHA 30/08/2012

Demostración: $p_1 = \dfrac{b_1 + a_1}{2} \quad \dots \quad p_n = \dfrac{b_n + a_n}{2^n}$

$$\downarrow$$

$$p_n = \frac{a+b}{2^n}$$



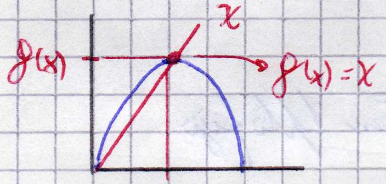
$$|p_n - p| \le \frac{1}{2}\,|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow p_n \to p + \mathcal{O}(2^{-n})$$

p_n converge a p como 2^{-n} o $\dfrac{1}{2^n}$

Algoritmo del Punto Fijo

Tengo $f(x) = 0 \Rightarrow$ cuales $f(x)$ hacen esto? $\xrightarrow{ej}$ $\operatorname{sen} x - x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = x$

$\downarrow$ $g(x)$ (obvio)

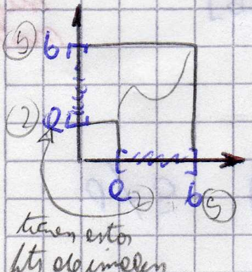


Transformo el probl $f(x) = 0$ en el probl $x = g(x)$

No busco raices sino puntos fijos $\Rightarrow g(x) =$ "*predictor*"

Lema. Si $g \in \mathbb{C}[a,b] \wedge g(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ ent g tiene un punto fijo (no es reciproco $p \Rightarrow q \wedge \neg(q \Rightarrow p)$)

1 ó +



D/ $g(a) = a$ o $g(b) = b$ ya está q' pto fijo es $g(x) = x$

pero si x ej: $g(a) > a$ y $g(b) < b$ construyo $h(x)$

$$h(x) = g(x) - x \quad \text{talque} \quad h(a) = g(a) - a > 0$$

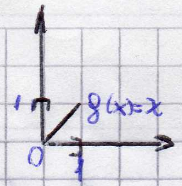
$$h(b) = g(b) - b < 0$$

situación del T de VM.

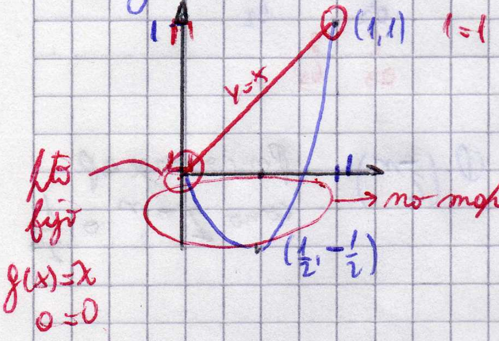
Entonces $\exists\, p \in [a,b] \,/\, h(p) = 0 \Rightarrow h(p) = g(p) - p = 0 \Rightarrow \boxed{g(p) = p}$

Ej:

1) $g(x)=x$ en $0 \leq x \leq 1$



2) $g(x) = x - \text{sen}(\pi x)$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

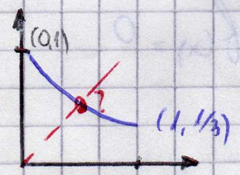


Tiene 2 ptos fijos pero no mapeo en el ~~codominio~~ intervalo

3) $g(x) = 3^{-x}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

$= \frac{1}{3^x}$ $\quad g'(x) = \underset{<0}{-}\underset{>0}{3^{-x}} \cdot \underset{>0}{\ln 3} \underset{\text{siempre}}{<0}$ $\Rightarrow$ deriv. neg en todos los ptos $\Rightarrow$ func. decreciente.

$g(1) = 1/3 \quad g(0) = 1$



Mapeo en el intervalo $\Rightarrow$ tiene 1 pto fijo.
(pero es difícil determinarlo)

Teorema: (Teo) Sea $g \in \underset{\text{continua}}{C}[a,b] / g(x) \in [a,b]\ \forall x$) cond. del Lema (ya probadas)

Sup. $\exists\, g'(x)$ en $(a,b) \wedge |g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [a,b]$) Cond. nueva. suficiente no necesario

Ent g tiene un único punto fijo $[a,b]$ $\forall x \in [a,b]$

Lema demo: $\exists\, p / g(p) = p \quad p \in [a,b]$

Pruebo x el abs q' existen 2: $\exists\, q / g(q) = q \quad q \in [a,b] \quad q \neq p$.

Ent: $|p-q| = |g(p) - g(q)|$ pero el Teo VM dice q' existe "Psi" ξ tal q' es.

$= \underset{\underset{(\text{teorema})}{<1}}{|g'(\xi)|} \cdot |p-q| < |p-q| \Rightarrow p = q$.

absurdo $\rightarrow$ solo se cumple si

toda func. contractiva tiene un único punto fijo.

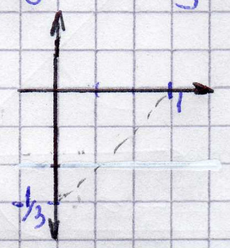
Calculo Numérico

HOJA N° 6 FECHA 30/08/2012

Ignacio Nieto

Ejemplo:

a) $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ en $[-1, 1] \Rightarrow$ en $x=0 \Rightarrow g(0) = -1/3$ y $g(\pm 1) = 0$



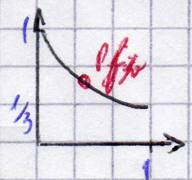
$g(\pm 1) = 0 \quad g(x) \leq [-1/3, 0] < [-1, 1]$ mapeo en entorno.

$|g'(x)| = \left|\frac{2}{3} x\right| \leq 2/3 < 1 \Rightarrow$ el pto fijo deberá ser único

$g(x) = \frac{x^2-1}{3} \Rightarrow$ Si $g(p) = p \rightarrow \frac{p^2-1}{3} = p \rightarrow p^2 - 1 = 3p \rightarrow p^2 - 3p - 1 = 0$ → $\boxed{-0,3}$ $\in [-1,1]$ / $3,3$ fuera de interv.

Ent. cumplió la cond. de único pto fijo y ese es $-0,3$.

b) $g(x) = 3^{-x}$



$g'(x) = -3^{-x} \ln 3$

$|g'(x)| = |-3^{-x} \ln 3| \leq k < 1$

Pero: $|g'(0)| = |-3^0 \cdot \ln 3| = |\ln 3| = 1,0986\ldots \rightarrow$ la cond. de único pto fijo es suficiente y no necesaria

Algoritmo Iterativo del punto fijo

- Elijo aprox. inicial p_0
- Genero sucesión $\{p_n = g(p_{n-1})\}$ (va a converger en el pto fijo)

$p_n \rightarrow p \;\hookrightarrow\; p = \lim_{n \to \infty} p_n = \lim_{n \to \infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n \to \infty} p_{n-1}\right) = g(p)$

Paso	Tarea (p_0)
1	$i=1$
2	$p_i = g(p_{i-1})$
3	continúo? ← Si 4 / No 5
4	$i = i+1 \rightarrow 2$
5	$p \simeq p_m$ Fin

cond. de ~~continuo~~ dejar de continuar

$\left\{ \begin{array}{l} |p_n - p_{n-1}| < \varepsilon \text{ (criterio elegido x tolerancia)} \\ \frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon \end{array} \right.$

Quién es $g(x)$? → Predictor $\{p_n = g(p_{n-1})\}$

Ej: $x^3+4x^2-10=0$ tiene una única raíz en $[1,2]$

Posibles predictores

i) $x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = g_1(x)$ predictor

ii) $x = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2} = g_2(x)$

iii) $x = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2} = g_3(x)$

iv) $x = \cancel{x} - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x} = g_2(x)$

Hacemos tabla: $\varepsilon < 10^{-4}$

p_i	$g_1(p_i)$	$g_2(p_i)$	$g_3(p_i)$	$g_4(p_i)$
1,5				
-0,875				
6,828125				

Elijo los p_i tal que $g(p_{m-1}) = p_m$.

Ej: Hallar todas las raíces

a) $x \cdot e^x - 1 = 0$

b) $x + \frac{1}{x} = \log x^5$

c) $x - \frac{1}{x} = e^{-x}$

d) $\frac{x}{x-1} = \ln x$

e) $x^x + 2x - 6 = 0$

i) $x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = g_1(x)$ con $P(0) = 1,5$

1) $i=1$

2) $P_1 = g(P_0) = g(1,5) = (1,5) - (1,5)^3 - 4(1,5)^2 + 10 = -0,875 = P_1$

3) cont? $|P_1 - P_0| < 0,0001 \wedge \frac{|P_1-P_0|}{|P_1|} < 0,0001$

$|-0,875 - 1,5| = 2,375 > 10^{-4} \Rightarrow$ continúo ①

4) $i=2 \Rightarrow$ 2) $P_2 = g(P_1) = g(-0,875) = (-0,875) - (-0,875)^3 - 4(-0,875)^2 + 10 = 6,8$

$P_2 = g(P_1) = 6,828125$

3) cont? $|P_2 - P_1| < 0,0001 \Rightarrow |6,828125 - (-0,875)| = 7,703125$ ②

por ① y ② no converge $\Rightarrow$ no me sirve el predictor.

Salteamos el 2 y el 3 que dijo el profe g' no sirven.

Ignacio Nieto

iv) $x = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x} = g_2(x)$

6/9/2012

Método de la Tangente (o Método de Newton)

$f^2 C[a,b] \rightarrow f^2 C$: "continua y diferenciable 2 veces en el intervalo $[a,b]$"

$\bar{x} \approx p \;/\; f(p)=0$

$\bar{x}$ → aprox de p.

p → raíz de f q' busco (no la tengo)

$f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^2}{2} f''(\xi_x)$ → desarrollo de Taylor de orden 2.

$\bar{x} < \xi < x$ → $\cong \emptyset$

En p raíz $f(p)=0$

$f(p) = 0 = f(\bar{x}) + (p-\bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{(p-\bar{x})^2}{2} f''(\xi)$ → $\cong 0$

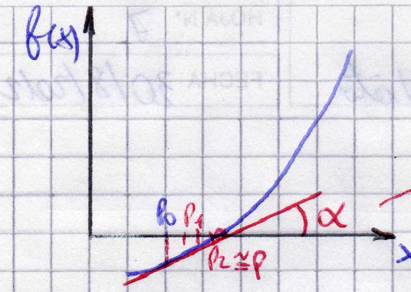
$0 \cong f(\bar{x}) + (p-\bar{x}) f'(\bar{x}) \Rightarrow \boxed{p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}}$

empiezo con x_0 a x_n produciendo aproximaciones.

$p_m = p_{m-1} - \frac{f(p_{m-1})}{f'(p_{m-1})}$

p_0 valor inicial

Paso	Tarea
1	$i=1$
2	$p_{i+1} = p_{i-1} - \frac{f(p_{i-1})}{f'(p_{i-1})}$
3	fin? NO 4, SI 5 → $\lvert p_i - p_{i-1} \rvert < \varepsilon$; $\frac{\lvert p_i - p_{i-1} \rvert}{\lvert p_i \rvert} < \varepsilon$ → val. dice tolerancia
4	$i++$
5	$\boxed{p_i \approx p}$ → raíz buscada; aprox.



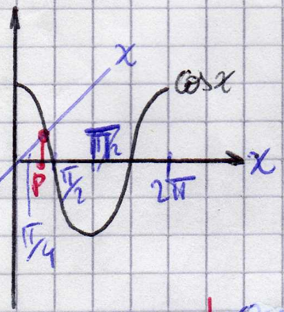
$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \Rightarrow f'(p_0) = (p_1 - p_0)^{-1} \cdot f(p_0)$

$f'(p_0) = tg\alpha = \frac{f(p_0)}{p_1 - p_0}$

Ej: $f_{(x)} = \cos x - x$ encontrar la raíz con $\varepsilon = 10^{-4}$

busco raíz $\Rightarrow f(x) = 0 = \cos x - x \Rightarrow \cos x = x$

IMPORTANTE: USAR MODO GRADIENTE NO DEG (MODO DE CALC)



$\cos p = p \Rightarrow f(p) = 0$

elijo $p = \frac{\pi}{4}$ aprox.

$\frac{\pi}{4} = 0{,}78539816$

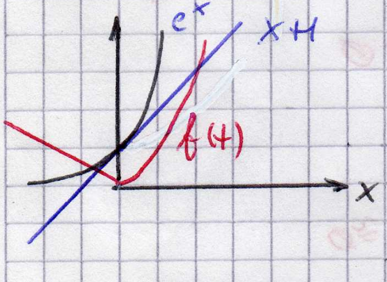
- $f(x) = \cos x - x$
- $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$
- $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$

	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
p_0	$\frac{\pi}{4} = 0{,}78539816$	0,73953613
p_1	0,50740684	0,73908518
p_2	.	0,73908513

$|0{,}73908518 - 0{,}73953613| < 0{,}0001$? NO

$0{,}00000005 < 0{,}0001$ SI

Ej: $f(x) = e^x - x - 1$



$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = x + 1$

$p_0 = 0 \Leftrightarrow e^0 = 0 + 1$

elijo 0,5 para aproximar el 0 como ejemplo.

x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0,5	

$f'(x) = e^x - 1 \quad f'(0) = 0 \Rightarrow x_i - \frac{f(x_i)}{0} \Rightarrow$ Cuando la $f'(x)$ se hace 0 no se puede usar Newton

Método de la Secante:

Hay que usar la variante de aprox x la Secante (evito el probl de la deriv 0)

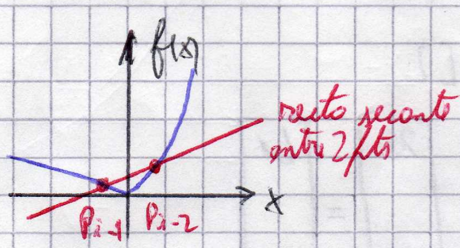
$$p_i = p_{i-1} - \frac{f(p_{i-1})(p_{i-1} - p_{i-2})}{f(p_{i-1}) - f(p_{i-2})}$$

tal que $f'(x) \approx \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$

no tiene derivadas

→ reemplazo la derivada por el cociente incremental

NOTA



me permite realizar el cálculo retrasando un poco la convergencia.

P_0^{i}	P_1^{i+1}	$P_2^{i+2} = P_1 - \dfrac{f(P_1)(P_1-P_0)}{f(P_1)-f(P_0)}$
-0,5	0,5	

$$P_{i+2} = P_{i+1} - \frac{f(P_{i+1})(P_{i+1}-P_i)}{f(P_{i+1}) - f(P_i)}$$

$$f(x) = e^x - x - 1$$

Ejercicios (tarea) encontrar todas las raíces.

$$\operatorname{arctg} x = x^{2/3} - 1$$

$$x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 4 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0$$

13/9/2012

Sistema lineal

busco llevarlo a:

$Ax = b$ $\quad [\ ][\ ] = [\ ] \Rightarrow \triangledown[\ ] = [\ ]$

$\tilde{A} = [A \vdots b]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1(n+1)} \\ a_{n1} & & & a_{nn} & a_{n(n+1)} \end{array}\right]$$

Si $a_{11} \neq 0 \Rightarrow E_j - (a_{j1}/a_{11})E_1 \xrightarrow{\text{asigno a pos } E_j} E_j \quad j = 2, \ldots, n$

E_j: fila j

$$\begin{array}{l} a_{21} \quad a_{22} \cdots a_{2n},\ a_{2(n+1)} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11} \quad a_{12} \cdots a_{1n},\ a_{1(n+1)}) \\ \hline 0 \ \cdots \end{array}$$

le voy restando cosas para diagonalizar la matriz

Si $a_{ii} \neq 0 \quad i = 2, \ldots, n-1 \longrightarrow$ ejecuto el mismo proc para todas las filas

$\left(E_j - (a_{ji}/a_{ii})E_i\right) \xrightarrow{\text{asigno a la pos } E_j} E_j \quad j = i+1, \ldots, n$

es $\neq$ al de la matriz original

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ 0 \quad + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ \qquad 0 \ \ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{array}$$

Si en algún momento a_{ii} fuera 0, lo intercambio fila por la que tengo el número más grande, para evitar la div/0

a_{11} $i=0$, a_{2} $i=1$, a_{3} $i=2$

Si una fila se anula $\Rightarrow \infty$ soluciones, rango $= n-1$

Si " " " " salvo el result $\Rightarrow$ hay incompatibilidad.

Algoritmo de Eliminación gaussiana

(con pivoteo x máx de columna)

Paso 1, 2

Tarea

$i = 1$

$i \leq p \leq n$

$|a_{p,i}| = \max_{i \leq j \leq n} |a_{j,i}|$ → la fila q' tengo el elem más x esa columna, intercambio al lugar p.

Si $|a_{p,i}| = 0 \rightarrow$ stop o sea, toda la col. está en 0 y la matriz tiene ∞ soluciones.

NOTA

Si $|a_{p,i}| > 0 \quad E_p \leftrightarrow E_i$

Calculo Numerico | HOJA Nº 9
Ignacio Nieto | FECHA 13/9/2012

Paso	Tarea
3	$m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$ $\forall j = i+\dots+n$ / $(E_j - m_{ij}E_i) \rightarrow E_j$
4	i++
5	Si $i<n$ goto 2; Si $i=n$ goto 6
6	Si $a_{nn} \neq 0$ goto 7; Si $a_{nn}=0$ stop — no hay solución única.
7	$a_{nn}\cdot x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$

1 sola pasa x todas las columnas de esa fila

$a_{nn} \cdot |x_n| = |b_n| \Rightarrow$ Al hallar x_n toda la columna de x_n se puede reducir y pasar del lado de b_n

$$x_j = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\cdot x_j\right]/a_{ii}$$

todo el resto de los X se calculan directo

Obs:

i. $A_{n\times n} \rightarrow$ No necesita tamaño extra x calculos

ii. Total Productos y Div $\frac{n^3+3n^2-n}{3}$

Total Sumas y Restas $\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$

Sistemas Mal Condicionados

$Ax=b$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1{,}0001 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3{,}0001\end{bmatrix}$$

tiene única solución $(1,1)^t$

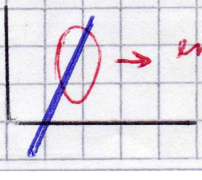
$\bar{x} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ $b - A\bar{x} = r$

$$\begin{bmatrix}3\\3{,}0001\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 2\\1{,}0001 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0{,}0002\end{bmatrix} \rightarrow \|r\|_\infty = 0{,}0002 \quad \|r\| = \sqrt{0^2+(0{,}0002)^2}$$

$$\|x-\bar{x}\| = \left\|\begin{matrix}1-0\\1-3\end{matrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|_\infty = 2$$

$x_1 + 2x_2 = 3$ $\leftarrow$ $\|x-\bar{x}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ muy lejano!

$1{,}0001x_1 + 2\cancel{x_2} = 3{,}0001$



→ en este zona el alg. se pierde porque las rectas son CASI PARALELAS → Sist mal condicionado.

Calculo "condicionante" de la matriz para saber el grado de correlación de las filas:

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$ → Lo que pasa es el calcular A^{-1} es muy jodido algorítmicamente.

cap. del pto flotante de la máquina

otra opción:

$$K(A) \approx \frac{\|\bar{y}\|}{\|\bar{x}\|} 10^{T} \qquad \bar{y} = A^{-1}(b - A\bar{x})$$

Ejercicios (hacerlos en Mathlab)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

②
$$\begin{matrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{matrix}$$

③ $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$

$E_j - m_{ij} E_i \to E_j$

$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{matrix} & 1 & -1 & 2 & -1 & 8 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)\cdot & 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ \hline & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 18 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 18 & \\ \times & \times & \times & \times & \times & E_3 \to \text{cale} \\ \times & \times & \times & \times & \times & E_4 \end{matrix}$$

4/10/2012

Sistemas Lineales

Iterativo (Jacobi)

$\{x_n\} \rightarrow x$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \cdots \\ x_m^{(n)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x^{k} = T\,x^{(k-1)} + C}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

despejo

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/10\, x_2 + 1/5\, x_3 + 3/5 \\ x_2 &= 1/11\, x_1 + 1/11\, x_3 - 3/11\, x_4 + 25/11 \\ x_3 &= -1/3\, x_1 + 1/10\, x_2 + 1/10\, x_4 - 11/10 \\ x_4 &= -3/8\, x_2 + 1/8\, x_3 + 15/18 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/10 & 1/5 & 0 \\ 1/11 & 0 & 1/11 & -3/11 \\ -1/3 & 1/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & -3/8 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 \\ 25/11 \\ -11/10 \\ 15/18 \end{bmatrix}$$

$$[X] = [T]\,[X] + [C]$$

superíndice (nro de iteración)

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{0} \\ x_2^{0} \\ x_3^{0} \\ x_4^{0} \end{bmatrix}$$

solución inicial

$X^{(1)} = T\,x^{(0)} + C$ → c/u es mult la matriz

$X^{(2)} = T\,x^{(1)} + C$

$X^{(3)} = T\,x^{(2)} + C$

$\vdots$

itero hasta $\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \| < \varepsilon$

$$\frac{\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \|}{\| x^{(n)} \|} < \varepsilon$$

Cómo armo la matriz:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{-a_{ij}\, x_j}{a_{ii}} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

en el paso "k" queda:

$$x_i^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{-a_{ij}\, x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

(Algoritmo iterativo (de Jacobi))

Paso	Tarea
1	$k=1$
2	$x_i^{(k)} = \dfrac{\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} -a_{ij}\, x_j^{(k-1)}\right) + b_i}{a_{ii}} \quad \forall i = 1, \dots, n$
3	¿ $x^{(k)}$ es suficiente aprox? < Si $\rightarrow$ 4; No $k = k+1 \rightarrow 2$
4	$x^{(k)}$ solución

Mejora: Gauss-Seidel

2 (nuevo)
$$X_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) - \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)}\right) + b_i}{a_{ii}}$$

Ejercicios Eliminación gaussiana + Jacobi + Gauss-Seidel

1 -
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

2 -
$$\begin{aligned} x_1 - 1/2\, x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - 0.5x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

1) Jacobi

$$\begin{aligned} X_1 &= x_2 - 3x_3 + 2 \\ X_2 &= -x_1 + 3 \\ X_3 &= -3x_1 + 3x_2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X = T \quad X + C$$

Defino $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (paso 0) $\Rightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 + 1.3 + 3 \\ -2 + 0 + 0 \\ -3.2 + 3.3 + 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = X^{(2)}$$

$$X^{(2)} = T \cdot X^{(1)} + C$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ -21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -22 \end{bmatrix} = X^{(3)}$$

$$X^{(3)} \quad T \cdot X^{(2)} + C$$

Calculo Numérico

Ignacio Nieto

HOJA Nº 11

FECHA 4/10/2012

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ -5 \\ -22 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} = X^{(4)}$$

$$X^{(4)} = T \cdot X^{(3)} + C$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 63 \\ 6 \\ -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 \\ -63 \\ -171 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 \\ -60 \\ -172 \end{vmatrix} = X^{(5)}$$

$$X^{(5)} = T \cdot X^{(4)} + C$$

Por Eliminación Gaussiana tiene solución (lo hizo otro tipo)

$$x_1 = \frac{19}{16} \qquad x_2 = \frac{29}{16} \qquad x_3 = \frac{7}{8}$$

~~Con el punto inicial $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ no converge. La convergencia depende de la solución inicial que pruebe.~~

Para que converja por Jacobi la matriz A debe tener "diagonal dominante"

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 \quad &= 3 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{1}{3} \\ x_2 &= -x_1 + 3 \\ x_3 &= -\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1/3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{vmatrix} \quad . \text{ Defino } X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -0,\hat{3} \\ 3 \\ 0,\hat{6} \end{matrix}$$

$$X^{(1)} = T \cdot X^{(0)} + C$$

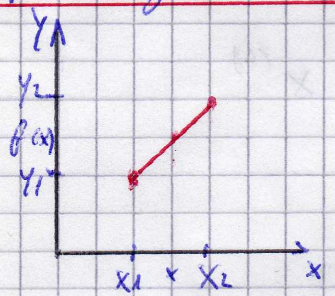
$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1/3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 25/9 \\ 1/3 \\ 10/9 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 22/9 \\ 10/3 \\ 16/9 \end{bmatrix} = X^{(2)} = \begin{bmatrix} 2,\hat{4} \\ 3,\hat{3} \\ 1,\hat{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1/3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 22/9 \\ 10/3 \\ 16/9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 74/27 \\ -22/9 \\ 8/27 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 65/27 \\ 5/9 \\ 26/27 \end{bmatrix} = X^{(3)} = \begin{bmatrix} 2,\widehat{407} \\ 0,\hat{5} \\ 0,\widehat{962} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1/3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 65/27 \\ 5/9 \\ 26/27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 19/81 \\ -65/27 \\ -50/81 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/81 \\ 16/27 \\ 4/81 \end{bmatrix} = X^{(4)} = \begin{bmatrix} -0,098765432 \\ 0,\widehat{592} \\ 0,049382716 \end{bmatrix}$$

11/10/2012 Hasta acá se aproximaban puntos y raíces, con funciones y matrices. Ahora se aproximan intervalos, imágenes, funciones, con los sig. métodos:

Interpolación y Aproximación

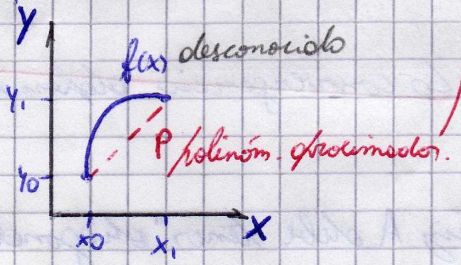


$P(x) \cong f(x)$ $P(x)$ polinomio que aproxima a $f(x)$ en el intervalo

El polin. interpolador debe pasar x los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

Para hacer interpolación (x_1, y_1), (x_2, y_2) deben ser conocidos!

- Taylor no podemos usar porque Taylor es desarrollo x un pto local x_0 y no para todo x.
- Hay que usar otros polinom:



Polinom interpolador de Lagrange

$P(x) = a_0 + a_1 x$

$$\left.\begin{aligned} y_0 = P(x_0) = a_0 + a_1 x_0 \\ y_1 = P(x_1) = a_0 + a_1 x_1 \end{aligned}\right\} \quad a_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

$$a_0 = y_1 - a_1 x_1$$

$$P(x) = \underbrace{y_1 - \left(\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\right) x_1}_{a_0} + \underbrace{\left(\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\right)}_{a_1} \cdot x = \frac{y_1 (x - x_0) - x_1 (y_0 - y_1) + (y_0 - y_1) x}{(x_0 - x_1)}$$

$$= \frac{y_1 (x_0 - x_1 + x_1 - x)}{x_0 - x_1} + \frac{y_0 (-x_1 + x)}{x_0 - x_1} \Rightarrow \underbrace{P(x) = \overbrace{\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}}^{L_0} \overbrace{y_0}^{f(x_0)} + \overbrace{\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}}^{L_1} \overbrace{y_1}^{f(x_1)}}_{\text{recta}}$$

$P(x_0) = y_0$ ✓ $P(x_1) = y_1$ ✓

esta "recta" esta armada con la forma de un polinom. de grado 1 (que tiene 1 sola solución) porq. rectas que pasan x 2 ptos hay 1 sola.

Teorema:

Si $x_0, x_1, \ldots x_n$ son $n+1$ puntos distintos y 'f' es una función con valores conocidos en esos puntos, existe un único polinomio P de grado a lo sumo 'n' tal que $f(x_k) = P(x_k)$ para todo $k = 0, \ldots, n$

$$P(x) = f(x_0) \cdot L_{n_0}(x) + f(x_1) \cdot L_{n_1}(x) + \cdots + f(x_n) \cdot L_{n_n}(x)$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{nk}(x) \quad \text{con } L_{nk}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Cálculo Numérico

HOJA Nº 12

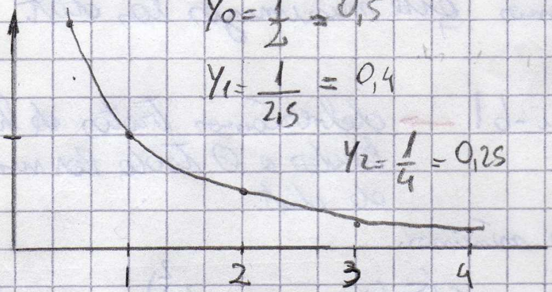
Ignacio Nieto — FECHA 11/10/2012

El anterior era el Polinomio interpolador de Lagrange

Ej:

$x_0 = 2$
$x_1 = 2,5$
$x_2 = 4$

Encontrar un P interpolante a una función $f(x) = \frac{1}{x}$ utilizando esos valores. Aproximar $f(3)$.



$y_0 = \frac{1}{2} = 0,5$

$y_1 = \frac{1}{2,5} = 0,4$

$y_2 = \frac{1}{4} = 0,25$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_{n,k}(x)$$

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x) = {} & f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + & k=0 \\ & f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + & k=1 \\ & f(x_2)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} & k=2 \end{aligned}}$$

eso aplica $i \neq k$

Polinomio de grado 2 (porq' tiene 3 nodos)

$$P_2(x) = 0,5\,\frac{(x-2,5)(x-4)}{(2-2,5)(2-4)} + 0,4\,\frac{(x-2)(x-4)}{(2,5-2)(2,5-4)} + 0,25\,\frac{(x-2)(x-2,5)}{(4-2)(4-2,5)} = ax^2+bx+c$$

(*)

$$P_2(3) = 0,5\cdot\frac{0,5\cdot(-1)}{(-0,5)(-2)} + 0,4\cdot\frac{1\cdot(-1)}{(0,5)(-1,5)} + 0,25\cdot\frac{1\cdot(0,5)}{2\cdot(1,5)} = -0,25 + 0,5\overline{3} + 0,041\overline{6} =$$

$= \boxed{0,325}$ ✓ está cerca de $f(3) = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$

(*) despejando: $P_2(x) = 0,05x^2 - 0,425x + 1,15$

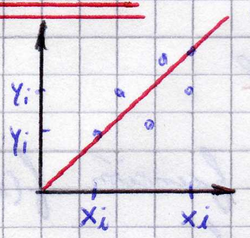
Ejercicio: Construir P interpolante para:

X	Y
-4	1245
-1	33
0	5
2	9
5	1335

18/10/2011

Aproximación Por Cuadrados Mínimos

$\hat{Y} = a x_i + b$



Elijo un polinomio $\hat{y}$ tal que pase x algunos puntos observados (x_i, y_i).

Luego entre cada punto (x_i, y_i) real y $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ aprox habrá una dist.

$d(y_i, \hat{y}_i) = |y_i - \hat{y}_i|$ → tendríamos que minimizar las dist.

$\min \sum |y_i - \hat{y}_i| = \min \sum |y_i - a x_i - b|$ → deberíamos tratar de hacer tender a 0 toda las sumatoria de dist.

Esto no se hace xq' es engorroso derivar mínimos.

⇒ Se halla esto: $\min \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min \underbrace{\left(\sum (y_i - a x_i - b)\right)^2}_{F(a,b) = \sum (y_i - a x_i - b)^2} = \min F(a,b)$.

(Aproximación x cuadrados mínimos)

$$\frac{\partial F_{(a,b)}}{\partial a} = \sum 2(y_i - a x_i - b)(-x_i) = 0 \rightarrow -2\left(\sum y_i x_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i\right) = 0$$

mínimos

$$\frac{\partial F_{(a,b)}}{\partial b} = \sum 2(y_i - a x_i - b)(-1) = 0 \qquad -2\left(\sum y_i - a \sum x_i - b \underbrace{\sum 1}_{N}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum y_i x_i = a \sum x_i^2 + b \sum x_i$$

$$\sum y_i = a \sum x_i + bN$$

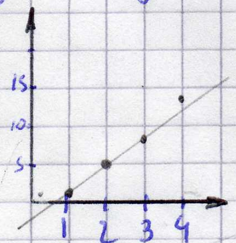
$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{N \cdot \sum y_i x_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{N \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum y_i x_i}{N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Para ajustar c/polinomio de grado 2: $F_{(a,b,c)} = \sum (y_i - a x_i^2 - b x_i - c)^2$.

Ej: Realizar un ajuste lineal a los datos de la sig. tabla:

X	Y
1	1
2	5
3	8
4	14
Σ=10	28



(1,1) - (3,8)
x y   x y

	X	Y	X^2	XY
	1	1	1	1
	2	5	4	10
	3	8	9	24
	4	14	16	56
Σ =	10	28	30	91

$y = mx + b$

$8 = m\,3 + b$

$1 = m\,1 + b$

Cálculo Numérico

Ignacio Nieto

HOJA N° 13

FECHA 18/10/2012

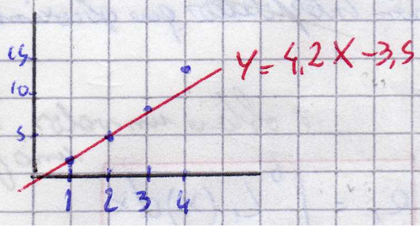
	X	Y	X^2	XY
	1	1	1	1
	2	5	4	10
	3	8	9	24
	4	14	16	56
Σ	10	28	30	91

$N = 4$

$$a = \frac{N(\Sigma x_i y_i) - \Sigma x_i \cdot \Sigma y_i}{N \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} = \frac{4 \cdot 91 - 10 \cdot 28}{4 \cdot 30 - 10^2} = 4,2$$

$$b = \frac{(\Sigma y_i)(\Sigma x_i^2) - \Sigma x_i \Sigma x_i y_i}{N \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} = \frac{28 \cdot 30 - 10 \cdot 91}{4 \cdot 30 - 10^2} = -3,5$$

$$Y = 4,2x - 3,5$$



Cuadraturas (Aproximar integrales)

→ las que no sabes con las reglas comunes!!!

aproximar la integral de esta forma:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot f(x_i)$$

→ un cierto coef a_i

$$E_{n+1}(f) = I(f) - I_{n+1}(f)$$ → creo que es el error ✓

Def: $E(P_k) = 0$, $E(P_{n+1}) \neq 0$

$k = 0, \dots, n$ → el error depende del grado del polinom

Polinom de Lagrange

lo uso como pol. interpolador

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x) \quad \text{con } P_n(x) \approx f(x)$$

→ P_n polinom ~~interpolador~~ Lagrange que aproxima a $f(x)$.

$$I_{n+1}(f) = \int_a^b \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x)}_{P_n} dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(f(x_i) \cdot \int_a^b L(x)\,dx \right)}_{a_i}$$

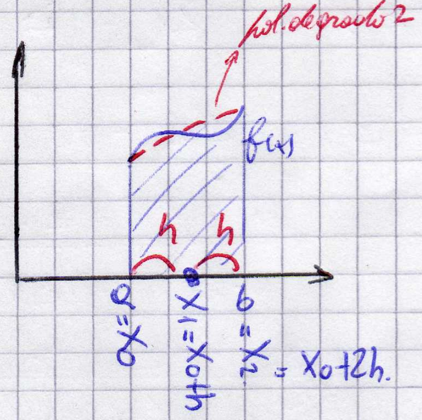
uso el pol. interp. pero integrarlo en lugar de integrar la función

se obtiene un valor, no una función

$$\boxed{a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx}$$

Newton-Cotes → "fórmulas de"

Ej:



→ PARÁBOLA

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$$

$$\approx \int_{x_0}^{x_2} \underset{\text{grado 2}}{P_2(x)}\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \left(\sum_{i=0}^{2} f(x_i) \cdot L_i(x) \right) dx$$

$$= \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \underbrace{\int_{x_0}^{x_2} L_i(x)\,dx}_{a_i}$$

$$= f(x_0) \int_{x_0}^{x_2} \overbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{\underbrace{(x_0-x_1)}_{-h}\underbrace{(x_0-x_2)}_{-2h}}}^{L_0} dx + f(x_1) \int_{x_0}^{x_2} \overbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{\underbrace{(x_1-x_0)}_{h}\underbrace{(x_1-x_2)}_{-h}}}^{L_1} dx +$$

$$+ f(x_2) \int_{x_0}^{x_2} \overbrace{\frac{(x-x_0)}{\underbrace{(x_2-x_0)}_{2h}} \frac{(x-x_1)}{\underbrace{(x_2-x_1)}_{h}}}^{L_2} dx$$

⇒ INTERPOLACIÓN (clase pasada)

$$= \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)\,dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2)\,dx + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)\,dx \quad (1)$$

→ Cambio de variable:

$$x = x_0 + t \cdot h \qquad \begin{bmatrix} x_0 = a \\ x_0 + 2h = b \end{bmatrix} \qquad t = \frac{x - x_0}{h}$$

$t \in [0, 2]$

$$\frac{dx}{dt} = h \to dx = h \cdot dt \quad (2)$$

a — h — b ; x_0, x_2

$x = x_0 + t \cdot h$; $t = 0 \to x = a$; $t = 2 \to x = b$

NOTA

Calculo Numérico | Ignacio Nieto | HOJA N° 14 | FECHA 25/10/2012

Hago el cambio: 1 con 2

$$= \frac{f(x_0)}{2h^2}\int_0^2 (\cancel{x_0}+th-\cancel{x_0}-h)(\cancel{x_0}+th-\cancel{x_0}-2h)\,h.dt$$

$$- \frac{f(x_1)}{h^2}\int_0^2 (\cancel{x_0}+th-\cancel{x_0})(\cancel{x_0}+th-\cancel{x_0}-2h).h\,dt$$

$$+ \frac{f(x_2)}{2h^2}\int_0^2 (\cancel{x_0}+th-\cancel{x_0})(\cancel{x_0}+th-\cancel{x_0}-h)\,h\,dt =$$

$$= \frac{f(x_0)}{2h}\int_0^2 h^2(t-1)(t-2)\,dt - \frac{f(x_1)}{h}\int_0^2 th.h.(t-2)\,dt$$

$$+ \frac{f(x_2)}{2h}\int_0^2 th.h\,(t-1)\,dt =$$

números

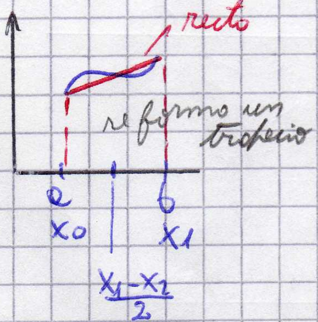
$$= \frac{h}{2}f(x_0)\int_0^2 (t-1)(t-2)\,dt - h\,f(x_1)\int_0^2 t.(t-2)\,dt + \frac{h}{2}f(x_2)\int_0^2 t(t-1)\,dt$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] \quad \text{SIMPSON} \quad = I_3$$

uso esta fórmula reemplazando y listo

¿lo anterior es solo desarrollo?

TRAPECIO x_0, x_1. $h = \frac{b-a}{1}$



integral

$$I_2(f) = \frac{\overbrace{(x_1-x_0)}^{h}}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]$$

es esta fórmula en lugar de

$$I_3(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right)$$

Ej: $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ esta la largo para hacer esto

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

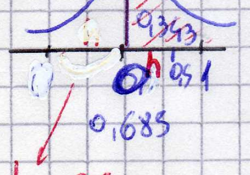
era la campana de Gauss

$\sigma = 1 \quad \mu = 0$ esperanza y desv. estandar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-1/2\,x^2} \Rightarrow \sqrt{2\pi}\cdot f(x) = e^{-1/2\,x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-1/2\,x^2}$$

¿se parece al que abandonó?

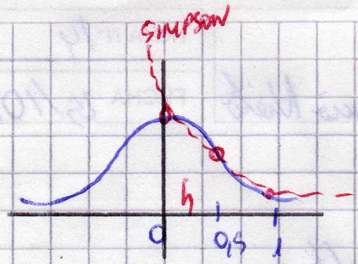


$h = 0{,}5$
$x_0 = 0$
$x_1 = 0{,}5$
$x_2 = 1$

$$\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4.f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989$$

NOTA



$$I_3(f) = \overset{h}{\frac{0,5}{3}} \left[\overset{f(x_0)}{0,3989} + \overset{4f(x_1)}{1,4083} + \overset{f(x_2)}{0,2419} \right]$$

$$= 0,3415.$$

Ej: Integrar usando Trapecio y Simpson

i) $f(x) = x \quad [0,1]$

ii) $f(x) = x^2 \quad [0,1]$

iii) $f(x) = x^3 \quad [0,1]$

iv) $f(x) = tg\, x \quad [-\pi/2, \pi/2]$

v) $f(x) = sen\, x \quad [0, \pi/2]$

1/11 – Consulta,
8/11 – Parcial
15/11 – Nota,
22/11 – Recuperat.