ВЫПУСК 121

Библиотечка КВАНТ+

Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер,
Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом

ЗАОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

121 Библиотечка КВАНТ+

БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ+
ВЫПУСК
121

Приложение к журналу
«Квант+» №3/2011

Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер,
Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом

ЗАОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
В19

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л.
В19 Заочные математические олимпиады. – М., Издательство МЦНМО, 2012. – 192 с. (Библиотечка «Квант$^{+}$». Вып. 121. Приложение к журналу «Квант$^{+}$» №3/2011.)

ISBN 978-5-94057-899-4

Основу книги составляют задачи, предлагавшиеся на Всесоюзных заочных математических олимпиадах и конкурсах Всесоюзной заочной математической школы для учащихся старших классов (ныне ВЗМШ). Задачи разбиты на тематические циклы, за которыми следуют их решения, обсуждения и дополнительные вопросы для самостоятельного обдумывания.

Цель книги – научить читателя творчески относиться к решению каждой интересной задачи, показать ему, с какими другими математическими вопросами связана эта задача и какие общие закономерности лежат в основе ее решения.

Книга предназначена для школьников старших классов, учителей математики и руководителей математических кружков, а также для всех любителей математических задач.

ББК 22.1я721

ISBN 978-5-94057-899-4

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга адресована тем, кто любит решать нестандартные математические задачи.

Специфика заочного обучения и заочных, «домашних» олимпиад состоит в том, что задачи предлагаются на длительное время. При такой неторопливой исследовательской работе естественно не только решить конкретную задачу, но также найти ее обобщения и связи с другими задачами.

Цель книги – помочь читателю в этой работе. За разрозненными фактами мы старались увидеть контуры важных математических понятий и конструкций, показать, что обобщение сравнительно несложных задач иногда выводит на передний край математики.

В первом параграфе книги собраны разнообразные по содержанию и простые по формулировке занимательные задачи.

В каждом из следующих пяти параграфов за условиями задач следует их обсуждение: сначала привидится элементарное решение, затем в большинстве случаев (после знака ∇) предлагается обобщение и иногда (после слов «для знатоков») идет более трудный текст, использующий терминологию современной математики. Каждый из этих параграфов заканчивается большим списком задач для самостоятельного решения; кроме вопросов, близких к уже разобранным, в их число включены также новые темы для исследования.

Обширный список литературы, приведенный в конце книги, указывает основные источники, которыми мы пользовались, и рассчитан на то, чтобы дать читателям возможность глубже разобраться в заинтересовавшей их проблеме.

За пять лет, прошедших после первого издания книги, мы получили много писем и отзывов от любителей математики. Некоторые задачи использовались на различных очных и заочных математических конкурсах, послужили основой докладов учащихся на математических конференциях; по книге давались задания ученикам заочной математической школы.

Этот опыт был учтен при переработке книги. Добавлено много задач, в частности, составлены циклы задач: решение уравнений в целых числах, делимость многочленов, геометрические построения, доказательство неравенств, последовательности; включены новые темы и в параграф «Необычные примеры и конструкции». Задачи для самостоятельного решения мы старались расположить и снабдить указаниями так, чтобы помочь читателю повторить основные приемы рассуждений.

Мы хотели бы выразить глубокую признательность академику И.М.Гельфанду, председателю Научного совета Всесоюзной заочной математической школы, за постоянное внимание к нашей работе и ценную критику. Среди математиков, книги и советы которых оказали влияние на нашу работу, в первую очередь должны быть названы В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, Н.Н.Воробьев, М.Л.Гервер, П.Б.Гусятников, Я.Г.Синай, Д.Б.Фукс, И.М.Яглом, Г.Н.Яковлев. Полезными предложениями, задачами и опытом занятий по книге поделились с нами М.И.Жгенти, А.В.Карзанов, Э.Б.Кикодзе, А.К.Ковальджи, Н.Н.Константинов, С.М.Львовский, П.И.Масарская, Н.Е.Сохор, А.А.Третьяков, А.Х.Шень, М.В.Якобсон и многие другие наши друзья и коллеги. Мы благодарны за помощь в подготовке рукописи Н.Ю.Вайсман, Л.Г.Серебренниковой, Л.В.Черновой и особенно С.Л.Табачникову, участие которого значительно превзошло обязанности редактора.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Со времени второго издания нашей книги прошло 25 лет. За это время она многократно использовалась для заданий учащимся математического отделения ВЗМШ и С-З МШ (соответственно Всесоюзной – затем Всероссийской – и Северо-Западной заочных школ), а также на различных соревнованиях и при обучении школьников в нашей стране и за рубежом.

В 1998 году скончался один из авторов книги, Николай Борисович Васильев, выдающийся математик, педагог и просветитель. Поэтому настоящее издание готовилось к печати без его, обычно весьма продуктивного, участия.

Впрочем, текст, в основном, остался без изменений. Исправлено решение одной задачи (№ 1-23), дополнены решения нескольких задач (№ 1-1, 5-12, 5-20, 5-21, 6-10, 6-13). Ну и, конечно, если во втором издании про что-то было написано «недавно», сейчас это пришлось заменить более точными ссылками за давностью сроков. Добавлен тематический указатель.

Мы хотели бы поблагодарить всех наших коллег и друзей, которые своими советами помогли нам в работе над этим изданием. Помимо математиков и педагогов, перечисленных в предисловии ко второму изданию, мы хотели бы назвать Р.Зигангирова, Ю.И.Ионина, А.Г.Кушниренко, Л.Левина, Ю.П.Соловьева, И.Ф.Шарыгина, Е.Я. Гика. Мы благодарны директору МЦНМО И.В.Ященко за внимание к этой книге.

Просьба читателям присылать письма с конструктивной критикой и отзывами о книге в адрес Издательства МЦНМО.

Авторы

§ 1. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЕРВОГО ЗНАКОМСТВА

1-1. Можно ли в листе бумаги, вырванном из школьной тетради, прорезать такую дыру, в которую пролезет взрослый человек?

1-2. В уравнении

$$\left(x^2 + \ldots\right)(x+1) = \left(x^4 + 1\right)(x+2)$$

одно число стерто и заменено точками. Найдите стертое число, если известно, что один из корней этого уравнения равен единице.

1-3. Петя тратит $1/3$ часть своего времени на занятия в школе, $1/4$ – на игру в футбол, $1/5$ – на прослушивание пластинок, $1/6$ – на телевизор, $1/7$ – на решение задач по математике. Можно ли так жить?

1-4. Четыре числа попарно сложили и получили шесть сумм. Известны четыре наименьшие из этих сумм: 1, 5, 8 и 9. Найдите две остальные суммы и сами исходные числа.

1-5. Какое наибольшее число воскресений может быть в году?

1-6. Четыре девочки – Катя, Лена, Маша и Нина – участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен – больше всех, а Лена спела 5 песен – меньше всех. Сколько песен было спето?

1-7. Три купчихи – Олимпиада, Сосипатра и Поликсена – пили чай. Если бы Олимпиада выпила на 5 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько две другие вместе. Если бы Сосипатра выпила на 9 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько две другие вместе. Определите, сколько каждая выпила чашек и у кого какое отчество, если известно, что Уваровна пила чай вприкуску, количество чашек чая, выпитых Титовной, кратно трем, а Карповна выпила 11 чашек.

1-8. Дама сдавала в багаж: диван, чемодан, саквояж, картину, корзину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж вместе, и столько же, сколько картина и картонка вместе. Картина, корзина и картонка весили поровну, причем каждая из них – больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

1-9. Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и поехал дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалась треть пути до B. Мотоциклист, доехав до B, сразу поехал обратно. Кто приедет раньше: мотоциклист в A или велосипедист в B?

1-10. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе как на стороне во внешнюю сторону треугольника построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

1-11. За весну Обломов похудел на 25%, затем за лето прибавил в весе 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел ли он или поправился за год?

1-12. Ивана Александровича Хлестакова пригласили управлять департаментом и в течение трех дней прислали ему 35000 курьеров. Если бы в первый день было прислано вдвое больше курьеров, чем на самом деле, то общее число курьеров было бы пятой степенью того числа, на которое в третий день прислали курьеров больше, чем во второй. Сколько курьер присылали каждый день?

1-13. После представления «Ревизора» состоялся следующий диалог.

Бобчинский: Это вы, Петр Иванович, первый сказали «Э!». Вы сами так говорили.

Добчинский: Нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это вы семгу первый заказали. Вы и сказали
«Э!». А у меня зуб во рту со свистом.

Бобчинский: Что я семгу первый заказал, это верно. И верно, что у вас зуб со свистом. А все-таки это вы первый сказали «Э!».

Выясните, кто первым сказал «Э!», если известно, что из девяти произнесенных в этом диалоге фраз-утверждений четное число верных.

1-14. а) У стены круглой комнаты диаметром 3 м на полу сидит кузнечик. Каждый его прыжок имеет длину 2 м. Он начинает прыгать. В какие точки комнаты он может при этом попасть?

б) Тот же вопрос, если комната квадратная со стороной 2 м, а кузнечик вначале сидит в углу.

1-15. Новая шахматная фигура «жираф» ходит «буквой Г» на четыре клетки в одном направлении и на пять клеток – в другом. Какое наибольшее число жирафов можно расставить на шахматной доске так, чтобы ни один не мог напасть на другого, сколько бы он ни ходил?

1-16. Четверо ребят – Алеша, Боря, Ваня и Гриша – соревновались в беге. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, они ответили так:

Алеша: Я не был ни первым, ни последним.

Боря: Я не был последним.

Ваня: Я был первым.

Гриша: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов правильные, а один – неверный. Кто сказал неправду? Кто был первым?

1-17. Города A и B расположены на реке на расстоянии 10 км друг от друга. На что пароходу потребуется больше времени: проплыть от A до B и обратно или проплыть 20 км по озеру?

1-18. Андрей бегает на лыжах быстрее Вити, но медленнее Жени. Они одновременно побежали по круговой дорожке из одного места в одном направлении и остановились в момент, когда были все трое в одном месте. За это время Женя обогнал Витю 13 раз. Сколько всего было обгонов?

1-19. Стальную плитку размерами 73×19 см обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, имея в распоряжении только эту плитку и карандаш.

1-20. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие равное число знакомых в этой компании. (Если A знаком с B, то B знаком с A.)

1-21. Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Так, на втором месте стоит число 14, так как $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На третьем месте стоит число 17 и т. д. Какое число стоит на 1000-м месте?

1-22. В 9 «Г» классе учатся три брата: Алеша, Леня и Саша. Учитель заметил, что если кто-то из них получает подряд две четверки или две тройки, то дальше он учится кое-как и получает тройку; если он получает подряд две пятерки, то совсем перестает заниматься и получает двойку, а если он получает две разные оценки, то следующей будет большая из них, В начале полугодия Алеша получил оценки 4 и 5, Леня – 3 и 2, Саша – 2 и 4. Какие итоговые оценки они получат за это полугодие, если учитель выставил каждому по 30 оценок, а итоговая оценка – ближайшее целое число к среднему арифметическому полученных оценок?

1-23. Математик шел домой вверх по течению ручья со скоростью, в полтора раза большей, чем скорость течения, и держал в руках шляпу и палку. На ходу он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой. Вскоре, заметив ошибку, он бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое большей той, с какой шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно достал ее из воды, повернулся и как ни в чем ни бывало пошел домой с прежней скоростью. Через 40 секунд после того, как он догнал шляпу, он встретил палку, плывущую ему навстречу. Насколько раньше пришел бы он домой, если бы все время шел вперед?

1-24. Существует ли такое целое число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается: а) в 67 раз; б) в 58 раз?

1-25. Четверть участников шахматного турнира составляли гроссмейстеры, остальные были мастера. Каждые два участника сыграли друг с другом один раз. За выигрыш присуждалось очко, за ничью – пол-очка, за проигрыш – ноль. Мастера в сумме набрали в 1,2 раза больше очков, чем гроссмейстеры. Сколько было мастеров и сколько гроссмейстеров?

1-26. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Задача **1-1.** *Ответ*: можно. Примерный способ показан на рисунке 1. Количество изгибов полоски можно делать больше или меньше, в зависимости от солидности того, кто должен пролезать.

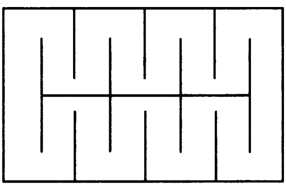


Рис. 1

∇ Решение задачи 1-1 – рисунок 1 – имеет непосредственное отношение к электронной технике.

Пусть (рис. 2,*а*) электрический ток i проходит в металл через сопротивление (резистор) величины R_1, а затем выходит из него. Как удвоить сопротивление? Естественная идея – удвоить его длину (рис. 2,*б*).

В электронных приборах требовалось многократно увеличивать сопротивления, что привело бы на этом пути к оборудованию гигантских размеров и веса. Поэтому миниатюризация – одна из основных целей электронной промышленности: ведь никто не будет, например, ходить с сотовым телефоном размером с чемодан!

Доктор Феликс Зандман (Dr. Felix Zandman, 1927–2011) предложил совершенно другую идею, благодаря которой, не увеличивая размеры резистора, можно многократно увеличивать сопротивление (рис. 2,*в* – сравните с рисунком к решению задачи 1-1!). Эта гениальная идея пришла ему в голову во время обеда, а рисунок на обеденной салфетке, материализующий идею, выставлен теперь в музее. Эта идея – одно из самых важных изобретений XX века в области электроники, так как привела к созданию миниатюрных резисторов. Она и ряд других идей позволили Ф.Зандману основать и успешно руководить всемирно известной фирмой Vishay Intertechnology (см. [123]).

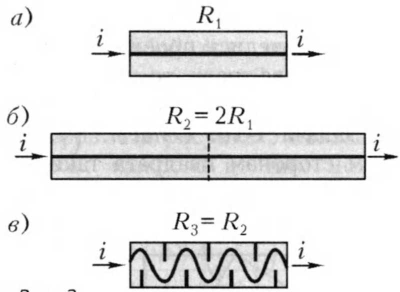


Рис. 2

Задача **1-2.** *Ответ*: 2. Чтобы найти стертое число, достаточно подставить в уравнение $x = 1$.

Задача **1-3.** Если Петя может делать несколько дел одновременно, то можно; если же нет – то нельзя: сумма данных чисел больше единицы.

Задача **1-4.** *Ответ*: две остальные суммы равны 12 и 16, а сами числа равны либо (-1), 2, 6 и 10, либо $(-3/2)$, $5/2$, $13/2$ и $19/2$.

Задача **1-5.** *Ответ*: 53. Среди любых семи последовательно идущих дней обязательно встречается одно воскресенье. Поскольку $365 = 52 \cdot 7 + 1$, $366 = 52 \cdot 7 + 2$, то в любом году получается 52 семерки дней (недель) и еще остаток – 1 или 2 дня. В каждой семерке ровно одно воскресенье, а в остатке – одно или ни одного. Всего получается не более 53 воскресений. Пример года, когда было 53 воскресенья – 1984-й. Столько же воскресений было в 1989, 1995, 2000 гг.

Задача **1-6.** *Ответ*: 9 песен. Если за каждую песню давать каждой ее исполнительнице по конфете, то общее число призовых конфет будет кратно трем.

Задача **1-7.** *Ответ*: Олимпиада Карповна выпила 11 чашек, Сосипатра Титовна – 9 чашек, Поликсена Уваровна – 7 чашек.

Задача **1-8.** Обозначим массы предметов первыми буквами их названий: Д – масса дивана, Ч – чемодана, С – саквояжа, К – картины (а также корзины и картонки – они весили поровну), М – маленькой собачонки. Если претензия дамы несправедлива, то:

$$Д = Ч + С = 2К,\ К > М,\ М + С > Д,\ М + Ч > Д.$$

Отсюда $М > Ч$, $М > С$, $2К = Ч + С < 2М < 2К$ – противоречие.

Задача **1-9.** *Ответ*: велосипедист приедет раньше. Поскольку велосипедист проехал треть пути раньше, чем мотоциклист проехал две трети, то скорость велосипедиста больше половины скорости мотоциклиста.

Задача **1-10.** *Ответ*: $\left(\sqrt{2}/2\right)(a+b)$. Пристроим извне ко всем сторонам квадрата такие же треугольники, как данный, таким образом, чтобы их катеты составляли продолжение друг друга – рисунок 3. Катеты этих треугольников образуют новый квадрат, центр которого совпадает с центром прежнего. Искомое расстояние равно половине диагонали нового квадрата, откуда следует ответ.

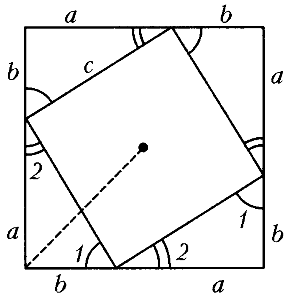


Рис. 3

Задача **1-11.** *Ответ*: похудел. Если в начале весны Обломов весил M кг, то к концу года он стал весить $0{,}75 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}2M = 0{,}972M$ кг.

Задача **1-12.** *Ответ*: 24049, 5471, 5480 курьеров в первый, второй и третий дни соответственно. Единственная пятая степень целого числа, заключенная в промежутке от 35 000 до 70 000, – это 9^5.

Задача **1-13.** *Ответ*: Бобчинский. Вычеркивая два равносильных утверждения, мы не меняем четности числа верных среди оставшихся, а вычеркивая два противоположных утверждения, мы меняем четность.

Задача **1-14.** а) *Ответ*: все точки кольца с внутренним диаметром 1 м и внешним 3 м (на рис.4,*а* это кольцо заштриховано). Ясно, что кузнечик не может приблизиться к центру комнаты ближе чем на полметра. Чтобы показать, что кузнечик может попасть в любую точку указанного кольца, надо сначала показать, что он может попасть в любую точку у стены.

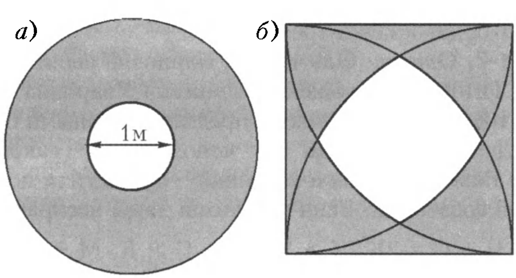


Рис. 4

б) *Ответ* см. на рисунке 4,*б*, где заштриховано искомое множество точек. Оно представляет собой всю комнату, за исключением пересечения четырех кругов радиуса 2 м с центрами в углах комнаты.

Задача **1-15.** *Ответ*: 16 жирафов. На рисунке 5 показано, как можно расставить 8 жирафов: каждого из них можно поставить в любую клетку, на которой стоит его номер. Остальных 8 жирафов можно расставить симметрично первым восьми.

2	3	4	5				
3	4	5	6				
4	5	6	7				
5	6	7	8				
				1	2	3	4
				2	3	4	5
				3	4	5	6
				4	5	6	7

Рис. 5

Задача **1-16.** *Ответ*: неправду сказал Ваня; первым был Боря. Если предположить, что неправду сказал Алеша, то получится, что он был первым или последним, Но тогда неправду сказал еще либо Ваня, либо Гриша, а это противоречит условию – неправду сказал только один из мальчиков. Аналогично рассматриваются и все другие возможности.

Задача **1-17.** *Ответ*: больше времени требуется на путь по реке. Пусть скорость парохода равна u, скорость течения v. Если $u \le v$, то пароход вообще не выплывет против течения, если же $u > v > 0$, то решение сводится к доказательству неравенства

$$\frac{10}{u+v} + \frac{10}{u-v} > \frac{20}{u}.$$

Задача **1-18.** *Ответ*: 25. Те 13 моментов времени, когда Женя обгонял Витю, разбивают все время движения на 14 промежутков, и за каждый промежуток Женя опережал Витю ровно на один круг. Значит, Женя сделал на 14 кругов больше Вити. Пусть Андрей сделал на k кругов больше Вити. По условию $0 < k < 14$. Рассуждая аналогично, получаем, что Андрей обогнал Витю $k-1$ раз. Но Андрей сделал на $14-k$ кругов меньше Жени, и поэтому Женя обогнал его $13-k$ раз. Всего произошло $13+(k-1)+(13-k)=25$ обгонов.

Задача **1-19.** На каждой из больших сторон прямоугольника отложим от концов по 19 см. Получим прямоугольник 35×19, имеющий общий центр с исходным, а в нем мы уже сможем провести диагонали, которые пересекаются в центре (рис.6).

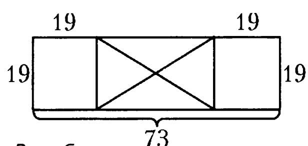


Рис. 6

Задача **1-20.** Пусть в компании k человек. Тогда каждый из них имеет в этой компании не меньше нуля и не больше $k-1$ знакомых. Если предположить, что количества знакомых у всех людей различны, то получится противоречие. Действительно, тогда один имеет нуль знакомых, второй – одного, третий – двух и т.д., наконец, последний имеет $k-1$ знакомых. Но это значит, что последний знаком со всеми, в частности, с первым, а тот ведь не был знаком ни с кем!

Задача **1-21.** *Ответ*: 11. Вычислим несколько первых членов данной последовательности:

$$7;\ 14;\ 17;\ 20;\ 5;\ 8,\ 11;\ 5;\ \ldots$$

Пятерка повторилась, значит, дальше будет период, состоящий из трех чисел: 5, 8, 11.

Задача **1-22.** *Ответ*: Алеша и Саша получат оценки 4, а Леня – оценку 3. Начиная выписывать сценки каждого из ребят, обнаруживаем, что с некоторого момента они периодически повторяются. Это схематически изображено на рис.7. Подсчитав средние значения оценок, получаем ответ.

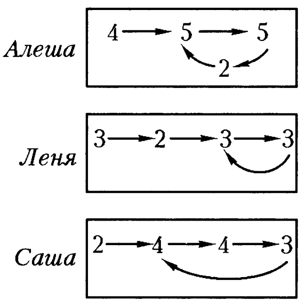


Рис. 7

Задача **1-23.** *Ответ*: на две с половиной минуты. Пусть v – скорость течения ручья, а t – время в минутах, которое он бежал назад. Тогда скорость ходьбы равна $\frac{3}{2}v$, скорость бега – $3v$, а расстояние, которое он пробежал назад, равно $3vt$.

Далее, расстояние, которое он прошел за 40 сек = $\frac{2}{3}$ минуты вперед от того места, где он выудил шляпу, до того, где он встретил плывущую палку, равно $\frac{3}{2}v\cdot\frac{2}{3} = v$, а расстояние, которое проплыла палка, пока он ее не встретил, равно $v\left(t+\frac{2}{3}\right)$.

Следовательно, мы можем написать уравнение

$$3vt = v + v\left(t+\frac{2}{3}\right),$$

где после сокращения v мы получаем, что $t = \frac{5}{6}$ мин.

Теперь посчитаем потерянное время. Оно состоит из двух частей, из которых первая (t) вдвое меньше второй ($2t$): сколько времени он бежал назад и сколько времени он шел вперед – это одно и же расстояние, а всего $3t = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ мин.

Рассмотрим другой способ решения с использованием тех же обозначений, но основанный на сравнении расстояний не в неподвижной системе отсчета, связанной с берегом, а в подвижной — связанной с движущейся палкой.

После того как математик бросил палку, он удалился от нее на расстояние, равное $(3v - v) \cdot t$, а после того, как он выудил шляпу, он сблизился с палкой на то же самое расстояние, равное $\left(\frac{3}{2}v + v\right) \cdot \frac{2}{3}$. Составив уравнение

$$(3v - v) \cdot t = \left(\frac{3}{2}v + v\right) \cdot \frac{2}{3}$$

и решив его, мы получим, что $t = \frac{5}{6}$ мин, откуда $3t = 2{,}5$ мин.

По берегу математик бежал t мин с одной скоростью, а затем прошел то же расстояние в обратном направлении со скоростью в 2 раза меньшей, поэтому обратно он шел $2t$ мин, а потерянное время составляет $3t$ мин.

Если рассмотреть графики движения математика — $OBCE$, шляпы — AC и палки — BD (см. рис.8), то можно лучше понять ситуацию, описанную в задаче.

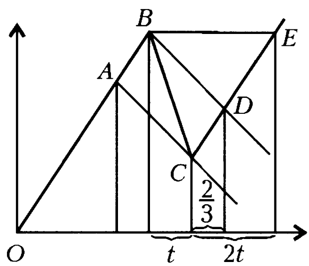


Рис. 8

Все участки графиков — отрезки, так как на каждом из них движение происходило с постоянной скоростью.

Точка A графика соответствует моменту, когда математик бросил шляпу, AC — график движения шляпы. Точка B соответствует моменту, когда математик бросил палку, BD – график движения палки.

Задача **1-24.** *Ответ*; а) существует, например 7125; б) не существует. Обозначим через x зачеркиваемую цифру, через k – количество остальных цифр, через y – число, остающееся после зачеркивания. Тогда $x \cdot 10^k + y = 58y$, откуда $x \cdot 10^k = 57y$. В последнем равенстве правая часть содержит простой множитель 19, которого левая часть содержать не может.

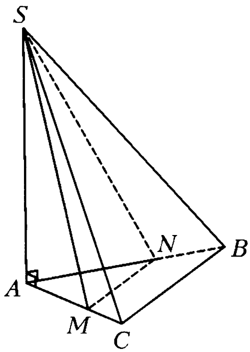


Рис. 9

Задача **1-25.** *Ответ*: 9 мастеров и 3 гроссмейстера. Если n – число участников матча, то $\frac{n(n-1)}{2}$ – общее количество очков в этом матче.

Задача **1-26.** *Ответ*: существует. Пример такой пирамиды приведен на рисунке 9, Она построена следующим образом. Берется треугольная пирамида $SABC$, у которой боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Ее боковые грани SAC и SAB перпендикулярны основанию (как плоскости, проходящие через перпендикуляр AS к основанию). Возьмем теперь произвольные точки M и N на сторонах AC и AB основания соответственно. Пирамида $SMNBC$ удовлетворяет условию задачи.

§ 2. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

2-1. Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую верно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную – минус 5 баллов, за задачу, которую он не брался решать, – 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов. Сколько задач он брался решать?

2-2. Можно ли разменять 25 рублей на рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры так, чтобы получить всего 10 купюр?

2-3. На миллиметровой бумаге нарисован прямоугольник 272×204 мм (его стороны идут по линиям сетки). Проведем его диагональ и отметим все узлы сетки, которые на ней лежат. На сколько частей узлы делят диагональ?

2-4. а) От прямоугольника 324×141 мм отрезают несколько квадратов со стороной в 141 мм, пока не останется прямоугольник, у которого длина одной стороны меньше 141 мм. От полученного прямоугольника отрезают квадраты, стороны которых равны по длине его меньшей стороне, до тех пор, пока это возможно, и т.д. Какова длина стороны последнего квадрата?

б) Найдите какие-нибудь два числа a и b, чтобы при таком разрезании прямоугольника $a \times b$ получились квадраты шести разных размеров.

2-5. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдает новую карточку; прочитав карточку с парой $(m;n)$, первый автомат выдает карточку $(m-n;n)$, второй – карточку $(m+n;n)$, третий – карточку $(n;m)$. Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел (19; 86). Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить из нее карточку: а) (31; 13); б) (12; 21)?

2-6. Один мастер делает на длинной ленте пометки синим карандашом от ее начала через каждые 36 см. Другой мастер делает пометки красным карандашом от начала через каждые 25 см. Может ли синяя пометка оказаться на расстоянии 1 см от какой-нибудь красной?

2-7. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол в 19° на 19 равных частей?

2-8. Окружность разделена 20 точками на 20 равных частей.

Сколько можно построить различных замкнутых ломаных из 20 равных звеньев с вершинами в этих точках? (Две ломаные, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.)

2-9. Верно ли, что из 100 произвольных целых чисел всегда можно выбрать:

а) 15; б) 16

таких, у которых разность любых двух делится на 7?

2-10. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 3, то и каждое из них делится на 3.

2-11. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы кубов трех неотрицательных целых чисел.

2-12. В классе 28 учеников, которые сидят по двое на 14 партах. В начале каждого месяца учитель рассаживает их так, чтобы за каждой партой сидели двое, никогда до этого рядом не сидевшие. Какое наибольшее число месяцев учитель сможет это делать?

2-13. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат целого числа, большего единицы.

2-14. Можно ли расставить все 12 чисел 1, 2, ..., 12 по окружности так, чтобы для любых трех чисел a, b, c, стоящих подряд, число $b^2 - ac$ делилось на 13?

2-15. Верно ли, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n - 1$ простое?

2-16. Докажите, что при любом целом n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

2-17. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что:

а) $p(0) = 19$, $p(1) = 85$, $p(2) = 1985$;

б) $p(1) = 19$, $p(19) = 85$?

2-18. Разложите многочлен:

а) $x^8 + x^4 + 1$ на три множителя,

б) $x^5 + x + 1$ на два множителя с целыми коэффициентами.

2-19. При каком значении a многочлены $x^4 + ax^2 + 1$ и $x^3 + ax + 1$ имеют общий корень?

2-20. Рассмотрим множество M натуральных чисел, представимых в виде $x^2 + 5y^2$, где x и y – некоторые целые числа.

а) Докажите, что произведение двух чисел из M также принадлежит M.

б) Назовем *базисным* число из M, большее 1, которое не делится ни на одно из чисел из M, кроме себя и 1. Существуют ли числа из M, которые можно двумя разными способами представить в виде произведения базисных?

в) Докажите, что базисных чисел бесконечно много.

2-21. Нетрудно указать тройку квадратов целых чисел, образующих арифметическую прогрессию: 1, 25, 49. Найдите еще три такие тройки (из квадратов чисел, не имеющих общего делителя).

2-22. а) Найдите 7 решений в целых числах уравнения

$$y^2 = 6\left(x^3 - x\right).$$

б) Найдите еще 4 его решения в рациональных числах.

Обсуждение задач

Задача **2-1.** *Ответ*: ученик решал 13 задач.

Пусть x – количество правильно решенных задач, y – неправильно решенных. Тогда $8x - 5y = 13$. Переписав это уравнение в виде

$$8(x + y) = 13(1 + y),$$

мы видим, что число $x + y$ делится на 13. С другой стороны, по условию, $x + y$ не больше 20. Поэтому $x + y = 13$ (при этом $x = 6$, $y = 7$).

∇ Можно решать уравнение $8x - 5y = 13$ так. Одно решение сразу угадывается: $x_0 = 1$, $y_0 = -1$. При любом целом t пара чисел $x = 1 + 5t$, $y = -1 + 8t$ тоже удовлетворяет этому уравнению. Действительно,

$$8(1 + 5t) - 5(-1 + 8t) = (8 + 5) + (40t - 40t) = 13.$$

При этом $x + y = 13t$, а так как $x + y \le 20$, то $t = 1$, $x + y = 13$, $x = 6$, $y = 7$.

Для любого линейного уравнения вида $ax - by = c$ (a и b – взаимно простые числа) общий вид решений в целых числах можно записать по такой же схеме. Находим какое-нибудь одно его целое решение $(x_0; y_0)$. Тогда $x = x_0 + bt$, $y = y_0 + at$, где $t \in \mathbb{Z}$, – все его решения.

Задача **2-2.** *Ответ*: нельзя.

Допустим, что можно взять k рублевых, l трехрублевых и m пятирублевых купюр так, чтобы выполнялись условия задачи, т.е. $k + l + m = 10$ и $k + 3l + 5m = 25$.

Вычитая из второго равенства первое, получим: $2l + 4m = 15$. Но последнее равенство невозможно, так как его левая часть четна, а правая – нет. Значит, наше предположение неверно.

∇ *Вообще уравнение вида* $ax - by = c$ *имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда с делится на наибольший общий делитель н.о.д. (a, b) чисел a и b.*

В задаче **2-2** $c = 15$ не делится на н.о.д.(a, b) = н.о.д. $(2; 4) = 2$.

Задача **2-3.** *Ответ*: на 68 частей.

Разобьем каждую из двух смежных сторон прямоугольника на 68 одинаковых частей и через точки деления проведем прямые по линиям сетки. Тогда диагональ прямоугольника разобьется узлами сетки на 68 одинаковых частей, служащих диагоналями прямоугольников размером 3×4 мм. На диагонали каждого такого прямоугольника нет ни одного узла сетки.

∇ В общем случае диагональ прямоугольника $m \times n$ разбивается узлами сетки на н.о.д. (m, n) одинаковых отрезков.

Задача **2-4.** а) *Ответ*: 3 мм. Произведем деление с остатком:

$324 = 141 \cdot 2 + 42$ (2 квадрата со стороной 141 мм),

$141 = 42 \cdot 3 + 15$ (3 квадрата со стороной 42 мм),

$42 = 15 \cdot 2 + 12$ (2 квадрата со стороной 15 мм),

$15 = 12 \cdot 1 + 3$ (1 квадрат со стороной 12 мм),

$12 = 3 \cdot 4$ (4 квадрата со стороной 3 мм).

∇ Для произвольного прямоугольника $a \times b$ длина стороны последнего квадрата равна н.о.д. (a, b).

Действительно, процедура последовательного деления с остатком, которую мы проделали в решении задачи, − это алгоритм Евклида нахождения н.о.д. (a, b) (см. [34, 88, 98]).

Алгоритм Евклида основан на таком факте. *Пусть $a = bq + r$, тогда н.о.д.(a, b) = н.о.д.(b, r).* Сам алгоритм можно описать так. Если имеются два числа a и b, причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b и получаем остаток $(0 \le r_1 < b)$. Затем делим число b на r_1 и находим остаток r_2 $(0 \le r_2 < r_1)$. Далее делим число r_1 на число r_2, при этом получается остаток r_3 $(0 \le r_3 < r_2)$, и т.д., пока какой-нибудь остаток r_{n-1} не разделится на остаток r_n нацело, т.е. $r_{n+1} = 0$. Последний ненулевой остаток r_n и есть н.о.д. (a, b). В самом деле,

$$r_n = \text{н.о.д.}(r_n, r_{n-1}) = \text{н.о.д.}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots$$

$$\ldots = \text{н.о.д.}(r_2, r_1) = \text{н.о.д.}(r_1, b) = \text{н.о.д.}(a, b).$$

В задаче 2-4 а) мы встретились с геометрической иллюстрацией этого алгоритма.

Отметим еще, что по последовательности частных $q_1, q_2, \ldots, q_n$, получающихся в процессе применения алгоритма Евклида, можно записать *разложение дроби a/b в цепную дробь* (см. [66, 61, 119]):

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_n}}}.$$

б) *Ответ*: например, $a = 21$, $b = 13$.

Действительно, произведем деление с остатком; $21 = 1 \cdot 13 + 8$; $13 = 1 \cdot 8 + 5$; $8 = 1 \cdot 5 + 3$; $5 = 1 \cdot 3 + 2$; $3 = 1 \cdot 2 + 1$; $2 = 2 \cdot 1$. Таким образом, получаются квадраты со сторонами соответственно 13, 8, 5, 3, 2, 1 – шести разных размеров.

∇ Для произвольного натурального числа n можно найти такие числа a и b, чтобы при разрезании получилось ровно n разных размеров квадратов.

В качестве таких чисел можно взять числа F_{n+2} и F_{n+1} *последовательности Фибоначчи*, которая задается следующим образом: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, ..., $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ для $k \geq 3$.

Если положить $a = F_{n+2}$ и $b = F_{n+1}$, то каждый раз от прямоугольника $F_k \times F_{k-1}$ будет отрезаться только один квадрат со стороной длины F_{k-1} и оставаться прямоугольник $F_{k-1} \times F_{k-2}$.

В решении задачи 2-4 б) мы взяли $F_7 = 13$ и $F_8 = 21$; размеры квадратов получились равными первым шести различным числам Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, 13.

Построенный пример прямоугольника $a \times b$ имеет наименьшие возможные (при данном n) размеры; другими словами, если числа a и b не больше F_{n+2}, то алгоритм Евклида дает н.о.д. (a, b) не больше чем за n шагов (см. [63]).

Заметим также, что для отношения F_{n+1}/F_n двух соседних чисел Фибоначчи разложение в цепную дробь имеет чрезвычайно простой вид; оно состоит из одних единиц. Например,

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}.$$

Задача **2-5.** а) *Ответ*: можно.

Обозначим операции автоматов соответственно I, II, III и условимся n сделанных подряд операций I или II записывать соответственно как I^n или II^n.

Тогда карточку (31; 13) можно получить из карточки (19; 86) так:

$$(19;86)\xrightarrow{\text{III}}(86;19)\xrightarrow{\text{I}^4}(10;19)\xrightarrow{\text{III}}(19;10)\xrightarrow{\text{I}}$$

$$\xrightarrow{\text{I}}(9;10)\xrightarrow{\text{III}}(10;9)\xrightarrow{\text{I}}(1;9)\xrightarrow{\text{III}}(9;1)\xrightarrow{\text{I}^7}$$

$$\xrightarrow{\text{I}^7}(2;1)\xrightarrow{\text{III}}(1;2)\xrightarrow{\text{II}}(3;2)\xrightarrow{\text{III}}(2;3)\xrightarrow{\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{II}}(5;3)\xrightarrow{\text{III}}(3;5)\xrightarrow{\text{II}^2}(13;5)\xrightarrow{\text{III}}(5;13)\xrightarrow{\text{II}^2}$$

$$\xrightarrow{\text{II}^2}(31;13).$$

б) *Ответ*: нельзя.

Поскольку операции I, II, III сохраняют н.о.д.(m,n), а н.о.д.$(19;81)=1\neq$ н.о.д.$(12;21)=3$, из карточки (19; 81) нельзя получить карточку (12; 21).

∇ Необходимое и достаточное условие того, чтобы из карточки (m, n) можно было получить карточку (a, b), состоит в том, что н.о.д.(m, n) = н.о.д. (a, b).

Необходимость этого условия очевидна; все операции I, II, III сохраняют н.о.д.

Если это условие выполнено, то обе карточки с помощью операций I и III можно привести к карточке (d, d) по алгоритму Евклида.

Действительно, каждый шаг алгоритма Евклида − это деление с остатком числа a на число b: $a = bq + r$ ($0\le r<b$). Этот шаг можно провести так:

$$(a,b)\xrightarrow{\text{I}^q}(r,b).$$

Затем, после операции $(r,b)\xrightarrow{\text{III}}(b,r)$, можно аналогично сделать следующий шаг алгоритма и т.д. до тех пор, пока не получится карточка (d,d).

Идя по цепочке $(a,b)\to\ldots\to(d,d)$ в обратном порядке с заменой операции I на операцию II, мы из карточки (d,d) получим карточку (a,b).

Итак, проделав «спуск» от (m,n) к (d,d), а затем «подъем» от (d,d) к (a,b), мы придем в итоге от карточки (m,n) к карточке (a,b), что и требовалось.

Задача **2-6.** *Ответ*: может.

Например, 9-я синяя пометка и 13-я красная находятся друг от друга на расстоянии 1 см, так как $13\cdot25-9\cdot36=1$.

∇ В этой задаче нам фактически надо было найти какое-нибудь решение в целых числах одного из уравнений

$$25x - 36y = 1, \quad 25x - 36y = -1$$

или доказать, что таких решений нет.

Существует стандартная процедура, с помощью которой всегда можно найти решение уравнения $ax + by = 1$, *если* н.о.д.$(a, b) = 1$. Продемонстрируем ее на нашей задаче. Выпишем все шаги алгоритма Евклида (см. обсуждение задачи 2-4 а)) для нахождения н.о.д.$(36; 25)$:

$$36 = 25 \cdot 1 + 11; \quad 25 = 11 \cdot 2 + 3; \quad 11 = 3 \cdot 3 + 2; \quad 3 = 2 \cdot 1 + 1.$$

Перепишем эту цепочку равенства так:

$$11 = 36 - 25 \cdot 1; \quad 3 = 25 - 11 \cdot 2; \quad 2 = 11 - 3 \cdot 3; \quad 1 = 3 - 2 \cdot 1.$$

Тогда получим

$$1 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) = 3 \cdot 4 - 11 = (25 - 11 \cdot 2) \cdot 4 - 11 =$$
$$= 25 \cdot 4 - 11 \cdot 9 = 25 \cdot 4 - (36 - 25) \cdot 9 = 25 \cdot 13 - 36 \cdot 9.$$

В результате получается равенство $25 \cdot 13 - 36 \cdot 9 = 1$, дающее одно решение (13; 9) уравнения $25x - 36y = 1$.

Задача **2-7**. *Ответ*: можно.

Проведем какую-нибудь окружность с центром в вершине данного угла. Стороны этого угла высекают на окружности дугу в $19°$.

Если последовательно отложить циркулем эту дугу на окружности еще 18 раз, то, поскольку $19 \times 19 = 361$, последняя засечка отсечет от первой дуги дугу в $1°$. Отложив циркулем эту дугу еще 17 раз, мы разделим дугу в $19°$ на 19 равных частей. Соединив полученные засечки с вершиной угла, мы разделим данный угол в $19°$ на 19 равных частей.

∇ Пусть m и n – взаимно простые натуральные числа (н.о.д.$(m, n) = 1$) и $m < n$. Откладывая на окружности последовательно друг за другом равные дуги, составляющие $\frac{m}{n}$-ю часть полной окружности, можно получить за n шагов все вершины правильного вписанного в окружность n-угольника (сделав при этом m полных оборотов). На некотором x-м шаге мы получим вершину, соседнюю с начальной, – при этом мы сделаем некоторое число y полных оборотов и еще пройдем $\frac{1}{n}$-ю часть окружности, так что $x \cdot \frac{m}{n} = y + \frac{1}{n}$. Отсюда получается *геометрический способ решения уравнения*

$$xm - yn = 1$$

в целых числах. В нашей задаче $m = 19$, $n = 360$, $x = 19$, $y = 1$.

Задача **2-8.** *Ответ*: 4 ломаные.

Будем считать какую-нибудь точку деления начальной и занумеруем, начиная с нее, все точки деления по часовой стрелке числами 1, 2, 3, ..., 20.

Ломаные с одинаковыми звеньями будут получаться, если мы будем соединять последовательно каждую точку с k-й по счету после нее до тех пор, пока не вернемся в исходную точку 1.

При $k = 1$ получится правильный двадцатиугольник с вершинами в точках 1, 2, 3, ..., 20.

При $k = 2$ – правильный десятиугольник с вершинами в точках 1, 3, 5, ..., 19.

При $k = 3$ – самопересекающаяся замкнутая ломаная с 20 вершинами в точках 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 3, 6, 9, 12, 15, 18.

При $k = 4$ – правильный пятиугольник.

При $k = 5$ – квадрат.

При $k = 6$ – самопересекающаяся замкнутая ломаная с 10 вершинами в точках 1, 7, 13, 19, 5, 11, 17, 3, 9, 15.

При $k = 7$ – снова 20-звенная ломаная.

При $k = 8$ – 5-звенная ломаная (пятиконечная звезда).

При $k = 9$ – снова 20-звенная ломаная.

При $k = 10$ получается вырожденная 2-звенная ломаная – дважды пройденный отрезок.

При $k = 11$ получается та же ломаная, что и при $k = 9$, так как соединять точки через 10 по часовой стрелке – то же самое, что соединять их через 8 против часовой стрелки.

Точно так же при $k = 12, 13, 19$ получаются соответственно такие же ломаные, что и при $k = 8, 7,\ldots 1$.

Таким образом, всего различных 20-звенных ломаных – четыре, они получаются при $k = 1, 3, 7, 9$.

∇ *При любом n различных по форме правильных n-звенных замкнутых ломаных будет столько, сколько существует натуральных чисел, меньших* $\frac{n}{2}$ *и взаимно простых с n.*

Количество натуральных чисел, меньших данного числа n и взаимно простых с ним, обозначается обычно через $\varphi(n)$. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*; *если* $p_1, p_2, \ldots, p_l$ *– все различные простые числа, входящие в разложение числа n на простые множители, то*

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

Ответ к обобщению задачи 2-8 можно записать так: число различных правильных n-звенных ломаных равно $\varphi(n)/2$. В частности, если $n = 20$, то $\varphi(20) = 20\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 8$, а число ломаных равно $\varphi(20)\ 2 = 4$ (см. [88]).

Задача **2-9.** а) *Ответ*: верно.

Разность двух чисел делится на 7 в том и только в том случае, когда равны остатки от деления этих чисел на 7. При делении на 7 существует семь возможных остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Допустим, что нельзя выбрать 15 нужных чисел из 100. Это значит, что не более 14 чисел дают при делении на 7 остаток 0, не более 14 чисел – остаток 1, аналогично – остатки 2, 3, 4, 5, 6. Но тогда всего чисел получается не более чем $14 \cdot 7 = 98 < 100$, и наше допущение неверно.

∇ Решение задачи 2-9 а) – типичный пример применения принципа Дирихле: *если в n клетках сидит nk + 1 зайцев, то хотя бы в одной клетке не меньше k + 1 зайцев* (см. [43]).

В самом деле, если бы в каждой клетке было не больше k зайцев, то всего зайцев было бы не больше чем nk, что противоречит условию.

б) *Ответ*: неверно.

Приведем контрпример: первые сто натуральных чисел от 1 до 100. Среди них 14 чисел: 7, 14, 98, дающих в остатке 0; по 15 чисел, дающих в остатке 1 и 2; по 14 чисел, дающих в остатке 3, 4, 5, 6. Значит, среди них нет 16 чисел, для которых разность любых двух делится на 7.

Задача **2-10.** Всякое целое число либо делится на 3, либо при делении на 3 дает в остатке 1 или 2.

Если число n делится на 3, то его можно записать в виде $n = 3k$, поэтому его квадрат можно записать в виде $9k^2$, откуда видно, что он делится на 3.

Если число n при делении на 3 дает в остатке 1, то его можно записать в виде $n = 3k + 1$, тогда для его квадрата получаем: $n^2 = 3\left(3k^2 + 2k\right) + 1$, откуда видно, что квадрат при делении на 3 также дает в остатке 1.

Если число n при делении на 3 дает в остатке 2, аналогично получаем: $n^2 = 3\left(3k^2 + 4k + 1\right) + 1$, т.е. и в этом случае квадрат числа n дает при делении на 3 остаток 1.

Если ровно одно из двух чисел не делится на 3, то его квадрат при делении на 3 дает, как мы видели, остаток 1, поэтому сумма квадратов этих двух чисел при делении на 3 дает остаток 1; а если ни одно из двух чисел не делится на 3, то их квадраты оба дают при делении на 3 остатки 1, поэтому сумма их квадратов при делении на 3 даст остаток 2.

Таким образом, сумма квадратов двух целых чисел делится на 3 лишь в случае делимости каждого из них на 3.

∇ Переход от целых чисел к их остаткам от деления на фиксированное число m – основной прием в задачах на делимость целых чисел. При этом постоянно используется следующее простое правило: *чтобы найти остаток от деления на m суммы или произведения двух (или нескольких) целых чисел, достаточно проделать те же операции с остатками и найти, какой остаток при делении на m дает результат.*

Покажем, например, что утверждение задачи 2-10 останется верным, если заменить в ее условии число 3 на число 7. Возведя в квадрат числа от 0 до 6, можно убедиться, что остатки, которые дают квадраты целых чисел при делении на 7, – это только 0, 1, 2 и 4. Поскольку никакие два из этих четырех чисел, кроме пары нулей, в сумме не дают числа, делящегося на 7, сумма квадратов двух целых чисел делится на 7, только если каждое число делится на 7.

Для знатоков. Вопрос о том, может ли для данного простого числа p сумма квадратов двух целых чисел $x^2 + y^2$ делиться на p, если ни одно из них не делится на p, эквивалентен такому: является ли (-1) квадратичным вычетом по модулю p, т.е. существует ли такое z, что $1 + z^2$ делится на p. Ответ (известный еще Эйлеру): это возможно для чисел p вида $4k + 1$ ($p = 5, 13, 17, 29, \ldots$) и невозможно для $p = 4k + 3$ ($p = 3, 7, 11, 19, 23, \ldots$) Обобщение этого факта, позволяющее для каждых двух чисел q и p быстро решить вопрос, является ли q квадратичным вычетом по модулю p, – *квадратичный закон взаимности Гаусса* (см. [31, 88]).

Задача **2-11.** Покажем, что ни одно число вида $9n + 4$, где n – натуральное число, не представляется в виде суммы трех кубов; поскольку чисел такого вида бесконечно много, отсюда будет следовать утверждение задачи.

Любое целое число имеет либо вид $3l$, либо $3l + 1$, либо $3l - 1$, где l – целое число. Поэтому куб любого целого числа имеет соответственно вид либо $27l^3$, либо

$$27l^3 \pm 27l^2 + 9l \pm 1 = 9\left(3l^3 \pm 3l^2 + l\right) \pm 1,$$

т.е. имеет вид либо $9m$, либо $9m \pm 1$.

Комбинируя всеми способами эти возможности, мы получим, что сумма кубов трех целых чисел представляется одним из следующих вариантов: $9n$; $9n \pm 1$; $9n \pm 2$; $9n \pm 3$, но не может равняться числу вида $9n + 4$ (и, кстати, $9n - 4$).

∇ В 1909 г. были доказаны следующие **гипотезы Э. Варинга** (1770 г.): *каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более 9 кубов натуральных чисел; для каждого натурального k любое натуральное число представляется как сумма w или меньше k-х степеней натуральных чисел, где w зависит только от k.* Первая гипотеза была доказана А.Виферихом, вторая – Д.Гильбертом (элементарное ее доказательство было получено Ю.В.Линником). Наименьшее значение $w = w(k)$ неизвестно уже для $k = 4$ (см. [5, 118]).

Любопытно, что каждое натуральное число n легко представить в виде суммы пяти кубов целых чисел.

В самом деле, $n - n^3$ делится на 6 при всех n. Поэтому $n = n^3 + 6t$, где t целое. Отсюда

$$n = n^3 + (t+1)^3 + (t-1)^3 + (-t)^3 + (-t)^3 .$$

Задача **2-12.** Поскольку каждый ученик мог сидеть не больше чем с 27 учениками, это не могло длиться более 27 месяцев.

Покажем, как учитель мог рассаживать учеников в течение 27 месяцев.

Занумеруем учеников числами от 1 до 28. Поставим числа от 1 до 27 на окружности в вершинах правильного 27-угольника, а число 28 – в центре этой окружности. Соединим отрезком точки 1 и 28. Остальные точки соединим попарно отрезками, перпендикулярными этому отрезку – см. рисунок 10,*а*. Рассадим учеников так: если два числа соединены отрезком, то соответствующих им школьников сажаем за одну парту.

В следующем месяце соединяем отрезком точки 2 и 28 и через остальные точки проводим перпендикулярные ему отрезки; рассаживаем учеников по этой схеме – рисунок 10,*б*. Дальше берем поочередно отрезки 28-3, 28-4, 28-27 и проводим отрезки, перпендикулярные каждому из них.

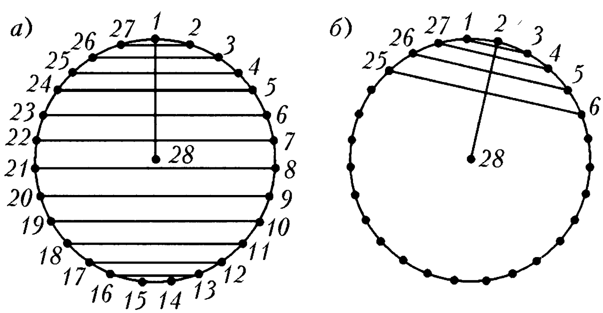


Рис. 10

∇ Заметим, что на рисунке 10,*а* сумма номеров каждой пары точек круга, соединенных отрезком, равна числу 29, которое дает остаток 2 при делении на 27, а точка 1 соединена с центром точкой 28; эта последняя пара оказывается в особом положении: среди чисел от 1 до 27 невозможно подобрать такую пару к числу 1, кроме него самого, чтобы сумма чисел этой пары давала остаток 2 при делении на 27.

На рисунке 10,*б* ситуация аналогична: суммы пар номеров соединенных точек дают при делении на 27 остаток 4, а для номера 2 среди чисел от 1 до 27 нет подходящей пары, кроме него самого; этот номер 2 соединен с центром 28.

Эти наблюдения приводят к следующей числовой интерпретации приведенного в задаче 2-12 расписания.

Фиксируем какое-нибудь число r от 1 до 27. Объединяем в пары те номера от 1 до 27, которые в сумме дают остаток r при делении на 27. При этом без пары останется только тот номер x, который в сумме с самим собой дает при делении на 27 остаток r. Если r четно, то $x = r/2$, а если нечетно, то $x = (r + 27)/2$. Этот номер x мы соединим с номером 28.

Для любого четного числа n учеников можно аналогичным образом составить расписание на $n - 1$ месяц. Для этого надо объединять в пары те номера из множества всех целых чисел от 1 до $n - 1$, сумма которых дает остаток r при делении на $n - 1$. Если r четно, то при этом без пары останется номер $r/2$, а если нечетно, то номер $(r + n - 1)/2$; этот номер объединим в пару с оставшимся номером n (см. [34], [124]).

Задача **2-13.** *Ответ*: например, 48, 49, 50 или 548, 549, 550.

∇ Можно показать, что вообще для любого k существует k последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат целого числа, большего единицы.

Тут уместно воспользоваться так называемой **китайской теоремой об остатках** (см. [88]): *каковы бы ни были натуральные попарно взаимно простые числа* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и целые неотрицательные числа* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *(* $r_1 < a_1, r_2 < a_2, \ldots, r_n < a_n$ *), существует такое натуральное число* m*, которое при делении на числа* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *соответственно дает остатки* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *.*

Пусть $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$ – квадраты n различных простых чисел. Тогда, по этой теореме, найдется такое целое число m, которое дает при делении на числа $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$ соответственно остатки $p_1^2 - 1, p_2^2 - 2, \ldots, p_n^2 - n$. Поэтому n последовательных чисел $m + 1$, $m +$ $+ 2$, …, $m + n$ будут делиться соответственно на $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$.

Пример (548, 549, 550), указанный в ответе, подобран именно таким путем: полагаем $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, находим число m, которое дает соответственно остатки 3, 7 и 22 при делении на 4, 9 и 25; годится, например, число $m = 547$.

Это число m можно подобрать таким образом. Ищем его в виде

$$m = a \cdot 9 \cdot 25 + 4 \cdot b \cdot 25 + 4 \cdot 9 \cdot c\ .$$

Нужно, чтобы число $a \cdot 9 \cdot 25$ давало остаток 3 при делении на 4, число $4 \cdot b \cdot 25$ – остаток 7 при делении на 9 и число $4 \cdot 9 \cdot c$ – остаток 22 при делении на 25. Полагая $a = -1$, $b = 7$, $c = 2$, получаем $m = 547$.

Задача **2-14.** *Ответ*: можно.

На рисунке 11 приведены два примера нужной расстановки. Это можно проверить простым подсчетом.

∇ Числа, выписанные на первом круге на рисунке 11,*а* по часовой стрелке, – это остатки от деления последовательных степеней $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{11}$ на число 13, а против часовой стрелки – остатки

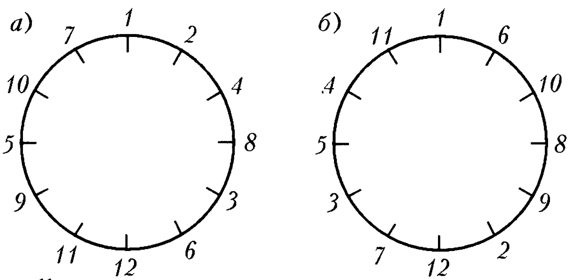


Рис. 11

последовательных степеней $1, 7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{11}$. Естественно, что для каждых трех соседних чисел a, b, c (а значит, и для их остатков при делении на 13) число $b^2 - ac$ делится на 13; если три числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то $b^2 = ac$.

Точно так же на рисунке 11,*б* выписаны остатки от деления на 13 последовательных степеней $1, 6, 6^2, \ldots, 6^{11}$ (по часовой стрелке) и $1, 11, 11^2, \ldots, 11^{11}$ (против часовой стрелки).

Числа 2, 6, 11, 7, стоящие на рисунке 11 рядом с 1, – это остатки при делении на 13 чисел $2, 2^5, 2^7, 2^{11}$.

Вообще, для любого простого p существует *первообразный корень* – такое число r, что его степени $1, r, r^2, \ldots, r^{p-1}$ дают все различные остатки $1, 2, \ldots, p-1$ при делении на p; число таких r равно $\varphi(p-1)$ – числу взаимно простых с $p-1$ чисел от 1 до $p-2$ (см. комментарий к задаче 2-8).

В задаче 2-14 $p = 13$, $\varphi(p-1) = \varphi(12) = 4$, так как имеется 4 числа, 1, 5, 7, 11, взаимно простых с числом 12 и меньших его: все первообразные корни – остатки от деления на 13 чисел $2, 2^5, 2^7, 2^{11}$ (см. [88]).

Задача **2-15.** *Ответ*: неверно. Например, при $n = 6$ число $6^3 + 5 \cdot 6 - 1$ равно $5 \cdot 7^2$.

∇ Знаток сразу ответил бы на вопрос задачи отрицательно, так как, кроме констант, вообще не существует многочленов $F(n)$ с целыми коэффициентами, значения которых при всех натуральных n – простые числа.

В самом деле, если свободный член a многочлена не равен 0 и ± 1, то значения $F(ka)$ при целых k делятся на a и среди них есть составные. Если $a = \pm 1$, то можно сначала «сдвинуть» многочлен – заменить $F(n)$ на $F(n+h) = G(n)$ так, чтобы свободный член стал не равным ± 1.

В задаче 2-15 найти n, при котором $F(n) = n^3 + 5n - 1$ – составное число, можно так. Положим $n = m + 1$; у многочлена $F(m+1) = (m+1)^3 + 5(m+1) - 1$ свободный член равен 5, и поэтому $F(6)$ делится на 5.

Отметим, что в 1970 году наш отечественный математик Ю.В.Матиясевич доказал существование многочлена от 21 переменного с целыми коэффициентами, обладающего таким свойством: множество его положительных значений при целых значениях переменных совпадает с множеством простых чисел (см. [47, 54, 100]).

Задача **2-16.** Разложим данное число на множители:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n\left(n^4 - 5n^2 + 4\right) = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 - 4\right) =$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

В результате получилось произведение пяти последовательных целых чисел.

Одно из таких чисел обязательно делится на 5, одно из трех последовательных чисел делится на 3, а из четырех последовательных чисел одно делится на 4, а другое – на 2. Поэтому произведение делится на 120.

∇ Другое, комбинаторное решение этой задачи можно получить, если заметить, что при $n \geq 3$ число

$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

есть биномиальный коэффициент C_{n+2}^5 (число 5-элементных подмножеств из $(n + 2)$ элементов), а это число, несомненно, целое.

Вообще, *многочлен $F(x)$ принимает целые значения при всех целых x тогда и только тогда, когда его можно представить в виде суммы $F(x) = \sum a_k C_x^k$ с целыми коэффициентами a_k, где* $C_x^k = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$ (см. [104]).

Задача **2-17.** а) *Ответ*: да.

Удобно искать такой многочлен в виде

$$p(x) = ax(x-1) + bx + c .$$

Подставляя в это тождество $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$, получаем для определения коэффициентов a, b, c удобную «треугольную» систему линейных уравнений

$$\begin{cases} c = 19, \\ b + c = 85, \\ 2a + 2b + c = 1985, \end{cases}$$

из которой находим: $c = 19$, $b = 66$, $a = 917$ и получаем ответ:

$$p(x) = 917x^2 - 851x + 19 .$$

∇ Точно так же удобно искать многочлен степени не выше n, принимающий в данных $n + 1$ точках $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ данные значения. Записав $p(x)$ в виде

$$p(x) = b_0 + b_1(x - c_1) + b_2(x - c_1)(x - c_2) + \ldots$$
$$\ldots + b_n(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$$

и подставляя в это тождество $x = c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, мы получаем треугольную линейную систему для определения $m + 1$ неизвестных коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Указанный метод нахождения многочлена с данными значениями называется *способом интерполяции Ньютона.*

б) *Ответ*: нет, не существует.

Для доказательства воспользуемся следующим утверждением: если дан многочлен

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами, то для любых целых чисел c и d целое число $p(c) - p(d)$ делится на число $c - d$.

Согласно этому утверждению, число $p(19) - p(1) = 66$ должно делиться на число $19 - 1 = 18$, что неверно, откуда и следует ответ.

Докажем справедливость высказанного утверждения:

$$p(c) - p(d) = \left(a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n\right) -$$
$$-\left(a_0d^n + a_1d^{n-1} + \ldots + a_{n-1}d + a_n\right) =$$
$$= a_0\left(c^n - d^n\right) + a_1\left(c^{n-1} - d^{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}(c - d) .$$

Для любого натурального k справедлива формула

$$c^k - d^k = (c-d)\left(c^{k-1} + c^{k-2}d + \ldots + cd^{k-2} + d^{k-1}\right)$$

(она получается из формулы суммы k членов геометрической прогрессии с первым членом c^{k-1} и знаменателем d/c). Поэтому каждое слагаемое в полученном равенстве для $p(c)-p(d)$ делится на $c-d$, значит, и вся сумма делится на $c-d$.

∇ Аналогично можно показать, что для любого многочлена $p(x)$ и любого числа d многочлен $p(x)-p(d)$ делится на многочлен $x-d$, т.е. $p(x)-p(d)=(x-d)q(x)$, где $q(x)$ – некоторый многочлен. Переписав это тождество в виде $p(x)=(x-d)q(x)+p(d)$, получаем следующую теорему Безу: *остаток от деления многочлена $p(x)$ на двучлен $(x-d)$ равен $p(d)$.*

Задача **2-18.** а) *Ответ*: $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$. Действительно:

$$x^8+x^4+1 = x^8+2x^4+1-x^4 = \left(x^4+1\right)^2-\left(x^2\right)^2 =$$

$$= \left(x^4+x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right) = \left(\left(x^2+1\right)^2-x^2\right)\left(x^4-x^2+1\right) =$$

$$= \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right).$$

б) *Ответ*: $\left(x^3-x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$. Действительно:

$$x^5+x+1 = \left(x^5+x^4+x^3\right)-\left(x^4+x^3+x^2\right)+$$

$$+\left(x^2+x+1\right) = \left(x^3-x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right).$$

∇ Существуют многочлены любой степени с целыми коэффициентами, которые не разлагаются в произведение многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами (например, x^n-2). Они называются неприводимыми (над кольцом целых чисел).

Имеются алгоритмы, позволяющие для любого многочлена указать его разложение на неприводимые множители или показать, что он сам неприводим (см. [85, 117]).

Задача **2-19.** *Ответ*: при $a=-2$.

Пусть многочлены $f(x)=x^4+ax^2+1$ и $g(x)=x^3+ax+1$ имеют общий корень x_0. Тогда, умножив второй многочлен на x и вычитая из первого, получим многочлен, имеющий тот же корень, а этот многочлен – просто

$$f(x)-xg(x)=1-x.$$

Его единственный корень $x_0 = 1$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют этот корень при $a = -2$; чтобы убедиться в этом, достаточно приравнять нулю $f(1)$ и $g(1)$ – оба эти числа равны $a + 2$.

∇ Для того чтобы многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имели общий корень x_0, нужно, чтобы оба они делились на многочлен $x - x_0$ (теорема Безу, см. задачу 2-17). Найти общий делитель наибольшей степени двух многочленов можно с помощью *алгоритма Евклида* – так же, как и наибольший общий делитель двух чисел. В решении задачи 2-19 мы проделали один шаг этого алгоритма – разделили многочлен $f(x)$ и $g(x)$ с остатком, который оказался равным $1 - x$.

Если далее разделить $g(x)$ столбиком на $(x-1)$, то получится остаток $a + 2$:

$$g(x) = (x-1)\left(x^2 + x + a + 1\right) + (a + 2).$$

Если $a = -2$, то остаток равен 0; если же $a \neq -2$, то многочлены не имеют общего делителя степени, большей 0.

Задача **2-20.** а) Пусть $k = a^5 + 5b^2$ и $l = c^2 + 5d^2$ – два каких-нибудь числа из множества M. Тогда

$$kl = \left(a^2 + 5b^2\right)\left(c^2 + 5d^2\right) = (ac - 5bd)^2 + 5(ad + bc)^2. \quad (*)$$

Таким образом, $kl = x^2 + 5y^2$, где $x = ac - 5bd$, $y = ad + bc$, т.е. число kl принадлежит M.

б) *Ответ*: существуют. Например, $84 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14$.

Покажем, что все пять выписанных чисел принадлежат множеству M:

$$4 = 2^2 + 5 \cdot 0^2, \quad 6 = 1^2 + 5 \cdot 1^2, \quad 14 = 3^2 + 5 \cdot 1^2,$$

$$21 = 4^2 + 5 \cdot 1^2, \quad 84 = 2^2 + 5 \cdot 4^2.$$

Для того чтобы показать, что числа 4, 6, 14, 21 – базисные, выпишем все числа из M, большие 1 и не превышающие 21: 4, 5, 6, 9, 14, 16, 20, 21. Среди них все, кроме 16, 20, – базисные, потому что каждое из них не делится ни на одно из предыдущих.

в) Предположим, напротив, что базисных чисел конечное число: $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда число $1 + 5(b_1 b_2 \ldots b_n)^2$, очевидно, принадлежащее M, не делится ни на одно из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, поэтому оно само базисное и не равно ни одному из $b_1, b_2, \ldots, b_n$, что противоречит предположению.

∇ Обратим внимание на аналогию между множеством M и множеством всех натуральных чисел.

Так же как всякое натуральное число разлагается в произведение простых чисел, любое число из M разлагается в произведение базисных чисел. Однако если натуральное число единственным образом разлагается на простые множители (*основная теорема арифметики*), то, согласно задаче 2-20 б), это неверно для чисел из множества M.

Для знатоков. Тождество ($*$) связано с правилом умножения чисел вида $x + y\sqrt{-5}$ (см. [48]):

$$\left(a + b\sqrt{-5}\right)\left(c + d\sqrt{-5}\right) = (ac - 5ab) + (ad + bc)\sqrt{-5}\,.$$

Вопрос о разложении на множители чисел из M эквивалентен вопросу о разложении на множители в кольце чисел вида $x + y\sqrt{-5}$, где x и y – целые. Задачи о разложении на множители в кольцах такого типа сыграли важную роль в истории математики. Из этих задач возник новый раздел математики – алгебраическая теория чисел (см. [82]).

Задача **2-21.** *Ответ*: например, $\left(7^2, 13^2, 17^2\right)$, $\left(17^2, 25^2, 31^2\right)$, $\left(31^2, 41^2, 49^2\right)$.

Тройка квадратов p^2, q^2, r^2 образует арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $p^2 + r^2 = 2q^2$ или

$$(r - q)(r + q) = (q - p)(q + p)\,.$$

Например, для третьей из указанных троек ($p = 31$, $q = 41$, $r = 49$) получаем

$$(49 - 41)(49 + 41) = (41 - 31)(41 + 31) = 720\,.$$

∇ Вот общие формулы для таких троек (из взаимно простых чисел):

$$p = n^2 + 2nm - m^2, \quad q = m^2 + n^2, \quad r = m^2 + 2mn - n^2,$$

где m и n – произвольные взаимно простые числа. Если при каких-нибудь тип числа p, q, r имеют общий делитель, то мы можем их сократить на него. (Это бывает, когда числа m и n оба нечетны; тогда соответствующие числа p, q, r имеют общий множитель 2. Других общих множителей, как нетрудно показать, быть не может.)

То, что числа такого вида годятся, можно проверить, подставив их в соотношение $(p - q)(p + q) = (q - r)(q + r)$.

К этим формулам можно прийти разными путями; мы укажем один из них (см. [122]).

Пусть $p^2 + r^2 = 2q^2$. Разделив все члены этого уравнения на q^2 , получаем $(p/q)^2 + (r/q)^2 = 2$. Обозначив p/q через x, $r\ q$ – через y, получаем уравнение $x^2 + y^2 = 2$. Таким образом, задача нахождения чисел p, q, r сводится к решению уравнения $x^2 + y^2 = 2$ в рациональных числах x, y.

Идею решения объясним на геометрическом языке. Решить полученное уравнение – это значит на окружности $x^2 + y^2 = 2$ найти все точки с рациональными координатами. Возьмем одну такую точку – скажем, $(-1;\ -1)$. Если провести через эту точку и другую рациональную точку $(x;\ y)$ прямую, то ее угловой коэффициент $t = (y+1)/(x+1)$ рационален.

Верно и обратное: любая прямая с рациональным угловым коэффициентом $t \neq -1$, проходящая через точку $(-1;\ -1)$, пересекает еще раз окружность $x^2 + y^2 = 2$ в рациональной точке $(x;\ y)$. Чтобы убедиться в этом, выразим y из уравнения прямой $y = t(1+x) - 1$ и подставим в уравнение окружности:

$$x^2 + \left(t(1+x) - 1\right)^2 = 2,$$

откуда

$$\left(1+t^2\right)x^2 - 2t(1-t)x + \left(t^2 - 2t - 1\right) = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно x, один корень которого, $x = -1$, мы знаем.

С помощью теоремы Виета находим второй корень: $x = \dfrac{-t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1}$.

Мы нашли одну координату точки $(x;\ y)$. Теперь можно найти и вторую: $t = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}$.

Положим затем $t = m/n$; тогда из формул для $x = \dfrac{p}{q}$ и $y = \dfrac{r}{q}$ получаем тройку p, q, r в таком виде: $p = -m^2 + 2mn + n^2$, $q = m^2 + n^2$, $r = m^2 + 2mn - n^2$.

Описанный способ рассуждений годится для отыскания всех рациональных точек на кривой второго порядка (или – что то же самое – всех целых решений уравнений типа $ax^2 + bxy + cy^2 = dz^2$), задаваемой уравнением с целыми коэффициентами, если известна хоть одна такая точка. Для выяснения вопроса о том, существует ли такая точка, также существует эффективный алгоритм (см. [125], [126]).

Задача **2-22.** *Ответы*: а) семь решений в целых числах: $(0;0)$, $(1;0)$, $(-1;0)$, $(2;6)$, $(2;\ -6)$, $(3;12)$, $(3;\ -12)$;

б) еще четыре решения в рациональных числах: $\left(-\dfrac{1}{2};\ \pm\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3};\ \pm\dfrac{4}{3}\right)$.

∇ Как находить новые решения в рациональных числах по уже имеющимся, можно объяснить на геометрическом языке.

Наше уравнение задает некоторую кривую на координатной плоскости Oxy.

Пусть мы знаем какие-нибудь две точки этой кривой, координаты которых $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – рациональные числа. Прямая, проходящая через эти точки, пересекает кривую в третьей точке, поскольку уравнение кривой имеет третью степень.

Координаты x_3, y_3 этой третьей точки будут рациональными функциями от x_1, y_1, x_2, y_2 с целыми коэффициентами, т.е. тоже рациональными числами.

Таким образом, отправляясь от двух каких-нибудь решений $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ уравнения в рациональных числах, мы получаем новое решение $(x_3; y_3)$ в рациональных числах.

Представим теперь результаты соответствующих вычислений.

Прямая, проходящая через данные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, задается уравнением $y = t(x - x_1) + y_1$, где $t = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Подставляя y в уравнение $y^2 = 6(x^3 - x)$, получаем уравнение третьей степени относительно x, два корня x_1, x_2 которого нам известны (ведь точки лежат на кривой), а третий можно найти по теореме Виета:

$$x_3 = t^2/6 - x_1 - x_2. \qquad (1)$$

Аналогично можно найти y_3:

$$y_3 = t^3/6 + 2y_1 - y_2 - 3tx_1. \qquad (1')$$

Можно взять точку $(x_2; y_2)$, «совпадающую» с $(x_1; y_1)$, – провести в ней касательную к кривой; она будет пересекать кривую еще в одной точке:

$$x_4 = t^2/6 - 2x_1, \quad y_4 = t^3/6. \qquad (2)$$

Итак, мы получили формулы, позволяющие находить по известным рациональным решениям уравнения $y^2 = 6(x^3 - x)$ новые решения.

Для знатоков. Естественно задать следующие вопросы. Будем ли мы указанным способом (проводя через известные рациональные точки прямые) получать каждый раз новые рациональные точки? Конечно или бесконечно множество рациональных точек? Каким образом их все можно описать? Сколько среди них целых точек?

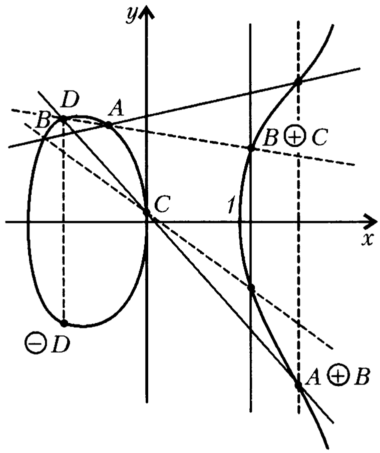
Для того чтобы ответить на эти вопросы, целесообразно на кривой третьей степени ввести операцию сложения точек, обладающую свойством ассоциативности. Описать ее удобнее для кривой, заданной уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + b. \qquad (3)$$

(Любую неособую кривую $P(x, y) = 0$ третьей степени можно некоторым преобразованием переменных привести к такому виду; при этом если коэффициенты $P(x, y)$ были целыми, задачу отыскания рациональных точек на кривой $P(x, y) = 0$ можно свести к аналогичной задаче для кривой (3) с целыми a и b; для нашей кривой $y^2 = 6\left(x^3 - x\right)$ достаточно заменить переменные $v = 6x$, $u = 6y$ – она примет вид $u^2 = v^3 - 36v$.)

Рассмотрим две точки A, B кривой (3), найдем третью точку пересечения прямой AB с этой кривой. Обозначим через $A \oplus B$ точку, симметричную ей относительно оси Ox (рис.12). Тогда для любых трех точек A, B и C кривой имеет место соотношение

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) .$$



$\ominus D = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

Рис. 12

Это свойство ассоциативности имеет интересную геометрическую интерпретацию. Если на плоскости проведены две тройки прямых так, что прямые из разных троек пересекаются в 9 точках, то кривая третьей степени, содержащая 8 из этих точек, должна содержать и девятую. Если добавить к кривой бесконечно удаленную точку Z, то множество всех ее точек с операцией $\oplus$ образует коммутативную группу (свойство $A \oplus B = B \oplus A$ очевидно). Точка Z играет в этой группе роль нуля; точкой $\ominus A$, противоположной точке A, считается точка, симметричная точке A относительно оси Ox. Условие принадлежности трех точек A, B, C одной прямой имеет вид $A \oplus B = \ominus C$ или $A \oplus B \oplus C = Z$.

Рациональные точки на кривой (3) с целыми a, b также образуют группу относительно операции $\oplus$. Для нашей кривой $y^2 = 6\left(x^3 - x\right)$ сложение точек задается формулами (1), ($1'$), (2), а именно

$$(x_1;\ y_1) \oplus (x_2;\ y_2) = (x_3;\ -y_3) ;$$

$$(x_1;\ y_1) \oplus (x_1;\ y_1) = 2(x_1;\ y_1) = (x_4;\ y_4) .$$

Все указанные в ответе точки легко получить из трех точек: $E(1;0)$, $F(-1;0)$, $G(2;6)$. При этом $E \oplus F$ имеет координаты $(0;0)$, $E \oplus G =$ $= (3;12)$, $F \oplus G = (-1/3;4/3)$, $E \oplus F \oplus G = (-1/2;-2/3)$, $G \oplus G =$ $= 2G = (25/24;-35/48)$, $2G \oplus F = (-1/49;120/49)$, $2G \oplus E = (49;840)$ и т.д. (Заметим, что $2E = 2F = 2(E \oplus F) = Z$.)

Найти полностью группу рациональных точек для конкретной кривой (3) – очень трудная задача. Известно, что это – группа с конечным числом образующих (*теорема Морделла*), но непросто найти в конкретном случае даже количество ее образующих бесконечного порядка (т.е. количество независимых точек A кривой, для которых $nA \neq Z$ ни при каком n). (См. [122]).

Целые точки, как видно из нашего примера, могут появляться среди рациональных достаточно неожиданно. Однако, согласно *теореме Туэ*, на неособой кривой степени 3 (или больше) их всегда лишь конечное число.

Еще одна «теорема конечности» явилась недавней математической сенсацией: в 1983 г. появилось доказательство (молодого математика Фалтингса) **гипотезы Морделла**: *на неособой кривой* $P(x, y) = 0$ *рода больше* 1 (кривая предполагается неособой и на бесконечности) *может быть лишь конечное число рациональных точек* (здесь $P(x, y)$ – неприводимый многочлен с целыми коэффициентами).

Род кривой $P(x, y)$ – сравнительно легко вычисляемая целочисленная характеристика, связанная со степенью n многочлена $P(x, y)$. К кривым рода 0 относятся окружности и другие кривые второго порядка, рода 1 – неособые кривые третьей степени. Что же касается неособых кривых $P(x, y) = 0$ степени $n \geq 4$, то их род, как правило, не меньше двух, и поэтому они могут содержать лишь конечное число рациональных точек. В частности, это относится к кривой Ферма $x^n + y^n = 1$ при $n \geq 4$. (Подробнее см. [125].)

Задачи для самостоятельного решения

2-23. Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и по 160 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 тонны. Можно ли это сделать?

2-24. По окружности радиуса 40 см катится колесо радиуса 18 см. В колесо вбит гвоздь, который, ударяясь об окружность, оставляет на ней отметки.

а) Сколько всего таких отметок оставит гвоздь на окружности?

б) Сколько раз прокатится колесо по всей окружности, прежде чем гвоздь попадет в уже отмеченную ранее точку?

2-25. На кольцевой дороге проводилась эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находились в одном и том же месте. Длина кольцевой дороги 330 км, а длина каждого этапа – 75 км (движение по дороге – одностороннее). Сколько было пунктов, в которых передавалась эстафета, и каково расстояние между соседними пунктами?

2-26. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что при повороте вокруг точки O на угол 48° она переходит в себя. Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол: а) 90°; б) 72°?

2-27. Фигура на плоскости переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол 19°. Докажите, что она переходит в себя при повороте на угол 86°.

2-28. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) $2^{63}-1$ и $2^{91}-1$; б) $2^{19}+1$ и $2^{86}+1$.

2-29. От параллелограмма с острым углом 60° и сторонами $a > b$ (a и b – целые числа) прямой, проходящей через вершину, отрезают равносторонний треугольник. С оставшейся трапецией проделывают ту же операцию – получается параллелограмм, из него – трапеция и так далее, пока не получится ромб, а) Какова будет сторона ромба, если $a = 1986$, $b = 1800$? б) Найдите какие-нибудь a и b, чтобы при таком разрезании параллелограмма получились треугольники восьми разных размеров.

2-30. Прямоугольник разбит на клетки 1×1 см. Внутри каждой клетки написано число. Известно, что сумма всех чисел в каждой горизонтальной строчке равна 1, а в каждом вертикальном столбике равна 2. Может ли площадь прямоугольника равняться 1986 см^2?

2-31. Верно ли, что:

а) из 100 целых чисел всегда можно выбрать два таких, что их сумма делится на 7;

б) из 5 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность квадратов которых делится на 7?

2-32. Пусть длины всех трех сторон прямоугольного треугольника – целые числа. Могут ли длины обоих катетов быть нечетными?

2-33. Найдите три таких простых числа, чтобы их сумма была в 5 раз меньше их произведения.

2-34. Найдите все такие простые числа p, что число

а) p^2+13; б) p^2+14

– простое.

2-35. Докажите, что следующие числа составные:

а) $2^{3^{1987}}+1$; б) $2^{3^{1987}}-1$.

2-36. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению:

а) $x^2 = y^2+2y+13$; б) $x^2-3xy+2y^2 = 3$.

2-37. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:

а) $y^2 = 5x^2 + 6$; б) $2^x - 1 = y^2$ $(x > 1)$.

2-38. Докажите, что если сумма нескольких целых чисел делится на 6, то и сумма их кубов делится на 6.

2-39. Докажите, что при любых целых n и m число $m^5n - mn^5$ делится на 30.

2-40. Докажите, что если число $a - 1$ делится на k^m, то число $a^k - 1$ делится на k^{m+1} (a, k, m – натуральные числа).

2-41. Найдите три последние цифры суммы

$$1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + 4^{100} + \ldots + 999998^{100} + 999999^{100}.$$

2-42. Найдите какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат целого числа, большего единицы.

2-43. Напишите шесть чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 по окружности в таком порядке, чтобы для любых трех чисел a, b, c, стоящих подряд, число $b^2 - ac$ делилось на 7.

2-44. Укажите такое n, при котором число $n^4 + (1+n)^4$ – составное.

2-45. Докажите, что при всех натуральных $n > 1$ число

а) $n^4 + 4$; б) $n^5 + n^4 + 1$

– составное.

2-46. Разложите многочлен $x^9 + x^4 - x - 1$ на 5 множителей с целыми коэффициентами.

2-47. Докажите, что многочлен $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ делится на многочлен $x(x+1)(2x+1)$.

2-48. При каких значениях a и b многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx - 1$ делится на $(x-1)^2$?

2-49. Известно, что многочлен $f(x)$ при делении на $x - 1$ дает остаток 3, а при делении на $x - 2$ – остаток 5. Какой остаток дает этот многочлен при делении на $(x-1)(x-2)$?

2-50. Докажите, что если у многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами значения $f(0)$ и $f(1)$ нечетны, то у него нет целых корней.

2-51. Докажите, что если $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и $|f(3)| = |f(7)| = 1$, то этот многочлен не имеет целых корней.

2-52. Пусть $f(x)$ – многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами. Докажите, что если его значения при пяти различных целых значениях x по модулю равны 1, то многочлен нельзя разложить в произведение двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами.

2-53. Существует ли такое натуральное n, что число $3^n + 1$ делится на:

а) 5^{1000}; б) 10^{1000}?

2-54. Имеется много карточек, на каждой из которых написано одно из чисел 2, 3, 5, 7. Можно ли выложить в ряд

а) 15; б) 16

карточек так, чтобы ни одно из произведений нескольких подряд идущих чисел не было полным квадратом?

в) Какое наибольшее количество карточек, на которых написано одно из первых n простых чисел, можно выложить в ряд так, чтобы выполнялось это условие?

2-55. Во всех целочисленных точках $(x; y)$ координатной плоскости Oxy растут деревья. Какой наибольшей ширины дорогу можно провести в этом лесу, не задевая деревьев, если ее края должны быть прямыми, параллельными прямой

а) $3y = 5x$; б) $ax = by$,

где a и b – заданные натуральные числа? (Толщиной стволов пренебрегаем.)

2-56. а) Найдите четыре тройки $(x; y; z)$ взаимно простых чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 = z^2$.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких троек.

2-57. Натуральное число $n \geq 7$ обладает тем свойством, что все натуральные числа, меньшие n и взаимно простые с ним, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что число n – или степень двойки, или простое.

2-58. а) Найдите двузначное число, если известно, что две последние цифры его квадрата совпадают с этим числом.

б) Докажите, что для всякого n существует n-значное число, совпадающее с последними n цифрами своего квадрата (n-значное число может начинаться с нуля).

2-59. а) Найдите десять троек $(x; y; z)$ натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких троек.

2-60. Докажите, что число $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{1987}$ можно представить в виде $a\sqrt{3} - b\sqrt{2}$, где a и b – такие целые числа, что $3a^2 - 2b^2 = 1$.

2-61. Рассмотрим множество M натуральных чисел, представимых в виде $x^2 + xy + y^2$, где x и y – некоторые целые числа.

а) Докажите, что произведение двух чисел из M также принадлежит M.

б) Назовем *базисным* число из M, большее 1, которое не делится ни на одно из чисел множества M, кроме себя. Существует ли число из M, которое можно двумя разными способами представить в виде произведения базисных?

2-62. Найдите пять троек натуральных чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющих уравнению $x!\,y! = z!$ ($n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n).

§ 3. ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

3-1. Разделите данный отрезок AB на четыре равные части с помощью циркуля и линейки, проведя всего 6 линий (прямых и окружностей).

3-2. На плоскости даны две точки A и B. Одним циркулем (без линейки) постройте середину отрезка AB.

3-3. Постройте циркулем и линейкой треугольник по двум данным сторонам a и b ($b > a$), если известно, что угол против одной из них в 3 раза больше угла против другой.

3-4. Постройте циркулем и линейкой окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и данной окружности.

3-5. Постройте циркулем и линейкой окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых l и m и данной окружности радиуса r, расположенной между l и m.

3-6. Внутри данного острого угла AOB дана точка F. Постройте с помощью циркуля и линейки точку M на стороне OA, одинаково удаленную от точки F и другой стороны угла, OB.

3-7. На плоскости задан отрезок длины 1. Постройте циркулем и линейкой отрезок длины $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

3-8. Дана линейка с делениями через 1 см. Постройте только с помощью этой линейки какую-нибудь прямую, перпендикулярную данной прямой.

3-9. Дан параллелограмм $OBCA$. Проведена прямая, которая отсекает от стороны OB одну треть, от стороны OA – одну четверть, считая от вершины O. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали OC?

3-10. Даны две параллельные прямые, и на одной из них отмечены две точки, A и B. Разделите отрезок AB на 3 равные части, используя только линейку.

3-11. Дан выпуклый четырехугольник. Проведем две прямые, которые делят две его противоположные стороны на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.

3-12. Точки A, B, C являются вершинами неравнобедренного треугольника. Сколькими способами можно поставить на плоскости точку D так, чтобы множество точек (A, B, C, D) имело ось симметрии?

3-13. Из произвольной точки M внутри данного острого угла A опустим перпендикуляры MP и MQ на его стороны. Из вершины A опустим перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

3-14. Постройте с помощью циркуля и линейки правильный десятиугольник.

3-15. Начертите окружность и разбейте ее на 12 равных частей. Выберите одну из точек деления A и соедините ее прямыми с остальными точками деления, а также проведите касательную к окружности в точке A. В результате у вас получится пучок из 12 прямых, проходящих через точку A.

а) Докажите, что построенные прямые делят плоскость на 24 равных угла.

б) Выберите на окружности еще одну точку деления B и постройте из нее такой же пучок из 12 прямых, как из точки A. Докажите, что все 110 точек пересечения 23 построенных прямых (не считая точек A и B) лежат на 11 окружностях – по 10 точек на каждой окружности.

3-16. Из угла прямоугольного бильярда размерами $m \times n$ (где m, n – натуральные числа) катится шар под углом в $30°$ к стенке бильярда. Докажите, что шар никогда не попадет в угол. (Разумеется, шар считается точкой.)

3-17. Четыре точки расположены на плоскости. Могут ли:

а) попарные расстояния между ними равняться соответственно 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 5 см и 6 см;

б) пять попарных расстояний между ними равняться 1 см, а шестое – 1,8 см?

3-18. На сколько частей могут делить плоскость четыре прямые?

3-19. На сколько частей делят пространство:

а) четыре;

б) пять плоскостей, проходящих через одну точку (никакие три плоскости не имеют общей прямой)?

3-20. Дан выпуклый четырехгранный угол. Постройте такое его сечение плоскостью, чтобы в сечении получился параллелограмм.

3-21. Докажите, что любую треугольную призму с достаточно большой высотой можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник.

3-22. Андрей разрезал выпуклый картонный многогранник по ребрам и послал получившийся набор граней по почте Коле. Коля склеил из всех этих граней тоже выпуклый многогранник.

Может ли случиться так, что многогранники Андрея и Коли неодинаковы?

3-23. Существует ли выпуклый девятигранник, у которого все девять граней – четырехугольники?

3-24. Дано, что разверткой некоторой пирамиды служит остроугольный треугольник, в котором проведены три средние линии. Докажите, что существует прямоугольный параллелепипед, четыре несмежные вершины которого являются вершинами этой пирамиды.

3-25. Дан трехгранный угол с вершиной O и двугранными углами, равными α, β и γ. Из вершины O к каждой грани проведен перпендикулярный ей луч, направленный во внешнюю сторону (т.е. так, что этот луч и трехгранный угол лежат по разные стороны от плоскости грани). Найдите плоские углы трехгранного угла, образованного построенными лучами.

Обсуждение задач

Задача **3-1.** Проведем две окружности радиуса AB с центрами в точках A и B. Через точки пересечения этих окружностей проведем прямую, которая пересекает отрезок AB в точке C. Проведем теперь окружность с центром в точке C радиусом AB. Эта окружность пересечет каждую из проведенных окружностей в двух точках. И, наконец, проведем через эти две пары точек две прямые – см. рисунок 13.

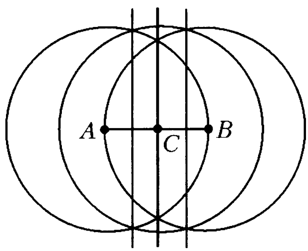


Рис. 13

Таким образом, мы провели 6 линий: три окружности и три прямые. Докажем, что три проведенные прямые делят отрезок AB на четыре равные части.

Как известно, геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка, является серединный перпендикуляр этого отрезка – прямая, проведенная через середину данного отрезка перпендикулярно к нему.

Две точки пересечения двух первых построенных окружностей находятся на одинаковом расстоянии AB от точек A и B, поэтому прямая, проходящая через них, является серединным перпендикуляром отрезка AB и делит его на две равные части в точке C.

Аналогично точки пересечения третьей окружности с одной из первых двух находятся на одинаковом расстоянии AB и от середины C отрезка AB, и от конца этого отрезка, поэтому прямая, проходящая через эти точки пересечения, делит половину отрезка AB еще раз пополам.

∇ Провести *построение с помощью циркуля и линейки* – это значит свести решение задачи к выполнению некоторой последовательности следующих операций.

I. Через две данные точки провести прямую. II. Из данного центра провести окружность данного радиуса. III. Найти точки пересечения: а) двух прямых; б) прямой и окружности; в) двух окружностей.

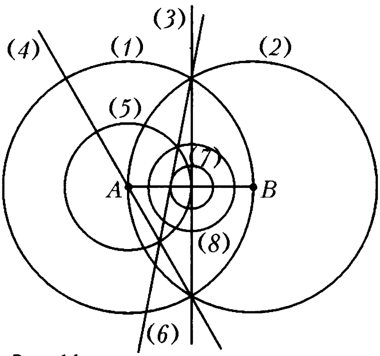


Рис. 14

В нашей задаче последовательность этих операций такова: II, II, III в), I, III а), II, III в), III в), I, I, III а), III а). При этом выполнено условие задачи: количество операций I и II равно шести.

Попробуйте придумать способы деления отрезка на 3 или на 5 равных частей так, чтобы количество операций I и II было как можно меньше. На рисунке 14 изображен способ деления отрезка на 6 равных частей, при котором количество операций I и II равно 8.

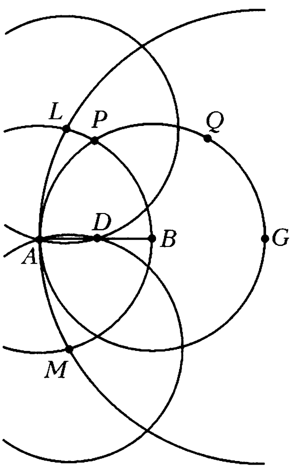


Рис. 15

Задача **3-2.** Сначала удвоим отрезок AB, т.е. построим такую точку C на прямой AB, что $AB = BC$. Для этого проведем окружность с центром B и радиусом $r = BA$. Затем, начиная от точки A, отметим на этой окружности последовательно такие точки P, Q, C, что $AP = PQ = QC = r$ – см. рисунок 15. Треугольники ABP, PBQ и QBC – равносторонние, поэтому угол ABC равен $180°$. Следовательно, точка C лежит на прямой AB и $AB = BC$.

Теперь, отправляясь от точек A, B и C, найдем середину отрезка AB. Проведем окружность с центром в точке C и радиусом $CA = 2r$ (см. рис.15). Отметим точки L, M ее пересечения с окружностью с центром A и радиусом $r = AB$. Далее, проведем две окружности с центрами L и M и радиусом $r = AB$. Эти окружности пересекаются в точке A и еще в одной точке D.

Докажем, что D – середина отрезка AB. В самом деле, точки L и M симметричны относительно прямой AC, а точка D равноудалена от точек L и M, т.е. лежит на прямой AC. Рассмотрим теперь два равнобедренных треугольника ALD и CAL. Они подобны друг другу, ведь у них при основаниях общий угол. A. Запишем пропорцию: $AD : AL = AL : CA$ или $AD : r = r : 2r$. Отсюда получаем, что $2AD = r = AB$.

∇ В начале решения задачи 3-2 мы удвоили отрезок AB (построили точку C), проведя четыре окружности. Это построение можно сделать экономнее – проведя три окружности – см. рисунок 16,*а*.

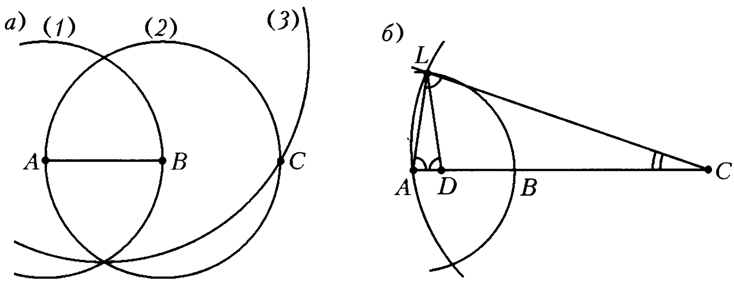


Рис. 16

Задачу 3-2 можно обобщить: указать способ деления данного отрезка с помощью циркуля на n равных частей. Точно так же строится отрезок $AC = nAB$, затем аналогично, по точкам A, B и C строится точка D – см. рисунок 16,*б*. Из подобия равнобедренных треугольников ALD и ACL следует, что $DA \cdot CA = r^2$ (в нашем случае $CA = nr$ и $DA = r/n$).

С этим построением связано преобразование плоскости, называемое инверсией относительно окружности с центром A и радиусом $r = AB$. Образ точки P при этом преобразовании определяется как точка P', лежащая на луче AP, для которой $AP' \cdot AP = r^2$. В задаче 3-2 мы фактически строили точку D, которая являлась образом точки C при инверсии.

Преобразование инверсии обладает замечательным свойством: оно переводит прямые и окружности снова в окружности и прямые.

Используя инверсию, можно показать, что операции III а) и III б) (нахождение точек пересечения двух прямых и прямой с окружностью), о которых шла речь в комментарии к предыдущей задаче, можно выполнить одним циркулем. Отсюда можно вывести, что *всякая задача на построение, решаемая с помощью циркуля и линейки, может быть* *решена с помощью одного циркуля* **(теорема Маскерони)**. (При этом, конечно, мы не можем без линейки выполнить операцию I – провести через две данные точки прямую. Вместо этого нужно условиться, что прямая определена, если заданы две ее точки.) (См. [45, 98].)

Задача **3-3.** Предположим, что треугольник ABC построен, $\angle B = 3\angle A$ (рис.17). Проведем из точки B до прямой AC отрезок BE такой, что $\angle ABE = \angle BAC$. Тогда треугольник ABE будет равнобедренным, поэтому $AE = BE$. Треугольник BCE также будет равнобедренным, поскольку каждый из углов BEC и CBE равен $2\angle BAC$ (угол BEC – внешний угол треугольника AEB); поэтому $BC = CE = a$. Следовательно, $AE = EB = b - a$, так как вся сторона AC равна b.

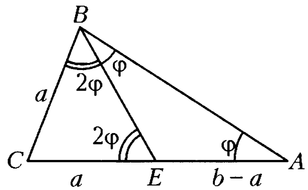


Рис. 17

В треугольнике BCE нам известны длины всех трех сторон, поэтому его можно построить циркулем и линейкой. После этого на продолжении стороны CE откладываем циркулем отрезок $EA = b - a$. Треугольник ABC – искомый.

Действительно, у него, очевидно, $BC = a$ и $AC = b$. Докажем, что угол ABC втрое больше угла BAC. Треугольник BAE – равнобедренный: $AE = EB = b - a$, поэтому $\angle BAE = \angle ABE$. Далее, угол BEC как внешний угол треугольника AEB вдвое больше угла BAC. Поскольку треугольник BCE – равнобедренный ($BC = CE$), угол CBE также вдвое больше угла BAC, Поэтому $\angle ABC = 3\angle BAC$, что и требовалось доказать.

Задача имеет решение, когда из отрезков a, a и $b - a$ можно построить треугольник, т.е. когда $3a > b > a$. При этом условии решение единственно.

∇ Написанный выше текст решения состоит из четырех абзацев. Их можно озаглавить так: (1) *анализ*, (2) *построение*, (3) *доказательство*, (4) *исследование*. Обычно так оформляются решения задач на построение.

Задача **3-4.** Геометрическое место центров окружностей данного радиуса r, касающихся данной прямой, есть пара прямых l_1 и l_2, параллельных этой прямой, проходящих на расстоянии r от нее.

Пусть O – центр данной окружности, R – ее радиус. Геометрическое место центров окружностей радиуса r, касающихся данной окружности, представляет собой: 1) две окружности радиусов $R + r$ и $R - r$ с тем же центром O, если $R > r$;

2) окружность радиуса $R + r$ с центром в точке O и саму точку O, если $R = r$; 3) окружность радиуса $R +- r$ с центром в точке O, если $R < r$.

Центр искомого круга принадлежит пересечению этих двух геометрических мест. Так как пересечение двух параллельных прямых с двумя окружностями может, самое большее, состоять из 8 точек, то число решений задачи 3-4 может колебаться от 0 до 8 (проверьте, что все эти случаи возможны).

∇ Задача 3-4 решена нами *методом геометрических мест.*

Он заключается в следующем. Пусть точка X, которую требуется построить, определяется двумя условиями, вытекающими из требования задачи. Находится сначала геометрическое место точек, удовлетворяющих только одному из условий. Затем находится геометрическое место точек, удовлетворяющих только второму условию. Общие точки этих двух множеств удовлетворяют обоим условиям – это и есть искомые точки X.

Задача 3-4 сводится к построению центра X окружности. Мы выделили два условия: 1) X находится на расстоянии r от данной окружности и 2) X находится на расстоянии r от данной прямой. Найдя геометрические места точек, удовлетворяющих каждому из этих условий, мы определили возможные положения точки X.

Задача **3-5.** Поскольку искомая окружность должна касаться параллельных прямых l и m, ее центр K находится на прямой, параллельной этим прямым и идущей посередине между ними. Радиус R этой окружности равен, тем самым, половине расстояния между прямыми l и m. С другой стороны, искомая окружность должна касаться данной окружности и, значит, ее центр K должен находиться на расстоянии $R + r$ или $R - r$ (если $R \geq r$) от точки O. Таким образом, точка K должна находиться на одной из окружностей с центром O и радиусами $R + r$ и $R - r$.

Построение можно провести так. Построить прямую, идущую посередине между l и m, и затем построить две окружности с центром O и радиусами $R + r$ и $R - r$ (если $R > r$). Точка K будет одной из точек пересечения прямой с окружностями.

∇ Эта задача тесно связана со знаменитой **задачей Аполлония** (около 200 г. до нашей эры): *даны три окружности, требуется провести четвертую, касающуюся трех данных.* Оказывается, эту трудную задачу можно с помощью преобразования инверсии свести к задаче 3-5.

Для определенности будем считать, что данные окружности расположены вне друг друга. Если увеличить их радиусы на одну и ту же величину, то центр касающейся их окружности останется на месте. Увеличим радиусы настолько, чтобы две из данных окружностей коснулись друг друга. После этого произведем инверсию всей плоскости (см. комментарий к задаче 3-2) относительно какой-нибудь окружности с центром в точке касания двух данных окружностей. Эти окружности перейдут при этом в две параллельные прямые, а третья – в окружность.

Решив задачу 3-5 для этих прямых и окружности, построив образ точки K при обратной инверсии и проведя «сжатие» окружностей, мы получим искомую окружность в задаче Аполлония.

Задача **3-6.** Проведем прямую OF и отметим какую-нибудь точку N на луче OA. Опустим перпендикуляр NK из точки N на прямую OB. Проведем окружность с центром N и радиусом NK. Пусть L – одна из точек пересечения этой окружности с лучом OF. Через точку F проведем прямую, параллельную NL. Точка M пересечения этой прямой с лучом OA и будет искомой – см. рисунок 18.

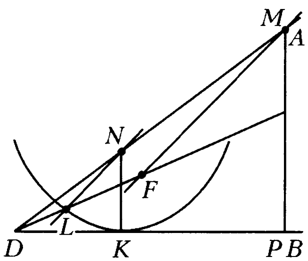


Рис. 18

В самом деле, гомотетия с центром O, переводящая точку L в точку F, переводит, в силу параллельности соответствующих прямых, точку N в точку M, а точку K – в точку P (основание перпендикуляра, опущенного из точки M на OB). Таким образом, из равенства $NK = NL$ следует равенство $MF = MP$.

Задача имеет два решения (в процессе построения окружность с центром N и радиусом NK пересечет луч OA в двух точках).

∇ Задача 3-6 решена нами *методом подобия*. Он заключается, вообще говоря, в следующем. Сначала строится фигура, подобная искомой, а затем она увеличивается (или уменьшается) в нужном отношении.

В задаче 3-6 мы сначала построили ломаную KNL, для которой выполнено условие задачи, а затем построили подобную ей ломаную PMF, проходящую через точку F.

Попробуем к решению задачи 3-6 применить метод геометрических мест (см. комментарий к задаче 3-4). Оказывается, что геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки F и от данной прямой OB, представляет собой параболу.

Для того чтобы убедиться в этом, воспользуемся методом координат. Пусть h – расстояние от точки F до прямой OB. Выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox совпала с прямой OB, а ось Oy прошла через точку F. Тогда точки $(x; y)$, которые равноудалены от точки F и прямой OB, должны удовлетворять уравнению $|y| = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}$. Возводя обе его части в квадрат, получаем уравнение параболы: $y = x^2/2h + h/2$.

Таким образом, искомые точки в задаче 3-6 – это точки пересечения параболы и прямой OA. Всю параболу мы, конечно, не можем построить циркулем и линейкой, но точки ее пересечения с данной прямой, согласно задаче 3-6, построить несложно.

Задача **3-7.** 1) Построим прямой угол и на его сторонах отложим от вершины отрезки длины 1. Отрезок, соединяющий их концы, имеет длину $\sqrt{2}$.

2) Отложим на прямой отрезок AB длины $1+\sqrt{2}$, а затем – отрезок BC длины 1 – см. рисунок 19.

3) Построим на отрезке AC как на диаметре окружность.

4) Проведем через точку B прямую, перпендикулярную диаметру AC.

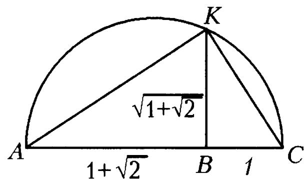


Рис. 19

Пусть K – одна из точек пересечения последней прямой с окружностью. Докажем, что $BK = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Действительно, треугольник AKC – прямоугольный, так как AKC – вписанный в окружность угол, опирающийся на ее диаметр. Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, равен произведению отрезков, на которые эта высота делит гипотенузу, т.е. $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot 1$.

∇ В этой задаче мы показали, как по заданным отрезкам a и b построить отрезки $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{ab}$. Используя теорему о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, можно по заданным отрезкам a, b, c построить отрезок ab/c.

Комбинируя эти построения, можно построить много других отрезков. Например, отрезок длины $\sqrt{ab+cd}$ можно построить так: построить отрезки длин $m = \sqrt{ab}$ и $n = \sqrt{cd}$, а затем – отрезок длины $\sqrt{m^2+n^2}$.

Оказывается, *по данному отрезку длины* 1 *можно построить лишь такие отрезки, длины которых выражаются рациональными* (арифметическими) *операциями и многократным извлечением квадратных корней.*

Для знатоков. Длины всех таких отрезков образуют поле. Разрешимость задачи 3-7 следует из того, что число $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ входит в это поле. Неразрешимость классической задачи об удвоении куба вытекает из того, что число $\sqrt[3]{2}$ не входит в это поле (см. [98]).

Задача **3-8.** Отложим на данной прямой l отрезки OA и OB длины 1 и от той же точки O – еще два отрезка OK и OL длины 1 (точки K и L лежат по одну сторону от прямой; см. рис.20). Пусть C – точка пересечения прямых AK и BL, а H – прямых AL и BK. Тогда прямая CH и будет искомым перпендикуляром к прямой l.

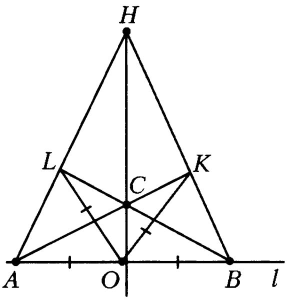


Рис. 20

Для доказательства надо использовать две такие теоремы: 1) если в треугольнике медиана, проведенная к основанию, равна половине его длины, то угол при вершине – прямой; 2) в треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

∇ В задаче 3-8 речь шла о построениях необычным набором инструментов: линейкой и эталоном длины. Как можно убедиться, с их помощью удается решить очень многие стандартные задачи на построение: провести через данную точку прямую, параллельную или перпендикулярную данной, отложить данный отрезок на данной прямой и данный угол в любую сторону от данного луча.

Однако линейкой и эталоном длины можно построить не все, что можно построить циркулем и линейкой. Например, нельзя построить, исходя из отрезка длины 1, отрезок длины $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ (сравните с задачей 3-7); более того, в общем случае нельзя построить даже прямоугольный треугольник по данным катету и гипотенузе.

Оказывается, *исходя из отрезка длины* 1, *можно построить лишь такие отрезки, длины которых выражаются рациональными операциями и извлечением квадратных корней из сумм квадратов длин уже построенных отрезков* (другими словами, выражения для длин должны оставаться вещественными при всевозможных изменениях знака перед всеми радикалами, см. [90]).

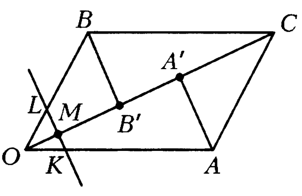


Рис. 21

Задача **3-9.** *Ответ*: $1/7$. Пусть K, L, M – точки пересечения проведенной прямой со сторонами OA,

OB и диагональю OC соответственно – см. рисунок 21. Проделаем следующие построения, которые позволят нам представить все нужные отношения в виде отношений отрезков диагонали OC.

Проведем отрезки BB' и AA', параллельные данной прямой, причем B' и A' – точки на диагонали OC. Тогда треугольники OBB' и CAA' равны (они симметричны относительно центра параллелограмма), поэтому $OB' = CA'$. Из равенств

$$3 = OB : OL = OB' : OM,$$

$$4 = OA : OK = OA' : OM,$$

$$OC = OB' + OA'$$

получаем:

$$OC : OM = 3 + 4 = 7.$$

∇ Аналогично можно показать, что прямая, отсекающая от сторон параллелограмма соответственно $1/\lambda$ и $1\ \mu$, части, отсекает от диагонали $1\ (\lambda + \mu)$ часть.

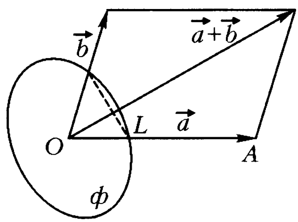


Рис. 22

Опираясь на этот факт, можно доказать важное *неравенство для нормы вектора*, определяемой следующим образом (см. [80]). Пусть Φ – ограниченное замкнутое множество с центром симметрии O (внутренней точкой Φ – см. рис.22). Для каждого вектора $\vec{a} = \overline{OA}$ положим $\|\vec{a}\|$ равным отношению $OA\ OL$, где L – точка пересечения луча OA с границей фигуры Φ. Тогда если Φ выпукло, то выполнено «неравенство треугольника»:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

В частности, если Φ – круг радиуса 1 с центром O на плоскости Oxy, то норма вектора – это обычная длина, а «неравенство треугольника» для векторов $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ выглядит так:

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \le$$

$$\le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

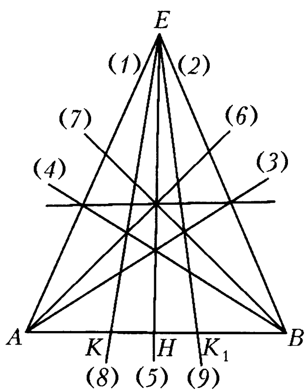


Рис. 23

Задача **3-10.** Достаточно провести (не считая двух данных) 9 прямых (на рис.23 прямые занумерованы в порядке их появления). Докажем, что на этом рисунке

$$AH = BH = AB/2.$$

Отрезок CD можно получить из AB гомотетией с центром E и с центром F; при той и другой гомотетии точка H переходит в G (см. рис.24). Поэтому

$$\frac{CG}{AH} = \frac{EC}{EA} = \frac{CD}{AB} = \frac{FC}{FB} = \frac{CG}{BH},$$

откуда $AH = BH$.

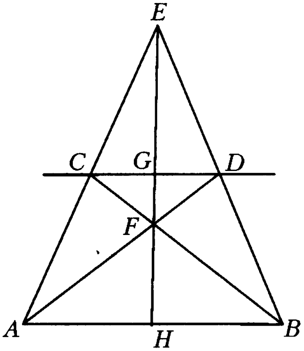


Рис. 24

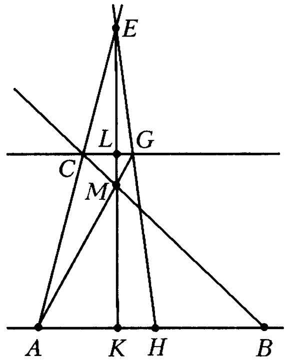


Рис. 25

Отрезок CG можно получить из отрезка AH гомотетией с центром E и из отрезка AB – гомотетией с центром M (рис.25).

При той и другой гомотетии точка L переходит в точку k. Поскольку $2AH = AB$,

$$\frac{CL}{AK} = \frac{EC}{EA} = \frac{CG}{AH} = \frac{2CG}{AB} = \frac{2CM}{MB} = \frac{2CL}{BK},$$

откуда $2AK = BK$, т.е. $AK = AB/3$. Аналогично доказывается, что на рисунке 24 $BK_1 = AB/3$, т.е. $AK = KK_1 = K_1B$.

∇ Действуя таким же образом дальше (проводя прямую AL и через точку N ее пересечения с CB – прямую EN, пересекающую AB и CD, и т.д.), можно отсечь от отрезка AB $1/4$-ю, затем $1/5$-ю и вообще $1/n$-ю часть для любого натурального n.

Отметим еще связь этой задачи, в которой речь идет об отношении отрезков в трапеции, с предыдущей, в которой изучались отношения отрезков в параллелограмме (см. рис.26,*а*). Прямая, проходящая через вершину B' параллелограмма $A'B'C'D'$ и середину H' его стороны $A'D'$, отсекает от его диагонали $A'C'$ отрезок $A'M' = A'C'/3$. Прямая,

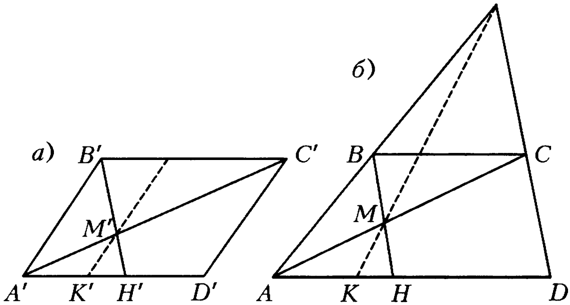


Рис. 26

проходящая через точку M' и параллельная стороне $A'B'$, отсекает от сторон $B'C'$ и $A'D'$ также $1/3$ часть. Рисунки 26,*а* и 26,*б*, как мы видим, очень похожи. Причину аналогии между ними мы обсудим в комментарии к задаче 3-20.

Задача **3-11.** Для решения задачи сделаем дополнительное построение: проведем во всех четырехугольниках диагонали, как показано на рис.27,*а*. Пусть площади крайних из заштрихованных на рисунке 27,*а* треугольников равны x и y соответственно, Тогда площадь среднего равна $(x+y)/2$. Действительно, их

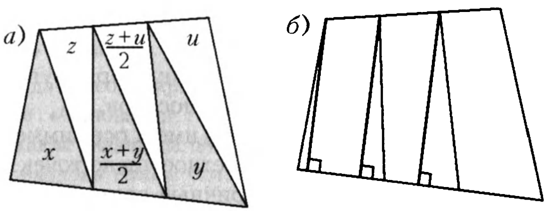


Рис. 27

основания одинаковы, а высота среднего равна полусумме высот крайних (это следует из того, что высота среднего является средней линией трапеции, основаниями которой служат высоты двух крайних треугольников – см. рис.27,*б*).

Такое же рассуждение можно провести и для трех не заштрихованных на рисунке 27,*а* треугольников. Итак, площадь всего четырехугольника равна $3(x+y+z+u)/2$, а площадь заключенной между прямыми части четырехугольника равна $(x+y+z+u)/2$, т.е. в 3 раза меньше.

∇ Верно и более общее утверждение. Если несколько прямых делят каждую из двух противоположных сторон четырехугольника на одинаковые части, то площади четырехугольников, на которые они разбивают

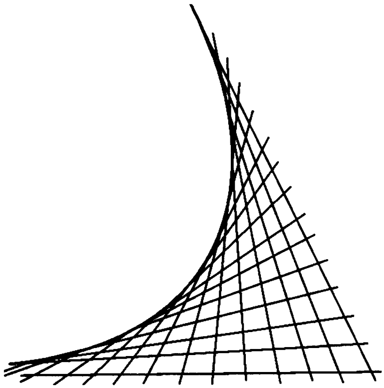


Рис. 28

данный четырехугольник, образуют арифметическую прогрессию. Если же и две другие противоположные стороны данного четырехугольника разбить на одинаковые части и провести соответствующие прямые, так что внутри четырехугольника возникнет сетка из маленьких клеток – см. рисунок 28, – то каждый отрезок с концами на противоположных сторонах четырехугольника разделится точками пересечения на одинаковые части и тем самым площади клеток в каждом ряду одного и другого направлений составят арифметическую прогрессию.

Любопытно, что все проведенные на рисунке прямые касаются некоторой параболы – см. рисунок 28.

Если представить себе, что исходный четырехугольник составлен из шарнирно соединенных стержней, то при его изгибании в пространстве соответствующие прямые будут по-прежнему пересекаться – они лежат на седлообразной поверхности, «сотканной» из двух семейств прямых.

Задача **3-12.** *Ответ*: если треугольник непрямоугольный, то 6 способов, если прямоугольный – 5 способов.

Пусть множество точек $\{A, B, C, D\}$ имеет ось симметрии. Вне оси симметрии может лежать лишь четное число точек, иначе их нельзя разбить на взаимно симметричные пары. Поскольку все 4 точки не могут лежать на оси (точки A, B и C не лежат на одной прямой), то надо рассмотреть два случая.

1) На оси нет точек нашего множества. Тогда ось – серединный перпендикуляр к одной из сторон треугольника ABC, а точка D симметрична противолежащей этой стороне вершине. Таким образом, мы получаем 3 способа поставить точку D – точки D_1, D_2, D_3 на рисунке 29; если $C = 90°$, то серединные перпендикуляры к катетам AC и BC дают нам одну и ту же точку $D_1 = D_2$, так как эти перпендикуляры являются осями симметрии прямоугольника $ACBD$.

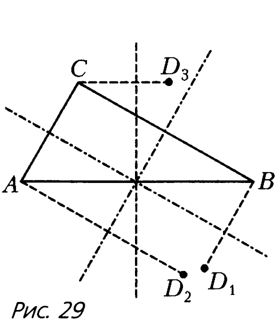


Рис. 29

2) На оси лежат 2 точки. Тогда ось симметрии проходит через две из точек A, B, C, а точка D симметрична третьей из этих точек относительно оси. Так получаем еще 3 способа – см. рисунок 30.

Никакие другие совпадения двух из шести построенных точек, кроме рассмотренного в п.1), для неравнобедренного треугольника невозможны.

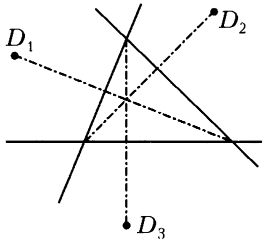


Рис. 30

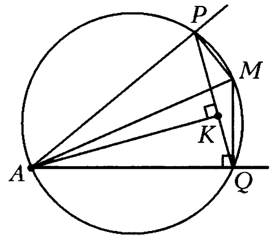


Рис. 31

Задача **3-13.** Построим окружность с диаметром AM (рис.31). Поскольку углы APM и AQM – прямые, точки P и Q лежат на этой окружности; $\angle MAQ = \angle QPM$ (так как это вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Заметим также, что $\angle PAK = \angle QPM$. Действительно, $\angle PAK = 90° - \angle APK$ (AK – перпендикуляр к PQ) и $\angle QPM = 90° - \angle APK$ (MP – перпендикуляр к AP). Отсюда $\angle MAQ = \angle PAK$, что и требовалось доказать.

∇ Эта задача неоднократно использована Д.Гильбертом в его знаменитой книге «Основания геометрии», в частности, для того, чтобы выяснить, какие задачи на построение можно решить лишь с *помощью линейки и эталона длины* (см. обсуждение задачи 3-8 и [90]).

Задача **3-14.** Вычислим сторону правильного десятиугольника по радиусу описанного около него круга. Для этого рассмотрим равнобедренный треугольник AOB, где O – центр правильного десятиугольника, а AB – одна из его сторон (см. рис.32). Тогда $\angle AOB = 36°$ и $\angle OAB = 72°$. Проведем биссектрису AB_1 угла OAB. Так как треугольники OB_1A и B_1AB – равнобедренные, то $AB = AB_1 = OB_1$.

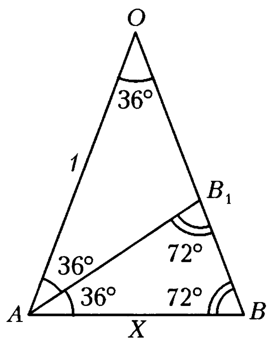


Рис. 32

Пусть $OA = 1$, $AB = x$; из подобия треугольников AOB и B_1AB вытекает пропорция $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{x}$.

Решая полученное уравнение, находим его положительный корень $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Отрезок такой длины мы можем построить (см. задачу 3-7). Далее, проводим окружность радиуса 1 и последовательно откладываем на ней циркулем с раствором $\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$ все вершины правильного десятиугольника одну за другой.

∇ Число $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ часто встречается в разных задачах. Например, $\sin 18^\circ = \frac{x}{2} = \left(\sqrt{5}-1\right)/4$.

Число $\tau = 1/x = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ известно с древних времен – оно соответствует «*золотому сечению*»: если отрезок разделить в этом отношении τ, то отношение отрезка к большей его части будет равно отношению большей части к меньшей. Это число возникает и в связи с числами Фибоначчи (см. задачи 6-11, 6-16 и 6-17),

Для знатоков. Возможность построения правильного n-угольника определяется тем, принадлежит ли число $\sin\frac{180^\circ}{n}$ полю чисел, описанных в комментарии к задаче 3-7. Как показал К.Ф.Гаусс, построить правильный n-угольник можно тогда и только тогда, когда $n = 2^k \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$, где n_i – различные простые числа вида $2^{2^l}+1$.

Условие, выделяющее *такие* числа n, эквивалентно следующему: значение функции Эйлера $\varphi(n)$ (см. комментарий к задаче 2-8) является степенью двойки. В задаче 3-14 $n = 10$, $\sin\frac{180^\circ}{n} = \left(\sqrt{5}-1\right)/4$ и количество $\varphi(10)$ чисел, взаимно простых с числом 10, равно $4 = 2^2$.

Откуда возникает условие $\varphi(n) = 2^k$, можно пояснить примерно так. При построении циркулем и линейкой количество получаемых точек каждый раз, когда мы находим точки пересечения двух окружностей и точки пересечения прямой и окружности, удваивается. Поэтому в результате мы получаем, вообще говоря, 2^l решений. Допустим теперь, что мы нашли некоторый алгоритм построения правильного n-угольника. По этому алгоритму мы можем получить не только этот правильный n-угольник, но также любую из правильных замкнутых n-звенных ломаных – «звездчатых многоугольников» (см. задачу 2-8). Их число равно $\varphi(n)/2$. Тем самым $\varphi(n)$ – степень двойки.

Необходимость и достаточность этого условия доказывается алгебраически (см. [31, 51]).

Задача **3-15.** а) Две соседние прямые проходят через точку A окружности и образуют угол, вписанный в окружность и опирающийся на дугу в $30°$ – см. рисунок 33. Согласно теореме о вписанном угле, этот угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, т.е. $15°$, что и доказывает требуемое утверждение.

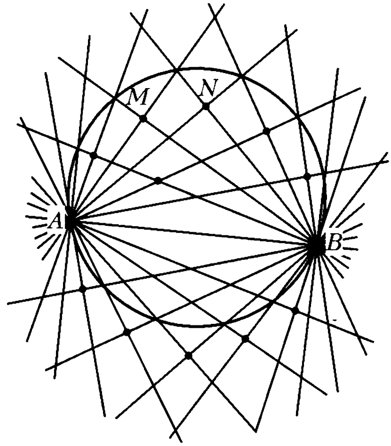


Рис. 33

б) Рассмотрим точку M пересечения какой-нибудь прямой первого пучка с какой-нибудь прямой второго пучка. Проведем через эту точку, а также через точки A и B окружность (на рис.33 она показана черными точками). Рассмотрим теперь точку N пересечения прямых, соседних со взятыми прямыми (например, по часовой стрелке). Тогда углы AMB и ANB равны, поскольку суммы углов при вершинах A и B треугольников AMB и ANB одинаковы (угол MAB на $15°$ больше угла NAB, а угол NBA на $15°$ больше угла MBA).

Поскольку углы AMB и ANB равны, точки A, M, N и B лежат на одной окружности.

∇ Факт, установленный в задаче 3-15 б), хорошо объясняется на языке «движений». Если прямая вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг точки A окружности, то, согласно теореме о вписанном угле, другая ее точка пересечения с окружностью равномерно движется по окружности с угловой скоростью 2ω.

Если две пересекающиеся прямые l_A и l_B вращаются в плоскости вокруг двух своих точек A и B с одинаковой угловой скоростью ω, то траектория точки пересечения этих прямых – окружность. В самом деле, построим окружность γ, проходящую через три точки: A, B и точку M пересечения прямых в какой-нибудь момент времени. С одной стороны, точка пересечения прямой l_A с окружностью γ движется по окружности γ равномерно с угловой скоростью 2ω, а с другой стороны, точно так же движется и точка пересечения прямой l_B с той же окружностью γ. Но так как в какой-то момент времени точки пересечения прямых l_A и l_B с окружностью γ находились в одной точке окружности γ, то и все остальное время вращения прямых точки их пересечения будут находиться на этой окружности.

Для знатоков. 23 проведенные прямые образуют сетку. Если раскрасить клетки этой сетки в шахматном порядке, то мы увидим семейство окружностей, проходящих через точки A и B, и семейство гипербол (картинка получится нагляднее, если в точках A и B взять пучки не из 12, а из 24 прямых).

Гиперболы здесь возникают в связи со следующим обстоятельством. Если прямые l_A и l_B вращаются вокруг своих точек A и B, одна с угловой скоростью ω, а другая – с угловой скоростью $(-\omega)$ (в разные стороны), то точка их пересечения движется по гиперболе.

В самом деле, найдется момент времени, когда рассматриваемые прямые l_A и l_B параллельны. Выберем систему координат с центром в середине отрезка AB, а ось Ox направим параллельно прямым l_A и l_B.

Пусть координаты точки A равны $(a; b)$, тогда координаты точки B равны $(-a; -b)$. В момент времени t уравнения прямых можно записать так:

$$x\sin\omega t - y\cos\omega t = a\sin\omega t - b\cos\omega t\ ,$$

$$x\sin\omega t + y\cos\omega t = -a\sin\omega t - b\cos\omega t\ .$$

Координаты точки их пересечения равны

$$x = -b\operatorname{ctg}\omega t\ ,$$

$$y = -a\operatorname{tg}\omega t\ .$$

Следовательно, $xy = ab$, т.е. точки пересечения прямых лежат на гиперболе (см. [16]).

Задача **3-16.** Будем отражать от стенок не шар, а сам прямоугольник – бильярд. После всевозможных многократных отражений прямоугольника относительно сторон (удобнее всего это делать на клетчатой бумаге) мы получим сетку из прямых, разбивающую плоскость на прямоугольники $m \times n$. Чтобы построить траекторию шара в бильярде, можно провести прямую из начальной точки O под углом в $30°$ к одной из сторон, посмотреть, какие прямоугольники сетки она пересекает, и сложить их «гармошкой» – рисунок 34.

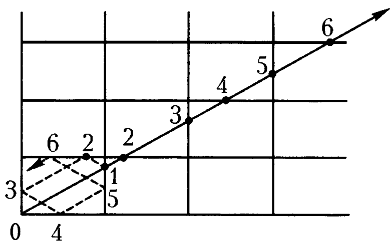


Рис. 34

Докажем теперь, что прямая, проведенная через узел O сетки под углом в $30°$ к стенке бильярда, не проходит через другие узлы. Отсюда будет следовать утверждение задачи.

Если бы шар прошел через какой-то другой узел, то получился бы прямоугольный треугольник с углом $30°$, длины катетов которого – целые числа. Но $\operatorname{tg} 30° = 1/\sqrt{3}$ (число иррациональное) не может равняться отношению двух целых чисел.

Для знатоков. Траектория шара в задаче 3-16 будет всюду плотно «заметать» бильярд, хотя ее направление всегда будет составлять угол $30°$ с одной из сторон. Если бильярд имеет форму окружности или эллипса, то траектория шара уже не будет всюду плотной – остаются области, куда она не заходит. Вообще, поведение типичной траектории шара в бильярде на плоскости или в многомерном пространстве сильно зависит от формы бильярда. Для бильярдов, все борта которых обращены выпуклостью внутрь, доказана *эргодичность*: типичная траектория шара всюду плотна в фазовом пространстве, она проходит сколь угодно близко от любой точки бильярда, причем в различных направлениях. Именно к таким задачам о рассеивающих бильярдах сводятся некоторые математические модели газа из твердых сталкивающихся «атомов». Выпуклые бильярды, в частности бильярды с прямыми стенками, этим свойством уже, как правило, не обладают, и описать траектории в таких бильярдах удалось лишь в частных случаях (см. [110, 111]).

Задача **3-17.** а) *Ответ*: могут. Пример приведен на рисунке 35.

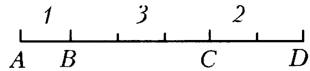


Рис. 35

б) *Ответ*: не могут.

Рассмотрим три точки, все попарные расстояния между которыми равны 1 см. Они образуют правильный треугольник с длиной стороны 1 см. Расстояния от четвертой точки до каких-то двух из них равны 1 см, поэтому четвертая точка с этими двумя также образует правильный треугольник. Поэтому все четыре точки должны образовать ромб с длиной стороны 1 см – см. рисунок 36. Но тогда шестое расстояние – длина большей диагонали этого ромба, которая равна $\sqrt{3}$ см, а $1{,}8 \neq \sqrt{3}$.

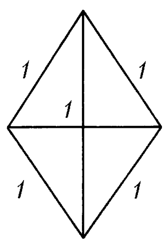


Рис. 36

∇ Обобщим эту задачу следующим образом.

При каких значениях α существуют четыре точки: а) на плоскости; б) в пространстве, попарные расстояния между которыми равны 1, 1, 1, 1, 1, α?

Из решения задачи-3-17 ясно, что ответ на вопрос а) такой: только при $\alpha = \sqrt{3}$. Из того же решения следует ответ на вопрос б): при $0 < \alpha \leq \sqrt{3}$. В самом деле, перегибая в пространстве ромб вдоль его меньшей диагонали, мы убеждаемся, что расстояние между его противоположными вершинами может изменяться от $\sqrt{3}$ до 0.

Для знатоков. Сделаем еще одно наблюдение: при $\sqrt{3} < \alpha \le 2$ для любых трех из данных четырех точек выполняются неравенства треугольника (длина большей стороны не превосходит суммы длин двух других), однако в пространстве (и даже в n-мерном евклидовом пространстве) не существует четырех точек с такими попарными расстояниями.

Можно поставить более общий вопрос: можно ли расположить а) на плоскости; б) в пространстве четыре точки 1, 2, 3, 4 так, чтобы попарные расстояния между ними были равны данным числам $r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}$ (r_{ij} – расстояние между точками j и i)? Безусловно, все числа r_{ij} должны быть неотрицательными и удовлетворять неравенствам треугольника $r_{ij} + r_{jk} \ge r_{ik}$. Но этого мало. Для утвердительного ответа на вопрос б) необходимо и достаточно, чтобы еще был неотрицательным определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 & 1 \\ r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

а для возможности расположения на плоскости (вопрос а)) нужно, чтобы определитель Δ_4 равнялся 0.

Если четыре точки 1, 2, 3, 4 размещены в пространстве, то $\Delta_4 = 2^3 (3!)^2 V^2 = 288V^2$, где V – объем тетраэдра с вершинами в этих точках. Отсюда ясно, что условие $\Delta_4 \ge 0$ необходимо для возможности размещения точек в пространстве.

Объясним, почему условия $r_{ij} \ge 0$, $r_{ij} + r_{jk} \ge r_{ik}$, $\Delta_4 \ge 0$ достаточны для этого. Если зафиксировать все расстояния, кроме r_{34}, то треугольники 123 и 124 можно вращать вокруг общего ребра 12 (двугранный угол φ между ними меняется от $0°$ до $180°$). Тогда Δ_4 как функция от $x = r_{34}^2$ будет квадратным трехчленом с отрицательным старшим коэффициентом. Его корни соответствуют тем значениям x, при которых треугольники лежат в одной плоскости ($\varphi = 0°$ и $\varphi = 180°$). Когда φ меняется от $0°$ до $180°$, величина x пробегает все значения между корнями, т.е. все значения, для которых $\Delta_4(x) \ge 0$.

Заметим, кстати, что аналогичным образом с помощью определителя можно записать и формулу Герона для площади S треугольника со сторонами r_{12}, r_{13}, r_{23}:

$$S^2 = \Delta_3 \Big/ \left(2^2 (2!)^2\right) = \Delta_3/16,$$

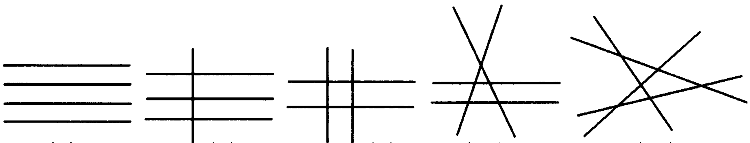
где

$$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2r_{13}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}^2 r_{13}^2 - r_{12}^4 - r_{13}^4 - r_{23}^4$$

(см. [83, 86]).

Задача **3-18.** *Ответ*: 5, 8, 9, 10 или 11.

На рисунке 37 показаны примеры деления на 5, 8, 9, 10, 11 частей. Докажем, что не может быть иного числа частей.



(5) (8) (9) (10) (11)

Рис. 37

Если все прямые параллельны друг другу, то частей пять. Пусть не все прямые параллельны. Рассмотрим пару пересекающихся прямых – они делят плоскость на 4 угла. Каждая из вновь проведенных прямых пересекает не менее двух частей, на которые делят плоскость уже проведенные прямые, и делит каждую из этих частей на две. Поэтому каждая следующая прямая добавляет не менее двух новых частей. В частности, четыре прямые, среди которых есть непараллельные, делят плоскость не менее чем на $4 + 2 \cdot 2 = 8$ частей.

Теперь докажем, что частей не больше одиннадцати. Будем проводить прямые по очереди. Первые две прямые делят плоскость не более чем на четыре части. Третья прямая имеет не более чем две точки пересечения с прежними прямыми, делится ими не более чем на три части, и потому число частей увеличивается не более чем на три.

Четвертая прямая делится точками пересечения с предыдущими не более чем на четыре части и потому добавляет не более четырех новых частей.

Всего получается не более чем 4 + 3 + 4 = 11 частей.

∇ Эта задача естественно обобщается: на сколько частей могут делить плоскость n различных прямых?

Рассуждая подобно тому, как мы это делали выше, можно доказать, что число частей либо равно $(n+1)$, либо заключено в промежутке от $2n$ до $(n^2+n+2)/2$. Но, оказывается, не любое число частей в этом промежутке может быть реализовано. Например, 5 прямых не могут делить плоскость на $2 \cdot 5 + 1 = 11$ частей и, вообще, n прямых при $n \geq 5$ не могут делить плоскость на $(2n + 1)$ частей. Интересно было бы найти, какие числа из промежутка от $2n$ до $\left(n^2 + n + 2\right)/2$ могут реализоваться для n прямых.

Интересен также вопрос о том, на какие именно области разбивают плоскость n прямых общего положения (никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Для $n = 4$ расположение прямых общего положения всегда будет таким, как на рисунке 37, т.е. среди трех конечных областей всегда один четырехугольник, два треугольника, среди восьми бесконечных – три угла, четыре «бесконечных» треугольника и один «бесконечный» четырехугольник. Для $n \geq 5$ возможны уже различные (по количеству треугольников и других областей) случаи.

Задача об оценке максимального числа треугольников в разбиении плоскости n прямыми, по существу, эквивалентна такой задаче В.И.Арнольда: пусть все $a_n = \left(n^2 + n + 2\right)/2$ области разбиения раскрашены двумя красками – черной и белой – так, что соседние области (граничащие по отрезку прямой или лучу) окрашены в разные цвета, причем количество черных областей равно b_n. Какое наибольшее значение может принимать отношение b_n/a_n ?

Можно доказать (пользуясь, например, теоремой Эйлера – см. задачу 5-15), что $b_n \; a_n \leq 2 \; 3$ (при любом n), причем в разбиении с наибольшим числом черных областей все (или почти все) они должны быть треугольниками.

Интересные факты содержатся в статье [127]. См. также [128], [129].

Задача **3-19.** *Ответ*: 4 плоскости делят пространство на 14 частей, 5 плоскостей – на 22 части.

Докажем это. Три плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ делят пространство на 8 частей. Когда мы проводим четвертую плоскость α_4, она пересекается с тремя предыдущими по трем прямым, проходящим через их общую точку. Эти прямые делят плоскость α_4 на 6 углов. Следовательно, из тех 8 частей, на которые пространство разбивалось плоскостями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, четвертая плоскость α_4 пересекает 6 частей и делит каждую из них на 2 части. Таким образом, добавляется еще 6 частей, всего их становится 8 + 6 = = 14.

Точно так же пятая плоскость, пересекаясь с предыдущими по четырем прямым, добавляет $4 \cdot 2 = 8$ частей, и их становится 14 + 8 = 22.

∇ В общем случае для n плоскостей доказательство можно проводить аналогично: 6-я, 7-я, ..., n-я плоскости добавляют соответственно $2\cdot 5, 2\cdot 6, \ldots, 2(n-1)$ новых частей, и всего их становится (удобно записать сумму с самого первого члена)

$$2+2\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+2(n-1).$$

Чтобы найти эту сумму, удобно складывать числа парами с разных концов:

$$2+(1+(n-1))+(2+(n-2))+\ldots+((n-1)+1)=$$
$$=2+(n-1)n=n^2-n+2.$$

Задачу 3-19 можно свести к плоской задаче 3-18 следующим образом: проведем вблизи одной из n плоскостей по одну и другую сторону параллельные ей плоскости. Тогда каждая из них будет разбита $(n-1)$ прямыми пересечения с остальными $(n-1)$ из данных плоскостей на $(1/2)\left((n-1)^2+(n-1)+2\right)=\dfrac{n^2-n+2}{2}$ частей (см. обсуждение задачи 3-18), и эти n^2-n+2 частей ровно по одной лежат в различных областях пространства.

Описание разбиений пространства n плоскостями, проходящими через одну точку O, очевидно, эквивалентно описанию разбиений сферы с центром O большими кругами. Например, 5 больших кругов общего положения всегда делят сферу на 10 треугольников, 10 четырехугольников и 2 пятиугольника.

При $n \geq 6$ возможны (как в предыдущей задаче 3-18 для $n \geq 5$) различные типы разбиений (см. [130], [131]).

Задача **3-20.** Найдем прямые пересечения плоскостей противоположных граней данного четырехгранного угла. Через эти две прямые проведем плоскость α. Затем проведем параллельную ей плоскость β, пересекающую все четыре ребра.

Докажем, что в сечении получится параллелограмм. Плоскость β параллельна прямой пересечения плоскостей двух противоположных граней, и, следовательно, она пересекает их по параллельным прямым. Таким образом, в сечении получился четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, т.е. параллелограмм.

∇ Покажем теперь, как с помощью нашей конструкции можно связать две задачи 3-9 и 3-10 – см. рисунки 26, 38.

Рассмотрим четырехугольную пирамиду, основание которой является трапецией. Проведем сечение этой пирамиды плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм. Две противоположные стороны этого параллелограмма будут параллельны основаниям трапеции.

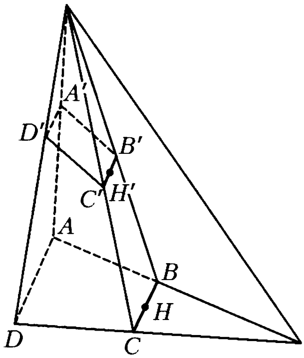


Рис. 38

При *центральном проектировании* (с центром в вершине четырехгранного угла) параллелограмм переходит в трапецию, а отношение отрезков на параллельных прямых сохраняется.

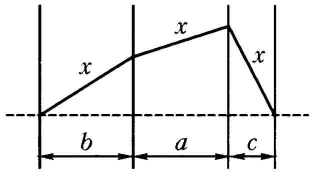


Рис. 39

Задача **3-21.** Рассмотрим развертку боковой поверхности призмы – см. рисунок 39. Существование нужного сечения эквивалентно существованию ломаной с вершинами на четырех параллельных прямых развертки, такой что все три ее звена имеют одинаковую длину x, а концы лежат на прямой, перпендикулярной этим параллельным прямым. Таким образом, достаточно доказать, что уравнение

$$\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}=\sqrt{x^2-c^2} \qquad (1)$$

имеет решение при $a \ge b \ge c > 0$, $a < b + c$.

Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = \sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}-\sqrt{x^2-c^2}\ .$$

Эта функция определена при $x^2 \ge a^2$ и непрерывна. Заметим, что $f(a)=\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-c^2} \le 0$, так как $b \ge c$, а

$$f\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)=b+a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}>0\,.$$

Если значения непрерывной функции на концах отрезка имеют разные знаки, то в некоторой точке внутри отрезка функция обращается в нуль. В нашем случае эти условия выполнены на отрезке $\left[a; \sqrt{a^2+b^2}\right]$. Поэтому в некоторой точке x_0 внутри этого отрезка функция f обращается в нуль: $f(x_0)=0$, и тем самым уравнение имеет решение.

∇ Решив уравнение (1), мы найдем формулу, с помощью которой ломаную можно построить циркулем и линейкой.

Задача **3-22.** *Ответ*: может.

Построим пример. Рассмотрим треугольную пирамиду, в основании которой – правильный треугольник, двугранные углы при основании острые, а боковые ребра различны. Из двух экземпляров такой пирамиды, склеив их по общему основанию, можно изготовить шестигранник (бипирамиду) тремя разными

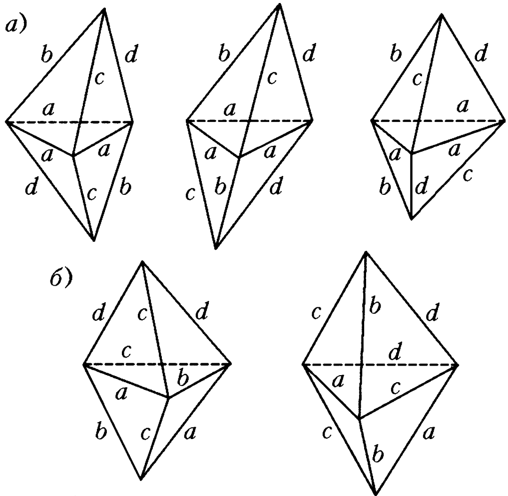


Рис. 40

способами – см. рисунок 40,*а*. Все они имеют одинаковый набор граней, но не равны друг другу. Еще один пример см. на рисунке 40,*б*.

∇ Если бы Андрей занумеровал все ребра и на каждой грани написал рядом с ребрами их номера, то Коля склеил бы точно такой же выпуклый многогранник: *если грани одного выпуклого многогранника соответственно равны граням другого выпуклого многогранника, то эти многогранники равны* (**теорема Коши** – см. [83, 99]).

Для невыпуклых многогранников теорема Коши перестает быть верной, Пример этому см. на рисунке 41.

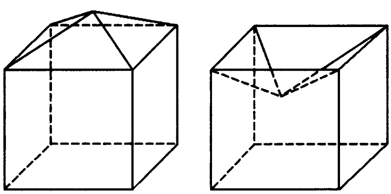


Рис. 41

С середины прошлого века стоял следующий вопрос: существует ли нежесткий многогранник, составленный из жестких, шарнирно соединенных граней – пластин? Только в 1977 г. американский математик Р.Конелли построил пример такого многогранника ([50, 83]).

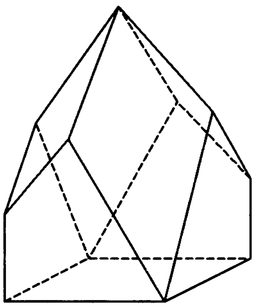


Рис. 42

Задача **3-23.** *Ответ*: да, существует. Построим такой многогранник – см. рисунок 42. Рассмотрим четырехугольную пирамиду $ABCDE$, основание которой – ромб $ABCD$, а вершина E проектируется в центр ромба. Рассмотрим в плоскости основания квадрат A_1BC_1D с диагональю BD (BD – меньшая диагональ ромба) и куб, нижним основанием которого является этот квадрат. Возьмем пересечение куба с пирамидой и часть пирамиды, лежащую выше куба. В результате получим искомый многогранник.

∇ Знаток мог бы ответить на вопрос задачи 3-23 довольно просто. Достаточно нарисовать плоскую схему, изображенную на рисунке 43 и, сослаться на *теорему Штейница*, которая утверждает, что при естественных условиях на плоскую схему существует выпуклый многогранник, грани, ребра и вершины которого взаимосвязаны так же, как области, звенья и узлы этой схемы – сравните схему на рисунке 43 с рисунком 42 – см. [99].

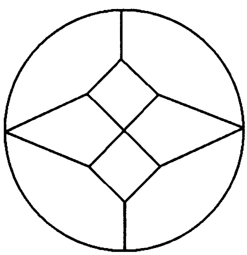


Рис. 43

Задача **3-24.** Пусть остроугольный треугольник $D_1D_2D_3$ со средними линиями AB, AC и BC (см. рис. 44) является разверткой треугольной пирамиды $ABCD$ (вершины D_1, D_2 и D_3 склеиваются в одну точку D). Если ребру соответствует половина стороны треугольника $D_1D_2D_3$, то скрещивающемуся с ним ребру соответствует средняя линия, параллельная этой стороне, и наоборот. Поэтому скрещивающиеся ребра пирамиды равны.

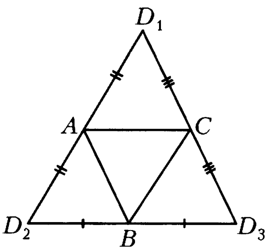


Рис. 44

Построим параллелепипед, четыре несмежные вершины которого являются вершинами треугольной пирамиды. Для этого проведем через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную скрещивающемуся с ним ребру. Получим три пары параллельных плоскостей, при пересечении которых образуется параллелепипед. Поскольку скрещивающиеся ребра исходной пирамиды равны, каждая грань параллелепипеда – параллелограмм с равными диагоналями, т.е. прямоугольник. Параллелепипед, у которого все грани – прямоугольники, является прямоугольным, что и требовалось доказать.

∇ Интересно, что верно и обратное утверждение.

Если вершины тетраэдра являются четырьмя несмежными вершинами некоторого прямоугольного параллелепипеда, то его развертка представляет собой остроугольный треугольник, в котором проведены средние линии. Действительно (рис.45), к каждой вершине примыкают три одинаковых треугольника, причем примыкают они тремя своими разноименными углами; тем самым сумма плоских углов в вершине тетраэдра равна $180°$.

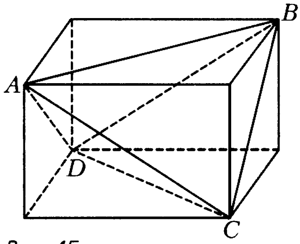


Рис. 45

Тетраэдр, у которого все грани – одинаковые, но не обязательно правильные треугольники, называется часто *равногранным тетраэдром*.

У такого тетраэдра:

1) скрещивающиеся ребра равны друг другу:

2) центры вписанной и описанной сфер совпадают;

3) проекция на каждую плоскость, параллельную двум скрещивающимся ребрам, – прямоугольник;

4) сумма плоских углов при каждой вершине равна $180°$;

5) каждый отрезок, соединяющий середины противоположных ребер, перпендикулярен этим ребрам, или, что то же самое, при повороте вокруг каждого такого отрезка на $180°$ тетраэдр совмещается с самим собой (эти отрезки – оси симметрии описанного вокруг него прямоугольного параллелепипеда);

6) три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер, взаимно перпендикулярны.

Интересно, что из каждого из этих свойств можно вывести все остальные.

Задача **3-25.** *Ответ*: $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ и $\pi-\gamma$.

Выберем два из трех построенных лучей. Пусть перпендикулярные им грани образуют двугранный угол α. Его ребро перпендикулярно плоскости, в которой лежат выбранные лучи, поэтому он высекает на этой плоскости линейный угол α. Стороны этого линейного угла и выбранные лучи делят плоскость на четыре угла; один из них равен α, два соседние с ним

– прямые; оставшийся четвертый угол – угол между выбранными лучами – равен $\pi - \alpha$.

∇ Задача 3-25 показывает, как связаны плоские углы одного трехгранного угла с двугранными углами другого. Для трехгранных углов легко вывести *формулу косинусов*, которая дает возможность, зная его плоские углы A, B, C, найти двугранные углы; например, косинус двугранного угла у может быть вычислен гак:

$$\cos\gamma = \frac{\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B}. \tag{1}$$

Гораздо труднее, на первый взгляд, решить обратную задачу; зная двугранные углы α, β, γ, найти косинусы плоских углов. Однако если воспользоваться построенным в задаче 3-25 новым трехгранным углом, то нужная формула получается автоматически.

Мы знаем из задачи, что если A, B, C – плоские углы, а α, β, γ – двугранные углы исходного трехгранного угла, то $\alpha' = \pi - A$, $\beta' = \pi - B$, $\gamma' = \pi - C$ – двугранные углы, а $A' = \pi - \alpha$, $B' = \pi - \beta$, $C' = \pi - \gamma$ – плоские углы нового трехгранного угла. Запишем формулу косинусов для нового трехгранного угла:

$$\cos\gamma' = \frac{\cos C' - \cos A' \cos B'}{\sin A' \sin B'}.$$

Тогда

$$\cos(\pi - C) = \frac{\cos(\pi - \gamma) - \cos(\pi - \alpha)\cos(\pi - \beta)}{\sin(\pi - \alpha)\sin(\pi - \beta)}$$

и

$$\cos C = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) называются еще *формулами косинусов для сферических треугольников*. Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в вершине трехгранного угла. Трехгранный угол высекает на этой сфере криволинейный треугольник. Его стороны – это дуги больших кругов радиуса 1, их длины равны соответственно величинам плоских углов A, B, C (взятым в радианах) трехгранного угла. Его углы – это двугранные углы α, β, γ трехгранного угла. Формула (1) позволяет находить по трем его сторонам его углы, а формула (2) – по трем его углам – стороны.

Построенный в задаче 3-25 трехгранный угол также высекает на сфере треугольник, который называется полярным к первому. В задаче установлено, как связаны друг с другом их стороны и углы.

Задачи для самостоятельного решения

3-26. Постройте циркулем и линейкой отрезки, заданные формулами (a, b, c, d, e – данные отрезки):

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 3) ab/c;

4) $a\sqrt{2}/\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; 5) $(abc)/(de)$; 6) $a\sqrt[4]{2}$;

7) $\sqrt{a^2+ab+ac}$; 8) $\sqrt[4]{abcd}$; 9) $\sqrt[4]{a^3b+ab^3}$;

10) $\sqrt{\left(a^3/b\right)+\left(c^3/d\right)}$.

3-27. На прямой даны отрезки a и b ($b > a$). Постройте одним циркулем отрезки, заданные формулами:

1) $\sqrt{b^2-a^2}$; 2) $a\sqrt{3}$, 3) $a\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{b^2+a^2}$.

3-28. Постройте циркулем и линейкой треугольник по двум сторонам a и b ($b > a$), если известно, что угол против одной из них в два раза больше угла против другой.

3-29. Дана окружность и точка вне ее. Постройте с помощью циркуля и линейки секущую, проходящую через эту точку так, чтобы отрезок секущей вне окружности равнялся отрезку внутри нее.

3-30. В круге проведены два радиуса. Постройте циркулем и линейкой хорду, делящуюся этими радиусами на три одинаковые части.

3-31. С помощью циркуля и линейки в данный круговой сегмент впишите квадрат.

3-32. На координатной плоскости нарисована полуволна синусоиды ($0 \le x \le \pi$, $y = \sin x$). Постройте циркулем и линейкой прямоугольник заданного периметра P, две вершины которого лежат на синусоиде, а две другие – на оси Ox.

3-33. Даны два отрезка с длинами 1 и π. Постройте (циркулем и линейкой) квадрат, равновеликий данному кругу.

3-34. На координатной плоскости нарисован график функции $y = x^3$. Пользуясь этим графиком, циркулем и линейкой, разделите данный угол на три равные угла.

3-35. Два зеркала образуют острый угол. Луч света падает на одну из его сторон. Докажите, что, как бы мал ни был угол, после нескольких отражений луч из него выйдет.

3-36. Из одного угла прямоугольного бильярда размерами 19×86 под углом $45°$ выпущен шар. В какую из луз, расположенных по углам бильярда, попадет шар, и сколько раз он до этого отразится от бортов? (Шар и лузы считаются точками.)

3-37. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние от его центра до вершины C, если длина стороны AB равна c и $\angle C = 120°$.

3-38. Постройте с помощью линейки с делениями через 1 см биссектрису данного угла.

3-39. Постройте с помощью циркуля и линейки правильный пятнадцатиугольник.

3-40. На плоскости взяты две точки A и B, расстояние между которыми – целое число m. Проведены все окружности целочисленных радиусов с центрами A и B. На полученной сетке отмечена последовательность узлов (точек пересечения окружностей), в которой каждые два соседних узла – противоположные вершины криволинейного четырехугольника.

а) Сделайте чертеж, взяв за единицу 0,5 см, а $n = 12$.

б) Докажите, что все точки этой последовательности лежат либо на одном эллипсе, либо на одной гиперболе.

3-41. а) Нарисуйте фигуру из трех отрезков на плоскости, которая имеет шесть осей симметрии.

б) Может ли объединение трех отрезков на плоскости иметь больше шести осей симметрии?

3-42. Дан треугольник ABC. Найдите на его сторонах AB и BC такие точки K и L, что:

а) $AK = KL = LB$; б) $AK = KL = LC$.

3-43. Дан отрезок и отмечена его середина. Постройте с помощью одной линейки прямую, проходящую через данную точку параллельно данному отрезку.

3-44. Даны две параллельные прямые и на одной из них – некоторый отрезок. С помощью линейки постройте отрезок, в два раза больший данного.

3-45. На сторонах остроугольного треугольника как на диаметрах построены три окружности. Докажите, что общие хорды каждых двух из этих окружностей являются высотами этого треугольника.

3-46. На каждой стороне остроугольного треугольника отмечается точка и соединяется с противоположной вершиной. На каждом из трех проведенных отрезков как на диаметре строится окружность. Проводятся общие хорды каждых двух из этих окружностей. Докажите, что эти хорды пересекаются в точке пересечения высот исходного треугольника.

3-47. Коля отметил на плоскости четыре точки, измерил все шесть расстояний между ними и сообщил Вите эти шесть чисел. Витя построил у себя на плоскости четыре точки с теми же попарными расстояниями. Обязательно ли Витину фигуру можно совместить с Колиной, если:

а) указаны только шесть чисел;

б) указано, какой паре точек соответствует каждое расстояние?

3-48. Пусть на плоскости проведено n различных прямых. Если через точку проходит k из этих прямых, то число $(k-1)$ назовем *кратностью* этой *точки*. Докажите, что проведенные прямые делят плоскость на $(n+m+1)$ частей, где m – сумма кратностей всех точек пересечения прямых.

3-49. а) *Пару чисел* $(n_1; n_2)$, где $n_1 \le n_2$, назовем *осуществимой*, если треугольник можно разрезать прямой, проходящей через его внутреннюю точку, на n_1-угольник и n_2-угольник. Сколько всего осуществимых пар?

б) *Четверку чисел* $(n_1; n_2; n_3; n_4)$, где $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$, назовем *осуществимой*, если треугольник можно разрезать парой прямых, проходящих через его внутреннюю точку, на n_1-угольник, n_2-угольник, n_3-угольник и n_4-угольник. Сколько всего осуществимых четверок?

3-50. Четыре плоскости делят пространство на 15 частей. Сколько из этих частей могут содержать шар, касающийся всех четырех плоскостей?

3-51. Каждое ребро тетраэдра разбито на 4 одинаковые части, и через все точки деления проведены плоскости, параллельные всем его граням. На сколько частей разбит тетраэдр?

3-52. На какое максимальное число частей могут разбивать пространство четыре сферы?

3-53. а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно какой-нибудь его диагонали.

б) Примем диагональ d куба за ось Ox (точка O –центр куба) и обозначим через $S(x)$ площадь сечения куба плоскостью, перпендикулярной диагонали d и проходящей через точку x диагонали. Постройте график функции $S(x)$.

3-54. У тетраэдра двугранные углы при любой паре противоположных ребер одинаковые. Верно ли, что противоположные ребра этого тетраэдра равны по длине?

3-55. Постройте шестигранник, у которого в каждой вершине сходятся три ребра, причем ровно две грани – пятиугольники.

3-56. Дана сфера единичного радиуса и трехгранный угол с вершиной в ее центре. Докажите, что площадь сферического треугольника – части сферы, лежащей внутри трехгранного угла, – равна $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$, где α, β и γ – величины двугранных углов этого трехгранного угла (углы сферического треугольника).

§ 4. НЕРАВЕНСТВА, ЭКСТРЕМУМЫ, ОЦЕНКИ

4-1. В прямоугольном треугольнике a и b – его катеты, c – гипотенуза, h – высота, опущенная на гипотенузу. Докажите, что $c + h$ больше $a + b$.

4-2. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней, и $a + b + c < 0$. Какой знак имеет число c?

4-3. Дан прямоугольник $ABCD$. В нем берется произвольная точка, и через нее проводятся две прямые, параллельные его сторонам. Они разбивают прямоугольник на четыре меньших прямоугольника. Докажите, что хотя бы один из двух прямоугольников, содержащих точки A и C, имеет площадь, не большую $1/4$ площади всего прямоугольника.

4-4. В банк кладется 1000 руб. В каком случае спустя 10 лет вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы один раз в год или если он начисляет $5/12$% один раз в месяц?

4-5. Автобус считается переполненным, если в нем находится более пятидесяти пассажиров. Два инспектора ГАИ остановили колонну автобусов. Инспектор Подберезовиков подсчитал процент переполненных автобусов, а инспектор Подосиновиков подсчитал процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах. У кого процент больше?

4-6. Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочки составляют в нем:

а) меньше 50%, но больше 40%; б) меньше 44%, но больше 43%?

4-7. У грузового автомобиля передние покрышки стираются через 15 000 км пути, а задние – через 25000 км. (На задних колесах по две покрышки, а на передних – по одной такой же покрышке.) Как нужно менять покрышки на колесах, чтобы проехать на одних и тех же покрышках наибольшее расстояние? Найдите это расстояние.

4-8. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья – за 13 минут и выпить кастрюлю молока за 14 минут, а Карлсон может сделать это за 6, 6 и 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и кастрюли молока?

4-9. Витя с Олей обычно встречаются на конечной станции метро. Пусть поезда метро отправляются через строго одинаковые интервалы времени. Первый раз Витя прождал Олю 12 минут, и за это время отправилось 5 поездов. Второй раз он прождал Олю 20 минут, и за это время отправилось 6 поездов. В третий раз он прождал Олю 30 минут. Сколько поездов могло отправиться за это время?

4-10. Несколько ящиков весят вместе 10 т, причем каждый из них весит не больше одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти за один раз весь этот груз?

4-11. Найдите три числа, каждое из которых равно квадрату разности двух других чисел.

4-12. Докажите, что для любых натуральных m и n, больших 1, хотя бы одно из чисел $\sqrt[n]{m}$ и $\sqrt[m]{n}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$.

4-13. При каком n величина

$$\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n}$$

принимает наименьшее значение?

4-14. Известно, что числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 неотрицательны и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Найдите наибольшее значение величины $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$.

4-15. Докажите, что для любых a, b и c верно неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

4-16. Докажите, что при любых положительных a и b выполняется неравенство

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

4-17. Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отрезает от него треугольник площади, не превосходящей $1/6$ площади шестиугольника.

4-18. Докажите, что для любых углов α, β, γ, заключенных между 0 и π, выполнено неравенство

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

4-19. Какую наибольшую площадь может иметь четырехугольник, длины трех сторон которого равны 1?

4-20. Выпуклый многогранник с пятью вершинами вписан в сферу радиуса 1. Найдите наибольший объем такого многогранника.

4-21. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 проведена окружность радиуса 10. Докажите, что внутри этой окружности лежит более 250 узлов сетки.

4-22. Можно ли из точки O направить в пространство 15 лучей так, чтобы угол между любыми двумя был больше $60°$?

4-23. На первой из двух одинаковых окружностей отмечены три дуги по $25°$ каждая, на второй – две дуги по $30°$ каждая. Докажите, что вторую окружность можно так наложить на первую, чтобы отмеченные дуги не пересекались.

4-24. Докажите, что пять гирек можно расположить в порядке возрастания их масс, проделав не более 7 взвешиваний на чашечных весах (позволяющих за одно взвешивание сравнивать массы двух гирек).

Обсуждение задач

Задача **4-1.** Подсчитывая двумя способами площадь треугольника, получим $ch = ab$, откуда $h = ab/c$. Неравенство $c + h > a + b$ запишем так:

$$c+\frac{ab}{c}>a+b\ .$$

Умножая обе части на c $(c > 0)$, получим эквивалентное неравенство:

$$c^2-c(a+b)+ab>0\ ,$$

или

$$(c-a)(c-b)>0\ .$$

Это неравенство верно, так как гипотенуза больше каждого катета.

∇ В решении этой задачи мы установили, что если произведения ch и ab двух пар положительных чисел одинаковы, то сумма больше у той пары, числа которой более «раздвинуты»: если a и b заключены между c и h, то $c + h > a + b$. Этот факт вытекает также из того, что функция $f(x) = x + A/x$ монотонно возрастает при $x \geq \sqrt{A}$.

Задача **4-2.** *Ответ*: $c < 0$.

Рассмотрим функцию $f(x)=ax^2+bx+c$. По условию она не обращается в нуль, поэтому ее график – парабола – расположен либо целиком выше оси Ox, либо целиком ниже.

Заметим, что $f(1)=a+b+c$; это число, по условию, меньше нуля, значит, парабола расположена ниже оси Ox. Поэтому $f(x)<0$ при всех значениях x и, в частности, $f(0)=c<0$.

∇ В решении мы, по существу, использовали непрерывность функции f: *если функция непрерывна на промежутке и не обращается на нем в нуль, то все ее значения на этом промежутке имеют один и тот же знак.*

Задача **4-3.** Проведем оси симметрии прямоугольника. Они разбивают данный прямоугольник на 4 четверти. Если выбранная точка лежит в какой-нибудь из двух четвертей, содержащих точки A и C, или на границе этих четвертей, то утверждение задачи очевидно.

Пусть выбранная точка лежит внутри одной из двух оставшихся четвертей. Отразим обе прямые разреза относительно центра симметрии прямоугольника. Четыре прямые (две линии разреза и две симметричные им) разбивают прямоугольник на 9 частей: четыре части – площади S_1 две части – площади S_2, две части – площади S_3 и одна часть – площади S_0 (рис.46). Мы должны доказать, что $S_1 + S_2$ или $S_1 + S_3$ не превосходит $S/4$, где 5 – площадь всего прямоугольника. Так как

S_1	S_3	S_1
S_2	S_0	S_2
S_1	S_3	S_1

Рис. 46

$$4S_1 + 2S_2 + 2S_3 = S - S_0 < S\,,$$

то

$$2S_1 + S_2 + S_3 < S/2\,, \text{ или } (S_1 + S_2) + (S_1 + S_3) < S/2\,.$$

Значит, одно из чисел $S_1 + S_2$, $S_1 + S_3$ меньше $S/4$ (если бы оба они были не меньше $S/4$, то их сумма была бы не меньше $S/2$).

∇ Представляет интерес следующая стереометрическая задача, похожая на задачу 4-3: пусть $V_1 \le V_2 \le \ldots \le V_8$ – объемы восьми частей, на которые делят параллелепипед объема 1 три плоскости, проходящие через его точку и параллельные его граням; в каких пределах может изменяться каждая из величин V_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$? Например, оказывается, что $0 \le V_4 \le 1/8$ и для любого V_4 из этого промежутка существует соответствующее разбиение параллелепипеда. (При доказательстве неравенства $V_4 \le 1/8$ удобно использовать тот факт, что две противоположные части имеют объемы, произведения которых не больше $1/64$.) Аналогичный вопрос можно рассмотреть и для n-мерного параллелепипеда единичного объема.

Задача **4-4.** *Ответ*: если банк начисляет проценты раз в месяц.

Пусть проценты начисляются раз в год. Тогда в конце первого года вклад будет равен

$$\left(1000+1000\cdot\frac{5}{100}\right)=1000\left(1+\frac{5}{100}\right)\text{ руб}.$$

В конце второго года вклад увеличится на 5% уже от этой суммы и станет равным

$$1000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)=1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2\text{ руб}.$$

Рассуждая аналогично, увидим, что через 10 лет вкладчик получит

$$1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10}\text{ руб}.$$

Если проценты начисляют раз в месяц, то таким же образом найдем, что вкладчик через 10 лет (т.е. через 120 месяцев) получит

$$1000\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{120}\text{ руб}.$$

Покажем, что второе число больше первого. Для этого достаточно показать, что

$$1+\frac{5}{100}<\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{12}.$$

Начнем вычислять правую часть этого неравенства – произведение двенадцати одинаковых выражений

$$\left(1+\frac{5}{1200}\right)\left(1+\frac{5}{1200}\right)\dots\left(1+\frac{5}{1200}\right).$$

В процессе умножения придется взять в каждой скобке по 1 и все их перемножить – получим в результате 1. Если же в одной скобке взять $5\ 1200$, а в других – по 1, то мы получим $5\ 1200$; но таких произведений столько же, сколько скобок, т.е. 12, и они дают число $12\cdot 5\ 1200=5\ 100$. Хотя мы учли еще не все члены, получилось уже $1+5\ 100$, поэтому все произведение будет больше этого числа.

∇ Пусть в банк кладется K руб. и банк выплачивает p % годовых. Рассуждая так же, как в решении задачи 4-4, мы увидим, что через m лет вкладчик получит $K(1+p/100)^m$ руб. (так называемая *формула сложных процентов*).

Эту величину можно грубо оценить снизу с помощью *неравенства Бернулли*, которое мы, по существу, уже доказали:

$$(1+x)^n > 1+nx \quad \text{при} \quad x>0,\ n>1\,.$$

(В решении задачи 4-4 было $x = 5/1200$, $n = 12$.)

Из этого неравенства следует, что если сократить сроки выплаты и пропорционально уменьшить процент начисления, то вкладчик получит большую сумму. Это связано с тем, что при $a > 0$ последовательность

$$x_n = (1+a/n)^n$$

возрастает. Однако оказывается, что слишком большой выгоды от сокращения сроков вкладчик получить не сможет, так как эта последовательность ограничена. Ее предел равен числу e^a. Если на калькуляторе посчитать суммы из задачи 4-4, то в первом случае мы получим около 1629 руб., во втором – около 1647 руб., а 1000 $e^{0,05} \approx 1649$.

Задача **4-5.** *Ответ*: у Подосиновикова.

Пусть в колонне оказалось k переполненных и l непереполненных автобусов. Обозначим количество пассажиров, едущих в переполненных автобусах, через A, а количество остальных – через B.

Тогда $A > 50k$, $B \le 50l$ и, значит, $\frac{A}{k} > 50$, $\frac{B}{l} \le 50$, поэтому $\frac{A}{k} > \frac{B}{l}$. Из последнего неравенства вытекают следующие:

$$\frac{B}{A} < \frac{l}{k}, \qquad \frac{A+B}{A} < \frac{l+k}{k},$$

откуда

$$\frac{A}{A+B}\cdot 100\% > \frac{k}{l+k}\cdot 100\%\,.$$

В последнем неравенстве слева стоит процент людей, едущих в переполненных автобусах, а справа – процент переполненных автобусов.

Задача **4-6.** *Ответ*: а) 7; б) 16.

Пусть в кружке n участников, из них m девочек. Нам надо найти наименьшее натуральное n, при котором существует такое натуральное m, что $2/5 < m/n < 1/2$.

Перебирая значения n от 2 до 7, находим, что этому неравенству удовлетворяет только дробь $3/7$ со знаменателем 7. Таким образом, 7 – наименьшее возможное значение n.

∇ Обратим внимание на то, что дробь $3/7$ получается из дробей $2/5$ и $1/2$ следующим образом: ее числитель есть сумма их числителей, а знаменатель – сумма их знаменателей.

Для любых положительных дробей a/b и $c\ d$ $(a\ b < c\ d)$ дробь $(a+c)\ (b+d)$ удовлетворяет неравенствам $a\ b < (a+c)\ (b+d) < c\ d$ и называется *медиантой* этих дробей.

Выписывая несократимые дроби со знаменателем, не большим n, в порядке возрастания, мы получаем такую таблицу:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{2} & & & \frac{2}{3} & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{2} & & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} & \frac{4}{7} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{5}{7} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{6}{7} & \frac{1}{1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Здесь каждая n-я строчка (*ряд Фарея*) получается из $(n-1)$-й по следующему правилу: нужно в $(n-1)$-й строчке отметить все такие пары соседних дробей a/b, $c\ d$, у которых сумма знаменателей равна n, и между ними вставить их медианты – дроби $(a+c)\ (b+d)$ (они всегда получаются несократимыми).

В задаче а) мы нашли номер строчки $n = 7$, в которой впервые появляется дробь, расположенная между дробями $2\ 5$ и $1\ 2$.

В задаче б) действовать перебором довольно утомительно. Поступим следующим образом. Мы должны найти решение неравенств

$$\frac{43}{100} < \frac{m}{n} < \frac{44}{100} = \frac{11}{25} \qquad (1)$$

с наименьшим натуральным n.

Перевернем все дроби и вычтем их общую целую часть:

$$2\frac{14}{43} > \frac{n}{m} > 2\frac{3}{11},$$

$$\frac{14}{43} > \frac{n-2m}{m} > \frac{3}{11}. \qquad (2)$$

То же самое сделаем еще раз:

$$3\frac{1}{14} < \frac{m}{n-2m} < 3\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{14} < \frac{m-3(n-2m)}{n-2m} = \frac{7m-3n}{n-2m} < \frac{2}{3} \tag{3}$$

и еще раз:

$$14 > \frac{n-2m}{7m-3n} > \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Заметим, что здесь впервые между границами неравенства встречаются целые числа. Наименьшее из них – число 2. Система уравнений $n-2m=2$, $7m-3n=1$ имеет решение в натуральных числах $n = 16$, $m = 7$.

Докажем, что именно оно и дает решение задачи. Из неравенств (2)–(4) следует, что

$$n-2m>0,\ 7m-3n\ge 1,\ n-2m\ge 2.$$

Поэтому

$$n = 7(n-2m)+2(7m-3n) \ge 7\cdot 2+2\cdot 1 = 16.$$

∇ Анализируя это решение, заметим, что, по существу, мы раскладываем числа $\frac{43}{100}$ и $\frac{11}{25}$ в цепные дроби:

$$\frac{43}{100} = \frac{1}{2+\frac{14}{43}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+13}}},$$

$$\frac{11}{25} = \frac{1}{2+\frac{3}{11}} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

Затем берем общую часть этих разложений на том шаге, где разложения отличаются, между $\frac{1}{2}$ и 13 вставляем наименьшее целое число, т.е. 1, и в результате получаем ответ:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+1}}} = \frac{7}{16}.$$

Этот алгоритм позволяет быстро найти дробь m/n с наименьшим знаменателем n в любом заданном интервале $0<\alpha<m/n<\beta$ (см. [61, 119]).

Задача **4-7.** *Ответ*: наибольшее расстояние равно $20454\frac{6}{11}$ км. Покрышки нужно менять так, чтобы одну треть пути каждая из них была передней.

Примем за единицу количество резины, которое может стереться на одной покрышке, пока она не придет в негодность. Тогда всего перед поездкой имеется 6 единиц резины. Из условия следует, что за 1 км пути стирается $1/15000$ единицы, если покрышка стоит впереди, и $1/25000$, если она стоит сзади. Значит, за 1 км пути стирается $2/15000 + 4/25000 = 11/37500$ единиц резины. Пусть машина прошла x км. Тогда стерлось $11x\ 37500$ единиц резины. Так как может стереться не больше 6 единиц, имеем $\frac{11x}{37500} \le 6$, откуда

$$x \le 20454\frac{6}{11}.$$

Чтобы проехать все $20454\frac{6}{11}$ км, нужно менять покрышки так, чтобы каждая из них треть этого пути стояла спереди: тогда все они сотрутся одновременно – к концу пути.

Задача **4-8.** *Ответ*: 12 минут.

Совершенно ясно, что если Малыш и Карлсон хотят съесть завтрак за наименьшее время, то начать и кончить есть они должны одновременно – в противном случае один из них может помочь другому и сократить затраченное время.

Обозначим через x, y, z доли торта, варенья и молока, которые съел Малыш; тогда $(1-x)$, $(1-y)$, $(1-z)$ – доли этих продуктов, которые съел Карлсон, а время, которое они затратили, равно

$$t = 10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z).$$

Тем самым мы приходим к следующей задаче: найти наименьшее значение величины $t = 10z + 13y + 14z$, если числа x, y, z удовлетворяют условиям $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ и

$$10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z).$$

Из последнего соотношения можно выразить z через x и y:

$$z = \frac{1}{21}(19 - 16x - 19y).$$

Подставляя это выражение в формулу для t, получаем

$$t = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{38}{3}.$$

Из этой формулы мы видим, что t будет тем меньше, чем больше x и чем меньше y. Возьмем самое большое возможное значение x и самое меньшее y: $x = 1$, $y = 0$. При этом $t = 12$ минут, а $z = \frac{1}{7}$ находится в допустимых пределах.

Следовательно, наименьшее значение t достигается в том случае, когда Малыш съедает торт и выпивает $\frac{1}{7}$ кастрюли молока, а Карлсон съедает все варенье и выпивает $\frac{6}{7}$ кастрюли молока.

∇ Мы свели задачу 4-8 к *задаче линейного программирования*: найти минимум линейной функции при условии, что переменные неотрицательны и удовлетворяют системе линейных неравенств и уравнений.

Если бы потребовалось решать аналогичную задачу для $n > 3$ продуктов, то такой метод решения привел бы к довольно громоздким вычислениям; однако можно указать простое общее правило, указывающее оптимальный план распределения продуктов.

Пусть a_i – время, за которое i-й продукт может съесть Малыш, b_i – время, за которое его может съесть Карлсон; при этом мы будем считать, что продукты занумерованы в порядке возрастания отношений этих времен:

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_2}{b_2} \le \ldots \le \frac{a_n}{b_n}. \qquad (1)$$

План, при котором время завтрака будет наименьшим, состоит в следующем: Малыш начинает с первого продукта и ест их дальше по порядку номеров, а Карлсон начинает одновременно с ним с последнего продукта и ест их в обратном порядке.

В нашей задаче три продукта надо упорядочить следующим образом: первый – торт, второй – молоко, третий – варенье. Отношения времен при этом будут удовлетворять неравенствам

$$\frac{10}{6} \le \frac{4}{7} \le \frac{13}{6}.$$

В первые 6 минут Карлсон съедает варенье, а Малыш съедает часть торта. За следующие 4 минуты Малыш доедает торт, а Карлсон выпивает $\frac{4}{7}$ молока. И, наконец, за последние 2 минуты они оба выпивают оставшееся молоко. В результате Малышу достается $\frac{1}{7}$ молока, а Карлсону – $\frac{6}{7}$.

Для доказательства оптимальности предлагаемого плана удобно ввести условную меру для каждого продукта. Будем считать питательность i-го продукта равной $(a_i + b_i)$ калорий, тогда скорость питания (калорий в единицу времени) при поедании i-го продукта у Малыша равна $\frac{a_i + b_i}{a_i} = 1 + \frac{b_i}{a_i}$, а у Карлсона $\frac{a_i + b_i}{b_i} = 1 + \frac{a_i}{b_i}$. Мы видим, что скорость Малыша тем больше, чем меньше a_i/b_i, а скорость Карлсона – наоборот. Таким образом, чтобы за время t получить как можно больше калорий, Малыш должен есть продукты в порядке номеров, а Карлсон – в обратном порядке. Пусть Малыш и Карлсон получили по нашему плану все $(a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n)$ калорий за некоторое время t. Тогда при любом другом плане за то же время t они получат меньше калорий, а значит, не смогут съесть все продукты.

Можно указать графическую процедуру, дающую ответ. Нарисуем во второй четверти координатной плоскости Oxy ломаную, звенья которой – векторы с координатами $(b_1; a_1), (b_2; a_2), \ldots, (b_n; a_n)$, идущие в таком порядке, что выполнены неравенства (1); начало M этой ломаной лежит на оси Ox, конец K – на оси Oy (рис.47 соответствует случаю $n = 3$; в задаче 4-8 три вектора, составляющие ломаную, имеют координаты (6; 10), (7; 14) и (6; 13)). Отметим точку L пересечения этой ломаной с биссектрисой $x + y = 0$ второй координатной четверти. Ордината t точки L указывает искомое минимальное время, причем часть ML ломаной указывает продукты, которые съедает Малыш, а часть LK – Карлсон.

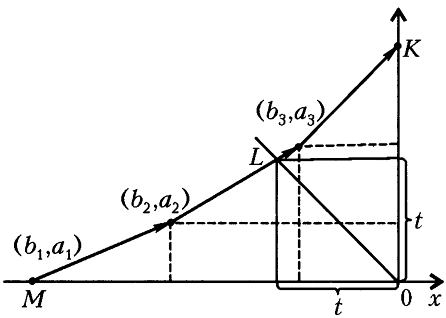


Рис. 47

Задача **4-9.** *Ответ*: 10 или 11 поездов.

Пусть поезда отправляются с интервалом в T минут. Поскольку за 12 минут заведомо прошло 4 полных интервала, $4T \le 12$, т.е. $T \le 3$. Так как до отправления первого из 5 поездов и после ухода последнего из них прошло не более чем по T мин, то $T + 4T + T > 12$, т.е. $T > 2$. Итак, $2 < T \le 3$.

Аналогично, из того, что за 20 минут отправилось ровно 6 поездов, получаем $20/7 < T \le 4$. Из этих неравенств следует, что $2\frac{6}{7} < T \le 3$.

Пусть за 30 минут отправилось n поездов. Тогда аналогично получаем $(n-1)T \le 30 < (n+1)T$ или $\frac{30}{T} - 1 < n \le \frac{30}{T} + 1$.

Учитывая, что $2\frac{6}{7} < T \le 3$, найдем, что $9 < n \le 11$, т.е. $n = 10$ или $n = 11$.

Если $T = 3$ и первый поезд отправляется сразу по приходу Вити, то за 30 минут отправится 11 поездов, а если при таком же T первый поезд отправится через 1 минуту после его прихода, то за 30 минут отправится 10 поездов, т.е. оба варианта ответа реализуются.

∇ Решение этой задачи связано с таким общим вопросом. Пусть на равных расстояниях T друг от друга на прямой расставлены точки. Какое количество n этих точек может содержать отрезок длины b? Ответ: $\frac{b}{T} - 1 < n \le \frac{b}{T} + 1$.

Задача **4-10.** *Ответ*: 5 трехтонок.

Покажем сначала, что 4 трехтонок может не хватить. Возьмем 13 одинаковых ящиков весом по 10/13 тонны. Тогда в одну трехтонку мы не сможем поместить больше трех ящиков, а в четыре – больше 12 ящиков.

Докажем теперь, что 5 трехтонок всегда хватает. Действительно в каждую трехтонку мы можем погрузить не меньше двух тонн груза (если погружено меньше двух тонн, мы сможем добавить еще ящик). Тогда в 5 трехтонок можно погрузить не меньше 10 тонн.

∇ Более общая задача. Несколько ящиков весят вместе T тонн, причем каждый из них весит не более 1 тонны. Какое наименьшее количество p-тонок ($p > 1$) заведомо достаточно, чтобы увезти за один раз весь этот груз?

Пусть $\gamma = \frac{p}{[p]+1}$, где $[p]$ – целая часть числа p. Тогда ответ – это наименьшее целое число N, большее или равное $\frac{T-\gamma}{p-\gamma}$.

В примере, показывающем, что меньшего количества машин может не хватить, нужно все грузы взять равными (и несколько большими γ). Загружать N ящиков можно в порядке убывания их масс. Для доказательства удобно использовать следующую лемму: если имеется несколько ящиков общей массой больше p тонн (каждый – не больше 1), то можно загрузить на p-тонку больше $p-\gamma$ тонн. В задаче 4-10 $p = 3$, $T = 10$, $\gamma = 3/4$; из леммы следует, что на одну трехтонку можно загрузить больше $2\frac{1}{4}$ тонны, а весь груз, 10 тонн, как мы знаем, можно увезти на 5 трехтонках; это как раз наименьшее целое число, большее или равное

$$\frac{T-\gamma}{p-\gamma}=\frac{37}{9}.$$

Для знатоков. Эту задачу интересно сравнить с часто встречающейся в приложениях «*задачей о камнях*». Имеются несколько камней с известными массами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и p-тонка (p, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – натуральные числа). Спрашивается, можно ли из этих камней выбрать несколько так, чтобы полностью загрузить ими p-тонку? Другими словами, существуют ли такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равные 0 или 1, что выполняется равенство

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=p\ ?$$

Последняя задача относится к классу так называемых *универсальных переборных задач*. Для их решения неизвестен алгоритм, работающий существенно быстрее, чем полный перебор всех вариантов. (В отличие от этой задачи загрузку ящиков, о которой говорилось в обобщении задачи 4-10, можно произвести очень быстро; см. [97].)

Задача **4-11.** *Ответ*: либо все три числа равны нулю, либо одно из них равно нулю, а два других – единице.

Заметим, что все три числа неотрицательны, так как каждое из них – квадрат. Обозначим их в порядке убывания так: $x \ge y \ge z \ge 0$.

Тогда $x-z \ge y-z \ge 0$, откуда $(x-z)^2 \ge (y-z)^2$. Но $(x-z)^2=y$, а $(y-z)^2=x$. Итак, с одной стороны, $x \ge y$, с другой, $y \ge x$ и тем самым $x = y$. В таком случае получаем $z = 0$ и $x=x^2$, т.е. $x = 0$ или $x = 1$.

∇ Неравенства не участвовали в условии этой задачи, а появились в решении. Идея упорядочить равноправные неизвестные помогает и во многих других ситуациях.

Задача **4-12.** Заметим, что m и n входят симметрично в условие задачи, поэтому можно считать, что $m \ge n \ge 2$. При этом $\sqrt[m]{n} \le \sqrt[n]{n}$. Таким образом, достаточно доказать неравенство $\sqrt[n]{n} \le \sqrt[3]{3}$ или

$$n^{1/n} \le 3^{1/3}. \qquad (1)$$

Если $n = 2$, неравенство $2^{1/2} \le 3^{1/3}$ верно, поскольку при возведении обеих его частей в шестую степень получается $8 < 9$.

Возьмем теперь натуральный логарифм от обеих частей неравенства (1) и докажем, что $\dfrac{\ln n}{n} \le \dfrac{\ln 3}{3}$ при $n \ge 3$.

Производная от функции $\ln x/x$ отрицательна при $x \geq 3$:

$$(\ln x/x)' = (1 - \ln x)/x^2 < 0,$$

так как $\ln x > 1$ при $x \geq 3 > e$.

Отсюда следует, что функция $\ln x/x$ убывает при $x \geq 3$ и, следовательно, $\ln x/x \leq \ln 3/3$ при $x \geq 3$.

∇ Неравенство $n^3 \leq 3^n$ для натуральных $n \geq 3$ можно доказать и по индукции; если оно верно для некоторого $n = k$, то верно и для следующего $n = k + 1$: неравенство $(k+1)^3 \leq 3^{k+1}$ получается из $k^3 \leq 3^k$ почленным умножением на верное (при $k \geq 3$) неравенство $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 \leq 3$.

Задача **4-13.** *Ответ*: наименьшее значение достигается при $n = 10^{10} - 1$ и при $n = 10^{10}$. Положим

$$a_n = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n}.$$

Заметим, что

$$a_n = (\lg n/10)\, a_{n-1}.$$

Если $\lg n < 10$, то $a_n < a_{n-1}$; если $\lg n = 10$, то $a_n = a_{n-1}$; если $\lg n > 10$, то $a_n > a_{n-1}$. Таким образом, последовательность (a_n) убывает до $n = 10^{10} - 1$, затем имеет два равных члена с номерами $10^{10} - 1$ и 10^{10}, а начиная со следующего номера последовательность возрастает.

Задача **4-14.** *Ответ*: наибольшее значение равно $1/4$.

Это значение достигается, например, при $x_1 = x_2 = 1\ 2$ и $x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Покажем, что $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leq 1/4$ при всех неотрицательных значениях x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. В самом деле,

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leq (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4),$$

так как если раскрыть в правой части скобки, то получатся все члены, стоящие в левой части, и еще несколько неотрицательных членов.

Теперь достаточно применить к двум числам, $u = x_1 + x_3 + x_5 \geq 0$ и $v = x_2 + x_4 \geq 0$, составляющим в сумме единицу, неравенство $\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2}$ между геометрическим и арифметическим средними, получим

$$(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) = uv \leq (u+v)^2/4 = \frac{1}{4}.$$

∇ Аналогично можно доказать, что для любых n неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, дающих в сумме 1, наибольшее значение величины $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ равно $1/4$.

Задача **4-15.** Для доказательства сравним левую и правую части данного в условии неравенства с выражением $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$: докажем, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

Сложив почленно три верных неравенства $a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0$, $b^4 + c^4 - 2b^2c^2 \geq 0$, $c^4 + a^4 - 2a^2c^2 \geq 0$, получаем

$$2\left(a^4 + b^4 + c^4\right) \geq 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right).$$

Сложив почленно три верных неравенства $a^2\left(b^2 + c^2 - 2bc\right) \geq 0$, $b^2\left(a^2 + c^2 - 2ac\right) \geq 0$, $c^2\left(b^2 + a^2 - 2ba\right) \geq 0$, получаем

$$2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) \geq 2\left(a^2bc + b^2ac + c^2ab\right).$$

∇ С неравенством из задачи 4-15 связана следующая общая **теорема Мюрхеда**. Пусть дан одночлен $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Назовем его *симметризацией* многочлен $\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\ \ ,\alpha_n}$, равный среднему арифметическому всевозможных одночленов, полученных из данного перестановкой переменных; например $\Phi_{2,2,0}(x, y, z) = \frac{1}{3}\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right)$. Рассмотрим два набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ показателей $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq 0$ и $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n \geq 0$.

Для того чтобы при всех неотрицательных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнялось неравенство

$$\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\ \ ,\alpha_n} \geq \Phi_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n},$$

необходимо и достаточно, чтобы набор α *мажорировал* набор β в следующем смысле:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \geq \beta_1,\\
&\alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \geq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1},\\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n.
\end{aligned}$$

Эту систему условий коротко записывают так:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \succ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

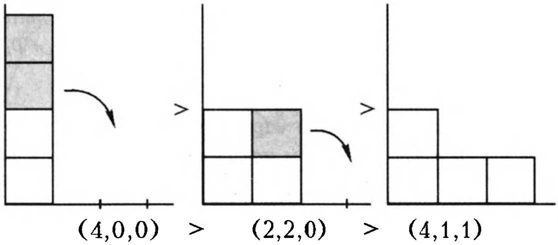


Рис. 48

Она имеет такую наглядную интерпретацию: если наборы показателей изображать в виде лестниц, у которых ширина ступеней равна 1, а высота – числам набора, то второй набор должен получаться из первого отрезанием кусочков ступеней и перебрасыванием их направо вниз (на одну из следующих ступеней). В задаче 4-15 (рис.48) из набора $(4, 0, 0)$ получается $(2, 2, 0)$, а из него – $(2, 1, 1)$:

$$(4, 0, 0) \succ (2, 2, 0) \succ (2, 1, 1) .$$

Операция «перебрасывания ступенек» подсказывает путь к доказательству любого из неравенств, о которых идет речь в теореме Мюрхеда (см. [102]).

Фигуры из нескольких клеток, имеющие форму лестниц, оказываются удобными во многих других комбинаторных и алгебраических задачах (см. задачу 6-10).

Задача **4-16.** Чтобы избавиться от радикалов, положим $x = b^{1/15}$, $y = a^{1/10}$. Тогда данное неравенство примет вид

$$3x^5 + 2y^5 - 5x^3y^2 \geq 0 .$$

Разделив обе части неравенства на y^5 и обозначив x/y через t, получим эквивалентное неравенство

$$3t^5 - 5t^3 + 2 \geq 0 .$$

Левая часть разлагается на множители:

$$(t-1)^2\left(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2\right) \geq 0 .$$

При $t > 0$ оба множителя неотрицательны, поэтому неравенство справедливо. Оно обращается в равенство только при $t = 1$, т.е. при $a^3 = b^2$.

∇ Можно доказать исходное неравенство, воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для пяти чисел:

$$\left(\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt{a} + \sqrt{a}\right)/5 \geq \sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2} = \sqrt[5]{ab} .$$

Аналогично можно доказать, что для любых k положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ и натуральных $p_1, p_2, \dots, p_k$ с суммой $p_1 + \dots + p_k = p$

$$p_1 a_1^{1/p_1} + p_2 a_2^{1/p_2} + \dots + p_k a_k^{1/p_k} \ge p\left(a_1 a_2 \dots a_k\right)^{1/p} .$$

А вот еще одно доказательство (приводящее к иному обобщению). Положив $a = y^5$, $b = x^5$, приведем исходное неравенство к виду

$$3\sqrt[3]{x^5}/5 + 2\sqrt{y^5}/5 \ge xy .$$

Это – частный случай *неравенства Юнга*: для любых положительных x, y, α, β, где $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$,

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{y^\beta}{\beta} \ge xy .$$

Это, в свою очередь, – частный случай неравенства

$$f(x) + g(y) \ge xy , \qquad (*)$$

где f и g – дифференцируемые функции, определенные при всех неотрицательных значениях аргумента, для которых f' и g' – взаимно обратные монотонно возрастающие функции, причем

$$f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$$

(функции f и g называются *двойственными по Юнгу*).

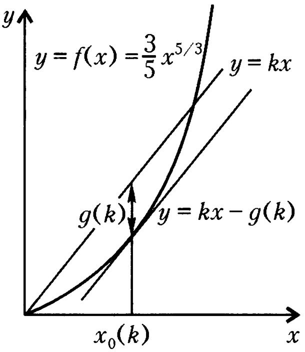


Рис. 49

Заметим, что для каждого значения y найдется ровно одно значение x, при котором неравенство $(*)$ обращается в равенство; для этих значений $y = f(x)$ и $x = g'(y)$. Поэтому функцию g можно определить через функцию f так: для каждого k

$$g(k) = \max_x \left(kx - f(x)\right) .$$

Такой переход от функции f к функции g называется *преобразованием Лежандра* функции f. При этом функция f будет, в свою очередь, преобразованием Лежандра от функции g – см. рисунок 49 (см. [79]).

Задача **4-17.** Проведем три диагонали AD, BE и CF шестиугольника $ABCDEF$, соединяющие каждую вершину с противоположной. Пусть они пересекаются в точках K, L, M – см. рисунок 50,a; в частном случае точки K, L и M могут совпадать. Рассмотрим шесть треугольников, которые вместе с треугольником KLM составляют шестиугольник $ABCDEF$ – на нашем рисунке это треугольники ABL, BCL, CDM, DEM, EFK, FAK

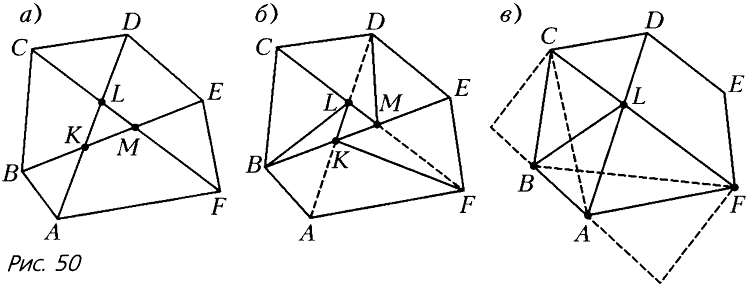


Рис. 50

(рис.50,*б*). Площадь хотя бы одного из них не больше $S/6$, где S – площадь шестиугольника (иначе сумма этих шести площадей была бы больше S, что невозможно). Пусть, например, $S_{ABL} \le \dfrac{S}{6}$ (рис.50,*в*). Мы утверждаем, что тогда площадь одного из треугольников ABC и ABF с тем же основанием AB, не больше $\dfrac{S}{6}$. В самом деле, площадь треугольника с основанием AB и высотой h равна $AB \cdot h/2$, а высота треугольника ABL заключена между высотами треугольников ABC и ABF, т.е. не больше одной из них.

∇ В последнем рассуждении можно выделить часто встречающееся соображение: наибольшее значение линейной функции $f(x)$, заданной на некотором промежутке $[a; b]$, всегда достигается в одном из концов промежутка, т.е. для любого x значение $f(x)$ не превосходит $f(a)$ или $f(b)$. В нашей задаче такой функцией была площадь треугольника $\cdot f(h) = AB \cdot h/2$.

Задача **4-18.** Пусть $\alpha \le \beta \le \gamma$. Считая α и β фиксированными, рассмотрим производную по γ разности правой и левой частей. Она равна

$$\left(3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \sin\gamma\right)' = \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} - \cos\gamma \ge 0,$$

поскольку $0 \le \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \le \gamma \le \pi$ и $t \in [0; \pi]$ функция $y = \cos t$ убывает (производные постоянных величин $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ равны 0). Если мы докажем справедливость нашего неравенства при $\gamma = \beta$, то оно будет справедливо и при $\gamma \ge \beta$ – с ростом γ разность правой и левой частей неравенства будет возрастать.

Итак, осталось доказать, что при всех α и β, $\alpha \le \beta$,

$$\sin\alpha + 2\sin\beta \le 3\sin\frac{\alpha+2\beta}{3}.$$

Повторим то же рассуждение. Производная по β разности правой и левой частей равна

$$2\cos\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-2\cos\beta\geq 0,$$

поскольку $0\leq\frac{\alpha+2\beta}{3}\leq\beta\leq\pi$. Но при $\beta=\alpha$ неравенство превращается в равенство. Поэтому оно верно при $\beta\geq\alpha$.

∇ Взяв в условии задачи $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ или $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, мы получим неравенства, эквивалентные тому, что периметр и площадь любого треугольника не больше, чем у правильного треугольника с тем же радиусом описанной окружности.

Метод, которым решена эта задача, позволяет доказать следующую общую теорему. Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $f(x)$, производная которой $f'(x)$ не возрастает (такая функция называется выпуклой вверх). Тогда для любых n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на этом отрезке и для любых n положительных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ с суммой $p_1+\ldots+p_n=1$ верно следующее *неравенство Иенсена*:

$$f(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)\geq p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n).$$

В нашей задаче $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\pi]$, а $p_1=p_2=p_3=1/3$.

Если взять функцию $f(x)=\ln x$ и $p_1=p_2=\ldots=p_n=1/n$, то получится неравенство

$$\ln\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geq\frac{\ln x_1+\ldots+\ln x_n}{n},$$

или

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\ldots x_n},$$

– классическое неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел ($x_1>0, \ldots, x_n>0$).

Для функции $f(x)=-x^2$ получится неравенство

$$(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)^2\leq p_1x_1^2+\ldots+p_nx_n^2;$$

а из него, положив $x_k=a_k/b_k$, $p_k=b_k^2\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)$, можно вывести *неравенство Коши – Буняковского*:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

согласно которому скалярное произведение двух векторов не больше произведения их длин (в нашем доказательстве было важно, что все b_k отличны от нуля, но последнее неравенство справедливо, очевидно, и без этого предположения) – см. [80].

Задача **4-19.** *Ответ*: $3\sqrt{3}/4$. (Эту площадь имеет трапеция, у которой боковые стороны и одно из оснований равны 1, а другое – 2.)

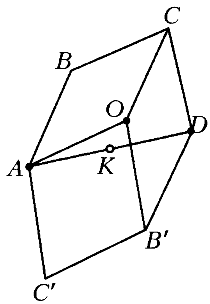


Рис. 51

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (который, очевидно, можно считать выпуклым) $AB = BC = CD = 1$ и K – середина стороны AD – см. рисунок 51. Дополнив ломаную $ABCD$ симметричной ей относительно точки K трехзвенной ломаной $DB'C'A$, мы получим центрально-симметричный шестиугольник, все стороны которого равны 1. Его можно разбить на три ромба $ABCO$, $CDB'O$, $B'C'AO$, и площадь его равна $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, где α, β и γ – углы между отрезками OA, OC и OB', в сумме дающие 2π. Согласно предыдущей задаче эта площадь не больше $3\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, причем равенство возможно, когда $\alpha = \beta = \gamma = 2\pi\ 3$, т.е. когда построенный шестиугольник – правильный.

∇ Можно доказать, что наибольшим по площади среди всех n-угольников с заданными длинами $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ последовательных сторон (кроме одной, AZ) будет тот, у которого все вершины лежат на полуокружности с диаметром AZ. Это – вариант «*задачи Дидоны*» о том, какую наибольшую площадь, примыкающую к заданной прямой, можно огородить линией данной длины с концами на этой прямой (такой линией будет полуокружность).

Если же известны все длины сторон n-угольника, то наибольшим по площади будет (единственный – если порядок сторон фиксирован) вписанный в окружность. Соответственно, наибольшую площадь среди всех фигур данного периметра имеет круг (*изопериметрическая теорема*, см. [35]).

Задача **4-20.** *Ответ*: $\sqrt{3}/2$.

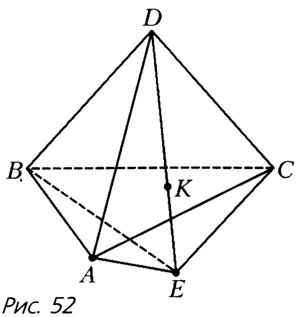


Рис. 52

Выпуклый многогранник с 5 вершинами не может быть ничем иным, кроме объединения двух тетраэдров (треугольных пирамид) с общим основанием (рис. 52). В самом деле, у него найдется такая вершина, из которой выходят 4 ребра ко всем остальным вершинам (если бы из каждой вершины исходило только 3 ребра, то всего было бы $5 \cdot 3 = 15$ концов ребер, а это число равно удвоенному числу всех ребер и должно быть четно). Если AB, AD, AC и AE – четыре последовательных ребра четырехгранного угла с вершиной A, то наш многогранник – объединение тетраэдров $ABCD$ и $ABCE$ с общим основанием ABC. Оценим объем многогранника:

$$V = S\left(h_E + h_D\right)/3 ,$$

где h_D и h_E – высоты тетраэдров, опущенные соответственно из вершин D и E на основание ABC, S – площадь треугольника ABC.

Пусть K – точка пересечения отрезка DE с плоскостью ABC; тогда $h_D + h_E \leq DK + KE = DE \leq 2$, поскольку расстояние между любыми двумя точками на сфере не больше ее диаметра.

Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC (т.е. сечения сферы плоскостью ABC). Тогда (см. задачу 4-18 или 4-19)

$$S \leq 3\sqrt{3}R^2/4 \leq 3\sqrt{3}/4 ,$$

поскольку радиус любого сечения сферы не больше радиуса сферы. Итак, $V \leq \sqrt{3}/2$, причем $V = \sqrt{3}/2$ в случае, когда ABC – правильный треугольник, вписанный в экватор, а D и E – полюсы сферы.

∇ Общая задача: среди всех вписанных в сферу многогранников с n вершинами найти многогранник максимального объема – очень трудна.

Можно показать, что для $n = 6$ таким многогранником будет правильный октаэдр, но для $n = 8$ многогранником наибольшего объема будет не куб. Для плоского аналога этой задачи дело обстоит значительно проще: наибольшим по площади вписанным в данную окружность n-угольником для каждого n является, очевидно, правильный (это – простое следствие выпуклости синуса на отрезке от 0 до π, см. обсуждение задачи 4-18).

Задача **4-21.** Рассмотрим единичные квадраты центрами во всех узлах сетки, находящихся внутри круга радиуса 10 (стороны квадратов параллельны линиям сетки).

Поскольку длина диагонали такого квадрата равна $\sqrt{2} < 2$, все эти квадраты покрывают круг радиуса 9, концентрический с данным кругом. Поэтому сумма их площадей (численно равная количеству узлов сетки) больше 81π – площади круга радиуса $81\pi > 251$.

∇ Можно сформулировать более общую задачу: оценить число решений в целых числах x, y неравенства $x^2 + y^2 < n$ (в нашей задаче

$n = 100$). Из нашего рассуждения следует, что число решений не меньше $\pi\left(\sqrt{n}-1\right)^2$ (см. [91]).

Задача **4-22.** *Ответ*: нельзя.

Проведем сферу радиуса R с центром в данной точке O. Для каждого луча построим коническую поверхность с вершиной O, осью которой служит этот луч, а угол образующей с осью составляет 30° °; рассмотрим «шапочку» – часть сферы, лежащую внутри этого конуса. Площадь этой «шапочки» (сферического сегмента) равна $2\pi Rh$, где h – высота «шапочки»:

$$h = R(1-\cos 30°) = R\left(1-\sqrt{3}/2\right),$$

поэтому отношение площади «шапочки» к площади $4\pi R^2$ всей сферы равно

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \frac{1}{15}.$$

(Последнее неравенство эквивалентно таким: $\left(2-\sqrt{3}\right)15 > 4$, $26 > 15\sqrt{3}$, $26^2 = 276 > 15^2 \cdot 3 = 675$.)

Таким образом, некоторые две из 15 «шапочек», соответствующих 15 лучам, обязательно будут пересекаться, а следовательно, некоторые два луча образуют угол меньше $60°$.

∇ Можно поставить более общий вопрос: какое наибольшее значение a_n может принимать наименьший из углов между n лучами, выходящими из одной точки пространства (или, что эквивалентно, какой наибольший размер могут иметь n одинаковых непересекающихся «шапочек» на сфере)? Точный ответ на этот вопрос известен лишь для $n \le 9$ и $n = 12$, хотя для многих значений n получены хорошие оценки для величины α_n – см. [116].

Задача **4-23.** Отметим на окружностях точки: на первой – A, на второй – B. Положение второй окружности относительно первой при их наложении будем задавать угловой величиной t дуги $\overset{\frown}{AB}$, $0° \le t < 360°$ (отсчет идет против часовой стрелки).

Назовем значение t запрещенным, если при соответствующем ему расположении окружностей хотя бы одна пара отмеченных дуг пересекается.

Рассмотрим некоторую дугу в $25°$ и некоторую дугу в $30°$. Они пересекаются на некотором отрезке значений t величиной $55°$. Всего таких запрещенных отрезков не больше чем пар дуг, т.е. $3 \cdot 2 = 6$. Поэтому множество запрещенных значений t имеет общую величину не больше $6 \cdot 55° = 330°$ и не покрывает все множество значений t – от $0°$ до $360°$. Значит, есть и незапрещенные значения t, при которых никакая пара дуг не пересекается.

∇ Аналогично можно доказать, что если на одной единичной окружности отмечены неперекрывающиеся дуги $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а на другой – дуги $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, причем

$$m(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + n(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m) < 360^\circ ,$$

то окружности можно совместить так, чтобы отмеченные дуги не пересекались.

Интересен и в некотором смысле «обратный» вопрос: при каких условиях на числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ можно расположить соответствующие дуги так, чтобы при любом наложении окружностей некоторые дуги перекрывались?

Отметим еще, что метод нашего решения задачи 4-23 можно назвать непрерывным аналогом принципа Дирихле (см. задачу 2-9); и недостаток у них общин: этот метод не показывает, как найти требуемый способ наложения.

Задача **4-24.** Проведем взвешивание гирек в три этапа.

1. Возьмем две гирьки из пяти и сравним их. Пусть их массы оказались a и b, причем $a < b$. Возьмем еще две гирьки и сравним их: $c < d$. Затем сравним более тяжелые гирьки этих пар; можно считать, что $b < d$.

2. Найдем место пятой гирьки с массой e среди тройки $a < b < d$. Для этого достаточно двух взвешиваний: сначала надо сравнить e с b, затем е нужно сравнить с a, если $e < b$, и с d, если $e > b$. Теперь мы знаем, как упорядочены четыре гирьки a, b, d и e.

3. Найдем место гирьки c среди тройки гирек a, b, e; на это также уйдет два взвешивания. Поскольку после этапа 1 мы знаем, что $c < d$, тем самым мы найдем место c среди четырех остальных гирек.

На этапе 1 мы произвели три взвешивания, на этапах 2 и 3 – по два взвешивания, т.е. всего 7 взвешиваний.

∇ Докажем, что меньше чем за 7 взвешиваний упорядочить 5 гирек нельзя. В самом деле, всего имеется $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ вариантов упорядочения пяти гирек. Каждое взвешивание имеет два исхода. Поэтому p взвешиваний могут осуществить выбор не более чем из 2^p вариантов. (В худшем для нас случае после очередного взвешивания число возможных вариантов сокращается не более чем вдвое.) Поэтому, чтобы 5 гирек можно было упорядочить за p взвешиваний, должно выполняться неравенство $2^p \geq 120$, или $p \geq \log_2 120$, откуда $p \geq 7$.

В общем случае для упорядочения n гирек заведомо нужно не менее чем $\log_2(n!)$ взвешиваний.

Общая задача о наименьшем числе $F(n)$ взвешиваний, за которое можно упорядочить n гирек, полностью далеко не решена и вызывает у специалистов по программированию большой интерес.

Придумано несколько общих способов упорядочения n гирек, однако при больших n число взвешиваний во всех этих способах превышает число $[\log_2 n!]+1$. Самый простой из них – это так называемый *алгоритм «бинарных вставок»*. На k-м этапе этого алгоритма ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) берется какая-нибудь новая ($k+1$)-я гирька и ей находится место среди цепочки уже упорядоченных k гирек. Сначала она сравнивается по массе с гирькой, стоящей в середине этой цепочки, затем – с гирькой в середине той половины цепочки, в которой она оказалась, и т.д. На k-й этап тратится не более чем $[\log_2 k]+1$ взвешиваний. Таким образом, мы можем упорядочить n гирек не более чем за

$$(1+\log_2 2)+(1+\log_2 3)+\ldots+(1+\log_2(n-1))<n(1+\log_2 n)$$

взвешиваний.

Итак, наименьшее число $F(n)$ взвешиваний удовлетворяет неравенствам

$$\log_2(n!)\le F(n)<n(1+\log_2 n).$$

Лишь при $n\le 4$ алгоритм «бинарных вставок» дает правильные значения $F(n)$: $F(2)=1$, $F(3)=3$, $F(4)=5$. Для случая $n = 5$ он требует 8, а не $F(5)=7$ взвешиваний. Обобщение того способа взвешиваний, который был указан в решении задачи про пять гирек (алгоритм сортировки «вставками и слиянием» [94]), дает наименьшее возможное число $F(n)$ взвешиваний при $n\le 12$ и $n = 20, 21$, но и он (как сообщил нам В.С.Гринберг) не является оптимальным при всех n.

Задачи для самостоятельного решения

4-25. Пусть a и b – длины катетов, а c и h – длины гипотенузы и опущенной на нее высоты прямоугольного треугольника. Какое наибольшее значение может принимать величина $(c+h)/(a+b)$?

4-26. Про квадратный трехчлен $f(x)=ax^2-ax+1$ известно, что $|f(x)|\le 1$ при $0\le x\le 1$. Найдите наибольшее возможное значение a.

4-27. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

4-28. Сумма десяти различных натуральных чисел равна 1986. Какое наибольшее значение может при этом принимать сумма трех наименьших из них?

4-29. Докажите, что если величины углов выпуклого пятиугольника составляют арифметическую прогрессию, то каждый из них больше $36°$.

4-30. Внутри треугольника площади 1 берется произвольная точка и через нее проводятся прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате треугольник разбивается на 6 частей. Занумеруем площади этих частей в порядке возрастания: $S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_6$. Какие значения может принимать каждая из этих шести величин?

4-31. Площадь четырехугольника равна 1. Какую наименьшую величину может иметь сумма его диагоналей?

4-32. 9 одинаковых авторучек стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же авторучек – 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна авторучка?

4-33. Найдите наименьшее натуральное n, для которого существует такое натуральное m, что

$$\frac{220}{127} < \frac{m}{n} < \sqrt{3}.$$

4-34. Два промышленных предприятия, «Малыш» и «Карлсон», могут работать на любом из трех видов топлива: нефти, угле, газе. Запасы нефти таковы, что «Малыш» может проработать на имеющейся нефти 16 месяцев, а «Карлсон» – 9 месяцев. Угля хватило бы «Малышу» на 11 месяцев, а «Карлсону» – на 7 месяцев. Газ «Малыш» расходовал бы 5 месяцев, а «Карлсон» – 3 месяца. Какое наибольшее время смогут проработать оба предприятия на этих запасах топлива? (Начинают и кончают работать оба предприятия одновременно.)

4-35. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 км, и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов при этом могло его обогнать? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.)

4-36. Найдите все решения системы уравнений

$$x + y = 2,$$
$$xy - z^2 = 1.$$

4-37. Найдите 11 чисел, каждое из которых равно квадрату суммы десяти остальных.

4-38. При каком натуральном n величина $\dfrac{n^2}{(1{,}001)^n}$ принимает наибольшее значение?

4-39. При каких значениях n можно подобрать n чисел так, что сумма всех попарных произведений этих чисел равна 1, а сумма квадратов всех этих чисел меньше чем 0,01?

4-40. Докажите, что при всех положительных a, b, c выполняется неравенство

$$a^5+b^5+c^5 \geq a^2b^2c+a^2c^2b+b^2c^2a.$$

4-41. Докажите, что при $0<a<\dfrac{\pi}{2}$, $0<b<1$ верно неравенство

$$\int_0^a \sin x\,dx+\int_0^b \arcsin x\,dx \geq ab.$$

4-42. Пусть a, b, c –стороны треугольника, P и S – его периметр и площадь соответственно. Докажите неравенства:

а) $P^2/3 \leq a^2+b^2+c^2 < P^2/2$;

б) $S<(ab+bc+ca)/6$.

4-43. Что больше:

а) 3^{500} или 7^{300}; б) $2^{3^{100}}$ или $3^{2^{150}}$;

в) $\log_5 6$ или $\log_6 7$; г) $\sin 6°/\sin 5°$ или $\sin 7°/\sin 6°$;

д) $\operatorname{tg} 6°/\operatorname{tg} 5°$ или $\operatorname{tg} 7°/\operatorname{tg} 6°$?

4-44. Докажите, что:

а) для любых положительных чисел x, y, z

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}.$$

б) для любых чисел α, β, γ, заключенных между 0 и π,

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \leq \sin^3\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

4-45. Представьте число 100 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

4-46. Какую наибольшую площадь может иметь пятиугольник, длины четырех сторон которого равны 1?

4-47. Можно ли в круге радиуса 10 разместить 300 точек так, чтобы попарные расстояния между ними были не меньше 1?

4-48. На одной из двух одинаковых окружностей отмечены 50 красных точек, на другой – несколько синих дуг, сумма длин которых меньше, чем $1/50$ длины окружности. Докажите, что можно так наложить первую окружность на вторую, что ни одна из красных точек не окажется ни на одной из синих дуг.

4-49. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки P и Q, из которых опускаются перпендикуляры PK и QH на гипотенузу. Найдите наименьшее значение суммы

$$KP + PQ + QH.$$

4-50. Два крейсера идут по морю с постоянными скоростями. В 8.00 расстояние между ними было 20 миль, в 8.35 – 15 миль, в 8.55 – 13 миль. В какой момент времени они будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга? Каково это расстояние? (Море считается плоским, а крейсеры – точками.)

§ 5. НЕОБЫЧНЫЕ ПРИМЕРЫ И КОНСТРУКЦИИ

5-1. Поезд двигался в одном направлении 5,5 ч. Известно, что за любой отрезок времени длительностью в один час он проезжал ровно 100 км.

а) Верно ли, что поезд ехал равномерно?

б) Верно ли, что средняя скорость поезда равна 100 км/ч?

5-2. Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Может ли быть так, что за любые пять идущих подряд месяцев его общий расход превышал доход, а в целом за год его доход превысил расход?

5-3. Можно ли число 203 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже было равно 203?

5-4. Верно ли следующее утверждение: из любых шести натуральных чисел можно выбрать либо три попарно взаимно простых числа, либо три числа, имеющих общий делитель, больший единицы?

5-5. Верны ли следующие утверждения:

а) из любых пяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать какие-нибудь три, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания;

б) из любых девяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать какие-нибудь четыре, стоящих в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?

5-6. а) Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их кубов быть больше 1?

б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых вдобавок меньше 1.

5-7. Пусть $f(x)$ – функция, непрерывная в каждой точке отрезка $[0;\ 1]$ и такая, что $f(0)=f(1)$. Верно ли, что график этой функции имеет хорду, параллельную оси абсцисс:

а) длины $1/5$; б) длины $2/5$?

(Хорда графика – отрезок с концами на графике.)

5-8. Может ли так быть, что длины всех сторон одного треугольника меньше 1 см, длины всех сторон другого треугольника больше 100 м, а площадь первого треугольника больше площади второго?

5-9. Может ли так быть, что:

а) длины всех трех высот треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 100 $см^2$;

б) длины всех трех высот треугольника больше 2 см, а его площадь меньше 2 $см^2$?

5-10. Верно ли следующее утверждение: для любой точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, сумма расстояний от нее до вершин четырехугольника меньше его периметра?

5-11. Можно ли разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник на несколько подобных ему треугольников так, чтобы среди них не было равных?

5-12. Можно ли из трех стержней и нескольких ниток изготовить жесткую пространственную конструкцию так, чтобы стержни не соприкасались между собой, а были бы только связаны нитками, прикрепленными к их концам?

5-13. Можно ли в деревянном кубе проделать такую дыру, через которую можно протащить такой же куб?

5-14. Существует ли многогранник (не обязательно выпуклый), у которого столько же ребер, вершин и граней, сколько их у куба, но у которого нет четырехугольных граней?

5-15. Можно ли расположить на плоскости шесть точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена ровно:

а) с тремя; б) с четырьмя другими точками?

5-16. Существует ли замкнутая ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз и состоит из:

а) 6 звеньев; б) 7 звеньев?

5-17. Имеется много одинаковых круглых монет. Можно ли расположить на плоскости:

а) 24; б) 25

из них так, чтобы каждая касалась трех других?

5-18. Про некоторую компанию известно, что в ней каждые два не знакомых друг с другом человека имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Может ли такая компания насчитывать более четырех человек?

5-19. Три друга сыграли несколько партий в шахматы, причем каждые двое сыграли одинаковое количество партий друг с другом. Потом они стали решать, кто из них оказался победителем. Первый сказал: «У меня больше выигрышей, чем у каждого из вас». Второй сказал: «У меня меньше проигрышей, чем у каждого из вас». Третий промолчал, но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всего очков набрал именно третий. Могло ли так быть? (Очки подсчитывались так: выигрыш – 1 очко, ничья – $1/2$ очка, проигрыш – 0 очков.)

5-20. Можно ли дополнить табличку 4×4 (рис.53) буквами В, З, М и Ш[1], обвести их рамками четырех типов (квадрат, ромб, треугольник и круг) и раскрасить их в четыре цвета так, чтобы одновременно выполнялись все следующие условия:

а) в каждой строке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, все цвета и все типы рамок;

б) каждая буква должна быть раскрашена по одному разу каждым цветом;

в) рамка каждого типа должна содержать по разу каждую букву и каждый цвет?

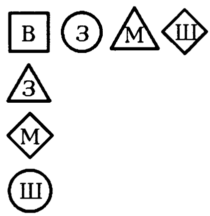


Рис. 53

5-21. После каждого занятия несколько членов математического кружка (не один и не все вместе) заходят в кафе-мороженое. При этом в кружке действует строгое правило: после каждого визита в кафе никакие двое из участников этого визита потом больше вместе мороженое не едят. На последнем занятии выяснилось, что теперь члены кружка могут есть мороженое только поодиночке.

а) Сколько могло быть занятий кружка, если в нем 4 члена? (Приведите все возможные ответы.)

б) Составьте расписание 7 посещений кафе-мороженого, если в кружке 7 членов.

Обсуждение задач

Задача **5-1.** а), б). *Ответ*: поезд мог ехать неравномерно, и его средняя скорость не обязательно равна 100 км/ч.

Покажем это. Разобьем все время движения поезда на 11 получасовых интервалов. Пусть каждый нечетный по счету получас поезд движется точно так же, как первый получас, и проходит за каждый такой получас k км ($0 \le k \le 100$), а каждый четный получас пусть он движется точно так же, как второй по счету получас, и проходит за каждый четный получас $(100 - k)$ км. Тогда, как бы ни двигался поезд первые два получаса – равномерно или нет, – за каждый час движения поезд пройдет ровно 100 км.

Для ответа на вопрос б) найдем среднюю скорость движения поезда. Расстояние, пройденное поездом за все нечетные получасовые интервалы времени, равно $6k$, а расстояние, пройденное

[1] ВЗМШ – Всесоюзная заочная математическая школа.

им за все четные интервалы, равно $5(100-k)$. Таким образом, за все 5,5 часов движения поезд прошел $6k+5(00-k)=500+k$. Поэтому его средняя скорость равна $(500+k)/5,5$ (км/ч). При $k \neq 50$ эта скорость не равна 100 км/ч.

∇ В нашем примере движение поезда было периодическим с периодом $T = 1$ час. Можно показать, что такая периодичность скорости движения следует из условий задачи. Из наших рассуждений видно, что средняя скорость поезда может оказаться любым числом в интервале от 1000/11 (при $k = 0$) до 1200/11 (при $k = 100$) км/ч.

Задача **5-2.** *Ответ*: может.

Приведем пример:

$$2;\ 2;\ 2;\ 2;\ -9;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ -9;\ 2;\ 2.$$

Здесь выписаны подряд (с учетом знака) разности между доходами и расходами человека (сальдо) за каждый месяц года. Мы видим, что сумма любых пяти последовательных чисел выписанной цепочки отрицательна (равна -1), а в целом за год сумма всех чисел положительна (равна 2).

∇ Обобщение этой задачи: в строчку выписано n чисел, при этом сумма любых k соседних чисел отрицательна; может ли в такой ситуации сумма всех n чисел быть положительной? Ответ здесь такой: если n кратно k, то этого быть не может, а если n не делится на k, то может. В нашей задаче $n = 12$, $k = 5$.

Это утверждение можно, в свою очередь, тоже обобщить. Пусть в строчку выписано m чисел. Назовем сумму q идущих подряд чисел из этой строчки q-суммой. Тогда если для натуральных чисел m, n и k выполняется неравенство $m \leq n+k-d-1$, где $d = \text{н.о.д.}(n,k)$ – наибольший общий делитель чисел n и k, то можно написать в строчку m чисел так, что все ее n-суммы будут иметь один знак, а все k-суммы – другой знак. Более того, все эти суммы могут принимать любые наперед заданные значения.

В самом деле, составим систему $k+n-2d$ линейных уравнений с $k+n-d-1$ неизвестными:

$$\begin{aligned}
&x_1+\ldots+x_n &&= a_1,\\
&\quad x_2+\ldots+x_{n+1} &&= a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad x_{k-d}+\ldots+x_{k+n-d-1} &&= a_{k-d},\\
&x_1+\ldots+x_k &&= b_1,\\
&\quad x_2+\ldots+x_{k+1} &&= b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad x_{n-d}+x_{k+n-d-1} &&= b_{n-d}.
\end{aligned}$$

Можно показать, что эта система совместна: ее матрица имеет максимально возможный ранг $k+n-2d$. Если числа n и k взаимно просты ($d=1$), то она имеет единственное решение; если же $d>1$, то в системе имеется $d-1$ свободных неизвестных.

Таким образом, по заданным n и k можно найти строчку из $n+k-d-1$ чисел, удовлетворяющих условию. Если $m \le n+k-d-1$, то строчка, образованная первыми m числами уже выписанной строчки, тоже удовлетворяет условию.

Покажем теперь, что если $m \ge n+k-d$, то не существует такой строчки из m чисел, что все ее n-суммы имеют один знак, а все k-суммы – другой.

Допустим, напротив, что нашлась такая строчка из $n+k-d$ чисел, и пусть $n>k$. Вычеркнем первые k чисел. Тогда в строчке из оставшихся $n-d$ чисел все k-суммы по-прежнему имеют один знак, а все $(n-k)$-суммы имеют другой знак. Поскольку

$$n-d=(n-k)+k-d ,$$

мы от задачи с параметрами n и k пришли к задаче с меньшими числами: k и $n-k$. Повторяя эту процедуру (похожую на алгоритм Евклида), мы придем к такой ситуации: имеется строчка чисел, в которой все d-суммы имеют один знак, а все ld-суммы – другой знак, что, очевидно, невозможно. (Заметим, что аналогичной процедурой – спуском от (n,k) к $(k,n-k)$, похожей на алгоритм Евклида, можно доказать и совместность выписанной выше системы.)

Наконец, ясно, что если не существует строчки из $n+k-d$ чисел, удовлетворяющей условию, то нельзя выписать и более длинную такую строчку.

Задача 5-3. *Ответ*: можно.
Действительно:

$$203=7+29+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{\text{167 единиц}}=7\cdot 29\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{\text{167 единиц}}.$$

∇ Поставим вопрос: какие натуральные числа нельзя представить одновременно в виде суммы и в виде произведения нескольких (одних и тех же) натуральных чисел?

Ответ на этот вопрос такой: простые числа.

Интересен и такой вопрос, связанный с задачей 5-3: при каких натуральных значениях k уравнение

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k$$

имеет ненулевое решение в целых числах?

Оказывается, что при всех значениях k. Например:

при $k = 1$ $\quad x_1 = 1$;

при $k = 2$ $\quad x_1 = x_2 = 2$;

при $k > 2$ $\quad x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-2} = 1,$

$\qquad x_{k-1} = 2, \quad x_k = k$

(см. [109], задачи 186–189).

Задача **5-4.** *Ответ*: неверно.

Контрпример: 6, 10, 15, 77, 91, 143.

Из этих шести чисел, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, $7 \cdot 11$, $7 \cdot 13$, $11 \cdot 13$, никакие три не имеют общего простого множителя, но два из каждых трех входят в первую или во вторую тройку и потому не взаимно просты.

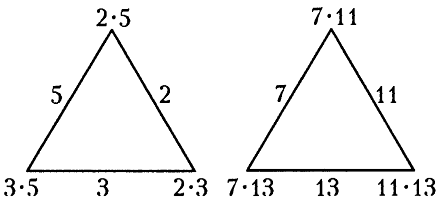


Рис. 54

Это хорошо видно на схеме – см. рисунок 54. В каждой вершине треугольника поставлено одно из чисел, а на каждой стороне – общий множитель чисел, стоящих в ее концах.

∇ Если к условию задачи добавить еще одно слово, утверждение станет верным: из любых шести натуральных чисел можно выбрать либо три попарно взаимно простых числа, либо три числа, *попарно* имеющих общий делитель, больший единицы.

Знатокам эта задача, безусловно, напомнит такую: среди шести людей всегда можно выбрать трех попарно знакомых или трех попарно незнакомых.

Задача **5-5.** а) *Ответ*: верно.

Пусть a и b – наибольшее и наименьшее из выписанных чисел. Если между ними есть какое-то число, то утверждение верно. Если они стоят рядом, то либо справа, либо слева от них есть еще два числа. Они и образуют нужную тройку чисел либо с числом a, либо с числом b.

Для знатоков. По этому поводу имеется общая теорема: в частично упорядоченном множестве, состоящем из $mn + 1$ элементов, всегда найдется либо цепочка длины $m + 1$, либо $n + 1$ попарно несравнимых элементов (эта теорема – следствие известной **теоремы Дилворта**: *в частично упорядоченном множестве минимальное число цепочек, содержащих все элементы множества, равно максимальному числу попарно несравнимых элементов*).

При рассмотрении пяти чисел их можно упорядочить так. Будем считать, что для чисел a и b выполняется отношение $a \prec b$, если a меньше b и число a стоит в выписанном ряду левее числа b. Числа c и d оказываются в этом смысле несравнимыми тогда и только тогда, когда они стоят в выписанном ряду в порядке убывания.

Поскольку $5 = 2 \cdot 2 + 1$ ($m = n = 2$), из сформулированной теоремы следует, что из пяти чисел всегда найдутся три, идущие либо в порядке возрастания (цепочка длины $m + 1 = 3$), либо в порядке убывания ($n + 1 = 3$ попарно несравнимых элемента). Если в сформулированной выше теореме положить $m = n$, то получится такое следствие: из конечной последовательности, состоящей из $n^2 + 1$ чисел, можно выбрать монотонную подпоследовательность, состоящую из $n + 1$ чисел. Интересно, что верно утверждение, которое получается из предыдущего «предельным переходом» при $n \to \infty$: из любой бесконечной последовательности можно выбрать бесконечную монотонную подпоследовательность. Доказать это даже легче, чем для конечного n.

б) *Ответ*: неверно.

Приведем контрпример – девять чисел: 3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7.

Докажем, что никакие четырех цифры в этой последовательности не идут ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания. Для этого разобьем члены последовательности на три тройки: 321, 654, 987.

Если какие-то две цифры из данных девяти стоят в убывающем порядке (та, которая меньше, стоит дальше от начала последовательности), то они обязательно из одной тройки. Значит, нельзя выбрать больше трех цифр, стоящих в убывающем порядке, поскольку все эти цифры должны находиться в одной тройке.

Если же какие-то две цифры из этих девяти стоят в возрастающем порядке, то они обязательно из разных троек. Так как троек всего три, то нельзя выбрать более трех цифр, стоящих в возрастающем порядке.

Задача **5-6**. а) *Ответ*: может.

Пример – два числа, 2 и -1: $2 + (-1) = 1$; $2^3 + (-1)^3 = 7 > 1$.

б) *Ответ*: может.

Пример – восемь чисел: два числа, каждое из которых равно 0,8, и шесть чисел, каждое из которых равно $-0,1$:

$$2 \cdot 0,8 + 6 \cdot (-0,1) = 1; \ (0,8)^3 + 6 \cdot (-0,1)^3 = 1,018 > 1.$$

Для знатоков. Эта идея – добавлять к положительным числам много отрицательных, но величиной поменьше – помогает ответить на такой вопрос: может ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходиться, а ряд из кубов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ – расходиться? Ответ на этот вопрос положителен. Приведем пример:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)+\ldots \qquad (*)$$

Ряд (*) составляется так: следом за суммой $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$ поставим $2^3=8$ сумм $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)$, затем $3^3=27$ сумм $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)$, ..., затем n^3 сумм $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}\right)$ и т.д.

Указанный ряд сходится, так как сумма N его первых членов, где

$$3\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)<N\le 3\left(1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3\right)$$

не превышает числа $\frac{1}{2(n+1)}$ (она либо равна нулю, либо равна $\frac{1}{n+1}$, либо равна $\frac{1}{2(n+1)}$).

Ряд из кубов членов ряда (*) расходится, так как сумма n^3 сумм $\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(-\frac{1}{2n}\right)+\left(-\frac{1}{2n}\right)^3$ равна $3/4$, поэтому сумма первых $3\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)$ членов равна $\frac{3n}{4}$ и, значит, неограниченно растет.

Можно доказать, что только для функций, имеющих вид $f(x)=kx$ в некоторой окрестности нуля, из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$.

Задача **5-7**. а) *Ответ*: верно.

Рассмотрим функцию $y=F(x)=f\left(x+\frac{1}{5}\right)-f(x)$, определенную и непрерывную на отрезке $[0;\,4/5]$. Нам нужно доказать, что на этом отрезке найдется такая точка x_0, что $F(x_0)=0$. По определению функции $y=F(x)$, имеем:

$$F(0)=f\left(\frac{1}{5}\right)-f(0), \qquad (1)$$

$$F\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right), \qquad (2)$$

$$F\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right), \qquad (3)$$

$$F\left(\frac{3}{5}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right), \qquad (4)$$

$$F\left(\frac{4}{5}\right)=f(1)-f\left(\frac{4}{5}\right). \qquad (5)$$

Поскольку $f(0)=f(1)$, почленно сложив равенства (1)–(5), мы получим

$$F(0)+F\left(\frac{1}{5}\right)+F\left(\frac{2}{5}\right)+F\left(\frac{3}{5}\right)+F\left(\frac{4}{5}\right)=0. \qquad (*)$$

Равенство $(*)$ возможно только в двух случаях: либо все пять слагаемых в его левой части равны нулю – тогда задача решена, либо среди этих слагаемых есть числа разных знаков. Пусть $F(x_1)$ и $F(x_2)$ – числа разных знаков, где $0 \le x_1 < x_2 \le \frac{4}{5}$. Тогда, в силу непрерывности функции $F(x)$, найдется такое число x_0 $(x_1 < x_0 < x_2)$, что $F(x_0)=0$, что и требовалось.

б) *Ответ*: неверно, график может не иметь такой хорды.

На рисунке 55 приведен нужный пример. Поясним, как он построен.

Пусть точки A и B – концы отрезка $[0;\ 1]$, точка C– его середина, а точки D и E делят его на три равные части.

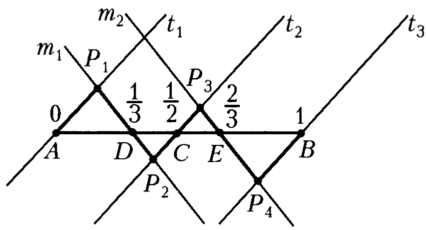


Рис. 55

Проведем через точки A, C и B параллельные наклонные l_1, l_2 и l_3, а через точки D и E – пересекающие их прямые m_1 и m_2 так, что $m_1 \parallel m_2$. Обозначив через P_1, P_2, P_3 и P_4 ближайшие к оси абсцисс точки пересечения прямых l_1, l_2 и l_3 с прямыми m_1 и m_2, получим ломаную $AP_1DP_2CP_3EP_4B$. Покажем, что эта ломаная служит искомым примером.

Во-первых, она является графиком непрерывной на отрезке $[0;\ 1]$ функции $f(x)$, причем $f(0)=f(1)=0$.

Во-вторых, она не имеет хорды длины $2/5$, параллельной оси абсцисс. Действительно, если концы хорды, параллельной оси Ox, лежат на соседних звеньях ломаной, то она не превосходит, очевидно, отрезка DE, равного $1/3$. Если же концы хорды лежат на звеньях «через одно» или «через два», то она не меньше отрезка AC, равного $1/2$. Поскольку $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, наше утверждение доказано.

∇ Аналогично решению задачи 5-7 а) можно доказать, что для графика данной в ее условии функции $y = f(x)$ существует хорда длины $\frac{1}{n}$, параллельная оси абсцисс (n – любое натуральное число) – см. [62].

Для знатоков. Последнее утверждение – частный случай **теоремы Леви**: *если у плоского континуума есть хорда длины a, то у него есть и параллельная ей хорда длины* $\frac{1}{n} \cdot a$ (где n – произвольное натуральное число).

С другой стороны, для всякого числа α $(0 < \alpha < 1)$, которое не представляется в виде $\frac{1}{n}$ (где n – натуральное число), можно аналогично решению задачи 5-7 б) построить пример плоского континуума, имеющего хорду длины 1 и не имеющего параллельной ей хорды длины α – см. [99].

Отметим еще, что для периодической непрерывной функции на прямой дело обстоит совершенно иначе: у ее графика найдется горизонтальная хорда любой заданной длины.

Задача **5-8**. *Ответ*: может.

Приведем пример. В качестве первого возьмем правильный треугольник с длиной стороны $1/2$ см, а в качестве второго – равнобедренный треугольник с основанием 200 м и высотой 10^{-7} м. Его боковая сторона больше половины основания, т.е. тоже больше 100 м, а площадь равна 10^{-5} м^2 и меньше площади первого треугольника, равной $\sqrt{3}/16$ см^2.

Задача **5-9**. а) *Ответ*: может.

Приведем пример. Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием 800 см и высотой 0,3 см. Его площадь равна $\frac{800 \cdot 0,3}{2}$ и тем самым больше 100 см^2. Покажем, что этот треугольник удовлетворяет условию.

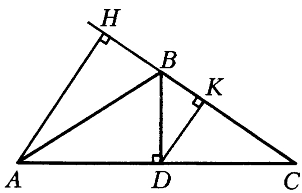


Рис. 56

Действительно, его высота AH, опущенная на боковую сторону BC (рис.56), равна удвоенной длине перпендикуляра DK, опущенного из середины основания D на боковую сторону BC, а этот перпендикуляр, в свою очередь, меньше наклонной

BD. Отсюда вытекает, что высота AH меньше чем 0,6 см и, значит, все высоты треугольника ABC меньше 1 см.

б) *Ответ*: не может.

Поскольку высоты треугольника больше 2 см, то и его стороны больше 2 см, а тогда его площадь больше чем $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \ (\text{см}^2)$.

Задача **5-10**. *Ответ*: неверно.

Контрпример показан на рисунке 57. Мы взяли три вершины A, B и D четырехугольника $ABCD$ очень близко друг к другу, а четвертую вершину C и точку O внутри четырехугольника – близко друг к другу и далеко от A, B и D.

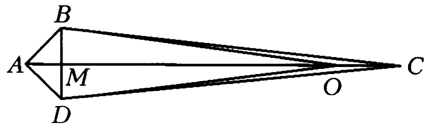


Рис. 57

Для знатоков. Поставим более общий вопрос. При каких k для любой точки, лежащей внутри четырехугольника, сумма расстояний от нее до вершин четырехугольника меньше kP (P – периметр четырехугольника)? *Ответ*: при $k \geq \frac{3}{2}$. Объясним, почему это так.

Для каждого четырехугольника $ABCD$ точкой, для которой сумма расстояний до вершин максимальна, является одна из его вершин.

В самом деле, функция (на плоскости) $M \to |AM|$, где A – фиксированная точка плоскости, выпукла (ее график – конус), а сумма четырех выпуклых функций

$$f(M) = |AM| + |BM| + |CM| + |DM|$$

тоже выпукла. Наибольшее значение выпуклой функции на многоугольнике достигается в его вершине.

Покажем теперь, что это наибольшее значение меньше $\frac{3}{2}P$. Пусть оно достигается в вершине A. Почленно складывая неравенства

$$|AC| < |AB| + |BC|, \quad |AC| < |AD| + |DC|,$$

получаем, что $2|AC| < P$ и, тем более, что

$$2|AC| < P + 2(|BC| + |CD|).$$

Прибавляя к обеим частям последнего неравенства сумму $2|AB| + 2|AD|$, получаем требуемое неравенство

$$|AB| + |AC| + |AD| < \frac{3}{2}P$$

(см. [24]).

Для любого $k < \dfrac{3}{2}$ можно построить контрпример, полагая

$$|MA| = |MB| = |MD| = |CO| = \varepsilon ,$$

где ε – достаточно маленькое число (см. рис.57).

Заметим еще, что для отыскания внутри данного выпуклого четырехугольника точки с наименьшей суммой расстояний до вершин не нужно быть большим знатоком: это точка пересечения его диагоналей.

Задача **5-11**. *Ответ*: можно.

На рисунке 58 показано, как разрезать прямоугольный равнобедренный треугольник с длиной катета 7 см на 6 попарно различных равнобедренных прямоугольных треугольников.

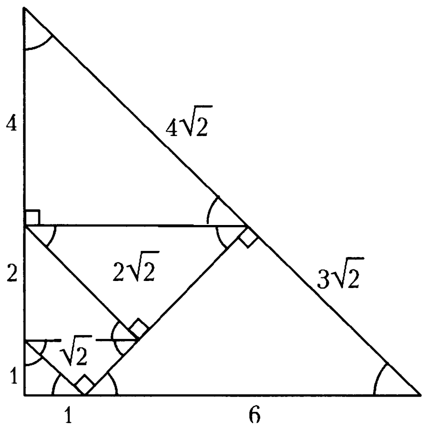


Рис. 58

∇ Оказывается, верно такое утверждение: равнобедренный прямоугольный треугольник можно разрезать на любое, большее 10, число попарно неравных равнобедренных прямоугольных треугольников.

Сначала покажем, как можно разрезать его на любое четное число частей $2k$, где $k \geq 3$. Будем исходить из равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Продолжим его катеты CA и CB и проведем прямую l через вершину B перпендикулярно гипотенузе – см. рисунок 59.

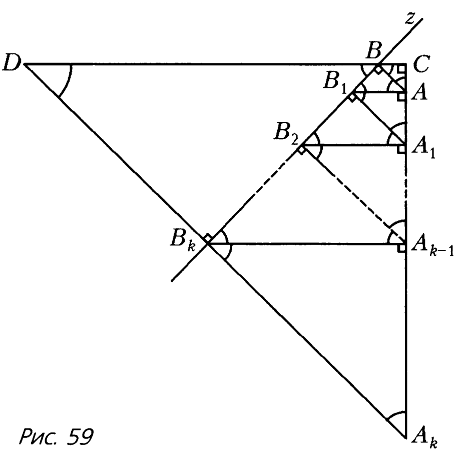


Рис. 59

Построим ломаную $AB_1A_1B_2A_2B_3\dots B_kA_k$, все звенья B_iA_i которой параллельны прямой AB, а все звенья A_iB_{i+1} параллельны прямой BC; через последнее звено B_kA_k ломаной проведем прямую, которая пересечет прямую

BC в некоторой точке D. В результате мы придем, как легко показать, к прямоугольному равнобедренному треугольнику DCA_k, разбитому требуемым образом на $2k + 2$ подобных попарно неравных равнобедренных прямоугольных треугольника (частный случай этой конструкции при $k = 2$ использован в решении задачи 5-11).

В цепочке треугольников ACB, BAB_1, AB_1A_1, $A_1B_1B_2$, $B_2A_1A_2$, ..., $A_{k-1}B_kA_k$ каждый следующий треугольник подобен предыдущему с коэффициентом подобия $\sqrt{2}$ (гипотенуза предыдущего треугольника равна катету следующего), поэтому в последовательности отрезков CA, AA_1, A_1A_2, ..., $A_{k-1}A_k$ каждый последующий вдвое длиннее предыдущего. Отсюда вытекает практический способ разрезания данного треугольника требуемым образом.

Пусть нужно разделить равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a на $2k + 2$ частей. Отложим от вершины прямого угла на катете последовательно отрезки длиной $\frac{a}{2^k-1}$, $\frac{2a}{2^k-1}$, $\frac{4a}{2^k-1}$, ..., $\frac{2^{k-1}a}{2^k-1}$ (так как $1+2+\ldots+2^{k-1} = 2^k - 1$, это можно сделать); полученные точки и будут вершинами A, A_1, A_2, ..., A_k ломаной описанной выше конструкции.

Итак, можно разрезать треугольник на $2k$ частей при $k \geq 3$. Поскольку меньший из полученных при этом треугольников можно опять разрезать на 6 частей указанным выше способом, мы можем разрезать исходный треугольник на $2k + 5l$ частей, где k – любое целое число, большее 3, а l – любое натуральное число. Но любое целое число, большее 10, представляется в таком виде, так что высказанное утверждение справедливо.

Остался открытым вопрос о возможности разбиения треугольника на $n \leq 5$, $n = 7$ и $n = 9$ частей. Решение этого вопроса мы оставляем читателю.

Задача **5-12**. *Ответ*: можно.

Эскиз нужной конструкции с девятью нитками – на рисунке 60. Для ее изготовления в качестве стержней удобно взять 3 карандаша.

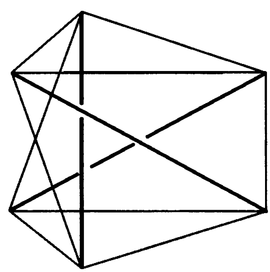


Рис. 60

Если все нитки одинаковой длины l и стержни имеют одинаковую длину d, то для жесткости конструкции, изображенной на рисунке 60, необходимо, чтобы

$$d = l\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1,47l\ .$$

В нашей конструкции концы стержней образуют два правильных треугольника, расположенных в плоскостях, перпендикулярных прямой, соединяющей их центры, и повернутых на некоторый угол друг относительно друга. Сами стержни лежат на попарно скрещивающихся прямых.

∇ Соединение стержней и ниток на рисунке 60 такое же, как у октаэдра (образует граф октаэдра – см. рис.67 к задаче 5-15). Доказать математически существование такой конструкции (достаточность условия $d = l\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$) трудно.

Это соединение изобрел в 60-х гг. архитектор Б.Фуллер. После него появилось множество различных конструкций такого типа. При написании этой книги авторы поставили следующую задачу: изготовить жесткую пространственную конструкцию из стержней и ниток так, чтобы стержни не соприкасались между собой и от каждого конца стержней отходило ровно по две нитки. Такое соединение было изготовлено архитектором В.Колейчуком. Схема соединения показана на рисунке 61.

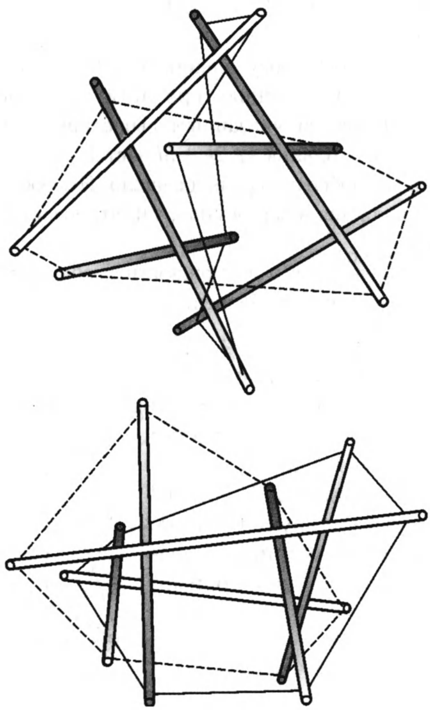


Рис. 61

Архитектор, инженер и дизайнер Ричард Букминстер Фуллер приобрел наибольшую известность благодаря своим конструкциям под названием «геодезический купол». Им и был введен связанный с ними термин *«самонапряжение (tensegrity)»*.

Однако архитектор Вячеслав Колейчук, много занимавшийся такими системами в 90-х годах прошлого века, поставил под сомнение приоритет Б.Фуллера. Он утверждал, что впервые такие системы были изобретены нашим отечественным конструктивистом Карлом Иогансоном в 1921 г. Этим системам посвящено большое количество современных исследований с применением в интерактивных и адаптивных конструкциях.

В архитектуре термин «тенсегрити» обозначен Б.Фуллером как «свойство каркасных структур, в которых задействуются цельные детали, нагруженные на натяжение, и составные детали, нагруженные на сжатие, работать таким образом, что каждая деталь функционирует с максимальной эффективностью и экономичностью».

Интересно, что писатель и антрополог Карлос Кастанеда (по личному разрешению Б.Фуллера!) использовал термин «тенсегрити» для обозначения системы дыханий, движений и позиций тела, разработанных индейскими шаманами, жившими в древней Мексике, направленной на формирование определенных свойств и качеств человека, занимающегося по этой системе. Таким образом, тенсегрити по Кастанеде – модернизированная версия некоторых движений и дыханий, называемых «магическими пассами».

Понятие «тенсегрити» используется также при исследовании процессов в биологии (особенно в биологии клетки) и в некоторых других отраслях, например, в исследованиях строения текстильных тканей, дизайне, исследованиях социальных структур, ансамблевой музыке и геодезии.

Особо отметим применение математической основы этого понятия в химии. В конце XX века возник большой интерес к *фуллеренам* (конечно, названным в честь Б.Фуллера) или *бакиболам* (или *букиболам*). Так называют молекулярные соединения, принадлежащие классу аллотропных форм углерода[2] (другие формы – алмаз, карбин и графит) и представляющие собой выпуклые замкнутые многогранники, составленные из четного числа (трехкоординированных) атомов углерода (именно по этому принципу построены геодезические конструкции Б.Фуллера). Сначала рассматривали лишь структуры, включающие

---

[2] *Аллотропия* – свойство существования одного и того же типа химического элемента в виде двух или нескольких простых веществ, различных по строению и свойствам. Например, графит и алмаз – аллотропические формы углерода.

только пятиугольные и шестиугольные грани. По теореме Эйлера для многогранников, если n, e и f – количество вершин, ребер и граней многогранника соответственно, то $n - e + f = 2$. С помощью этой теоремы можно доказать, что необходимым условием существования указанного выше многогранника служит наличие у него ровно 12 пятиугольных граней и $\left(\frac{n}{2} - 10\right)$ шестиугольных граней. В состав молекул фуллерена могут входить, помимо атомов углерода, и атомы других химических элементов.

Возможность существования фуллеренов была предсказана в 1971 г. в Японии, а теоретически обоснована в 1973 г. в СССР. За открытие фуллеренов Х.Крото, Р.Смолли и Р.Керлу в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия по химии. В настоящее время продолжается интенсивное изучение этих соединений.

Задача **5-13**. *Ответ*: можно.

Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (рис.62,*а*) и пространственный шестиугольник $AA_1B_1C_1CDA$ (его вершины не лежат в одной плоскости). Оказывается, что сквозь этот шестиугольник (а значит, и сквозь куб) можно свободно, не задевая его сторон, протащить куб с ребром a.

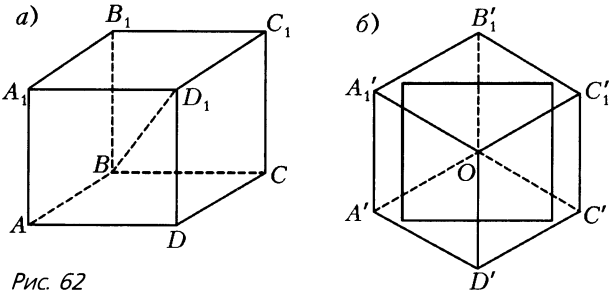


Рис. 62

Чтобы убедиться в этом, изобразим на рисунке 62,*б* проекцию куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали BD_1. В силу симметрии куба эта проекция– правильный шестиугольник $A'A_1'B_1'C_1'C'D'$, где A' – проекция точки A, A_1' – проекция точки A_1 и т.д. Таким образом, контур шестиугольника $A'A_1'B_1'C_1'C'D'$ – проекция пространственного шестиугольника $AA_1B_1C_1CD$, а в центр O правильного шестиугольника проектируются оба конца диагонали куба BD_1.

Поскольку синус угла между любым ребром куба и его диагональю равен $\sqrt{2/3}$, то сторона правильного шестиугольника равна $a\sqrt{2/3}$, а радиус вписанной в него окружности равен $a\sqrt{2}/2$ – половине диагонали квадрата со стороной a. Поэтому в шестиугольнике целиком, не задевая его сторон, поместится квадрат с центром в точке O и стороной a, как показано на рисунке 62,*б*.

Отсюда вытекает, что если поставить куб с ребром a так, чтобы его нижняя грань совпала с квадратом на рисунке 62,*б*, и двигать куб перпендикулярно плоскости шестиугольника, то куб не заденет сторон шестиугольника. Значит, его можно также протащить и сквозь пространственный шестиугольник вдоль диагонали BD_1.

Таким образом, в деревянном кубе можно пробить сквозную дыру, через которую можно протащить такой же куб – см. рисунок 63.

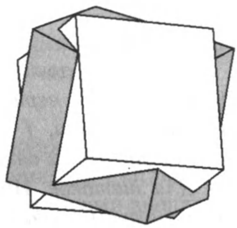


Рис. 63

∇ Из приведенных рассуждений вытекает, что сквозь куб с ребром a можно протащить даже куб несколько больших размеров, чем он сам, а именно любой куб с ребром, меньшим чем $\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}a$.

Задача **5-14**. *Ответ*: существует.

На рисунке 64 приведен пример такого многогранника. Он получен следующим образом: на ребре BD тетраэдра $ABCD$ сделана «зарубка» из двух треугольных граней – GEH и GFH. У него 8 вершин, 6 граней, 12 ребер.

∇ В многограннике, изображенном на рисунке 64, две грани являются шестиугольниками с двумя общими ребрами, BE и FD. В выпуклом многограннике такая ситуация невозможна: две грани выпуклого многогранника могут иметь не более одного общего ребра.

Задача **5-15**. а) *Ответ*: можно. Пример приведен на рисунке 65.

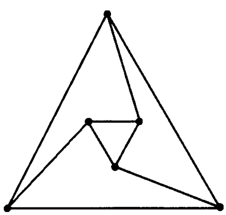


Рис. 64

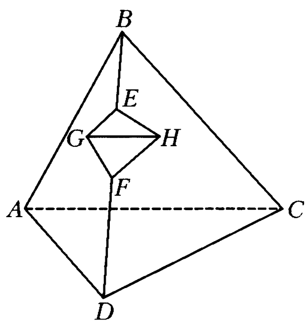


Рис. 65

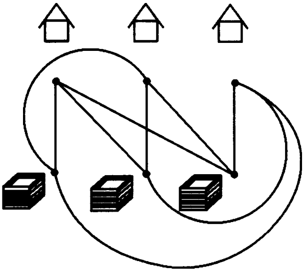


Рис. 66

∇ Эта задача напоминает известную задачу «о домиках и колодцах»: можно ли начертить на плоскости девять не пересекающихся дорог, которые соединяют каждый из трех «домиков» с каждым из трех «колодцев»? В этой сети дорог (так же, как в задаче 5-15) 6 вершин и от каждой вершины отходят 3 отрезка (рис.66). Однако ответ на вопрос «о домиках и колодцах» отрицательный: такую сеть начертить нельзя.

Ключом к доказательству этого факта служит **теорема Эйлера**: *пусть n – число вершин, m – число отрезков, соединяющих некоторые из этих вершин, f – число многоугольников, на которые разбита плоскость этими отрезками; тогда $n + f = m + 1$* (см. [92]).

Для знатоков. Имеет место **теорема** (Вагнер, Фари, Штейн): *если граф можно изобразить на плоскости без пересечений, то его можно изобразить на плоскости и так, чтобы все его ребра были отрезками*. Необходимое и достаточное условие планарности графа – **теорема Понтрягина–Куратовского**: *граф можно без пересечений изобразить на плоскости тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу с шестью вершинами типа «домики – колодцы» или полному графу с пятью вершинами* (пять точек, попарно соединенных ребрами) (см. [92]).

б) *Ответ*: можно.

Пример показан на рисунке 67. Можно считать, что здесь изображен проволочный октаэдр (рис.68), сфотографированный из точки, лежащей вблизи центра одной из его граней.

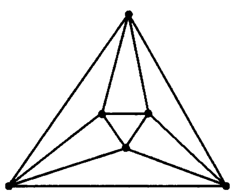


Рис. 67

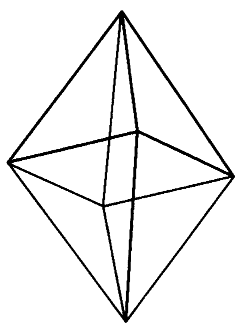


Рис. 68

Задача **5-16**. а) *Ответ*: существует. Пример показан на рисунке 69.

∇ Для любого четного $n \geq 6$ существует замкнутая ломаная из n

звеньев, пересекающая каждое свое звено ровно один раз. Пример для

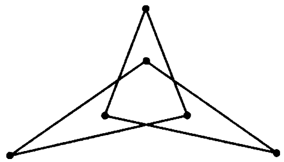


Рис. 69

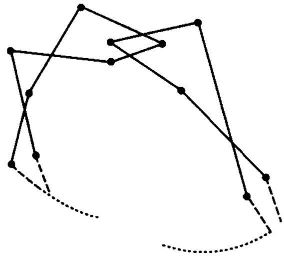


Рис. 70

$n = 6$ уже построен, а для $n \geq 8$ на рисунке 70 показана конструкция части такой ломаной (закон построения остальной части ясен).

б) *Ответ*: не существует.

Предположим, что удалось построить такую ломаную. Рассмотрим какую-нибудь точку ее самопересечения. В ней пересекаются два звена, причем больше ни с какими другими звеньями они не пересекаются. Поэтому все звенья ломаной можно разбить на пары, соответствующие точкам ее самопересечения. Значит, звеньев – четное число и их не может быть семь.

∇ Это рассуждение показывает, что вообще не существует ломаной с нечетным числом звеньев, пересекающей каждое свое звено ровно один раз.

Задача **5-17**. *Ответ*: а) можно; б) нельзя.

а) На рисунке 71,*а* показано, как можно разложить 24 монеты требуемым образом. Поясним, как это сделано.

Пусть радиус монет равен R. Расположим центры четырех монет в вершинах ромба со стороной $2R$. Из таких ромбиков можно набирать нужные узоры, стыкуя их крайними (расположенными по большой диагонали) монетами.

а) *б)*

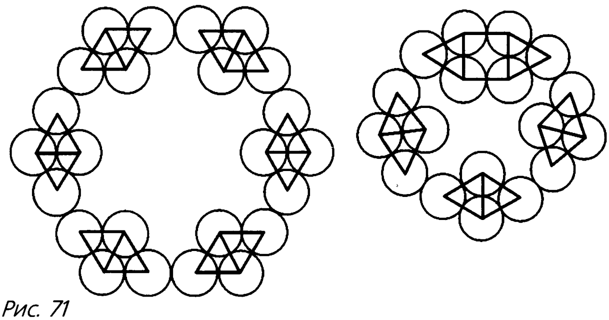


Рис. 71

б) Предположим, что 25 монет разложены на плоскости требуемым образом, и придем к противоречию.

Отметим на краю каждой монеты те три места, в которых она касается трех других. Подсчитаем общее количество отмеченных мест двумя способами. С одной стороны, число отмеченных мест четно, так как эти места разбиваются на пары в точках касания монет. С другой стороны, число отмеченных мест нечетно, так как оно равно количеству монет 25, умноженному на 3.

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

∇ Интересно выяснить, при каких k нельзя расположить на плоскости некоторое (конечное) число одинаковых круглых монет так, чтобы каждая касалась k остальных. Оказывается, этого нельзя сделать при $k > 3$. Докажем это.

Предположим, что на плоскости разложены одинаковые круглые монеты так, что каждая из них касается k других. Отметим на плоскости центры всех монет и рассмотрим их выпуклую оболочку – наименьший содержащий их выпуклый многоугольник. Пусть A, B и C – три последовательные его вершины; тогда угол ABC меньше 180°. Пусть монета с центром в точке B касается монет с центрами $O_1, O_2, \ldots, O_k$ (центры занумерованы в порядке обхода вокруг точки B в одном из двух возможных направлений). Легко показывается, что каждый из углов O_1BO_2, O_2BO_3, ..., $O_{k-1}BO_k$ не меньше $60°$. Отсюда вытекает, что должно выполняться неравенство $k \cdot 60° \le 180°$, из которого следует, что $k \le 3$.

Покажем теперь, как при $k = 3$ можно разложить требуемым образом любое достаточно большое четное число монет. Для этого удобно использовать заготовки двух типов: «ромбик» из четырех монет и «фонарик» из шести монет.

Из четырех «ромбиков» легко собрать цепочку из 16 монет. На рисунке 71,*б* показано, как можно эти «ромбики» и «фонарики» сложить замкнутой цепочкой, содержащей 18 монет. Любое большее четное число можно представить в виде суммы $4n + 6m$ и собрать соответствующую цепочку из n «ромбиков» и m «фонариков».

Интересны аналогичные вопросы о расположении шаров в пространстве. В 1953 г. доказано, что к шару в пространстве можно приложить не более 12 таких же шаров [116].

Задача **5-18**. *Ответ*: может.

Поставим в соответствие каждому человеку точку, причем разным людям – разные точки. Если два человека знакомы между собой, то соединим соответствующие им точки отрезком. Тогда задача сведется к такой: существует ли схема, у которой нет треугольников, а каждые две точки либо соединены отрезком, либо являются противоположными вершинами ровно одного четырехугольника?

На рисунке 72,*а*, *б* приведены два простейших примера таких схем. Нам требуется привести пример схемы, состоящей более чем из четырех точек. На рисунке 72,*в* приведен пример схемы из 16 точек и 40 отрезков, удовлетворяющий условию. Полученная схема удовлетворяет условию задачи. В этом можно убедиться перебором, который упрощается из-за симметрии схемы.

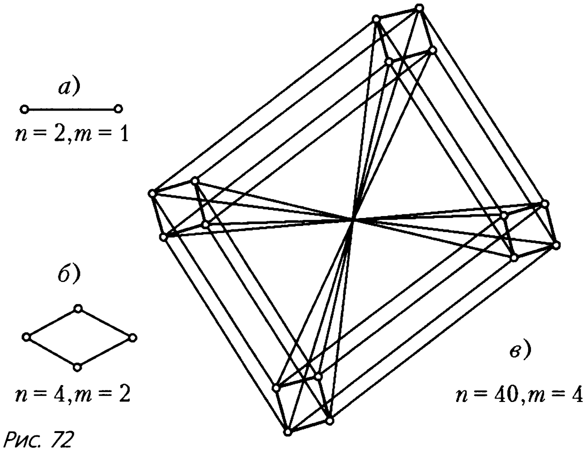


Рис. 72

∇ Интересно, что описанная в решении задачи 5-18 конфигурация может быть описана как множество вершин, ребер и больших диагоналей *четырехмерного куба*.

Можно показать, что в условиях задачи 5-18 у каждого человека в данной компании имеется одинаковое количество знакомых. Действительно, пусть для каждого человека A через M_A обозначено множество его знакомых, а через N_A – множество людей, незнакомых с A. Тогда каждому элементу из N_A можно поставить в соответствие пару элементов из M_A (тех, с кем он знаком). Нетрудно доказать, что соответствие между множеством N_A и множеством всевозможных пар элементов M_A будет взаимно однозначным. Следовательно, если в M_A содержится m_A элементов, то в N_A их содержится $\frac{m_A(m_A-1)}{2}$, а всего в компании соберется $n = 1 + m_A + \frac{1}{2}m_A(m_A - 1)$ людей. Это равенство выполняется для любого человека A. Но уравнение

$$1 + x + \frac{1}{2}x(x-1) = n$$

имеет (при $n > 1$) только один положительный корень, поэтому число m_A одно и то же для всех A (см. [10]).

Полного ответа на вопрос, при каких значениях n существуют подобные компании, мы не знаем. Как показано выше, $n = 1 + m(m+1)\ 2$, где m – количество знакомых одного человека. Нетрудно доказать, что такие компании не существуют при $m = 3$, $m = 4$ и при $m = 4k + 3$, где k – любое натуральное число. Все известные нам примеры таких компаний приведены на рисунке 72,*а*, *б*, *в*.

Задача **5-19**. *Ответ*: могло.

На рисунке 73 схематически показаны результаты всех партий турнира шахматистов, удовлетворяющего условию задачи. В нем каждая пара шахматистов сыграла по 7 партий. При этом:

– первый выиграл у второго две партии;

– второй выиграл у первого две партии;

– первый выиграл у третьего три партии;

– третий выиграл у первого четыре партии;

– остальные партии турнира окончились вничью.

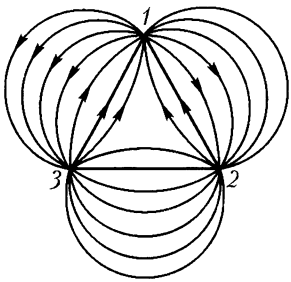


Рис. 73

В этом турнире первый шахматист набрал 6,5 очков, второй – 7 очков, третий – 7,5 очков; при этом первый выиграл больше всех – 5 партий, второй проиграл меньше всех – 2 партии, а больше всех очков набрал третий.

	+ a – b = $n-a-b$	+ c – d = $n-c-d$
+ b – a = $n-a-b$		+ e – f = $n-e-f$
+ d – c = $n-c-d$	+ f – e = $n-e-f$	

Рис. 74

∇ Можно составить табличку турнира (рис.74): обозначить все количество выигрышей (+), проигрышей (–) и ничьих (=) буквами и записать все условия задачи. При этом получится система линейных неравенств с большим числом переменных. Решение задачи 5-19 показывает, что эта система имеет по крайней мере одно решение в натуральных числах. Конечно, оно не единственно; интересно получить описание всех решений. Подробное обсуждение этой задачи см. в [39, 40].

Задача **5-20**. *Ответ*: можно.

Способ заполнения изображен на рисунке 75, разные цвета показаны на этом рисунке разной штриховкой.

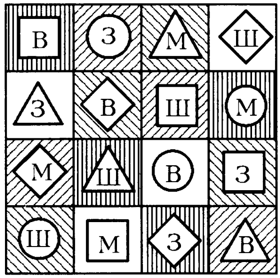


Рис. 75

∇ Когда n различных знаков записаны в таблицу $n \times n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце стоят все различные знаки, говорят, что задан *латинский квадрат*. Два латинских квадрата A и B называются ортогональными, если в тех клетках, где в квадрате A стоит i-й знак, в квадрате В все знаки различны (и так для каждого ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Наша задача состояла в том, чтобы построить три попарно ортогональных латинских квадрата 4×4 (один дает цвет, второй – форму рамки, а третий – букву).

Для знатоков. Чтобы составлять подобные квадратные таблицы (они бывают полезны в прикладных задачах, например при планировании многоцелевых экспериментов), удобно пользоваться понятием конечной *аффинной плоскости* (см. [42]).

Пусть F – конечное поле из q элементов; пары $(x;\ y)$ элементов F будем называть точками конечной аффинной плоскости, а множества вида $\{(x;\, y) : ax + by + c = 0\}$, где $a,\ b,\ c \in F$, причем a или b не равно нулю, – прямыми.

Всего получается q^2 точек и $q(q+1)$ прямых, причем они разбиваются на $q + 1$ семейств так, что в каждом семействе ровно q «параллельных» друг другу прямых, а через каждую точку проходит $q + 1$ прямая.

Например, одно семейство – это прямые $x + c = 0$, другое – $y + c = 0$, третье – $x + y + c = 0$, четвертое (если $q > 2$) – $x + 2y + c = 0$ и т.д.

Поставим в соответствие каждому из $q + 1$ семейств определенное свойство: «номер столбика», «номер строки», «буква», «форма рамки» и т.д. Припишем точкам каждой из q прямых первого семейства определенный номер строки, точкам каждой из прямых второго семейства – определенный номер столбца, третьего – букву, четвертого – форму рамки и т.д. Тогда мы получим способ узнать, в какую клетку таблицы $q \times q$ поместить каждую точку $(x;\ y)$, какой ей приписать цвет, какую букву и т.п. Каждые две непараллельные прямые пересекаются в одной точке, так что для каждых двух заданных свойств найдется ровно одна клетка с нужной парой свойств.

При $q = 4$ имеется конечное поле из элементов 0, 1, a, b, приводящее как раз к решению нашей задачи. Таблицы сложения и умножения в этом поле приведены ниже.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Можно показать, что существуют не более чем $n-1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n. Более того, существование $n-1$ таких квадратов эквивалентно существованию проективной плоскости порядка n (о проективной плоскости см. в решении следующей задачи 5-21). Если n – простое число или степень простого числа, то проективная плоскость порядка n существует. Для других n существование проективной плоскости порядка n – нерешенная проблема.

В 1972 г. Леонард Эйлер предложил следующую задачу.

Можно ли построить 36 офицеров шести различных чинов, взятых из шести различных полков, в виде квадрата 6×6 так, чтобы каждый ряд и каждая колонна содержали бы офицеров каждого чина и из каждого полка?

Другими словами, Л.Эйлер спросил, существуют ли два ортогональных латинских квадрата порядка 6.

Можно показать, что если n при делении на 4 не дает остаток 2, то два ортогональных квадрата порядка n существуют. Л. Эйлер предположил, что если n дает при делении на 4 остаток 2, то таких квадратов не существует.

При $n = 2$ гипотезу Эйлера легко проверить, так что $n = 6$ – первый трудный случай. В 1900 г. Тарри проверил в этом случае указанную гипотезу, выписав все латинские квадраты порядка 6. В книге [133] приведено доказательство гипотезы Эйлера для $n = 6$, причем оно не основано на полном переборе.

Оказалось что для $n > 6$ гипотеза Эйлера неверна. В 1959 г. Паркер нашел два ортогональных латинских квадрата порядка 10, а годом позже его построение обобщили, и пара литинских квадратов порядка n была построена для всех $n \equiv 2 \pmod 4$, кроме, разумеется, $n = 2$ и $n = 6$.

О трех попарно ортогональных латинских квадратах почти ничего не известно. Первый неразрешенный случай – $n = 10$.

Задача **5-21**. а) *Ответ*: 4 или 6 занятий.

Из условия следует, что члены кружка ходят в кафе либо вдвоем, либо втроем.

Если они ходили каждый раз вдвоем, то занятий было 6. В самом деле, если занумеровать участников числами от 1 до 4, то ходить в кафе они могли только в таких сочетаниях: (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4).

Если же было хотя бы одно посещение кафе втроем, то, кроме него, было всего три посещения: каждый из этих троих мог ходить в кафе только с четвертым.

б) *Ответ*: могут быть расписания двух типов: (1 2 3 4 5 6), (1 7), (2 7), (3 7), (4 7), (5 7), (6 7) или (1 2 3), (1 4 7), (1 5 6), (2 5 7), (2 4 6), (3 6 7), (3 4 5).

Эти ситуации можно изобразить графически. На рисунке 76,*а* изображено первое расписание: горизонтальной прямой соответствует первое посещение кафе, а прямым, соединяющим точку 7 с другими точками, – остальные посещения.

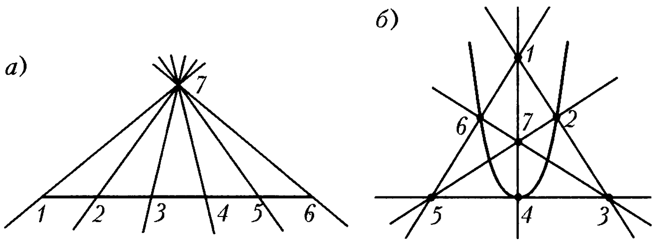


Рис. 76

Второе из приведенных расписаний иллюстрирует рисунок 76,*б*. Каждая линия на этом рисунке изображает одно посещение; номера точек, через которые она проходит, показывают состав учеников, посетивших в этот раз кафе.

∇ С этой задачей связаны такие общие вопросы.

Пусть в множестве E из n элементов выделены m различных подмножеств, отличных от самого E, так что для каждых двух элементов из E найдется ровно одно из выделенных подмножестп, в которое входят оба эти элемента.

Может ли быть $m < n$? Когда возможно равенство $m = n$? (См. [84], гл. III, § 5, упр. 12.)

Для знатоков. Докажем, что всегда $m \geq n$. Занумеруем все выделенные подмножества: $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и элементы множества E: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Каждому элементу a_i поставим в соответствие m-мерный вектор $a_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{im})$ следующим образом: $\lambda_{ij} = 0$, если элемент a_i не входит в множество A_j; $\lambda_{ij} = 1$, если этот элемент входит в A_j.

Из условия следует, что скалярное произведение любых двух таких векторов равно 1, т.е. $(a_i a_j) = 1$ при $i \neq j$, а скалярный квадрат вектора не меньше 2 (так как каждый элемент входит по крайней мере в 2 множества).

Допустим теперь, что $m < n$. Поскольку число n векторов a_i больше размерности пространства m, система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима, т.е. уравнение

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0$$

имеет ненулевое решение. Последовательно умножая обе части этого уравнения скалярно на векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, получим систему линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} b_1 x_1 + \quad x_2 + \ldots + \quad x_n &= 0, \\ x_1 + b_2 x_2 + \ldots + \quad x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + \quad x_2 + \ldots + b_n x_n &= 0, \end{aligned}$$

где все $b_i \geq 2$. Но эта система имеет только нулевое решение (ее определитель отличен от нуля), что противоречит нашему предположению. Таким образом, $m \geq n$.

Для равенства $m = n$ необходимо и достаточно, чтобы имел место один из следующих двух случаев:

1) в одно из выделенных подмножеств входят все элементы E, кроме одного, а остальные выделенные подмножества состоят из пар, образованных этим оставшимся элементом и всеми остальными;

2) число n представляется в виде $l(l-1)+1$, всякое выделенное подмножество состоит из l элементов, и всякий элемент множества E принадлежит ровно l подмножествам.

Заметим, что вопрос, когда реализуется случай 2), не решен. Система подмножеств множества E из обобщения ∇, удовлетворяющая условию 2), имеет специальное название: *конечная проективная плоскость порядка $q = l - 1$.*

Покажем, как построить конечную проективную плоскость порядка $q = p^k$ (для $n = p^{2k} + p^k + 1$), где p – простое число. Для этого нужно использовать «числа» из конечного поля порядка p^k.

Назовем точкой нашей плоскости тройку «чисел» (x_1, x_2, x_3), рассматриваемую с точностью до пропорциональности (т.е. тройки (x_1, x_2, x_3) и (cx_1, cx_2, cx_3) определяют одну и ту же точку). Договоримся тройку $(0;0;0)$ не считать точкой.

Пряная задается тройкой «чисел» (a_1, a_2, a_3) (кроме тройки $(0;0;0)$), рассматриваемой с точностью до пропорциональности. Точка (x_1, x_2, x_3) принадлежит прямой (a_1, a_2, a_3) в том и только в том случае, когда

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Ясно, что построенная проективная плоскость дает реализацию случая 2). При этом точки плоскости – элементы множества E, прямые – выделенные подмножества. Число точек и число прямых одинаково, и каждые две точки принадлежат только одной прямой.

При $q = 2$ получается как раз тот пример проективной плоскости порядка 2, который изображен на рисунке 76,*б*.

В п. б) задачи 5-21 была построена нужная система множеств для случая $l = 3$, $n = 7$.

Подробнее о конечных проективных плоскостях написано, например, в статье [132].

Задачу 5–21 можно переформулировать в следующей эквивалентной форме.

Если в множестве X из m элементов выделены n подмножеств, любые два из которых имеют ровно один общий элемент, то $m \ge n$.

(X – это множество визитов в кафе; для каждого члена кружка a выделим множество всех визитов, включивших a.)

Эта формулировка допускает естественное обобщение.

Дано натуральное число λ и множество X из m элементов, в котором выделены n подмножеств, любые два из которых имеют ровно λ общих элементов. Тогда $m \ge n$.

Доказательство. Пусть Y – множество всех выделенных подмножеств множества X. Если $|A| = \lambda$ для какого-нибудь $A \in Y$, то A должно быть частью любого $B \in Y$. Если мы удалим A из X и из каждого B, мы получим разбиение множества $X \setminus A$ на n попарно непересекающихся подмножеств. Число таких подмножеств максимально, если одно из них пусто, а все остальные – одноэлементны. Поскольку $|X \setminus A| = m - \lambda$, мы получаем, что

$$n \le m - \lambda + 1 \le m.$$

Предположим, что $|A| > \lambda$ для каждого $A \in Y$. Пусть $X = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$. Рассмотрим всевозможные линейные многочлены

$$f(z_1,\ z_2,\ \ \ldots,\ z_m) = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_m z_m$$

с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Они образуют векторное пространство размерности $m + 1$. Для каждого подмножества P множества X введем $f(P) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, где $\alpha_i = 1$, если $i \in P$, и $\alpha_i = 0$, если $i \notin P$. Например, $f(\varnothing) = \alpha_0$, $f(X) = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$.

Для каждого $A \in Y$ рассмотрим многочлен $f_A = -\lambda + \sum\limits_{i \in A} z_i$. Тогда $f_A(P) = -\lambda + A \cap P$ для любого подмножества P множества X. Поэтому, если $A, B \in Y$, то $f_A(B) = 0$ при $A \ne B$ и $f_A(A) = |A| - \lambda > 0$. Отсюда следует, что n многочленов f_A, $A \in Y$, линейно независимы.

В самом деле, если $\sum\limits_{A \in Y} \alpha_A f_A = 0$ для каких-нибудь действительных коэффициентов α_A, то $\sum\limits_{A \in Y} \alpha_A f_A(B) = 0$ для любого $B \in Y$ и, следовательно, $\alpha_B = 0$. Более того, никакая линейная комбинация многочленов f_A, $A \in Y$, не равна 1.

В самом деле, если $\sum\limits_{A \in Y} \alpha_A f_A = 1$ для каких-нибудь действительных коэффициентов α_A, то $\sum\limits_{A \in Y} \alpha_A f_A(B) = 1$ для любого $B \in Y$ и, следовательно, $\alpha_B = \frac{1}{B - \lambda}$. Таким образом,

$$\sum_{A \in Y} \frac{f_A}{|A| - \lambda} = 1,$$

что невозможно, так как свободный член каждого многочлена f_A отрицателен, и потому свободный член левой части последнего равенства должен быть отрицательным.

Итак, многочлены f_A и постоянный многочлен 1 линейно независимы. Поэтому

$$n + 1 \le m + 1 \Leftrightarrow n \le m.$$

Что происходит, если $m = n$?

Если все множества $A \in Y$ состоят из одного и того же числа элементов, то соответствующая структура называется *симметрическим* (m, k, λ)*-дизайном.*

Проективная плоскость порядка n *– это симметрический* $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$*-дизайн.*

Пример. Занумеруем вершины графа, изображенного на рисунке 72,*в*, числами 1, 2, 3, ..., 16. Если i – любое из этих чисел, то пусть A_i – множество, состоящее из вершины i и пяти ее соседей. Тогда $|A_i \cap A_j| = 2$ для двух любых различных i и j, так что получается симметричный (16, 6, 2)-дизайн.

Если же не все множества $A \in Y$ состоят из одного и того же числа элементов, то, согласно *гипотезе Райзера–Вуделла*, все множества $A \in Y$, кроме одного, состоят из одного и того же числа элементов. К 2011 году эта гипотеза доказана для $m = p + 1$; $m = 2p + 1$; $m = 3p + 1$; $m = 4p + 1$; $m = 6p + 1$, где p – простое число, а также для $\lambda < 60$ при любом m.

О современном состоянии теории симметричных дизайнов и гипотезы Райзера–Вуделла можно узнать из упоминавшейся в решении предыдущей задачи 5-20 монографии [133].

Задачи для самостоятельного решения

5-22. а) Можно ли составить квадратную таблицу 100×100 из чисел так, чтобы сумма чисел, стоящих в каждом столбце, была положительна, а сумма чисел, стоящих в каждой строке, была отрицательна?

б) Можно ли в квадратной таблице размером 5×5 клеток расставить 25 чисел так, чтобы сумма четырех чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел – положительной?

5-23. Несколько человек в течение 7 часов наблюдали за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 час и заметил, что за этот час улитка проползла ровно 1 м (хотя ползла она неравномерно, с остановками). Могла ли улитка за эти 7 часов проползти:

а) больше 7 м; б) больше 12 м; в) меньше 5 м; г) меньше 4 м?

5-24. а) Можно ли число 123 представить в виде произведения нескольких натуральных чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел тоже равнялась 123?

б) Тот же вопрос относительно числа 456.

5-25. Можно ли разместить на прямой:

а) 6; б) 7

отрезков так, чтобы каждую точку их объединения содержали не более трех отрезков и из любых трех отрезков два пересекались?

5-26. В автобус, едущий без кондуктора, вошли 15 незнакомых друг с другом людей. У каждого из них есть только серебряные монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Билет стоит 5 копеек.

а) Могло ли так быть, что все пассажиры правильно заплатили за проезд, взяв сдачу друг у друга?

б) Докажите, что если у пассажиров меньше 19 серебряных монет, то они не смогут правильно расплатиться за проезд.

в) Докажите, что если у всех пассажиров меньше чем 2 рубля 50 копеек, то они не смогут расплатиться.

5-27. а) В магазин привезли платья двух цветов и двух фасонов. Докажите, что для витрины можно выбрать два платья, отличающиеся друг от друга и цветом, и фасоном.

б) В магазин привезли платья трех цветов и трех фасонов. Можно ли выбрать для витрины три платья так, чтобы были представлены все три цвета и три фасона?

5-28. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть:

а) меньше 0,01; б) больше 100?

5-29. Верны ли следующие утверждения:

а) если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$

$$AB = A_1B_1, \ BC = B_1C_1 \text{ и } \angle A = \angle A_1,$$

то треугольники равны;

б) если три угла и две стороны одного треугольника равны трем углам и двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны;

в) если основания и боковые стороны одной трапеции соответственно равны основаниям и боковым сторонам другой трапеции, то такие трапеции равны?

5-30. Может ли так быть:

а) длины всех трех биссектрис треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 1 см^2;

б) длины всех трех биссектрис треугольника больше 100 см, а его площадь меньше 1 см^2?

5-31. Какое число сторон может иметь плоский многоугольник, являющийся:

а) пересечением; б) объединением

треугольника и выпуклого четырехугольника?

5-32. Можно ли сложить квадрат из четырех плиток размером 1×1 восьми плиток размером 2×2, двенадцати плиток размером 3×3 и шестнадцати плиток размером 4×4?

5-33. а) Можно ли какой-нибудь разносторонний треугольник разрезать на два равных?

б) Можно ли разрезать квадрат на несколько тупоугольных треугольников?

в) Как разрезать треугольник с углами 15°, 105° и 60° на равнобедренные треугольники?

г) Всякий ли треугольник можно разрезать на несколько равнобедренных треугольников?

5-34. Может ли какой-нибудь треугольник поместиться внутри круга, радиус которого меньше радиуса описанного вокруг этого треугольника круга?

5-35. Четырехугольник периметра P_1 расположен на плоскости внутри четырехугольника периметра P_2. Может ли быть:

а) $P_1 > P_2$; б) $P_1 > 2P_2$?

5-36. Можно ли начертить на плоскости замкнутую ломаную, пересекающую каждое свое звено:

а) 3 раза; б) n раз,

если точки пересечения звеньев ломаной не должны совпадать с ее вершинами и ни через одну точку пересечения не должно проходить более двух звеньев?

5-37. Можно ли расположить на плоскости:

а) 12; б) 13

точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы каждая точка была соединена с пятью другими?

5-38. Подберите четыре тройки целых неотрицательных чисел так, чтобы каждое целое число от 1 до 81 можно было представить в виде суммы четырех чисел – по одному из каждой тройки.

5-39. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 100 членов – целые числа, а все остальные члены не являются целыми числами?

5-40. Могут ли числа 7, 8, 9 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

5-41. а) Требуется подключить к сети люстру с семью лампочками так, чтобы можно было зажигать любое количество лампочек от одной до семи. Можно ли это сделать, если разрешается использовать только три выключателя?

б) Тот же вопрос о люстре с восемью лампочками.

5-42. Руководитель математического кружка задал на дом 20 задач. На следующем занятии выяснилось, что каждый участник кружка решил ровно две задачи, а каждую задачу решили ровно два участника.

а) Сколько было участников кружка?

б) Может ли руководитель кружка организовать разбор всех задач таким образом, что каждый участник расскажет по одной решенной им задаче?

в) Докажите, что существует не менее двух способов организовать разбор задач таким образом, и приведите пример ситуации, когда этих способов ровно два.

г) Каким может быть число способов такой организации разбора задач?

5-43. Среди 25 офицеров поровну пехотинцев, артиллеристов, танкистов, связистов и летчиков и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов и лейтенантов, причем каждый из указанных пяти родов войск представлен офицерами всех пяти рангов. Постройте этих офицеров в каре 5×5 так, чтобы в любой колонне и в любой шеренге встречались офицеры всех родов войск и всех рангов.

5-44. Одна треугольная пирамида расположена внутри другой треугольной пирамиды.

а) Может ли сумма длин всех ребер внутренней пирамиды быть больше суммы длин ребер внешней?

б) Может ли полная поверхность внутренней пирамиды быть больше полной поверхности внешней?

5-45. Можно ли завернуть кубик с ребром 1 см в квадратный кусок бумаги со стороной 3 см?

5-46. Существует ли неправильный тетраэдр, у которого пять двугранных углов равны α? Если да, то каков его шестой двугранный угол?

5-47. Можно ли на планете, имеющей форму шара диаметра 1, расположить 8 станций слежения так, чтобы любое тело, находящееся на высоте 1 над поверхностью планеты, было видно по меньшей мере с двух станций?

5-48. а) Придумайте пример выпуклого многогранника, у которого все грани – параллелограммы, но он – не параллелепипед.

б) Пусть число различных направлений ребер такого многогранника равно k. Сколько у него граней?

5-49. а) Дан многочлен от двух переменных

$$P(x,y) = x + \frac{(x+y+1)(x+y)}{2}.$$

Будем составлять таблицу его значений при целых неотрицательных x и y. Докажите, что каждое целое неотрицательное число встретится в этой таблице один раз.

б) Придумайте такой многочлен $Q(x, y, z)$ от трех переменных, чтобы среди его значений при целых неотрицательных x, y, z каждое целое неотрицательное число встретилось один раз.

5-50. Существует ли такой многочлен $P(x, y)$, множество значений которого – множество всех положительных чисел?

§ 6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИТЕРАЦИИ

6-1. а) Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

б) Найдите какое-нибудь шестизначное число, которое при умножении на числа 2, 3, 4, 5, 6 дает шестизначные числа, отличающиеся от него только порядком цифр.

6-2. Над цепью озер летела стая белых гусей. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся, а остальные летели дальше. Все гуси сели на семи озерах. Сколько гусей было в стае?

6-3. Последовательность (a_n) задана первыми двумя членами $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ и условием $a_{k+2} = a_{k+1}/a_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Найдите a_{1986}.

6-4. В каждом из двух сосудов находится по A литров воды. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Сколько воды окажется в каждом ив сосудов после 100 переливаний?

6-5. Имеются два сосуда. В них разлили 1 л воды. Из первого сосуда переливают половину воды во второй, затем из второго переливают половину оказавшейся в нем воды в первый, затем из первого переливают половину оказавшейся в нем воды во второй и т.д. Докажите, что независимо от того, сколько воды было сначала в каждом из сосудов, после 100 переливаний в них будет $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ л с точностью до 1 миллилитра.

6-6. Строится числовая последовательность: первый ее член равен 3^{1986}, а каждый следующий член, начиная со второго, равен сумме цифр предыдущего. Найдите десятый член этой последовательности.

6-7. Вокруг поляны стоят 12 домиков, покрашенных в белый и красный цвета, в которых поселились 12 гномов. У каждого гнома нечетное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который окрашены дома большинства его друзей. В феврале это же делает второй (по часовой стрелке) гном, в марте – третий и т. д. Докажите, что наступит момент, после которого цвет дома у каждого гнома перестанет меняться.

6-8. Представим себе, что на бесконечном листе клетчатой бумаги несколько (конечное число) клеток «заболели». Через каждый час одновременно происходят следующие изменения; если клетка больна, а две клетки, слева и снизу от нее, здоровы, то она выздоравливает; если клетка здорова, а две клетки, снизу и слева от нее, больны, то она заболевает (остальные клетки остаются такими, как были). Докажите, что, как бы ни были расположены вначале больные клетки, через некоторое время все клетки будут здоровы.

6-9. Перед шеренгой из N солдат стоит капрал и командует: «Нале-ВО!» По этой команде некоторые солдаты поворачиваются налево, остальные – направо. После этого через каждую секунду каждые два солдата, оказавшиеся лицом друг к другу, поворачиваются друг к другу затылками. Докажите, что через конечное время движение прекратится, и оцените, через сколько секунд это заведомо произойдет.

6-10. На столе у чиновника Министерства Околичностей [1] лежит n томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Каждый день, приходя на работу, чиновник берет по одному тому из каждой стопки, образует из них новую стопку, располагает стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке. Например, если в первый день в ведомости записано (8, 3, 1, 1), то на следующий день запись будет (7, 4, 2), потом – (6, 3, 3, 1), (5, 4, 2, 2) и т.д. Что будет записано в ведомости через месяц, если общее количество томов n равно: а) 6; б) 10? (Начальное разбиение на стопки может быть произвольным.)

6-11. Сколько среди десятизначных чисел, состоящих из цифр 2 и 5, таких, у которых две двойки не стоят рядом?

6-12. Ребята стоят по кругу. Им нужно выбрать водящего, и они считаются следующим образом: первый остается в круге, следующий за ним по часовой стрелке – второй – выходит из круга, следующий за ним – третий – остается, четвертый выходит и т.д., через одного по кругу. Круг все время сужается до тех пор, пока в нем не останется только один человек. Определите, кто именно останется (на каком месте он стоял первоначально, считая от первого по часовой стрелке), если вначале стояло: а) 64 человека; б) 1986 человек.

---

[1] Ч.Диккенс, «Крошка Доррит».

6-13. Бесконечная последовательность нулей и единиц 0110100110010110... составлена по следующему правилу. Сначала написан нуль. Затем делается бесконечное количество шагов. На каждом шаге к уже написанному куску последовательности приписывается новый кусок той же длины, получаемый из него заменой всех нулей на единицы, а единиц – на нули, а) Какая цифра, 0 или 1, стоит на 1986-м месте? б) Будет ли эта последовательность, начиная с некоторого места, периодической?

6-14. На математическом вечере была проведена следующая игра. Зритель из зала написал на двух бумажках два последовательных натуральных числа (по одному на каждой бумажке) и скатал их в шарики. Ведущий дал вытянуть по одной бумажке двум математикам, А и Б; каждый из них посмотрел, какое число написано на его бумажке, но не сообщил его второму. Затем между А и Б состоялся следующий содержательный диалог.

А: Я не знаю, какое у тебя число.

Б: И я не знаю, какое у тебя число.

А: И я не знаю, какое у тебя число.

Б: И я не знаю, какое у тебя число.

. . . .

Десять раз А говорил, что не знает, какое число у Б, и десять раз Б отвечал, что он не знает, какое число у А. Зрителям это порядком надоело, но вдруг на одиннадцатый раз А заявил: «Теперь я знаю, какое у тебя число». Тогда в диалог вмешался ведущий и спросил зрителей, какие числа могли быть у А и В. Что они должны ему ответить?

6-15. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба (рис.77). Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

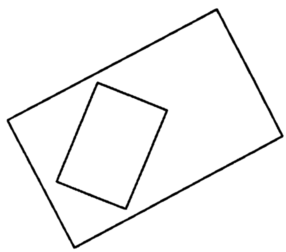


Рис. 77

6-16. Докажите, что последовательность

$$\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \ldots, \sqrt{\underbrace{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}_{n \text{ раз}}}, \ldots$$

имеет предел, и найдите его.

6-17. Последовательность (a_n)

$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$$

задается так: $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$ для каждого n = 1, 2, 3, ... Найдите число, которое меньше всех членов последовательности с четными номерами (a_2, a_4, a_6, ...) и одновременно больше всех ее членов с нечетными номерами (a_1, a_3, a_5, ...).

6-18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2y = 4 - x^2, \\ 2x = 4 - y^2. \end{cases}$$

Обсуждение задач

Задача **6-1**. а) *Ответ*: 8.

Начнем делить 1 на 7 «уголком» и увидим, что последовательность цифр частного после запятой будет периодической с периодом из 6 цифр: (142857). Так как $100 = 6 \cdot 16 + 4$, на 100-м месте после запятой будет стоять четвертая цифра периода – цифра 8.

∇ *Для любых натуральных чисел p и q дробь $\dfrac{p}{q}$ представляется либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной периодической десятичной дробью.* В самом деле, деля p на q «уголком», мы будем получать остатки при делении некоторых натуральных чисел на q. Остатком при делении на q может быть целое неотрицательное число, меньшее q. Поэтому после не более чем q делений либо какой-то очередной остаток окажется нулем и мы получим конечную десятичную дробь, либо какие-то два остатка совпадут и с этого места частные будут периодически повторяться. В этом рассуждении использован принцип Дирихле, о котором говорилось в обсуждении задачи 2-9.

б) *Ответ*: 142857.

Действительно, умножая это число на 2, 3, 4, 5 и 6, получим числа 285714, 428571, 571428, 714285 и 857142 соответственно.

∇ Ответ в задаче б) – это число, составленное из цифр периода разложения числа $1/7$ в десятичную дробь. Выписанные пять чисел являются, в свою очередь, периодами разложения чисел $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$, $6/7$ в десятичную дробь. В этом легко убедиться при делении числа 1 на 7 уголком: со второго шага мы делим 3 на 7, начиная с третьего шага – 2 на 7, затем – 6, 4 и 5.

Задача **6-2**. *Ответ*: 127 гусей.

Пусть вместе со стаей белых гусей все время летит еще один, Серый гусь. Если к некоторому озеру, подлетает m белых гусей и Серый, то на этом озере садится $\dfrac{m}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{m+1}{2}$ – ровно половина всех гусей. Поэтому после каждого озера число летящих гусей уменьшается ровно вдвое. После семи озер оно уменьшается в $2^7 = 128$ раз, а остается летящим один Серый гусь. Значит, вначале было 128 гусей, из них 127 – белых.

∇ Серый гусь возник в решении задачи не случайно. Обозначим через x_k количество летящих белых гусей, когда впереди остается еще k озер. Тогда условие задачи записывается так: $x_k - x_{k-1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{2}$. Отсюда получаем для последовательности (x_k) рекуррентное соотношение

$$x_k = 2x_{k-1} + 1. \qquad (*)$$

Добавив Серого гуся, мы, по существу, сделали *замену переменной*: $y_n = x_n + 1$ и получили новую последовательность (y_n). Подставив в соотношение $(*)$ $x_k = y_k - 1$ и $x_{k-1} = y_{k-1} - 1$, мы видим, что последовательность (y_n) удовлетворяет более простому соотношению: $y_k = 2y_{k-1}$; (y_k) – это геометрическая прогрессия со знаменателем 2, и, следовательно, ее общий член имеет вид $y_n = 2^n y_0$. Возвращаясь к последовательности (x_n), находим формулу ее общего члена $x_n = 2^n - 1$.

Рассмотрим теперь более общий случай последовательности (x_n), заданной соотношением

$$x_k = qx_{k-1} + d. \qquad (**)$$

Если $q = 1$, то (x_n) – *арифметическая прогрессия* и ее общий член задается формулой $x_n = x_0 + d(n-1)$.

Если $q \neq 1$ и $d = 0$, то (x_n) – *геометрическая прогрессия* и $x_n = q^n x_0$. Если же $q \neq 1$ и $d \neq 0$, то ищем такое z, чтобы последовательность $y_n = x_n + z$ стала геометрической прогрессией. Подставляя $x_k = y_k - z$ и $x_{k-1} = y_{k-1} - z$ в соотношение $(**)$, получаем: $y_k = qy_{k-1} + z(1-q) + d$. Если z выбрать так, что $z(1-q) + d = 0$, то $y_k = qy_{k-1}$, откуда $y_n = q^n y_0$. Тем самым найдена формула общего члена: $x_n = q^n(x_0 + z) - z$, где $z = \frac{d}{q-1}$. В нашей задаче $q = 2$, $x_0 = 0$, $d = 1$ и $z = 1$ (один Серый гусь).

Задача **6-3**. *Ответ*: $a_{1986} = 2/3$.

Выпишем первые члены этой последовательности:

$$2,\ 3,\ 3/2,\ 1/2,\ 1/3,\ 2/3,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Так как два соседних члена a_7 и a_8 такие же, как a_1 и a_2, а каждый следующий член вычисляется по двум предыдущим, то последовательность будет повторяться с периодом 6. Так как 1986 делится на 6, то $a_{1986} = a_6 = 2/3$.

∇ Вообще, при любых ненулевых первых двух членах a_1 и a_2, последовательность из задачи 6-2 повторяется с периодом 6, т.е. $a_{n+6} = a_n$. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно выписать первые восемь членов последовательности:

$$a_1,\, a_2,\, a_2/a_1,\, 1/a_1,\, 1/a_2,\, a_1/a_2,\, a_1,\, a_2,\, \ldots$$

Удобно обозначить $\ln|a_n|$ через x_n, тогда последовательность (x_n) будет подчиняться условию: $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ (при $n \geq 1$) и, конечно, тоже будет периодической с периодом 6. Верен более общий факт: если $d = 2\cos\frac{k\pi}{m}$, где k и m ($k < m$) – взаимно простые натуральные числа, то последовательность, для которой $x_{n+2} = dx_{n+1} - x_n$, периодическая с периодом $2m$. При $k = 1$, $m = 3$ получаем $d = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ и период последовательности равен $2m = 6$.

Задача **6-4**. *Ответ*: столько же, сколько было вначале – по A л воды в каждом.

Чтобы убедиться в этом, покажем, что после каждых двух следующих переливаний количество воды остается прежним. Когда в сосуд добавляют $1/k$-ю часть воды из другого, в нем становится

$$A\left(1+\frac{1}{k}\right) = A\frac{k+1}{k} \text{ л}.$$

После этого, когда от него отливают $\frac{1}{k+1}$-ю часть, в нем становится

$$A\frac{k+1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = A\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k+1} = A \text{ л}.$$

Задача **6-5**. Заметим, что если бы в первом сосуде было $\frac{2}{3}$ л, а во втором – $\frac{1}{3}$ л, то после первого переливания объемы поменялись бы местами, а после второго переливания стали бы такими же, как вначале.

Будем вести отсчет именно от такого состояния. Пусть после четного числа переливаний в первом сосуде оказалось $\left(\frac{2}{3}+p\right)$ л, где $-\frac{2}{3} \leq p \leq \frac{1}{3}$, тогда во втором будет $\left(\frac{1}{3}-p\right)$ л воды. После следующего переливания в этих сосудах будет соответственно $\left(\frac{1}{3}+\frac{p}{2}\right)$ л и $\left(\frac{2}{3}-\frac{p}{2}\right)$ л воды, а затем $\left(\frac{2}{3}+\frac{p}{4}\right)$ л и $\left(\frac{1}{3}-\frac{p}{4}\right)$ л.

Итак, после каждых двух переливаний добавка p уменьшается в 4 раза. Значит, после 100 переливаний (50 пар переливаний) добавка p уменьшится в 4^{50} раз и в сосудах будет: $\frac{2}{3}+p\cdot\frac{1}{4^{50}}$ и $\frac{1}{3}-p\cdot\frac{1}{4^{50}}$. Поскольку добавка p удовлетворяет неравенству $-\frac{2}{3}\le p\le\frac{1}{3}$, добавка $p\cdot\frac{1}{4^{50}}$ меньше чем $\frac{1}{10000}$ и тем самым в сосудах с большой точностью будет $\frac{2}{3}$ л и $\frac{1}{3}$ л.

∇ Если каждый раз переливать не половину, а $\frac{1}{n}$-ю часть имеющейся воды, то после 100 переливаний с большой точностью в сосудах окажется соответственно $\frac{n}{2n-1}$ и $\frac{n-1}{2n-1}$ л воды.

Покажем, как найти этот ответ. Если в первом сосуде x л воды, а во втором y л воды, то после первого переливания в первом будет $x\left(\frac{n-1}{n}\right)$ л. Для того чтобы после второго переливания в нем оказалось снова x л, должно выполняться соотношение $y=x\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Поскольку $x+y=1$, получаем $x=\frac{n}{2n-1}$ л, $y=\frac{n-1}{2n-1}$ л.

Задача **6-6**. *Ответ*: 9.

Если число делится на 9, то и сумма его цифр делится на 9, а так как $3^{1986}=9\cdot3^{1984}$, то все члены данной последовательности делятся на 9.

Оценим их величины. Из неравенства $3^2<10$ следует, что $3^{1986}<10^{993}$, поэтому в числе 3^{1986} не больше 993 цифр. Значит, второй член последовательности не больше чем $9\cdot993<10^4$, т.е. в нем не больше четырех цифр. Тогда третий член последовательности не больше чем $9\cdot4=36$, а четвертый – меньше чем 18. Поскольку четвертый член, как и предыдущие, делится на 9, он равен 9. А значит, и все следующие равны 9.

∇ Вообще, в последовательности натуральных чисел, у которой n-й член – сумма цифр $(n-1)$-го члена, все члены, начиная с некоторого, одинаковы и равны остатку r от деления первого члена на 9 (если $r\ne0$) или 9 (если $r=0$).

Задача **6-7**. Рассмотрим число пар гномов-друзей, у которых дома разного цвета. Каждый месяц их количество не увеличивается. Действительно, если очередной гном красит дом в тот же цвет, который был раньше, то это число сохраняется; если же он покрасил дом в другой цвет, то оно уменьшится. Поскольку это целое число неотрицательно, оно не может все время уменьшаться, значит, начиная с некоторого момента оно не будет изменяться. С этого момента каждый гном всегда будет красить свой дом в один и тот же цвет.

∇ Заметим, что в условии задачи нечетность числа друзей у каждого гнома нужна лишь для того, чтобы было ясно, что такое большинство, а число гномов можно заменить на любое другое четное число. В решении этой задачи нам помог следующий прием: *найти такую величину* (количество пар друзей с разноцветными домами), *которая при указанной в условии операции сохраняется или убывает.* Этот прием часто помогает разобраться, что происходит при многократном повторении той или иной операции на некотором множестве.

Задача **6-8**. Проведем через верхнюю сторону самой верхней больной клетки горизонтальную прямую. Ясно, что ни одна клетка, расположенная выше этой прямой, не заболеет. Аналогично не заболеет ни одна клетка, находящаяся правее самой правой из первоначально больных клеток. Таким образом, все клетки, которые, может быть, заболеют, лежат внутри некоторого прямого угла. Рассмотрим наиболее удаленную от вершины угла диагональ, перпендикулярную биссектрисе этого угла, на которой еще лежат больные клетки. Ясно, что все больные клетки, лежащие на ней, через час выздоровеют. Таким образом, каждый час наиболее удаленная от вершины диагональ, содержащая больные клетки, «шагает» к вершине угла. Следовательно, в некоторый момент она достигнет вершины угла, внутри которого могут лежать больные клетки. Это и означает, что все клетки выздоровели.

Для знатоков. Пусть каждая клетка на плоскости может находиться в двух состояниях, 0 и 1 (или в одном из конечного числа N состояний), и в каждый момент времени $t = 1, 2, 3, \dots$ принимает одно из этих состояний, в зависимости от состояний нескольких своих соседей, по определенному правилу F, одинаковому для всех соседей. Такие системы, получившие название *клеточных автоматов*, стали интенсивно изучаться в последнее десятилетие физиками, конструкторами вычислительных машин и математиками. Для некоторых сравнительно простых правил (таких, как, например, правила *игры «Жизнь» Дж. Конвея* – см. [74]) клеточный автомат обладает замечательно сложным поведением. Это относится не только к двумерным, но и одномерным (расположенным на целочисленной прямой) клеточным автоматам. Они широко исследуются с помощью моделирования на ЭВМ; построены даже специальные программы, позволяющие наблюдать поведение клеточного автомата на экране дисплея.

Математических результатов, относящихся к клеточным автоматам, пока получено немного. Для некоторых задач, относящихся к ним, доказана их алгоритмическая неразрешимость; например для игры «Жизнь» не существует алгоритма, позволяющего по начальной конфигурации из конечного числа единиц узнать, превратится ли она за некоторое время в пустую конфигурацию «все нули».

Задача **6-9**. Поставим в соответствие шеренге солдат ломаную на клетчатой бумаге, линии которой идут под углом 45° к горизонтальной прямой, как показано на рисунка 78,*а*: каждому солдату соответствует очередной отрезок ломаной, причем если

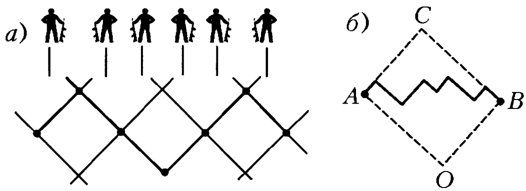


Рис. 78

солдат смотрит направо, то соответствующий отрезок ломаной идет вверх, а если налево – то вниз. Изменения, происходящие в шеренге солдат за. очередную секунду, можно описать теперь так: концы A и B ломаной не сдвигаются, а каждый уголок из двух соседних отрезков, торчащий вверх («горка»), превращается в уголок, торчащий вниз («ямка»). Таким образом, высота самой высокой «горки» за каждую секунду снижается, и так будет до тех пор, пока в ломанной не останется ни одной «горки», т.е. она превратится в ломаную AOB из двух сторон прямоугольника $AOBC$ (см. рис.78,*б*).

Наибольшее число секунд, в течение которого может происходить движение в шеренге из N солдат, равно $N - 1$: именно таким оно будет, если начальное расположение соответствует ломаной ACB, а для любой другой ломаной с теми же концевыми вершинами время до полной остановки будет меньше.

∇ Если в бесконечной шеренге почти все солдаты повернуты налево и лишь некоторое конечное множество смотрят направо, то движение по указанному в задаче правилу будет продолжаться бесконечное время – вдоль шеренги двигается сохраняющая форму волна.

Интересно, что существуют одинаковые для всех солдат, симметричные по отношению к замене «левого» на «правое» и требующие лишь зависимости от трех соседей правила, которые позволяют исправить любой конечный дефект в бесконечной шеренге. Вот одно из них. Пусть каждый солдат, который видит, что первый и третий солдаты перед ним (о той стороны, куда он смотрит) стоят к нему лицом, поворачивается к ним спиной, тогда через конечный промежуток времени движение в любой шеренге с «конечным дефектом» прекратится (см. [53]).

Задача **6-10**. а) *Ответ*: (3, 2, 1).

На рисунке 79 нарисована схема. На ней изображены все возможные типы записи в ведомости при $n = 6$. Стрелка, ведущая из одной записи в другую, показывает, что вслед за первой из

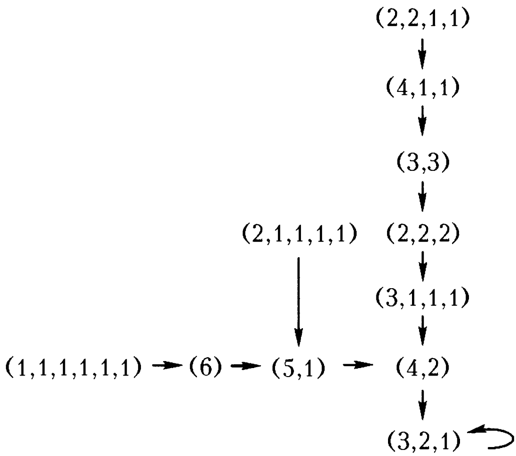


Рис. 79

этих записей обязательно будет вторая. Мы видим, что не позже чем с седьмого дня в ведомости каждый день будет запись (3, 2, 1).

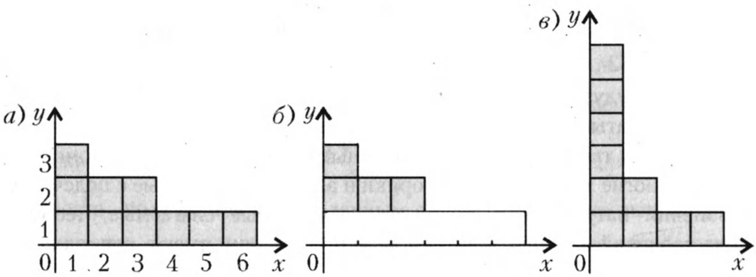
б) *Ответ*: (4, 3, 2, 1).

Этот ответ можно получить, составив схему аналогично приведенной на рисунке 79. Желающие могут се нарисовать (она содержит 42 записи) и увидеть, что не позже чем с тринадцатого дня в ведомости каждый день будет запись (4, 3, 2, 1).

∇ В принципе, аналогичным образом можно нарисовать схему для любого заданного n, правда, при больших n это требует очень много времени. Однако оказывается, что, не делая полного перебора, можно выяснить, какие записи будут появляться в ведомости через достаточно большое время. Общий результат можно сформулировать так. Если число томов n можно записать в виде суммы последовательных натуральных чисел, начиная с 1, т.е. $n = 1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2$ для некоторого k, то, начиная с некоторого дня, в ведомости все время будет повторяться запись $(k, k-1, k-2, \ldots, 2, 1)$. (В задаче 6-10 а) и б) так и было: $6 = 3\cdot 4/2$, $10 = 4\cdot 5\ 2$.) Если же число n не представляется в виде $k(k+1)/2$, то ведомость «зацикливается»: записи в ней начинают повторяться с периодом k таким, что $(k-1)k/2 < n < k(k+1)/2$.

Доказать этот результат и, кроме того, выяснить, какими будут циклы при $n \neq k(k+1)/2$, помогает следующая конструкция. Рассмотрим первую координатную четверть с нанесенной на нее координатной сеткой. Запись в ведомости $(k_1, k_2, \ldots, k_l)$, где $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \ldots \geq k_l$, изобразим так. Зачерним на рисунке столбик высотой k_1, рядом с ним – столбик высотой k_2, затем – высотой k_3 и т. д., до столбика высотой k_l (рис.80).

Процедуру, которую проделывает чиновник, на нашем рисунке удобно делать так.



$k_1 = 3, k_2 = k_3 = 2, k_4 = k_5 = k_6 = 1$

Рис. 80

Первый этап. Отрезаем нижнюю строчку от черной фигуры сдвигаем то, что осталось, на одну клетку вправо и вниз, отрезанную часть поворачиваем на $90°$ против часовой стрелки (превращаем отрезанную строчку в первый столбик).

Второй этап. Если новый первый столбик не самый высокий (ниже второго), то отрежем и передвинем справа налево те черные квадратики, для которых слева есть свободное место. В конце второго этапа столбики расположатся по росту.

Будем считать, что каждая черная клетка имеет две целочисленные координаты: номер столбца и номер строки, в которых она стоит.

Основное соображение. Когда выполняется первый этап, сумма координат каждой черной клетки не меняется, а когда выполняется второй этап, для передвигаемых клеток она уменьшается.

Рассмотрим теперь сумму обеих координат всех черных клеток. Эта сумма не меняется на первом этапе и уменьшается на втором. Отсюда следует, что второй этап можно повторить лишь конечное число раз (сумма координат клеток – целое и положительное число, поэтому она не может уменьшаться бесконечно). Значит, начиная с некоторого момента, будет происходить только первый этап. Следовательно, у каждой клетки сумма координат будет постоянной. С этого момента каждая клетка $(x; y)$ будет двигаться по циклу $(1; q-1) \to$ $\to (2; q-2) \to \ldots \to (q-1; 1) \to (1; q-1)$, который мы назовем *q-диагональю*.

При этом незаполненной может быть лишь одна последняя самая длинная диагональ. В самом деле, так как вторых этапов уже не происходит, то по q-диагонали черные квадраты «ходят» циклически с периодом q. Периоды в q-й и в $(q-1)$-й диагоналях отличаются на единицу. Поэтому не может случиться так, что в $(q-1)$-й диагонали есть пустые клетки, а в q-й диагонали рано или поздно оказался бы справа от пустой клетки и пришлось бы провести второй этап.

Итак, пустые места могут быть лишь в последней диагонали. Если $n = k(k+1)/2$, то все k диагоналей заполнятся; если $n \neq k(k+1)/2$, то, очевидно, будут циклы.

Ступенчатые фигуры, составленные из квадратиков, а также числовые таблицы такой формы, составленные из чисел 1, 2, ..., n, помогают решать многие задачи комбинаторики и алгебры, связанные с подсчетом разбиений натурального числа на натуральные слагаемые, теорией представлений группы перестановок и т.п. Они имеют специальное название – *диаграммы Юнга*.

Задача известна математикам под названием «Болгарский солитер» или «Болгарский пасьянс». Насколько нам известно, приведенное в тексте нашей книги решение принадлежит А. Тоому (1981 г.), затем (другое) ее решение было опубликовано в 1982 г. Более широкую известность она приобрела благодаря знаменитому популяризатору математики М.Гарднеру (см. [134]). Исчерпывающие сведения по этому вопросу можно найти в [135] – [137].

Задача **6-11.** *Ответ*: 144 числа.

Разобьем все десятизначные числа, удовлетворяющие условию, на две группы. К первой отнесем те числа, которые кончаются на 5, а ко второй – те, которые кончаются на 2.

Зачеркивая у всех чисел из первой группы последнюю цифру 5, мы получаем все девятизначные числа, у которых никакие две двойки не стоят рядом.

Зачеркивая у всех чисел из второй группы последние две цифры – 52, мы получаем все восьмизначные числа, у которых никакие две двойки не стоят рядом.

Обозначим количество n-значных чисел, состоящих из цифр 2 и 5, у которых никакие две двойки не стоят рядом, через a_n. Наше рассуждение показывает, что $a_{10} = a_9 + a_8$.

Заметим, что оно годится для любого $n \geq 3$, т.е.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Поскольку $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, то по этой формуле $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$ и т.д., $a_{10} = 144$.

∇ Последовательность a_n – это просто занумерованная с третьего члена последовательность Фибоначчи (F_n) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., т.е. $a_n = F_{n+2}$ – см. обсуждение задачи 2-4,б).

Для *возвратных последовательностей*, у которых общий член задается линейной функцией от нескольких предыдущих, существует стандартная процедура, позволяющая находить явную формулу, задающую член такой последовательности как функцию от его номера. Продемонстрируем ее на последовательности Фибоначчи.

Ищем геометрическую прогрессию $u_k = a\lambda^k$, удовлетворяющую соотношению $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Получаем уравнение $\lambda^2 = \lambda + 1$. Находим его корни: $\lambda_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$. Таким образом, получаем две геометрические прогрессии вида $b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ и $c\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Для последовательности, полученной их почленным сложением, также выполняется соотношение $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Теперь находим b и c так, чтобы формула

$$u_n = b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

годилась для начальных членов u_1, u_2.

Для последовательности Фибоначчи $u_1 = 1$ и $u_2 = 1$, откуда $b = -c = 1/\sqrt{5}$. Для последовательности (a_n) из задачи 6-11 получаем формулу

$$a_n = F_{n+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

Задача **6-12**. а) *Ответ*: первый.

После того как из круга выйдут 32 человека, в нем останется 32 человека, и отсчет опять начнется с первого.

То же самое повторится снова: выйдут еще 16 человек и отсчет опять начнется с первого. Пройдя еще несколько раз по кругу, мы убеждаемся в том, что останется первый.

б) *Ответ*: 1925-й.

Как видно из решения задачи а), если по кругу стоят 2^n человек, то первый (тот, с кого начинается счет) останется в нем до конца. Пусть по кругу стоит 1986 человек. Будем идти по кругу, выводя их через одного, и остановимся в тот момент, когда из круга вышли 962 человека. В этот момент осталось $1986 - 962 = 1024 = 2^{10}$ ребят и первый из оставшихся имеет номер $2 \cdot 962 + 1 = 1925$. Он и останется в круге до конца.

∇ Для общей задачи – когда по кругу стоят N ребят – номер остающегося можно изящно определить с помощью двоичной системы счисления: нужно записать число N в двоичной системе и первую цифру (единицу) перенести в конец. Получится двоичная запись искомою номера «водящего».

Например: а) $64_{10} = 1000000_2 \to 0000001_2 = 1_{10}$;

б) $1986_{10} = 11111000010_2 \to 11110000101_2 = 1925_{10}$.

Было бы интересно найти решение аналогичной общей задачи, когда из круга выходит каждый m-й (в конце остается $(m-1)$ человек) (см. [94], упр. 1.3.2-22 и 5.1.1-2).

Задача **6-13**. а) Ответ: 0.

Будем писать для удобства так: $\overline{0} = 1$ и $1 = 0$.

Обозначим $(n+1)$-й член построенной последовательности через x_n: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, ... Нам надо найти x_{1986}.

На каждом шаге построения последовательности ее длина удваивается. Выясним, на каком шаге появится член x_{1986}. После 10 шагов мы получим $2^{10} = 1024$ члена последовательности, поэтому нам надо сделать 11 шагов. На 11-м шаге мы должны приписать те же члены, что были до этого, и заменить 0 на 1, а 1 – на 0, следовательно, $x_{1986} = x_{962}$ $(1986 - 1024 = 962)$. Рассуждая так же, мы найдем, что $\bar{x}_{962} = x_{450}$ $\left(962 - 2^9 = 450\right)$, и т.д. В результате получаем цепочку равенств

$$x_{1986} = \bar{x}_{962} = x_{450} = \bar{x}_{194} = x_{66} = \bar{x}_2 = x_0 = 0 .$$

∇ При решении задачи 6-13 а) мы фактически пользовались таким свойством данной последовательности:

1°. $x_n = \bar{x}_{n-2^k}$, где $2^k \le n < 2^{k+1}$.

Другое решение этой задачи можно получить, опираясь на следующие свойства нашей последовательности, которые будут использованы и в решении задачи б): для всех n

2°. $x_{2n} = x_n$;

3°. $x_{2n+1} = \bar{x}_{2n}$.

б) *Ответ*: непериодична.

Для доказательства заметим, что последовательность можно строить по новому правилу: вначале есть пара (0; 1), затем к ней приписывается пара (1; 0), затем две пары: (1; 0), (0; 1) и т. д.: на каждом шаге к уже имеющимся парам приписывается столько же новых пар, которые получаются из старых заменой каждой пары (0; 1) на пару (1; 0), а (1; 0) – на (0; 1).

Допустим теперь, что данная последовательность периодична и k – длина ее наименьшего периода.

Пусть сначала $k = 2p$ – четное число. Тогда периодичность последовательности означает, что существует такое натуральное N, что при всех $n \geq N$ выполняется равенство $x_n = x_{n+2p}$. Но из нового правила вытекает, что если разбить нашу последовательность на пары (x_0, x_1); (x_2, x_3), ..., (x_{2n}, x_{2n+1}), ..., то первые члены всех пар составляют последовательность $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$, которая совпадает с исходной (свойство $2°$). Отсюда получаем $x_n = x_{2n} = x_{2n+2p} = x_{2(n+p)} = x_{n+p}$, т.е. у последовательности есть период p, что противоречит тому, что $2p$ – наименьший период.

Пусть теперь $k = 2p + 1$ – нечетное число. Тогда в куске последовательности длины k разное число нулей и единиц. Предположим, что количество единиц больше – по крайней мере $p + 1$ (случай, когда количество нулей больше, рассматривается аналогично).

Рассмотрим кусок последовательности длиной $2k$. В нем содержится не меньше чем $2p + 2$ единиц, а нулей – не больше чем $2p$, т.е. единиц по крайней мере на 2 штуки больше. Но из нового правила вытекает, что $x_{2n+1} = \bar{x}_{2n}$ (свойство $3°$). Поэтому во всяком куске нашей последовательности, начинающемся с x_{2m}, число единиц отличается от числа нулей не больше чем на единицу. Значит, последовательность непериодична.

∇ Эта последовательность называется *последовательностью Морса* и часто встречается в разных областях математики (см. задачу 6-18).

Общий ее член можно определить так: если запись числа n в двоичной системе счисления содержит четное число единиц, то $x_n = 0$; если же нечетное – то $x_n = 1$.

Аналогичная последовательность получается из тройки 001, если не удваивать, а утраивать куски:

001 001 110001 001 110 110 110001...

Эта последовательность называется «вальсом бесконечного порядка», и, скользя по ней взглядом, можно как бы услышать мелодию вальса.

Интерес к таким последовательностям связан, в частности, с *теорией сложности по Колмогорову.* Обе приведенные последовательности, будучи отнюдь не случайными, обладают некоторыми свойствами, требуемыми от таблиц случайных чисел. Так, доля единиц среди первых k членов каждой из этих двух последовательностей стремится к половине при $k \to \infty$ (см. [138]).

Рассматриваемая последовательность впервые была построена в 1851 г. Пруэ (P.Prouhet), применившим ее в теории чисел, но ограничившимся этими применениями, не затронувшими многие интересные, уникальные свойства этой последовательности.

В 1906 г. Аксель Туэ, занимавшийся комбинаторикой, заново открыл эту последовательность, но его работа не получила широкого отклика и известности.

В 1921 г. снова открывает эту последовательность Марсон Морс, занимавшийся дифференциальной геометрией.

С тех пор ее открывали независимо много раз. Интересно, что чемпион мира по шахматам гроссмейстер Макс Эйве открыл ее применение в шахматах. Он показал, как можно играть бесконечно, не нарушая правил ничьей. Впрочем, здесь имеются некоторые тонкости, связанные с шахматными правилами (см. книгу [140]).

Последовательность Морса–Туэ – простейший пример *фрактала.* Поэтому она обладает рядом симметрий, в частности, не меняется при удалении всех элементов, стоящих на четных местах.

Из других ее свойств отметим, что в ней не встречаются подряд три одинаковых куска, т.е. в ней нельзя встретить фрагмент AAA, где A – любая конечная последовательность нулей и единиц.

Имеется число τ, двоичная запись которого – последовательность Морса–Туэ, оно называется числом Пруэ–Туэ–Морса;

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{2^{i+1}} = 0,412454033640\ldots,$$

где t_i – элементы последовательности Морса–Туэ. Как доказал в 1929 г. K.Mahler, это число трансцендентно, т.е. не является корнем какого-либо многочлена с целыми коэффициентами.

Рассматриваются также обобщения последовательности Морса–Туэ как на произвольный алфавит (т.е. вместо нулей и единиц можно рассматривать n произвольных символов), так и на многомерный случай (например, двумерная последовательность – матрица, получающаяся из предыдущей преобразованием $1 \to \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$; $0 \to \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$, см. [139]).

Задача **6-14**. *Ответ*: либо у А было число 20, а у Б – число 21, либо у А – число 21, а у Б – число 22.

Нижеследующая таблица поясняет, какие выводы может сделать умный зритель (например, мы с вами) и делали А и Б на основании каждой реплики (реплики даны сокращенно).

№ репл.	*Реплика*	*Вывод из реплики*	*Наш комментрий*
$1_А$	А:«Я не знаю, что у тебя».	У А не число 1.	Иначе А знал бы, что у Б число 2.
$1_Б$	Б:«Я не знаю, что у тебя».	У Б не 1 и не 2.	Если бы у Б была 1, то он знал бы, что у А – число 2, а если бы у Б было 2, то, учитывая информацию из предыдущей реплики, Б знал бы, что у А число 3.
$2_А$	А:«Я не знаю, что у тебя».	У А не 1, не 2 и не 3.	Иначе А знал бы, учитывая предыдущие выводы, что у Б соответственно или 3, или 4.
$2_Б$	Б:«Я не знаю, что у тебя».	У Б не 1, не 2 и не 3 и не 4.	
. . .	. . .	. . .	. . .
$10_А$	А:«Я не знаю, что у тебя».	У А не 1, не 2, не 3,..., не 19.	
$10_Б$	Б:«Я не знаю, что у тебя».	У Б не 1, не 2, не 3,...,не 20.	
$11_А$	А:«Я не знаю, что у тебя».	Либо у А число 20, тогда у Б – число 21, либо у А число 21, тогда у Б – число 22.	

∇ Решая эту задачу, мы использовали соображения типа «А думает, что Б думает, что...». Подобные многократные отражения действительности в умах людей (похожие на многократные отражения в зеркалах) в последнее время привлекли внимание ученых и обсуждаются под названием «рефлексивных отражений» (латинское слово reflexus означает «отраженный»)[2].

Из математических задач, где участвуют рефлексивные рассуждения, назовем серию задач «о мудрецах с запачканными лбами» (см. об этом, например, [55]).

Задача **6-15**. Рассмотрим отображение f, переводящее большую карту K_0 в меньшую карту K_1; каждой точке, изображающей некоторый пункт на карте K_0 $(K_0 \supset K_1)$, ставится в соответствие точка, изображающая тот же пункт на карте K_1. Обозначим через K_2 образ карты K_1 при этом же отображении (рис.81) и вообще положим $f(K_{n-1}) = K_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Прямоугольники K_0, K_1, K_2, ..., K_n, ... имеют ровно одну общую точку x, поскольку размеры прямоугольников стремятся к нулю.

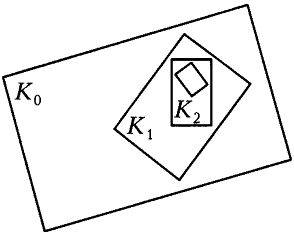


Рис. 81

Точка x и есть нужная точка прокола. Действительно, из того, что $x \in K_{n-1}$, следует, что $f(x) \in K_n$ (для любого n). Тем самым точка $f(x)$ тоже принадлежит всем прямоугольникам, а такая точка одна, поэтому $x = f(x)$.

∇ Вообще, верна такая **теорема**: *любое непрерывное отображение прямоугольника в себя имеет неподвижную точку.* Так что утверждение задачи 6-15 останется верным, даже если одну карту смять и положить на другую карту (см. [30, 44, 98]).

К нашей задаче (когда карта не смята) возможен и другой подход. Можно представить меньшую карту как полученную из большей при помощи геометрического преобразования – композиции гомотетии и поворота. Если плоскость, на которой лежат карты, представить как комплексную плоскость, то такое преобразование представляется линейной функцией $w(z) = qz + b$, где q, b, z – комплексные числа и $q \neq 0, 1$.

Тогда неподвижная точка z_0 находится как решение уравнения $z = qz + b$, т.е. $z_0 = \dfrac{b}{1-q}$.

Задача **6-16**. *Ответ*: предел равен $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

---

[2] См. статью: Тоом А.Л. На пути к рефлексивному анализу художественной прозы // Семиотика и информатика. Вып. 17. – М.: ВИНИТИ, 1981.

Данная последовательность (a_n) задается условиями $a_1 = \sqrt{1}$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.

Сначала предположим, что у нее есть предел τ. Поскольку $\lim a_{n+1} = \lim a_n = \tau$, перейдем в равенстве $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ к пределу и получим $\tau = \sqrt{1 + \tau}$. Возводя в квадрат обе части полученного равенства, приходим к квадратному уравнению $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ при условии, что $\tau > 0$. Корнями этого уравнения будут числа $\left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ и $\left(1 - \sqrt{5}\right)/2$, и, следовательно, $\tau = \left(1 + \sqrt{5}\right)\ 2$.

Докажем теперь, что последовательность (a_n) монотонно возрастает и все ее члены не больше числа τ; отсюда, по теореме Вейерштрасса, будет следовать, что она имеет предел. Доказательство проведем по индукции.

База индукции: $a_1 < a_2 < \tau$, т.е. $1 < \sqrt{1 + \sqrt{1}} < \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$. Здесь оба неравенства можно проверить почленным возведением в квадрат.

Теперь проделаем индукционный переход: предположим, что $a_{k-1} < a_k < \tau$, и докажем, что $a_k < a_{k+1} < \tau$.

Неравенство $a_k < a_{k+1}$ эквивалентно неравенству $\sqrt{1 + a_{k-1}} < \sqrt{1 + a_k}$. Последнее неравенство верно, так как по предположению индукции $a_{k-1} < a_k$.

Неравенство $a_{k+1} < \tau$, или $\sqrt{1 + a_{k-1}} < \tau$, эквивалентно неравенству $a_k < \tau^2 - 1$. Так как $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, то $\tau^2 - 1 = \tau$ и, следовательно, $a_k < \tau$.

Доказательство по индукции закончено.

∇ Заметим, что предел мы обозначили греческой буквой τ (тау), поскольку так принято обозначать замечательное число $\left(\sqrt{5} + 1\right)/2$ (см. задачу 3-14).

Если рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt{1 + x}$, то последовательность из задачи 6-16 можно представить себе как последовательность $f(0)$, $f(f(0))$, $f(f(f(0)))$, ...

Поведение последовательностей вида x_0, $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, $f(f(f(x_0)))$, ... удобно изучать графически. В одной системе координат чертятся график функции $y = f(x)$ и прямая $y = x$. Тогда нашей последовательности соответствует геометрическая процедура, изображенная на рисунке 82. Из точки M_0 $(x_0; 0)$ на оси Ox проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $y = f(x)$. Точка пересечения имеет координаты $N_0 = (x_0; f(x_0))$. Из этой точки проводим горизонтальную прямую до пересечения с прямой $y = x$ в точке $M_1 = (f(x_0); f(x_0))$. Из этой точки снова проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ в точке $N_1 = (f(x_0); f(f(x_0)))$ и т.д. Абсциссы точек $N_0, N_1, \ldots$ (или ординаты точек $M_0, M_1, \ldots$) являются членами нашей последовательности.

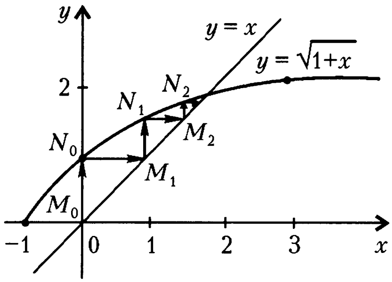


Рис. 82

На рисунке 82 изображен график функции $f(x) = \sqrt{1+x}$ из задачи 6-16. Мы видим, что члены последовательности растут и стремятся к числу τ, где τ – абсцисса точки пересечения графика функции $f(x) = \sqrt{1+x}$ с прямой $y = x$. Вычисляя по формуле $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ один за другим члены этой последовательности, начиная с $x_0 = 0$, мы тем самым находим все с большей точностью корень τ уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Это наблюдение поясняет следующий прием приближенного решения уравнений. Уравнение $F(x) = 0$ переписывается в виде $x = f(x)$. Выбирается число x_0 и один за другим находятся члены последовательности x_n по формуле $x_{n+1} = f(x_n)$ при $n \geq 1$. Этот метод нахождения корней уравнения называется *методом итераций* или *методом последовательных приближений* (см. [44, 64]).

Задача **6-17**. *Ответ*: $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$.

Заметим, что все члены a_k последовательности положительны и что число $\tau = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ является корнем уравнения $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$. Покажем, что если $a_k < \tau$, то $a_{k+1} > \tau$ и $a_{k+2} < \tau$.

Из неравенства $a_k < \tau$ вытекают следующие соотношения:

$$\frac{1}{a_k} > \frac{1}{\tau}, \quad a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k} > 1 + \frac{1}{\tau} = \tau,$$

$$\frac{1}{a_{k+1}} < \frac{1}{\tau} \text{ и } a_{k+2} = 1 + \frac{1}{a_{k+1}} < 1 + \frac{1}{\tau} = \tau.$$

∇ Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Последовательность из задачи 6-17 есть последовательность $f(1), f(f(1)), \ldots$ Поведение этой последовательности можно представить графически так же, как и в предыдущей задаче (рис. 83).

Для знатоков. Знатоки, конечно, заметили, что последовательность, рассмотренную в задаче 6-17, можно задать так: $a_n = F_{n+1}/F_n$, где F_k – k-член последовательности Фибоначчи (см. обсуждение задачи 6-11), т.е. a_n – подходящие дроби

$$1,\ 1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{1+1},\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}$$

разложения числа τ в бесконечную цепную дробь (см. [63]).

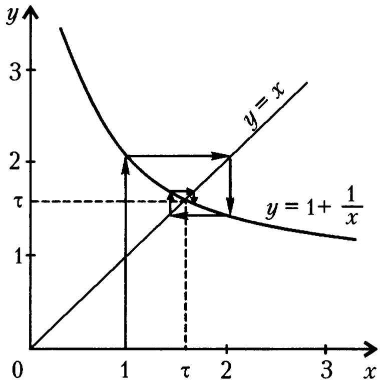


Рис. 83

Задача **6-18**. *Ответ*:

$$(0;\, 2),\ (2;\, 0),\ \left(-1+\sqrt{5};\, -1+\sqrt{5}\right),\ \left(-1-\sqrt{5};\, -1-\sqrt{5}\right).$$

Подставив $y = \left(4 - x^2\right)/2$ из первого уравнения во второе, получим уравнение четвертой степени

$$2x = 4 - \left(2 - x^2/2\right)^2,$$

откуда $x^4/4 - 2x^2 + 2x = 0$, или $x(x-2)\left(x^2 + 2x - 4\right) = 0$. Решив это уравнение, найдем ответ.

∇ Рассмотрим более общую систему уравнений вида

$$y = f(x),$$
$$x = f(y)$$

(в задаче 6-18 $f(x) = \left(4 - x^2\right)/2$).

Подставляя y из первого уравнения во второе, сведем задачу к решению уравнения $x = f(f(x))$.

Ясно, что если x – неподвижная точка отображения f, т.е. $f(x) = x$, то $f(f(x)) = f(x) = x$. Поэтому среди корней уравнения $x = f(f(x))$ будут все корни уравнения $f(x) = x$. В задаче 6-18 уравнение $x = f(x)$ имеет вид $x = \left(4 - x^2\right)/2$ и его корни $x = -1 \pm \sqrt{5}$ дают два решения исходной системы.

Два других ее решения, $x = 0$, $x = 2$, образуют «цикл» периода 2.

Для знатоков. Рассмотрим систему более общего вида:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= a - x_1^2, \\ 2x_3 &= a - x_2^2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 2x_p &= a - x_{p-1}^2, \\ 2x_1 &= a - x_p^2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Обозначим отображение $x \to \left(a - x^2\right)/2$ через f, а n-кратную итерацию этого отображения – через f^n.

Будем называть последовательность

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots, f^n(x_0), \dots$$

орбитой точки x_0 при отображении f.

Орбита точки x_0 называется *периодической* (периода p), если $f^p(x_0) = x_0$ и $f^k(x_0) \neq x_0$ при $1 \leq k < p$.

Наша система ($*$) сводится к алгебраическому уравнению $f^p(x) = x$ степени 2^p. Вопрос о том, имеет ли эта система решение $\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$ с p различными числами (при данных значениях параметра a), можно сформулировать так: имеет ли отображение f орбиту периода p? Этому вопросу и вообще изучению итераций непрерывных функций в последнее время посвящен ряд серьезных математических работ.

На примере семейства отображений $f_a(x) = \left(a - x^2\right)/2$ ($0 \leq a \leq 8$) можно проследить многие интересные феномены, возникающие при итерациях отображений отрезка в себя, в частности поведение орбит разных точек.

Нетрудно видеть, что при $0 \leq a \leq 8$ наше отображение f_a переводит в себя отрезок $\left[-1 - \sqrt{1+a};\ -1 + \sqrt{1+a}\right]$ и имеет две «орбиты периода 1» (т.е. две неподвижные точки: $x = -1 \pm \sqrt{1+a}$). При $0 \leq a \leq 3$ других периодических орбит у отображения f_a нет. Можно доказать, что с возрастанием a начинают появляться орбиты с другими периодами: при $a > a_1 = 3$ – с периодом 2, при $a > a_2 = 5$ – с периодом 4, при $a > a_3 = 5{,}47\dots$ – с периодом 8 и т.д. Вообще, существует возрастающая последовательность чисел a_m такая, что при $a_m < a \leq a_{m+1}$ отображение имеет орбиты каждого из периодов $1, 2, 2^2, \dots, 2^m$ и не имеет орбит с другими периодами. Эта последовательность сходится к критическому значению a_∞ = 5,6046 ... (найденному с помощью ЭВМ), после которого характер типичных орбит резко меняется. При этом последовательность разностей $a_m - a_\infty$ ведет себя примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем $\lambda = (4{,}66920\ldots)^{-1}$. (Точно так же и для многих других семейств непрерывных отображений возникают последовательности значений параметра a_m, при которых происходят «удвоения периодов», сходящиеся к критическим значениям a_∞, причем всегда разность $a_m - a_\infty$ стремится к нулю как прогрессия $b_m = c\lambda^m$, т.е. отношение $(a_m - a_{m-1})/(a_{m+1} - a_m)$ всегда стремится к одному и тому же пределу λ – постоянной Фейгенбаума.)

При $a < a_\infty$ поведение орбиты почти любой точки x сравнительно просто: если $a_m < a \le a_{m+1}$, то она приближается к некоторой орбите периода 2^m. Другим словами, при $p = 2^m$ и $a \le a_{m+1}$ одно решение нашей системы уравнений ($*$) можно найти методом последовательных приближений.

Например, для функции $f_4(x) = \left(4 - x^2\right)/2$ из задачи 6-18 легко убедиться, что орбита любой точки $x \in [-2; 2]$ приближается к орбите нуля (0; 2; 0; 2; ...) периода 2.

При $a \ge a_\infty$ картина резко усложняется: орбиты многих точек x хаотически блуждают по некоторому бесконечному подмножеству отрезка. Например, при $a = a_\infty$ орбита нуля не приближается ни к какой периодической орбите; более того, даже последовательность (θ_n) знаков этих чисел непериодическая и имеет сложное строение (см. таблицу).

n	1	2	3	4	5	6	...
$f^n(0)$	2,80...	−1,12...	2,17...	0,44...	2,70...	−0,84...	...
θ_n	+	−	+	+	+	−	...

Интересно отметить, что эта *последовательность плюсов* и *минусов* θ_n *тесно связана с последовательностью Морса* из задачи 6-13. Оказывается, что если под каждой парой соседних членов последовательности Морса написать знак «+», если эти члены разные, и « – », если они одинаковые, то получится в точности последовательность θ_n:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\ldots \\ + & - & + & + & + & - & + & - & + & - & + & + & + & \ldots \end{matrix}$$

При $a > a_\infty$ у отображения f_a появляются периодические орбиты не только периода 2^p. Какие в принципе периоды могут иметь орбиты данного отображения, показывает следующая **теорема Шарковского** (см. [78]).

Все натуральные числа упорядочиваются таким образом:

$$\underbrace{3, 5, 7, \ldots}_{\text{нечетные}};\ \underbrace{3\cdot 2, 5\cdot 2, 7\cdot 2, \ldots}_{\text{нечетные}\ \times 2};\ \underbrace{3\cdot 2^2, 5\cdot 2^2, 7\cdot 2^2, \ldots}_{\text{нечетные}\ \times 4};\ \underbrace{2^3, 2^2, 2, 1}_{\text{степени 2}}$$

Тогда про каждые два натуральных числа можно сказать, какое из них левее, а какое – правее. Если непрерывное отображение отрезка в себя имеет орбиту периода r, то оно имеет и орбиты всех периодов, стоящих правее, чем r.

Например, число 3 левее всех, и, в соответствии с этим, отображение, имеющее орбиту периода 3, имеет и орбиты всех периодов. Имеются и другие результаты о том, как могут меняться, в зависимости от параметра, свойства итераций у семейств непрерывных отображений отрезка в себя. Но многие наблюдения, полученные при помощи ЭВМ, еще ждут своего объяснения.

Интерес к этой тематике объясняется тем, что она тесно связана с исследованием сложного, хаотического (случайного), т.е. неустойчивого и непериодического, поведения динамических систем с тремя и более переменными, моделирующих самые разные физические процессы (см. [111, 113]).

Задачи для самостоятельного решения

6-19. а) Найдите 1986-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $1/31$.

б) При каких натуральных $m < 31$ период десятичной записи числа $m/31$ будет состоять из тех же цифр, что и период числа $1/31$?

6-20. а) Учитель предлагает ученику делить столбиком 19 на 73. Какая цифра будет стоять на 100-м месте после запятой?

б) Пусть n – целое, $0 < n < 73$. Число $n/73$ разлагается в бесконечную десятичную дробь. Докажите, что в этой дроби не встречается двух одинаковых цифр, стоящих подряд.

в) Укажите все простые числа p, для которых в десятичных разложениях всех дробей n/p $(0 < n < p)$ нет двух одинаковых цифр, стоящих подряд.

6-21. Последовательность (a_n) задается так: $a_1 = 7$, a_{n+1} – сумма цифр числа a_n^2. Найдите a_{1000}.

6-22. Последовательность (a_n) задается так: a_1 – некоторое натуральное число, a_{n+1} – сумма квадратов цифр числа a_n, $n \geq 1$. Докажите, что в этой последовательности обязательно встретится одно из чисел 1 или 89.

6-23. Последовательность (x_n) задана своими первыми двумя членами $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ и условием

$$x_{n+1} = kx_n - x_{n-1}.$$

Имеет ли период эта последовательность, если:

а) $k = \sqrt{2}$; б) $k = \sqrt{3}$; в) $k = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$; г) $k = \dfrac{3}{2}$?

6-24. Поток студентов пять раз сдавал один и тот же зачет (не сумевшие сдать зачет приходили на следующий день). Каждый день успешно сдавала зачет треть всех пришедших студентов и еще треть студента. Каково наименьшее возможное число студентов, так и не сдавших зачет за пять раз?

6-25. Жители островов Чунга и Чанга раз в год на праздник обмениваются драгоценностями. Жители Чунги привозят половину своих драгоценностей на остров Чанга, а жители Чанги одновременно привозят треть своих драгоценностей на остров Чунга. Так продолжается с незапамятных времен. Какая часть драгоценностей находится на каждом из островов? (Никаких новых драгоценностей за это время на островах не появилось, а старые не терялись.)

6-26. Решите систему

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2^2, \\ x_2 &= 1 - x_3^2, \\ x_3 &= 1 - x_4^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= 1 - x_n^2, \\ x_n &= 1 - x_1^2. \end{aligned}$$

6-27. Найдите с точностью до 0,01 сотый член x_{100} последовательности (x_n), заданной условиями:

а) $x_1 \in [0; 1]$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $n > 1$;

б) $x_1 \in [0,1; 0,9]$, $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$, $n > 1$.

6-28. Последовательность многочленов

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = x^2 - 1, \ldots$$

задается условием

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Докажите, что уравнение $P_{100}(x) = 0$ имеет 100 различных действительных корней.

6-29. Муравей прополз по ломаной $H_0H_1H_2H_3\ldots$ из бесконечного числа звеньев $H_0H_1, H_1H_2, H_2H_3, \ldots$ Длины отрезков H_0H_1, H_1H_2 и H_0H_2 равны 5, 4 и 3 см; H_nH_{n+1} – перпендикуляр, опущенный из точки H_n на отрезок $H_{n-2}H_{n-1}$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$).

а) Какое расстояние прополз муравей?

б) На каких расстояниях от отрезков H_0H_2 и H_0H_1 находится точка, в которую он приполз?

6-30. В последовательности треугольников длины сторон каждого последующего треугольника $A_nB_nC_n$ равны длинам медиан предыдущего треугольника $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Найдите длины сторон треугольника $A_{1000}B_{1000}C_{1000}$, если a, b, c – длины сторон треугольника $A_0B_0C_0$.

6-31. В круг радиуса 1 вписан квадрат, в него – круг, в него – правильный 8-угольник, в него – круг, в него – правильный 16-угольник, в него – круг и т.д.; в n-й круг вписан правильный 2^{n+1}-угольник. Докажите, что радиусы всех кругов больше $2/\pi$.

6-32. Последовательность (a_n) задана первым членом $a_1 = 1$ и условием $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^2}$. Докажите, что:

а) эта последовательность не ограничена;

б) $a_{9000} > 30$.

в) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \Big/ \sqrt[3]{n}$.

6-33. Последовательность (a_n) задана первым членом $a_1 = 1$ и условием $a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{4} + \dfrac{1}{a_n}$. Докажите, что:

а) последовательность ограничена;

б) $|a_{1000} - 2| < (3/4)^{1000}$.

6-34. Найдите предел последовательности (a_n), которая задается условиями: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{a_n^2}{8}$.

6-35. Из тройки чисел a, b, c образуем новую тройку

$$|a-b|,\ |b-c|,\ |c-a|,$$

затем из этой тройки по тому же правилу – следующую и т.д. Всегда ли среди полученных таким образом чисел встретится 0, если числа a, b, c: а) целые; б) не обязательно целые?

в) Те же вопросы для аналогичной операции над четверками чисел:

$$(a, b, c, d) \to \left(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|\right).$$

6-36. Население города состоит из n человек, и каждый живет в отдельном домике. Однажды жители города решили обменяться своими домами. После обмена выяснились, что расстояние между новыми домами любых двух жителей не меньше, чем расстояние между их старыми домами. Докажите, что в результате обмена расстояния между домами любых двух жителей города не изменились.

6-37. Выписываются подряд все числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, ...

и для каждого из этих чисел находится сумма его цифр:

$$9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 18,\ 9,\ 9,\ \ldots \qquad (*)$$

Требуется указать закон, описывающий чередование чисел в последовательности (*). На каком месте этой последовательности впервые появится число 81, и каково будет следующее за ним число? Что раньше встретится в этой последовательности – 4 раза подряд число 27 или 3 раза подряд число 36?

6-38. Отрезок числовой оси от 0 до 1 покрашен в зеленый цвет. Затем его средняя треть – отрезок $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ – перекрашен в красный цвет; потом средняя треть каждого из оставшихся зелеными отрезков тоже перекрашена в красный цвет, с оставшимися четырьмя зелеными отрезками проделана та же операция, и так до бесконечности.

а) Найдите сумму длин красных отрезков.

б) Докажите, что число $1/4$ будет зеленым до самого конца.

в) Из суммы $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\cdots$ произвольным образом вычеркнуто бесконечное число слагаемых так, что осталось тоже бесконечно много слагаемых; докажите, что их сумма – зеленое число.

г) Докажите, что все остальные числа (между 0 и 1) красные.

6-39. Назовем *ломаной Дракона* бесконечную последовательность отрезков A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ... (на плоскости), которая строится по следующему правилу. Сначала выбираются точки A_0 и A_1, отличные друг от друга. Потом последовательно, по шагам, строятся следующие точки. На k-м шаге, где $k = 1, 2, \ldots$, уже построенная ломанная $A_0A_1\ldots A_{2^{k-1}}$ поворачивается вокруг своей последней точки $A_{2^{k-1}}$ по часовой стрелке на $90°$. При этом повороте A_0 переходит в A_{2^k}, A_1 переходит в A_{2^k-1}, вообще A_m переходит в A_{2^k-m} при всех $m \in \{0, 1, \ldots, 2^{k-1}-1\}$. Так получается ломаная $A_0A_1\ldots A_{2^k}$, и затем делается следующий шаг (рис.84).

а) Постройте ломаную $A_0A_1\ldots A_{32}$.

б) Найдите общую формулу для последовательности расстояний A_0A_1, A_0A_2, A_0A_4, ..., $A_0A_{2^k}$, ...

в) Докажите, что ломаная Дракона ни по одному отрезку не проходит дважды.

г) Ломаную Дракона удобно рисовать на клетчатой бумаге

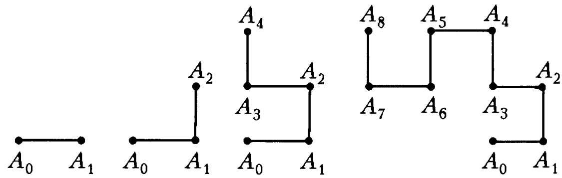


Рис. 84

(каждое звено – сторона клетки). Докажите, что четыре бесконечные ломаные Дракона, выходящие из одного узла клетчатой бумаги в четырех разных направлениях, проходят по всем отрезкам бесконечного листа клетчатой бумаги.

6-40. Гномы, живущие в белых и красных домиках, ежегодно одновременно красят свои домики, причем меняют цвет домика только те гномы, у кого больше половины друзей прожили последний год в домиках другого цвета. Докажите, что наступит год, начиная с которого цвет некоторых домиков вовсе не будет меняться, а остальных – будет меняться каждый год.

УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2-23. Нужно выяснить, имеет ли уравнение $13x + 16y = 300$ решение в целых неотрицательных числах (см. 2-1, 2-6, с. 17, 21).

2-24. Отношение длин окружностей равно $40/18 = 20/9$. Поэтому гвоздь будет оставлять отметки через $9/20$ длины большей окружности (см. 2-8, с. 22).

2-25. См. 2-7, 2-8, с. 21–23.

2-26. Поскольку н.о.д. $(360,\ 48) = 24$, вопрос а) сводится к такому: существует ли фигура, которая при повороте вокруг точки O на $24°$ переходит в себя, а на $90°$ – нет?

2-27. См. 2-7, с. 21.

2-28. Можно проделать «спуск», похожий на алгоритм Евклида (см. 2-4, с. 18), используя следующие утверждения: н.о.д.$(a-b, b) =$ н.о.д.(a, b); н.о.д.$(a+b, b) =$ н.о.д.(a, b); если числа a и b нечетны, то н.о.д.$\left(2^k \cdot a, b\right) =$ н.о.д.(a, b).

∇ Отбрасывание лишней степени двойки – основная идея «бинарного алгоритма» отыскания наибольшего общего делителя, который для чисел в двоичной записи (принятой в ЭВМ) удобнее алгоритма Евклида (см. [94], т. 2, 4-5-2).

2-29. См. 2-4, с. 18.

2-30. Найдите сумму всех чисел в прямоугольнике двумя способами: «по строкам» и «по столбцам».

2-31. б) См. 2-9, 2-10, с. 23–24.

2-33. В равенстве $pq - p - q + 1 = 6$ левую часть можно разложить на множители.

2-34. б) См. 2-10, с. 24.

2-35. б) Число $n^3 - 1$ делится на $n - 1$.

2-36. а) Многочлен $x^2 - (y+1)^2$ можно разложить на множители; после этого надо рассмотреть всевозможные разложения числа 12 в произведение двух целых чисел одной четности.

2-38. См. 2-10, 2-16, с. 24, 28.

2-39. Если m и n не делятся на 5, то $m^4 - n^4$ делится на 5; это можно доказать, выяснив, какие остатки дают квадраты (и четвертые степени) при делении на 5.

2-40. Разложите $a^k - 1$ на множители, использовав формулу из решения задачи 2-17 б), с. 29, и используйте то, что остаток при делении a на k равен 1.

2-41. Три последние цифры любого натурального числа, большего 100, те же, что и 100-й степени числа из его последних трех цифр (и даже 100-й степени его последней цифры),

2-42. См. 2-13, с. 26.

2-43. См. 2-14, с. 27.

2-44. См. 2-15, с. 28.

2-45. а) $n^4+4=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2$. б) См. 2-18, с. 30.

2-47. Достаточно доказать, что этот многочлен делится на каждый из многочленов x, $x+1$, $2x+1$ (по теореме Безу, см, комментарий к 2-17 б), с. 30).

2-48. Можно выяснить, при каких a и b этот многочлен делится на $x-1$ (см. 2-17, с. 29–30), и выделить множитель $x-1$.

∇ Многочлен $p(x)$ делится на $(x-d)^2$ тогда и только тогда, когда он сам и его производная $p'(x)$ делятся на $x-d$.

2-49. Разделить многочлен $f(x)$ на $(x-1)(x-2)$ с остатком – значит представить его в виде

$$f(x)=g(x)(x-1)(x-2)+ax+b.$$

Найти числа a и b можно далее по теореме Безу (см. 2-17 б), с. 29).

2-50. Для любого многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами число $f(k)$ при четном k имеет ту же четность, что $f(0)$, а при нечетном k – ту же, что и $f(1)$.

2-51. Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целый корень c, то его значение в целой точке d (при $c\neq d$) делится на $d-c$ (см. 2-17 б), с. 29).

2-52. Один из множителей должен быть многочленом третьей (или меньшей) степени. Такой многочлен не может принимать значение 1 в четырех или более точках (это следует из теоремы Безу). Докажите, что многочлен третьей степени не может принимать в трех целых точках значение 1 и в двух – значение -1.

2-53. а) Рассуждая так же, как в задаче 2-40, можно убедиться, что если $a^{5^m}+1$ делится на 5^m, то $a^{5^{m+1}}+1$ делится на 5^{m+1}.

2-54. Выкладывая карточки в ряд, нужно следить за четностью количества карточек каждого типа. Обозначим через x_k произведение первых k чисел. Оно представляется в виде

$$x_k=2^{\alpha_k}\cdot 3^{\beta_k}\cdot 5^{\gamma_k}\cdot 7^{\delta_k}\cdot y_k^2,$$

где y_k – натуральное число, а $S_k=(\alpha_k;\beta_k;\gamma_k;\delta_k)$ – набор из 0 и 1. Наборы S_m и S_{m+1} отличаются только в одном из четырех мест. Чтобы выполнялось условие задачи, нужно, чтобы ни один из этих наборов не состоял из одних нулей и никакие два набора S_m и S_n не совпадали при $m\neq n$. В самом деле, если какой-то набор S_k состоит из нулей, то произведение первых k чисел есть полный квадрат, а если какие-то два набора S_m и S_n, где $m > n$, совпали, то произведение чисел от $(n+1)$-го до m-го есть полный квадрат.

а) Задача сводится к такой: можно ли выписать подряд 15 ненулевых наборов из четырех цифр 0 и 1 друг за другом так, чтобы каждые два соседних отличались ровно в одном месте, а первым шел набор из трех нулей и одной единицы?

б) Подсчитайте общее количество наборов S (см. [7], задача 3-17).

в) Эту задачу для «знатоков» можно переформулировать так: какое наибольшее число ребер n-мерного куба может содержать цепочка ребер, не заходящая дважды в одну вершину?

2-55. Если a и b взаимно просты, то на каждой прямой $ax + by = c$, где c – целое, растет дерево (см. 2-2, 2-6, 2-7, с. 17, 20, 21).

2-56. См. 2-21, с. 32.

2-57. В доказательстве можно использовать формулу для функции Эйлера, приведенную в комментарии к решению 2-8, с. 22.

2-58. б) Доказательство удобно провести по индукции, начав с конечной цифры 5 или 6.

∇ Вся бесконечная влево последовательность таких цифр (например, $x = \ldots 376$) образует так называемое *10-адическое* число, для которого $x^2 = x$; таким образом, в 10-адических числах квадратное уравнение $x^2 = x$ имеет, кроме решений $x = 0 = \ldots 000$ и $x = 1 = \ldots 001$, еще два решения. В теории p-адических чисел причудливым образом сплетаются свойства целых и вещественных чисел (см. [82]).

2-59. Пусть тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ – решение данного уравнения. Тогда все тройки, полученные из нее перестановками чисел x_0, y_0, z_0 – тоже решения. Если подставить в уравнение тройку $(x_0; y_0; z_0)$, то из полученного квадратного относительно x уравнения находится новое решение исходного уравнения.

2-60. Рассмотрите одновременно число $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{1987} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$.

2-61. Полезно с числом $a^2 + ab + b^2$ из M связать выражение $a + b\omega$ и при перемножении двух таких выражений считать ω^2 равным $\omega - 1$ (тогда будет выполняться, в частности, равенство $(a+b\omega)\left(a-b\omega^2\right) = a^2 + ab + b^2$). Буквой ω здесь обозначено комплексное число $\left(1+\sqrt{-3}\right)/2$, а $-\omega^2 = 1 - \omega = \left(1-\sqrt{-3}\right)/2$ – сопряженное к нему число.

2-62. Можно взять $y = x! - 1$.

3-26. 1) См. решение и комментарий к 3-7, с. 49–50, рис. 19.

3) Если $m = ab/c$, то $c/a = b/n$.

4) Пусть $m = a\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + a^2}$, $n = a\sqrt{3} = \sqrt{m^2 + a^2}$, тогда $a\sqrt{2}/\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = am/(m+n)$.

6) Пусть $m = \sqrt{2}a$, тогда $a\sqrt{2} = \sqrt{m \cdot a}$.

3-27. По поводу таких построений см. 3-2, с. 44–46. В п. 1) $\sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{(b-a)(b+a)}$, в п. 2) $a\sqrt{3} = \sqrt{3a \cdot a}$, в п. 3) $a\sqrt{2} = \sqrt{2a \cdot a}$, так что в этих пунктах построения сводятся к построению среднего геометрического $\sqrt{ab}$ отрезков a и b – с. 49, рис.19. Для этого повторите рис. 19, проведите на нем радиус OK и отрезок, симметричный ему относительно прямой KB.

4) Здесь можно использовать уже построенный в п. 3) отрезок $a\sqrt{2}$.

3-28. См. 3-3, с. 46.

3-29. Здесь удобно использовать метод геометрических мест – см. 3-4, с. 46. Геометрическое место середин отрезков, один конец которых находится в данной точке, а другой – на данной окружности, является окружностью.

3-30–3-31. Здесь удобно действовать методом подобия – см. 3-6, с. 48–49.

3-32. Наиболее удаленная от начала координат вершина прямоугольника находится на прямой $y = \pi + \frac{p}{2} - 2x$.

3.33. $r\sqrt{\pi} = r\sqrt{\pi \cdot 1}/1$.

3-34. Воспользуйтесь тождеством $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$. Пусть $\cos\frac{\varphi}{3} = x$, тогда $4x^3 = \cos\varphi + 3x$.

3-35–3-36. Удобно отражать от стенок сами фигуры: угол и бильярд – см. 3-16, с. 58. В 3-36 рассмотрите сначала бильярд размерами 3×5 и сделайте рисунок.

3-37. Опишите окружность около треугольника ABC.

3-38. См. 3-8, с. 50.

3-39. Используйте 3-14 (с. 55) и то, что $1/6 - 1/10 = 1/15$.

3-40. Эллипс – геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек этой плоскости постоянна. Гипербола – геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек этой плоскости постоянен.

3-41. б) Докажите, что если отрезки лежат на разных прямых, то любая ось симметрии объединения отрезков является осью симметрии одного из отрезков.

3-42. Здесь удобно действовать методом подобия – см. 3-6, с. 48.

3-43, 3-44. См. 3-10, с. 51–53

3-46. Докажите, что три общие хорды трех попарно пересекающихся окружностей пересекаются в одной точке, и воспользуйтесь предыдущей задачей 3-45.

3-47. Среди вершин правильного двенадцатиугольника можно разными способами выбрать четыре вершины, все попарные расстояния между которыми различны.

3-48. Доказательство удобно провести методом математической индукции (см. [112]) по числу прямых.

3-50. См. 3-19, с. 62. Геометрическое место центров шаров, касающихся двух пересекающихся плоскостей, – пара перпендикулярных плоскостей. Геометрическое место центров шаров, касающихся трех попарно пересекающихся плоскостей, – пересечение двух пар плоскостей, т.е. четверка прямых. Число точек, одинаково удаленных от четырех попарно пересекающихся плоскостей, не более восьми.

3-51. Не все части являются тетраэдрами, некоторые из них – октаэдры (рис.68 на с. 116).

3-52. См. 3-19, с. 62.

3-53. а) Плоскость, проходящая через середину диагонали куба и перпендикулярная ей, – геометрическое место точек, равноудаленных от ее концов. Найдите на ребрах куба такие точки.

б) Разделите диагональ на три равные части и найдите формулу для $S(x)$ в каждой из этих частей. Площадь проекции сечения на грань куба равна $S(x)\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между диагональю и гранью куба.

3-54. Докажите, что трехгранные углы тетраэдра равны (см. 3-24, 3-25, с. 66–68).

3-55. Нарисуйте сначала плоскую схему такого многогранника (см. 3-23, с. 66).

3-56. Докажите, что: а) площадь «дольки» – сферического двуугольника, высекаемого на сфере двугранным углом трехгранного угла, равна 2α, где α – величина двугранного угла; б) сферический треугольник является пересечением трех двуугольников, образованных тремя двугранными углами трехгранного угла.

4-25. Наибольшее значение достигается при $a = b$. Можно выразить все нужные элементы треугольника, например, через величину острого угла.

4-26. Воспользуйтесь тем, что $f(0) = f(1) = 1$, а наименьшее значение $f\left(\frac{1}{2}\right)$ функции $f(x)$ не меньше чем -1.

4-27. См. 4-5, с. 77.

4-28. Сумма трех наименьших чисел не больше, чем утроенное среднее арифметическое всех 10 чисел.

4-30. См. 4-3, с. 75. Начните с того, что посчитайте все площади для нескольких характерных случаев: точка в вершине, в середине стороны, в точке пересечения медиан.

4-31. Сначала полезно найти, какую наименьшую величину может иметь произведение диагоналей.

4-32. Сколько, самое меньшее и самое большее, стоит одна авторучка?

4-33. Можно действовать так же, как в 4-6 б), с. 78–79, используя равенство $1/(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3}+1)/2$.

∇ Разложение $\sqrt{3}$ в цепную дробь получается периодическим. То, что 220 вольт и 127 вольт – обычное напряжение в сети, не случайно – см. [57].

4-34. См. 4-8, с. 80.

4-35. См. 4-9, с. 82. Обозначим через p то расстояние, которое человек успевает пройти от одного обгона до следующего. Тогда

$$5p \le 4 < 7p\ ,$$

$$7p \le 7 < 9p\ ,$$

$$(x-1)p \le 17 < (x+1)p\ ,$$

где x – искомое число автобусов.

4-37. Пусть S – сумма всех одиннадцати чисел. Тогда каждое из них есть корень уравнения $x=(S-x)^2$, имеющего не более двух решений. Поэтому среди искомых чисел не больше двух различных.

4-38. Найдите отношение значения данной величины при $n = k + 1$ к значению при $n = k$ и выясните, при каких k это отношение больше 1, а при каких – меньше (см. 4-13, с. 85).

4-39. Полезно рассмотреть сначала случай, когда все числа равны между собой. Чтобы получить для n оценку сверху, удобно сложить неравенства $a_i^2+a_j^2 \ge 2a_ia_j$, где a_k ($1 \le k \le n$) – числа, о которых идет речь в условии задачи.

4-40. См. 4-15, с. 86.

4-41. Интегралы в левой части можно представить как площади криволинейных треугольников, расположенных под и над графиком функции $y=\sin x$ (см. 4-16, с. 87).

4-42. Здесь удобно использовать тот же прием, что и в доказательстве каждого неравенства 4-15, с. 86; в одном из случаев надо также учесть неравенство треугольника.

4-43. а) Представьте данные числа как степени с одинаковыми показателями и сравните основания этих степеней.

б) Чтобы сравнить числа $2^{9\,3^{98}}$ и $3^{4\,2^{148}}$, достаточно сравнить 2^9 с 3^4 и 3^{98} с 2^{148} (т.е. $\left(\frac{9}{8}\right)^{49}$ с 2 – см. 4-4, с. 75–77).

в) Сравните числа $\log_5(6/5)$, $\log_6(6/5)$, $\log_6(7/6)$.

г) Можно использовать равенство

$$2\sin 7^\circ \cdot \sin 5^\circ = \cos 2^\circ - \cos 12^\circ\ .$$

Другие решения пунктов в), г) и д) можно получить, используя следующий факт: если функция $\lg f(x)$ выпукла вверх (см. 4-18, с. 89), то $f(x+1)/f(x) \ge f(x)/f(x-1)$.

4-44. Можно рассуждать так же, как в решении задачи 4-18, с. 89, используя функции:

а) $f(x)=1\ (1+x)$; б) $f(x)=\lg\sin x$.

4-45. В искомую сумму выгодно включать лишь двойки и тройки.

4-46. См. 4-19, с. 91.

4-47. Оцените количество узлов бесконечной сетки из правильных треугольников со стороной 1, лежащих в круге радиуса 10 с центром в одном из узлов сетки (достаточно подсчитать количество узлов, лежащих в правильном шестиугольнике со сторонами длины 10, идущими по линиям сетки),

4-48. См. 4-23, с. 93.

4-49. Отразив гипотенузу симметрично относительно катетов, получим на ее образах – двух параллельных отрезках – новые точки K' и H' – образы точек K и H. Задача сводится к тому, чтобы минимизировать длину ломаной $K'PQH'$. (Положений точек P и Q, при которых достигается минимум длины, здесь бесконечно много.)

4-50. Квадрат расстояния между двумя точками, движущимися равномерно и прямолинейно, выражается квадратным трехчленом от времени (это проще доказать, перейдя к системе координат, связанной с одной из этих точек). По трем значениям квадратного трехчлена можно вычислить его коэффициенты, а затем – найти его минимум.

5-22. б) Отрицательные числа имеет смысл вписать в пять клеток – центральную и в четыре имеющие с ней общую вершину, – а положительные – в остальные 20 клеток.

5-23. Улитка могла проползти от 4 до 12 метров (см. 5-1, с. 100).

5-24. См. 5-3, с. 103.

5-25. См. 5-5, с. 104–105.

5-26. а) Полезно рассмотреть сначала ситуацию, когда в автобусе едут 2, 3 и 4 человека.

б) После размена у каждого должна остаться хотя бы одна монета.

в) Полезно выяснить, сколько среди 15 человек таких, у которых только одна 15-копеечная монета.

5-27. Удобно составить таблицу, в которой строки соответствуют цветам, а столбцы – фасонам.

5-28. См. 5-6, с. 105.

5-29. а) Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по двум сторонам и углу против одной из них. Исследуйте, сколько решений имеет эта задача на построение.

б) Рассмотрите два треугольника: один со сторонами 1, a, a^2, второй – со сторонами a, a^2, a^3. При каких a существуют эти треугольники?

5-30. Докажите, что один из углов между биссектрисами треугольника не меньше 60° (выразите для этого углы между биссектрисами через углы треугольника). Оцените площадь четырехугольника, диагоналями которого являются эти биссектрисы. См. [36], задача 272.

5-32. Эта задача связана с равенством

$$4 + 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3^3 + \ldots + 4 \cdot k^3 = k^2 (k+1)^2 .$$

5-33. г) Попробуйте сначала разрезать прямоугольный треугольник на два равнобедренных.

5-35. а) Внутренний четырехугольник не обязательно выпуклый.

б) Длина любого отрезка, расположенного внутри четырехугольника, не превосходит половины его периметра.

5-36. б) Рассмотрите случаи четного и нечетного n (см. 5-16, с. 116).

5-37. а) Рассмотрите проволочный икосаэдр, см. 5-15 б), с. 116.

б) Попробуйте посчитать число отрезков (см. 5-16 б), 5-17 б), с. 117).

5-38. Удобно каждое из чисел от 1 до 81 представить в виде суммы степеней тройки, т.е. записать в троичной системе счисления.

5-40. Если $7/8 = q^k$, $9/8 = q^n$ для некоторых целых k и n, то $7^n \cdot 9^k = 8^{n+k}$.

5-41. б) Если у каждого выключателя два состояния (включен–выключен), то у трех выключателей всего восемь различных состояний, одно из которых соответствует случаю, когда все лампочки погашены.

5-42. Изобразим задачи черными кружками, участников – белыми и от каждого участника проведем отрезки к тем задачам, которые он решил. Тогда все отрезки образуют один или несколько замкнутых путей – циклов.

г) В каждом цикле выбор осуществляется двумя способами, а циклов – не более 10.

5-43. Удобнее описать периодическую расстановку офицеров на бесконечной клетчатой плоскости Oxy, разбитой на квадраты 5×5, в каждом из которых повторяется расстановка с нужными свойствами. Офицеров каждого ранга можно расставить вдоль параллельных друг другу наклонных прямых одного направления, скажем, с угловым коэффициентом 1, а каждого рода войск – другого направления, скажем, с угловым коэффициентом 2.

∇ Нужную расстановку можно получить также с помощью конечного поля из остатков от деления на 5 – см. комментарий к 5-20, с. 121.

5-44. а) Возьмем отрезок, поместим три вершины внешней пирамиды очень близко к одному его концу, а четвертую – к другому. Две вершины внутренней пирамиды поместим вблизи одного конца отрезка, а две другие – вблизи другого.

б) Эта задача – обобщение следующей теоремы: периметр выпуклого многоугольника меньше периметра любого содержащего его многоугольника.

5-47. Станции можно расположить в вершинах куба.

5-48. В таком многограннике все ребра одного направления имеют одинаковую длину и для каждой пары направлений существуют ровно две грани с соответствующими направлениями сторон.

5-49. б) Многочлен в пункте а) можно записать как $C_x^1 + C_{x+y+1}^2$ (см. комментарий к 2-16, с. 28).

5-50. Найдите множество значений многочлена $(1-xy)^2 + x^2$.

6-19. См. 6-1 б), с. 134.

6-20. в) Докажите, что если в разложении дроби n/p, $0 < n < p$, в десятичную дробь где-то стоят две одинаковые цифры a, то существует натуральное число m такое, что $m/p = 0,\ aa\ \ldots$, т.е. выполняются неравенства

$$0 < \frac{m}{p} - \frac{11}{100}a < \frac{1}{100}.$$

Задача сводится к такой: нужно выбрать простые p такие, что ни при каком натуральном $a \le 9$ двузначное число, образованное двумя последними цифрами числа $11pa$, не превосходит числа $100 - p$.

6-21. Найдите период.

6-22. Докажите, что если $a_n \ge 163$, то $a_{n+1} < a_n$. Остается исследовать случаи, когда $a_1 \le 162$.

6-23. См. 6-3, с. 135.

6-24. См. 6-2, с. 134–135.

6-25. См. 6-5, с. 136.

6-26. См. с. 149–151. Начертив графики функций $y = 1 - x^2$ и $y = x$, нужно изучить поведение последовательности (x_n), заданной соотношением $x_{n+1} = 1 - x_n^2$ при различных x_1. Ответ в задаче зависит от четности n.

6-27. а) Функция $f(x) = x(1-x)$ возрастает при $0 < x < 1/2$; $f(x) \le 1/4$ при $0 \le x \le 1$ и $f(1/n) < 1/(n+1)$; можно показать, что $x_n < 1/(n+2)$ при $n > 1$.

б) Удобно сделать замену $x_n = \dfrac{1}{2} + h_n$.

6-28. Можно доказать методом математической индукции, что $P_n(x)$ имеет n корней. Учитывая чередование знаков многочлена $P_{n+1}(x)$ в точках, где $P_n(x)$ обращается в 0, можно доказать, что между каждыми двумя корнями $P_n(x)$ лежит корень $P_{n+1}(x)$; кроме того, определив знак $P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)$ при больших по модулю значениях x, можно доказать, что $P_{n+1}(x)$ имеет корень справа от наибольшего из корней $P_n(x)$ и слева от наименьшего его корня.

6-29. а) Путь муравья состоит из отрезков, длины которых составляют две бесконечно убывающие геометрические прогрессии.

6-30. Треугольники, взятые через один, будут подобны друг другу.

6-31. Используйте неравенство $\sin x < x$ при $x > 0$.

6-32. б), в) Можно доказать неравенство $a_n^3 > 3n$ и оценить разность $a_n^3 - 3n$.

6-33. Оба утверждения можно доказать методом математической индукции (см. 6-16, с. 149): если неравенства

$$0 < 2 - a_n < (3/4)^n$$

верны для $n = k$, то они верны и для $n = k + 1$.

6-34. Можно указать $q < 1$ такое, что (начиная с некоторого n) $a_{n+1} < qa_n$.

6-35. б) Рассмотрите тройку чисел вида $k\tau^2$, $k\tau$, k.

6-33. Рассмотрите сумму всех попарных расстояний – она, конечно, не меняется при переселениях.

6-38. Удобно числа между 0 и 1 рассматривать как бесконечные троичные дроби из цифр 0, 1, 2; числа, о которых говорится в пункте в) – те, в троичной записи которых бесконечно много нулей и двоек и нет ни одной единицы.

6-39. в) Для доказательства удобнее использовать другой способ построения ломаной Дракона, чем указанный в условии (конечно, нужно доказать, что он приводит к той же ломаной): на n-м шаге на каждом звене уже построенной ломаной, как на гипотенузе, строится равнобедренный прямоугольный треугольник, причем попеременно – справа и слева (так, что соседние треугольники получаются один из другого поворотом на 90° вокруг общей вершины); катеты построенных треугольников образуют новую ломаную; повернув ее на 45° относительно начальной точки и увеличив подобно в $\sqrt{2}$ раз, можно переходить к $(n+1)$-му шагу. (Подробный рассказ о ломаных Дракона см. в «Кванте» № 2, 1970.)

г) Известное нам доказательство использует гауссовы (целые комплексные) числа; было бы интересно найти простое элементарное решение.

6-40. Нарисуем домики всех гномов на одном листе бумаги в двух экземплярах. На первом экземпляре будем закрашивать домики (по правилам, указанным в задаче) в нечетные годы (1-й, 3-й, 5-й и т.д.), на втором экземпляре – в четные годы. Соединим каждый домик с домиками друзей гнома, который в нем живет, на другом экземпляре. Для полученной схемы (она называется двудольным графом) можно использовать тот же прием, что и в решении 6-7, с. 137.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Диофантовы уравнения

Дирихле принцип

Игры

Инвариант

Комбинаторика

Логика

Периодичность

Планиметрия

Полная математическая индукция

Последовательности и итерации

Построения в пространстве

Построения на плоскости

Простые, составные числа

Развертки пространственных тел

Рекуррентные соотношения

Стереометрия

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Сборники олимпиадных задач

1. *Бабинская И.Л.* Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.

2. *Брудио А.Л., Каплан А.И.* Олимпиады по программированию для школьников.– М.: Наука, 1985.

3. *Васильев Н.Б., Егоров А.А.* Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. – М.: Учпедгиз, 1963.

4. *Васильев Н.Б., Савин А.П.* Избранные задачи математических олимпиад. – М.: Изд-во МГУ, 1968.

5. Венгерские математические олимпиады. – М.: Мир, 1976.

6. Задачи Московских математических олимпиад/Сост. *Гальперин Г.А., Толпыго А.К.* – М.: Просвещение, 1986.

7. Избранные задачи. – М.: Мир, 1977.

8. Интересные задачи для любителей математики. Из старых русских задачников/Под ред. *С.Н.Олехника, М.К.Потапова.* – М.: Наука, 1984.

9. *Морозова Е.А., Петраков* И.С. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1971.

10. Сборник задач московских математических олимпиад/ Сост. *Леман А.А.* – М.: Просвещение, 1965.

11. *Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К.*. Старинные занимательные задачи. – М.: Наука, 1985.

12. Физико-математические олимпиады/Сост. *Брук Ю.М., Савин А.П.* – М.: Знание, 1977.

13. *Штейнгауз Г.* Сто задач. – М.: Наука, 1986.

Статьи «Всесоюзная заочная олимпиада»

14. «Наука и жизнь». – 1968, № 11 (задачи); 1969, №2 (решения);
«Комсомольская правда». – 9 января 1965 г.; 16 октября 1965 г.; 16 декабря 1967 г.;
«Учительская газета».– 16 октября 1965 г.; 22 октября 1966 г.;
«Математика в школе». – 1967, №1.

Книги из серии «Библиотечка физико-математической школы». – М.: Наука

15. *Башмаков М.И.* Уравнения и неравенства. – 1976.

16. *Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л.* Прямые и кривые. – 1978.

17. *Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П.* Математические соревнования (геометрия). – 1974.

18. *Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А.* Метод координат. – 1975.

19. *Кириллов А.А.* Пределы. – 1973.

Книги из серии «Библиотека математического кружка»

20. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии, ч. I, II. – М: Наука, 1986.

21. *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры. – М.: Физматгиз, 1962.

22. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы планиметрии. – М.: Наука, 1967.

23. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). – М.: Гостехиздат, 1954.

24. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.– М.: Наука, 1970.

25. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974.

26. *Яглом И.М.* Геометрические преобразования, ч. I, II.– М.; Л.: Гостехиздат, 1956.

27. *Яглом И.М., Болтянский В.Г.* Выпуклые фигуры.– М.; Л.: Гостехиздат, 1954.

28. *Яглом А.М., Яглом И.М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении. – М.: Гостехиздат, 1954.

Книги из серии «Библиотечка «Квант». – М.: Наука

29. *Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М.* Задачи по математике (алгебра и анализ).– 1982.

30. *Болтянский В.Г., Ефремович В.А.* Наглядная топология. – 1982.

31. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. – 1985.

32. *Данилов И.Д.* Секреты программируемого микрокалькулятора. – 1986.

33. Занимательно о физике и математике/Сост. *Кротов С.С.* и *Савин А.П.*; Под ред. *Л.Г.Асламазова.* – 1986.

34. *Оре О.* Приглашение в теорию чисел. – 1980.

35. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – 1986.

36. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. – 1986.

37. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп.– 1981.

Статьи из журнала «Квант»

38. *Ашманов С.* Числа и многочлены.– 1980, № 2.
39. *Балк М.* Поиск решения. – 1976, № 9.
40. *Балк К, Балк М., Болтянский В.* Метод малых шевелений. – 1979, № 4.
41. *Башмаков М.* Любите ли вы возиться с целыми числами? – 1971, №3.
42. *Беве Л.* Мини-геометрия. – 1976, №6.
43. *Болтянский В.Г.* Шесть зайцев в пяти клетках. – 1977, №2.
44. *Болтянский В.Г.* Метод итераций. – 1983, № 3.
45. *Брудно А.Л.* Вокруг циркуля.– 1974, № 10.
46. *Вагутен В.Н.* Близкие дроби. – 1975, № 7.
47. *Варпаховский Ф.Л., Колмогоров А.Н.* О решении 10-й проблемы Гильберта.– 1970, № 7.
48. *Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л.* Пары чисел и действия с ними. – 1985, № 1.
49. *Вертгейм Б.* Метод неподвижных точек. – 1980, № 6.
50. *Залгаллер В.* Непрерывно изгибаемый многогранник. – 1978, № 9.
51. *Кириллов А.А.* О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма. – 1977. № 7.
52. *Крейн М.Г.* Диофантово уравнение Маркова. – 1985, № 4.
53. *Курдюмов Г.* Консервативность бесконечного строя. – 1979. № 7.
54. *Матиясевич Ю.В.* Формулы для простых чисел. – 1976, № 5.
55. *Милг А.А.* Что сказал проводник. – 1973, № 8.
56. *Нестеренко Ю.В., Никишин Е.М.* Очерк о цепных дробях. – 1983, № 5, 6.
57. *Раббот Ж.М.* Знаете ли вы, что 220 вольт/127 вольт $\approx \sqrt{3}$? – 1978, № 11.
58. *Тоом А.Л.* Из жизни единиц. – 1974, № 9.
59. *Тоом А.Л., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М.* Решения задач из задачника «Кванта». – 1970, № 8.
60. *Фомин С.В.* Разложение на множители. – 1983, № 7.
61. *Фукс Д.Б., Фукс М.Б.* О наилучших приближениях. –1971, № 6, 11.
62. *Яглом И.М.* О хордах непрерывных кривых. – 1977, № 4.

Книги из серии «Популярные лекции по математике». – М.: Наука

63. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. – 1983.
64. *Виленкин Н.Я.* Метод последовательных приближений. – 1968.

65. *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах.– 1983.

66. *Калужнин Л.А.* Основная теорема арифметики. – 1969.

67. *Коровкин П.П.* Введение в неравенства. – 1983.

68. *Костовский А.Н.* Геометрические построения одним циркулем. – 1984.

69. *Маркушевич А.И.* Возвратные последовательности. – 1983.

70. *Смогоржевский А.С.* Линейка в геометрических построениях. – 1957.

71. *Успенский В.А.* Треугольник Паскаля. – 1979.

72. *Шашкин Ю.А.* Эйлерова характеристика. – 1984.

Книги из серии «Занимательная математика». – М.: Мир

73. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. – 1971.

74. *Гарднер М.* Математические досуги. – 1972.

75. *Гарднер М.* Математические новеллы. – 1974.

76. Математический цветник. – 1983.

Учебники, статьи, монографии

77. *Алексеев В.Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: Наука, 1976.

78. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Парадоксы мира нестационарных структур/Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика». – М.: Знание, 1985.

79. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Физматлит, 1974.

80. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир. 1965.

81. *Башмакова И.Г.* Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972.

82. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1985.

83. *Берже М.* Геометрия, ч. I, II. – М.: Мир, 1984.

84. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1970.

85. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979.

86. *Вебер Г., Вельштейн И.* Энциклопедия элементарной математики. Т. 1–3. – Одесса: Матезис, 1906, Гл. II, §101.

87. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. – М.: Физматлит, 1969.

88. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1972.

89. *Гарднер М.* Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1986.

90. *Гильберт Д.* Основания геометрии. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

91. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.

92. *Зыков А.А.* Введение в теорию графов. – М.: Наука.

93. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка. – М.: Наука, 1965.

94. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1–3. – М.: Мир, 1976–1978.

95. *Коксетер Г.С., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.

96. *Кокстер Г.С.* Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.

97. *Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.* Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1960.

98. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика. – М.: Просвещение, 1968.

99. *Люстерник Л.А.* Выпуклые фигуры и многогранники. – М.: Гостехиздат, 1956.

100. *Манин Ю.И.* Вычислимое и невычислимое. – М.: Советское радио, 1980.

101. *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. – М.: Советское радио, 1979.

102. *Маршал А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. – М.: Мир, 1983.

103. *Пойа Д.* Математическое открытие. – М.: Наука, 1970.

104. *Пойа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1978.

105. *Постников М.М.* Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982.

106. Проблемы Гильберта/Сб. под ред. П.С. Александрова. – М.: Наука, 1969.

107. *Розов Н.Х., Глаголева Е.Г., Раббот Ж.М.* Заочная математическая школа при МГУ/Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика».– М.: Знание, 1973.

108. *Рыбников К.А.* Введение в комбинаторный анализ. – Изд-во МГУ, 1985.

109. *Серпинский В.* 250 задач по элементарной теории чисел. – М.: Просвещение, 1968.

110. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отражениями. – УМН, 1970, № 2.

111. *Синай Я.Г.* Случайность неслучайного. – Природа, 1981, № 3,

112. *Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М.* О математической индукции. – М.: Наука, 1967.

113. Странные аттракторы/Серия «Математика. Новое в зарубежной науке», вып. 22. – М.: Мир, 1981.

114. *Тихонов А.Н., Костомаров Д.П.* Рассказы о прикладной математике. – М.: Наука, 1979.

115. *Тоом А., Гутенмахер В., Васильев Н., Раббот Ж.* Задачи устного экзамена по математике. – М.: Изд-во МГУ, 1970.

116. *Тот Л.Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. – М.: Физматгиз, 1958.

117. *Фаддеев Д.К.* Лекции по высшей алгебре. – М.: Наука, 1984.

118. *Хинчин А.Я.* Три жемчужины теории чисел. – М.: Наука, 1979.

119. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978.

120. *Холл М.* Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.

121. *Яглом И.М.* Булева структура и ее модели. – М.: Советское радио, 1980.

122. Живые числа: Сб. ст. 1981. г./Пер. с нем. – М.: Мир, 1985.

Дополнительная литература к третьему изданию

123. *Zandman Felix, Simon Paul-Renй, Szwarc Joseph.* Resistor theory and technology. – Vishay Intertechnology, Inc., 2002.

124. *Матиясевич Ю.* Десятая проблема Гильберта. – М.: Наука, 1993.

125. *Острик В.В., Цфасман М.А.* Алгебраическая геометрия и теория чисел. – М.: МЦНМО, 2001. – (Библиотека «Математическое просвещение»).

126. *Панчишкин А.А.* Локальные и глобальные методы в арифметике. – «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 12, 2008.

127. *Арнольд В.И.* На сколько частей делят плоскость n прямых?– «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 12, 2008.

128. *Шашкин Ю.А.* Эйлерова характеристика. – М.: Наука, 1984.

129. *Fьredi Z.; Palбsti I.* Arrangements of lines with a large number of triangles. – Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 92, Num. 4., Dec. 1984.

130. *Borovik Alexandre V., Gelfand Israel M., White Neil.* Coxeter Matroids (Progress in Mathematics). –Birkhдuser Boston, 2007.

131. *Винберг Э.Б.* Калейдоскопы и группы отражений. – М.: МЦНМО, 2003. – («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 7).

132. *Ионин Ю.И.* Конечные проективные плоскости. – «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 13, 2009.

133. *Ionin Y.J., Shrikhande M.S.* Combinatorics of Symmetric Designs. – Cambridge University Press, 2006.

134. *Gardner M.* Mathematical games. (1983) – Scientific American 249 (2), 8–13.

135. *Akin E., Davis M.* Bulgarian Solitaire. (1985) – American Mathematical Monthly, 4/ 237–260.

136. *Igusa K.* Solution of the Bulgarian solitaire conjectures. (1985) – Math. Mag. 58(5), 259–271.

137. *Bentz H.-J.* Proof of the Bulgarian solitaire conjectures. (1987) – Ars Combin. 23, 151–170.

138. *Притыкин Ю.Л.* Колмогоровская сложность. – «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 13, 2009.

139. *Успенский В.А,, Семенов А.Л., Шень А.* Может ли индивидуальная последовательность нулей и единиц быть случайной? – Успехи математических наук, 1990, 45(1).

140. *Гик Е.Я.* Шахматы и математика. – М.: Наука, 1983. – («Библиотечка Квант», вып.24).

СОДЕРЖАНИЕ

Николай Борисович Васильев, Виктор Львович Гутенмахер, Жозеф Михайлович Раббот, Андрей Леонович Тоом

ЗАОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Библиотечка «Квант$^{+}$». Выпуск 121
Приложение к журналу «Квант$^{+}$» №3/2011

Редактор *А.Ю.Котова*
Обложка *А.Е.Пацхверия*
Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*
Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская
Печать офсетная. Объем 6 печ.л. Тираж 2500 экз.
Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант$^+$»
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvantjournal, phys@kvantjournal

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099 Москва, Шубинский пер., д. 6

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

1. *М.П.Бронштейн.* Атомы и электроны
2. *М.Фарадей.* История свечи
3. *О.Оре.* Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов.* Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов.* Головоломки
7. *П.С.Александров.* Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз.* Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах.* Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов.* Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Смородинский.* Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик.* Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин.* Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой.* Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник.* Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин.* Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова.* Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос.* Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов.* Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович.* Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой.* Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров.* Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик.* Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий.* Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман.* Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович.* Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн.* Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко.* Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский.* Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин.* Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева.* Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин.* Знакомство с полупроводниками

34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Смородинский, Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир

35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение

36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин*. Как превращаются вещества

37. *Г.С.Воронов*. Штурм термоядерной крепости

38. *А.Д.Чернин*. Звезды и физика

39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев*. Удивительная гравитация

40. *С.С.Хилькевич*. Физика вокруг нас

41. *Г.А.Звенигородский*. Первые уроки программирования

42. *Л.В.Тарасов*. Лазеры: действительность и надежды

43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов*. Международные физические олимпиады школьников

44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский*. Математика и спорт

45. *Л.Б.Окунь*, α, β, γ ... Z. элементарное введение в физику элементарных частиц

46. *Я.Е.Гегузин*. Пузыри

47. *Л.С.Марочник*. Свидание с кометой

48. *А.Т.Филиппов*. Многоликий солитон

49. *К.Ю.Богданов*. Физик в гостях у биолога

50. Занимательно о физике и математике

51. *Х.Рачлис*. Физика в ванне

52. *В.М.Липунов*. В мире двойных звезд

53. *И.К.Кикоин*. Рассказы о физике и физиках

54. *Л.С.Понтрягин*. Обобщения чисел

55. *И.Д.Данилов*. Секреты программируемого микрокалькулятора

56. *В.М.Тихомиров*. Рассказы о максимумах и минимумах

57. *А.А.Силин*. Трение и мы

58. *Л.А.Ашкинази*. Вакуум для науки и техники

59. *А.Д.Чернин*. Физика времени

60. Задачи московских физических олимпиад

61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский*. Геометрия масс

62. *Р.Фейнман*. Характер физических законов

63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов*. Удивительная физика

64. *А.Н.Колмогоров*. Математика - наука и профессия

65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Барьеры: от кристалла до интегральной схемы

66. *Р.Фейнман*. КЭД – странная теория света и вещества

67. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов*. Драма идей в познании природы

68. *И.Д.Новиков*. Как взорвалась Вселенная

69. *М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева*. Электричество в живых организмах

70. *А.Л.Стасенко*. Физика полета

71. *А.С.Штейнберг*. Репортаж из мира сплавов

72. *В.Р.Полищук*. Как исследуют вещества

73. *Л.Кэрролл*. Логическая игра

74. *А.Ю.Гросберг*, *А.Р.Хохлов*. Физика в мире полимеров

75. *А.Б.Мигдал*. Квантовая физика для больших и маленьких

76. *В.С.Гетман*. Внуки Солнца

77. *Г.А.Гальперин*, *А.Н.Земляков*. Математические бильярды

78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...

79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона

80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество

81. *А.И.Буздин*, *А.Р.Зильберман*, *С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...

82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?

83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки

84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники

85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса

86. *И.Ш.Слободецкий*, *Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)

87. Физика и...

88. *А.В.Спивак*. Математический праздник

89. *Л.Г.Асламазов*, *И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике

90. *П.Гнэдиг*, *Д.Хоньек*, *К.Райли*. Двести интригующих физических задач

91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета

92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1

93. Математические турниры имени А.П.Савина

94. *В.И.Белотелов*, *А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы

95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2

96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика

97. *А.А.Егоров*, *Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика

98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой

99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе

100. *Н.Б.Васильев*, *А.П.Савин*, *А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные задачи. Математика

101. У истоков моей судьбы...

102. *А.В.Спивак*. Арифметика

103. *Я.А.Смородинский*. Температура (3-е изд.)

104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет

105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки

106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»

107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония

108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп (2-е изд.)

109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2

110. *П.Г.Крюков*. Лазер – новый источник света

111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории

112. *А.П.Пятаков*, *П.П.Григал*. Лаборатория на коленке

113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина

114. *С.В.Коновалихин*. Сборник качественных задач по физике

115. *Е.Я.Гик*. Математика и шахматы

116. *Л.К.Белопухов*. Физика внезапного

117. *Н.Б.Васильев*, *А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1

118. Задачник «Кванта». Физика. Часть 1

119. *Н.Б.Васильев*, *А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2

120. Задачник «Кванта». Физика. Часть 2

Библиотечка КВАНТ+

ВЫПУСК

121