Editorial Tarea 4

Profesor: Andrés Abeliuk
Auxiliares: Daniel Báez
Julieta Coloma
Máximo Flores Valenzuela
Blaz Korecic
Diego Salas

B. Geometríalandia Para este problema tenemos que considerar que para llegar de A hasta B, como las calles son **líneas rectas** solo debemos cruzar cada linea una sola vez.

Luego, ¿Cómo sabemos cuantas líneas hay que cruzar? Las que estén entre Geometrita y la FCGM, esto es dada una recta cualquiera esta será cruzada si Geometrita y la FCGM están en lados distintos de la recta. Por lo que la solución es iterar por cada una de las rectas evaluando si Geometrita y la FCGM están a lados distintos.

¿Cómo evaluamos esto? Recordando el producto cruz entre vectores, podemos tomar un punto de la recta, hacer producto cruz con Geometrita y con FCGM por separado. Si ambos productos cruz nos dan el mismo signo significa que están al mismo lado de la recta, así mismo, si el producto cruz es de distinto signo significa que están a distintos lados de la recta.

C. Rectas estrelladas

Consideremos el caso borde $K = 1$ y una estrella posicionada en $C = (x_0, y_0)$. Sea m un número real. Notemos que cualquier recta de la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ pasa por C, es decir, en este caso hay infinitas rectas que cumplen lo pedido. Se imprime `Infinity`.

Para el caso general de $K > 1$, sabemos que hay N estrellas, y la ecuación de una recta queda completamente definida por dos puntos. Tomemos un punto cualquiera $P = (x, y)$. La cantidad de combinaciones totales que se pueden hacer escogiendo un P y cualquier otro punto entre las $N - 1$ estrellas restantes es:

$$\sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{N(N-1)}{2}$$

Podemos probar todas las combinaciones de rectas posibles y ver cuáles de ellas tienen contenidas una cantidad de estrellas $\geq K$.

Para determinar rápidamente cuántas estrellas hay en una recta, generalicemos la situación. Sean $P = (x_P, y_P)$ y $Q = (x_Q, y_Q)$ dos puntos donde hay estrellas, y son tales que:

$$x_P \neq x_Q \vee y_P \neq y_Q$$

Podemos construir con la ecuación punto pendiente la recta que pasa por P y Q:

$$L : y - y_P = m(x - x_P)$$

Notemos que la pendiente es $m = (y_P - y_Q)/(x_P - x_Q)$. Ahora bien, queremos verificar si $R = (x_R, y_R)$ está en la recta L. Basta ver que cumple la ecuación. Esto es, tomando $(x, y) = (x_R, y_R)$ se debe cumplir:

$$\begin{aligned} y_R - y_P &= \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}(x_R - x_P) \\ \iff \quad (y_R - y_P)(x_P - x_Q) &= (y_P - y_Q)(x_R - x_P) \end{aligned}$$

Con la condición de la última ecuación podemos revisar en $\mathcal{O}(1)$ si una estrella pertenece o no a una recta. Como hay N estrellas, cada revisión tomará $\mathcal{O}(N)$ en el peor de los casos. Dado que iteraremos sobre las $N(N-1)/2 \sim N^2$ rectas, la complejidad total es $\mathcal{O}(N^3)$, pero como $N_{\text{máx}} = 300$, la solución pasa.

Observación: Es importante llevar registro de las rectas que se han revisado para no contarlas más de una vez. Esto se puede hacer de varias maneras, la más simple es con un `vector` (llamémosle `vec`, de 2 dimensiones) que haga lo siguiente:

- Asocie a cada punto (x_i, y_i), $i \in \{0, \dots, N-1\}$ un índice i que lo represente.
- Teniendo dos puntos $P_i = (x_i, y_i)$ y $P_j = (x_j, y_j)$, guarde en `vec[i][j]` la información acerca de si la recta que contiene a P_i y P_j fue visitada.
- Representando las rectas como $ax + by + c = 0$ no tendremos que preocuparnos por el caso $m = \infty$ (recta vertical).

D. Sapo no quiere nadar

Definamos el conjunto P como la unión de todos los puntos del enunciado: $P = C \cup \{S\} \cup \{T\}$.

Fijémonos en el convex hull de P. Como C es convexo y S con T no están en su interior, al menos uno de ellos será parte del convex hull. Pongámonos en casos:

- **Solo uno entre S y T está en el convex hull:** Esto significa que C no bloquea el camino directo entre S y T, así que la respuesta es solo la distancia euclideana entre S y T.
- **Ambos S y T están en el convex hull:** Notemos que tenemos dos opciones para movernos desde S hasta T, el sentido horario y antihorario. Nuestra respuesta será uno de estos dos caminos, así que escogemos el mínimo.

  Estos caminos son los mejores, pues se van por el perímetro de C.